

# Beispiel: Kragarm mit 2 Punktmassen

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aufgabenstellung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Musterlösung</b>	<b>3</b>
2.1	Formfunktion . . . . .	3
2.2	Allgemeine Bewegungsgleichung . . . . .	3
2.3	Eigenkreisfrequenz . . . . .	3
2.3.1	Bestimmung der Masse . . . . .	4
2.3.2	Bestimmung der Steifigkeit . . . . .	4
2.3.3	Grundfrequenz . . . . .	5
2.3.4	Auswertung des Spezialfalls . . . . .	5

# 1 Aufgabenstellung

Das in Abbildung 1 dargestellte System stellt einen Kragarm mit verteilter Masse und 2 Punktmassen dar. Eine mögliche Formfunktion ist rechts daneben gezeigt.

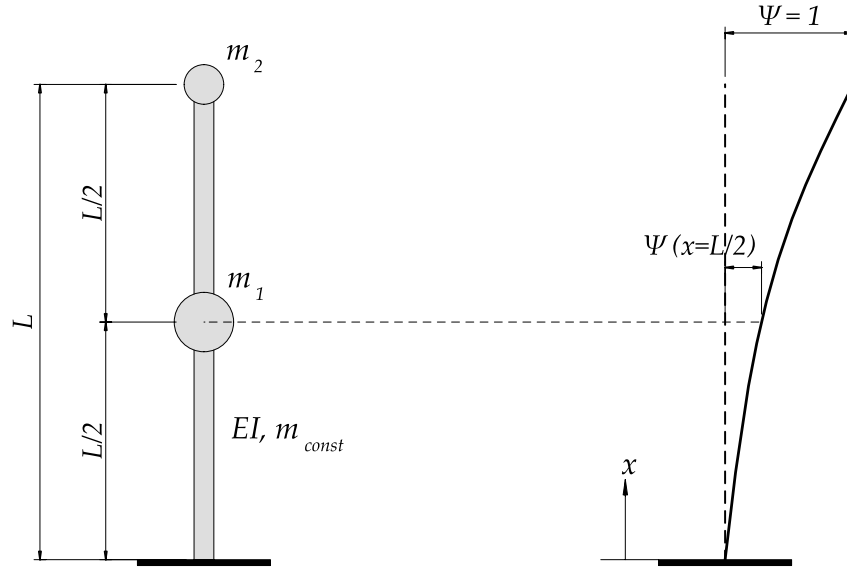


Abbildung 1: Kragarm mit verteilter Masse und zwei Punktmassen

Gesucht:

- Grundfrequenz (1. Eigenfrequenz  $\omega_n$ ) des Systems, berechnet mit dem Rayleigh-Quotienten.

Gegeben:

- Randbedingungen für den Spezialfall:  $m_{const} = 0$  und  $m_1 = m_2 = m$
- Formfunktion:

$$\Psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$$

## 2 Musterlösung

### 2.1 Formfunktion

$$\Psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (1)$$

### 2.2 Allgemeine Bewegungsgleichung

Mithilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Bewegungsgleichung kann anhand der Formfunktion  $\Psi$  die erste Eigenkreisfrequenz ermittelt werden. Der Rayleigh-Quotient ist eine Energiebetrachtung. Er setzt die potentielle, maximale Energie  $E_{pot,max}$  zur kinetischen, maximalen Energie  $E_{kin,max}$  ins Verhältnis. Daraus lässt sich die Kreisfrequenz  $\omega_n$  herauslösen.

$$m_{star} = m_1 \Psi^2(L) + m_2 \Psi^2\left(\frac{L}{2}\right) + \int_0^L m \Psi^2(x) dx \quad (2)$$

$$k_{star} = \int_0^L EI \left( \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) \right)^2 dx \quad (3)$$

$$f(x, t) = k_{star} u + m_{star} \frac{d^2}{dx^2} u \quad (4)$$

$$f(x, t) = u \int_0^L EI \left( \frac{d^2}{dx^2} \Psi(x) \right)^2 dx + \left( m_1 \Psi^2(L) + m_2 \Psi^2\left(\frac{L}{2}\right) + \int_0^L m \Psi^2(x) dx \right) \frac{d^2}{dx^2} u \quad (5)$$

Substituiert mit Massen- und Steifigkeitsvariable:

### 2.3 Eigenkreisfrequenz

Aus der Bewegungsgleichung kann die Eigenkreisfrequenz ermittelt werden:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_{star}}{m_{star}}} \quad (6)$$

### 2.3.1 Bestimmung der Masse

Die Masse kann mittels der Lösung des Integrals bestimmt werden. Dabei sind die Punktmassen mittels der entsprechenden Deformation an den Stellen  $L$  und  $\frac{L}{2}$  zu berücksichtigen, sowie die verteilte Masse über die gesamte Länge.

$$\Psi(L) = 1 \quad (7)$$

$$\Psi\left(\frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (8)$$

$$\Psi^2(x) = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 \quad (9)$$

$$m_{star} = m_1 + m_2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \int_0^L m \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 dx \quad (10)$$

$$m_{star} = m \left(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}\right) + m_1 + m_2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad (11)$$

### 2.3.2 Bestimmung der Steifigkeit

Die Steifigkeit in kann mittels der Lösung des Integrals in bestimmt werden. Zur Ermittlung der Steifigkeit  $k^*$  muss zuerst der Ansatz zweimal nach  $x$  abgeleitet werden.

$$\Psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (12)$$

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{2L} \quad (13)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2} \quad (14)$$

Danach bedingt es lediglich das einsetzen:

$$k_{star} = \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \right) \right)^2 dx \quad (15)$$

$$k_{star} = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \quad (16)$$

### 2.3.3 Grundfrequenz

Letztlich kann die Grundfrequenz bestimmt werden:

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{4m(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}) + 4m_1 + m_2(-2 + \sqrt{2})^2}}}{4L^{\frac{3}{2}}} \quad (17)$$

### 2.3.4 Auswertung des Spezialfalls

Mit Hilfe der Randbedingungen für den Spezialfall aus der Aufgabenstellung resultiert die Grundfrequenz zu:

$$\omega_1 = \frac{1.67 \left( \frac{EI}{m} \right)^{0.5}}{L^{1.5}} \quad (18)$$