

MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING
Masterthesis

Tragverhalten von Stahlbetontragwerken

Modellvorstellungen zur nichtlinearen Verformungsberechnung

Pascal Gitz

Horw, Donnerstag, 30. Januar 2025 *

Advisor: Prof. FH, Dr. Daniel Heinzmann
Experte: Dr. Thomas Jäger

Master-Thesis an der Hochschule Luzern - Technik & Architektur

Titel	Tragverhalten von Stahlbetontragwerken – Modellvorstellungen zur nichtlinearen Verformungsberechnung
--------------	---

Diplomandin/Diplomand Gitz, Pascal

Master-Studiengang Master in Engineering

Semester HS24

Dozentin/Dozent **Heinzmann, Daniel**

Expertin/Experte	Jäger, Thomas
-------------------------	----------------------

Ort, Datum Horw, 17.01.2025
© **Pascal Gitz, Hochschule Luzern – Technik & Architektur**

Abstract Deutsch (max. 1000 Zeichen)

Die Masterthesis untersucht das nichtlineare Tragverhalten von Stahlbetontragwerken und entwickelt eine praxisorientierte Methode zur präzisen Verformungsberechnung. Ziel ist es, das Tragverhalten mithilfe der Statiksoftware AxisVM zu modellieren. Der Fokus liegt auf dem Biegetragverhalten, das für Balken- und Plattentragwerke analysiert wird.

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile: Im ersten Teil wird die Modellbildung beschrieben, die diese allgemein und abschliessend beschreibt. Der zweite Teil zeigt die Anwendung an Beispielen, darunter ein Zweifeldträger, ein torsionsweicher Trägerrost, eine Quadratplatte sowie die Nachrechnung eines Plattenexperiments. Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung zwischen analytischen, numerischen und experimentellen Ansätzen.

Die Thesis schliesst mit einer kritischen Würdigung der Methode und einem Ausblick auf die Potenziale zur Materialeinsparung, insbesondere im Hinblick auf Nachhaltigkeit.

Abstract English (max. 1000 Zeichen)

The master's thesis investigates the non-linear load-bearing behaviour of reinforced concrete structures and develops a practice-oriented method for precise deformation calculation. The aim is to model the load-bearing behaviour using the structural analysis software AxisVM. The focus is on the bending load-bearing behaviour, which is analysed for beam and slab structures.

The work is divided into two parts: The first part describes the modelling, describing it in general and conclusively. The second part shows the application using examples, including a two-span beam, a torsionally soft beam grid, a square plate and the recalculation of a plate experiment. The results show a good agreement between analytical, numerical and experimental approaches.

The thesis concludes with a critical appraisal of the method and an outlook on the potential for material savings, particularly with regard to sustainability.

Kurzfassung

Die Masterthesis untersucht das nichtlineare Tragverhalten von Stahlbetontragwerken und entwickelt eine Methode zur präzisen Verformungsberechnung mit der Statiksoftware AxisVM. Der Fokus liegt dabei auf dem Biegetragverhalten von Balken- und Plattentragwerken.

Im ersten Hauptteil wird die Modellbildung detailliert beschrieben. Ein einführendes Beispiel illustriert die Grundlagen. Ein einfacher Balken wird mit starren Stäben modelliert, die durch Drehfedern verbunden sind. Den Drehfedern können nichtlineare Beziehungen zugewiesen werden, um das nichtlineare Tragverhalten abzubilden. Anschliessend wird ein Berechnungsschema vorgestellt, das die Modellbildung in zwei Schritte unterteilt, die System- und Querschnittsmodellbildung. Die Systemmodellbildung umfasst die Anordnung der starren Stäbe, die Positionierung der Federn sowie sind die relevanten Resultatgrössen beschrieben. Die Querschnittsmodellbildung wird für Balken und Plattentragwerke separat beschrieben. Dabei werden in dieser die Bestimmung der nichtlinearen Biegesteifigkeit, die Transformation in eine Federbeziehung und ein Abbruchkriterium zur Definition des Versagens festgelegt.

Im zweiten Hauptteil wird die Anwendung der entwickelten Modelle anhand von vier Beispielen demonstriert: einem Zweifeldträger, einem torsionsweichen Trägerrost, einer Quadratplatte und der Nachrechnung eines Plattenexperiments. Die numerischen und analytischen Ergebnisse stimmen gut überein. Besonders die Nachrechnung des Plattenexperiments zeigt die zufriedenstellende Genauigkeit des Modells im Vergleich zu experimentellen Daten und einer Lösung mit der Software ANSYS.

Die Arbeit liefert eine fundierte Grundlage für die präzise Berechnung des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlbetontragwerken. Sie zeigt, wie existierende Softwarelösungen effizient eingesetzt werden können, um komplexe technische Fragestellungen zu lösen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	12
I. Modellbildung	13
2. Allgemeines	15
2.1. Einführendes Beispiel	15
2.2. Berechnungsschema	17
2.3. Systemmodellbildung	18
3. Balken	22
3.1. Querschnittsmodellbildung	22
4. Platten	30
4.1. Kirchhoffsche Plattentheorie	30
4.2. Transformation zum Trägerrost	36
4.3. Querschnittsmodellbildung	40
II. Anwendung	46
5. Zweifeldträger	48
5.1. Aufgabenbeschrieb	48
5.2. Analytische Lösung	49
5.3. NLFE-Modell	67
6. Torsionsweicher Trägerrost	74
6.1. Aufgabenbeschrieb	74
6.2. Analytische Lösung	75
6.3. NLFE-Modell	76
7. Quadratplatte	82
7.1. Aufgabenbeschrieb	82
7.2. Analytische Lösung	83
7.3. NLFE-Modell	85
8. Versuchsnachrechnung Zweifeldplatte	92
8.1. Versuchsbeschrieb	92
8.2. NLFE-Modell	96
9. Fazit	112
9.1. Zusammenfassung	112
9.2. Schlussfolgerung	113

9.3. Ausblick	113
Bezeichnungen	116
Literatur	119

Abbildungsverzeichnis

2.1.	Elastische Biegelinie des einfachen Balkens mit konstanter Streckenlast . . .	15
2.2.	Adaptierter einfacher Balken, modelliert mit starren Stäben gekoppelt mit elastischen Drehfedern	15
2.3.	Biegelinie des adaptierten einfachen Balkens	16
2.4.	Adaptierter einfacher Balken, modelliert mit starren Stäben gekoppelt mit nichtlinearen Drehfedern	16
2.5.	Biegelinie des adaptieren, einfachen Balkens mit nichtlinearen Drehfedern, ergänzt mit elastischer Biegelinie	16
2.6.	Anordnung des adaptieren Balkens zum Trägerrost	17
2.7.	Modellierungsschema des NLFE-Modells	18
2.8.	Definition der Einzugslänge der Feder	19
2.9.	Definition der Federbeziehungen, a) Verdrehungsbeziehung b) Verschiebungsbeziehung	20
2.10.	Modellierungsstrategie der Stabanfang- und Endgelenke, a) mit nur Stabanfangsgelenken, b) mit Doppelgelenken	20
2.11.	Relative Gelenkrotation am verformten System	21
3.1.	a) Schnittgrößen und b) elementare Verformungen des Balkens	22
3.2.	Zugversteifung, a) Stahlbetonzugglied, b) Verlauf der Verbundschubspannungen, Betonstahlspannungen, Betonspannungen, Betonstahldehnungen, Betondehnungen und Schlupf, neu gezeichnet nach Kaufmann (1998)	23
3.3.	Idealisierte abgetreppte Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung . . .	24
3.4.	Zugglied in einem biegebeanspruchten Stahlbetonelement	24
3.5.	Ungerissener Querschnitt, Beton erreicht Zugfestigkeit, Betonstahlspannung ist vernachlässigt	26
3.6.	Gerissener Querschnitt, Beton weist elastisches Verhalten auf	26
3.7.	a) Querschnitt bei steigender Biegekrümmung mit b) Momenten-Krümmungs-Diagramm für linear-elastische ideal-plastische Werkstoffbeziehungen, sowie der Berücksichtigung der Zugversteifung	27
3.8.	Verhalten des Stabgelenks, Integration der konstanten Krümmungen entlang der Einzugslänge	28
3.9.	Modellbildung eines plastischen Biegegelenks, nachgezeichnet nach Kaufmann (2017)	28
3.10.	Systemmodell mit Stabanfang- und Endgelenken, dazu die plastische Gelenklänge und Elementlänge eingezeichnet	29
4.1.	Ein Plattenelement mit signifikant kleinerer Dicke h als die charakterisierende Abmessung l	30
4.2.	Element einer infinit kleinen, dünnen Platte im verformten und unverformten Zustand gemäss der Annahmen nach der Kirchhoffschen Plattentheorie, nachgezeichnet nach Mittelstedt (2022)	31

4.3. Definition der infinitesimalen Dehnungen in der Draufsicht des Volumen- körpers, nachgezeichnet nach Mittelstedt (2022)	32
4.4. Definition der infinitesimalen Schiebung in der Draufsicht des Volumen- körpers, nachgezeichnet nach Mittelstedt (2022)	33
4.5. Überhöhtes Plattenelement mit eingezeichneten Normal- und Schubspan- nungen, nachgezeichnet nach Heinzmann (2012)	34
4.6. Überhöhtes Plattenelement mit eingezeichneten Schnittgrößen, nachge- zeichnet nach Heinzmann (2012)	35
4.7. Ersatz des Plattenelements mit dem Stabkreuz	36
4.8. Wechselbeziehung zwischen Platte, Trägerrost und Balken	37
4.9. Detaildarstellung des Einflusses der Querdehnung am Plattenelement . . .	37
4.10. Illustration der Beziehung zwischen Biegemomente und Krümmungen. a) ohne Querdehnung, b) mit Querdehnung, nach Blaauwendraad (2010) . .	38
4.11. Schubfluss des schmalen Balkens und Plattenelements, nach Blaauwen- draad (2010)	39
4.12. Beziehung der Drill- und Torsionssteifigkeit zwischen Plattenelement, Trä- gerrost und Balken	40
4.13. Definition der Querschnittsbreite des einzelnen Stabs des Trägerrosts . . .	41
4.14. Klassisches Sandwichmodell bestehend aus zwei Sandwichdeckeln und dem Kern. Die Aufteilung der Plattenschnittkräfte in Membran- und Querkkräfte ist aufgezeigt	42
4.15. Aufteilung der Drillmomente auf die Sandwichdeckel	42
4.16. a) Scheibe unter reinem Schub, b) Scheibe im Verzerrungszustand	43
4.17. Definition der Sandwichdeckelstärke	43
4.18. Ansicht des Sandwichmodells, resultierende Verzerrungsebene durch die Schiebung des oberen und unteren Deckels	44
4.19. a) Verhalten des Schubmoduls, b) Verhalten der Schubspannung zur Schiebung des klassischen Druckfeldmodells, entnommen aus Heinz- mann (2012), ergänzt mit der Vereinfachung	45
5.1. Statisches System des Zweifeldträgers	48
5.2. Querschnitt des Zweifeldträgers	48
5.3. Spannungs-Dehnungs-Diagramm a) des Betonstahls B500A, b) des Beton- stahls B500C	49
5.4. Mechanismus des Zweifeldträgers mit eingezeichnetem Verdrehungswinkel	50
5.5. Gerissener Querschnitt, Beton ist völlig elastisch, Bewehrung erreicht ma- ximal die Fließspannung	53
5.6. Querschnitt beim Versagen, Stahl erreicht Zugfestigkeit, Beton ist völlig plastifiziert	54
5.7. a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands A1	55
5.8. a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands A2	56
5.9. Statisches System mit Biegemomenteneinwirkung beim Mittelauger, so- wie entsprechende Zustandslinien der Biegemomente	57
5.10. a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands C1	60
5.11. a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands C2	61

5.12. a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands <i>SC2</i>	63
5.13. a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands <i>SC3</i>	65
5.14. Annahme der Lage des plastischen Gelenks im Feld	66
5.15. Systemmodell des Zweifeldträgers	67
5.16. Detailansicht des Systemmodells	67
5.17. a) Momenten-Krümmungs-Diagramm, b) Momenten-Verdrehungs-Diagramm des kaltverformten Betonstahls B500A	68
5.18. a) Momenten-Krümmungs-Diagramm, b) Momenten-Verdrehungs-Diagramm des naturharten Betonstahls B500C	69
5.19. Last-Feldmittendurchbiegungs-Diagramm des Systems mit dem kaltverformten Betonstahl. Die analytische und numerische Lösung ist dargestellt. Zudem sind die aussagekräftigen Lastparameter markiert	70
5.20. Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.462	70
5.21. Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.504	70
5.22. Relative Gelenkrotation des Lastparameters 0.504	71
5.23. Last-Feldmittendurchbiegungs-Diagramm des Systems mit dem naturharten Betonstahl. Die analytische und numerische Lösung ist dargestellt. Zudem sind die aussagekräftigen Lastparameter markiert	71
5.24. Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.433	72
5.25. Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.597	72
5.26. Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.619	72
5.27. Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.634	72
5.28. Relative Gelenkrotationen des Lastparameters 0.634	73
6.1. Grundriss des torsionsweichen Trägerrosts, nachgezeichnet nach Marti (2014)	74
6.2. Schnitt des torsionsweichen Trägerrosts mit dem angenommenen Mechanismus für den Innen- und Aussenträger, nachgezeichnet nach Marti (2014)	75
6.3. Plastizitätskontrolle anhand der Zustandslinien der Biegemomente des Stabausschnitts	76
6.4. Systemmodell des torsionsweichen Trägerrosts	77
6.5. Detailansicht des Trägerrosts mit Gelenken und vermasster Elementlänge	77
6.6. Ideal-plastisches, a) Momenten-Krümmungs-Diagramm, b) Momenten-Verdrehungs-Diagramm	78
6.7. Schematisches Last-Verformungs-Diagramm des Systems. Die auffallenden Steifigkeitsänderungen im System sind mit den entsprechenden Lastparametern markiert	78
6.8. Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.477	79
6.9. Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.747	80
6.10. Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.779	80
6.11. Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.833	81
7.1. Quadratplatte mit gleichmässiger Flächenlast. Die Lagerungsbedingung und die Abmessung sind dargestellt.	82

7.2.	Fliessfigur der Fliessgelenklinienmethode im m_x, m_y, m_{xy} -Raum	83
7.3.	Fliessgelenklinien einer einfach gelagerten Rechteckplatte, neu gezeichnet nach Marti (2014)	84
7.4.	Fliessgelenklinien der einfach gelagerten Quadratplatte	85
7.5.	Systemmodell des Trägerrosts als Ersatzsystem der Quadratplatte. Die Einzellasten und Elementlänge sind dargestellt	86
7.6.	Ideal-plastisches a) Momenten-Krümmungs-Diagramm, b) Momenten-Verdrehungs-Diagramm	87
7.7.	Fliessfigur des Trägerrosts im m_x, m_y, m_{xy} -Raum	88
7.8.	Qualitatives Last-Verformungs-Diagramm des Systems mit beschrifteten Lastparametern	88
7.9.	Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.400	89
7.10.	Qualitative Zustandslinien der Torsionsmomente des Systems beim Lastparameter 0.400	89
7.11.	Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.500	90
7.12.	Qualitative Zustandslinien der Torsionsmomente des Systems beim Lastparameter 0.500	90
8.1.	Isometrische Ansicht des Versuchsaufbaus, dargestellt sind die Platte, die Lagerung, die Krafteinleitung mittels den Zugstangen, ein Ringbalken unterhalb der Lagerung und Mauerwerkswände als Auflager der Ringbalken	92
8.2.	Grundriss und Längsansicht, Lasteinleitung, Lagerposition und die Plattenabmessungen sind vermasst	93
8.3.	Position der Wegaufnehmer, vermasst auf Lagerachsen	94
8.4.	Biegebewehrung der Platte	95
8.5.	Kraft-Verformungs-Diagramm an der Stelle V10, entnommen aus dem Versuchsbericht Thoma und Niederberger (2010)	96
8.6.	Systemmodell des Trägerrosts, als Ersatzsystem der Zweifeldplatte, mit Einzellasten und Auflagern. Die Teilung des Rosts ist schematisch.	97
8.7.	Spannungs-Dehnungs-Diagramm a) des Betons b) des Betonstahls B500B mit grau hinterlegten Versuchsdaten	98
8.8.	Querschnitt beim Versagen, der Beton ist vollständig plastifiziert	99
8.9.	a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds	100
8.10.	a) Biegemomenten-Krümmungs-Diagramm, b) Biegemomenten-Verdrehungs-Diagramm des Ersatzstabs im Trägerrost	101
8.11.	a) Torsions-Verdrillungs-Diagramm, b) Torsions-Verdrehungs-Diagramm des Ersatzstabs im Trägerrost	103
8.12.	Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle V10 des Trägerrosts, ergänzt mit den Messdaten. Zudem sind aussagekräftige Lastparameter markiert.	104
8.13.	Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Trägerrosts beim Lastparameter 0.101	105
8.14.	Qualitative Zustandslinien der Verformung des Trägerrosts beim Lastparameter 0.101. Verformung an der Stelle V10 beschriftet	106
8.15.	Qualitative Zustandslinien der Torsionsmomente des Trägerrosts beim Lastparameter 0.300	106
8.16.	Qualitative Zustandslinien der Verformung des Trägerrosts beim Lastparameter 0.300. Verformung an der Stelle V10 beschriftet	107

8.17. Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.366	107
8.18. Qualitative Zustandslinien der Verformung des Trägerrosts beim Lastparameter 0.366. Verformung an der Stelle <i>V10</i> beschriftet	108
8.19. Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Trägerrosts beim Lastparameter 0.568	108
8.20. Qualitative Zustandslinien der Verformung des Trägerrosts beim Lastparameter 0.568. Verformung an der Stelle <i>V10</i> beschriftet	109
8.21. Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Trägerrosts beim Lastparameter 0.633	109
8.22. Qualitative Zustandslinien der Verformung des Trägerrosts beim Lastparameter 0.633. Verformung an der Stelle <i>V10</i> beschriftet	110
8.23. Relative Gelenkrotationen beim Mittelaufleger beim Lastparameter 0.633 .	110
8.24. Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle <i>V10</i> des Trägerrosts, ergänzt mit der Nachrechnung mit Ansys CMM-Usermat, entnommen aus der Publikation Thoma u. a. (2014)	111
9.1. Qualitative Zustandslinien der Querkräfte der Quadratplatte beim Lastparameter 0.500	114
9.2. Qualitative Zustandslinien der Hauptrichtung der Querkräfte der Quadratplatte beim Lastparameter 0.500	115

1. Einleitung

Bereits 1935 wurden in der damaligen SIA-Norm 112 Anforderungen an die Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen definiert. Seitdem hat sich die Gebrauchstauglichkeit, insbesondere die Verformung von Tragwerken, zu einer zentralen Grösse im Bemessungsablauf entwickelt. Trotz dieser essenziellen Rolle werden Verformungen im Stahlbetonbau in der heutigen Baupraxis jedoch häufig nur durch vereinfachte Abschätzungen bewertet.

Solche vereinfachten Ansätze bergen erhebliche Nachteile. Sie können dazu führen, dass potenzielle Optimierungen übersehen werden, was sich direkt auf den Materialverbrauch auswirkt. Ein unnötig erhöhter Materialverbrauch beeinflusst nicht nur die Wirtschaftlichkeit des Tragwerks negativ, sondern belastet auch dessen Ökobilanz.

Im Gegensatz dazu hat sich in der Forschung die Nutzung nichtlinearer Finite-Elemente-Methoden (NLFEM) als präzises und effektives Werkzeug zur Verformungsberechnung etabliert. Programme wie ANSYS, gezeigt von Thoma (2018), Abaqus oder ATENA bieten hohe Genauigkeit und Flexibilität. Diese Werkzeuge stossen in der praktischen Anwendung jedoch auf zahlreiche Hindernisse: Die Lizenzkosten sind hoch, die Bestimmung der Vielzahl an Eingabeparametern erfordert vertieftes Fachwissen und Aufwand, und die Ergebnisse sind oft schwer zu interpretieren. Darüber hinaus erlauben die benutzerfreundlichen Eingabemasken dieser Softwares eine rasche Modellierung komplexer Probleme ohne Verständnis der Hintergründe. Dies führt oft zu unzureichend begründeten Aussagen.

Die vorliegende Arbeit hat das Ziel, eine praxisorientierte Methode zur präzisen Berechnung von Verformungen in Stahlbetontragwerken zu entwickeln. Dazu soll eine Modellbildung erarbeitet werden, welche es ermöglicht, das nichtlineare Tragverhalten mit der Statiksoftware AxisVM, Ingware (2024), zu bestimmen.

Die gesamte Arbeit beschränkt sich auf das Biegetragverhalten von Platten- und Balkentragwerken. Gegliedert ist die Thesis in zwei Hauptkapitel. Das erste Kapitel ist die Modellbildung, welche sämtliche Grundlagen erläutert. Es sind die Modellbausteine des NLFEM-Modells aufgezeigt. Zudem ist die Ermittlung der nichtlinearen Biegesteifigkeit für Balken und Platten aufgezeigt.

Das zweite Kapitel zeigt die Anwendung der Modellbildung. Dazu sind Vorlesungsbeispiele, wie der Zweifeldträger, ein torsionsweicher Trägerrost und eine Quadratplatte mit dem NLFEM-Modell nachgerechnet und mit deren analytischen Lösung verglichen. Abschliessend ist die Anwendung des Modells an einem experimentellen Versuch, einer Zweifeldplatte, aufgezeigt. Ein Fazit über die Modellbildung und die Anwendung schliesst die Thesis ab.

Teil I.

Modellbildung

Der erste Teil der Arbeit befasst sich mit der Modellbildung. Die Modellbildung ist in sich abschliessend beschrieben und soll dem Leser sämtliche Informationen liefern zur Anwendung an beliebigen Stahlbetonbalken- oder Plattendragwerken.

Gegliedert ist der Teil in ein allgemeines Kapitel, gefolgt von der Modellbildung der Balken und der Modellbildung der Platten.

2. Allgemeines

Das allgemeine Kapitel soll die Modellbildung in groben Zügen beschreiben. Dazu dienen ein einführendes Beispiel, ein allgemein gültiges Berechnungsschema und die Systemmodellbildung. Die hier beschriebenen Aspekte sind gültig für Platten- und Balkentragwerke.

2.1. Einführendes Beispiel

Das einführende Beispiel liefert einen Überblick über die Modellbildung. Dazu ist das Modellverhalten an einem einfachen Balken aufgezeigt. Die Grundlage bildet die Abbildung 2.1, welche den einfachen Balken mit einer konstanten Streckenlast zeigt. Dazu ist die elastische Biegelinie eingezeichnet.

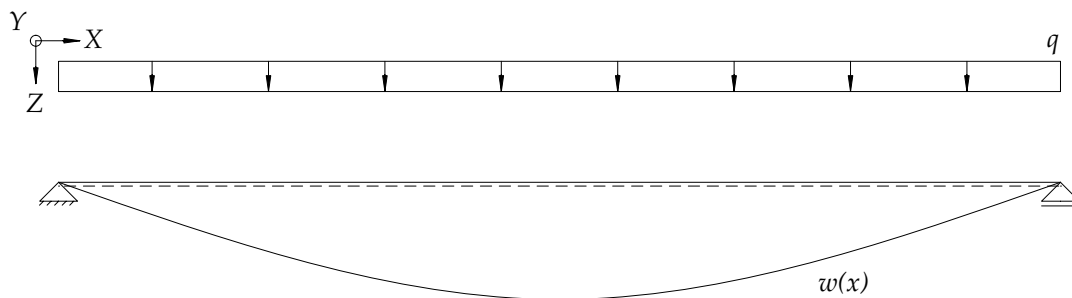


Abbildung 2.1.: Elastische Biegelinie des einfachen Balkens mit konstanter Streckenlast

Unterteilt man nun den Balken in einzelne starre Stäbe und koppelt deren Enden mit Drehfedern, welche eine lineare Abhängigkeit zwischen Biegemoment und Federverdrehung aufweisen, so lässt sich eine näherungsweise gleiche elastische Biegelinie bestimmen. Das adaptierte System zeigt die Abbildung 2.2.

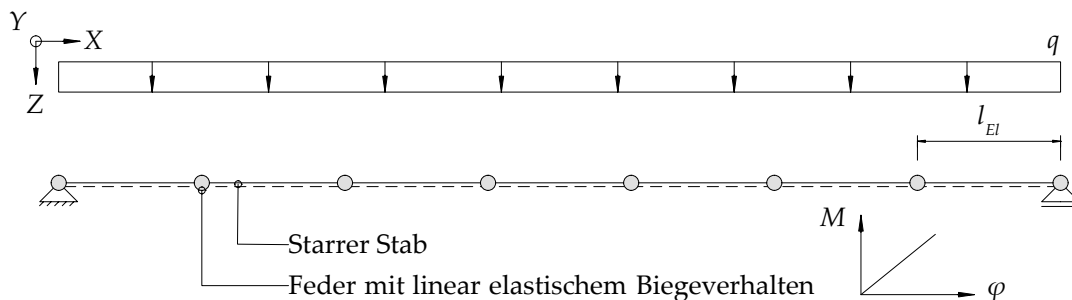


Abbildung 2.2.: Adaptierter einfacher Balken, modelliert mit starren Stäben gekoppelt mit elastischen Drehfedern

Die Biegelinie des angepassten Systems zeigt die Abbildung 2.3. Dabei erfahren die starren Stäbe eine Starrkörperrotation. Vergleicht man die Biegelinien beider Systeme, so sind diese annähernd deckungsgleich.

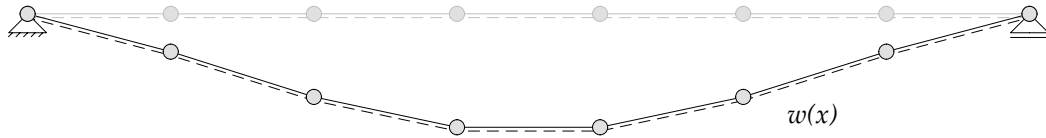


Abbildung 2.3.: Biegelinie des adaptierten einfachen Balkens

Das adaptierte System mit der linear-elastischen Momenten-Verdrehungs-Beziehung weist offensichtlich keinen Mehrwert zu einer Modellierung mit einem einzelnen Stab auf. Der Vorteil dieses Ansatzes liegt darin, dass den Federn, anstelle der elastischen Beziehung, auch nichtlineare Federbeziehungen hinterlegt werden können. Dadurch können nichtlineare Biegelinien approximiert werden. Die Erweiterung des Modells ist schematisch in der Abbildung 2.4 illustriert.

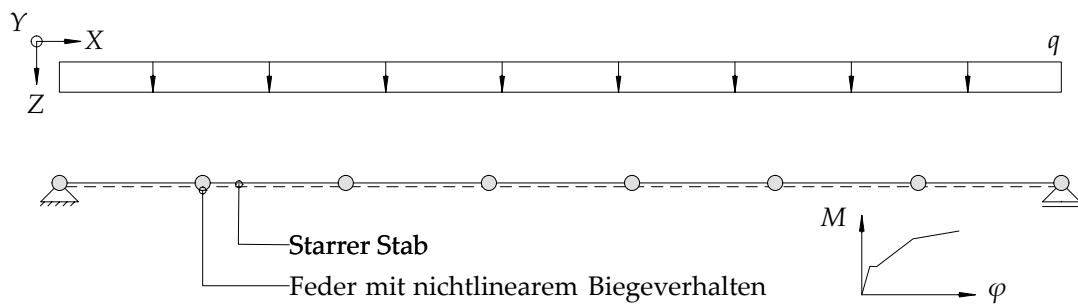


Abbildung 2.4.: Adaptierter einfacher Balken, modelliert mit starren Stäben gekoppelt mit nichtlinearen Drehfedern

Mit dem System mit nichtlinearen Federbeziehungen resultiert der qualitative Verlauf der Biegelinie gemäss der Abbildung 2.5. Es ist hervorzuheben, dass sämtlichen Federn dieselbe Federbeziehung hinterlegt ist. Die Federsteifigkeit ist abhängig von der Biegebeanspruchung. Dies zeigt sich in der Darstellung, da sich das System in den Randbereichen steifer verhält als in der Feldmitte. Beziehungsweise ist das System bei niedrigeren Biegemomenten steifer.

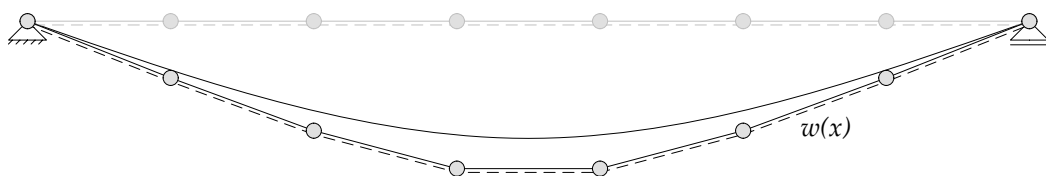


Abbildung 2.5.: Biegelinie des adaptierten einfachen Balkens mit nichtlinearen Drehfedern, ergänzt mit elastischer Biegelinie

Stellt man sich den adaptierten Balken im dreidimensionalen Raum vor, und ordnet diesen als Trägerrost an, so ist es naheliegend, dass dieses System das nichtlineare Tragverhalten von Flächentragwerken bestimmen kann. Eine solche Anordnung zeigt die Abbildung 2.6.

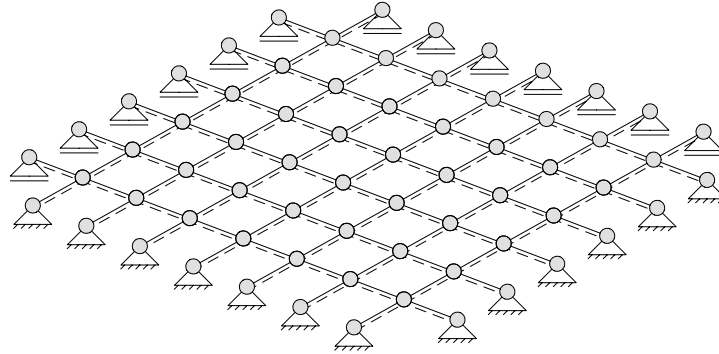


Abbildung 2.6.: Anordnung des adaptierten Balkens zum Trägerrost

Das einführende Beispiel zeigt auf, dass die adaptierte Modellvorstellung die Bestimmung des nichtlinearen Tragverhalten von Stab- und Flächentragwerken ermöglicht. Die Schwierigkeit liegt in der Bestimmung der passenden Federbeziehungen. Zudem erhöht sich die Komplexität des Modells im Vergleich mit einer linear-elastischen Lösung deutlich, was die Anwendung einer Finiten-Elemente Software praktisch unabdingbar macht.

2.2. Berechnungsschema

Die Modellbildung des NLFE-Modells kann mit dem Ablaufschema, gemäss der Abbildung 2.7, verallgemeinert werden. Grundsätzlich ist das Schema softwareunabhängig. Die angewendete FE-Software muss lediglich in der Lage sein, nichtlineare Federsteifigkeiten zu berücksichtigen.

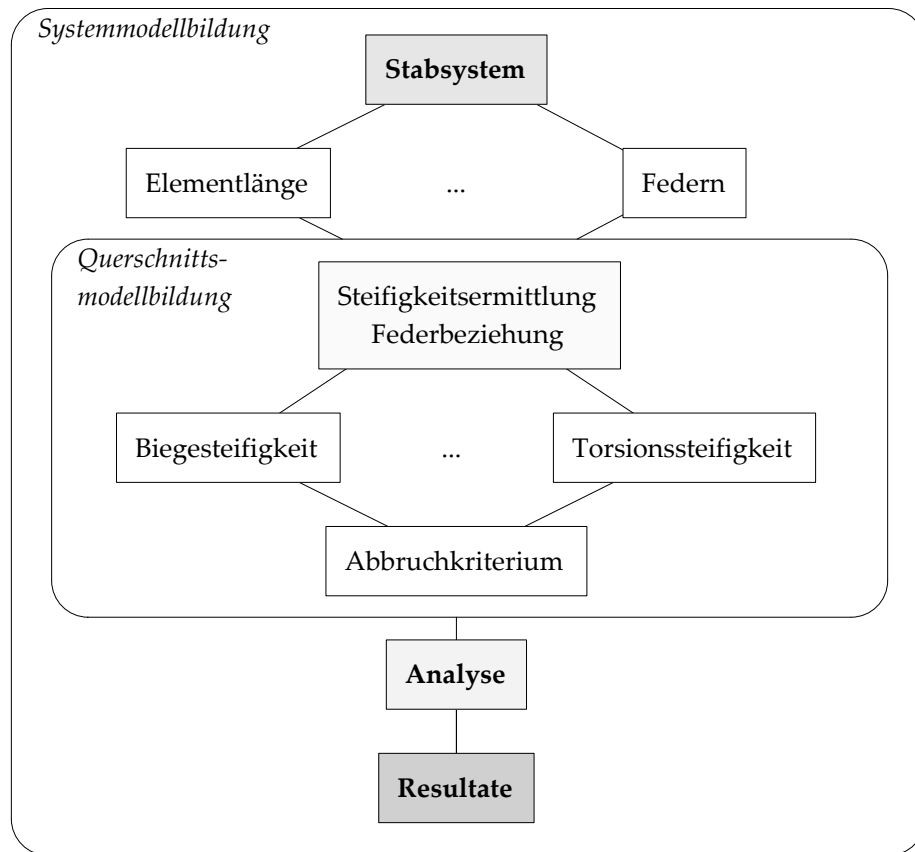


Abbildung 2.7.: Modellierungsschema des NLFE-Modells

Das Modellierungsschema unterteilt die Modellbildung in zwei Hauptgruppen. Die Systemmodellbildung beschreibt das gesamte Modell. Dazu gehören die Elementlänge, die Anordnung der Federn, die Federbeziehung und die abschliessende Analyse mit den daraus folgenden Resultaten. Die Querschnittsmodellbildung als zweite Hauptgruppe befindet sich innerhalb der Systemmodellbildung und befasst sich detailliert mit der Ermittlung der Federbeziehung. Dazu gehört die Steifigkeitsermittlung, sowie das Abbruchkriterium.

2.3. Systemmodellbildung

Die Systemmodellbildung ist mit dem einführenden Beispiel in ihren Grundzügen aufgezeigt. Der folgende Abschnitt beschreibt die Einzelheiten der Elementlänge, der Federn und der Resultaten. Der Beschrieb der Resultate beschränkt sich auf die wesentlichen Resultatgrössen. Die Querschnittsmodellbildung ist nicht beschrieben. Diese ist in den folgenden Kapiteln für Balken und Platten gesondert aufgezeigt.

2.3.1. Elementlänge

Die Elementlänge definiert die Länge der starren Stäbe, gemessen von Feder zu Feder. Dargestellt ist die Elementlänge in der Abbildung 2.2, und bezeichnet ist diese mit l_{El} .

Dabei stellt sich die zentrale Frage, wie gross die Elementlänge zu wählen ist. Aus der Abbildung 2.3 lässt sich schliessen, dass durch eine Minimierung der Elementlänge sich das Biegeverhalten des Systems der elastischen Biegelinie des einfachen Balkens annähert. Somit gilt:

- Eine feinere Elementlänge reduziert den Näherungsfehler.
- Berücksichtigt man die Berechnungsdauer des Systems, so ist die Elementlänge so gross wie möglich, so klein wie nötig zu wählen.

Eine solche Feststellung ist jedoch von kleinem praktischem Nutzen. Umsetzbar ist hingegen eine Sensitivitätsanalyse der Elementlänge. Dazu ist das Modell mit einer Variation der Elementlänge zu berechnen, um den Einfluss dieser zu quantifizieren. Ändern sich die Resultate mit der Verfeinerung der Elemente nicht aussagekräftig, so ist die passende Länge gefunden.

Die Wahl der Elementlänge ist bei der Definition des Abbruchkriteriums in der Querschnittsmodellbildung erneut aufgegriffen.

2.3.2. Feder

Die Feder verbindet die starren Stäbe, aufgezeigt in der Abbildung 2.2. Die Feder ist verantwortlich für das Systemverhalten innerhalb der Einzugslänge. Die Einzugslänge l_{Ein} ist definiert durch die Hälfte des Abstands zur nächsten Feder und ist in der Abbildung 2.8 dargestellt.

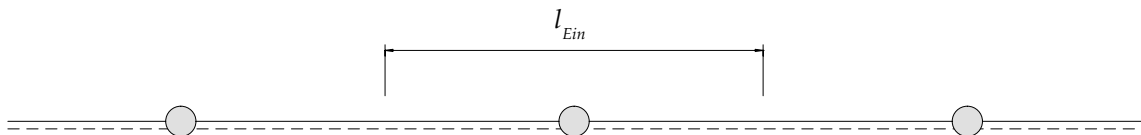


Abbildung 2.8.: Definition der Einzugslänge der Feder

Generell lassen sich den Federn entsprechend den Knotenfreiheitsgraden Beziehungen hinterlegen. Im Raum entspricht dies sechs unterschiedlichen Beziehungen. Dabei gilt die Definition 2.1. Zudem zeigt dies, dass die Feder fähig ist, nichtlineares Querkraft-, Normalkraft-, Torsions- und biaxiales Biegeverhalten zu beschreiben.

Definition 2.1. Federdefinitionen im Raum:

$$F_x(u), F_y(v), F_z(w), T(\varphi_x), M_y(\varphi_y), M_z(\varphi_z)$$

Die Federsteifigkeit ist bei einer Verdrehungsbeziehung mit K_r und bei einer Verschiebungsbeziehung mit K_u bezeichnet. Illustriert ist dies in der Abbildung 2.9. Der Index II steht dabei für den ausgewählten Zustand, beispielsweise den Zustand des gerissenen Querschnitts. Mit i ist die Richtung des lokalen Koordinatensystems gemeint.

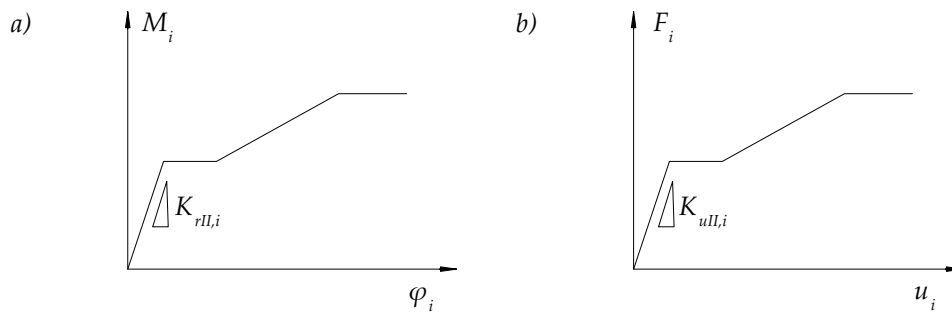


Abbildung 2.9.: Definition der Federbeziehungen, a) Verdrehungsbeziehung b) Verschiebungsbeziehung

In AxisVM lässt sich die Feder mit einem Stabgelenk modellieren. Aufgrund dessen sind die Federn fortan als Stabgelenke bezeichnet. Des Weiteren hat sich eine Modellierungsstrategie bewährt, bei derer an jedem Stab ein Anfang- und ein Endgelenk zu modellieren ist. Dies bringt den Vorteil, dass sich die Einzugsängen für Randgelenke, bei Auflagern beispielsweise, nicht unterscheiden. Illustriert ist dies in der Abbildung 2.10.

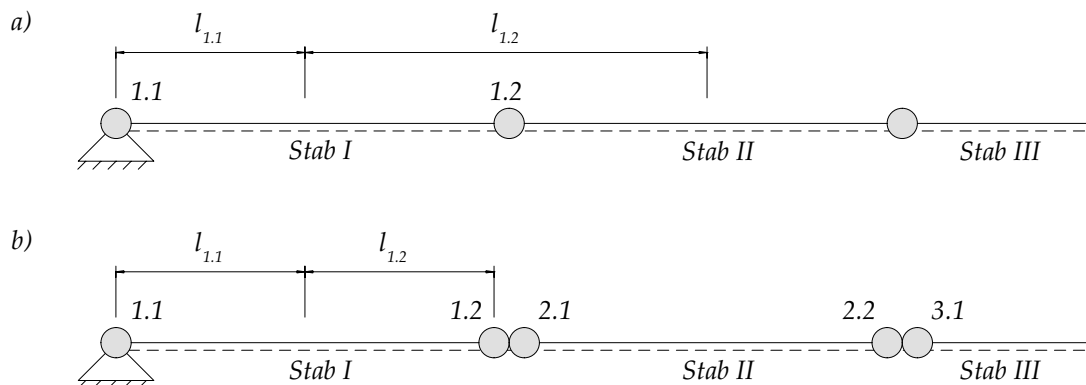


Abbildung 2.10.: Modellierungsstrategie der Stabanfang- und Endgelenke, a) mit nur Stabanfangsgelenken, b) mit Doppelgelenken

2.3.3. Resultate

Nach der Modellierung des Systems ist eine nichtlineare Analyse durchzuführen. Auf einen vertieften Beschrieb des Lösungsalgorithmus wird verzichtet. In AxisVM ist der Newton-Rhapson-Algorithmus implementiert zur iterativen Lösung des Systems. Grundlagen dazu sind in Bathe (1990) beschrieben.

Nach der nichtlinearen Analyse lassen sich eine Vielzahl von Resultaten ausgeben. Die starren Stäbe weisen die üblichen Schnittkräfte auf. Diese sind bei jeder Laststufe einsehbar und beispielsweise durch die Anwendung von Schnittkörperdiagrammen nachvollziehbar. Ebenso lassen sich die Lagerreaktionen darstellen. Zudem besteht die Möglichkeit zur Einsicht in die relative Gelenkrotation der Stabgelenke. Die Definition der relativen Gelenkrotation φ_R ist in der Abbildung 2.11 aufgezeigt. Diese beschreibt die Rotation des Gelenks relativ zum verdrehten Stab.

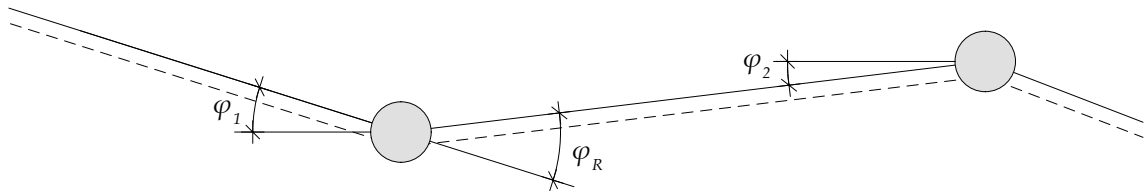


Abbildung 2.11.: Relative Gelenkrotation am verformten System

Die relative Gelenkrotation ist von besonderem Interesse, da daraus die Steifigkeit des Gelenks abgelesen werden kann. Zudem findet diese Grösse bei der Definition des Abbruchkriteriums Einzug.

3. Balken

Die bisher ausgeklammerte Querschnittsmodellbildung ist in diesem Kapitel für Balken beschrieben.

3.1. Querschnittsmodellbildung

Die Querschnittsmodellbildung startet beim Beschrieb der allgemeinen Grössen am Balkenquerschnitt. Gefolgt von der Bestimmung der Biegesteifigkeit. Nach der Bestimmung der Biegesteifigkeit ist gezeigt, wie diese auf die Gelenke zu übertragen ist. Die Definition des Abbruchkriteriums bildet den Abschluss.

3.1.1. Balkenquerschnitt

Ein Balken weist die Schnittgrössen gemäss der Abbildung 3.1 a) auf, dazu sind die aus den Schnittgrössen hervorgerufenen elementaren Verformungen in der Abbildung 3.1 b) gezeigt.

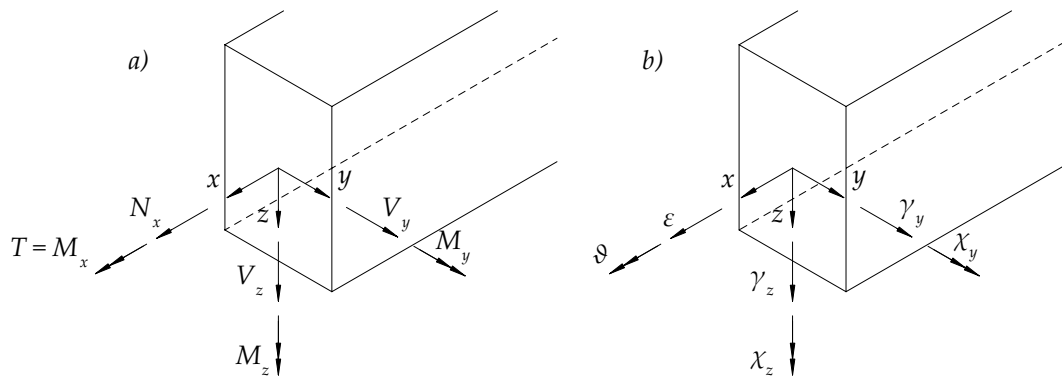


Abbildung 3.1.: a) Schnittgrössen und b) elementare Verformungen des Balkens

Gemäss der Abgrenzung, lediglich das Biegetragverhalten zu untersuchen, reduziert sich die Betrachtung auf die Biegekrümmung χ_y und das Biegemoment M_y . Hierbei entspricht das Biegetragverhalten dem einachsigen Biegetragverhalten. Die Euler-Bernoulli Balkentheorie, beschrieben in Marti (2014) und Spura (2019), eignet sich zum Beschrieb des Tragverhaltens. Dabei gilt die Schreibweise nach der Definition 3.1.

Definition 3.1.

$$M_y = M \quad \chi_y = \chi$$

Gekoppelt sind die Grössen über die Biegesteifigkeit.

$$M = EI\chi$$

3.1.2. Biegesteifigkeit

Die Biegesteifigkeit lässt sich anhand der Analyse des Querschnitts bei steigender Krümmung ermitteln. Erweitern lässt sich dies mit der Berücksichtigung der Zugversteifung.

3.1.2.1. Zuggurtmodell

Die Zugversteifung (zugversteifende Wirkung des Betons) kann mit dem Zuggurtmodell modelliert werden. Als Übersicht sind folgend die Grundzüge des Zuggurtmodells aufgezeigt. Der Abschnitt soll die Zusammenhänge erläutern und die verwendeten Begriffe klären.

Das Zuggurtmodell geht zurück auf Marti u. a. (1998). Anwendungen des Modells sind in Alvarez (1998) und Kaufmann (1998) zu finden. Das Zuggurtmodell ist eine vereinfachte, jedoch mechanisch konsistente Modellvorstellung zur Beschreibung der Zugversteifung anhand eines Zugglieds. Ein solches Zugglied ist in der Abbildung 3.2 dargestellt.

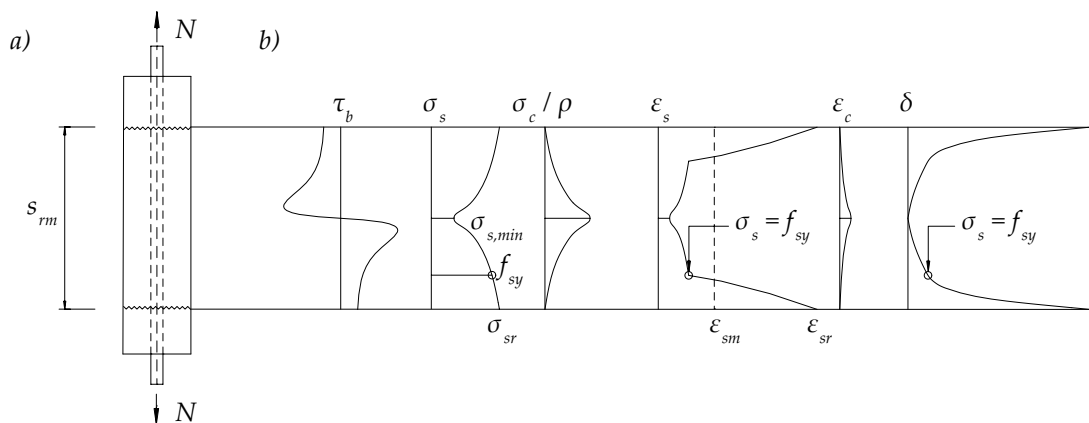


Abbildung 3.2.: Zugversteifung, a) Stahlbetonzuglied, b) Verlauf der Verbund Schubspannungen, Betonstahlspannungen, Betonspannungen, Betonstahldehnungen, Betondehnungen und Schlupf, neu gezeichnet nach Kaufmann (1998)

Das dargestellte Zugglied ist in seiner Achse mit einer Normalkraft beansprucht. Die sich einstellenden Risse sind im Abstand s_{rm} dargestellt. Die Verläufe in der Abbildung 3.2 b) zeigen eine gute Näherung des realen Tragverhaltens des Zugglieds. Hervorzuheben sind der Betonspannungsverlauf und der Betondehnungsverlauf. Durch die Verbundwirkung zwischen dem Beton und dem Betonstahl beteiligt sich der Beton an der Aufnahme der Normalspannungen. Der Begriff der Zugversteifung definiert diese Beeinflussung des Tragverhaltens.

Das Zuggurtmodell vereinfacht die Tragwirkung und setzt eine abgetreppte ideale Verbund Schubspannungs-Schlupf-Beziehung voraus, dargestellt in der Abbildung 3.3.

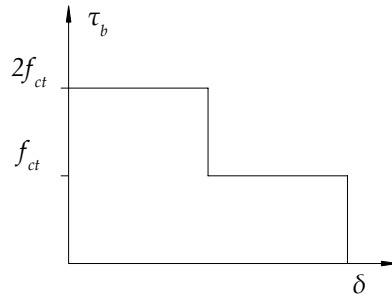


Abbildung 3.3.: Idealisierte abgetreptte Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung

Basierend auf dieser Vereinfachung lässt sich unter anderem die Gleichung 3.1 herleiten, welche den Rissabstand eingrenzt.

$$s_{rm}(\lambda) = \lambda \frac{\mathcal{O}(1 - \rho)}{4\rho} \quad (3.1)$$

$$0.5 \leq \lambda \leq 1.0$$

Dabei lässt sich der geometrische Bewehrungsgehalt mit der Gleichung 3.2 bestimmen. Die Fläche bh_{eff} bezieht sich auf die Querschnittsfläche des Zugglieds.

$$\rho = \frac{A_s}{bh_{eff}} \quad (3.2)$$

Im Fokus steht hierbei der Einfluss der Zugversteifung auf das Biegetragverhalten. Dazu lässt sich das Zuggurtmodell problemlos auf ein Biegeproblem übertragen. Dabei ist ein Zugglied innerhalb des auf Biegung beanspruchten Stahlbetonelements zu definieren. Dargestellt ist dies in der Abbildung 3.4.

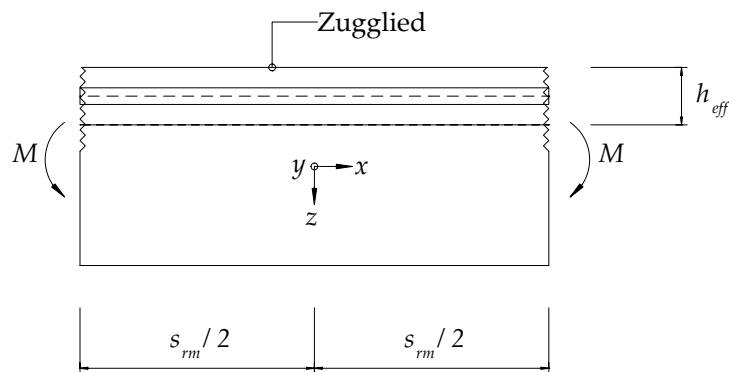


Abbildung 3.4.: Zugglied in einem biegebeanspruchten Stahlbetonelement

Die effektive Höhe des Zugglieds lässt sich mit der Gleichung 3.3 bestimmen.

$$h_{eff} = 2 \cdot (h - d) \quad (3.3)$$

Basierend auf dem Zuggurtmodell bei einem Biegeproblem lässt sich die Krümmungsdifferenz herleiten. Diese ermöglicht die Berücksichtigung der Zugversteifung im gerissenen elastischen Zustand. Dabei gilt die Gleichung 3.4.

$$\Delta_\chi(\lambda) = \frac{\lambda}{2} \cdot \left(\frac{M_r}{EI_{II}} - \frac{f_{ct}}{E_c(d-x)} \right) \quad (3.4)$$

Die Gleichung 3.4 betrachtet die Krümmung des gerissenen Querschnitts abzüglich der Krümmung beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betons, sprich dem ungerissenen Querschnitt. Die folgende Querschnittsanalyse greift diese Thematik erneut auf.

Ebenfalls lässt sich die Bruchkrümmung mit dem Zuggurtmodell einschränken. Die Beziehungen für ein Betonversagen und ein Betonstahlversagen zeigt die Gleichung 3.5. Diese sind im Kapitel 3.1.4 erneut aufgegriffen.

$$\begin{aligned} \chi_{cu} &= \left(\frac{\varepsilon_{cu}}{x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d-x} \right) \\ \varepsilon_{smy} &\simeq \frac{f_{sy}}{E_s} \\ \chi_{su} &= \left(\frac{\varepsilon_{smu}}{d-x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d-x} \right) \\ \varepsilon_{smu} &\neq \varepsilon_{su} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dabei entspricht ε_{smy} der gemittelten Dehnung der Bewehrung über die Länge des Zugglieds bei Fließbeginn. Die über die Länge des Zugglieds gemittelte Dehnung beim Erreichen der Zugfestigkeit ist mit ε_{smu} bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dass die gemittelte Dehnung deutlich kleiner als Bruchdehnung ε_{su} des Betonstahls ist. Setzt man diese gleich, so überschätzt man die Duktilität des Systems deutlich. Der Betonstahldehnungsverlauf in der Abbildung 3.2 zeigt diese Problematik auf, sofern $\varepsilon_{sr} = \varepsilon_{su}$ gilt. Analytische Lösungen der mittleren Stahldehnung entlang des Zugglieds sind in Alvarez (1998) beschrieben.

3.1.2.2. Querschnittsanalyse

Die Querschnittsanalyse bezeichnet das Untersuchen des Querschnitts bei steigender Biegekrümmung. Dabei ist folgend eine analytische Bestimmung der Momenten-Krümmungs-Beziehung aufgezeigt. Es gilt, dass die Bewehrung lediglich Kräfte in der Stabrichtung überträgt. Zudem gelten die folgenden Hypothesen nach Euler-Bernoulli:

- Der Querschnitt erfährt keine Verwölbung, es herrscht das Ebenbleiben des Querschnitts
- Die Orthogonalität des Querschnitts zur Längsachse bleibt auch im verformten Zustand bestehen.

Unter der Prämisse von linear-elastischen, ideal-plastischen Werkstoffbeziehungen, sowie einer Berücksichtigung der Zugfestigkeit des Betons, lassen sich die analytischen Beziehungen zwischen dem Biegemoment und der Krümmung ermitteln. Zunächst gilt es den Querschnitt beim Erreichen der Betonzugfestigkeit in der äussersten Faser zu beschreiben.

Dies ist als ungerissener Zustand bezeichnet. Dabei beschreibt die Gleichung 3.6 das Rissmoment M_r und die Biegesteifigkeit des ungerissenen Zustands EI_I . Der Querschnitt zeigt die Abbildung 3.5.

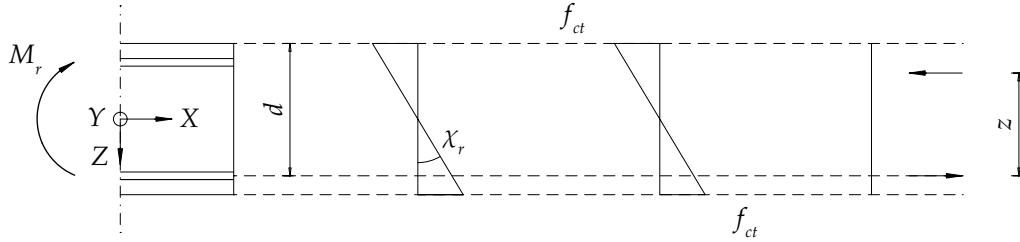


Abbildung 3.5.: Ungerissener Querschnitt, Beton erreicht Zugfestigkeit, Betonstahlspannung ist vernachlässigt

$$M_r = \frac{f_{ct} h^2}{6} \quad (3.6)$$

$$EI_I = E_c \frac{h^3 b}{12}$$

Darauf folgt der gerissene Zustand. Im Zugbereich ist die Betonzugfestigkeit überschritten, der Beton wirkt lediglich auf Druck. Unter der Voraussetzung des elastischen Verhaltens des Betons bestimmt die Gleichung 3.7 die Druckzonenhöhe x , das FlieBmoment M_y und die gerissene Biegesteifigkeit EI_{II} . Die Abbildung 3.6 zeigt den Querschnitt.

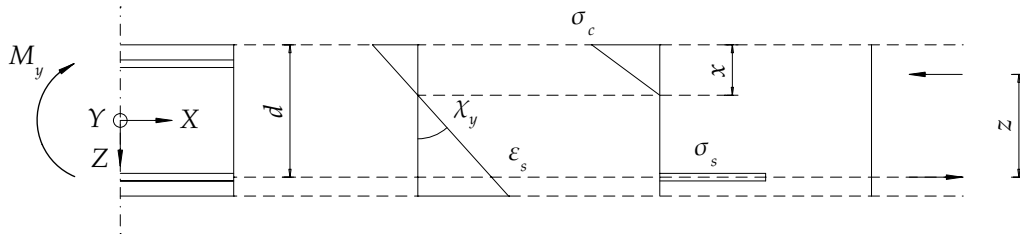


Abbildung 3.6.: Gerissener Querschnitt, Beton weist elastisches Verhalten auf

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

$$x = d \left[\sqrt{(\rho n)^2 + 2\rho n} - \rho n \right] \quad (3.7)$$

$$M_y = A_s f_{sy} (d - x/3)$$

$$EI_{II} = A_s E_s (d - x)(d - x/3)$$

Der geometrische Bewehrungsgehalt bestimmt sich nach der Gleichung 3.8. Die Gleichung bezieht sich auf die statische Höhe d .

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \quad (3.8)$$

Abschliessend lässt sich die Zugversteifung mit der in der Gleichung 3.4 aufgezeigten Krümmungsdifferenz im gerissenen Zustand berücksichtigen. Nach dem Erreichen des Flissmoments gilt der ideal-plastische Verlauf.

Das allgemeine Vorgehen illustriert die Abbildung 3.7. Linkerhand ist ein Beispielquerschnitt mit der Dehnungsebene gezeigt, welche eine steigende Biegekrümmung darstellt. Das Diagramm rechterhand zeigt den qualitativen Momenten-Krümmungs-Verlauf. Dabei ist die ungerissene Steifigkeit und die gerissene Steifigkeit, sowie die Krümmungsdifferenz unter Variation des Beiwerts λ ausgewiesen.

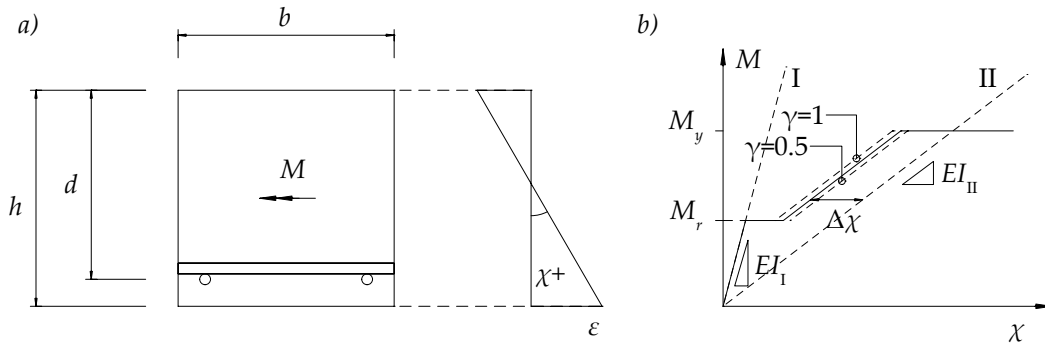


Abbildung 3.7.: a) Querschnitt bei steigender Biegekrümmung mit b) Momenten-Krümmungs-Diagramm für linear-elastische ideal-plastische Werkstoffbeziehungen, sowie der Berücksichtigung der Zugversteifung

Alternativ kann eine Momenten-Krümmungs-Beziehung numerisch ermittelt werden. Dazu gibt es eine Vielzahl von Softwarepaketen, welche eine Querschnittsanalyse mit beliebigen Werkstoffbeziehungen erlauben. Beispielsweise bieten Leeuwen und Ferster (2024) eine opensource Lösung dazu.

3.1.3. Von der Krümmung zur Verdrehung

Die Querschnittsanalyse beschreibt die Momenten-Krümmungs-Beziehung abschliessend. Jedoch entspricht dies nicht der geforderten Momenten-Verdrehungs-Beziehung gemäss der Definition 2.1. Dieser Abschnitt zeigt die Transformation der Krümmung zur Verdrehung.

Die Transformation lässt sich anhand des Gelenkverhaltens herleiten. Im Beschrieb der Feder, Kapitel 2.3.2, wurde die Einzugslänge eingeführt mit dem Vermerk, dass die Feder das Systemverhalten innerhalb der Einzugslänge definiert. Bezieht man dies auf das Biegeverhalten, so entspricht dies einer Integration der Biegekrümmungen im Bereich der Einzugslänge. Definiert ist dies durch die Gleichung 3.9.

$$\varphi = \int \chi dx \quad (3.9)$$

Setzt man voraus, dass die Krümmung entlang der Einzugslänge konstant ist, so beschreibt die Gleichung 3.10 die Lösung des Integrals. Die Verdrehung bestimmt sich

durch die Multiplikation der Krümmung mit der Einzugslänge.

$$\varphi = l_{Ein} \cdot \chi \quad (3.10)$$

Die Gleichung 3.10 ist gültig für die Ermittlung sämtlicher Gelenkbeziehungen gemäss der Definition 2.1. Das Verhalten illustriert die Abbildung 3.8.

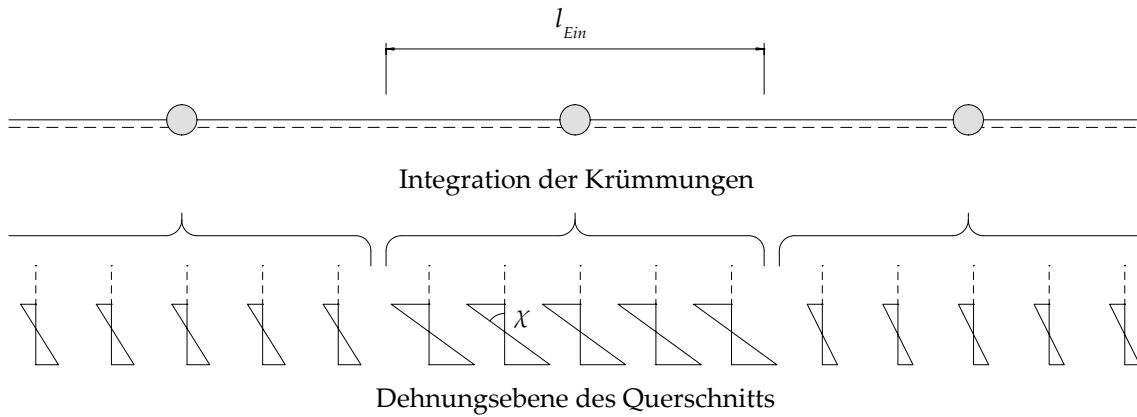


Abbildung 3.8.: Verhalten des Stabgelenks, Integration der konstanten Krümmungen entlang der Einzugslänge

3.1.4. Abbruchkriterium Biegung

Der Abschluss der Querschnittsmodellbildung bildet das Abbruchkriterium. Das Abbruchkriterium dient dazu das Biegeversagen zu definieren. Dies geschieht über eine Begrenzung der Verdrehung der Gelenke. Die Abbildung 3.9 illustriert die Modellvorstellung zum Verhalten eines plastischen Biegegelenks.

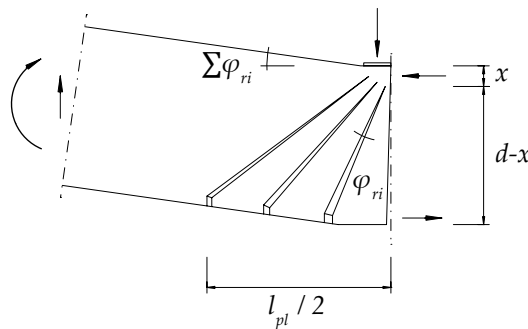


Abbildung 3.9.: Modellbildung eines plastischen Biegegelenks, nachgezeichnet nach Kaufmann (2017)

Die Verdrehung des plastischen Gelenks definiert sich über die Summe der einzelnen Rissverdrehungen. Dabei muss die zulässige Gelenkverdrehung grösser oder gleich der Summe der einzelnen Verdrehungen sein. Aufgezeigt in der Gleichung 3.11.

$$\varphi_{adm} \geq \sum_{i=1}^n \varphi_{ri} \quad (3.11)$$

Die zulässige Gelenkverdrehung ist dabei abhängig von der Bruchkrümmung, welche durch die Gleichung 3.5 definiert ist. Es gilt die Gleichung 3.12.

$$\begin{aligned}\varphi_{adm,c} &= \chi_{cu} \cdot l_{pl} = \left(\frac{\varepsilon_{cu}}{x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d-x} \right) \cdot l_{pl} \\ \varphi_{adm,s} &= \chi_{su} \cdot l_{pl} = \left(\frac{\varepsilon_{smu}}{d-x} - \frac{\varepsilon_{smy}}{d-x} \right) \cdot l_{pl}\end{aligned}\quad (3.12)$$

Die erforderliche Länge des plastischen Gelenks lässt sich mit der Gleichung 3.13 abschätzen, welche diese gleich der doppelten statischen Höhe setzt.

$$l_{pl} \simeq 2d \quad (3.13)$$

In der Vorlesungsunterlage Kaufmann (2017) ist die Ermittlung der plastischen Gelenkrotation kompakt zusammengefasst. Sowie sind verfeinerte Berechnungsmethoden zur Bestimmung der Rotation aufgezeigt.

Die einzelnen Rissverdrehungen entsprechen den relativen Gelenkrotationen im Bereich des plastischen Gelenks. Die relativen Gelenkrotationen sind in der Abbildung 2.11 illustriert und sind eine Resultatgrösse aus AxisVM.

Abschliessend veranschaulicht die Abbildung 3.10 das Abbruchkriterium. Diese zeigt einen Ausschnitt eines Stabs mit Stabanfang- und Endgelenken. Die Elementlänge ist kleiner als die Länge des plastischen Gelenks gewählt. Die Summe der relativen Gelenkrotation der von der plastischen Gelenklänge umfassten Stabgelenke muss kleiner als die zulässige Verdrehung sein.

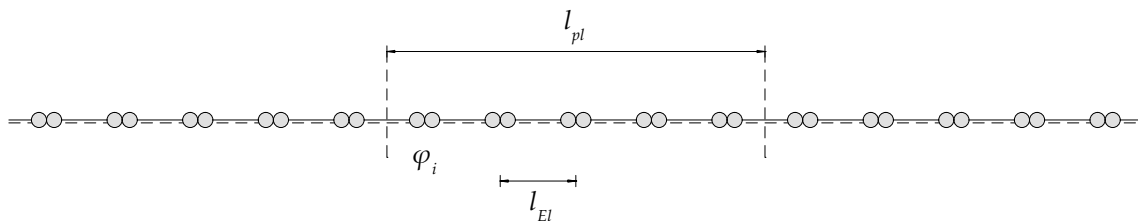


Abbildung 3.10.: Systemmodell mit Stabanfang- und Endgelenken, dazu die plastische Gelenklänge und Elementlänge eingezeichnet

Die Darstellung liefert zugleich eine Abschätzung der Wahl der passenden Elementlänge. Die Elementlänge ist sicherlich kleiner als die plastische Gelenklänge zu wählen, damit die Gelenkverdrehungen die Rissverdrehungen darstellen. Ebenso scheint eine Elementlänge entsprechend den Rissabständen zu wählen durchaus sinnvoll.

4. Platten

Im einführenden Beispiel (Abbildung 2.6) ist die Anordnung der Stäbe zu einem Trägerrost dargestellt. Dabei ist aufgezeigt, dass dieses Modell zur Bestimmung des nicht-linearen Tragverhaltens von Flächentragwerken geeignet ist. Dieses Kapitel erläutert die Grundlagen zur Modellierung von Plattentragwerken mit diesem Ansatz.

Zunächst ist die Kirchhoffsche Plattentheorie beschrieben, um den Begriff der Platte zu präzisieren. Anschliessend erfolgt die Transformation des Plattenelements in das Trägerrostmodell. Abschliessend ist die Querschnittsmodellbildung vorgestellt.

4.1. Kirchhoffsche Plattentheorie

Die Kirchhoffsche Plattentheorie bildet die Grundlage für das Trägerrostmodell. Der folgende Abschnitt konzentriert sich auf die wesentlichen Begriffe der Plattentheorie. Eine ausführliche Darstellung findet sich in Mittelstedt (2022).

4.1.1. Grundlagen

Plattenelemente sind ebene Flächenelemente, die normal zur Ebene belastet sind. Die Kirchhoffsche Plattentheorie dient der Berechnung dünner Platten, bei denen die Dicke h deutlich kleiner als eine charakteristische Abmessung, wie beispielsweise die Länge l , ist. Die Abbildung 4.1 zeigt ein solches dünnes Plattenelement mit einer Belastung normal zur Ebene.

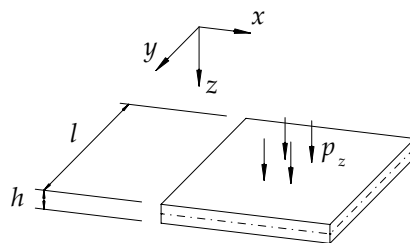


Abbildung 4.1.: Ein Plattenelement mit signifikant kleinerer Dicke h als die charakterisierende Abmessung l

Die Theorie basiert auf den folgenden Annahmen, entnommen aus Mittelstedt (2022):

- Das Hooksche Gesetz ist uneingeschränkt gültig.
- Der Querschnitt bleibt auch im verformten Zustand eben, es tritt keine Querschnittsverwölbung auf.

- Es gilt die Normalenhypothese, der Querschnitt steht auch im verformten Zustand senkrecht zur Mittelebene.
- Man unterstellt geometrische Linearität, die Verformungen sind klein gegenüber den Plattenabmessungen.
- Die Normalspannungen in Dickenrichtung der Platte sind vernachlässigbar klein, es gilt ein ebener Spannungszustand.
- Die Dicke der Platte ändert sich auch im verformten Zustand nicht.

Basierend auf diesen Annahmen beschreibt Mittelstedt (2022) die Kirchhoffsche Plattentheorie als Erweiterung der Euler-Bernoulli-Balkentheorie auf Plattentragwerke.

4.1.2. Herleitung

Die Herleitung zeigt die elastischen Zusammenhänge zwischen den Schnittgrößen und den Verformungen.

Betrachtet man ein infinit kleines Plattenelement und verformt dies, so lässt sich ein Verschiebungsfeld beschreiben. Das Verschiebungsfeld liefert Beziehungen der Verschiebungen in allen drei Koordinatenrichtungen. Der unverformte und der verformte Zustand des infinit kleinen Elements zeigt die Abbildung 4.2.

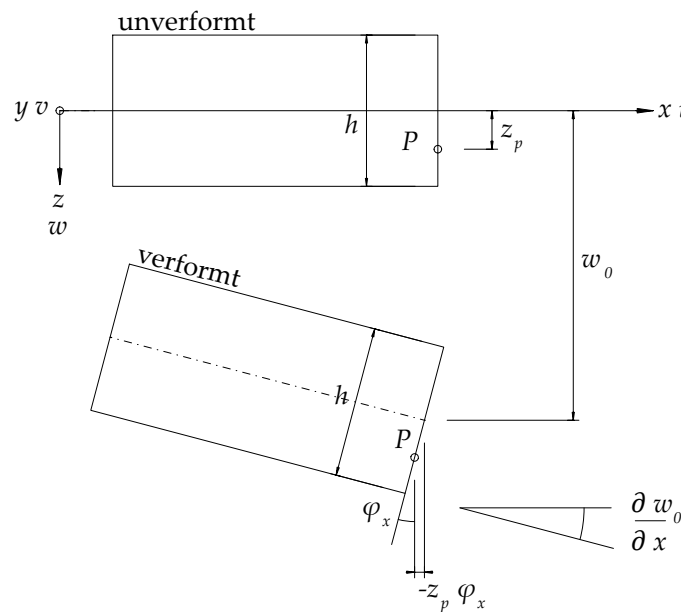


Abbildung 4.2.: Element einer infinit kleinen, dünnen Platte im verformten und unverformten Zustand gemäss der Annahmen nach der Kirchhoffschen Plattentheorie, nachgezeichnet nach Mittelstedt (2022)

Aufgrund kleiner Verformungen sind die Winkel ebenfalls klein, es lassen sich die Beziehungen der Gleichung 4.1 aufstellen.

$$-\varphi_x = \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad -\varphi_y = \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (4.1)$$

Betrachtet man den dargestellten Punkt P in der Abbildung 4.2, so lässt sich die Verschiebung in x -Richtung des Punkts bestimmen. In der y -Richtung gilt das gleiche Verhalten. Die Gleichung 4.2 beschreibt die Verschiebung des Punkts.

$$u_P = -z_P \varphi_x \quad v_P = -z_P \varphi_y \quad (4.2)$$

Aufgrund des Ebenbleibens des Querschnitts gilt die Beziehung für jeden Punkt auf der Querschnittsebene. Es folgt die Gleichung 4.3, welche bereits zwei der drei Komponenten des Verschiebungsfelds definiert.

$$u_P = u \quad v_P = v \quad (4.3)$$

Die Verschiebung w_0 in z -Richtung bezieht sich auf die Mittelebene der Platte. Da die Platte im verformten Zustand die Dicke beibehält, gilt die Verschiebung der Mittelebene für sämtliche Punkte auf der Querschnittsebene. Die dritte Komponente w des Verschiebungsfelds ist somit gleich w_0 zu setzen. Das Verschiebungsfeld ist vollständig mit der Gleichung 4.4 beschrieben.

$$u = -z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad w = w_0 \quad (4.4)$$

Anhand des Verschiebungsfelds lässt sich das Verzerrungsfeld definieren. Dazu gelten die kinematischen Beziehungen am Kontinuum. Diese gehen aus der Elastizitätstheorie hervor. Betrachtet man die Abbildung 4.3, so lassen sich daran die Dehnungen in x und y Richtung bestimmen.

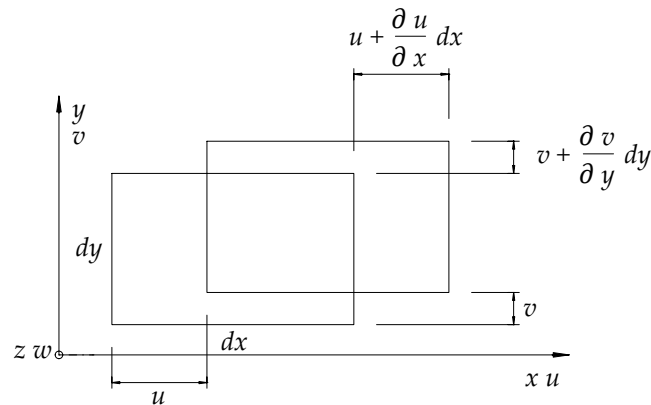


Abbildung 4.3.: Definition der infinitesimalen Dehnungen in der Draufsicht des Volumenkörpers, nachgezeichnet nach Mittelstedt (2022)

Die Abbildung 4.4 zeigt das gleiche Element unter dem Einfluss einer Schiebung. Aus der Summe der beiden Winkel resultiert die Schiebung.

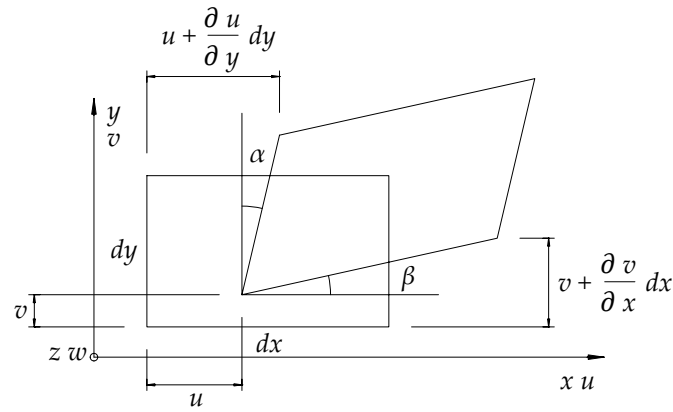


Abbildung 4.4.: Definition der infinitesimalen Schiebung in der Draufsicht des Volumenkörpers, nachgezeichnet nach Mittelstedt (2022)

Die Gleichung 4.5 fasst die Verzerrungen zusammen.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 \gamma_{xy} &= \alpha + \beta = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Zur vollständigen Beschreibung des Verzerrungsfelds ist die Dehnung ε_{zz} zu bestimmen, sowie zwei weitere Schiebungen γ_{xz}, γ_{yz} . Aufgrund der Unveränderlichkeit der Plattendicke verschwindet die Dehnung ε_{zz} . Als Folge der Normalenhypothese und des Ebenbleibens des Querschnitts entfallen die übrigen Schiebungen ebenfalls. Aufgezeigt ist dies in der Gleichung 4.6.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Das Verzerrungsfeld ist abschliessend mit der Gleichung 4.5 und der Gleichung 4.6 beschrieben.

Die Verzerrungen gilt es über eine Materialbeziehung mit den Spannungen zu koppeln. Dazu dient das Hooksche Gesetz, aufgezeigt in der Gleichung 4.7. Dabei ist die Normalspannung über den Elastizitätsmodul mit der Dehnung gekoppelt. Die Schubspannung ist über den Schubmodul mit der Schiebung zu bestimmen. Die Querdehnung ε_q lässt sich über die Querdehnzahl bestimmen.

$$\sigma = E\varepsilon \quad \tau = G\gamma \quad \varepsilon_q = -\nu\varepsilon \tag{4.7}$$

Der Schubmodul zeigt die Gleichung 4.8.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.8)$$

Setzt man Isotropie voraus, so lassen sich anhand der Elastizitätstheorie die Beziehungen zwischen Spannungen und Verzerrungen aufstellen. Die Gleichung 4.9 zeigt dies auf.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Spannungsvektoren sind in der Abbildung 4.5 dargestellt für eine einzelne Lamelle des Plattenelements.

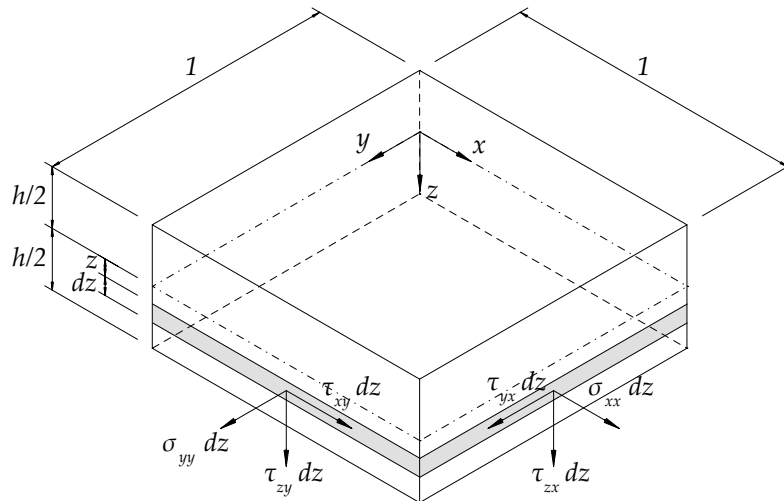


Abbildung 4.5.: Überhöhtes Plattenelement mit eingezeichneten Normal- und Schubspannungen, nachgezeichnet nach Heinzmann (2012)

Die Abbildung 4.6 zeigt die allgemeinen Schnittgrößen am Plattenelement welche aus den Spannungsvektoren resultieren.

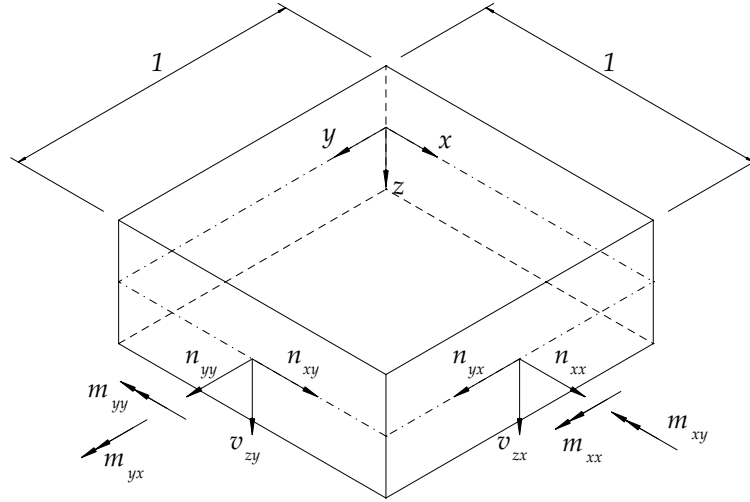


Abbildung 4.6.: Überhöhtes Plattenelement mit eingezeichneten Schnittgrößen, nachgezeichnet nach Heinzmann (2012)

Durch die Integration der Spannungen über die Plattendicke h lassen sich die Schnittgrößen bestimmen. Die Ermittlung der beiden Biegemomenten und des Drillmoments zeigt die Gleichung 4.10. Dabei gilt $m_{xy} = m_{yx}$. Die Beziehungen der Membran- und Querkräfte sind nicht dargestellt.

$$\begin{aligned}
 m_{xx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} \cdot z dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_{xx} + \nu\chi_{yy}) = Ei_{xx} (\chi_{xx} + \nu\chi_{yy}) \\
 m_{yy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} \cdot z dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\chi_{yy} + \nu\chi_{xx}) = Ei_{yy} (\chi_{yy} + \nu\chi_{xx}) \\
 m_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z dz = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \frac{\chi_{xy}}{2} = \frac{Gh^3}{6} \frac{\chi_{xy}}{2} = Gi_{xy} \frac{\chi_{xy}}{2}
 \end{aligned} \quad (4.10)$$

Die verwendeten Krümmungen sind anhand der Verzerrungen bestimmt. Es gilt die Gleichung 4.11.

$$\begin{aligned}
 \chi_{xx} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon_{xx}}{z} \\
 \chi_{yy} &= -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{\varepsilon_{yy}}{z} \\
 \chi_{xy} &= -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} = \frac{\gamma_{xy}}{z}
 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Die hergeleiteten Beziehungen lassen sich kompakt in der Matrixschreibweise darstellen. Dies zeigt die Gleichung 4.13. Die Gleichung 4.12 beschreibt die Plattensteifigkeit.

$$D_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (4.12)$$

$$\begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D_b \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Damit sind die Verzerrungen, Verschiebungen, Spannungen und Schnittkräfte des Plattenelements definiert.

4.2. Transformation zum Trägerrost

Der Beschrieb der Kirchhoffschen Plattentheorie hat das elastische Plattentragverhalten erläutert. Dieser Abschnitt zeigt die Transformation der Plattengrößen zum Trägerrost. Der Trägerrost dient dabei als Ersatzsystem der Platte. Ziel ist es, eine Beziehung zwischen der Plattensteifigkeit und der Steifigkeit der Ersatzstäbe herzustellen. Dazu ist das Verhalten des Plattenelements dem des Stabkreuzes des Trägerrosts gleichgesetzt, wie in der Abbildung 4.7 dargestellt.

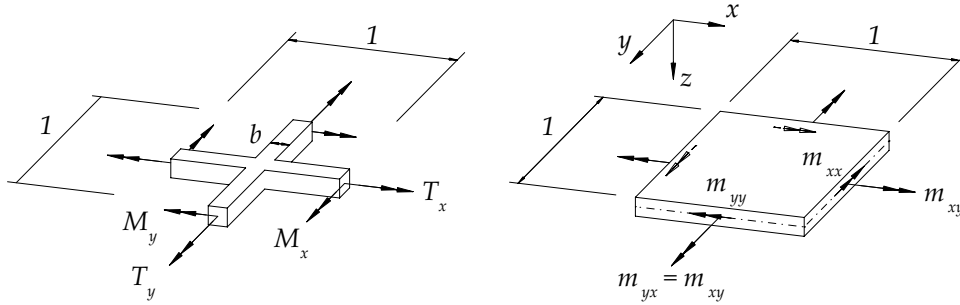


Abbildung 4.7.: Ersatz des Plattenelements mit dem Stabkreuz

Die beiden Stäbe des Kreuzes (Ersatzstäbe) weisen die Schnittgrößen gemäß der Abbildung 3.1 auf. Zu berücksichtigen sind das Torsionsmoment T und das Biegemoment M_y . Es gilt die abgekürzte Schreibweise nach der Definition 3.1. Die Indizes x und y beziehen sich hierbei auf die Richtung des Stabs im globalen Koordinatensystem, nicht auf das lokale Koordinatensystem. Der Zusammenhang ist in Definition 4.1 verdeutlicht.

Definition 4.1.

$$\begin{aligned} m_{xx} &\rightarrow M_x \\ m_{yy} &\rightarrow M_y \\ m_{xy} &\rightarrow T_x \\ m_{yx} &\rightarrow T_y \end{aligned}$$

An einem Balken lassen sich für dünne Querschnitte ($h \ll b$) das Biegemoment und das Torsionsmoment mithilfe der Gleichung 4.14 bestimmen.

$$\begin{aligned} M &= \int_A z \cdot \sigma_x dA = E \frac{bh^3}{12} \chi = EI \chi \\ T &= \int_A (z \cdot \tau_{yx} - y \cdot \tau_{zx}) dA = G \frac{h^3 b}{3} \vartheta = GI_x \vartheta \end{aligned} \quad (4.14)$$

Im Folgenden ist zu untersuchen, inwiefern sich die Beziehungen aus Gleichung 4.14 auf die Ersatzstäbe des Trägerrosts anwenden lassen. Illustriert ist die Wechselbeziehung in der Abbildung 4.8.

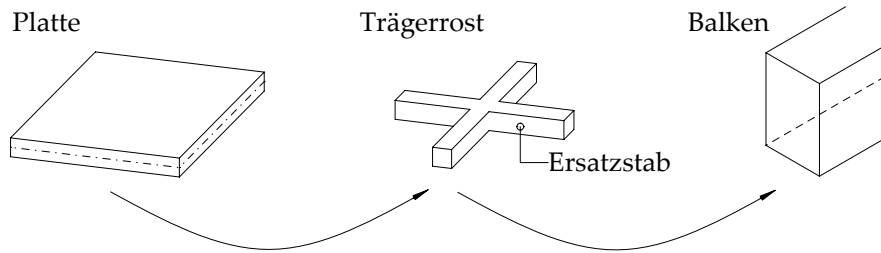


Abbildung 4.8.: Wechselbeziehung zwischen Platte, Trägerrost und Balken

4.2.1. Transformation der Biegung

Zunächst ist die Transformation des Biegemoments $m_{xx} \rightarrow M_x$ zu betrachten, wobei die Transformation $m_{yy} \rightarrow M_y$ analog erfolgt. Ein Vergleich der Definition des Biegemoments für Balken und Platten zeigt, dass sich diese in der Berücksichtigung der Querdehnung unterscheiden (Gleichung 4.10 vs. Gleichung 4.14). Der Einfluss der Querdehnung am Plattenelement ist in der Abbildung 4.9 illustriert.

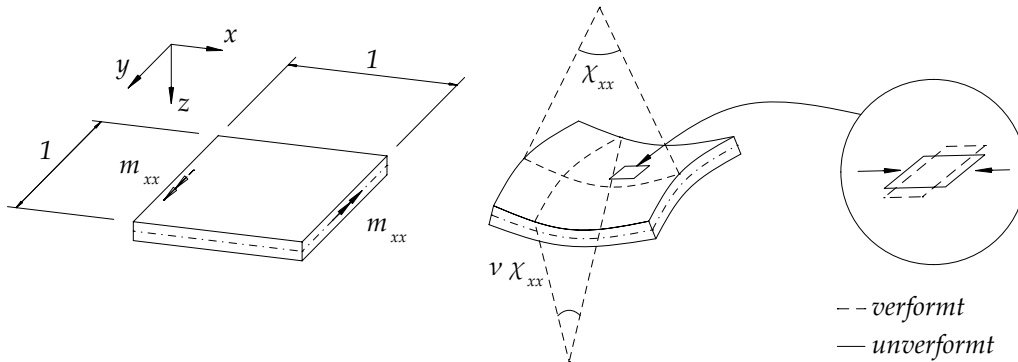


Abbildung 4.9.: Detaildarstellung des Einflusses der Querdehnung am Plattenelement

Da der Einfluss der Querdehnung mit dem Balkenelement nicht abbildbar ist, ist er vernachlässigt. Die Ersatzbiegesteifigkeit eines Stabs des Stabkreuzes entspricht somit der einachsigen Plattenbiegesteifigkeit multipliziert mit der Querschnittsbreite. Dies ergibt die Biegesteifigkeit des Balkens, wie in der Gleichung 4.15 dargestellt. Die Ersatzstäbe sind folglich als alleinstehende Balken mit dem entsprechenden Ersatzquerschnitt zu betrachten. Die Bestimmung des Ersatzquerschnitts ist im Kapitel 4.3 aufgezeigt.

$$EI_{Ersatz} = Ei_{xx} \cdot b = \frac{Eh^3b}{12} = EI \quad (4.15)$$

Die Auswirkungen dieser Vereinfachung zeigt die Abbildung 4.10. Hier ist das Biegetragverhalten eines Plattenelements mit und ohne Berücksichtigung der Querdehnung verglichen. Das Trägerrostmodell bildet das Verhalten ohne Querdehnung (a) ab.

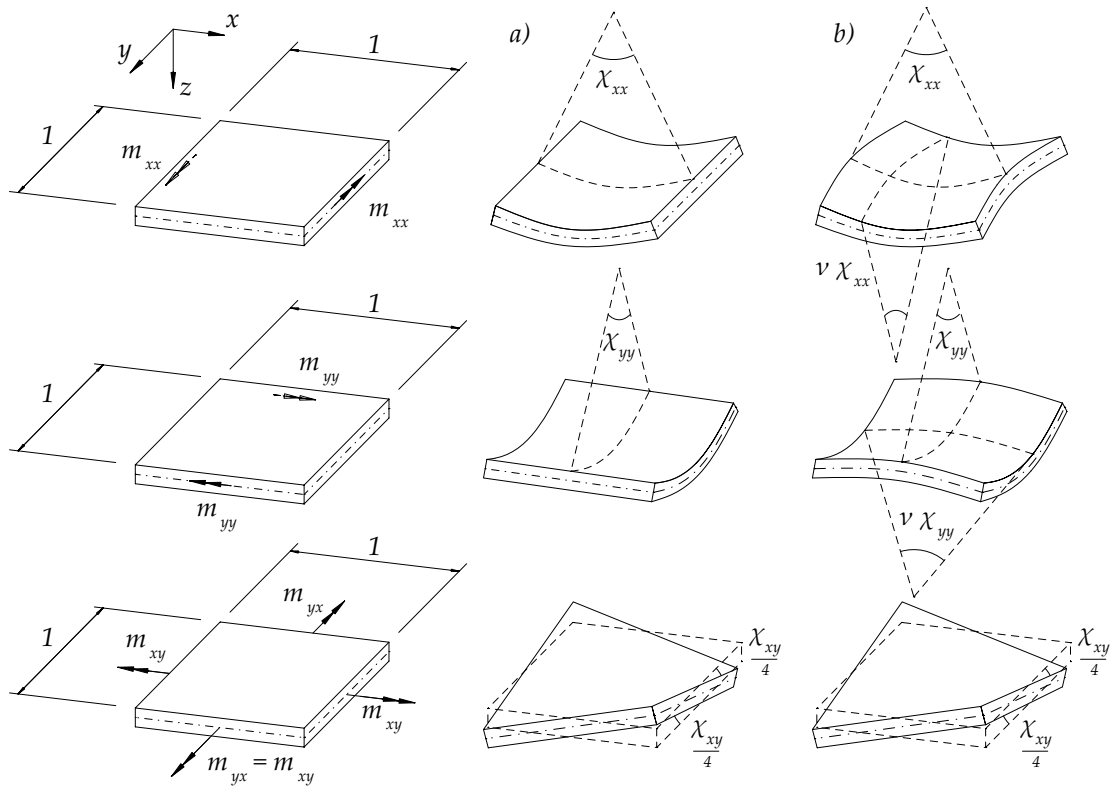


Abbildung 4.10.: Illustration der Beziehung zwischen Biegemomente und Krümmungen. a) ohne Querdehnung, b) mit Querdehnung, nach Blaauwendraad (2010)

4.2.2. Transformation der Drillung

Das Drillmoment ist mit dem Torsionsmoment des Ersatzstabs abzubilden. Es gilt die Transformation $m_{xy} \rightarrow T_x$, dargestellt in der Gleichung 4.16. Die Transformation $m_{yx} \rightarrow T_y$ ist analog. Dabei ist die Drillsteifigkeit multipliziert mit der Querschnittsbreite der Torsionssteifigkeit des Ersatzstabs gleichgesetzt. Wichtig ist, dass das Drillmoment m_{xy} nur zur Hälfte zur Krümmung χ_{xy} beiträgt.

$$\frac{m_{xy}(\tau_{xy})}{\chi_{xy}/2} \cdot b = \frac{T_x(\tau_{yx}, \tau_{zx})}{\vartheta} \quad (4.16)$$

Substituiert man die Gleichung 4.16 mit der Gleichung 4.10, ergibt sich die Ersatztorsionssteifigkeit gemäss der Gleichung 4.17. Im Vergleich zu der Gleichung 4.14 ist diese nicht identisch mit der Torsionssteifigkeit des Balkens. Genauer ist diese lediglich halb so gross.

$$GI_{x,Ersatz} = Gi_{xy}b = \frac{Gh^3b}{6} \neq GI_x \quad (4.17)$$

Diese Abweichung resultiert aus der unterschiedlichen Definition von Torsions- und Drillmomenten. In der Abbildung 4.11 ist dies anhand eines schmalen Balkenquerschnitts und eines Plattenelements ($h \ll b$) verdeutlicht.

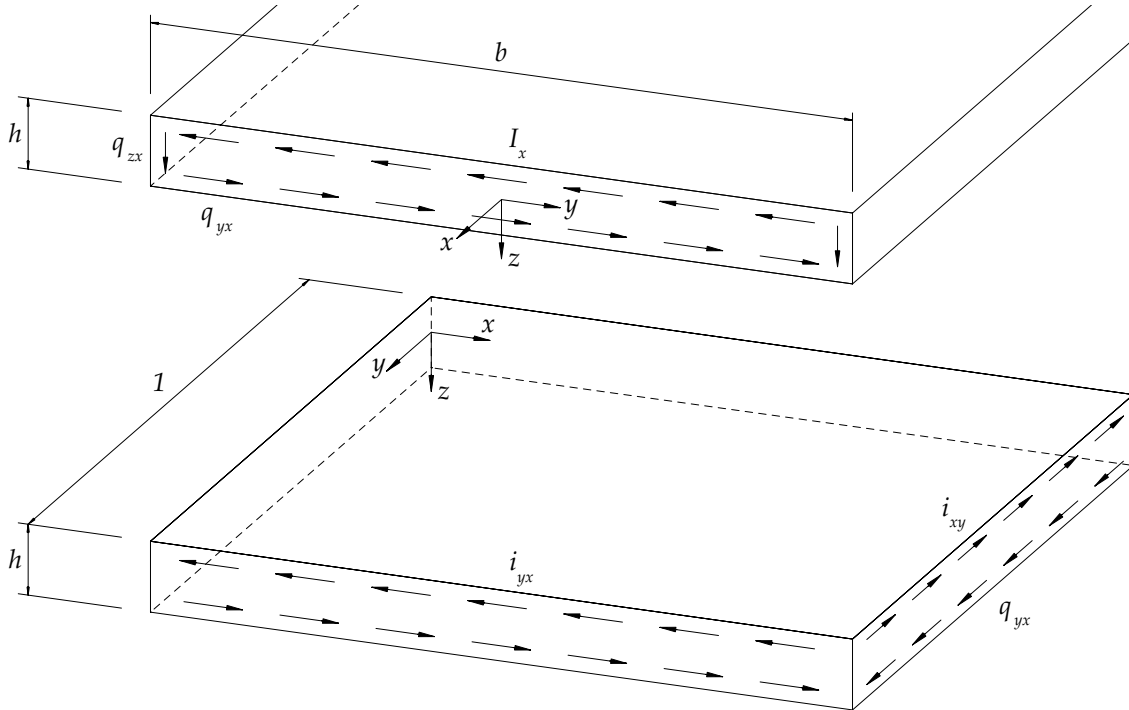


Abbildung 4.11.: Schubfluss des schmalen Balkens und Plattenelements, nach Blaauwendraad (2010)

Das Plattenelement weist lediglich einen horizontal gerichteten Schubfluss auf, während der Balken ebenfalls einen vertikal gerichteten berücksichtigt. Die Schubflüsse beteiligen sich gleichermassen am Torsionsmoment. Dies zeigt die Gleichung 4.18. Ist nun der vertikale Schubfluss vernachlässigt, so halbiert sich das Torsionsmoment, sowie auch das Trägheitsmoment.

$$T_{vert} = q_{zx} \cdot h \cdot b/2 = T_{horiz} = q_{yx} \cdot b \cdot h/2 = T/2 \quad (4.18)$$

Das Torsionsträgheitsmoment und das Drillträgheitsmoment sind in der Gleichung 4.19 definiert.

$$I_x = \frac{bh^3}{3} \quad i_{xy} = \frac{h^3}{6} \quad (4.19)$$

4.2.3. Zusammenfassung

Die Transformation der Drillsteifigkeit zur Ersatztorsionssteifigkeit sowie der Biegesteifigkeit zur Ersatzbiegesteifigkeit ist damit geklärt. In Anlehnung an die Matrizenschreibweise der Kirchhoffschen Plattentheorie (Gleichung 4.13) zeigt die Gleichung 4.20 die Be-

ziehungen des Trägerrosts. Dabei gilt $T_x = T_y$, und die Plattensteifigkeit Gleichung 4.12 ist zu berücksichtigen.

$$\frac{1}{b} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ T_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D_b \begin{bmatrix} (1-\nu^2) & 0 & 0 \\ 0 & (1-\nu^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

Abschliessend sind die Kernaussagen der Transformation vom Plattenelement zum Trägerrost erneut aufgelistet.

- Die Ersatzbiegesteifigkeit entspricht der Biegesteifigkeit des Balkens mit dem entsprechenden Ersatzquerschnitt.
- Die Ersatztorsionssteifigkeit ist doppelt so gross wie der Drillsteifigkeitsterm der Steifigkeitsmatrix aufgrund der Definition der Krümmung, jedoch halb so gross wie die Torsionssteifigkeit des Balkens aufgrund des vernachlässigten vertikalen Schubflusses.

Diese Beziehungen sind in Abbildung 4.12 illustriert.

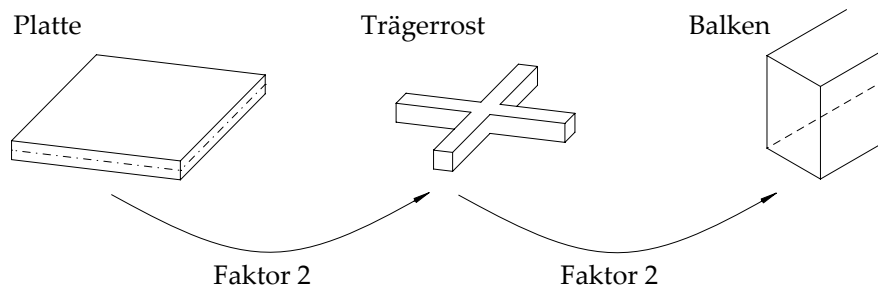


Abbildung 4.12.: Beziehung der Drill- und Torsionssteifigkeit zwischen Plattenelement, Trägerrost und Balken

4.3. Querschnittsmodellbildung

Nach der Transformation vom Plattenelement zum Stabkreuz sind nun die nichtlinearen Steifigkeitsverläufe der Ersatzstäbe zu bestimmen. Dazu sind die Ersatzbiegesteifigkeit und die Ersatztorsionssteifigkeit ermittelt. Die Querschnittsmodellbildung ist abschliessend mit einer Analogie zum Balken abgeschlossen.

4.3.1. Ersatzbiegesteifigkeit

Die Ersatzbiegesteifigkeit ist gemäss dem Vorgehen im Kapitel 3.1.2 zu bestimmen. Dazu gilt es den Ersatzquerschnitt zu bestimmen. Dieser weist die Höhe gemäss der Plattenstärke auf. Die Breite entspricht der Elementlänge, sofern eine gleichmässige Trägerrosteilung gewählt ist. Die Querschnittsbreite ist in Abbildung 4.13 illustriert.

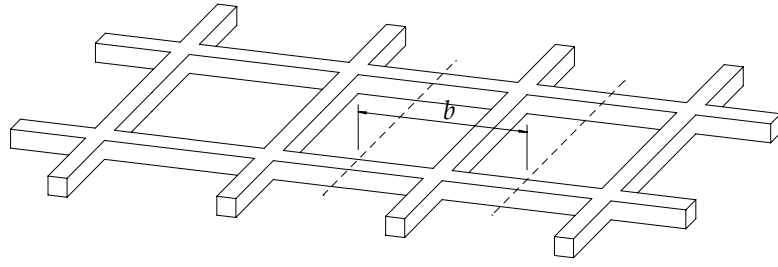


Abbildung 4.13.: Definition der Querschnittsbreite des einzelnen Stabs des Trägerrosts

4.3.2. Ersatztorsionssteifigkeit

Die Ersatztorsionssteifigkeit ist anhand des Plattenelements hergeleitet. Anhand diesem lässt sich die Drillsteifigkeit ermitteln und mithilfe von der Gleichung 4.17 transformieren. Am Plattenelement ist die ungerissene und die gerissene Drillsteifigkeit aufgezeigt

4.3.2.1. Ungerissene Drillsteifigkeit

Die ungerissene Drillsteifigkeit ist bereits im Rahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie beschrieben worden. Aus der Gleichung 4.17 ergibt sich die Ersatztorsionssteifigkeit gemäss der Gleichung 4.22. Die ungerissene Drillsteifigkeit hängt dabei ausschliesslich von den Betonparametern ab.

$$G_I = G = \frac{E_c}{2(1 + \nu)} \quad (4.21)$$

$$G_I I_{x,Ersatz} = G_I \frac{h^3 b}{6} \quad (4.22)$$

Die ungerissene Ersatztorsionssteifigkeit gilt bis zum Erreichen der Zugfestigkeit des Betons. Ersetzt man in der Gleichung 4.10 die Schubspannung durch die Zugfestigkeit des Betons und nimmt einen linearen Verlauf der Schubspannungen über die Plattendicke an, ergibt sich ein Risstorsionsmoment, das dem Biegeissmoment entspricht. Dies ist in der Gleichung 4.23 dargestellt.

$$T_r = f_{ct} \cdot \frac{h^2 b}{6} = M_r \quad (4.23)$$

4.3.2.2. Gerissene Drillsteifigkeit

Die gerissene Drillsteifigkeit ist unter der Verwendung des klassischen Sandwichmodells und des klassischen Druckfeldmodells bestimmt. Das klassische Sandwichmodell geht zurück auf Peter Marti (1990). Anhand diesem lässt sich das Plattenelement in zwei Deckel und einen Kern unterteilen. Aufgezeigt ist dies in der Abbildung 4.14.

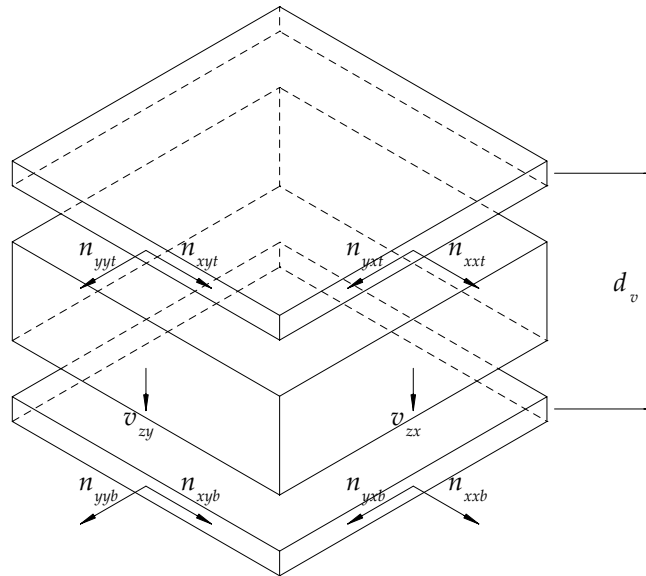


Abbildung 4.14.: Klassisches Sandwichmodell bestehend aus zwei Sandwichdeckeln und dem Kern. Die Aufteilung der Plattenschnittkräfte in Membran- und Querkräfte ist aufgezeigt

Die Deckel übernehmen die Biegemomente als Kräftepaar, die Querkräfte sind über den Kern abzutragen. Betrachtet man ausschliesslich die Drillmomente, so stellt sich die Verteilung gemäss der Abbildung 4.15 ein.

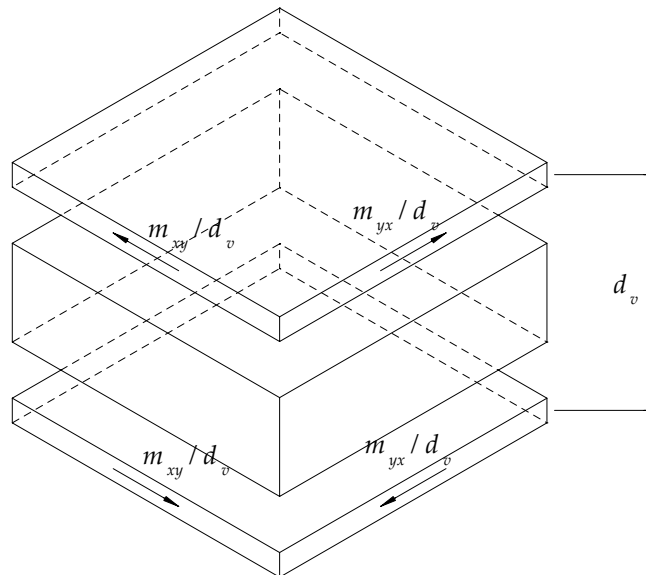


Abbildung 4.15.: Aufteilung der Drillmomente auf die Sandwichdeckel

Schneidet man aus dem Sandwich einen Deckel heraus, aufgezeigt in der Abbildung 4.16, so entspricht der Deckel einer Scheibe unter reinem Schub.

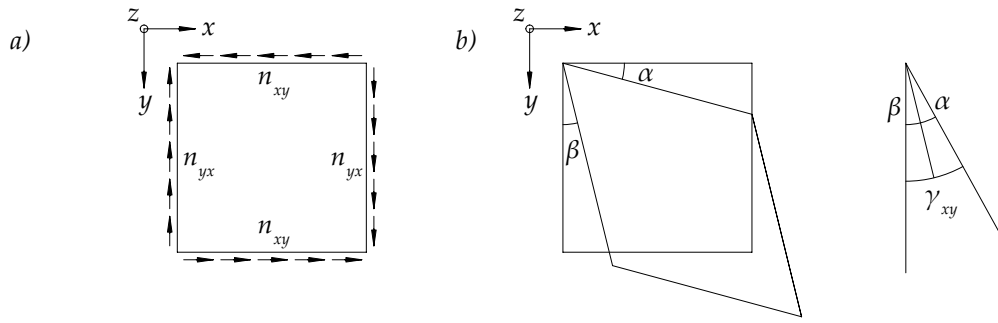


Abbildung 4.16.: a) Scheibe unter reinem Schub, b) Scheibe im Verzerrungszustand

Die Membranschubkraft der Scheibe entspricht dem Drillmoment dividiert durch den Hebelarm der inneren Kräfte, aufgezeigt in der Gleichung 4.24.

$$n_{xy} = \frac{m_{xy}}{d_v} = n_{yx} = \frac{m_{yx}}{d_v} \quad (4.24)$$

Die Schubspannung wiederum folgt aus der Membranschubkraft dividiert durch die Deckelstärke.

$$\tau_{xy} = \frac{n_{xy}}{t} \quad (4.25)$$

Folglich ist zur Berechnung der Schubspannung die Deckelstärke zu bestimmen. Die Definition der Deckelstärke ist in der Abbildung 4.17 aufgezeigt. Diese entspricht der Summe der doppelten Betondeckung und dem Durchmesser der Bewehrung.

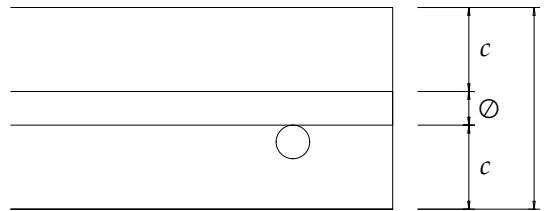


Abbildung 4.17.: Definition der Sandwichdeckelstärke

Sind die Eigenschaften der Scheibe beschrieben, so lässt sich das Tragverhalten der Scheibe mit dem erwähnten klassischen Druckfeldmodell beschreiben. Das Modell ist in Heinzmann (2012) aufgezeigt. Beschränkt man sich auf den gerissenen elastischen Bereich der Scheibe unter reinem Schub, so lässt sich die Schiebung mit der Gleichung 4.26 beschreiben. Diese ist abhängig von den Betonstahlparametern, speziell dem geometrischen Bewehrungsgehalt der Scheibe in beiden Koordinatenrichtungen x, y .

$$\gamma_{xy,II} = 2 \frac{\tau_{xy}}{E_s} \cdot \left(\sqrt{\frac{(1 + n\rho_x)(1 + n\rho_y)}{\rho_x\rho_y}} + n \right) \quad (4.26)$$

Mit der definierten Schiebung der Scheibe lässt sich anhand des Sandwichelements die Krümmung des Plattenelements ermitteln. Die Abbildung 4.18 zeigt das Sandwichelement in der Ansicht. Man bezieht sich hier ebenfalls auf die Hälfte der Krümmung.

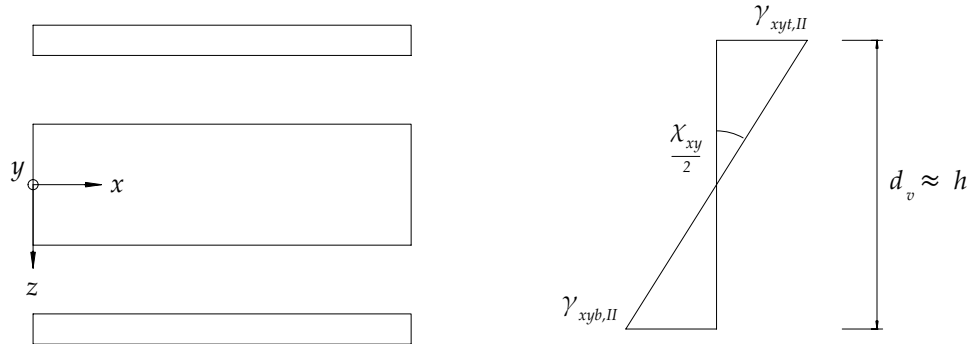


Abbildung 4.18.: Ansicht des Sandwichmodells, resultierende Verzerrungsebene durch die Schiebung des oberen und unteren Deckels

Setzt man den Hebelarm der inneren Kräfte gleich der Höhe des Plattenelements $d_v = h$, sowie setzt man die Schiebungen des oberen und des unteren Deckels gleich $\gamma_{xyb,II} = \gamma_{xyt,II}$, so lässt sich der Schubmodul für das Plattenelement des gerissenen Zustands ermitteln. Dieser ist in der Gleichung 4.27 aufgezeigt.

$$G_{II} = \left[2 \cdot \frac{2}{E_s} \cdot \left(\sqrt{\frac{(1 + n\rho_{xt})(1 + n\rho_{yt})}{\rho_{xt}\rho_{yt}}} + n \right) \right]^{-1} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xyt,II} + \gamma_{xyb,II}} \quad (4.27)$$

Mit dem bestimmten Schubmodul folgt abschliessend die Ersatztorsionssteifigkeit aus der Gleichung 4.17 mit der Substitution des Schubmoduls mit dem gerissenen Schubmodul. Aufgezeigt ist dies in der Gleichung 4.28.

$$G_{II} I_{x,Ersatz} = G_{II} \frac{h^3 b}{6} \quad (4.28)$$

Begrenzt ist das Verhalten durch die maximale Schubspannung gemäss der Gleichung 4.29.

$$\tau_{xy,u} = \sqrt{\rho_x f_{syx} \cdot \rho_y f_{syy}} \quad (4.29)$$

Setzt man eine lineare Schubspannungsverteilung über die Plattenstärke voraus, so bestimmt sich der Torsionswiderstand gemäss der Gleichung 4.30. Das gerissene Torsionsverhalten des Ersatzstabs ist damit bestimmt.

$$T_u = \tau_{xy,u} \frac{h^2 b}{6} \quad (4.30)$$

4.3.2.3. Erweiterung

Abschliessend sind Erweiterungsmöglichkeiten des Modells zu erwähnen. Das klassische Druckfeldmodell liefert verfeinerte Beziehungen zum Beschrieb des Tragverhaltens der Scheibe. Die Betrachtung eines gerissenen, elastischen Bereichs bis zum Erreichen des Torsionswiderstands ist eine Vereinfachung. Illustriert ist dies in der Abbildung 4.19. Die Darstellung entspricht qualitativ der numerischen Auswertung des klassischen Druckfeldmodells, entnommen aus Heinzmann (2012). Problemlos könnte mit dem verfeinerten Verlauf gekoppelt über das klassische Sandwichmodell eine verfeinerte Drillsteifigkeit ermittelt werden. Zudem ist in Jäger (2007) eine Erweiterung des Sandwichmodells aufgezeigt.

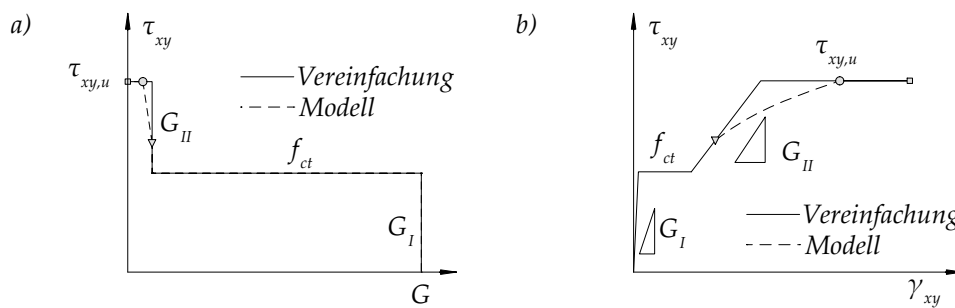


Abbildung 4.19.: a) Verhalten des Schubmoduls, b) Verhalten der Schubspannung zur Schiebung des klassischen Druckfeldmodells, entnommen aus Heinzmann (2012), ergänzt mit der Vereinfachung

4.3.3. Analogie zum Balken

Sind die Ersatzsteifigkeiten der Stäbe bestimmt, so sind die Gelenkbeziehungen und das Abbruchkriterium zu definieren. Dies erfolgt analog dem Vorgehen des Balkens. Die Gelenkbeziehungen sind gemäss dem Kapitel 3.1.3 zu bestimmen. Daraus folgen die Beziehungen $T(\varphi_x)$ und $M_y(\varphi_y)$, welche es den Gelenken zu hinterlegen gilt. Das Abbruchkriterium entspricht dem Abbruchkriterium der Biegung gemäss dem Kapitel 3.1.4.

Teil II.

Anwendung

Der zweite Teil der Arbeit befasst sich mit der Anwendung der Modellbildung an ausgewählten Beispielen.

Dazu ist die Anwendung an einem zweidimensionalen Balkentragwerk, dem Zweifeldträger gezeigt. Darauf folgt die Erweiterung auf ein dreidimensionales Balkentragwerk, dem torsionsweichen Trägerrost.

Die Anwendung der Plattentheorie startet mit der Bestimmung der Traglast einer Quadratplatte. Der Abschluss liefert die Versuchsnachrechnung einer Zweifeldplatte.

5. Zweifeldträger

Das Beispiel des Zweifeldträgers zeigt die Anwendung der Modellbildung des Kapitel 3. Zunächst ist die Aufgabenstellung aufgezeigt. Die analytische Lösung ist danach beschrieben. Darauf folgt der Beschrieb des NLFE-Modells.

5.1. Aufgabenbeschreibung

Es handelt sich um ein Vorlesungsbeispiel aus den Unterlagen Jäger (2009). In diesen ist ein Zweifeldträger gemäss der Abbildung 5.1 aufgezeigt. Dargestellt ist die Streckenlast, die Verformungsvektoren und die Abmessungen.

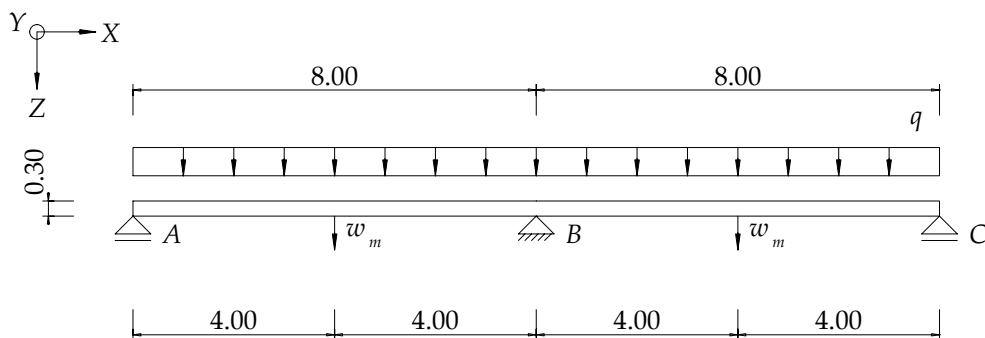


Abbildung 5.1.: Statisches System des Zweifeldträgers

Der Querschnitt zeigt die Abbildung 5.2. Dargestellt ist die Biegebewehrung mit entsprechendem Durchmesser.

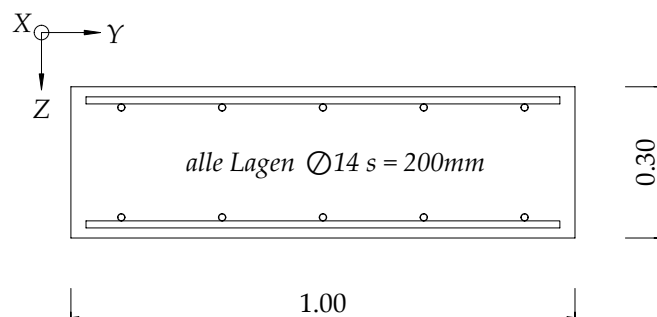


Abbildung 5.2.: Querschnitt des Zweifeldträgers

Das Ziel des Beispiels ist es, den Einfluss der Duktilitätsklasse des Bewehrungsstahls aufzuzeigen. Dazu ist das Last-Verformungs-Verhalten für einen kaltverformten Betonstahl (B500A) und einen naturharten Betonstahl (B500C) zu ermitteln. Das Last-Verformungs-Verhalten ist an der Stelle des Verformungsvektors w_m aufzuzeigen.

5.1.1. Materialeigenschaften

Den Betonstählen sind idealisierte Spannungs-Dehnungs-Diagramme zu Grunde gelegt. Das Verhalten des kaltverformten Stahls ist mit einem bilinearen Verlauf, gemäss der Abbildung 5.3 a), beschrieben.

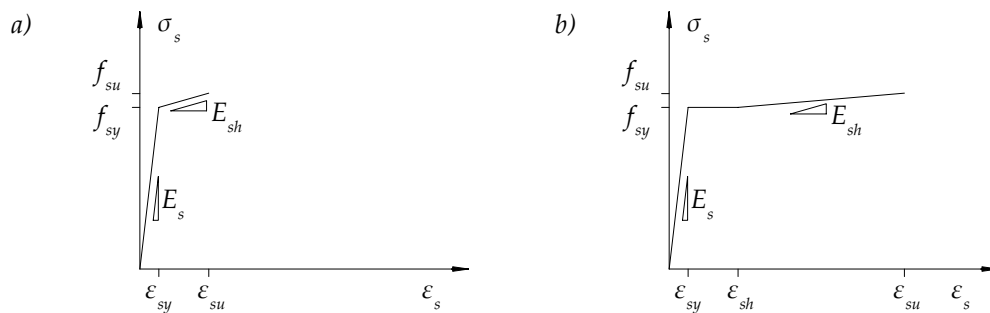


Abbildung 5.3.: Spannungs-Dehnungs-Diagramm a) des Betonstahls B500A, b) des Betonstahls B500C

Der trilineare Verlauf der Abbildung 5.3 b) beschreibt das Verhalten des naturharten Stahls.

5.2. Analytische Lösung

Die analytische Lösung startet mit dem Beschrieb des Berechnungsvorgehens. Darauf folgen die allgemeinen Berechnungsparameter. Abschliessend ist die Bestimmung des Last-Verformungs-Verhaltens des kaltverformten Betonstahls und des naturharten Betonstahls aufgezeigt.

5.2.1. Berechnungsvorgehen

Das Berechnungsvorgehen liefert einen Überblick über die analytische Lösung. Betrachtet man das in Abbildung 5.1 dargestellte System unter steigender Belastung, ist es naheliegend, dass sich zuerst ein plastisches Gelenk über dem Mittelaufleger bildet. Sofern das Rotationsvermögen der plastischen Gelenke ausreichend ist, entsteht anschliessend auch im Feld ein plastisches Gelenk. Der Mechanismus ist in Abbildung 5.4 veranschaulicht.

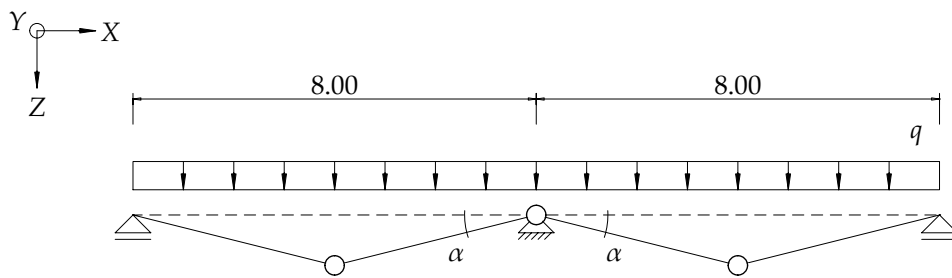


Abbildung 5.4.: Mechanismus des Zweifeldträgers mit eingezeichnetem Verdrehungswinkel

Eine zentrale Grösse in diesem Zusammenhang ist das Rotationsvermögen der plastischen Gelenke. Um dieses abzuschätzen, ist das Zugglied zu analysieren. Dabei sind zwei Zustände von besonderer Bedeutung. Zum einen der Zustand des Fließens der Bewehrung, zum anderen der Zustand beim Erreichen der Zugfestigkeit. Es ist die mittlere Dehnung entlang des Zugglieds beider Zustände zu ermitteln. Diese finden Einzug in der Gleichung 3.12.

Im Anschluss an die Bestimmung des Rotationsvermögens erfolgt die Systemanalyse. Diese Analyse zeigt die Zustandslinien der Biegemomente sowie die zugehörigen Einwirkungen q . Es sind Zustände untersucht, die signifikanten Einfluss auf die Last-Verformungskurve haben. Die entsprechende Verformung w_m ist unter der Annahme einer konstanten, gerissenen Biegesteifigkeit EI_{II} berechnet.

5.2.2. Parameter

Folgend sind sämtliche Berechnungsparameter aufgelistet. Dazu sind diese für den Betonstahl, die Geometrie und für den Beton gruppiert.

5.2.2.1. Bewehrung

Die Bewehrung ist mit deren Durchmesser und der Teilung folgend beschrieben:

$$\begin{aligned} \phi_x &= 14 \text{ mm} & s_x &= 200 \text{ mm} \\ \phi_y &= 14 \text{ mm} & s_y &= 200 \text{ mm} \end{aligned}$$

Die Querschnittsfläche der Längsbewehrung des Meterstreifens beträgt:

$$a_s = \frac{\phi_x^2 \cdot \pi}{4 \cdot s_x} = 769.69 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

5.2.2.2. Geometrie

Die Parameter der Geometrie beinhalten die Betondeckung, die Plattenstärke, die Querschnittsbreite und die Balkenlänge.

$$\begin{aligned} c &= 20 \text{ mm} & h &= 300 \text{ mm} \\ b &= 1 \text{ m} & l &= 8 \text{ m} \end{aligned}$$

Daraus erschliesst sich die statische Höhe:

$$d_x = h - c - \phi_y - \frac{\phi_x}{2} = 259.0 \text{ mm}$$

5.2.2.3. Beton

Der Beton ist mit der Zylinderdruckfestigkeit, Elastizitätsmodul und der Bruchstauchung beschrieben.

$$f_{cc} = 30.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad E_c = 29.3 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \quad \varepsilon_{cu} = 5 \text{ ‰}$$

Mittels empirischen Ansätzen lassen sich die Betonzugfestigkeit und die Bauteildruckfestigkeit bestimmen.

$$\begin{aligned} f_{ct} &= 0.3 \cdot f_{cc}^{\frac{2}{3}} = 2.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ f_c &= 2.5 \cdot f_{cc}^{\frac{2}{3}} = 24.14 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

5.2.2.4. Zuggurtmodell

Das Zuggurtmodell dient hier zur Bestimmung des Rotationsvermögens. Dazu sind die Grössen des Zugglieds aufgezeigt. Anhand der Betonzugfestigkeit ist die Schubspannungs-Schlupf-Beziehung definiert. Die Schubspannungen sind die folgenden.

$$\tau_{b0} = 2 \cdot f_{ct} = 5.79 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \tau_{b1} = f_{ct} = 2.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Das Zugglied weist dabei die folgende Höhe, der entsprechende Bewehrungsgehalt und die daraus resultierenden Grenzen des Rissabstands auf.

$$\begin{aligned}
h_{eff} &= 2 \cdot (h - d_x) = 82.0 \text{ mm} \\
\rho &= \frac{a_s}{h_{eff}} = 0.94 \% \\
s_{r0} &= \frac{\sigma_x \cdot (1 - \rho)}{4 \cdot \rho} = 369.38 \text{ mm} \\
s_{rl} &= \frac{s_{r0}}{2} = 184.69 \text{ mm}
\end{aligned}$$

Es liegt nahe, den Rissabstand entsprechend der Stabteilung zu wählen, da die Bewehrung eine Schwächung des Betons darstellt. Die Risse bilden sich an den Schwachstellen. Der verwendete Rissabstand ist daher wie folgt definiert:

$$s_{rm} = s_y = 200 \text{ mm}$$

5.2.3. Kaltverformter Betonstahl – B500A

Die Berechnung des kaltverformten Betonstahls beginnt mit den Eigenschaften des Materials. Anschliessend ist die Bestimmung der gerissenen Biegesteifigkeit aufgezeigt, einschliesslich des zugehörigen Hebelarms der inneren Kräfte.

Darauf folgen die Grenzzustände des Zugglieds sowie die Systemanalyse. Die Systemanalyse umfasst drei Zustände.

5.2.3.1. Eigenschaften des Betonstahls

Die Eigenschaften des Betonstahls B500A sind mit einem Index A gekennzeichnet und folgend aufgelistet.

$$\begin{aligned}
f_{sy,A} &= 570.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} & f_{su,A} &= 600.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} & \varepsilon_{sy,A} &= 2.78 \text{ ‰} \\
\varepsilon_{su,A} &= 25 \text{ ‰} & E_{s,A} &= 205.0 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} & E_{sh,A} &= 1350.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}
\end{aligned}$$

Zusammengefasst sind die Eigenschaften im Spannungs-Dehnungs-Diagramm in der Abbildung 5.3.

5.2.3.2. Gerissene Biegesteifigkeit

Die gerissene Biegesteifigkeit bestimmt sich anhand des gerissenen Querschnitts, Zustand II , gemäss der Abbildung 5.5.

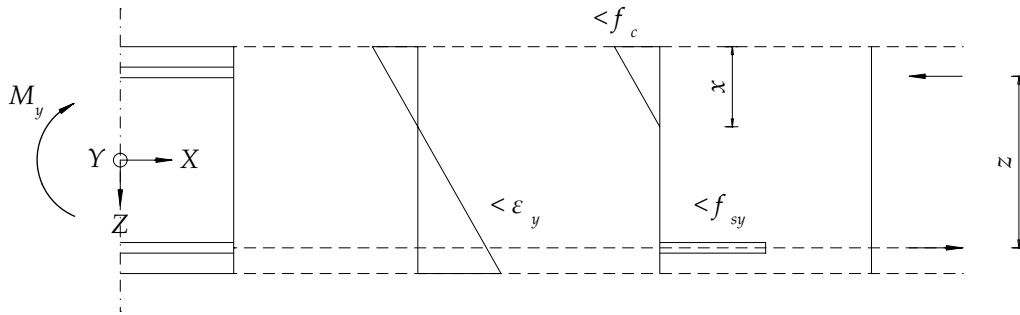


Abbildung 5.5.: Gerissener Querschnitt, Beton ist völlig elastisch, Bewehrung erreicht maximal die Fließspannung

Zunächst ist der Querschnitt als homogener Betonquerschnitt zu betrachten. Mit der Wertigkeit ist das deutlich steifere Verhalten des Betonstahls im Vergleich mit dem Beton zu berücksichtigen. Die Wertigkeit ist die folgende:

$$n = \frac{E_{s,A}}{E_c} = 7.0$$

Mittels dem Gleichgewicht der horizontalen Kräfte folgt die Betondruckzone unter der Berücksichtigung der Wertigkeit zu:

$$x_{II} = \sqrt{a_s \cdot n \cdot (a_s \cdot n + 2 \cdot d_x)} - a_s \cdot n = 47.7 \text{ mm}$$

Daraus folgt das Flächenträgheitsmoment:

$$\begin{aligned} I_{cII} &= \frac{b \cdot x_{II}^3}{3} = 3618.8 \text{ cm}^4 \\ I_{sII} &= a_s \cdot b \cdot n \cdot (d_x - x_{II})^2 = 24042.6 \text{ cm}^4 \\ I_{II} &= I_{cII} + I_{sII} = 27661.4 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

Und die gerissene Biegesteifigkeit bestimmt sich zu:

$$EI_{II,A} = E_c \cdot I_{II} = 8104.79 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

5.2.3.3. Hebelarm der inneren Kräfte

Der Hebelarm der inneren Kräfte ist am Querschnitt beim Versagen zu bestimmen. Aufgezeigt ist der Zustand in der Abbildung 5.6. Dabei erreicht der Beton in der äussersten Faser die Zylinderdruckfestigkeit. Der Betonstahl weist die Zugfestigkeit auf. Der Hebelarm ist entlang des gesamten Trägers als konstant angenommen.

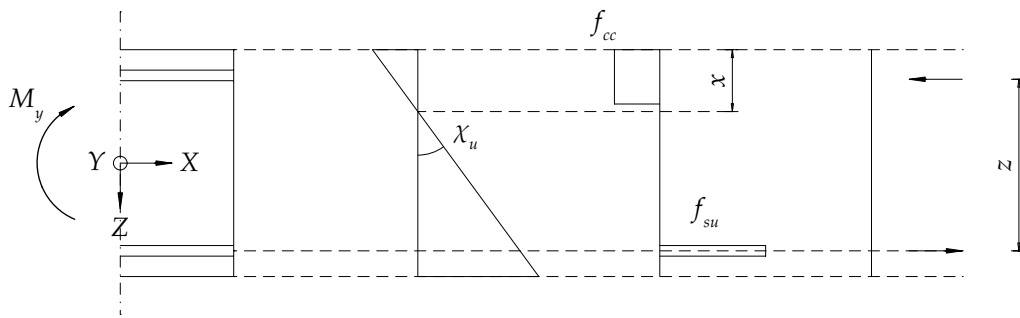


Abbildung 5.6.: Querschnitt beim Versagen, Stahl erreicht Zugfestigkeit, Beton ist völlig plastifiziert

Die Druckzonenhöhe, der Hebelarm und der Biegegewiderstand für den gewählten Zustand sind die folgenden:

$$x_{u,A} = \frac{a_s \cdot b \cdot f_{su,A}}{0.85 \cdot f_{cc} \cdot b} = 18.11 \text{ mm}$$

$$z_{,A} = d_x - \frac{0.85 \cdot x_{u,A}}{2} = 251.3 \text{ mm}$$

$$m_{u,A} = a_s \cdot f_{su,A} \cdot z_{,A} = 116.06 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

5.2.3.4. Grenzzustände des Zugglieds

Nun folgen zwei Grenzzustände des Zugglieds. Zum einen bei Fließbeginn, zum anderen beim Erreichen der Zugfestigkeit des Betonstahls. Dies dient zur Bestimmung des Rotationsvermögens.

5.2.3.4.1. Zugglied bei Fließbeginn - Zustand A1

Setzt man die Fließspannung an einem Ende des Zugglieds voraus, so folgen die Betonstahlspannungen im Zugglied zu:

$$\sigma_{s1,A1} = f_{sy,A} = 570.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{s2,A1} = f_{sy,A} - \frac{4 \cdot \tau_{b0} \cdot s_{rm}}{2 \cdot \varnothing_x} = 404.49 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die folgenden Dehnungen stellen sich dabei ein:

$$\varepsilon_{s1,A1} = \frac{\sigma_{s1,A1}}{E_{s,A}} = 2.78 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{s2,A1} = \frac{\sigma_{s2,A1}}{E_{s,A}} = 1.97 \text{ ‰}$$

Über das gesamte Zugglied stellt sich die folgende mittlere Dehnung ein. Berechnungen nach Marti u. a. (1999) Seite 156.

$$\varepsilon_{sm,A1} = 2.38 ‰$$

Das FlieBsmoment beträgt dabei:

$$m_{y,A} = a_s \cdot f_{sy,A} \cdot z_{,A} = 110.25 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

Die Abbildung 5.7 zeigt das Verhalten entlang des halben Zugglieds.

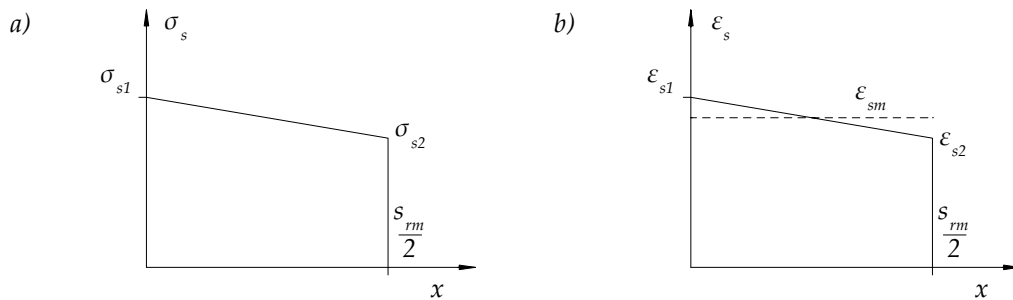


Abbildung 5.7.: a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands A1

5.2.3.4.2. Zugglied beim Erreichen der Zugfestigkeit - Zustand A2

In diesem Zustand setzt man beim Riss die Zugfestigkeit des Betonstahls voraus. Die Betonstahlspannung entlang des Zugglieds befindet sich über der FlieBsgrenze, sowohl bereichsweise unterhalb der FlieBsgrenze. Dazu gilt es zunächst den plastischen Bereich zu bestimmen:

$$\Delta_{xpl,A2} = \frac{f_{su,A} - f_{sy,A}}{4 \cdot \tau_{b1} \cdot \frac{1}{\phi_x}} = 36.25 \text{ mm}$$

$$\Delta_{xel,A2} = \frac{s_{rm}}{2} - \Delta_{xpl,A2} = 63.75 \text{ mm}$$

Setzt man die FlieBsspannung zwischen dem elastischen und plastischen Bereich voraus, stellen sich die folgenden Betonstahlspannungen ein:

$$\sigma_{s3,A2} = f_{sy,A} - \frac{4 \cdot \tau_{b0} \cdot \Delta_{xel,A2}}{\phi_x} = 464.49 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{s2,A2} = f_{sy,A} = 570.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{s1,A2} = f_{sy,A} + \frac{4 \cdot \tau_{b1} \cdot \Delta_{xpl,A2}}{\phi_x} = 600.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die folgenden Dehnungen resultieren daraus:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{s1,A2} &= \varepsilon_{su,A} = 25 \text{ ‰} \\ \varepsilon_{s2,A2} &= \varepsilon_{sy,A} = 2.78 \text{ ‰} \\ \varepsilon_{s3,A2} &= \frac{\sigma_{s3,A2}}{E_{s,A}} = 2.27 \text{ ‰}\end{aligned}$$

Und die mittlere Stahldehnung beträgt dabei:

$$\varepsilon_{sm,A2} = 6.64 \text{ ‰}$$

Zusammengefasst ist das Verhalten für das halbe Zugglied in der Abbildung 5.8.

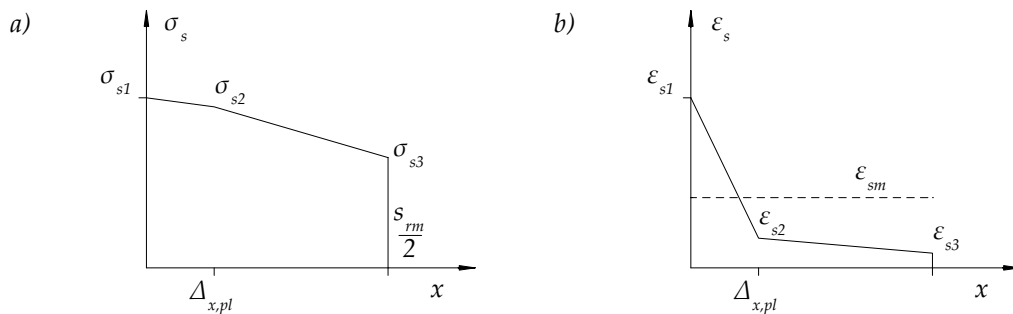


Abbildung 5.8.: a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands A2

5.2.3.4.3. Zusammenfassung

Die Auflistung der berechneten Resultate bildet den Abschluss der Grenzzustandsbetrachtung des Zugglieds.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sm,A1} &= 2.38 \text{ ‰} & m_{y,A} &= 110.25 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \\ \varepsilon_{sm,A2} &= 6.64 \text{ ‰} & m_{u,A} &= 116.06 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}\end{aligned}$$

5.2.3.5. Systemanalyse

Die Systemanalyse gliedert sich in drei Zustände. Das System beim Fließen des Mittelauf-lagers, das System beim Fließbeginn im Feld und das System mit begrenzter plastischer Rotation über dem Mittelaufleger.

5.2.3.5.1. Fliesen des Mittelaufagers - Zustand $SA1$

Setzt man beim Mittelaufager das Flieissmoment voraus, so stellen sich die folgenden Grössen ein.

$$m_{SA1,B} = m_{y,A} = 110.25 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

$$q_{SA1} = \frac{8 \cdot m_{SA1,B} \cdot b}{l^2} = 13.78 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$w_{SA1} = \frac{5 \cdot q_{SA1} \cdot l^4}{384 \cdot EI_{II,A}} - \frac{m_{y,A} \cdot b \cdot l^2}{16 \cdot EI_{II,A}} = 36.28 \text{ mm}$$

5.2.3.5.2. Flieissbeginn im Feld - Zustand $SA2$

In diesem Zustand ist dem Mittelaufager der Biege- und Widerstand vorausgesetzt. Im Feld ist das Flieissmoment angenommen. Illustriert ist dies in der Abbildung 5.9.

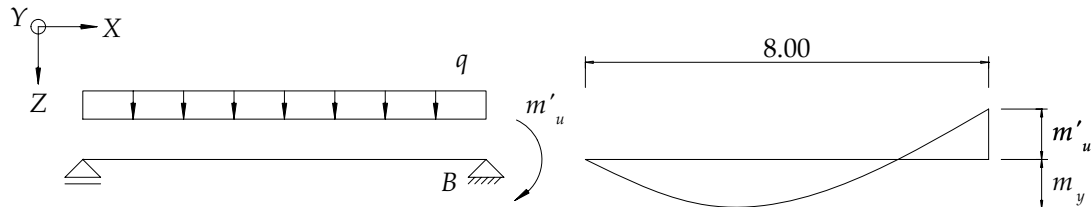


Abbildung 5.9.: Statisches System mit Biegemomenteneinwirkung beim Mittelaufager, sowie entsprechende Zustandslinien der Biegemomente

Daraus lässt sich die entsprechende Streckenlast ermitteln. Dies bedingt eine ausreichende Umlagerung, sprich Rotationsvermögen des Mittelaufagers.

$$q_{SA2} = \left(\frac{4 \cdot m_{y,A} + 2 \cdot m_{u,A}}{l^2} + \frac{4 \cdot \sqrt{m_{y,A}^2 + m_{y,A} \cdot m_{u,A}}}{l^2} \right) \cdot b = 20.39 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

5.2.3.5.2.1. Kontrolle der Duktilität

Es gilt zu kontrollieren, ob sich die vorausgesetzten Biegemomente einstellen können. Dazu ist der Rotationsbedarf mit dem Rotationsvermögen zu vergleichen. Der Bedarf ist der folgende.

$$\alpha_{SA2} = \frac{(q_{SA2} - q_{SA1}) \cdot l^3}{24 \cdot EI_{II,A}} - \frac{(m_{u,A} - m_{y,A}) \cdot b \cdot l}{3 \cdot EI_{II,A}} = 0.89^\circ$$

$$\varphi_{SA2,erf} = 2 \cdot \alpha_{SA2} = 1.77^\circ$$

Mit den Näherungsformeln zur Bestimmung der plastischen Rotation im Gelenk, gemäss dem Kapitel 3.1.4, stellen sich die folgenden Grössen ein.

$$l_{pl} = 2 \cdot d_x = 518.0 \text{ mm}$$

$$\varphi_{adm,A} = \frac{l_{pl} \cdot (\varepsilon_{sm,A2} - \varepsilon_{sm,A1})}{d_x - x_{u,A}} = 0.53^\circ$$

$$\Delta_{\varphi,SA2} = \varphi_{adm,A} - \varphi_{SA2,erf} = -1.25^\circ$$

Das Rotationsvermögen ist nicht ausreichend. Das Tragwerk versagt, bevor sich die berechnete Streckenlast einstellt.

5.2.3.5.3. Ermittlung der Traglast - Zustand SA3

Die Traglast ist somit sicherlich kleiner als die des Zustands SA2. Setzt man den Rotationsbedarf gleich dem Rotationsvermögen, so resultieren die folgenden Grössen. Dem Zustand ist die Streckenlast aus dem Zustand SA1 zu überlagern.

$$\alpha_{SA3} = \frac{\varphi_{adm,A}}{2} = 0.26^\circ$$

$$\Delta_{q,SA3} = \left(\alpha_{SA3} + \frac{(m_{u,A} - m_{y,A}) \cdot l \cdot b}{3 \cdot EI_{II,A}} \right) \cdot 24 \cdot EI_{II,A} \cdot \frac{1}{l^3} = 2.47 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$q_{SA3} = \Delta_{q,SA3} + q_{SA1} = 16.25 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Das Biegemoment im Feld ist deutlich kleiner als das Fliessmoment. Dies zeigt die folgende Gleichung.

$$m_{SA3,F} = \frac{\frac{l^2 \cdot q_{SA3}}{8} - \frac{m_{u,A} \cdot b}{2} + \frac{(m_{u,A} \cdot b)^2}{2 \cdot l^2 \cdot q_{SA3}}}{b} = 78.45 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

Die dazugehörige Felddurchbiegung zeigt die folgende Berechnung.

$$w_{SA3} = \frac{5 \cdot q_{SA3} \cdot l^4}{384 \cdot EI_{II,A}} - \frac{m_{u,A} \cdot b \cdot l^2}{16 \cdot EI_{II,A}} = 49.65 \text{ mm}$$

5.2.3.5.4. Zusammenfassung

Die Grössen der zwei signifikanten Zustände sind hier erneut aufgelistet.

$$\begin{array}{lll} q_{SA1} = 13.78 \frac{\text{kN}}{\text{m}} & w_{SA1} = 36.28 \text{ mm} & m_{SA1,B} = 110.25 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \\ q_{SA3} = 16.25 \frac{\text{kN}}{\text{m}} & w_{SA3} = 49.65 \text{ mm} & m_{SA3,F} = 78.45 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \end{array}$$

5.2.4. Naturharter Betonstahl B500C

Die Berechnungen des naturharten Betonstahl sind analog deren des kaltverformten Betonstahls. Zunächst sind die Eigenschaften des Betonstahls aufgelistet, danach folgt die Grenzzustandsanalyse des Zugglieds und abschliessend die Systemanalyse.

5.2.4.1. Eigenschaften des Betonstahls

Die Eigenschaften des Betonstahls B500C sind mit einem Index C gekennzeichnet.

$$\begin{aligned} f_{sy,C} &= 500.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} & f_{su,C} &= 600.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} & \varepsilon_{sy,C} &= 2.44 \text{‰} \\ \varepsilon_{sh,C} &= 20 \text{‰} & \varepsilon_{su,C} &= 125 \text{‰} & E_{s,C} &= 205.0 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \\ E_{sh,C} &= 952.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

Die Abbildung 5.3 b) fasst die Eigenschaften zusammen.

5.2.4.2. Grenzzustände des Zugglieds

Das Zugglied ist beim Fließbeginn und beim Erreichen der Zugfestigkeit zu analysieren.

5.2.4.2.1. Zugglied bei Fließbeginn - Zustand $C1$

Setzt man die Fließspannung des Betonstahls beim Riss voraus, so resultieren die folgenden Betonstahlspannungen.

$$\begin{aligned} \sigma_{s1,C1} &= f_{sy,C} = 500.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_{s2,C1} &= f_{sy,C} - \frac{4 \cdot \tau_{b0} \cdot s_{rm}}{2 \cdot \varnothing_x} = 334.49 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

Dabei stellen sich die folgenden Dehnungen ein:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{s1,C1} &= \frac{\sigma_{s1,C1}}{E_{s,C}} = 2.44 \text{‰} \\ \varepsilon_{s2,C1} &= \frac{\sigma_{s2,C1}}{E_{s,C}} = 1.63 \text{‰} \end{aligned}$$

Nach Alvarez (1998) Seite 163 lässt sich die mittlere Dehnung für eine trilineare Betonstahlkennlinie bestimmen.

$$\varepsilon_{sm,C1} = 2.04 \text{‰}$$

Das Flie遨moment entspricht der folgenden Gleichung:

$$m_{y,C} = a_s \cdot f_{sy,C} \cdot z_{,A} = 96.71 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

Die Abbildung 5.10 zeigt das Verhalten des Betonstahls entlang des halben Zugglieds.

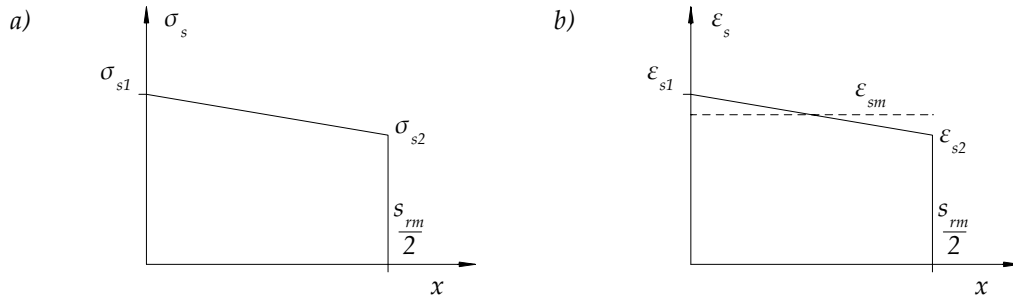


Abbildung 5.10.: a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands C1

5.2.4.2.2. Zugglied beim Erreichen der Zugfestigkeit - Zustand C2

Setzt man dem Zugglied die Zugfestigkeit voraus, so verbleibt das gesamte Zugglied im plastischen Bereich. Es stellen sich die folgenden Spannungen ein.

$$\sigma_{s1,C2} = f_{su,C} = 600.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{s2,C2} = f_{su,C} - \frac{4 \cdot \tau_{b1} \cdot s_{rm}}{\phi_x \cdot 2} = 517.24 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die Dehnungen sind die folgenden.

$$\varepsilon_{s1,C2} = \frac{\sigma_{s2,C2} - f_{sy,C}}{E_{sh,C}} + \varepsilon_{sh,C} = 38.11 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{s2,C2} = \varepsilon_{su,C} = 125 \text{ ‰}$$

Und die mittlere Stahldehnung lässt sich ebenfalls bestimmen.

$$\varepsilon_{sm,C2} = 81.56 \text{ ‰}$$

Abschliessend ist zu kontrollieren, ob der Betonstahl die Zugfestigkeit erreichen kann, oder sich ein frühzeitiges Betondruckversagen einstellt. Die mittlere Betonstahldehnung führt zur folgenden Betonstauchung, welche grösser als die Bruchstauchung ist.

$$\varepsilon_{c,C2} = \frac{\varepsilon_{sm,C2} \cdot x_{u,A}}{d_x - x_{u,A}} = 6.13 \text{ ‰} \quad \varepsilon_{cu} = 5 \text{ ‰}$$

Die mittlere Betonstahldehnung ist folglich anhand der begrenzten Betonstauchung zu berechnen.

$$\varepsilon_{sm,adm} = \frac{\varepsilon_{cu} \cdot (d_x - x_{u,A})}{x_{u,A}} = 66.51 \text{ ‰}$$

Damit folgen die Dehnungen für diesen Zustand zu:

$$\varepsilon_{s1,C2} = \varepsilon_{sm,adm} + \frac{s_{rm} \cdot \tau_{b1}}{E_{sh,C} \cdot \mathcal{O}_x} = 109.97 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{s2,C2} = \varepsilon_{sm,adm} - \frac{s_{rm} \cdot \tau_{b1}}{E_{sh,C} \cdot \mathcal{O}_x} = 23.04 \text{ ‰}$$

Und daraus folgen die Spannungen.

$$\sigma_{s1,C2} = f_{sy,C} + (\varepsilon_{s1,C2} - \varepsilon_{sh,C}) \cdot E_{sh,C} = 585.65 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{s2,C2} = f_{sy,C} + (\varepsilon_{s2,C2} - \varepsilon_{sh,C}) \cdot E_{sh,C} = 502.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Dabei folgt der Biegewiderstand, begrenzt durch ein Betondruckversagen, zu:

$$m_{u,C} = a_s \cdot \sigma_{s1,C2} \cdot z_{,A} = 113.28 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

In der Abbildung 5.11 ist das Spannungs- und Dehnungs-Verhalten entlang des Zugglieds aufgezeigt.

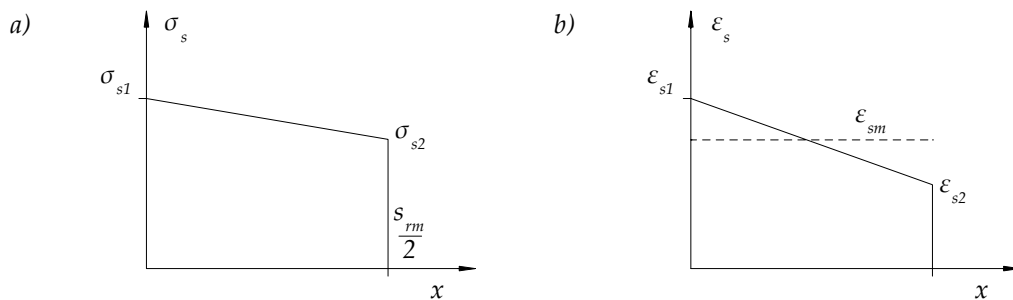


Abbildung 5.11.: a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands C2

5.2.4.2.3. Zusammenfassung

Eine Zusammenfassung der berechneten Größen bildet den Abschluss der Grenzzustandsbetrachtung des Zugglieds.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sm,C1} &= 2.04 \text{ ‰} & m_{y,C} &= 96.71 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \\ \varepsilon_{sm,adm} &= 66.51 \text{ ‰} & m_{u,C} &= 113.28 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}\end{aligned}$$

5.2.4.3. Systemanalyse

Nach der Grenzzustandsanalyse des Zugglieds folgt die Systemanalyse. Die Systemanalyse betrachtet das System beim Fließen des Mittelaufagers, beim Fließbeginn im Feld und bei begrenzter Rotation beim Mittelaufleger.

5.2.4.3.1. Fließen des Mittelaufagers - Zustand SC1

Setzt man das Fließmoment beim Mittelaufleger voraus, so stellen sich die folgenden Größen ein.

$$\begin{aligned}m_{SC1,B} &= m_{y,C} = 96.71 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \\ q_{SC1} &= \frac{8 \cdot m_{SC1,B} \cdot b}{l^2} = 12.09 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \\ w_{SC1} &= \frac{5 \cdot q_{SC1} \cdot l^4}{384 \cdot EI_{II,A}} - \frac{m_{SC1,B} \cdot b \cdot l^2}{16 \cdot EI_{II,A}} = 31.82 \text{ mm}\end{aligned}$$

5.2.4.3.2. Fließbeginn im Feld - Zustand SC2

Das Fließmoment ist im Feld vorausgesetzt. Das Biegemoment beim Auflager gilt dabei als unbekannt, ist jedoch bestimmt grösser als das Fließmoment. Das Feldmoment entspricht der folgenden Gleichung.

$$m_{SC2,F} = m_{y,C} = 96.71 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

Durch einen iterativen Prozess ist das Biegemoment beim Auflager zu bestimmen. Dazu ist eine Betonstahlspannung im Zugglied vorzusetzen. Anhand dieser ist das Rotationsvermögen und das Biegemoment beim Mittelaufleger zu bestimmen. Für den gewählten Zustand lässt sich der Rotationsbedarf berechnen. Decken sich das Rotationsvermögen und der Rotationsbedarf, so ist die passende Betonstahlspannung im Zugglied gefunden. Welche somit auch die Zustandslinien der Biegemomente definiert.

Nun folgt die Analyse des Zugglieds. Es gilt die Annahme, dass sich ein elastischer und plastischer Bereich einstellt. Die folgende Berechnung zeigt die Abmessungen des elastischen und plastischen Bereichs im halben Zugglied.

$$\begin{aligned}\Delta_{xpl,SC2} &= \Delta_{xpl,A2} = 36.25 \text{ mm} \\ \Delta_{xel,SC2} &= \frac{s_{rm}}{2} - \Delta_{xpl,SC2} = 63.75 \text{ mm}\end{aligned}$$

Die hier eingeführte Betonstahlspannung im Übergang zwischen elastischem und plastischem Bereich ist die zu iterierende Grösse. Die weiteren Spannungen ergeben sich anhand der Schubspannungs-Schlupf-Beziehung.

$$\begin{aligned}\sigma_{s2,SC2} &= 500.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_{s1,SC2} &= \sigma_{s2,SC2} + \frac{4 \cdot \tau_{b1} \cdot \Delta_{xpl,SC2}}{\mathcal{O}_x} = 530.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\ \sigma_{s3,SC2} &= \sigma_{s2,SC2} - \frac{4 \cdot \tau_{b0} \cdot \Delta_{xel,SC2}}{\mathcal{O}_x} = 394.49 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\end{aligned}$$

Dabei stellen sich die folgenden Dehnungen ein.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{s1,SC2} &= \frac{\sigma_{s1,SC2} - \sigma_{s2,SC2}}{E_{sh,C}} + \varepsilon_{sh,C} = 51.51 \text{‰} \\ \varepsilon_{s21,SC2} &= \varepsilon_{sh,C} = 20 \text{‰} \\ \varepsilon_{s22,SC2} &= \varepsilon_{sy,A} = 2.78 \text{‰} \\ \varepsilon_{s3,SC2} &= \frac{\sigma_{s3,SC2}}{E_{s,A}} = 1.92 \text{‰}\end{aligned}$$

Abschliessend lässt sich die mittlere Dehnung bestimmen. In Alvarez (1998) Seite 163 ist eine analytische Lösung dazu aufgezeigt.

$$\varepsilon_{ms,SC2} = 14.33 \text{‰}$$

Dargestellt sind die Grössen in der Abbildung 5.12.

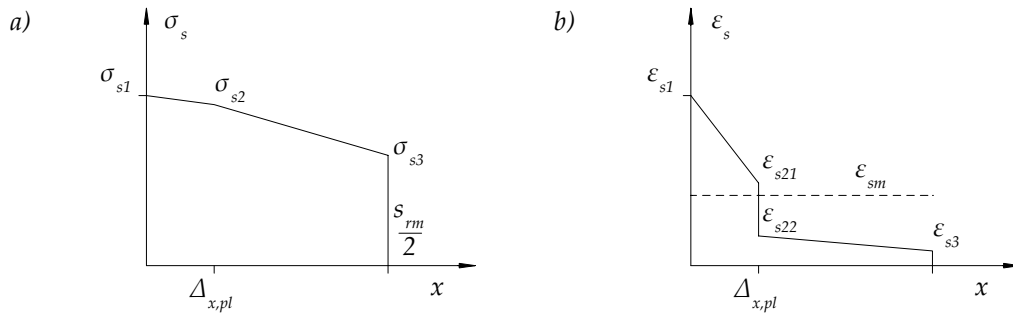


Abbildung 5.12.: a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands SC2

Das Rotationsvermögen lässt sich anhand der mittleren Dehnungen bestimmen.

$$\varphi_{SC2,pl} = \frac{l_{pl} \cdot (\varepsilon_{ms,SC2} - \varepsilon_{sm,C1})}{d_x - x_{u,A}} = 1.51^\circ$$

Mit der gewählten Betonstahlspannung lässt sich das Biegemoment über dem Auflager bestimmen.

$$m_{SC2,B} = a_s \cdot \sigma_{s1,SC2} \cdot z_{,A} = 102.52 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

Dabei stellt sich die folgende Streckenlast für den Zustand ein.

$$q_{SC2} = \left(\frac{4 \cdot m_{y,C} + 2 \cdot m_{SC2,F}}{l^2} + \frac{4 \cdot \sqrt{m_{SC2,F}^2 + m_{SC2,F} \cdot m_{SC2,B}}}{l^2} \right) \cdot b = 17.74 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Abschliessend ist der Rotationsbedarf zu bestimmen und mit dem Rotationsvermögen zu vergleichen.

$$\alpha_{SC2} = \frac{(q_{SC2} - q_{SC1}) \cdot l^3}{24 \cdot EI_{II,A}} - \frac{(m_{SC2,B} - m_{SC2,F}) \cdot l \cdot b}{3 \cdot EI_{II,A}} = 0.74^\circ$$

$$\varphi_{SC2,erf} = 2 \cdot \alpha_{SC2} = 1.49^\circ$$

$$\Delta_{\varphi SC2} = \varphi_{SC2,erf} - \varphi_{SC2,pl} = -0.03^\circ$$

Die Differenz zwischen dem Rotationsvermögen und dem Rotationsbedarf ist vernachlässigbar klein. Der Zustand ist somit zulässig, die Feldverformung lässt sich abschliessend bestimmen.

$$w_{SC2} = \frac{5 \cdot q_{SC2} \cdot l^4}{384 \cdot EI_{II,A}} - \frac{m_{SC2,B} \cdot b \cdot l^2}{16 \cdot EI_{II,A}} = 66.16 \text{ mm}$$

5.2.4.3.3. Ermittlung der Traglast - Zustand SC3

Das Rotationsvermögen ist noch nicht vollständig ausgeschöpft, es sind weitere Tragreserven vorhanden. Diese gilt es im Zustand SC3 zu mobilisieren. Dazu ist zunächst das maximale Rotationsvermögen zu bestimmen.

$$\varphi_{adm,C} = \frac{l_{pl} \cdot (\varepsilon_{sm,adm} - \varepsilon_{sm,C1})}{d_x - x_{u,A}} = 7.94^\circ$$

Beim Mittelaufleger ist der Biege widerstand vorausgesetzt. Im Feld stellt sich ebenfalls ein plastisches Gelenk ein. Dabei ist anzunehmen, dass das Feldmoment kleiner als der Biege widerstand ist. Hier gilt es wiederum einen passenden Spannungszustand im Zugglied zu finden, welcher ein mit dem Rotationsvermögen verträgliches System zur Folge hat. Dazu sind die folgenden Dehnungen im Zugglied im Feld vorausgesetzt.

$$\varepsilon_{s2,SC3} = \varepsilon_{sh,C} = 20 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{s1,SC3} = \varepsilon_{s2,SC3} + \frac{4 \cdot \tau_{b1} \cdot s_{rm}}{2 \cdot \sigma_x \cdot E_{sh,C}} = 106.93 \text{ ‰}$$

Diese resultieren in den folgenden Spannungen.

$$\sigma_{s1,SC3} = (\varepsilon_{s1,SC3} - \varepsilon_{s2,SC3}) \cdot E_{sh,C} + f_{sy,C} = 582.76 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{s2,SC3} = f_{sy,C} = 500.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Daraus folgt die mittlere Dehnung.

$$\varepsilon_{sm,SC3} = \frac{\varepsilon_{s2,SC3} + \varepsilon_{s1,SC3}}{2} = 63.46 \text{ ‰}$$

Dargestellt ist das Betonstahlverhalten entlang des halben Zugglieds in der Abbildung 5.13.

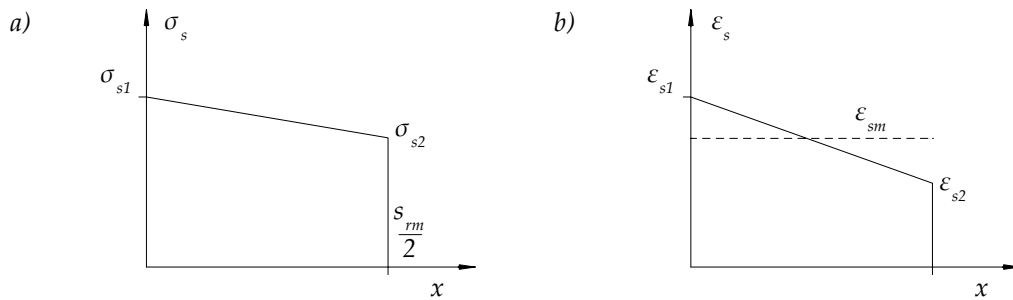


Abbildung 5.13.: a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds des Zustands SC3

Das Biegemoment im Feld und beim Mittellauger sind die folgenden:

$$m_{SC3,F} = a_s \cdot \sigma_{s1,SC3} \cdot z_{,A} = 112.72 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

$$m_{SC3,B} = m_{u,C} = 113.28 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$$

Für diesen Zustand stellt sich die folgende Streckenlast ein:

$$q_{SC3} = \left(\frac{4 \cdot m_{SC3,F} + 2 \cdot m_{u,C}}{l^2} + \frac{4 \cdot \sqrt{m_{SC3,F}^2 + m_{SC3,F} \cdot m_{u,C}}}{l^2} \right) \cdot b = 20.56 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Abschliessend ist die plastische Rotation im Feld zu kontrollieren. Die Lage des plastischen Gelenks im Feld ist hierbei abzuschätzen. Dabei entspricht φ der plastischen Rotation, welche kleiner als das Rotationsvermögen sein muss. Illustriert ist dies in der Abbildung 5.14.

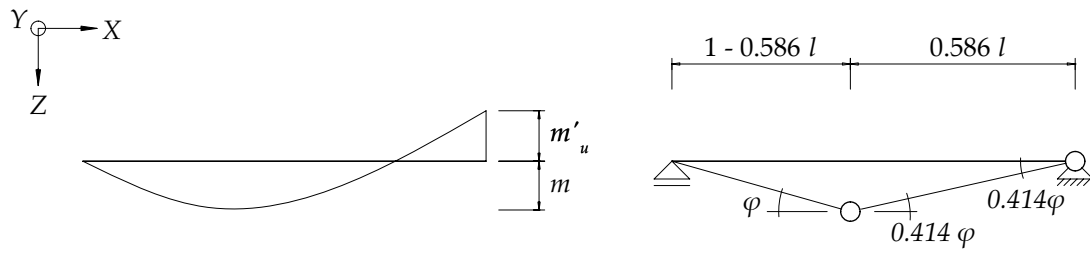


Abbildung 5.14.: Annahme der Lage des plastischen Gelenks im Feld

Mit der gewählten Spannungsverteilung im Zugglied stellt sich die folgende Feldrotation ein.

$$\varphi_{SC3,F} = \frac{l_{pl} \cdot (\varepsilon_{sm,SC3} - \varepsilon_{sm,C1})}{d_x - x_{u,A}} = 7.57^\circ$$

Und beim Mittelaufleger muss die folgende Rotation verfügbar sein:

$$\alpha_{SC3} = \frac{q_{SC3} \cdot l^3}{24 \cdot EI_{II,A}} - \frac{m_{u,C} \cdot b \cdot l}{3 \cdot EI_{II,A}} + 0.414 \cdot \varphi_{SC3,F} = 4.1^\circ$$

$$\varphi_{SC3,erf} = 2 \cdot \alpha_{SC3} = 8.2^\circ$$

Welche mit der maximalen plastischen Rotation zu vergleichen ist.

$$\varphi_{adm,C} = \frac{l_{pl} \cdot (\varepsilon_{sm,adm} - \varepsilon_{sm,C1})}{d_x - x_{u,A}} = 7.94^\circ$$

$$\Delta_{\varphi SC3} = \varphi_{SC3,erf} - \varphi_{adm,C} = 0.25^\circ$$

Die erforderliche Rotation des Mittelauflegers ist in etwa gleich dem Rotationsvermögen. Es ist ein gültiger Zustand gefunden. Abschliessend lässt sich die Feldverformung bestimmen.

$$w_{SC3} = \frac{5 \cdot q_{SC3} \cdot l^4}{384 \cdot EI_{II,A}} - \frac{m_{u,C} \cdot b \cdot l^2}{16 \cdot EI_{II,A}} + \frac{0.414 \cdot \varphi_{SC3,F} \cdot l}{2} = 298.14 \text{ mm}$$

5.2.4.3.4. Zusammenfassung

Der Abschluss der Berechnung des naturharten Stahls bildet die Zusammenstellung der berechneten Grössen.

$q_{SC1} = 12.09 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$	$w_{SC1} = 31.82 \text{ mm}$	$m_{SC1,B} = 96.71 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$
$q_{SC2} = 17.74 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$	$w_{SC2} = 66.16 \text{ mm}$	$m_{SC2,B} = 102.52 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$
$q_{SC3} = 20.56 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$	$w_{SC3} = 298.14 \text{ mm}$	$m_{SC3,F} = 112.72 \frac{\text{kNm}}{\text{m}}$

5.3. NLFE-Modell

Die analytische Lösung hat das Last-Verformungs-Verhalten vollständig beschrieben. Dieser Abschnitt beschreibt das NLFE-Modell, welches die analytische Lösung annähern soll. Es ist die Systemmodellbildung sowie die Querschnittsmodellbildung aufgezeigt. Dazu sind die numerischen Resultate dargestellt und mit den analytischen Resultaten verglichen.

5.3.1. Systemmodellbildung

Das System ist in starre Stäbe unterteilt und mit Stabanfang- und Endgelenken versehen, entsprechend der Modellierungsstrategie in der Abbildung 2.10. Die Streckenlast q ist mit 30 kN/m angesetzt. Die Abbildung 5.15 zeigt das System, die Stabgelenke sind nicht dargestellt.

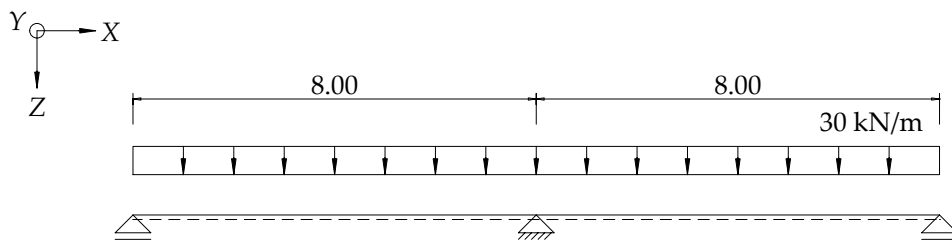


Abbildung 5.15.: Systemmodell des Zweifeldträgers

Eine Detailansicht der Stäbe mit den Gelenken zeigt die Abbildung 5.16. Dazu ist die Einzugslänge l_{Ein} und die Elementlänge l_{El} vermasst.

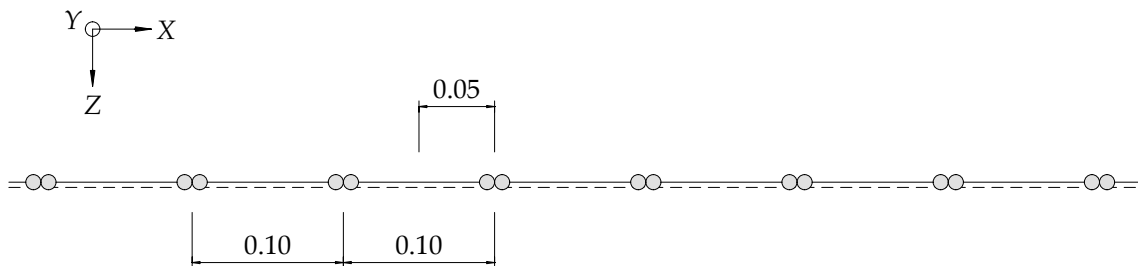


Abbildung 5.16.: Detailansicht des Systemmodells

5.3.2. Querschnittsmodellbildung

Die Querschnittsmodellbildung folgt der Herleitung gemäss dem Kapitel 3.

5.3.2.1. Biegesteifigkeit

Die Ermittlung der Biegesteifigkeit ist in der analytischen Lösung vollumfänglich dargestellt. Folgend sind die berechneten Grössen in der Momenten-Krümmungs-Beziehung zusammengefasst.

Die Momenten-Krümmungs-Beziehung des kaltverformten Stahls ist anhand der Dehnungszustände in Abbildung 5.5 und der Abbildung 5.6 bestimmt. Die Bruchkrümmung ist mittels der Gleichung 3.5 bestimmt. Die berechneten Grössen sind folgend erneut aufgelistet:

$$M_{i,A} = \begin{bmatrix} b \cdot m_{y,A} \\ b \cdot m_{u,A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110.25 \\ 116.06 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$

$$\chi_{i,A} = \begin{bmatrix} \chi_y \\ \chi_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.03 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{m}}$$

$$\varphi_{i,A} = l_{Ein} \cdot \chi_{i,A} = \begin{bmatrix} 0.68 \\ 1.38 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{km}}$$

Das Momenten-Verdrehungs-Diagramm resultiert aus der Anwendung der Gleichung 3.10. Das Diagramm ist mit einem ideal-plastischen Verlauf abgeschlossen. Dies verhindert, dass sich Biegemomente grösser als der Biegezugwiderstand einstellen können. Aufgezeigt sind das Momenten-Krümmungs-Diagramm und das Momenten-Verdrehungsdiagramm des kaltverformten Betonstahls in der Abbildung 5.17

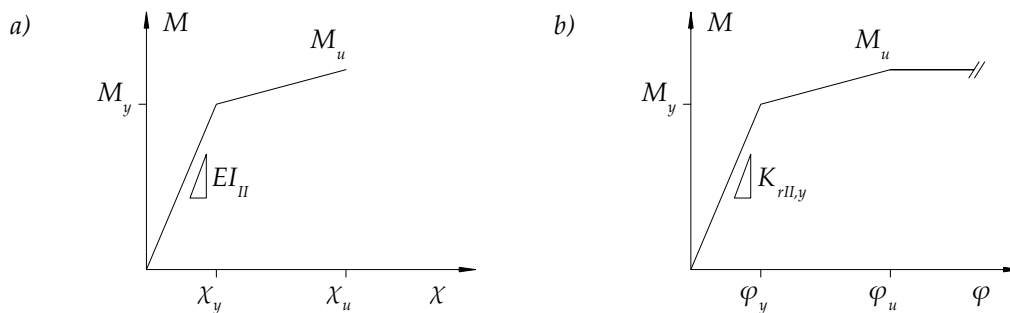


Abbildung 5.17.: a) Momenten-Krümmungs-Diagramm, b) Momenten-Verdrehungs-Diagramm des kaltverformten Betonstahls B500A

Die Ermittlung des Verhaltens des naturharten Betonstahls ist analog. Hierbei sind die berechneten Werte ebenfalls erneut aufgezeigt:

$$M_{i,C} = \begin{bmatrix} b \cdot m_{y,C} \\ b \cdot m_{u,C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 96.71 \\ 113.28 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$

$$\chi_{i,C} = \begin{bmatrix} \chi_y \\ \chi_{sh} \\ \chi_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.08 \\ 0.28 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{m}}$$

$$\varphi_{i,C} = l_{Ein} \cdot \chi_{i,C} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 4.15 \\ 13.8 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{km}}$$

Die Abbildung 5.18 zeigt das Momenten-Krümmungs-Diagramm und das Momenten-Verdrehungs-Diagramm des naturharten Betonstahls. Aufgrund der trilinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betonstahls resultiert eine trilineare Momenten-Krümmungs-Beziehung.

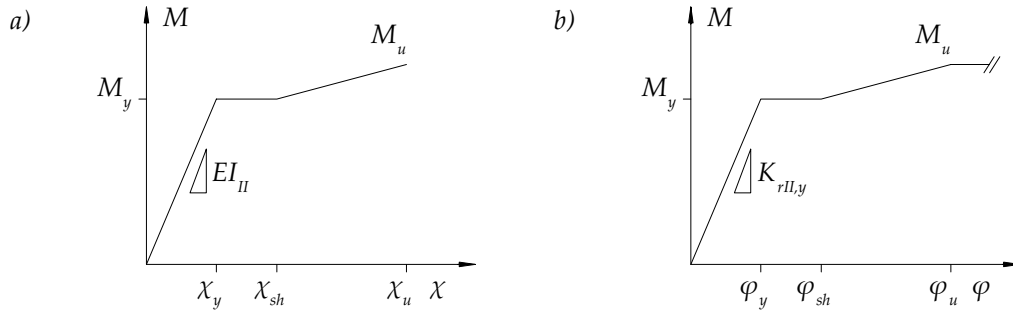


Abbildung 5.18.: a) Momenten-Krümmungs-Diagramm, b) Momenten-Verdrehungs-Diagramm des naturharten Betonstahls B500C

5.3.2.2. Abbruchkriterium

Das Abbruchkriterium bezieht sich auf das Kapitel 3.1.4, es sind die dort beschriebenen Näherungsformeln angewendet. Die zulässigen Rotationen sind in der analytischen Lösung bestimmt. Diese sind folgend aufgelistet:

$$\varphi_{adm,i} = \begin{bmatrix} \varphi_{adm,A} \\ \varphi_{adm,C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.14 \end{bmatrix} \text{ rad}$$

5.3.3. Resultate

Mit der Querschnittsmodellbildung sind die Gelenkeigenschaften geklärt, sowie das Abbruchkriterium definiert. Das Modell ist vollständig beschrieben. Es gilt die Resultate darzustellen und zu interpretieren. Dazu sind in diesem Abschnitt die Zustandslinien der Biegemomente und der Verformungen, sowie das Last-Verformungs-Diagramm in der Feldmitte des Systems aufgezeigt.

5.3.3.1. Kaltverformter Betonstahl

Die Zustände des Systems sind anhand des Lastparameters (LP) gegliedert. Der Lastparameter beschreibt den Anteil der aufgetragenen Streckenlast. Im Modell sind dies 30 kN/m.

Die Verläufe der analytischen und der numerischen Lösung, gezeigt in der Abbildung 5.19, des kaltverformten Betonstahls B500A sind deckungsgleich. Es sind lediglich kleine Differenzen bei der prognostizierten Traglast zu erkennen. Die analytische Lösung beschreibt eine um 5 % höhere Traglast.

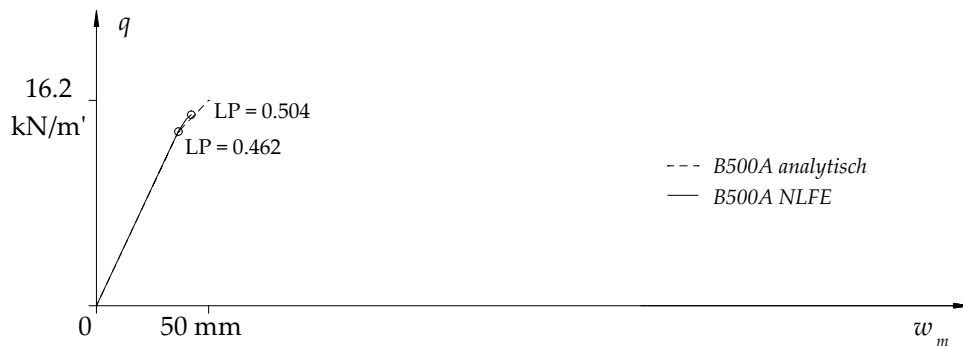


Abbildung 5.19.: Last-Feldmittendurchbiegungs-Diagramm des Systems mit dem kaltverformten Betonstahl. Die analytische und numerische Lösung ist dargestellt. Zudem sind die aussagekräftigen Lastparameter markiert

Die qualitativen Zustandslinien der Biegemomente und der Verformungen sind folgend für beide Lastparameter gezeigt. Die Abbildung 5.20 zeigt das Erreichen des Fließmoments beim Mittelaufleger. Dies ist für den Steifigkeitsabfall verantwortlich. Die Zustandslinien der Biegemomente und der Verformung des Systems beim Erreichen des Abbruchkriteriums zeigt die Abbildung 5.21. Die relativen Gelenkrotationen, gezeigt in der Abbildung 5.22, im Bereich der plastischen Gelenklänge entsprechen in der Summe der zulässigen Gelenkverdrehung.

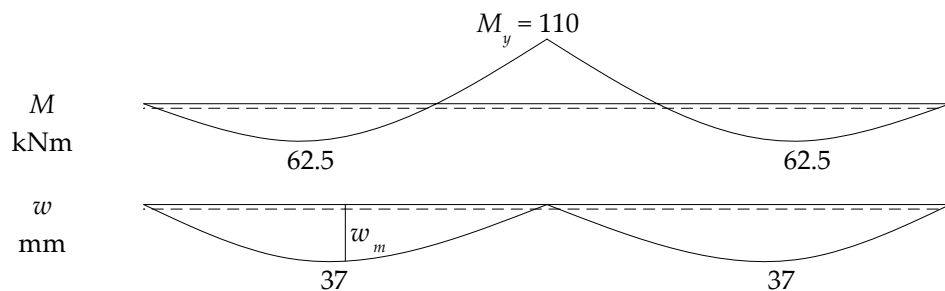


Abbildung 5.20.: Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.462

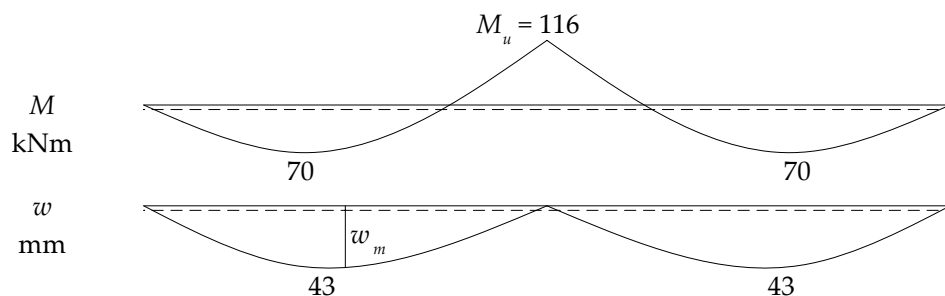


Abbildung 5.21.: Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.504

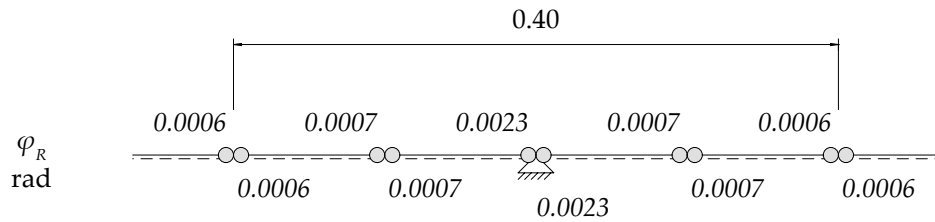


Abbildung 5.22.: Relative Gelenkrotation des Lastparameters 0.504

5.3.3.2. Naturharter Betonstahl

Die Verläufe, gezeigt in der Abbildung 5.23, des naturharten Betonstahl B500C zeigen gleichbleibendes Verhalten bis zum Lastparameter 0.619. Exakt an diesem Punkt erreicht das Gelenkpaar beim Auflager die Bruchkrümmung. Ab dann folgt im NLFE-Modell der ideal-plastische Bereich, aufgezeigt in der Abbildung 5.18 b). Der ideal-plastische Bereich dominiert ab diesem Punkt das Verformungsverhalten. Das Abbruchkriterium ist jedoch noch nicht erreicht, die Summe der relativen Gelenkrotationen im plastischen Gelenkbe-
reich ist weiterhin kleiner als das Rotationsvermögen. Erst beim Lastparameter 0.634 greift das Abbruchkriterium.

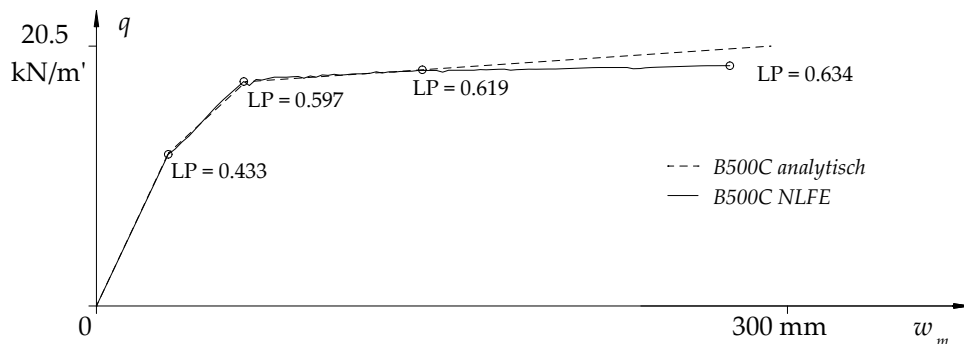


Abbildung 5.23.: Last-Feldmittendurchbiegungs-Diagramm des Systems mit dem naturharten Betonstahl. Die analytische und numerische Lösung ist dargestellt. Zudem sind die aussagekräftigen Lastparameter markiert

Folgend sind die Zustandslinien bei den einzelnen Lastparametern gezeigt. Bei steigender Belastung stellt sich zuerst ein Fließgelenk beim Mittelaufleger ein. Aufgezeigt in der Abbildung 5.24. Danach folgt das Erreichen des Fließmoments im Feld, aufgezeigt in der Abbildung 5.25. Die Abbildung 5.26 zeigt, dass beim Mittelaufleger der Biege-
widerstand erreicht ist. Die Abbildung 5.27 zeigt die Zustandslinien beim Erreichen des Abbruchkriteriums. Die relativen Gelenkrotationen zeigt die Abbildung 5.28, das Abbruchkriterium ist erfüllt.

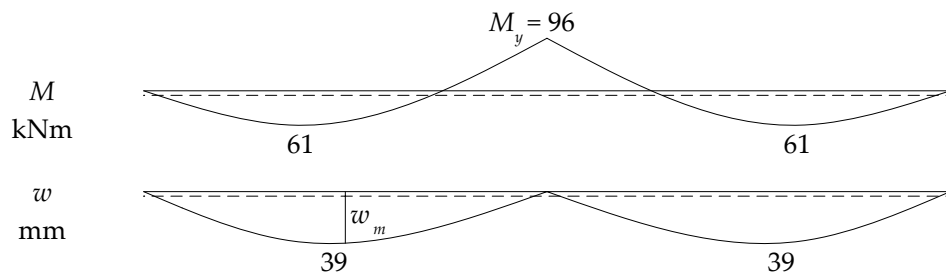


Abbildung 5.24.: Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.433

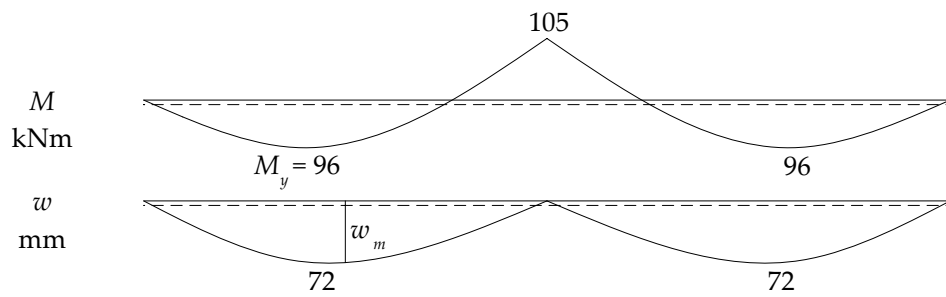


Abbildung 5.25.: Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.597

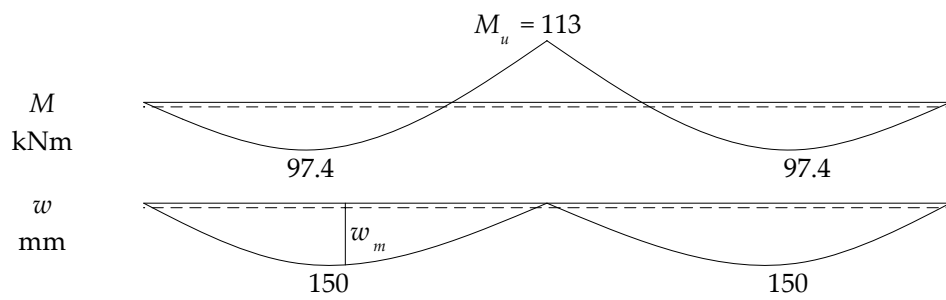


Abbildung 5.26.: Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.619

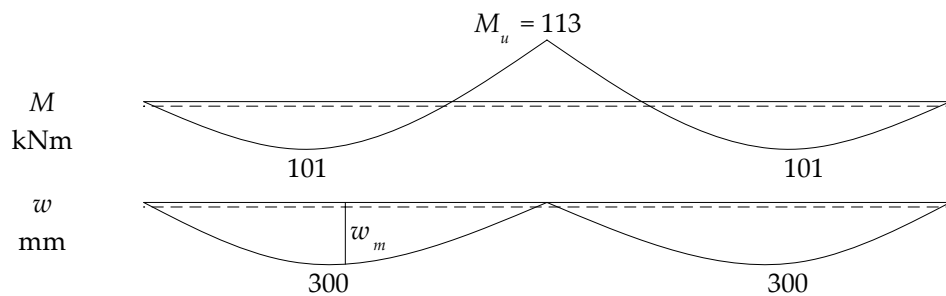


Abbildung 5.27.: Qualitative Zustandslinien des Lastparameters 0.634

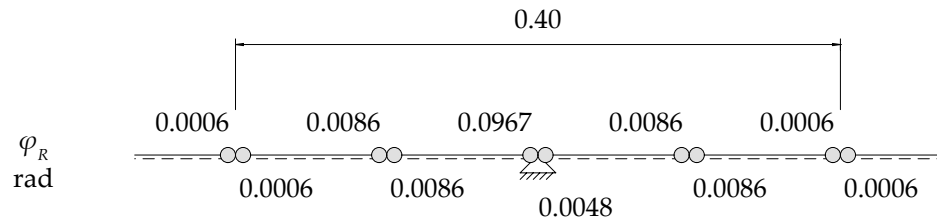


Abbildung 5.28.: Relative Gelenkrotationen des Lastparameters 0.634

Die dargestellten Resultate zeigen, dass sich die analytische Lösung zuverlässig annähern lässt. Die Steifigkeitsermittlung der analytischen Lösung ist problemlos in das NLFE-Modell integrierbar. Die aufwändige Systemanalyse wird durch das NLFE-Modell automatisiert. Ausserdem können die Zustandslinien sämtlicher Schnittgrößen bei jeder Laststufe in AxisVM betrachtet werden. Dies ermöglicht es Ingenieurinnen und Ingenieuren, sämtliche Steifigkeitsänderungen im System zu analysieren und fundierte Aussagen zum nichtlinearen Tragverhalten zu tätigen.

6. Torsionsweicher Trägerrost

Das Beispiel des torsionsweichen Trägerrosts zeigt die Anwendung an einem dreidimensionalen Balkentragwerk. Das Kapitel gliedert sich in den Aufgabenbeschrieb, der analytischen Lösung und der Modellierung mit dem NLFE-Modell inklusive dessen Resultaten.

6.1. Aufgabenbeschrieb

Das Beispiel stammt aus Marti (2014). Es handelt sich um einen torsionsweichen Trägerrost. In der Abbildung 6.1 ist der Grundriss des Trägerrosts dargestellt. Das System besteht aus insgesamt 8 torsionsweichen Stäben, welche an den Enden eingespannt sind.

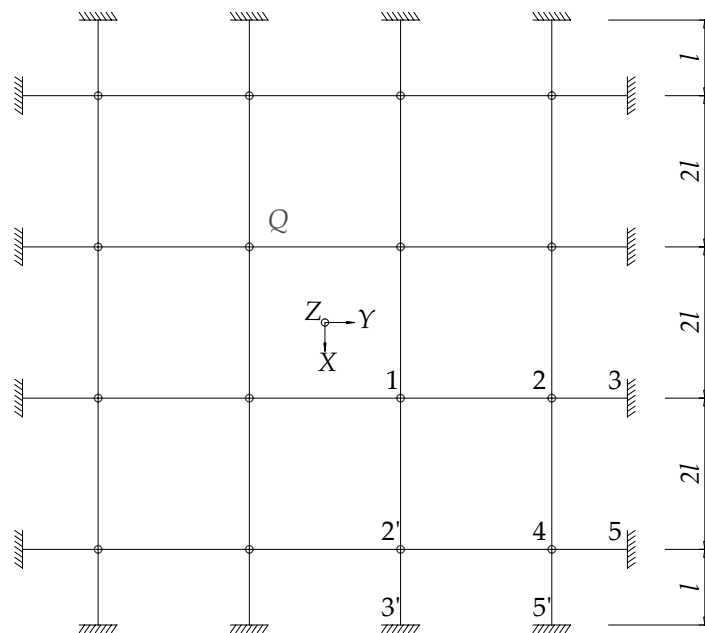


Abbildung 6.1.: Grundriss des torsionsweichen Trägerrosts, nachgezeichnet nach Marti (2014)

Es ist die Traglast des Systems zu ermitteln. Die Stablänge und die positiven und negativen Biege widerstände sind die folgenden.

$$l = 1 \text{ m} \quad M_u = 100 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M'_u = 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

6.2. Analytische Lösung

Die analytische Lösung basiert auf dem Traglastverfahren, beschrieben in Marti (2014). Mittels eines zulässigen Mechanismus ist ein oberer Grenzwert der Traglast herzuleiten. In der Abbildung 6.2 sind der innen- und der aussenliegende Stab dargestellt. Aus Symmetriegründen lässt sich der obere Grenzwert des gesamten Trägerrosts anhand dieser Darstellung ermitteln.

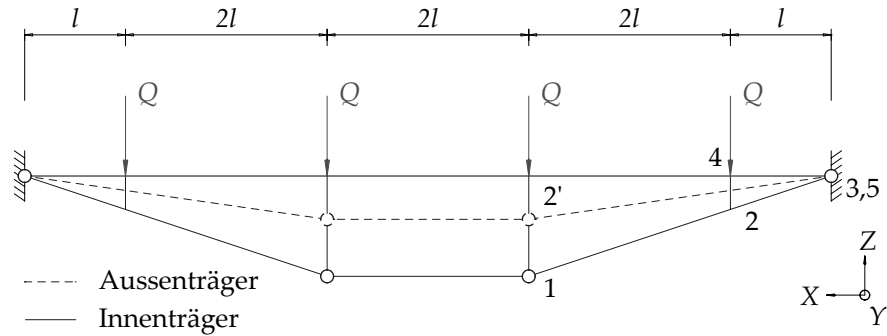


Abbildung 6.2.: Schnitt des torsionsweichen Trägerrosts mit dem angenommenen Mechanismus für den Innen- und Aussenträger, nachgezeichnet nach Marti (2014)

Die äussere Arbeit W_a des dargestellten Systems in Abbildung 6.2 beträgt dabei für die am Rand gelegenen Stäbe (Punkte 2'45):

$$W_{a,2'45} = 4 \cdot \left(Q \cdot \frac{1}{3} + Q \cdot \frac{1}{9} \right)$$

Und für die Innenträger:

$$W_{a,123} = 4 \cdot \left(Q \cdot 1 + Q \cdot \frac{1}{3} \right)$$

Sowie beträgt die innere Arbeit:

$$W_i = 8 \cdot (M'_u + M_u) \cdot \left(\frac{1}{3l} + \frac{1}{9l} \right)$$

Durch das abschliessende Gleichsetzen der Arbeiten und das Lösen nach Q folgt der obere Grenzwert der Traglast zu:

$$Q = \frac{M_u + M'_u}{2 \cdot l}$$

Die Plastizitätskontrolle ist in der Abbildung 6.3 gezeigt. Dabei wird eine Lastverteilung von je einer Hälfte Q in x und y Richtung angenommen, welche sich nach vollständigem Umlagern der Biegemomente einstellt.

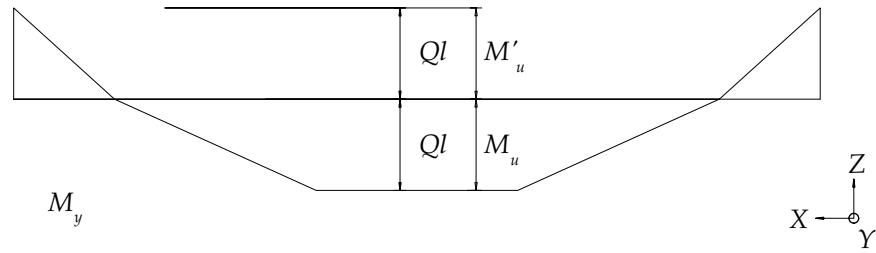


Abbildung 6.3.: Plastizitätskontrolle anhand der Zustandslinien der Biegemomente des Stabausschnitts

Aus der Plastizitätskontrolle geht heraus, dass der Biegewiderstand nirgends überschritten ist. Somit deckt sich der untere und obere Grenzwert der Traglast, sprich die Traglast Q_u ist gefunden. Die analytische Beziehung, mit den numerischen Eingabeparametern substituiert, zeigt die folgende Gleichung:

$$Q_u = \frac{M_u + M'_u}{2 \cdot l} = 100.0 \text{ kN}$$

6.3. NLFE-Modell

Die kompakte analytische Lösung gilt es nun mit dem NLFE-Modell zu approximieren. Das Modell ist in diesem Abschnitt beschrieben. Dazu ist die Systemmodellbildung und die Querschnittsmodellbildung erläutert. Abschliessend sind die Resultate aufgezeigt.

6.3.1. Systemmodellbildung

Das System ist in starre Stäbe unterteilt und mit den Gelenken versehen. Die Abbildung 6.4 zeigt das statische System. Die Einwirkung ist mit 120 kN modelliert.

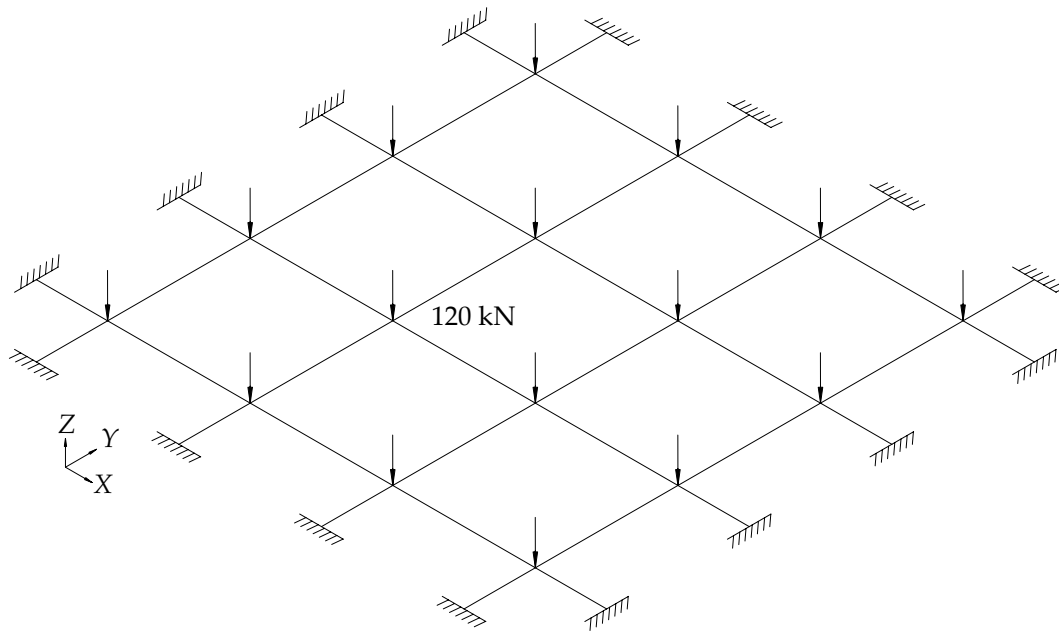


Abbildung 6.4.: Systemmodell des torsionsweichen Trägerrosts

Ein detaillierter Ausschnitt des Modells zeigt die Abbildung 6.5. In dieser sind die Stabanfang- und Endgelenke eingezeichnet, sowie die Elementlänge l_{El} vermasst.

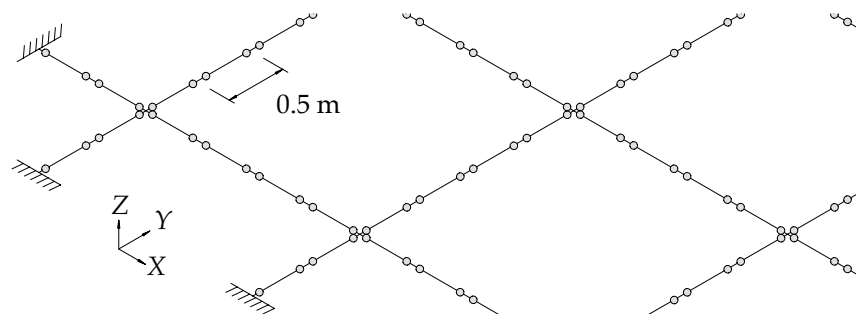


Abbildung 6.5.: Detailansicht des Trägerrosts mit Gelenken und vermasster Elementlänge

6.3.2. Querschnittsmodellbildung

Die Querschnittsmodellbildung zeigt die Ermittlung der Biegesteifigkeit und des Abbruchkriteriums auf.

6.3.2.1. Biegesteifigkeit

Die Biegesteifigkeit spielt beim Traglastverfahren eine Nebenrolle, da die Verformungen des Systems von keiner Bedeutung sind. Lediglich der Biegewiderstand ist von Interesse. Das Verhalten lässt sich mit einem ideal-plastischen Momenten-Krümmungs-Diagramm beschreiben. Aufgezeigt in der Abbildung 6.6 a).

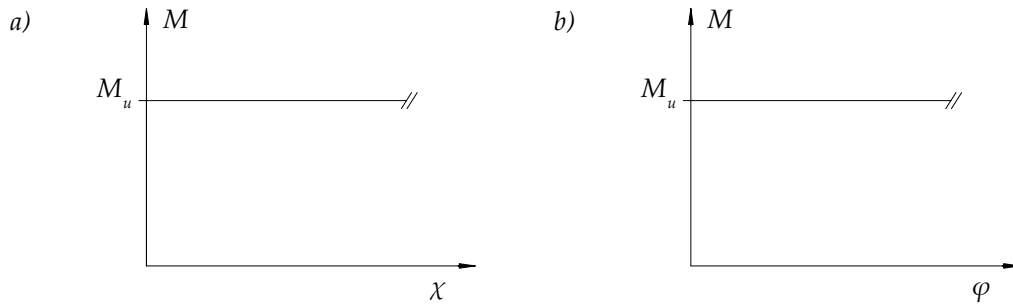


Abbildung 6.6.: Ideal-plastisches, a) Momenten-Krümmungs-Diagramm, b) Momenten-Verdrehungs-Diagramm

Das ideal-plastische Verhalten ist punktsymmetrisch um den Diagrammursprung. Das Verhalten gilt somit ebenfalls für negative Biegemomente. Die Momenten-Verdrehungs-Beziehung folgt aus der Gleichung 3.10. Sämtliche Gelenke weisen die Beziehung gemäss der Abbildung 6.6 b) auf.

6.3.2.2. Abbruchkriterium

Das Abbruchkriterium vereinfacht sich für das Traglastverfahren. Die Traglast stellt sich bei einer vollständigen Umlagerung sämtlicher Biegemomente ein. Die Traglast ist gefunden, wenn sich die Last nicht mehr steigern lässt. Das Rotationsvermögen ist nicht zu begrenzen.

6.3.3. Resultate

Mit der Querschnittsmodellbildung ist das System vollständig beschrieben. Es lässt sich analysieren und dessen Resultate ausgeben. Es sind das Last-Verformungs-Verhalten und die entsprechenden Zustandslinien der Biegemomente gezeigt.

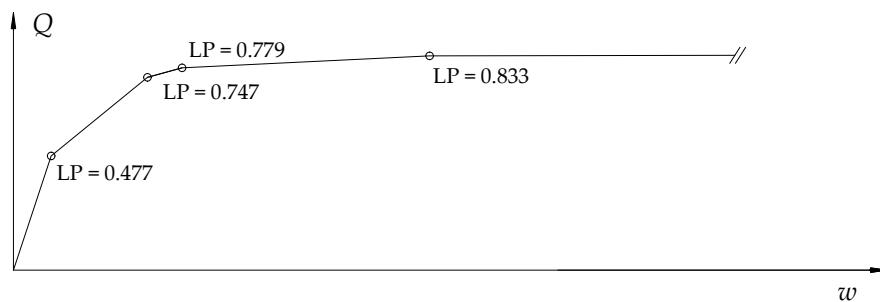


Abbildung 6.7.: Schematisches Last-Verformungs-Diagramm des Systems. Die auffallenden Steifigkeitsänderungen im System sind mit den entsprechenden Lastparametern markiert

Jeder Knick im Diagrammverlauf beschreibt die Bildung eines plastischen Gelenks. Die Zustandslinien der Biegemomente der entsprechenden Laststufen sind folgend gezeigt. Die Abbildung 6.8 zeigt das System bei einem Lastparameter von 0.477. Es bildet sich das

erste plastische Gelenke bei den Auflagern der Innenträger. Die Abbildung 6.9 zeigt die Bildung der plastischen Gelenke bei den Auflagern der Aussenträger. Darauf folgt die Bildung der plastischen Gelenke im Feld der Innenträger, gezeigt in der Abbildung 6.10. Abschliessend zeigt die Abbildung 6.11 die Bildung der plastischen Gelenke im Feld der Aussenträger. Die Traglast ist damit erreicht, die Last lässt sich nicht weiter steigern. Der Verlauf in der Abbildung 6.7 verdeutlicht dies.

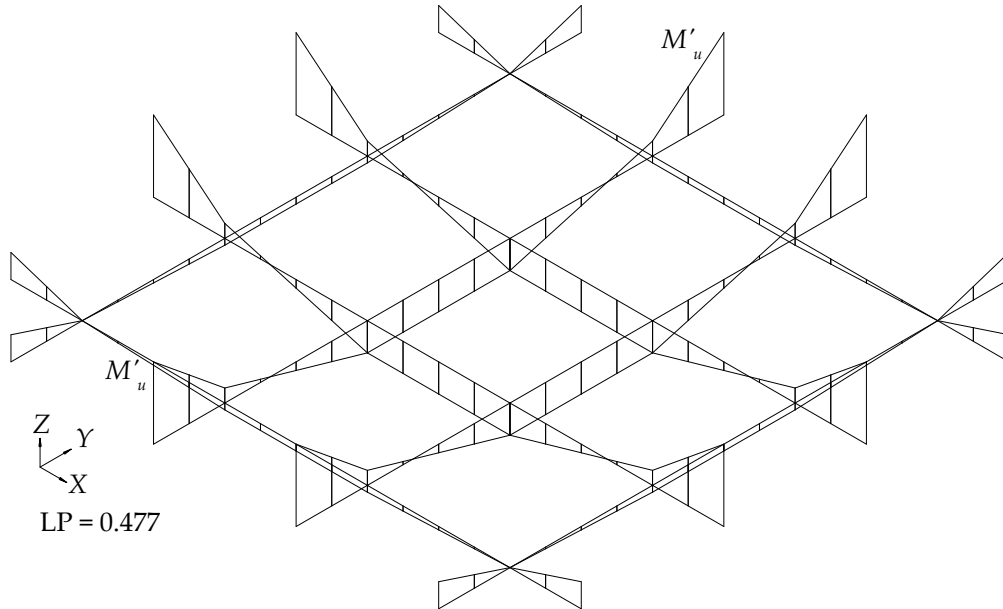


Abbildung 6.8.: Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.477

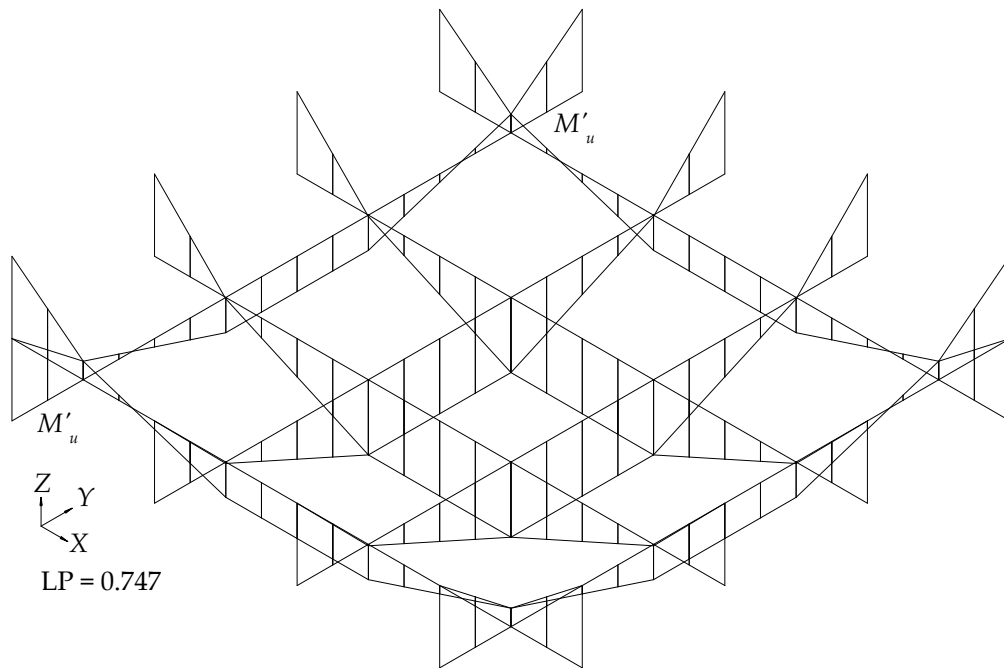


Abbildung 6.9.: Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.747

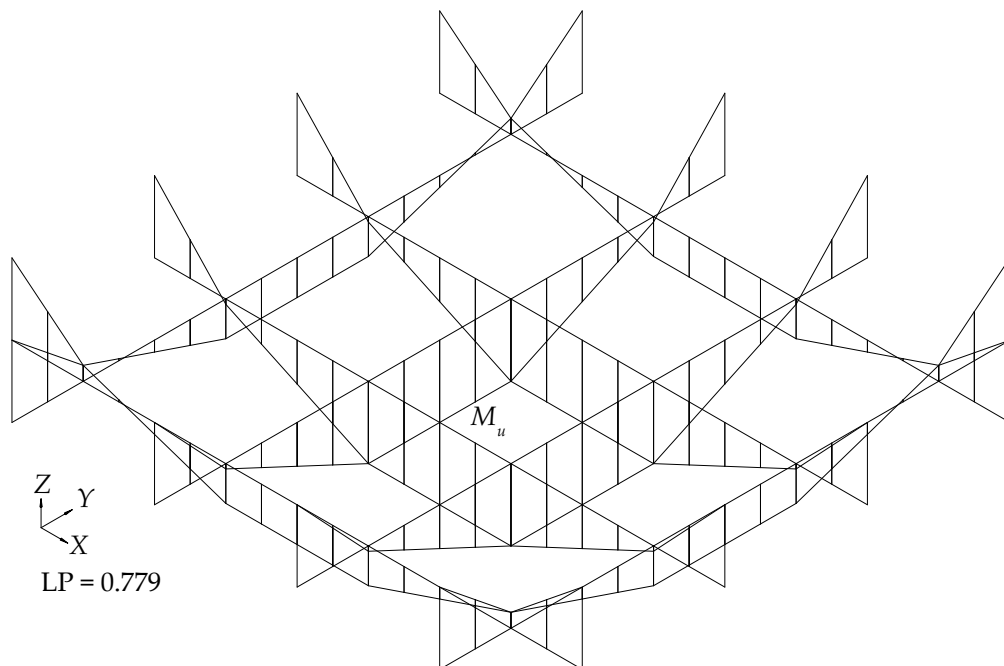


Abbildung 6.10.: Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.779

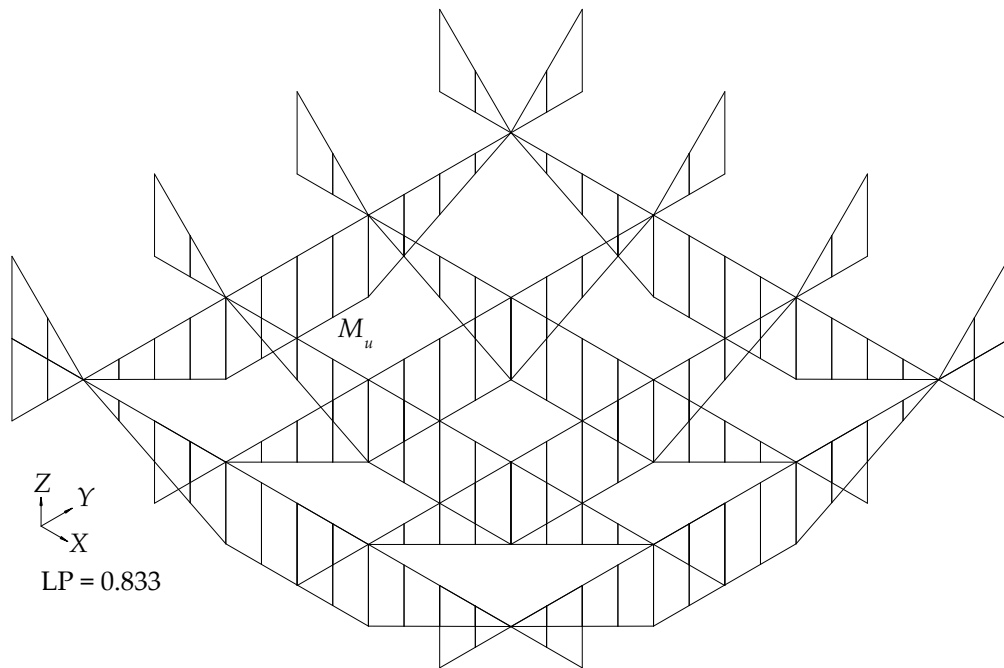


Abbildung 6.11.: Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.833

Die Traglast stimmt mit der analytischen Lösung überein. Dies zeigt die folgende Gleichung. Es ist hervorzuheben, dass sich mit dem NLFE-Modell lediglich der untere Grenzwert der Traglast ermitteln lässt. Beim hier gewählten System fallen der obere und der untere Grenzwert jedoch zusammen.

$$Q_{uNLFE} = 0.833 \cdot 120 = 99.96 \text{ kN}$$

$$Q_u = \frac{M_u + M'_u}{2 \cdot l} = 100.0 \text{ kN}$$

Das Anwendungsbeispiel zeigt, dass sich dreidimensionale Systeme problemlos modellieren lassen. Die Umlagerung der Biegemomente erfolgt auch im dreidimensionalen Raum. Die numerischen Resultate liegen zuverlässig nahe an der analytischen Lösung. Ausserdem können sämtliche Zustandslinien der Schnittgrössen für jede Laststufe dargestellt werden. Dies erhöht das Verständnis des Tragverhaltens.

7. Quadratplatte

Die vorgängige Analyse des torsionsweichen Trägerrostes zeigt, dass sich der untere Grenzwert der Traglast zuverlässig mit dem NLFE-Modell bestimmen lässt. Der Modellierungsaufwand bleibt dabei gering, da die verwendete Querschnittsmodellbildung lediglich ein ideal-plastisches Biegeverhalten berücksichtigt. Das gleiche Vorgehen wird nun auf die Quadratplatte angewendet. Diese dient als Einstieg in die Anwendung der Plattentheorie, Kapitel 4. Das Anwendungsbeispiel der Quadratplatte gliedert sich in den Aufgabenbeschrieb, die analytische Lösung und die Modellbildung des NLFE-Modells.

7.1. Aufgabenbeschrieb

Die Abbildung 7.1 zeigt eine Quadratplatte, die mit einer konstanten Flächenlast belastet ist. Die Platte ist an allen Rändern gelenkig gelagert. Die Randbedingungen sind so gewählt, dass der untere und obere Grenzwert der Traglast zusammenfallen.

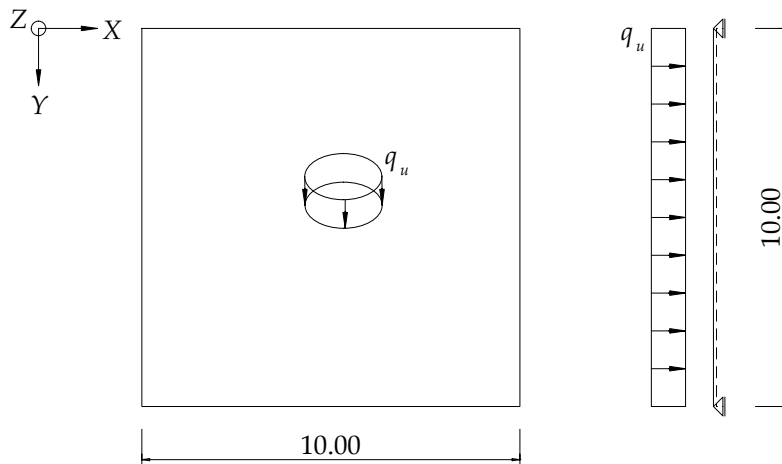


Abbildung 7.1.: Quadratplatte mit gleichmässiger Flächenlast. Die Lagerungsbedingung und die Abmessung sind dargestellt.

Das Ziel ist es, die Traglast des Systems analytisch zu bestimmen und diese anschliessend mit der Lösung des NLFE-Modells zu vergleichen. Die relevanten Parameter wie der Biege widerstand und die Plattenabmessung sind wie folgt definiert.

$$m_u = 100.0 \frac{\text{kNm}}{\text{m}} \quad a = 10 \text{ m}$$

7.2. Analytische Lösung

Die analytische Lösung grenzt die Traglast mit einem oberen und einem unteren Grenzwert ein. Der obere Grenzwert basiert auf der Fliessgelenklinienmethode. Die Fliessgelenke sind durch die Fliessfigur in Abbildung 7.2 bestimmt. Die Fliessfigur zeigt eine Interaktion zwischen Biege- und Drillmomenten.

Anhand eines gewählten Mechanismus ist über das Gleichsetzen der inneren und äusseren Arbeit der obere Grenzwert der Traglast zu bestimmen. In Marti (2014) ist die Methode detailliert beschrieben.

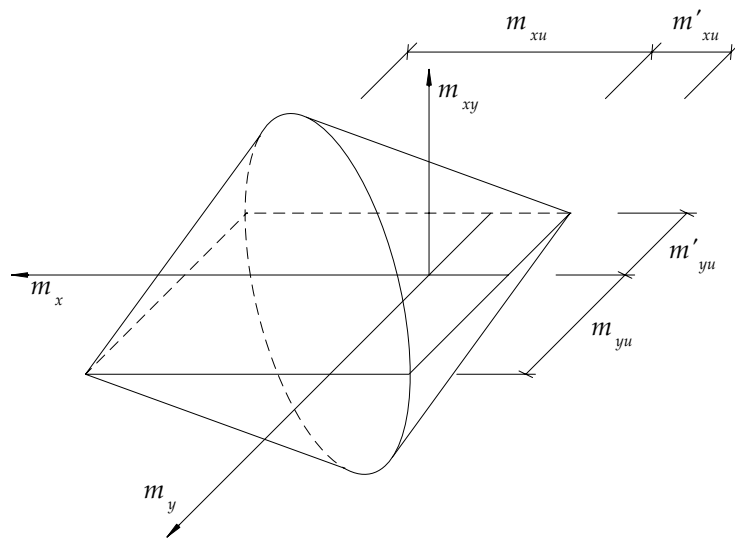


Abbildung 7.2.: Fliessfigur der Fliessgelenklinienmethode im m_x, m_y, m_{xy} -Raum

Das Kapitel 25.5.3 aus Marti (2014) zeigt die Bestimmung der Traglast einer einfach gelagerten Rechteckplatte. Der Mechanismus, sprich die Anordnung der Fliessgelenklinien in der Platte, zeigt die Abbildung 7.3.

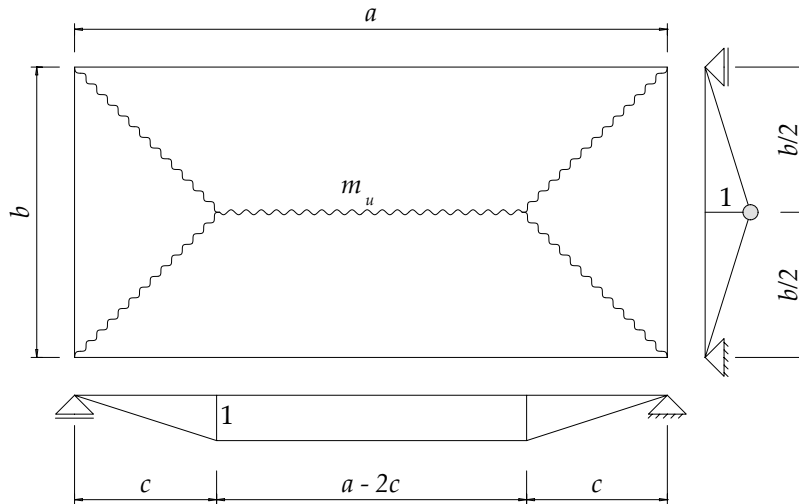


Abbildung 7.3.: Fließgelenklinien einer einfach gelagerten Rechteckplatte, neu gezeichnet nach Marti (2014)

Mittels der Momentenansätzen, beschrieben in Marti (2014), lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen erfüllen, sprich einen unteren Grenzwert der Traglast ermitteln. Die Anwendung beider Methoden auf die Rechteckplatte liefert die folgende Eingrenzung der Traglast:

$$8(1 + \beta + \beta^2) \leq \frac{q_u b^2}{m_u} \leq \frac{24}{(\sqrt{3 + \beta^2} - \beta)^2}$$

dabei entspricht β dem Verhältnis der Seitenlängen:

$$\beta = \frac{b}{a}$$

Für die Quadratplatte ist $a = b$ anzusetzen. Dies führt zu dem Mechanismus gemäss der Abbildung 7.4.

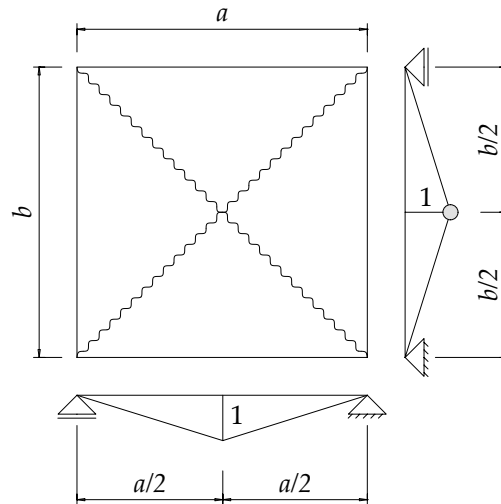


Abbildung 7.4.: Fliessgelenklinien der einfach gelagerten Quadratplatte

Und zu der folgenden Eingrenzung der Traglast.

$$\frac{24m_u}{a^2} \leq q_u \leq \frac{24m_u}{a^2}$$

Es ist ersichtlich, dass die Grenzen zusammenfallen. Die Traglast ist somit eindeutig bestimmt. Mit den gewählten Abmessungen und dem Biege­widerstand ist die Traglast die folgende.

$$q_u = \frac{24 \cdot m_u}{a^2} = 24.0 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

7.3. NLFE-Modell

Nach der Bestimmung der analytischen Traglast zeigt der folgende Abschnitt die Modellbildung des nichtlinearen FE-Modells. Es sind die Systemmodellbildung, die Querschnittsmodellbildung und die Resultate aufgezeigt.

7.3.1. Systemmodellbildung

Das System ist in der Abbildung 7.5 gezeigt. Dargestellt sind der Trägerrost, Stabanfang- und Endgelenke, Auflager und Knotenlasten. Die Knotenlasten sind schematisch dargestellt, gelten jedoch für sämtliche Kreuzungspunkte. Die Gelenke sind gemäss der Modellierungsstrategie angeordnet. Die Elementlänge ist vermasst.

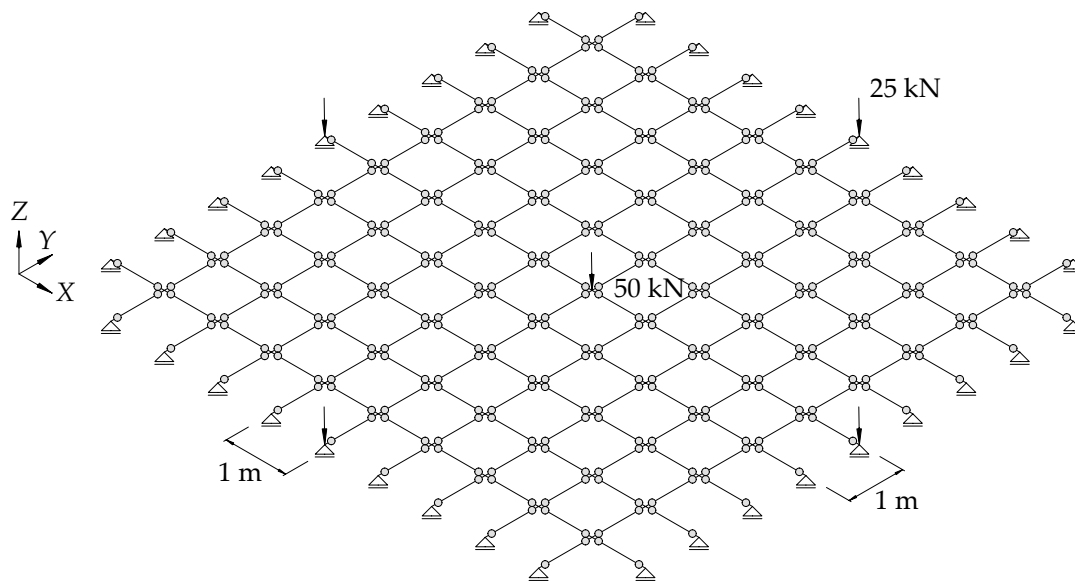


Abbildung 7.5.: Systemmodell des Trägerrosts als Ersatzsystem der Quadratplatte. Die Einzellasten und Elementlänge sind dargestellt

7.3.2. Querschnittsmodellbildung

Es ist die Bestimmung der Ersatzbiegesteifigkeit und der Ersatztorsionssteifigkeit der Stäbe des Trägerrosts aufgezeigt.

7.3.2.1. Ersatzbiegesteifigkeit

Die Ersatzbiegesteifigkeit ist nebensächlich beim Traglastverfahren. Lediglich der Biege-
widerstand ist von Interesse. Der Biege-
widerstand des Stabs lässt sich durch die Multi-
plikation des auf die Einheitslänge bezogenen Biege-
widerstands mit der Elementlänge
bestimmen.

Das Gelenkverhalten lässt sich mit einer ideal-plastischen Momenten-Krümmungs-
Beziehung beschreiben. Diese ist in der Abbildung 7.6 a) gezeigt. Die Gelenkdefinition
folgt unter der Anwendung der Gleichung 3.10 und ist in der Abbildung 7.6 b) dargestellt.
Die Beziehungen sind punktsymmetrisch um den Achsenursprung, sie gelten somit für
positive und negative Biegebeanspruchung.

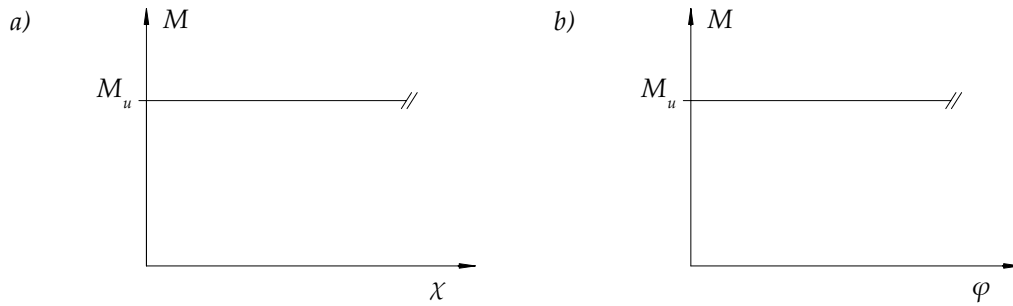


Abbildung 7.6.: Ideal-plastisches a) Momenten-Krümmungs-Diagramm, b) Momenten-Verdrehungs-Diagramm

7.3.2.2. Ersatztorsionssteifigkeit

Auch beim Torsionsverhalten ist nur der Widerstand von Interesse. Der Torsionswiderstand ist in Abhängigkeit des Biege­widerstands zu wählen. Dies zeigt die Abbildung 7.2, in der die Drillmomente in Abhängigkeit der Biegemomente die Fliessfigur definieren. Im Trägerrost lässt sich dies jedoch nicht modellieren.

Der Torsionswiderstand ist gemäss dem maximalen Drillwiderstand definiert. Die Gleichung 7.1 zeigt diesen für die Fliessfigur.

$$m_{xy,max} = \frac{1}{2} \sqrt{(m_x + m'_x)(m_y + m'_y)} \quad (7.1)$$

Setzt man in der Gleichung 7.1 den Biege­widerstand für sämtliche Biegemomententerme voraus, so entspricht der maximale Drillwiderstand dem Biege­widerstand. Als Vereinfachung ist folglich das Torsionsverhalten gleich dem Biegeverhalten modelliert. Dem Trägerrost ist eine ideal-plastische Torsions-Verdrehungs-Beziehung hinterlegt.

Das modellierte Verhalten lässt sich an der Fliessfigur illustrieren. Die Abbildung 7.7 zeigt die Fliessfigur des Trägerrosts. Die Darstellung ist schematisch für sich unterscheidende positive und negative Biege­widerstände. Grau hinterlegt ist die Fliessfigur der Fliessge­lenklinienmethode.

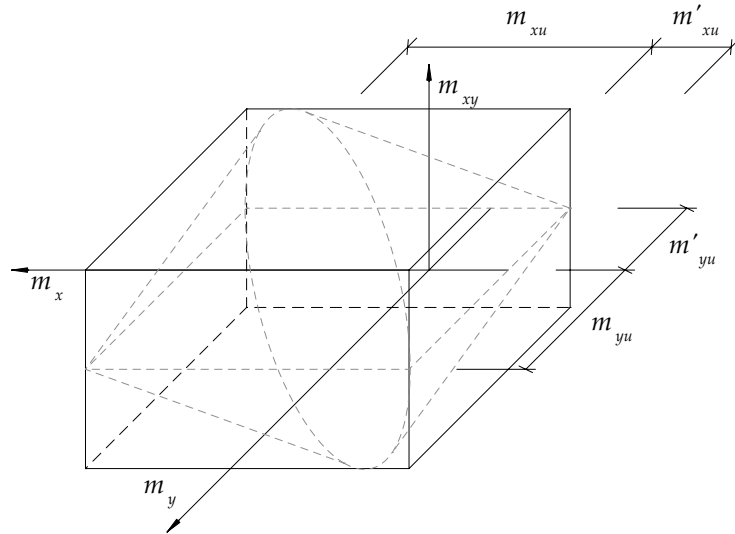


Abbildung 7.7.: Fließfigur des Trägerrosts im m_x, m_y, m_{xy} -Raum

Die Darstellung verdeutlicht, dass bei hohen Biegemomenten und zugleich grosser Torsionsbeanspruchung das Tragverhalten überschätzt wird.

7.3.2.3. Abbruchkriterium

Das Abbruchkriterium vereinfacht sich für das Traglastverfahren. Die Traglast ist erreicht, wenn sich eine vollständige Umlagerung der Biege- und Torsionsmomente eingestellt hat. Im Last-Verformungs-Diagramm zeigt sich dies, wenn die Last nicht mehr weiter ansteigt.

7.3.3. Resultate

Das qualitative Last-Verformungs-Verhalten ist in der Abbildung 7.8 gezeigt. Die Kurve beginnt abzuflachen beim Erreichen des Biege widerstands in der Mitte des Systems. Danach bilden sich nach und nach weitere Gelenke, bis zum Erreichen der Traglast.

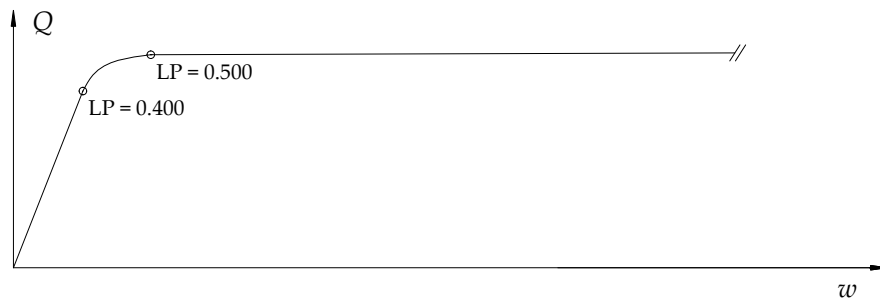


Abbildung 7.8.: Qualitatives Last-Verformungs-Diagramm des Systems mit beschrifteten Lastparametern

Die qualitativen Zustandslinien der Biegemomente beim Erreichen des Biege widerstands in der Mitte sind in der Abbildung 7.9 dargestellt. Die zugehörigen Torsionsmomente zeigt Abbildung 7.10. In den Ecken ist der Torsionswiderstand bei diesem Lastparameter noch nicht erreicht.

Die Abbildung 7.11 zeigt das System, bei dem in sämtlichen Stäben plastische Biege gelenke vorliegen. Die Torsionsmomente in Abbildung 7.12 verdeutlichen, dass der Torsionswiderstand in den Ecken ebenfalls erreicht ist. Die Traglast ist gefunden.

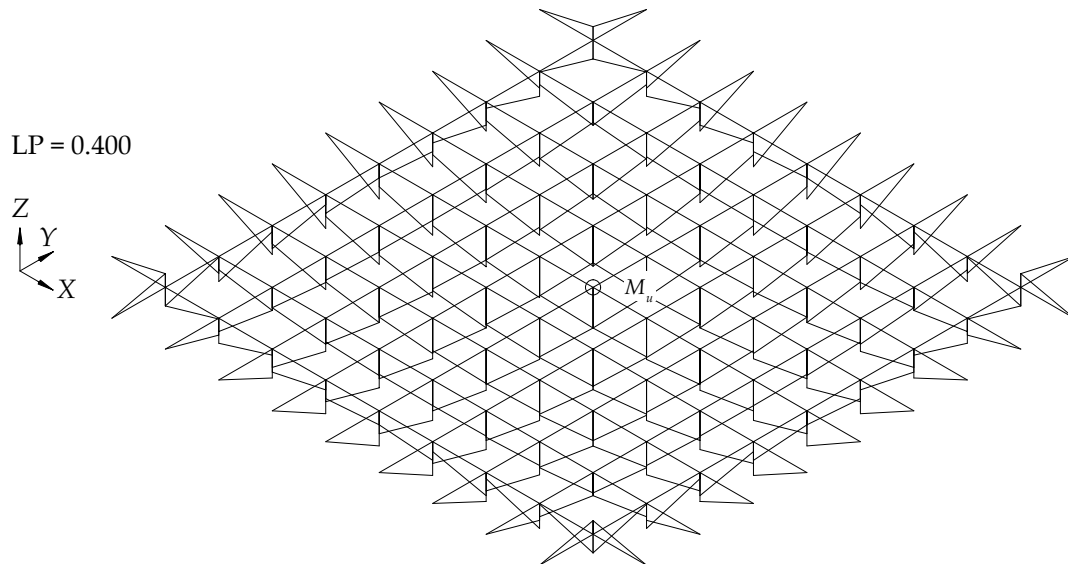


Abbildung 7.9.: Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.400

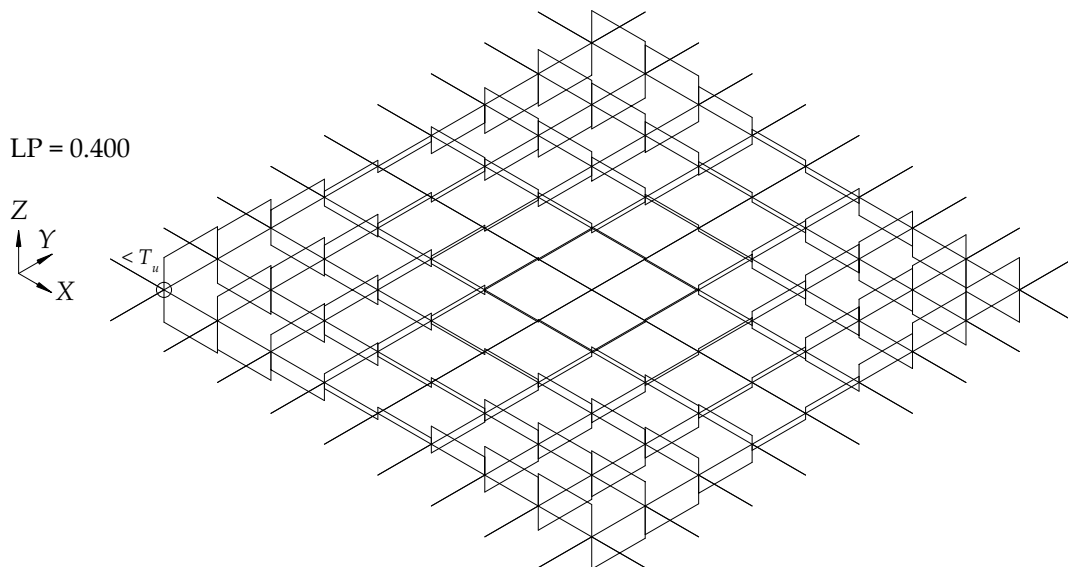


Abbildung 7.10.: Qualitative Zustandslinien der Torsionsmomente des Systems beim Lastparameter 0.400

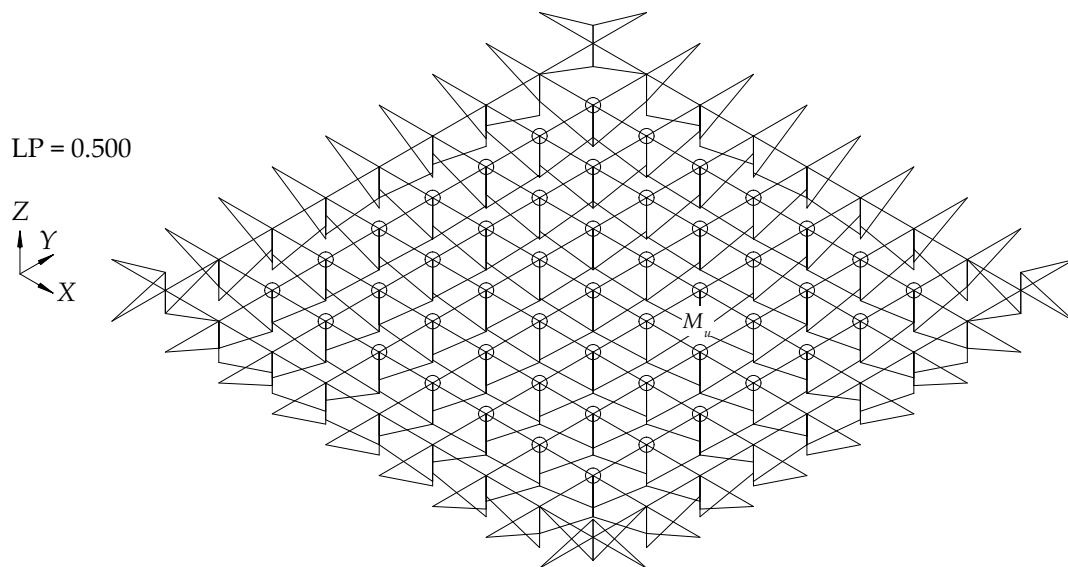


Abbildung 7.11.: Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.500

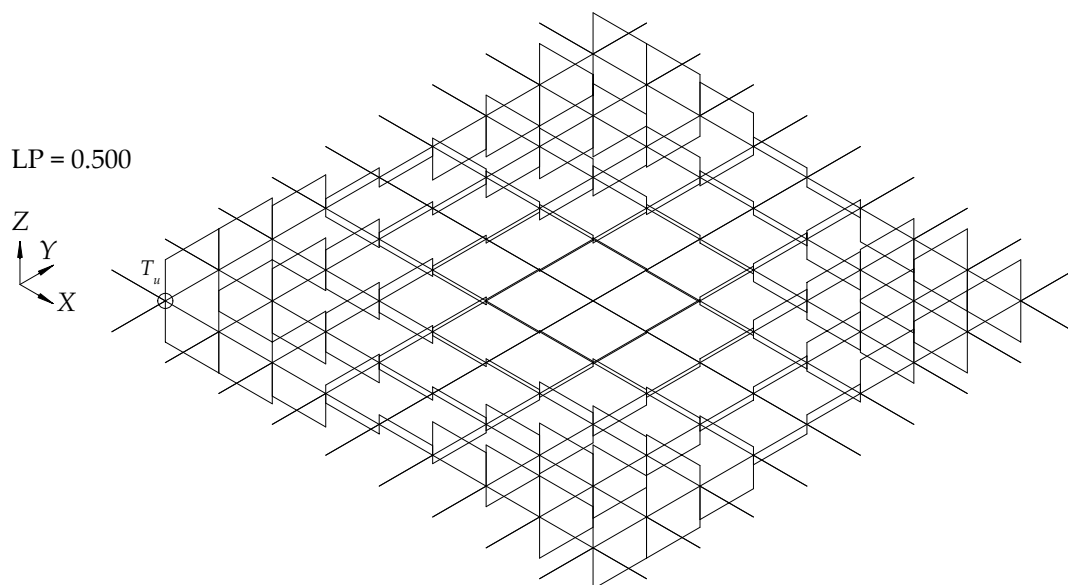


Abbildung 7.12.: Qualitative Zustandslinien der Torsionsmomente des Systems beim Lastparameter 0.500

Abschliessend zeigt die folgende Berechnung die Traglast des NLFE-Modells. Diese ist annähernd gleich derer der analytischen Lösung.

$$l_{El} = 1 \text{ m}$$

$$q_{uNLFE} = 0.5 \cdot 50 \cdot \frac{1}{l_{El}^2} = 25.0 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

$$q_u = \frac{24 \cdot m_u}{a^2} = 24.0 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$

Die prognostizierte Traglast des Trägerrosts stellt eine geeignete Näherung zur analytischen Lösung dar. Der untere Grenzwert der Traglast des NLFE-Modells liegt oberhalb des oberen Grenzwerts der analytischen Lösung der Platte. Dieses Ergebnis ist einerseits auf die unterschiedliche Definition der Fliessgelenke zurückzuführen. Die quaderförmige Fliessfigur überschätzt das Tragverhalten. Die Diskrepanz der Fliessgelenke ist in der Abbildung 7.7 verdeutlicht.

Andererseits ist der Vergleich nicht direkt aussagekräftig, da unterschiedliche statische Systeme betrachtet werden. Der untere Grenzwert des Trägerrosts sollte mit dem oberen Grenzwert eines drillsteifen Trägerrosts verglichen werden und nicht mit der Platte. Die Grenzwertsätze bleiben somit uneingeschränkt gültig.

8. Versuchsnachrechnung Zweifeldplatte

Der Abschluss der Modellanwendung bildet die Versuchsnachrechnung der Zweifeldplatte. Das Kapitel ist gegliedert in den Versuchsbeschrieb, die Modellbildung des NLFE-Modells und die Resultate, welche mit den Messgrößen des Experiments verglichen werden.

8.1. Versuchsbeschrieb

Die Zweifeldplatte entstammt aus dem Versuchsbericht Thoma und Niederberger (2010). Es handelt sich um ein grossmassstäbliches Plattenexperiment. Dazu ist eine Stahlbetonplatte auf Gleitlagern aufgelegt. Die Gleitlager stehen auf steifen Ringbalken. Diese wiederum sind auf Mauerwerkswänden gelagert. Belastet ist die Platte mit Zugstangen in den beiden Feldern. Verankert sind die Zugstangen im Aufspannboden an Hydraulikzylindern. Die Hydraulikzylinder weisen bei jeder Laststufe die gleiche Kraftintensität auf. Eine Darstellung des Versuchsaufbaus zeigt die Abbildung 8.1.

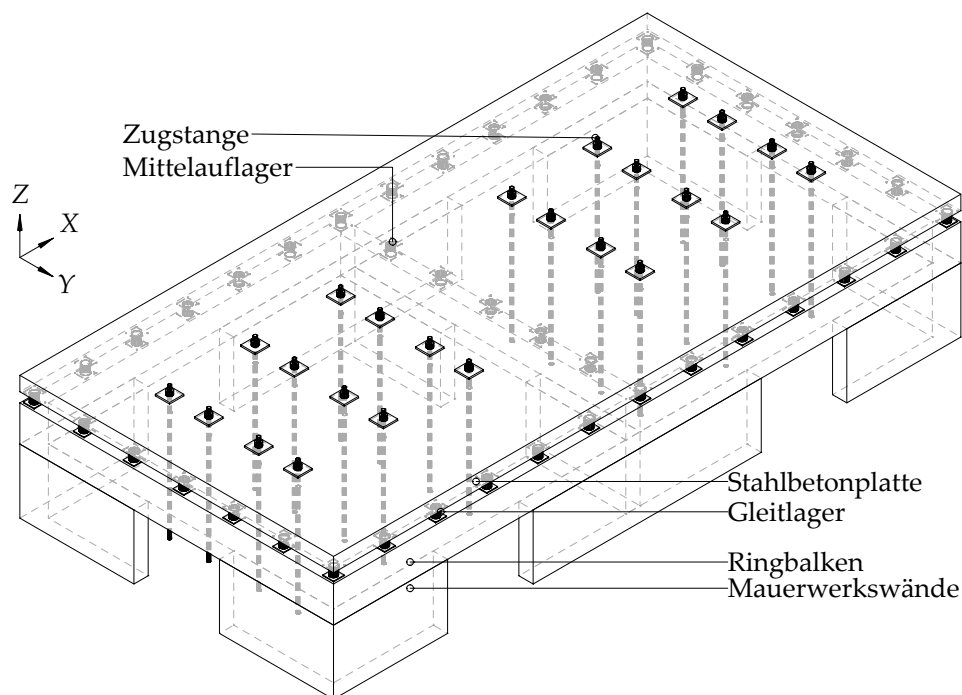


Abbildung 8.1.: Isometrische Ansicht des Versuchsaufbaus, dargestellt sind die Platte, die Lagerung, die Krafteinleitung mittels den Zugstangen, ein Ringbalken unterhalb der Lagerung und Mauerwerkswände als Auflager der Ringbalken

Der Grundriss und die Längsansicht zeigt die Abbildung 8.2. Diese zeigt die Position der Gleitlager, die Position der Zugstangen und die Hauptabmessungen der Platte.

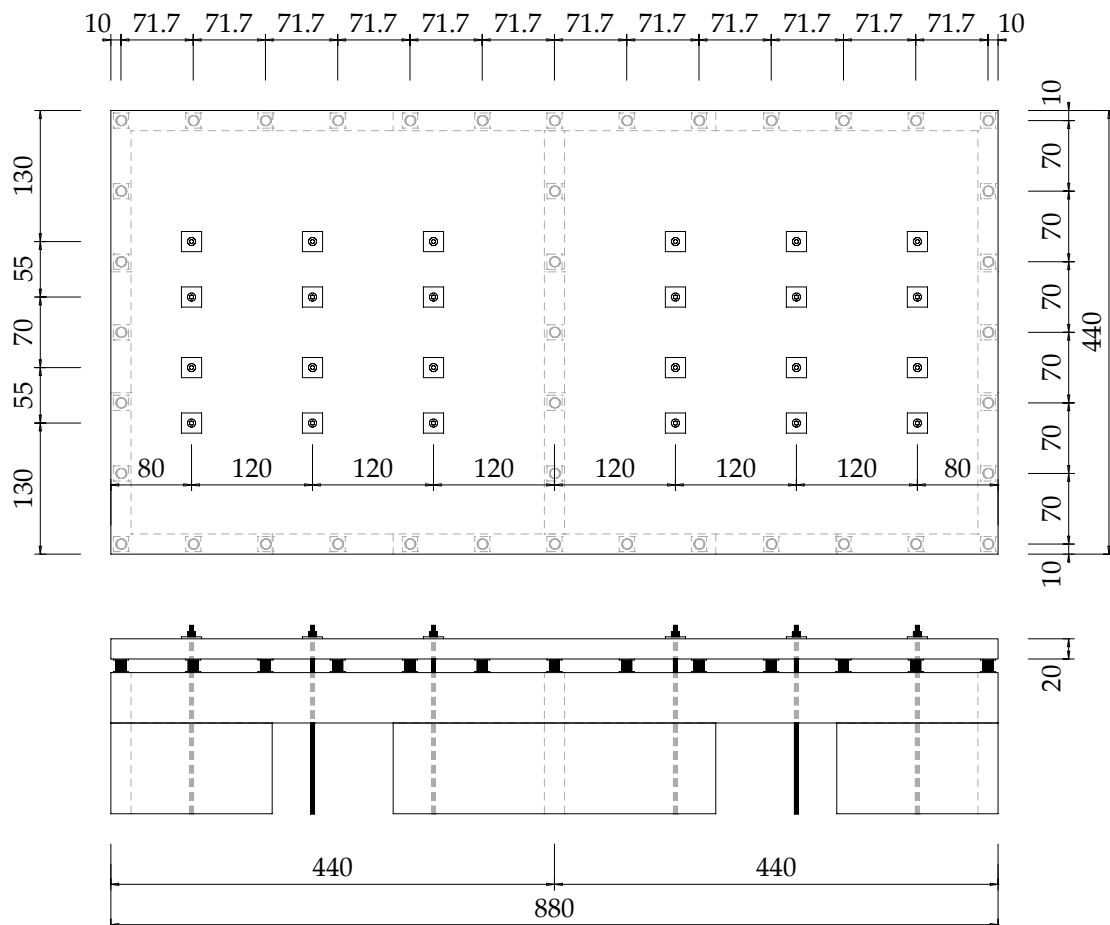


Abbildung 8.2.: Grundriss und Längsansicht, Lasteinleitung, Lagerposition und die Plattenabmessungen sind vermasst

Zum Monitoring der Stahlbetonplatte sind Wegaufnehmer unterhalb dieser platziert. Die Anordnung ist in der Abbildung 8.3 gezeigt. Es wurde nach dem Einbringen des Körpers eine Nullmessung durchgeführt. Die gemessenen Verformungen entsprechen somit ausschliesslich der Deformation des Körpers durch die Belastung mit den Hydraulikzylindern.

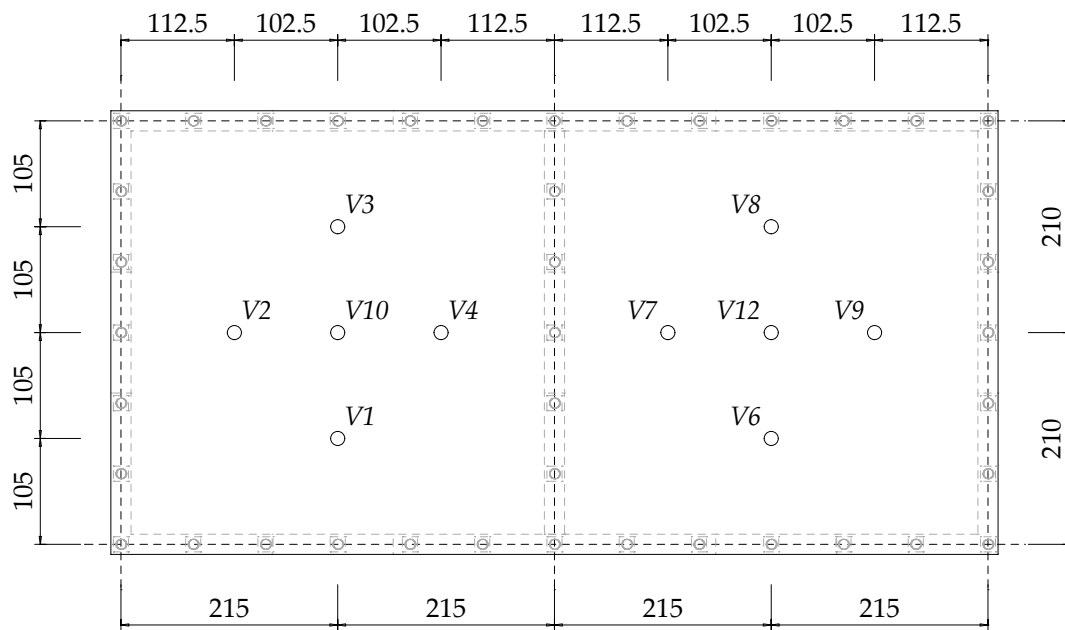


Abbildung 8.3.: Position der Wegaufnehmer, vermasst auf Lagerachsen

Der Versuch wurde bis zum Bruch gefahren. Der Bruch erfolgte durch das Zerreißen der oberen Längsbewehrung über dem Mittellauger.

8.1.1. Berechnungsgrößen

Im Folgenden sind die Berechnungsgrößen zum Betonstahl, Beton und der Geometrie aufgelistet. Diese sind aus dem Versuchsbericht Thoma und Niederberger (2010) entnommen.

8.1.1.1. Betonstahl

Die Platte ist kreuzweise mit einer Biegebewehrung aus Stäben mit einem Durchmesser von 10 mm und einer Teilung von 150 mm versehen. Dies gilt sowohl für die obere als auch die untere Bewehrung. Am Rand sind Abschlussbügel verlegt. Zusätzlich ist über dem Mittellauger eine Querkraftbewehrung eingelegt, um ein Querkraftversagen zu verhindern. Die Abbildung 8.4 zeigt ausschliesslich die Biegebewehrung.

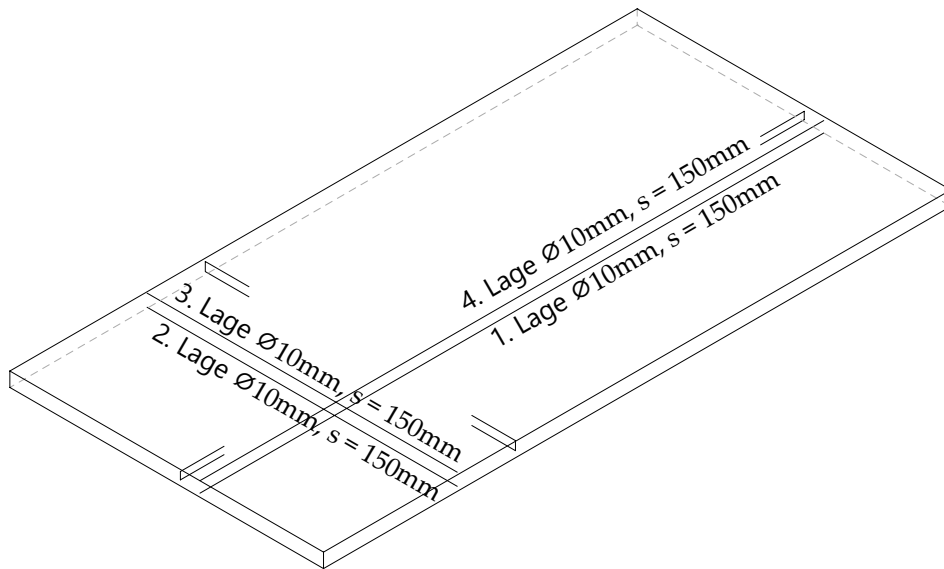


Abbildung 8.4.: Biegebewehrung der Platte

Aus diesen Angaben lassen sich die folgenden Parameter der Biegebewehrung ableiten:

$$\varnothing_s = 10 \text{ mm} \quad s = 150 \text{ mm} \quad a_s = \frac{\varnothing_s^2 \cdot \pi}{4 \cdot s} = 523.6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Die Eigenschaften des Betonstahls sind experimentell durch Zugversuche bestimmt worden. Die Angaben zur Zugfestigkeit, Fließgrenze, Elastizitätsmodul, Fließdehnung und Bruchdehnung stammen aus dem Bericht.

$$\begin{aligned} f_{su} &= 558.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} & f_{sy} &= 445.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} & E_s &= 196.5 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \\ \varepsilon_{sy} &= \frac{f_{sy}}{E_s} = 2.27 \text{‰} & \varepsilon_{su} &= 80.8 \text{‰} \end{aligned}$$

8.1.1.2. Beton

Auch der verwendete Beton wurde experimentell untersucht. Der Bericht enthält Angaben zur Zylinderdruckfestigkeit und zum Elastizitätsmodul.

$$f_{cc} = 28.61 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad E_c = 22.9 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}$$

Auf Basis empirischer Ansätze lassen sich die Bauteilfestigkeit und die Betonzugfestigkeit bestimmen. Zudem ist folgend die Annahme der Betonbruchstauchung beschrieben.

$$f_c = 2.7 \cdot f_{cc}^{\frac{2}{3}} = 25.26 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad f_{ct} = 0.3 \cdot f_{cc}^{\frac{2}{3}} = 2.81 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \varepsilon_{cu} = 5.0 \text{‰}$$

8.1.1.3. Geometrie

Aus der Geometrie der Platte sind lediglich die Plattenstärke und die Betonüberdeckung von Interesse. Diese sind folgend beschrieben.

$$h = 200 \text{ mm} \quad c = 20 \text{ mm}$$

8.1.2. Versuchsergebnisse

Die Versuchsergebnisse gehen aus dem Versuchsbericht hervor. In diesem ist die Traglast und ein Last-Verformungs-Diagramm aufgezeigt. Die Traglast beträgt 978 kN pro Feld. Dies entspricht der Summe der einzelnen Hydraulikzylinder pro Feld. Die folgende Beziehung beschreibt die Traglast pro Zylinder.

$$Q_u = \frac{978}{12} = 81.5 \text{ kN}$$

Das Last-Verformungs-Diagramm zeigt die Abbildung 8.5. Auf der Ordinate ist die Summe der Einzelkräfte pro Feld aufgezeigt und auf der Abszisse die Verformung der Feldmitte. Die exakte Position der Messung V10 ist in der Abbildung 8.3 gezeigt.

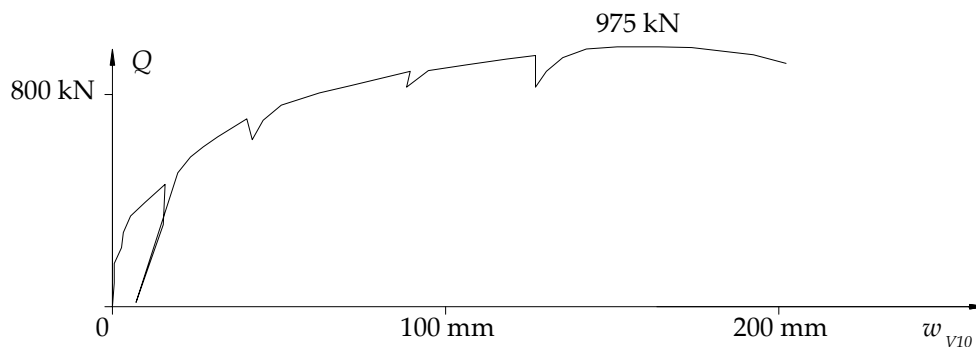


Abbildung 8.5.: Kraft-Verformungs-Diagramm an der Stelle V10, entnommen aus dem Versuchsbericht Thoma und Niederberger (2010)

8.2. NLFE-Modell

Anhand der Grundlagen des Versuchsbeschrieb ist das NLFE-Modell zu bestimmen. Es sind die Systemmodellbildung, die Querschnittsmodellbildung, das Abbruchkriterium und die Resultate des Modells aufgezeigt.

8.2.1. Systemmodellbildung

Die Abbildung 8.6 zeigt den Trägerrost mit den Auflagern, den Doppelgelenken, den starren Stäben, sowie sind an den Positionen der Zugstangen Einzellasten eingeführt. Die Abbildung ist lediglich schematisch, da eine deutlich feinere Elementlänge gewählt ist als dargestellt. Die Einzellast ist im Modell mit 100 kN modelliert.

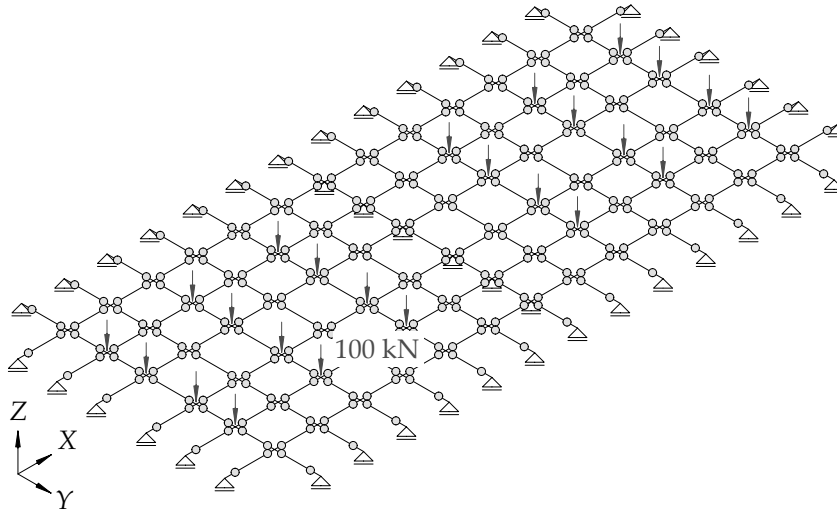


Abbildung 8.6.: Systemmodell des Trägerrosts, als Ersatzsystem der Zweifeldplatte, mit Einzellasten und Auflagern. Die Teilung des Rosts ist schematisch.

Die gewählte Elementlänge und die Einzugslänge entsprechen den folgenden Grössen.

$$l_{El} = 0.1 \text{ m} \quad l_{Ein} = \frac{l_{El}}{2} = 0.05 \text{ m}$$

Die Elementlänge ist so gewählt, dass eine durchgehend gleichmässige Trägerrostteilung erzeugt wird. Dadurch sind die Gelenkbeziehungen für sämtliche Stabend- und Anfangsgelenke identisch. Dies reduziert den Modellierungsaufwand und minimiert potenzielle Modellierungsfehler.

8.2.2. Querschnittsmodellbildung

Die Querschnittsmodellbildung zeigt zunächst die Vereinfachung der Materialeigenschaften. Danach folgt die Ermittlung der Ersatzbiegesteifigkeit und die Ersatztorsionssteifigkeit der Stäbe des Trägerrosts.

8.2.2.1. Materialeigenschaften

Die Modellierung der Materialeigenschaften beinhaltet die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betonstahls und des Betons. Die Abbildung 8.7 b) zeigt das bilineare Verhalten des Betonstahls B500B. Grau hinterlegt ist der Spannungs-Dehnungs-Verlauf aus den Zugproben.

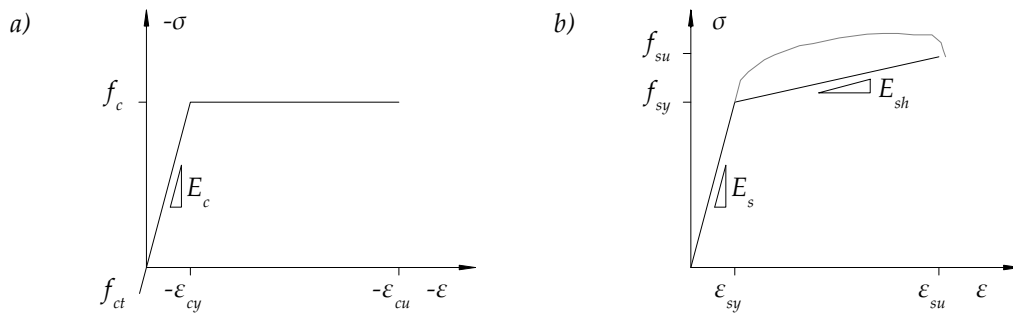


Abbildung 8.7.: Spannungs-Dehnungs-Diagramm a) des Betons b) des Betonstahls B500B mit grau hinterlegten Versuchsdaten

Für den Beton gilt die Beziehung in Abbildung 8.7 a). Das Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betons zeigt ein linear elastisches ideal plastisches Verhalten. Zudem zeigt die Darstellung die Berücksichtigung der Betonzugfestigkeit.

8.2.2.2. Ersatzbiegesteifigkeit

Die Ersatzbiegesteifigkeit ermittelt sich nach dem Vorgehen beschrieben im Kapitel 4.3. Dazu ist die Breite des Ersatzquerschnitts zu definieren. Diese ist gleich der Elementlänge gesetzt, wie folgend gezeigt.

$$b = l_{El} = 0.1 \text{ m}$$

Nach dem Kapitel 3.1.2.2 ist zunächst das Rissmoment und die Risskrümmung zu bestimmen. Es resultieren die folgenden Größen.

$$z = \frac{2 \cdot h}{3} = 133.33 \text{ mm} \quad F_c = \frac{b \cdot f_{ct} \cdot h}{4} = 14.03 \text{ kN}$$

$$M_r = F_c \cdot z = 1.87 \text{ kNm} \quad \chi_r = \frac{2 \cdot f_{ct}}{E_c \cdot h} = 1.23 \frac{1}{\text{km}}$$

Das Fließen der Bewehrung zeigt den zweiten aussagekräftigen Punkt im Momenten-Krümmungs-Diagramm. Die Querschnittsanalyse dazu zeigt die Abbildung 3.6. Die Anwendung der Gleichung 3.7 liefert die folgenden Größen.

$$d' = h - c - \frac{\phi_s}{2} = 175.0 \text{ mm} \quad n = \frac{E_s}{E_c} = 8.58$$

$$A_s = a_s \cdot b = 52.36 \text{ mm}^2 \quad \rho = \frac{A_s}{b \cdot d'} = 0.3 \%$$

Daraus bestimmt sich das Fliessmoment und der Biege widerstand.

$$x = d' \cdot \left(\sqrt{(\rho \cdot n)^2 + 2 \cdot \rho \cdot n} - \rho \cdot n \right) = 35.42 \text{ mm}$$

$$M_y = A_s \cdot f_{sy} \cdot \left(d' - \frac{x}{3} \right) = 3.81 \text{ kNm}$$

$$EI_{II} = A_s \cdot E_s \cdot (d' - x) \cdot \left(d' - \frac{x}{3} \right) = 234.37 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Abschliessend ist der gerissene Zustand mit der Krümmungsdifferenz nach Marti verfeinert, um die Zugversteifung zu berücksichtigen. Die Krümmungsdifferenz ist die folgende.

$$\lambda = 1$$

$$\Delta_\chi = \frac{\lambda \cdot \left(\frac{M_r}{EI_{II}} - \frac{f_{ct}}{E_c \cdot (d' - x)} \right)}{2} = 3.55 \frac{1}{\text{km}}$$

Der gerissene Zustand ist durch die beiden Krümmungen bestimmt.

$$\chi_{y1} = \frac{M_r}{EI_{II}} - \Delta_\chi = 4.43 \frac{1}{\text{km}}$$

$$\chi_{y2} = \frac{M_y}{EI_{II}} - \Delta_\chi = 12.69 \frac{1}{\text{km}}$$

Setzt man dem Beton ein vollständig plastifiziertes Verhalten voraus, so lässt sich der Biege-
widerstand bestimmen. Die Abbildung 8.8 zeigt den Querschnitt, die Dehnungsebene
und die Spannungen des Zustands. Der Biege-
widerstand ist folgend iterativ bestimmt.

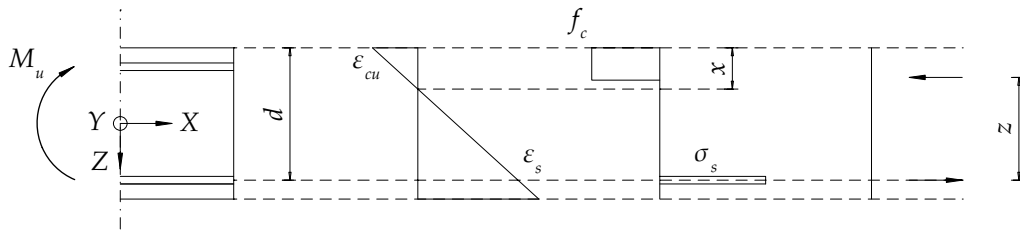


Abbildung 8.8.: Querschnitt beim Versagen, der Beton ist vollständig plastifiziert

Zunächst ist dazu eine Stahldehnung zu wählen. Anhand dieser lässt sich die Stahlspannung bestimmen. Diese ist kleiner als die Zugfestigkeit des Betonstahls.

$$\varepsilon_s = 62.5 \text{ ‰} \quad \sigma_s = 532.27 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad f_{su} = 558.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Mit der gewählten Stahldehnung stellt sich die folgende Druckzone und die Betonstauchung ein. Die Betonstauchung ist annähernd gleich der Betonbruchstauchung.

$$x = \frac{A_s \cdot \sigma_s}{f_c \cdot b \cdot 0.85} = 12.98 \text{ mm}$$

$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_s \cdot x}{d' - x} = 5.01 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_{cu} = 5.0 \text{ ‰}$$

Daraus resultiert der folgende Biege­widerstand.

$$z = d' - 0.425 \cdot x = 169.48 \text{ mm}$$

$$F_s = A_s \cdot \sigma_s = 27.87 \text{ kN}$$

$$M_u = F_s \cdot z = 4.72 \text{ kNm}$$

Der Biege­widerstand ist mittels der Bruchdehnung des Betons begrenzt. Abschliessend ist die Bruchkrümmung zu bestimmen. Dazu findet das Zuggurtmodell mit der Gleichung 3.5 Anwendung. Die Schubspannung des Verbunds und der Rissabstand sind die folgenden.

$$\tau_{b1} = f_{ct} = 2.81 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad s_{rm} = s = 150 \text{ mm}$$

Setzt man beim Riss die Zugfestigkeit des Betonstahls voraus, stellt sich der Zustand gemäss der Abbildung 8.9 ein.

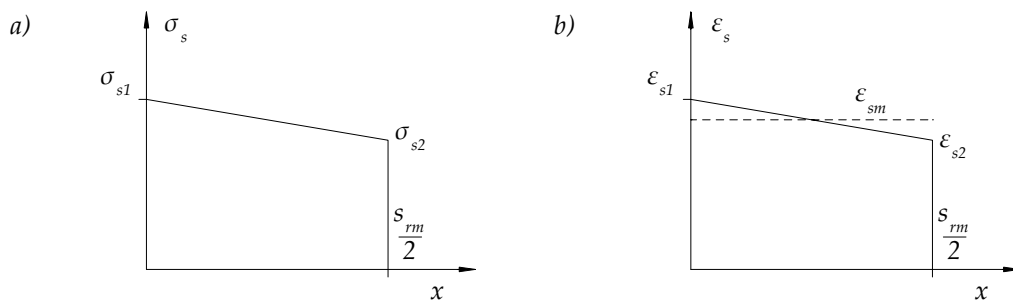


Abbildung 8.9.: a) Spannungsverlauf b) Dehnungsverlauf des Betonstahls innerhalb des halben Zugglieds

Die Spannungen sind folgend berechnet.

$$\sigma_{1s} = f_{su} = 558.6 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{2s} = \sigma_{1s} - \frac{4 \cdot \tau_{b1} \cdot s_{rm}}{\phi_s \cdot 2} = 474.41 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Die mittlere Dehnung lässt sich folgendermassen bestimmen.

$$E_{sh} = \frac{f_{su} - f_{sy}}{\varepsilon_{su} - \varepsilon_{sy}} = 1438.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{sy} - \frac{\tau_{b1} \cdot s_{rm}}{E_{sh} \cdot \phi_s} + \frac{f_{su} - f_{sy}}{E_{sh}} = 51.55 \text{‰}$$

Mit der mittleren Dehnung lässt sich die Bruchkrümmung beim Betonstahlversagen bestimmen. Es ist ebenfalls gezeigt, dass die Bruchkrümmung bei einem Betondruckversagen grösser ist. Es resultiert folglich ein Betonstahlversagen.

$$\chi_{us} = \frac{\varepsilon_{sm}}{d' - x} - \frac{\varepsilon_{sy}}{d' - x} = 304.15 \frac{1}{\text{km}}$$

$$\chi_{uc} = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} - \frac{\varepsilon_{sy}}{d' - x} = 371.16 \frac{1}{\text{km}}$$

Damit sind sämtliche Grössen der Momenten-Krümmungs-Beziehung bestimmt. Diese ist in der Abbildung 8.10 a) beschrieben. Die Abbildung 8.10 b) zeigt die Momenten-Verdrehungs-Beziehung, welche sich anhand der Gleichung 3.10 bestimmt. Abgeschlossen ist die Beziehung mit einem ideal-plastischen Verlauf. Die Grössen sind folgend zusammengefasst.

$$\chi_i = \begin{bmatrix} \chi_r \\ \chi_{y1} \\ \chi_{y2} \\ \chi_{us} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.23 \\ 4.43 \\ 12.69 \\ 304.15 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{km}}$$

$$M_i = \begin{bmatrix} M_r \\ M_y \\ M_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.87 \\ 1.87 \\ 3.81 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$

$$\varphi_{iy} = \chi_i \cdot l_{Ein} = \begin{bmatrix} 0.06 \\ 0.22 \\ 0.63 \\ 15.21 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{km}}$$

Die bestimmte Gelenkbeziehung gilt für sämtliche Gelenke, unabhängig der globalen Ausrichtung, sowie für positive und negative Biegebeanspruchungen.

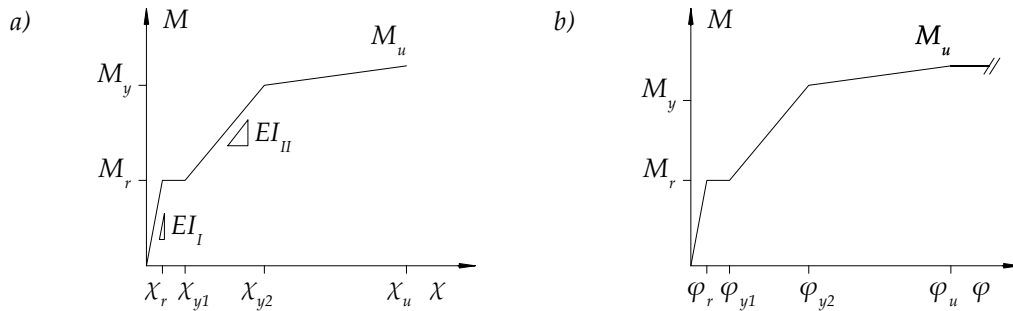


Abbildung 8.10.: a) Biegemomenten-Krümmungs-Diagramm, b) Biegemomenten-Verdrehungs-Diagramm des Ersatzstabs im Trägerrost

8.2.2.3. Ersatztorsionssteifigkeit

Die Ersatztorsionssteifigkeit bestimmt sich nach der Herleitung gemäss dem Kapitel 4.3.2. Dazu ist die ungerissene und die gerissene Drillsteifigkeit des Plattenelements zu bestimmen. Diese ist abschliessend auf den Stab des Trägerrosts umzuwandeln.

8.2.2.3.1. Ungerissene Ersatztorsionssteifigkeit

Die ungerissene Ersatztorsionssteifigkeit ist einzig abhängig von den Betonparametern. Dazu ist die Querdehnzahl zu wählen. Dies ist folgend aufgezeigt.

$$\begin{aligned}\nu &= 0.2 \\ I_{x,Ersatz} &= \frac{h^3 \cdot b}{6} = 133333333.33 \text{ mm}^4 \\ G_I &= \frac{E_c}{2 \cdot (1 + \nu)} = 9.54 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2} \\ GI_I &= G_I \cdot I_{x,Ersatz} = 1272.22 \text{ kN} \cdot \text{m}^2\end{aligned}$$

Der ungerissene Zustand gilt bis zum Erreichen des Risstorsionsmoments. Dies bestimmt sich nach der Gleichung 4.23. Der numerische Wert zeigt die folgende Gleichung. Damit ist der ungerissene Bereich vollständig beschrieben.

$$T_r = \frac{f_{ct} \cdot h^2 \cdot b}{6} = 1.87 \text{ kNm}$$

8.2.2.3.2. Gerissene Ersatztorsionssteifigkeit

Die gerissene Ersatztorsionssteifigkeit ist unter der Berücksichtigung des klassischen Druckfeldmodells und des klassischen Sandwichmodells bestimmt. Zunächst gilt es die Deckelstärke des Sandwichmodells zu bestimmen und die dazugehörigen geometrischen Bewehrungsgehalte in beiden Richtungen.

$$\begin{aligned}t_t &= 2 \cdot c + \phi_s = 50 \text{ mm} \\ \rho_{xt} &= \frac{a_s}{t_t} = 1.05 \% \\ \rho_{yt} &= \rho_{xt} = 1.05 \%\end{aligned}$$

Anhand der Betonstahlparameter lässt sich mit der Gleichung 4.27 der gerissene Schubmodul bestimmen. Die Schiebung beider Deckel ist identisch, da die Biegebewehrung in beiden Deckeln gleich ist.

$$G_{II} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{E_s} \cdot \sqrt{\frac{(1+n \cdot \rho_{xt}) \cdot (1+n \cdot \rho_{yt})}{\rho_{xt} \cdot \rho_{yt}}} + n} = 0.47 \frac{\text{kN}}{\text{mm}^2}$$

Die gerissene Ersatztorsionssteifigkeit resultiert aus der Multiplikation mit dem Ersatzträgheitsmoment. Diese entspricht lediglich 5% der ungerissenen Ersatztorsionssteifigkeit.

$$GI_{II} = G_{II} \cdot I_{x, Ersatz} = 62.91 \text{ kN} \cdot \text{m}^2$$

Abschliessend gilt es den Torsionswiderstand zu bestimmen. Dazu ist die Gleichung 4.30 anzuwenden. Dies führt zu den folgenden Grössen:

$$\tau_{xy,u} = \sqrt{\rho_{xt} \cdot f_{sy} \cdot \rho_{yt} \cdot f_{sy}} = 4.67 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$T_u = \frac{\tau_{xy,u} \cdot h^2 \cdot b}{6} = 3.11 \text{ kNm}$$

Damit sind sämtliche Grössen der Torsions-Verdrillungs-Beziehung bestimmt. Diese ist in der Abbildung 8.11 a) beschrieben. Die Abbildung 8.11 b) zeigt die Torsions-Verdrehungs-Beziehung, welche sich anhand der Gleichung 3.10 bestimmt. Die berechneten Grössen sind folgend zusammengefasst:

$$\vartheta_i = \begin{bmatrix} \frac{T_r}{GI_I} \\ \frac{T_r}{GI_{II}} \\ \frac{T_u}{GI_{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.47 \\ 29.74 \\ 49.45 \end{bmatrix} \frac{1}{\text{km}}$$

$$\varphi_{ix} = \vartheta_i \cdot l_{Ein} = \begin{bmatrix} 0.07 \\ 1.49 \\ 2.47 \end{bmatrix} \frac{\text{m}}{\text{km}}$$

$$T_i = \begin{bmatrix} T_r \\ T_r \\ T_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.87 \\ 1.87 \\ 3.11 \end{bmatrix} \text{ kNm}$$

Die bestimmte Gelenkbeziehung gilt für sämtliche Gelenke, unabhängig der globalen Ausrichtung, sowie für positive und negative Torsionsbeanspruchungen.

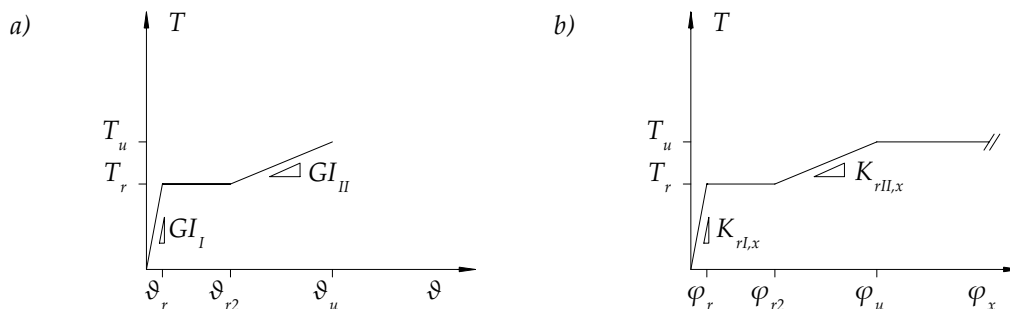


Abbildung 8.11.: a) Torsions-Verdrillungs-Diagramm, b) Torsions-Verdrehungs-Diagramm des Ersatzstabs im Trägerrost

8.2.2.4. Abbruchkriterium

Das Abbruchkriterium ist entsprechend dem Kapitel 3.1.4 zu ermitteln und ermöglicht die Abschätzung eines Biegeversagens. Die Zulässige Rotation ist folgend aufgezeigt:

$$l_{pl} = 2 \cdot d' = 350.0 \text{ mm}$$

$$\varphi_{adm} = l_{pl} \cdot \chi_{us} = 0.106 \text{ rad}$$

8.2.3. Resultate

Das NLFE-Modell ist mit dem Abbruchkriterium vollständig beschrieben. Die Ergebnisse der Berechnung sind folgend gezeigt. Dazu ist das Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle V10 dargestellt. Die Abbildung 8.12 zeigt dieses mit dargestellten Messgrößen und den Berechnungsgrößen des NLFE-Modells. Für die markierten Lastparameter sind die Zustandslinien der Biege- oder Torsionsmomenten gezeigt.

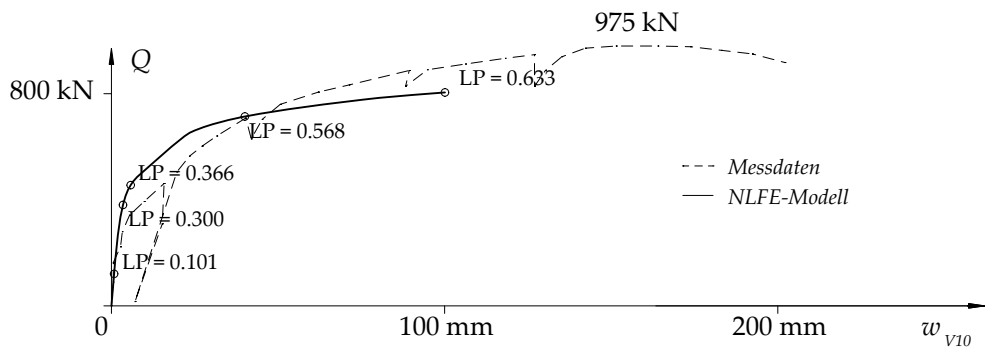


Abbildung 8.12.: Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle V10 des Trägerrosts, ergänzt mit den Messdaten. Zudem sind aussagekräftige Lastparameter markiert.

Die Traglast des Systems zeigt die folgende Gleichung. Das NLFE-Modell prognostiziert lediglich 80 % der gemessenen Traglast des Experiments.

$$Q_{NLFE} = 0.633 \cdot 100 = 63.3 \text{ kN}$$

$$Q_u = \frac{978}{12} = 81.5 \text{ kN}$$

Der Verformungsverlauf zeigt hingegen eine gute Übereinstimmung. Hervorzuheben sind die Abweichungen bei ca. 36 % der Modelllast. Das Modellverhalten verläuft hier annähernd parallel zu den Messdaten, jedoch auf einem zu hohen Lastniveau. Daraus lässt sich vermuten, dass die Platte im Versuch, vor dem Modell beginnt zu fließen. Das Fliessmoment ist nicht deckungsgleich. Ab dann wird das Modellverhalten wieder weicher. Die Kurven schneiden sich bei 57 % der Modelllast. Dieser Steifigkeitsabfall ist durch das Erreichen des Biege widerstands im zentralen Gelenk über dem Mittelaufleger bestimmt. Die angrenzenden Gelenke sind mehrheitlich über der Fließgrenze. An diesem Punkt spielt einerseits der ideal-plastische Abschluss der Gelenkbeziehung in das

Verformungsverhalten mit ein, andererseits die stark vereinfachte Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betonstahls, gemäss der Abbildung 8.7 b). Das verfestigende Verhalten ist nur mangelhaft beschrieben. Zudem resultiert die Vernachlässigung der Querdehnung zu einem weicheren Verhalten. Dies sollte sich im gesamten Verlauf widerspiegeln, der Einfluss scheint jedoch marginal zu sein. Anschliessend bricht die Berechnung frühzeitig ab im Vergleich mit den Versuchsergebnissen. Dies lässt sich mit den groben Vereinfachungen des gewählten Abbruchkriteriums begründen. Es wird vermutet, dass mit einer präziseren Bestimmung des Rotationsvermögens ein passenderes Resultat erzielt wird.

Abschliessend ist auf das Systemverhalten bei den markierten Lastparametern einzugehen. Der erste aussagekräftige Steifigkeitsabfall erfolgt durch das Erreichen des Rissmoments im System. Die Zustandslinien der Biegemomente in der Abbildung 8.13 zeigen, dass das Rissmoment über dem Mittelaufleger erreicht ist. Die zugehörigen Verformungen zeigt die Abbildung 8.14.

Der nächste signifikante Steifigkeitsabfall liegt bei 30 % der modellierten Einzellast. Bei diesem Lastparameter stellt sich in den Ecken das Risstorsionsmoment ein, wie in der Abbildung 8.15 aufgezeigt. Die Verformungen zeigt die Abbildung 8.16.

Bei einer weiteren Laststeigerung erreicht das Mittelaufleger das Fliessmoment. Dies zeigt die Abbildung 8.17, die Verformungen zeigt die Abbildung 8.18. Es resultiert ein deutlicher Steifigkeitsabfall. Zwischen diesem Lastparameter und dem folgenden bilden sich fortan Fliessgelenke entlang des Mittelauflegers.

Der Biegewiderstand ist bei 56.8 % der Einzellast erreicht. Aufgezeigt in der Abbildung 8.19 mit den Verformungen in der Abbildung 8.20.

Die Abbildung 8.21 zeigt abschliessend die Zustandslinien der Biegemomente beim Biegeversagen, und Abbildung 8.22 zeigt die entsprechenden Verformungen.

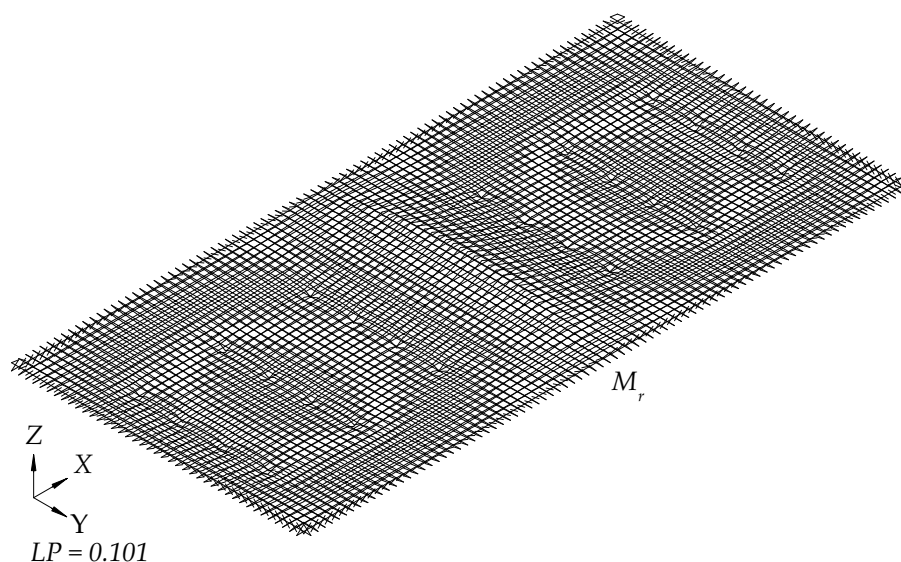


Abbildung 8.13.: Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Trägerrosts beim Lastparameter 0.101

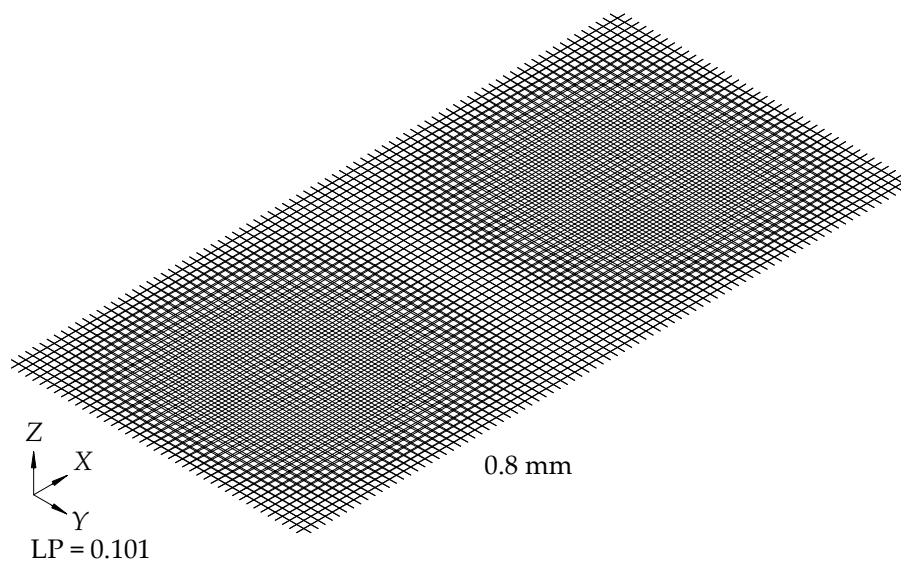


Abbildung 8.14.: Qualitative Zustandslinien der Verformung des Trägerrosts beim Lastparameter 0.101. Verformung an der Stelle V10 beschriftet

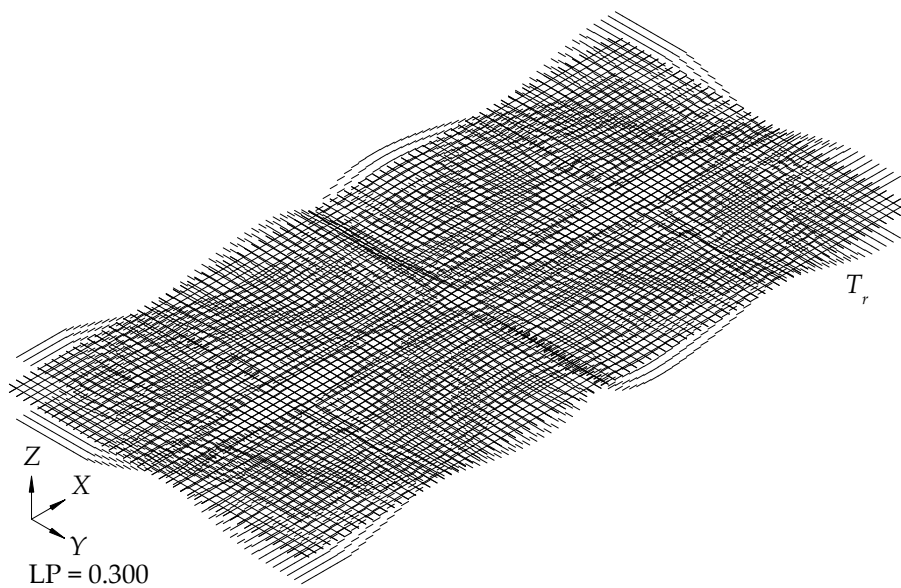


Abbildung 8.15.: Qualitative Zustandslinien der Torsionsmomente des Trägerrosts beim Lastparameter 0.300

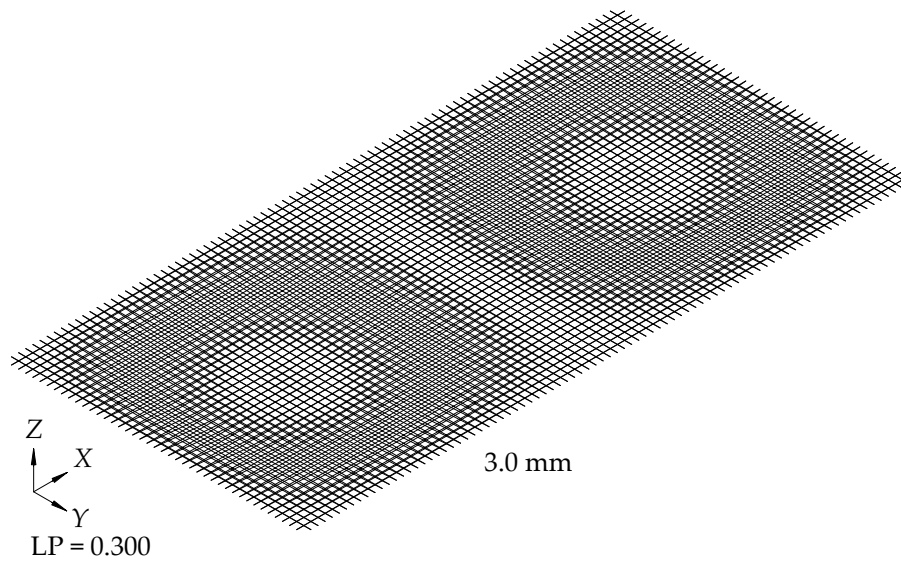


Abbildung 8.16.: Qualitative Zustandslinien der Verformung des Trägerrosts beim Lastparameter 0.300. Verformung an der Stelle V10 beschriftet

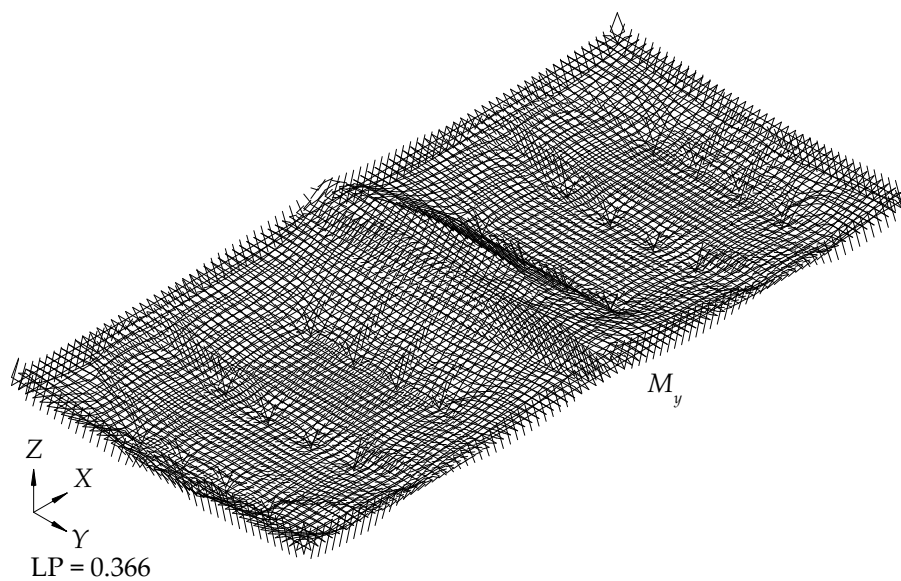


Abbildung 8.17.: Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Systems beim Lastparameter 0.366

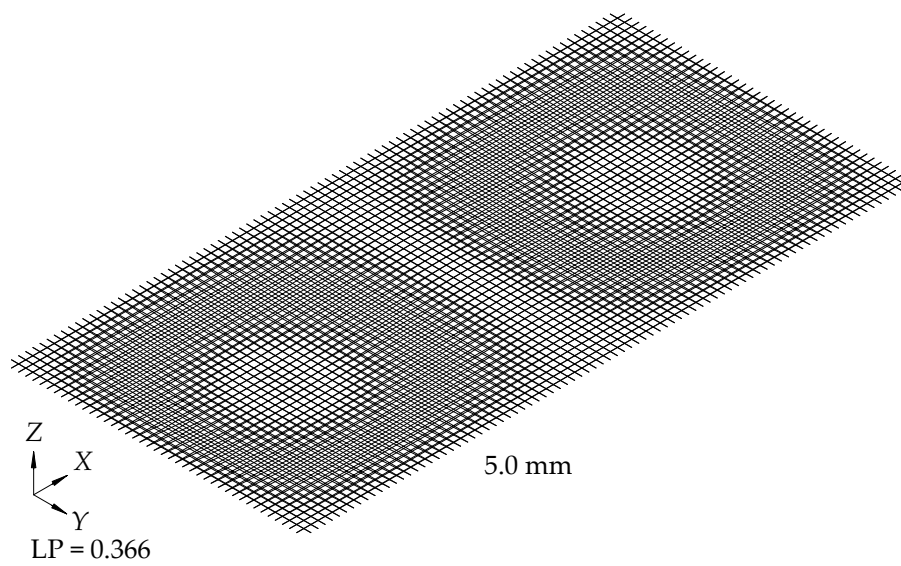


Abbildung 8.18.: Qualitative Zustandslinien der Verformung des Trägerrosts beim Lastparameter 0.366. Verformung an der Stelle V10 beschriftet

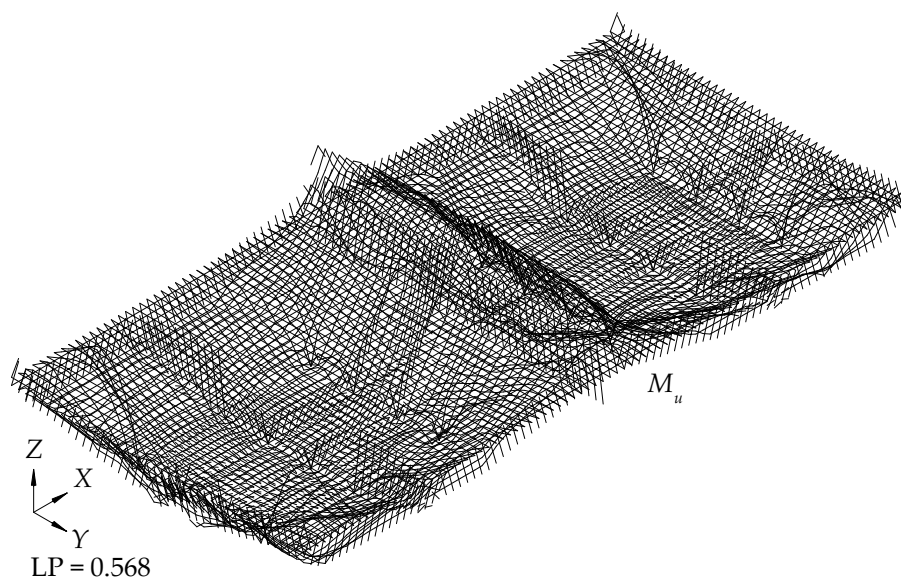


Abbildung 8.19.: Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Trägerrosts beim Lastparameter 0.568

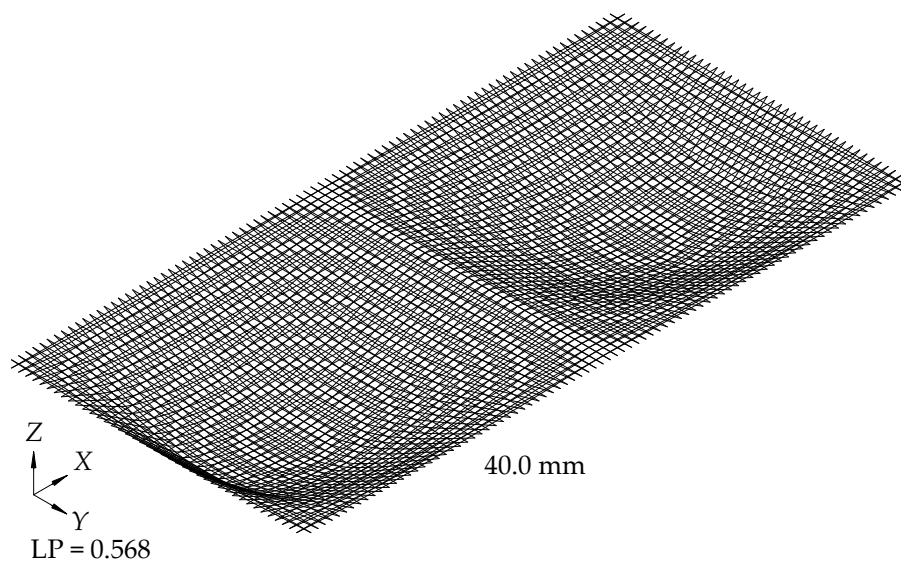


Abbildung 8.20.: Qualitative Zustandslinien der Verformung des Trägerrosts beim Lastparameter 0.568. Verformung an der Stelle V10 beschriftet

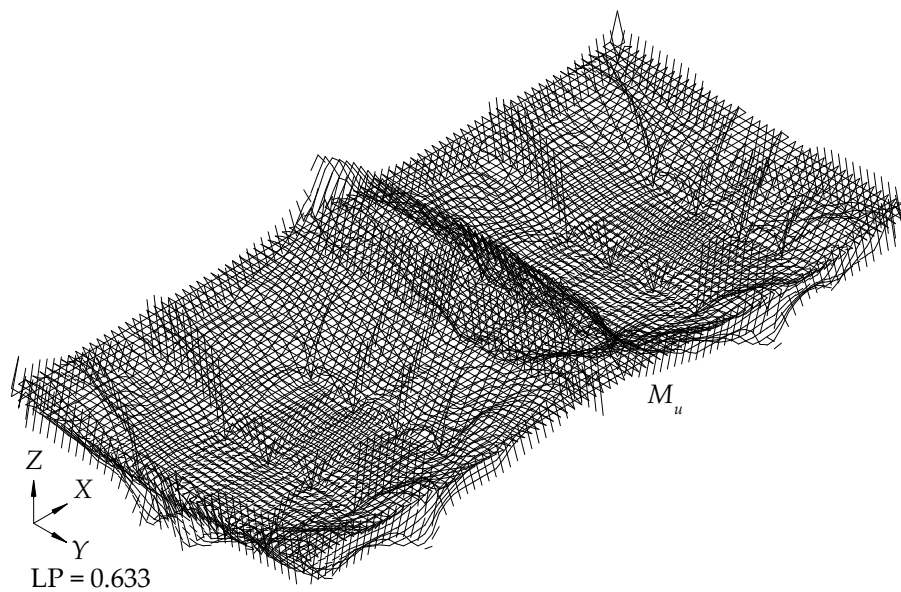


Abbildung 8.21.: Qualitative Zustandslinien der Biegemomente des Trägerrosts beim Lastparameter 0.633

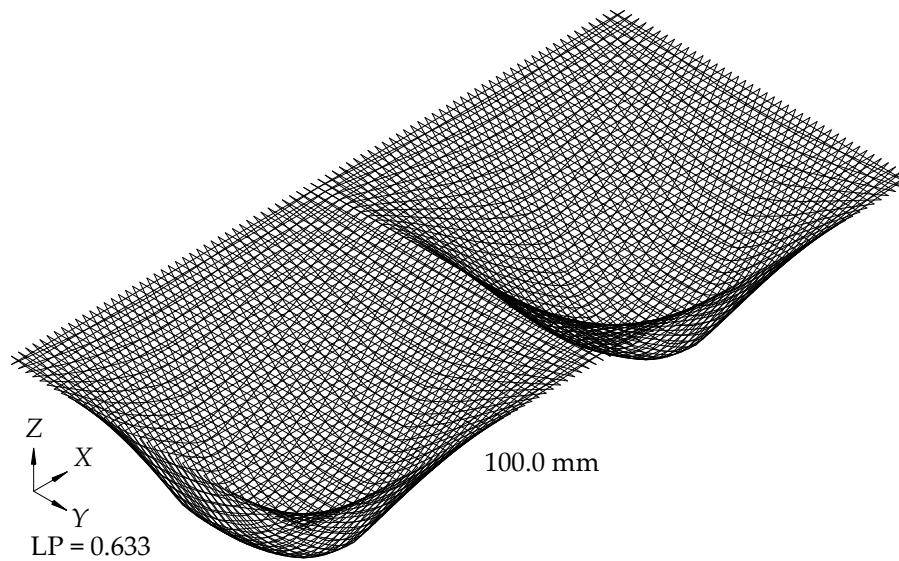


Abbildung 8.22.: Qualitative Zustandslinien der Verformung des Trägerrosts beim Lastparameter 0.633. Verformung an der Stelle V10 beschriftet

Das Abbruchkriterium ist beim Mittelaufleger erfüllt. Dies zeigt die folgende Berechnung, welche sich auf die Resultate der Abbildung 8.23 bezieht.

$$\varphi_r = 0.044 \cdot 2 + 0.0005 \cdot 2 + 0.00859 \cdot 2 = 0.106 \text{ rad}$$

$$\varphi_{adm} = l_{pl} \cdot \chi_{us} = 0.106 \text{ rad}$$

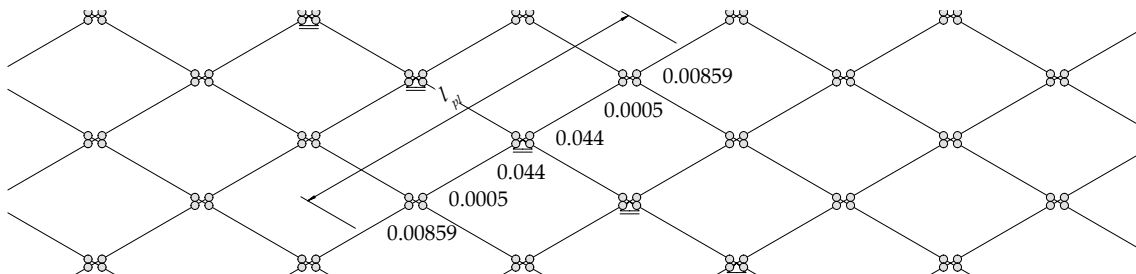


Abbildung 8.23.: Relative Gelenkrotationen beim Mittelaufleger beim Lastparameter 0.633

8.2.4. Vergleichsrechnung

Das Tragverhalten wurde vom Autor des Versuchsberichts in einer weiteren Publikation (Thoma, Roos, und Borkowski (2014)) mithilfe eines eigens entwickelten Moduls für ANSYS nachgerechnet. Die Modellierung basiert auf dem *Cracked Membrane Model* (CMM).

Die Abbildung 8.24 zeigt die Resultate dieser Modellierung im Vergleich mit dem Trägerrost. Die Berechnungsverläufe des CMM sind dem Verlauf des Trägerrostmodells ähnlich. Das CMM beschreibt den Verlauf nach Erreichen des Flie遳oments jedoch präziser als das Trägerrostmodell. Dennoch weichen beide Berechnungsverläufe in ähnlicher Weise

von den gemessenen Werten ab. Die Präzision des Trägerrostmodells ist somit als gut einzustufen.

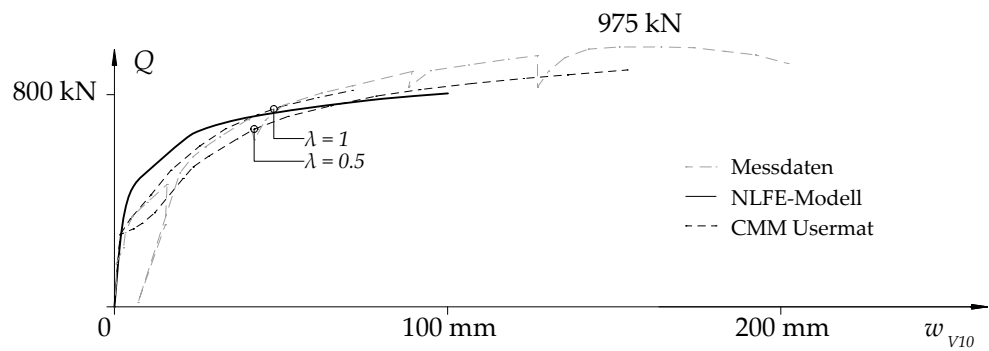


Abbildung 8.24.: Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle V10 des Trägerrosts, ergänzt mit der Nachrechnung mit Ansys CMM-Usermat, entnommen aus der Publikation Thoma u. a. ([2014](#))

9. Fazit

Die Thesis schliesst mit einem Fazit. Dieses gliedert sich in eine Zusammenfassung der Arbeit. Darauf folgen eine Schlussfolgerung und ein Ausblick.

9.1. Zusammenfassung

Diese Thesis liefert einen Beitrag zur Beschreibung des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlbetontragwerken. Sie zeigt eine praxisnahe Methode auf, um das Tragverhalten von Stahlbetonbalken und -platten zu beschreiben. Dies erfolgt ausschliesslich mit der in der Praxis üblichen Statiksoftware AxisVM. Dazu ist eine Modellbildung beschrieben, welche starre Stäbe über Gelenke koppelt, in denen nichtlineare Gelenkbeziehungen hinterlegt sind. Im zweidimensionalen Raum lassen sich beliebige Stabtragwerke abbilden. Angeordnet als Trägerrost ermöglicht das NLFE-Modell die Abbildung des Tragverhaltens von Flächentragwerken.

Der erste Teil der Arbeit, die Modellbildung, legt die Grundlagen des NLFE-Modells dar. Ein einführendes Beispiel verdeutlicht das Modellverhalten an einem einfachen Balken. Darauf folgt das Berechnungsschema, welches das Modell in die Systemmodellbildung und die Querschnittsmodellbildung unterteilt. Die Systemmodellbildung umfasst die starren Stäbe, die Anordnung der Gelenke und die Berechnung der Resultate. Die Querschnittsmodellbildung ist einzeln für Balken- und Plattentragwerke beschrieben.

Die Querschnittsmodellbildung der Balken zeigt die Ermittlung der nichtlinearen Biegesteifigkeit unter Berücksichtigung der Zugversteifung, basierend auf dem Zuggurtmodell.

Die Querschnittsmodellbildung der Platten beschreibt das allgemeine Plattentragverhalten. Darauf folgt eine Transformation vom Plattenelement zum Trägerrost. Abschliessend zeigt sie das nichtlineare Biegetragverhalten des Plattenelements, bestehend aus dem Biege- und Drillverhalten.

Der zweite Teil der Arbeit demonstriert die Anwendung der Modelle an Beispielen. Die Modellbildung der Balken ist an einem Zweifeldträger vollständig aufgezeigt. Der Zweifeldträger ist mit zwei unterschiedlich duktilen Betonstählen modelliert. Das Tragverhalten ist zunächst analytisch und anschliessend mit dem NLFE-Modell ermittelt. Die Resultate zeigen eine Übereinstimmung.

Darauf folgt die Anwendung an einem torsionsweichen Trägerrost. Dieses Beispiel verifiziert die Anwendbarkeit des Modells im dreidimensionalen Raum. Die Traglast ist sowohl analytisch als auch mit dem NLFE-Modell ermittelt. Auch hier stimmen die Resultate überein.

Die Quadratplatte demonstriert die Anwendung der Modellbildung für Platten. Auch hier ist die Traglast analytisch bestimmt und mit dem NLFE-Modell verglichen. Die Resultate stimmen wiederum überein.

Den Abschluss bildet die Nachrechnung eines grossmassstäblichen Plattenexperiments. Die Zweifeldplatte wendet sämtliche Herleitungen aus dem ersten Teil der Arbeit an. Der Vergleich der Messresultate mit dem prognostizierten Tragverhalten des NLFE-Modells zeigt eine erfreuliche Übereinstimmung.

9.2. Schlussfolgerung

Die Schlussfolgerung adressiert die einleitenden Forderungen an die Thesis. In der Einleitung ist gefordert, eine praxisnahe Methode zur Abbildung des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlbetontragwerken zu entwickeln. Mit der gewählten Abgrenzung, sich auf das Biegetragverhalten zu beschränken, gelingt dies in der Thesis vollumfänglich. Die Modellbildung ist für Ingenieurinnen und Ingenieure in der Praxis zugänglich, da sie vollständig in AxisVM umsetzbar ist. Die angestrebte Präzision der Resultate verdeutlichen die Anwendungsbeispiele, die allesamt zufriedenstellende Ergebnisse liefern.

Die in der Einleitung kritisierte schwierige Interpretierbarkeit der Resultate anderer Softwarelösungen ist durch die aufgezeigte Modellbildung entschärft. Durch die ausschliessliche Modellierung mit Stäben reduzieren sich die Resultatgrössen auf die Schnittgrössen der Stäbe. Zudem definiert ausschliesslich das Gelenkverhalten das Tragverhalten des Modells. Steifigkeitsänderungen im Tragverhalten lassen sich direkt auf die Gelenkbeziehungen zurückführen.

Das Gelenkverhalten wird von der Ingenieurin oder dem Ingenieur festgelegt, was eine vollständige Transparenz des Tragverhaltens ermöglicht. Gleichzeitig erfordert dies entsprechendes Fachwissen. Die in der Modellbildung aufgezeigten Gelenkbeziehungen bieten einen Anhaltspunkt, können jedoch beliebig verfeinert werden – stets im Ermessen der Berechnenden.

Die einfache Modellbildung, die Verantwortung der Gelenkdefinition auf Seiten der Ingenieurin oder des Ingenieurs und die völlige Transparenz des Tragverhaltens führen zu fundierten Aussagen über das Tragverhalten.

Die Anwendung der Modellbildung hat auch deren Grenzen aufgezeigt. Speziell sind Interaktionen zwischen Schnittgrössen hervorzuheben. Diese sind softwarebedingt nicht modellierbar. Beispielsweise zeigt die angepasste Fliessfigur, Abbildung 7.7, der Nachrechnung der Traglast der Quadratplatte die Problematik auf. Die nötige Interaktion zwischen Torsionsmoment und Biegemoment lässt sich nicht abbilden. Dazu wurde auf die quaderförmige Fliessfigur ausgewichen.

9.3. Ausblick

Die Thesis zeigt, dass das Tragverhalten der betrachteten Tragwerke mit dem NLFE-Modell gut beschrieben wird. Doch welche Vorteile bietet dieses vertiefte Verständnis des Tragverhaltens?

Ein besseres Verständnis des Tragverhaltens ermöglicht gezielte Materialeinsparungen. Besonders beim Beton, der aufgrund seiner CO_2 -Bilanz zu Recht in der Kritik steht, ist der Materialverbrauch eine entscheidende Stellschraube. Werden an den richtigen Stellen Einsparungen erzielt, rechtfertigt dies den zusätzlichen Berechnungsaufwand. Dies mag nicht immer wirtschaftlich sein, ist jedoch im Hinblick auf die Nachhaltigkeit von grosser Bedeutung. Speziell in einer Zeit, in der Nachhaltigkeit im Fokus steht, genießt dieser Aspekt einen höheren Stellenwert.

Im Hinblick auf Materialeinsparungen könnten gängige Flachdecken in Zukunft durch ästhetisch ansprechende Kassettendecken ersetzt werden. Werden diese mit der vorgestellten Modellbildung dimensioniert, entstehen optimierte Bauwerke.

Gleichzeitig ist auch Kritik an der Modellbildung angebracht. Die Beschränkung auf das Biegetragverhalten erlaubt keine umfassende Optimierung, da unberücksichtigte Einflüsse nicht ausgeschlossen werden können. Insbesondere das ausgeklammerte Querkrafttragverhalten sollte in zukünftigen Arbeiten näher untersucht werden.

Es sind Modelle zu entwickeln oder anzuwenden, um passende Querkraftgelenkbeziehungen zu ermitteln. Zudem bedingt es Forschungsarbeit auf Seiten der Resultatauswertung. Beispielsweise wären bei Plattenragwerken die Zustandslinien der Querkräfte zu analysieren, wie in Abbildung 9.1 dargestellt. Im Trägerrost entsprechen die Querkraftrichtungen stets der Stabausrichtung.

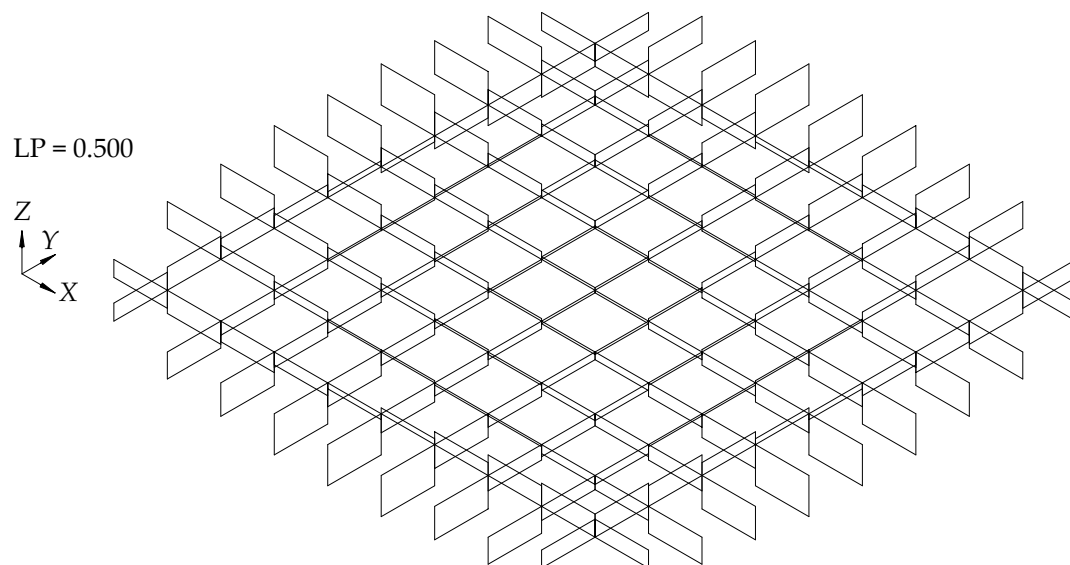


Abbildung 9.1.: Qualitative Zustandslinien der Querkräfte der Quadratplatte beim Lastparameter 0.500

Das tatsächliche Querkrafttragverhalten folgt jedoch nicht der Stabausrichtung. Es wäre daher erforderlich, die Hauptrichtungen der Querkräfte zu bestimmen, wie in Abbildung 9.2 gezeigt.

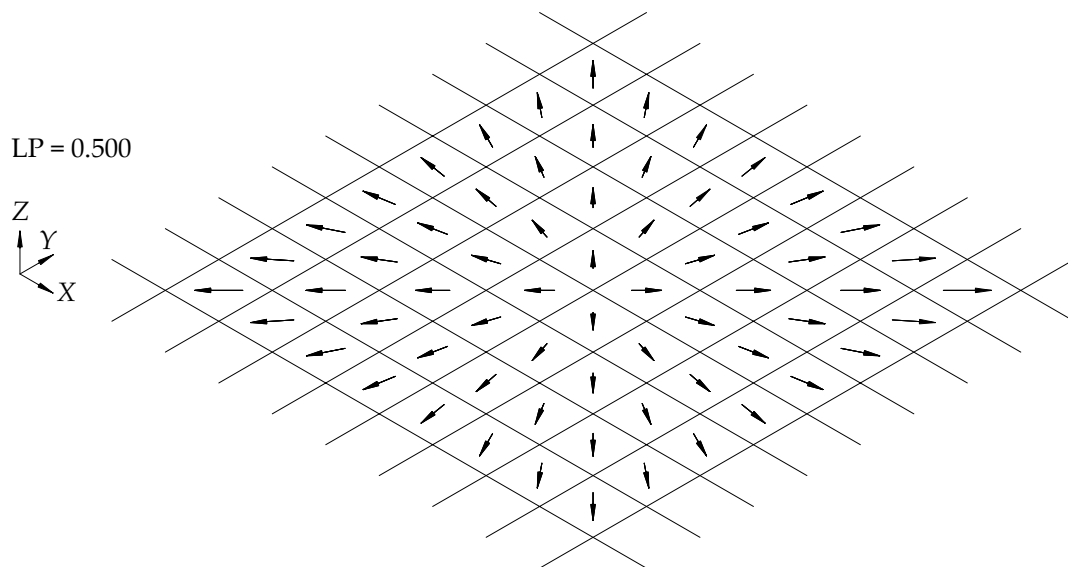


Abbildung 9.2.: Qualitative Zustandslinien der Hauptrichtung der Querkräfte der Quadratplatte beim Lastparameter 0.500

Eine Grundlage für weiterführende Arbeiten ist mit dieser Thesis geschaffen. Zudem besteht die Hoffnung, dass diese Modellierung Einzug in den Praxisalltag von Ingenieuren findet. Sie bietet eine fundierte und zugleich zugängliche Methode, um das nichtlineare Tragverhalten von Stahlbetontragwerken präzise zu analysieren und so einen Beitrag zur Optimierung und Weiterentwicklung in der Baupraxis zu leisten.

Bezeichnungen

Variabel	Bezeichnung
A, B, C	Knotenbezeichnungen
A_s	Querschnittsfläche des Betonstahls
X, Y, Z	Globale Koordinaten
D_b	Plattensteifigkeit
E	Elastizitätsmodul
E_c	Elastizitätsmodul des Betons
E_{sh}	Verfestigungsmodul des Betonstahls
E_s	Elastizitätsmodul des Betonstahls
EI	Biegesteifigkeit
EI_I	Biegesteifigkeit des ungerissenen Querschnitts
EI_{II}	Biegesteifigkeit des gerissenen Querschnitts
F	Kraft
G	Schubmodul
G_I	Schubmodul des ungerissenen Querschnitts
G_{II}	Schubmodul des gerissenen Querschnitts
I_x	Torsionsträgheitsmoment
I_{Ersatz}	Biegeträgheitsmoment des Ersatzstabs im Stabkreuz
$I_{x,Ersatz}$	Torsionsträgheitsmoment des Ersatzstabs im Stabkreuz
K	Federsteifigkeit
M	Biegemoment
M_x	Im Stabkreuz Biegemoment des Stabs in X -Richtung
M_y	Im Stabkreuz Biegemoment des Stabs in Y -Richtung
M_y	Biegemoment um die lokale y -Richtung
M_z	Biegemoment um die lokale z -Richtung
M_r	Rissbiegemoment
N_x	Normalkraft
P	Punkt
T	Torsionsmoment
T_{vert}	Torsionsmoment aus vertikal gerichtetem Schubfluss
T_{horiz}	Torsionsmoment aus horizontal gerichtetem Schubfluss

Variabel	Bezeichnung
T_u	Torsionswiderstand
T_r	Risstorsionsmoment
T	Torsionsmoment
T_x	Im Stabkreuz Torsionsmoment des Stabs in X -Richtung
T_y	Im Stabkreuz Torsionsmoment des Stabs in Y -Richtung
V_y	Querkraft in lokaler y -Richtung
V_z	Querkraft in lokaler z -Richtung
a_s	Querschnittsfläche des Betonstahls bezogen auf die Einheitslänge
b	Querschnittsbreite
c	Betonüberdeckung
d	Statische Höhe
d_v	Hebelarm der inneren Kräfte des Plattenelements
f_{sy}	Fliessspannung des Betonstahls
f_{su}	Zugfestigkeit des Betonstahls
f_{cc}	Zylinderdruckfestigkeit des Betons
f_c	Bauteilfestigkeit des Betons
f_{ct}	Betonzugfestigkeit
h	Querschnittshöhe
h_{eff}	Effektive Höhe des Zugglieds
i_{xy}	Torsionsträgheitsmoment bezogen auf die Einheitslänge
l_{El}	Elementlänge
l_{Ein}	Einzugslänge
l_{pl}	Länge des plastischen Gelenks
m	Biegemoment bezogen auf die Einheitslänge
m_{ij}	Biegemoment in i -Richtung auf der j -Ebene
n	Wertigkeit
n_{ij}	Membrankraft bezogen auf die Einheitslänge in i -Richtung auf der j -Ebene
p	Flächenlast
q_{ij}	Schubfluss in i -Richtung auf der j -Ebene
q	Streckenlast
s_{rm}	Rissabstand
s_x	Stabteilung in x -Richtung
t	Deckelstärke
u, v, w	Verformung in x, y, z -Richtung
v	Querkraft bezogen auf die Einheitslänge
w_0	Verformung bezogen auf die Elementachse
x, y, z	Lokale Koordinaten
x	Laufvariable

Variabel	Bezeichnung
x	Druckzonenhöhe
z	Hebelarm der inneren Kräfte
α, β	Winkel
γ_z	Schiebung in lokaler z -Richtung
γ_y	Schiebung in lokaler y -Richtung
γ_{ij}	Schiebung in i -Richtung auf der j -Ebene
δ	Schlupf
Δ_χ	Krümmungsdifferenz
ε	Dehnung
ε_{cu}	Bruchdehnung des Betons
ε_{smy}	Entlang des Zugglieds gemittelte Dehnung beim Fließen
ε_{smu}	Entlang des Zugglieds gemittelte Dehnung beim Versagen
ε_{sh}	Dehnung beim Verfestigungsbeginn
ε_{su}	Dehnung beim Erreichen der Zugfestigkeit
ε_q	Querdehnung
ϑ	Verdrillung
λ	Beiwert Zuggurtmodell
ν	Querdehnzahl
ρ	Geometrischer Bewehrungsgehalt
ρ_x	Geometrischer Bewehrungsgehalt in x -Richtung
ρ_y	Geometrischer Bewehrungsgehalt in y -Richtung
σ	Normalspannung
σ_c	Normalspannung des Betons
σ_s	Normalspannung des Betonstahls
τ	Schubspannung
τ_{ij}	Schubspannung in i -Richtung auf der j -Ebene
φ	Verdrehung, Rotation
φ_R	Relative Gelenkrotation
φ_{ri}	Einzelne Rissrotationen
φ_{adm}	Rotationsvermögen, zulässige Rotation
χ_{ij}	Krümmung in i -Richtung auf der j -Ebene
χ_{cu}	Bruchkrümmung begrenzt durch Betonversagen
χ_{su}	Bruchkrümmung begrenzt durch Betonstahlversagen
χ_r	Krümmung beim Reißen des Querschnitts
χ_y	Krümmung beim Fließen der Bewehrung
χ_y	Krümmung um die lokale y -Richtung
χ_z	Krümmung um die lokale z -Richtung
\varnothing	Durchmesser Bewehrungsstahl

Literatur

- Alvarez, Manuel. 1998. *Einfluss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton*. Report. Basel: Birkhäuser. doi: [10.3929/ethz-a-002000033](https://doi.org/10.3929/ethz-a-002000033).
- Bathe, Klaus-Jürgen. 1990. *Finite-Elemente-Methoden: Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen*. Bericht. Nachdr. Berlin Heidelberg: Springer.
- Blaauwendraad, J. 2010. *Plates and FEM: Surprises and Pitfalls*. Dordrecht: Springer Science+Business Media B.V.
- Heinzmann, Daniel. 2012. „[Stringer-Tafelmodelle für Stahlbeton](#)“. Doctoral {Thesis}, Zürich: ETH.
- Ingware. 2024. „[AxisVM-X7](#)“.
- Jäger, Thomas. 2007. „[Querkraftwiderstand und Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten](#)“. Doctoral {Thesis}, Zürich: ETH Zurich.
- Jäger, Thomas. 2009. *Stahlbeton III. Vorlesungsskript*. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- Kaufmann, Walter. 1998. *Strength and Deformations of Structural Concrete Subjected to in-Plane Shear and Normal Forces*. 1st ed. Basel: Birkhäuser Boston.
- Kaufmann, Walter. 2017. [2 Scheiben und Träger](#). Vorlesungsskript. Eidgenössische Technische Hochschule Zürich.
- Leeuwen, Robbie van, und Connor Ferster. 2024. „sectionproperties: A Python package for the analysis of arbitrary cross-sections using the finite element method“. *Journal of Open Source Software* 9(96):6105. doi: [10.21105/joss.06105](https://doi.org/10.21105/joss.06105).
- Marti, Peter. 2014. *Baustatik: Grundlagen - Stabtragwerke - Flächentragwerke*. 2., korrigierte Aufl. Berlin: Ernst.
- Marti, Peter, Manuel Alvarez, Walter Kaufmann, und Viktor Sigrist. 1998. „Tension Chord Model for Structural Concrete“. *Structural Engineering International* 8(4):287–98. doi: [10.2749/101686698780488875](https://doi.org/10.2749/101686698780488875).
- Marti, Peter, Manuel Alvarez, Walter Kaufmann, und Viktor Sigrist. 1999. „[Tragverhalten von Stahlbeton](#). Fortbildungskurs für Bauingenieure, ETH Zürich, 30.9./1.10.1999“.
- Mittelstedt, Christian. 2022. *Flächentragwerke: Scheiben, Platten, Schalen, geschichtete Struktu-*

ren. 1. Aufl. 2022. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Peter Marti. 1990. „Design of Concrete Slabs for Transverse Shear“. *ACI Structural Journal* 87(2). doi: [10.14359/3137](https://doi.org/10.14359/3137).

Spura, Christian. 2019. *Einführung in Die Balkentheorie Nach Timoshenko und Euler-Bernoulli*. Wiesbaden: Vieweg.

Thoma, K. 2018. „Finite element analysis of experimentally tested RC and PC beams using the cracked membrane model“. *Engineering Structures* 167:592–607. doi: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.04.010>.

Thoma, Karel, und Ivo Niederberger. 2010. *Plattenversuche an netzbewehrten Platten*. Technikumstrasse 21 6048 Horw: Hochschule Luzern Technik & Architektur.

Thoma, Karel, Patrick Roos, und Gregor Borkowski. 2014. „Finite Elemente Analyse von Stahlbetonplatten“. *Beton- und Stahlbetonbau* 109(12):895–904. doi: <https://doi.org/10.1002/best.201400047>.