Beispiel: Kragarm mit 2 Punktmassen

```
from sympycalcs.helpers import Equation as Eqn
from sympycalcs import render, convert
import sympy as sp

import sympy.physics.units as unit
from sympy.abc import *
sp.init_printing(use_latex='mathjax', latex_mode='equation')
```

Aufgabenstellung

Das in Figure 1 dargestellte System stellt einen Kragarm mit verteilter Masse und 2 Punktmassen dar. Eine mögliche Formfunktion ist rechts daneben gezeigt.

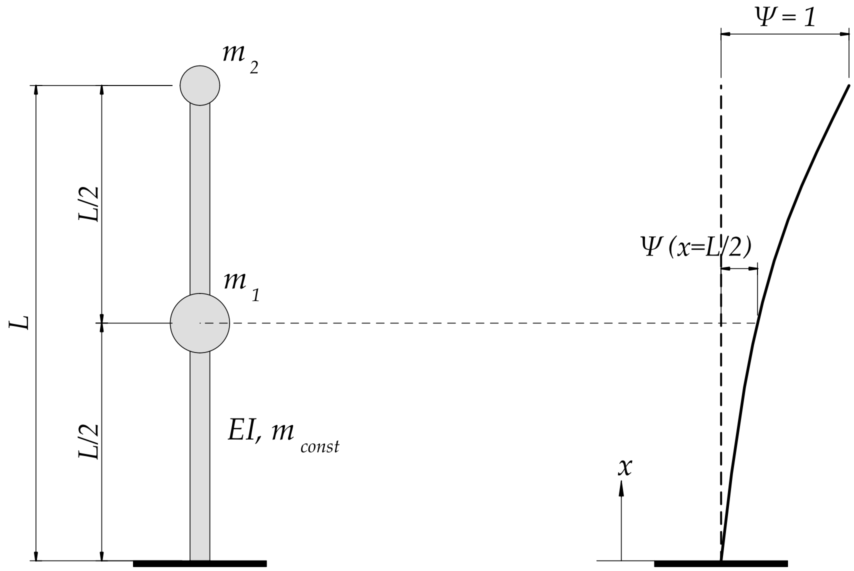

Figure 1: Kragarm mit verteilter Masse und zwei Punktmassen

Gesucht:

- Grundfrequenz (1. Eigenfrequenz ω_n) des Systems, berechnet mit dem Rayleigh-Quotienten.

Gegeben:

- Randbedingungen für den Spezialfall: $m_{const} = 0$ und $m_1 = m_2 = m$
- Formfunktion:

$$\Psi(x) = 1 - \cos(\frac{\pi x}{2L})$$

```
L = sp.symbols('L', positive=True)
m_1, m_2, m_star, k_star, omega_1 = sp.symbols('m_1, m_2, m_star, k_star omega_1')

Psi_x = sp.Function('Psi')(x)
f = sp.Function('f')(x,t)
```

```
params={
    m:0,
    m_1:m,
    m_2:m
}
```

Musterlösung

Formfunktion

```
eq_Psi_x = Eqn(Psi_x, 1 - sp.cos(sp.pi*x/(2*L)))
eq_Psi_x
```

$$\Psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{1}$$

Allgemeine Bewegungsgleichung

Mithilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Bewegungsgleichung kann anhand der Formfunktion Ψ die erste Eigenkreisfrequenz ermittelt werden. Der Rayleigh-Quotient ist eine Energiebetrachtung. Er setzt die potentielle, maximale Energie $E_{pot,max}$ zur kinetischen, maximalen Energie $E_{kin,max}$ ins Verhältnis. Daraus lässt sich die Kreisfrequenz ω_n herauslösen.

```
eq_m_star = Eqn(m_star,sp.Integral(m*Psi_x**2,(x, 0,L))+m_1 * Psi_x.subs(x,L)**2 + m_2 *Ps
eq_k_star = Eqn(k_star,sp.Integral(E*I*sp.Derivative(Psi_x,x,2)**2, (x,0,L)))
display(eq_m_star, eq_k_star)
```

$$m_{star} = m_1\Psi^2(L) + m_2\Psi^2\left(\frac{L}{2}\right) + \int\limits_0^L m\Psi^2(x)\,dx \tag{2}$$

$$k_{star} = \int\limits_0^L EI\left(\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)\right)^2\,dx \tag{3}$$

```
eq_bewegung_allg = Eqn(f, sp.Derivative(u,x,2)*m_star+u*k_star)
eq_bewegung_allg
```

$$f(x,t) = k_{star}u + m_{star}\frac{d^2}{dx^2}u \tag{4}$$

```
eq_bewegung_allg.subs(eq_m_star, eq_k_star)
```

$$f(x,t) = u\int\limits_0^L EI\left(\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)\right)^2 dx + \left(m_1\Psi^2(L) + m_2\Psi^2\left(\frac{L}{2}\right) + \int\limits_0^L m\Psi^2(x)\,dx\right)\frac{d^2}{dx^2}u \tag{5}$$

Substituiert mit Massen- und Steifigkeitsvariable:

Eigenkreisfrequenz

Aus der Bewegungsgleichung kann die Eigenkreisfrequenz ermittelt werden:

```
eq_eigenkreisfreq = Eqn(omega_1, sp.sqrt(k_star/ m_star))
eq_eigenkreisfreq
```

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_{star}}{m_{star}}} \tag{6}$$

Bestimmung der Masse

Die Masse kann mittels der Lösung des Integrals bestimmt werden. Dabei sind die Punktmassen mittels der entsprechenden Deformation an den Stellen L und $\frac{L}{2}$ zu berücksichtigen, sowie die verteilte Masse über die gesamte Länge.

```
eq_Psi_x.subs(x,L)
```

$$\Psi(L) = 1 \tag{7}$$

```
eq_Psi_x.subs(x,L/2)
```

$$\Psi\left(\frac{L}{2}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{8}$$

```
eq_Psi_x**2
```

$$\Psi^2(x) = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 \tag{9}$$

```
eq_m_star.subs(eq_Psi_x, eq_Psi_x.subs(x,L), eq_Psi_x.subs(x,L/2))
```

$$m_{star} = m_1 + m_2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \int\limits_0^L m \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)^2 dx \tag{10}$$

```
eq_m_star.subs(eq_Psi_x, eq_Psi_x.subs(x,L), eq_Psi_x.subs(x,L/2)).doit()
```

$$m_{star} = m\left(-\frac{4L}{\pi} + \frac{3L}{2}\right) + m_1 + m_2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \tag{11}$$

Bestimmung der Steifigkeit

Die Steifigkeit in kann mittels der Lösung des Integrals in bestimmt werden. Zur Ermittlung der Steifigkeit $k^\star$ muss zuerst der Ansatz zweimal nach x abgeleitet werden.

```
display(eq_Psi_x,sp.diff(eq_Psi_x,x,1),sp.diff(eq_Psi_x,x,2))
```

$$\Psi(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \tag{12}$$

$$\frac{d}{dx}\Psi(x) = \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{2L} \tag{13}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{\pi^2 \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}{4L^2} \tag{14}$$

Danach bedingt es lediglich das einsetzen:

```
display(eq_k_star.subs(eq_Psi_x),
       eq_k_star.subs(eq_Psi_x).doit())
```

$$k_{star} = \int\limits_0^L EI \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right)\right)\right)^2 dx \tag{15}$$

$$k_{star} = \frac{\pi^4 EI}{32L^3} \tag{16}$$

Grundfrequenz

Letztlich kann die Grundfrequenz bestimmt werden:

```
omega_1_sub = eq_eigenkreisfreq.subs(eq_k_star, eq_m_star).subs(eq_Psi_x, eq_Psi_x.subs(x,

omega_1_sub
```

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{2}\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{4m\left(-\frac{4L}{\pi}+\frac{3L}{2}\right)+4m_1+m_2\left(-2+\sqrt{2}\right)^2}}}{4L^{\frac{3}{2}}} \tag{17}$$

Auswertung des Spezialfalls

Mit Hilfe der Randbedingungen für den Spezialfall aus der Aufgabenstellung resultiert die Grundfrequenz zu:

```
omega_1_sub.subs(params).simplify().evalf(3)
```

$$\omega_1 = \frac{1.67\left(\frac{EI}{m}\right)^{0.5}}{L^{1.5}} \tag{18}$$