Beispiel: Rayleigh-Quotient an einem Siebenmassenschwinger beim Ersatzkraftverfahren

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabenstellung

Das Beispiel ist aus @Dupraz2004 Seite 77 entnommen. Die Lastermittlung wird übernommen. Es wird vom vereinfachten Modell in Abbildung 1 ausgegangen. Der Fokus liegt auf der Bestimmung der Grundfrequenz.

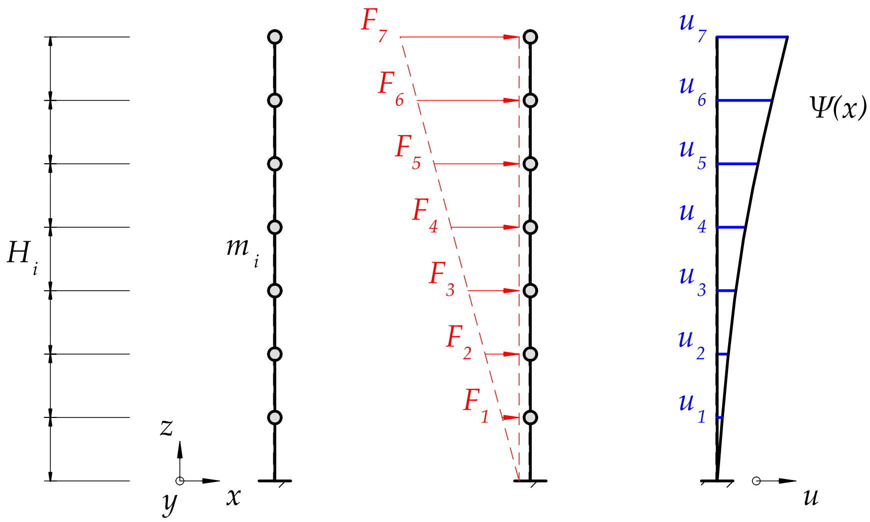

Abbildung 1: Vereinfachtes Modell für einen Mehrmassenschwinger

Gesucht:

- Erstelle die Nachgiebigkeitsmatrix (Verwende das Bildungsgesetz)
- Grundschwingzeit

Gegeben:

$E = 27000000000 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$	$H_i = 3.105 \, \mathrm{m}$
$I_x = 14.89 \, \mathrm{m}^4$	$I_y = 28.27 \, \mathrm{m}^4$
$m_i = 1278000 \, \frac{\mathrm{Ns}^2}{\mathrm{m}}$	

2 Musterlösung

2.1 Rayleigh-Quotient

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} 2\frac{H_i^3}{6EI} & 5\frac{H_i^3}{6EI} & 8\frac{H_i^3}{6EI} & 11\frac{H_i^3}{6EI} & 14\frac{H_i^3}{6EI} & 17\frac{H_i^3}{6EI} \\ 5\frac{H_i^3}{6EI} & 16\frac{H_i^3}{6EI} & 28\frac{H_i^3}{6EI} & 40\frac{H_i^3}{6EI} & 52\frac{H_i^3}{6EI} & 64\frac{H_i^3}{6EI} \\ 8\frac{H_i^3}{6EI} & 28\frac{H_i^3}{6EI} & 54\frac{H_i^3}{6EI} & 81\frac{H_i^3}{6EI} & 108\frac{H_i^3}{6EI} & 135\frac{H_i^3}{6EI} \\ 11\frac{H_i^3}{6EI} & 40\frac{H_i^3}{6EI} & 81\frac{H_i^3}{6EI} & 128\frac{H_i^3}{6EI} & 176\frac{H_i^3}{6EI} & 224\frac{H_i^3}{6EI} \\ 14\frac{H_i^3}{6EI} & 52\frac{H_i^3}{6EI} & 108\frac{H_i^3}{6EI} & 176\frac{H_i^3}{6EI} & 250\frac{H_i^3}{6EI} & 325\frac{H_i^3}{6EI} \\ 17\frac{H_i^3}{6EI} & 64\frac{H_i^3}{6EI} & 135\frac{H_i^3}{6EI} & 224\frac{H_i^3}{6EI} & 325\frac{H_i^3}{6EI} & 432\frac{H_i^3}{6EI} \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$u = \hat{f} F \tag{3}$$

Mittels dem Rayleigh-Quotient für das vereinfachte Modell lässt sich die Grundfrequenz direkt bestimmen.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{5} F_{i,0} u_{i,0}}{\sum_{i=0}^{5} M_{i,0} u_{i,0}^2}} \tag{4}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_i \\ m_i \\ m_i \\ m_i \\ m_i \\ m_i \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$T = \frac{1}{f} \tag{7}$$

Dabei entspricht $\mathbf{u}$ dem Verschiebungsvektor infolge des Kraftvektors $\mathbf{F}$. Der Verschiebungsvektor kann mittels Nachgiebigkeitsmatrix bestimmt werden.

2.1.1 Nachgiebigkeitsmatrix

Für gleichbleibende Geschosshöhen und Geschosssteifigkeiten lässt sich die Nachgiebigkeitsmatrix leicht mittels dem Bildungsgesetz in Gleichung 8 ermitteln.

$$\hat{f}_{i,j} = \frac{H^3}{6EI} \cdot j^2(3i - j) \text{ für } i \geq j \tag{8}$$

$\hat{\mathbf{f}}$ entspricht der Nachgiebigkeitsmatrix mit den Einträgen $\hat{f}_{i,j}$.

Beachte dabei dass die Gleichung 8 nur für $i \geq j$ gilt. Die Einträge entsprechen folgendem Schema:

$$\begin{bmatrix} f_{(1,1)} & f_{(1,2)} & f_{(1,3)} & f_{(1,4)} & f_{(1,5)} & f_{(1,6)} \\ f_{(2,1)} & f_{(2,2)} & f_{(2,3)} & f_{(2,4)} & f_{(2,5)} & f_{(2,6)} \\ f_{(3,1)} & f_{(3,2)} & f_{(3,3)} & f_{(3,4)} & f_{(3,5)} & f_{(3,6)} \\ f_{(4,1)} & f_{(4,2)} & f_{(4,3)} & f_{(4,4)} & f_{(4,5)} & f_{(4,6)} \\ f_{(5,1)} & f_{(5,2)} & f_{(5,3)} & f_{(5,4)} & f_{(5,5)} & f_{(5,6)} \\ f_{(6,1)} & f_{(6,2)} & f_{(6,3)} & f_{(6,4)} & f_{(6,5)} & f_{(6,6)} \end{bmatrix} \tag{9}$$

Unter strikter Anwendung von Gleichung 8 folgt daraus:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 28 & 54 & 0 & 0 & 0 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 0 & 0 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 250 & 0 \\ 17 & 64 & 135 & 224 & 325 & 432 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Aufgrund von Symmetrie kann diese abschliessend über die Diagonale gespiegelt werden:

$$\frac{6EI}{H_i^3}\hat{f} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 5 & 16 & 28 & 40 & 52 & 64 \\ 8 & 28 & 54 & 81 & 108 & 135 \\ 11 & 40 & 81 & 128 & 176 & 224 \\ 14 & 52 & 108 & 176 & 250 & 325 \\ 17 & 64 & 135 & 224 & 325 & 432 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Durch Multiplikation der *Nachgiebigkeit* mit der *Einwirkung* resultiert die Deformation.

$$u = \hat{f}F \tag{12}$$

$$u = \begin{bmatrix} 2\frac{H_i^3}{6EI} & 5\frac{H_i^3}{6EI} & 8\frac{H_i^3}{6EI} & 11\frac{H_i^3}{6EI} & 14\frac{H_i^3}{6EI} & 17\frac{H_i^3}{6EI} \\ 5\frac{H_i^3}{6EI} & 16\frac{H_i^3}{6EI} & 28\frac{H_i^3}{6EI} & 40\frac{H_i^3}{6EI} & 52\frac{H_i^3}{6EI} & 64\frac{H_i^3}{6EI} \\ 8\frac{H_i^3}{6EI} & 28\frac{H_i^3}{6EI} & 54\frac{H_i^3}{6EI} & 81\frac{H_i^3}{6EI} & 108\frac{H_i^3}{6EI} & 135\frac{H_i^3}{6EI} \\ 11\frac{H_i^3}{6EI} & 40\frac{H_i^3}{6EI} & 81\frac{H_i^3}{6EI} & 128\frac{H_i^3}{6EI} & 176\frac{H_i^3}{6EI} & 224\frac{H_i^3}{6EI} \\ 14\frac{H_i^3}{6EI} & 52\frac{H_i^3}{6EI} & 108\frac{H_i^3}{6EI} & 176\frac{H_i^3}{6EI} & 250\frac{H_i^3}{6EI} & 325\frac{H_i^3}{6EI} \\ 17\frac{H_i^3}{6EI} & 64\frac{H_i^3}{6EI} & 135\frac{H_i^3}{6EI} & 224\frac{H_i^3}{6EI} & 325\frac{H_i^3}{6EI} & 432\frac{H_i^3}{6EI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{42H_i^3}{EI} \\ \frac{925H_i^3}{6EI} \\ \frac{950H_i^3}{3EI} \\ \frac{1535H_i^3}{3EI} \\ \frac{2173H_i^3}{3EI} \\ \frac{5663H_i^3}{6EI} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Durch einsetzen der bestimmten Verformung in die Gleichung der Eigenfrequenz folgt:

$$f = \frac{\sqrt{43665341610}\sqrt{\frac{EI}{H_i^3 m_i}}}{4993178\pi} \tag{15}$$

$$T = \frac{\sqrt{43665341610}\pi}{8745\sqrt{\frac{EI}{H_i^3 m_i}}} \tag{16}$$

2.2 Grundschwingzeit

2.2.1 X-Richtung

Es gilt I mit I_y zu substituieren.

$$I_x = 14.89 \mathrm{m}^4 \tag{17}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{42H_i^3}{EI_y} \\ \frac{925H_i^3}{6EI_y} \\ \frac{950H_i^3}{3EI_y} \\ \frac{1535H_i^3}{3EI_y} \\ \frac{2173H_i^3}{3EI_y} \\ \frac{5663H_i^3}{6EI_y} \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$f = \frac{1.88}{\mathrm{s}} \tag{19}$$

$$T = 0.531 \mathrm{s} \tag{20}$$

2.2.2 Y-Richtung

Es gilt I mit I_x zu substituieren.

$$I_y = 28.27 \mathrm{m}^4 \tag{21}$$

$$u = \begin{bmatrix} \frac{42H_i^3}{EI_x} \\ \frac{925H_i^3}{6EI_x} \\ \frac{950H_i^3}{3EI_x} \\ \frac{1535H_i^3}{3EI_x} \\ \frac{2173H_i^3}{3EI_x} \\ \frac{5663H_i^3}{6EI_x} \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$f = \frac{1.37}{\mathrm{s}} \tag{23}$$

$$T = 0.732\text{s} \tag{24}$$

2.3 Abminderung der Steifigkeit

Um die Rissbildung zu berücksichtigen wird die Steifigkeit auf 30 % abgemindert.

2.3.1 X-Richtung

$$f = \frac{1.03}{\text{s}} \tag{25}$$

$$T = 0.97\text{s} \tag{26}$$

2.3.2 Y-Richtung

$$f = \frac{0.748}{\text{s}} \tag{27}$$

$$T = 1.34\text{s} \tag{28}$$