

# Tragverhalten von Stahlbeton

## Fortbildungskurs für Bauingenieure, ETH Zürich, 30.9./1.10.1999

**Educational Material****Author(s):**

Marti, Peter; Alvarez, Manuel; Kaufmann, Walter; Sigrist, Viktor

**Publication date:**

1999

**Permanent link:**

<https://doi.org/10.3929/ethz-a-004470343>

**Rights / license:**

[In Copyright - Non-Commercial Use Permitted](#)

**Originally published in:**

IBK Publikation SP 8

---

# *TRAGVERHALTEN VON STAHLBETON*

*Fortbildungskurs für Bauingenieure  
ETH Zürich  
30.9./1.10.1999*

*Prof. Dr. Peter Marti  
Dr. Manuel Alvarez  
Dr. Walter Kaufmann  
Dr. Viktor Sigrist*

*Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich  
Zürich, September 1999*



## **Vorwort**

Wissenschaftliche Untersuchungen des Tragverhaltens von Stahlbeton haben am Institut für Baustatik und Konstruktion der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich eine lange Tradition. Seit 1960 hat sich eine eigentliche "Zürcher Schule" entwickelt, die sich durch die systematische Anwendung der Plastizitätstheorie, die Überprüfung mit Grossversuchen und die Aufbereitung der Forschungsergebnisse für die praktische Anwendung auszeichnet.

Die bis 1990 vorliegenden Erkenntnisse wurden in den letzten Jahren in verschiedener Hinsicht ergänzt und erweitert. Im Zentrum stand die bessere Erfassung des Verformungsvermögens. Vertiefte Untersuchungen des Verbundverhaltens, die Verknüpfung mit plastizitätstheoretischen Modellvorstellungen sowie der Einbezug bruchmechanischer Betrachtungen führten zu ersten Fortschritten, die nun mit diesem Fortbildungskurs dargestellt werden sollen.

Für die sorgfältige Ausarbeitung ihrer Beiträge und die Zusammenarbeit bei der Vorbereitung und Durchführung des Fortbildungskurses bin ich den Herren Manuel Alvarez, Walter Kaufmann und Viktor Sigrist zu grossem Dank verpflichtet.

Die organisatorische Vorbereitung lag in den Händen von Frau Regina Nöthiger. Sie wirkte auch bei der Herstellung meiner Manuskripte mit, für deren Bildteil Herr Matthias Schmidlin verantwortlich war. Für ihre umsichtige und präzise Arbeit möchte ich den beiden Genannten herzlich danken. Ein weiterer herzlicher Dank ergeht an alle meine heutigen Mitarbeiter für ihre Mithilfe, insbesondere für die Vorbereitung und Durchführung der Demonstrationsversuche. Schliesslich möchte ich auch allen meinen ehemaligen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern meinen Dank aussprechen. Durch ihre theoretischen und experimentellen Arbeiten haben sie wesentlich zum heutigen Kenntnisstand beigetragen.

Die diesem Fortbildungskurs zugrundeliegenden Forschungsarbeiten wurden von der ETH Zürich, vom Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung, von der Stiftung für wissenschaftliche, systematische Forschungen auf dem Gebiet des Beton- und Eisenbetonbaus des Verbands der Schweizerischen Cementindustrie (Cemsuisse) sowie vom Bundesamt für Strassenbau finanziell unterstützt. Ausser der Förderung der Stahlbetonbauweise ermöglichten diese Beiträge die wissenschaftliche Weiterbildung einer stattlichen Zahl junger Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter. Dafür möchte ich allen Verantwortlichen aufrichtig danken.

Zürich, September 1999

Peter Marti

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	1
1.1 Einleitung	1
1.2 Tragverhalten	2
1.3 Traglastverfahren	6
1.4 Abschätzung von Verformungen	11
<b>2 Traglastverfahren</b>	15
2.1 Elastisch-plastische Systeme	15
2.2 Fliessbedingungen	24
2.3 Grenzwertsätze	37
2.4 Anwendung auf Stabtragwerke	40
<b>3 Bruchwiderstand von Scheiben</b>	45
3.1 Einleitung	45
3.2 Statische und kinematische Beziehungen	46
3.3 Fliessbedingungen	50
3.4 Spannungsfelder	54
3.5 Bruchmechanismen	73
<b>4 Bruchwiderstand von Platten</b>	81
4.1 Einleitung	81
4.2 Statische und kinematische Beziehungen	82
4.3 Fliessbedingungen	88
4.4 Gleichgewichtslösungen	93
4.5 Fliessgelenklinienmethode	106
4.6 Einfluss von Querkräften	113
4.7 Membranwirkung	118
<b>5 Verhalten von Stahl und Beton</b>	121
5.1 Einleitung	121
5.2 Bewehrungsstahl	122
5.3 Beton unter einachsigem Zug	126
5.4 Beton unter einachsigem Druck	133
5.5 Beton unter mehrachsiger Beanspruchung	137
5.6 Verbund	139
<b>6 Zuggurtmodell</b>	149
6.1 Einleitung	149
6.2 Modellbildung	149
6.3 Lasteinwirkung	153
6.4 Zwangbeanspruchung	159
6.5 Vorgespannte Zugglieder	164
6.6 Vergleich mit Versuchsergebnissen	171

<b>7 Gerissenes Scheibenmodell</b>	175
7.1 Einleitung	175
7.2 Druckfeldmodelle	183
7.3 Gerissenes Scheibenmodell	187
7.4 Näherungsverfahren	192
7.5 Vergleich mit Versuchsergebnissen	195
<b>8 Druckgurtmodell</b>	199
8.1 Einleitung	199
8.2 Druckgurtmodell	199
8.3 Praktische Anwendung	207
<b>9 Verformungsnachweise</b>	209
9.1 Einleitung	209
9.2 Balkenbiegung	209
9.3 Plastische Verformungsbereiche	211
9.4 Schnittgrössenumlagerung	219
9.5 Vergleich mit Versuchsergebnissen	223
9.6 Näherungsverfahren	230
<b>10 Mindestbewehrung</b>	239
10.1 Einleitung	239
10.2 Mindestbewehrung nach Zuggurtmodell	239
10.3 Vergleich mit Normbestimmungen	245
10.4 Praktische Anwendung	247
10.5 Duktilitätsanforderungen	252
<b>11 Vorspannung</b>	257
11.1 Einleitung	257
11.2 Zugglieder	263
11.3 Biegeträger	265
11.4 Scheiben	276
11.5 Vorspannung ohne Verbund	277
11.6 Externe Vorspannung	280
<b>12 Stahlfaserbeton</b>	281
12.1 Einleitung	281
12.2 Biegeverhalten	281
12.3 Vergleich mit Versuchsergebnissen	287
12.4 Praktische Anwendung	290
12.5 Schlussbemerkungen	292
<b>Literatur</b>	294
<b>Bezeichnungen</b>	300



# 1 Einführung

*Peter Marti*

## 1.1 Einleitung

### 1.1.1 Hintergrund

Der Nachweis der Tragfähigkeit von Betonbauten aller Art erfolgt heute nach der Norm SIA 162 [96] auf der einheitlichen Grundlage der Plastizitätstheorie. Die in den Jahren 1963, 1975 und 1983 unter der Leitung von Prof. Dr. Bruno Thürlimann an der ETH Zürich durchgeführten Fortbildungskurse [108, 105, 107] und die ihnen zugrundeliegenden Forschungsarbeiten trugen wesentlich zu diesem Entwicklungsstand bei.

Die Anwendung der Plastizitätstheorie setzt ein ausreichendes Verformungsvermögen aller Tragwerksteile voraus. Die Fragen nach dem erforderlichen und dem vorhandenen Verformungsvermögen werden jedoch von der Plastizitätstheorie nicht beantwortet.

In der Bemessungspraxis versucht man mit der Wahl duktiler Baustoffe sowie durch geeignete konstruktive Massnahmen ein ausreichendes Verformungsvermögen sicherzustellen, und man führt in der Regel für Grenzzustände der Tragfähigkeit keine Verformungsnachweise durch. Dies ist zwar meist unbedenklich, grundsätzlich aber unbefriedigend. Oft ergeben sich Unsicherheiten bei der Beurteilung der Frage, ob sich ein der Bemessung zugrundegelegter Gleichgewichtszustand tatsächlich einstellen kann und wie die zugehörigen Verformungen ermittelt werden sollen. Diese Probleme werden noch akzentuiert durch die in den letzten Jahren festzustellende Reduktion der Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahls. Bei der Überprüfung bestehender Tragwerke stellen sich ähnliche Probleme, oft noch verschärft durch eine mangelhafte konstruktive Durchbildung.

Aus den dargelegten Gründen wurde 1990 an der ETH Zürich ein langfristig angelegtes Forschungsprojekt initiiert, mit dem Ziel, eine widerspruchsfreie, auf klaren physikalischen Grundlagen basierende und experimentell abgestützte Theorie des Verformungsvermögens von Massivbautragwerken zu erarbeiten. Die bisherigen Arbeiten führten namentlich zur Entwicklung zweier theoretischer Modelle, die eine umfassende Beschreibung des Tragverhaltens von Zuggurten und Stegscheiben in schlaff bewehrten und vorgespannten Bauteilen gestatten. Mit der Entwicklung eines analogen Modells für Druckgurte wurde begonnen.

### 1.1.2 Zielsetzung und Übersicht

Der vorliegende Fortbildungskurs hat zum Ziel, einerseits die Grundlagen der Plastizitätstheorie und deren Anwendung auf Stahlbeton aus heutiger Sicht darzustellen und andererseits die wichtigsten, im Rahmen des in Kapitel 1.1.1 erwähnten Forschungsprojekts gewonnenen Erkenntnisse zusammenzufassen.

Nach der Einführung einiger wichtiger Begriffe und Zusammenhänge in Kapitel 1 werden die Grundlagen der Plastizitätstheorie und deren Anwendung auf Stabtragwerke (Kapitel 2), Scheiben (Kapitel 3) und Platten (Kapitel 4) dargestellt. Ausgehend von einem Überblick über das Verhalten von Stahl und Beton (Kapitel 5) werden dann die grundlegenden Modellvorstellungen für Zuggurte (Kapitel 6), Stegscheiben (Kapitel 7) und Druckgurte (Kapitel 8) behandelt, und

Fragen der Verformungsnachweise und Schnittgrößenumlagerungen (Kapitel 9) sowie der Mindestbewehrung und Duktilitätsanforderungen (Kapitel 10) werden erörtert. Die Kapitel 11 und 12 über den Einfluss einer Vorspannung und die Anwendung von Stahlfaserbeton dienen der Abschließung der Darstellung.

### 1.1.3 Abgrenzung

Die vorliegende Darstellung beschränkt sich im wesentlichen auf zeitunabhängige Effekte sowie Einflüsse 1. Ordnung. Ferner werden Einwirkungen, geometrische Größen und Baustoffeigenschaften in der Regel als deterministische Größen behandelt. Die Berücksichtigung entsprechender Unschärpen und die Fragen nach dem in einem gegebenen Fall angemessenen Zuverlässigkeitseiveau sowie nach den zur Gewährleistung dieses Niveaus erforderlichen Massnahmen sind nicht Gegenstand der vorliegenden Darstellung.

## 1.2 Tragverhalten

### 1.2.1 Modellbildung im Kontext der Projektierung

Im Zentrum der Beschäftigung mit dem Tragverhalten von Stahlbeton stehen Fragen der Modellbildung. Mit Bild 1.1 wird versucht, einen Überblick über den entsprechenden Kontext zu geben [95].

Die Projektierung eines Bauwerks, an die sich dessen Ausführung, Nutzung und Erhaltung anschliessen, kann in den Entwurf, die Berechnung und die Bemessung unterteilt werden. Mit dem Entwurf soll, von den Nutzungsanforderungen des Bauherrn ausgehend, ein klares Baukonzept erarbeitet werden. Mit der Berechnung soll das Tragverhalten im Hinblick auf die zu betrachtenden Bemessungszustände erfasst werden, und mit der Bemessung werden die Abmessungen, die Baustoffeigenschaften und die konstruktive Durchbildung abschliessend festgelegt.

Entwurfsanforderungen an ein Bauwerk oder Tragwerk betreffen allgemein seine Einpassung in die natürliche und gebaute Umwelt, seine Gestaltung, seine Zuverlässigkeit, seine Wirtschaftlichkeit, seine Robustheit und seine Dauerhaftigkeit, d.h. die Gewährleistung von Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit im Rahmen der vorgesehenen Nutzung und der vorhersehbaren Einwirkungen, ohne unvorhergesehene Aufwand für Instandhaltung und Instandsetzung. Die Entwurfsarbeit beinhaltet in der Regel die Ausarbeitung verschiedener Entwurfsvarianten unter Berücksichtigung der Entwurfsrandbedingungen, die Überprüfung ihrer Machbarkeit und die Beurteilung der verbleibenden Realisierungsmöglichkeiten hinsichtlich der Erfüllung der Entwurfsanforderungen. Bei der Betrachtung entsprechender Entwurfszustände sollten die wesentlichen Ein- und Auswirkungen sowie die massgebenden Gefährdungen und Möglichkeiten zu ihrer Beherrschung erfasst werden.

Bemessungszustände umfassen physikalische Gegebenheiten und Bedingungen innerhalb eines bestimmten Zeitraumes, für welchen nachgewiesen wird, dass massgebende Grenzzustände nicht überschritten werden. Grenzzustände und Nachweise betreffen einerseits die Tragfähigkeit, d.h. die Möglichkeit eines Versagens eines Tragwerks oder einzelner seiner Bauteile oder Verbindungen, und andererseits die Gebrauchstauglichkeit, d.h. die Funktionstüchtigkeit eines Bauwerks, den Benutzerkomfort und das Aussehen.

Mit der Berechnung werden anhand eines Tragwerksmodells Auswirkungen als Folge bestimmter Einwirkungen ermittelt. Einwirkungen können aufgebrachte Kräfte, aufgezwungene

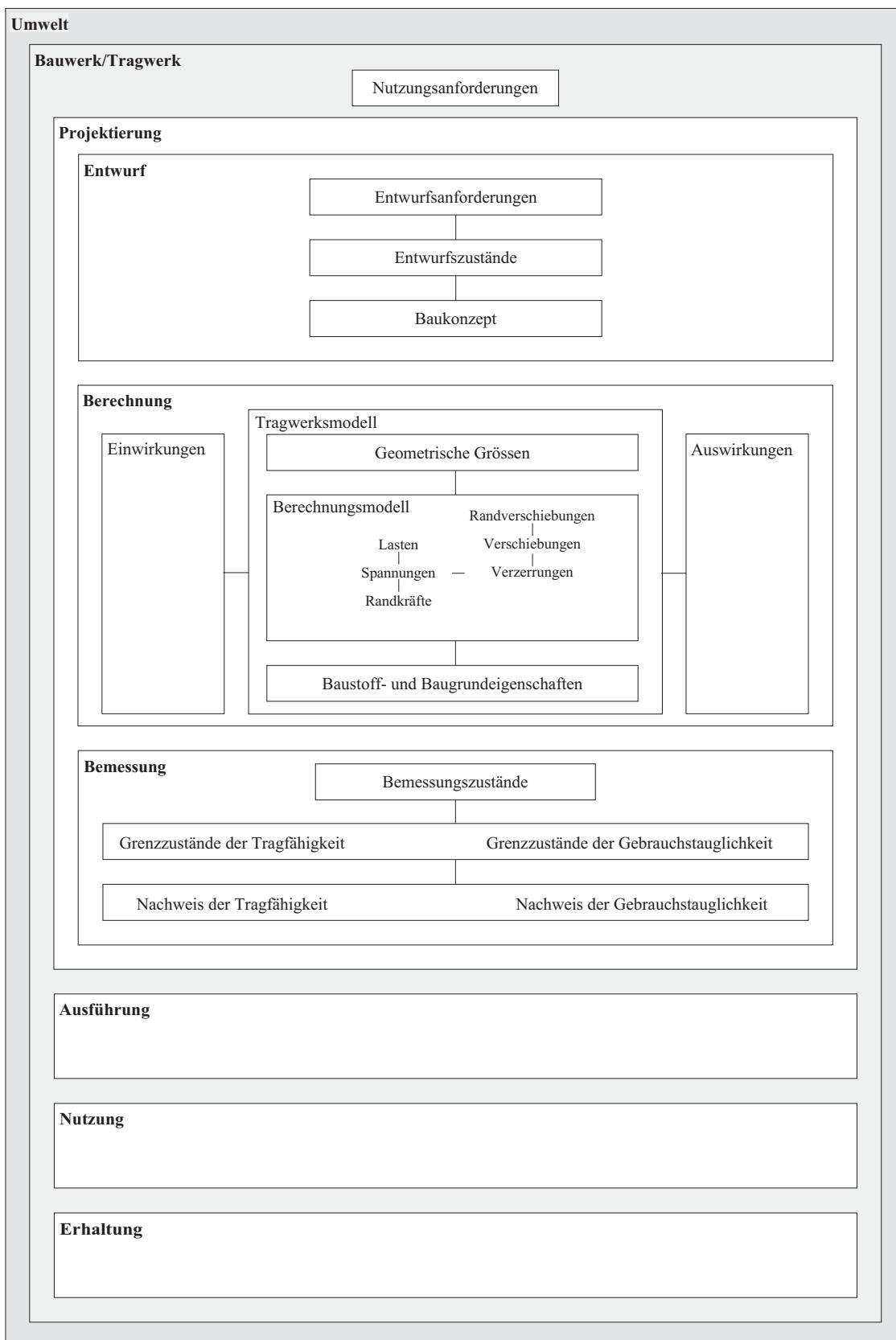


Bild 1.1 – Zusammenhang wichtiger Begriffe des konstruktiven Ingenieurbaus.

oder behinderte Verformungen sowie Umwelteinflüsse sein. Das Tragwerksmodell verbindet Einwirkungen, geometrische Größen und Baustoff- und Baugrundeigenschaften. Es ergibt sich aus der Abgrenzung und Idealisierung des Tragwerks. Die Verknüpfung der physikalischen Größen, namentlich Kraft- und Verformungsgrößen, geschieht in einem Berechnungsmodell über entsprechende Beziehungen; insbesondere sind dies (1.) Gleichgewichtsbedingungen und statische Randbedingungen, welche Spannungen mit Lasten und Randkräften in Beziehung bringen, (2.) kinematische Relationen und Randbedingungen, welche Verschiebungen mit Verzerrungen und Randverschiebungen verknüpfen, sowie (3.) Stoffgesetze, welche den Zusammenhang von Spannungen und Verzerrungen konstituieren.

Bei der Modellbildung versucht man, die jeweilige Problemstellung in möglichst einfache, aber aussagekräftige Aufgaben der Baustatik überzuführen. Das Bestreben geht dahin, die hauptsächlichen Aspekte des Tragverhaltens zu erfassen. Je nach den bei der Abgrenzung und Idealisierung des Tragwerks eingeführten oder gelösten Bindungen ergeben sich unterschiedliche Modellvorstellungen. Weitere Unterschiede können sich aus den angenommenen Stoffgesetzen und aus der Art der Behandlung von sekundären Effekten ergeben.

Im Rahmen der Projektierung von Tragwerken stehen die Anwendung der Elastizitätstheorie und der Plastizitätstheorie im Vordergrund. Die Plastizitätstheorie gestattet die Beurteilung der Tragfähigkeit mittels einfacher und leistungsfähiger Verfahren, die dem Denken und den Bedürfnissen der Bauingenieure nahe liegen. Der wesentliche Unterschied zwischen elastischen und plastischen Berechnungen liegt darin, dass bei Berücksichtigung des plastischen Fließens außer dem für eine bestimmte Problemstellung jeweils einzigen, elastisch verträglichen Spannungszustand im allgemeinen unendlich viele weitere Spannungszustände möglich sind, die sich aus der elastischen Lösung durch Überlagerung von Eigenspannungszuständen ergeben. Diese Feststellung erlaubt einerseits, dass man sich – vor allem beim Entwurf – von den zu engen Fesseln der elastischen Verträglichkeit lösen und in grosser Freiheit unterschiedliche Gleichgewichtszustände untersuchen kann. Andererseits liegt in der mangelnden Eindeutigkeit plastischer Berechnungen neben den durch ihre Nichtlinearität verursachten Schwierigkeiten ein Hauptgrund für ihre weltweit bis heute nur zögerliche Akzeptanz.

### 1.2.2 Tragverhalten von Stahlbeton

Die Linie 1 in Bild 1.2 (a) illustriert das aus vielen Versuchen bekannte, typische Tragverhalten von Tragwerken oder Bauteilen aus Stahlbeton. Das ausgeprägt nicht lineare Verhalten wird hauptsächlich durch das Reissen des Betons und das Fließen der Bewehrung verursacht. Üblicherweise kann das Tragverhalten durch ungerissen elastische (Linie 2), gerissen elastische (Linie 3) und Traglastberechnungen (Linie 4) gut approximiert werden.

Die Linie 5 in Bild 1.2 (b) zeigt den Einfluss einer Vorspannung der Bewehrung bei im Vergleich zur Linie 1 festgehaltenem Tragwiderstand; die Risslast wird erhöht, und dadurch wird das Verhalten im Gebrauchszustand verbessert. Die Linien 6 und 7 veranschaulichen den Einfluss höherer bzw. niedrigerer Bewehrungsgehalte auf das Verformungsvermögen. Schliesslich illustriert die Linie 8 das entfestigende Verhalten, das resultiert, wenn die Bewehrung nicht imstande ist, die beim Reissen des Betons freigesetzten Zugkräfte zu übernehmen, wenn also die sogenannte Mindestbewehrung nicht vorhanden ist.

### 1.2.3 Stoffgesetze

Um übliche, für die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Baustoffen allgemein verwendete Stoffgesetze einzuführen, ist es zweckmäßig, vom einachsigen Spannungszustand aus-

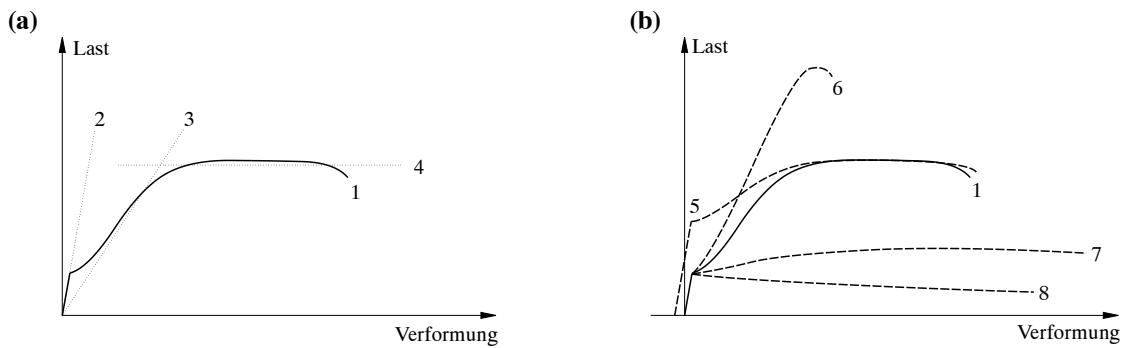


Bild 1.2 – Typische Last-Verformungs-Diagramme: (a) Versuch und Berechnungen; (b) Einfluss der Bewehrung auf das Tragverhalten.

zugehen, z.B. von der Beschreibung des in Zugversuchen beobachteten Verhaltens. Bild 1.3 zeigt typische, durch Zusammenfassung und Idealisierung solcher Beobachtungen gewonnene Spannungs-Dehnungs-Diagramme.

Die mit Bild 1.3 (a) charakterisierte elastische Verformung ist durch eine eindeutige Beziehung zwischen Spannungen und Dehnungen gekennzeichnet. Nach der Entlastung verbleiben keine Dehnungen, und es treten somit keine Energieverluste auf.

Die in Bild 1.3 (b) dargestellte Spannungs-Dehnungs-Beziehung ist nicht umkehrbar. Nach einer Entlastung aus A bzw. B verbleiben die mit den Abszissen der Punkte D bzw. C bestimmten bleibenden oder plastischen Dehnungen. Im Gegensatz zur elastischen Verformung wird bei der Entlastung nur ein Teil der für den Verformungsprozess eingesetzten Energie zurückgewonnen. Der Rest wird dissipiert, in Wärme übergeführt. Beispielsweise entsprechen die Flächeninhalte der Bereiche OAD bzw. OABC in Bild 1.3 (b) den spezifischen (auf die Volumeneinheit bezogenen) Dissipationsarbeiten bei den durch die Umhüllenden dieser Bereiche beschriebenen Belastungs- und Entlastungsprozessen.

Bild 1.3 (c) charakterisiert ein linear elastisch-linear verfestigend plastisches Verhalten. Das linear elastische Verhalten entlang OA wird durch den Elastizitätsmodul  $E$  beschrieben. Nach Überschreiten der initialen Fließgrenze  $f_y$  beginnt die mit dem Verfestigungsmodul  $E_h$  be-

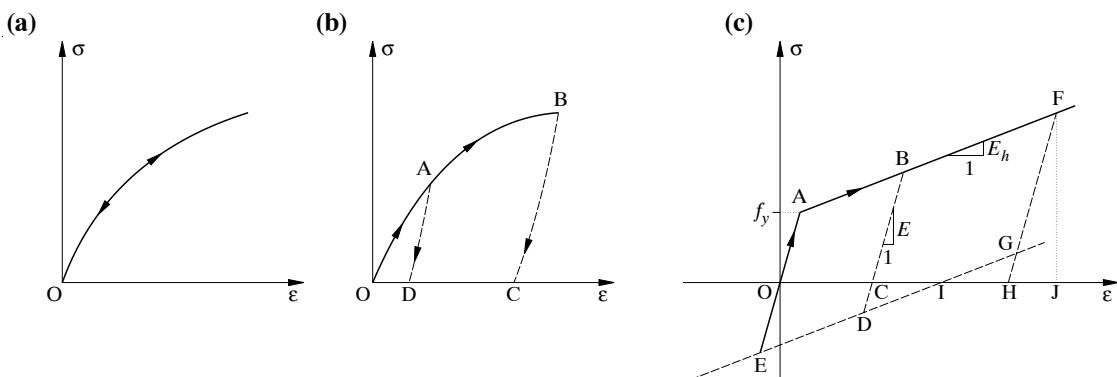


Bild 1.3 – Spannungs-Dehnungs-Diagramme: (a) Elastische Verformung; (b) plastische Verformung; (c) linear elastisch-linear verfestigend plastisches Verhalten.

schriebene, lineare Verfestigung. Nach einer rein elastischen Entlastung BC parallel zu OA verbleibt die durch die Abszisse von Punkt C gegebene plastische Dehnung. Bei Umkehr des Belastungssinnes in C beginnt in D die Verfestigung auf Druck. Dabei wird die Gerade DE als parallel zu AB angenommen.

Aus Bild 1.3 (c) ergeben sich zwei wichtige Vereinfachungen. Verschwindet die Verfestigung,  $E_h = 0$ , so spricht man von einem ideal plastischen Verhalten. Vernachlässigt man elastische Verformungen,  $E \rightarrow \infty$ , so vollzieht man den Übergang zu einem starr-plastischen Verhalten.

Die Gültigkeit des Diagramms in Bild 1.3 (c) ist auf den Bereich links von der Parallelen zu OA durch den Punkt I zu beschränken. Wäre dies nicht der Fall, müsste beispielsweise bei der Entlastung aus F entlang GI ein “plastisches Rückwärtsfliessen” auftreten. Die dem Inhalt des Dreiecks GHI entsprechende, bei der Belastung OABF dissipierte Energie müsste in mechanische Energie zurückverwandelt werden, was aus thermodynamischen Gründen nicht möglich ist.

Bild 1.3 veranschaulicht typische, im Rahmen der Kontinuumsmechanik verwendete Stoffgesetze. Die Anwendung der Kontinuumsmechanik entspricht einer rein phänomenologischen Betrachtungsweise. Insbesondere wird nicht untersucht, worauf die plastischen Verformungen zurückzuführen sind.

Beim Reissen des Betons wird die von der Kontinuumsmechanik vorausgesetzte stoffliche Integrität verletzt. Für eine angemessene Beschreibung entsprechender Zusammenhänge sind kontinuumsmechanische deshalb mit bruchmechanischen Überlegungen zu ergänzen. Grundlagen dazu sind in Kapitel 5 zusammengestellt.

## 1.3 Traglastverfahren

### 1.3.1 Statische und kinematische Methode

Die in Kapitel 2 dargestellten Traglastverfahren umfassen zwei Methoden, die die Einschränkung der Traglasten von Systemen aus starr-ideal plastischem Material erlauben. Die statische Methode, mit der im ganzen System aufnehmbare Gleichgewichtszustände untersucht werden, liefert untere Grenzwerte der Traglast. Umgekehrt liefert die kinematische Methode, bei der das Prinzip der virtuellen Arbeiten auf mögliche Bruchmechanismen angewendet wird, obere Grenzwerte der Traglast.

Bei der praktischen Anwendung der statischen Methode ist es oft zweckmäßig, von dem Spannungszustand auszugehen, der sich unter der Annahme eines linear elastischen Verhaltens des betrachteten Systems einstellt. Weitere mögliche Gleichgewichtszustände können durch Überlagerung von Eigenspannungszuständen gewonnen werden. Da für Nachweise der Gebrauchstauglichkeit meist ohnehin elastische Berechnungen durchgeführt werden, ist ein solches Vorgehen besonders naheliegend. Man wird sich dabei auch bewusst, wo und in welchem Mass man mit Schnittgrößenumlagerungen rechnet.

Bei der Anwendung der kinematischen Methode sollten die betrachteten Bruchmechanismen zur sukzessiven Verbesserung (Verkleinerung) der oberen Grenzwerte der Traglast derart verändert werden, dass die äusseren Kräfte im Verhältnis zur Dissipationsarbeit mehr Arbeit leisten.

### 1.3.2 Anwendung auf Stahlbeton

#### Allgemeines

Mit einer meist verhältnismässig fein verteilten Bewehrung des Betons mit Stahlstäben, welche mit diesem im Verbund stehen, wird im Stahlbetonbau ein günstiges Zusammenwirken zweier Baustoffe angestrebt, die sich einzeln recht unterschiedlich verhalten. Da Beton schon unter geringen Zugbeanspruchungen reisst, wird versucht, durch eine geschickte Bemessung die Ausbildung von Tragsystemen zu ermöglichen, in denen der Beton im wesentlichen nur Druck- und die Bewehrung vorwiegend Zugkräfte zu übernehmen hat. Die Erfahrung zeigt, dass vor dem Bruch eine solche Kräfteumlagerung tatsächlich eintritt, wenn gewisse Regeln beachtet werden, die hauptsächlich die Verteilung und die Verankerung der Bewehrung betreffen. Diese Feststellung trifft vor allem auf relativ schwach bewehrte oder, wie man sagt, unterbewehrte Bauteile zu. Ihr Tragwiderstand wird weitgehend durch das Fliessen der Bewehrung bestimmt. Bis in die siebziger Jahre blieb die Anwendung von Traglastverfahren vorwiegend auf solche Fälle beschränkt. In den siebziger und achtziger Jahren wurden jedoch die Anwendungsgrenzen der Traglastverfahren stark ausgedehnt, so dass 1989, wie eingangs in Kapitel 1.1.1 vermerkt, der Nachweis der Tragfähigkeit von Betonbauten nach der Norm SIA 162 [96] generell auf diese Basis gestellt werden konnte.

#### Scheiben

Zur Beschreibung der Tragwirkung von Eisenbetonbalken kam schon vor hundert Jahren die Vorstellung von Fachwerkmodellen auf. Mit der Begründung der beiden Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie nach dem Zweiten Weltkrieg und deren systematischen Anwendung auf Stahlbeton erhielten solche Vorstellungen in den sechziger und siebziger Jahren eine einheitliche theoretische Grundlage. Fachwerkmodelle wurden als spezielle, besonders anpassungsfähige Mittel bei der Anwendung der statischen Methode auf Stahlbeton erkannt. Ferner setzte sich die Erkenntnis durch, dass die Verfeinerung von Fachwerkmodellen, in der Regel in der Form von diskontinuierlichen Spannungsfeldern, für die Entwicklung und Anwendung von Fachwerkmodellen selbst äusserst fruchtbar ist.

Beispielhaft zeigen die Bilder 1.4 (a) und (b) ein Fachwerkmodell und ein diesem zugeordnetes, diskontinuierliches Spannungsfeld für einen am unteren Rand längs- und über seine Höhe vertikal bügelbewehrten Träger mit Rechteckquerschnitt. Gemäss Bild 1.4 (b) wird die Auflagerreaktion über den zweiachsig gedrückten Knotenbereich ABC und das einachsig beanspruchte, fächerförmige Druckspannungsfeld ACKL zum oberen Trägerrand geleitet. Die Vertikalkomponenten der geneigten Betondruckkräfte werden dort von den Bügelkräften übernommen, wäh-

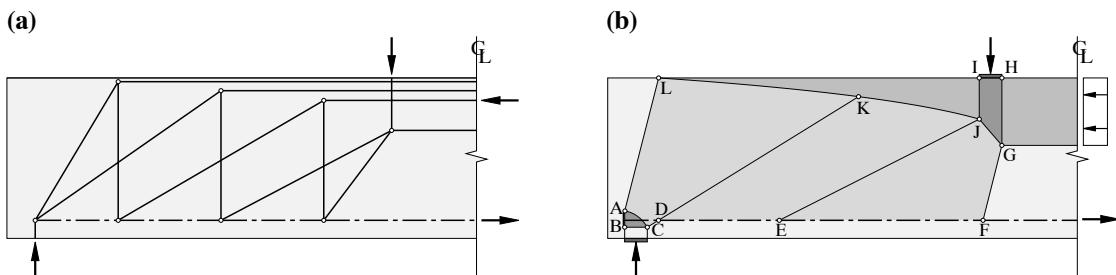


Bild 1.4 – Anwendung der statischen Methode auf Scheiben: (a) Fachwerkmodell; (b) diskontinuierliches Spannungsfeld.

rend die Horizontalkomponenten zum Aufbau der Druckkraft in der Biegedruckzone LKJI beitragen. Analoge Betrachtungen führen zu den Fächern DEJK und EFGJ sowie zum Knotenbereich GHIJ und zeigen insbesondere, wie sich die Zugkraft in der Längsbewehrung entlang der Strecke DEF verändert.

Parallel zur Verfeinerung der statischenen Betrachtungen wurde auch die Anwendung der kinematischen Methode auf Stahlbetonscheiben vorangetrieben. Bild 1.5 (a) illustriert das typische Versagen eines unterbewehrten, durch Biegung und Querkraft beanspruchten Trägers; theoretisch öffnet sich in einem solchen Fall ein scharnierartiger, sogenannter Kollapsriss, der von fliessenden Längs- und Bügelbewehrungsstäben gekreuzt wird. Bei ausreichend kräftiger Längsbewehrung wird diese nicht mehr ins Fliessen kommen, und es kann sich ein Stegdruckbruch gemäss Bild 1.5 (b) einstellen; das Versagen wird dabei durch Fliessen der Bügel und Stauchen des Stegbetons in einem parallelogrammähnlichen Bereich charakterisiert. Ein ähnliches Versagen entlang einer diskreten Gleitlinie ist beispielsweise bei einer Konsole gemäss Bild 1.5 (c) möglich. Allgemein können sich für Fälle reiner Strebewirkung, wie in Bild 1.5 (d) gezeigt, hyperbolische Gleitlinien ergeben.

Mehr zu diesem Thema ist Kapitel 3 zu entnehmen.

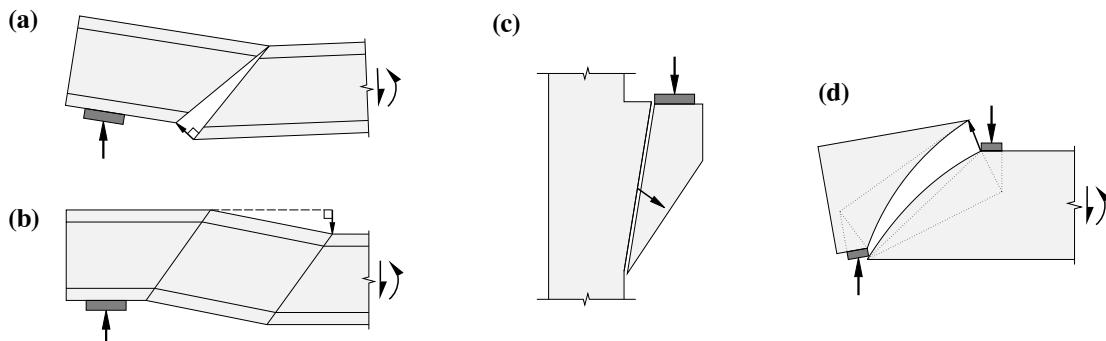


Bild 1.5 – Anwendung der kinematischen Methode auf Scheiben: (a) Biegeschubbruch; (b) Stegdruckbruch; (c) Versagen einer Konsole; (d) hyperbolische Gleitlinie entsprechend einer reinen Strebewirkung.

## Platten

Auch für Stahlbetonplatten gab es Vorläufer der Anwendung von Traglastverfahren. Allerdings wurde das grundlegende Problem der Bemessung von Plattenelementen mit von der Hauptrichtung der Momente abweichenden Bewehrungsrichtungen erst in den sechziger Jahren auf der Grundlage plastizitätstheoretischer Überlegungen befriedigend gelöst. Die schon früher übliche Verwendung von nach der Theorie dünner elastischer Platten ermittelten Momenten entsprach deshalb bis zu diesem Zeitpunkt zwar im Grundsatz, aber noch nicht in den Einzelheiten, einem Vorgehen nach der statischenen Methode.

Explizit auf der Grundlage des unteren Grenzwertsatzes wurde dann die mit Bild 1.6 (a) illustrierte Streifenmethode eingeführt. Das Beispiel behandelt eine entlang CDE eingespannte und entlang EFABC einfach gelagerte Platte. Die vorausgesetzte Lastabtragung in den verstärkten Bereichen DIJK und DLGH sowie in den gewöhnlichen Plattenbereichen AIDH, BCKJ und

EFGL ist mit Pfeilen angedeutet; die Gleichgewichtsbedingungen können dadurch ohne Inanspruchnahme von Drillmomenten bezüglich der zu den Plattenrändern parallelen, orthogonalen Bewehrungsrichtungen erfüllt werden.

Die mit Bild 1.6 (b) illustrierte Fliessgelenklinienmethode geht namentlich auf Entwicklungen vor und während des Zweiten Weltkrieges zurück. Ähnlich wie die Fachwerkmodelle erhielt diese Methode mit der Begründung der Grenzwertsätze eine saubere theoretische Grundlage. Im Beispiel von Bild 1.6 (b) verrichten die plastischen Momente an den Rotationen entlang der Fliessgelenklinien AH, HI, IB, IC, HG, GF und GE (überall positive Momente und Rotationen) sowie CD, DE und DH (negative Momente und Rotationen) eine bestimmte Dissipationsarbeit; nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten ist diese wegen der vorausgesetzten Starrheit der sechs durch die Auflager- und Fliessgelenklinien begrenzten Plattenteile gleich der Arbeit der auf die Platte aufgebrachten äusseren Kräfte am betrachteten Bruchmechanismus.

Mehr zu diesem Thema ist Kapitel 4 zu entnehmen.

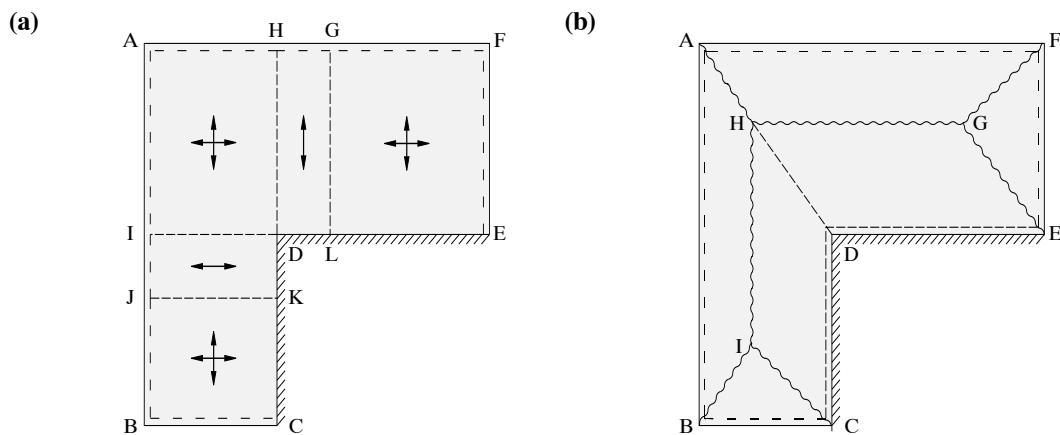


Bild 1.6 – Traglastverfahren für Platten: (a) Streifenmethode; (b) Fliessgelenklinienmethode.

### 1.3.3 Anwendungen im Grundbau

Schon seit der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts wurden für grundbauliche Problemstellungen Methoden entwickelt und verwendet, deren vollständige theoretische Begründung erst mit der Formulierung der Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie ermöglicht wurde. Meist handelt es sich dabei um Anwendungen der kinematischen Methode und entsprechende Näherungsverfahren. Bild 1.7 vermittelt diesbezüglich einen Überblick.

Bild 1.7 (a) zeigt die nach Coulomb benannte Fliessbedingung in der Spannungsebene. Bild 1.7 (b) gibt Größenordnungen von Kohäsion  $c$  und Winkel  $\varphi$  der inneren Reibung für Boden, Fels, Beton und Stahl an. Es wird ersichtlich, dass die (allenfalls durch Beschränkung der Zugfestigkeit modifizierte) Coulombsche Bedingung eine einheitliche Behandlung vielfältiger Materialien gestattet.

Die Bilder 1.7 (c) und (d) veranschaulichen die mit Problemen des aktiven und passiven Erddrucks verbundenen Gleitliniennetze und Bruchmechanismen. Die Gleitlinien schneiden sich unter Winkeln von  $\pi/2 \pm \varphi$  und erfahren beim Bruch keine Längenänderung. Entlang einer beim

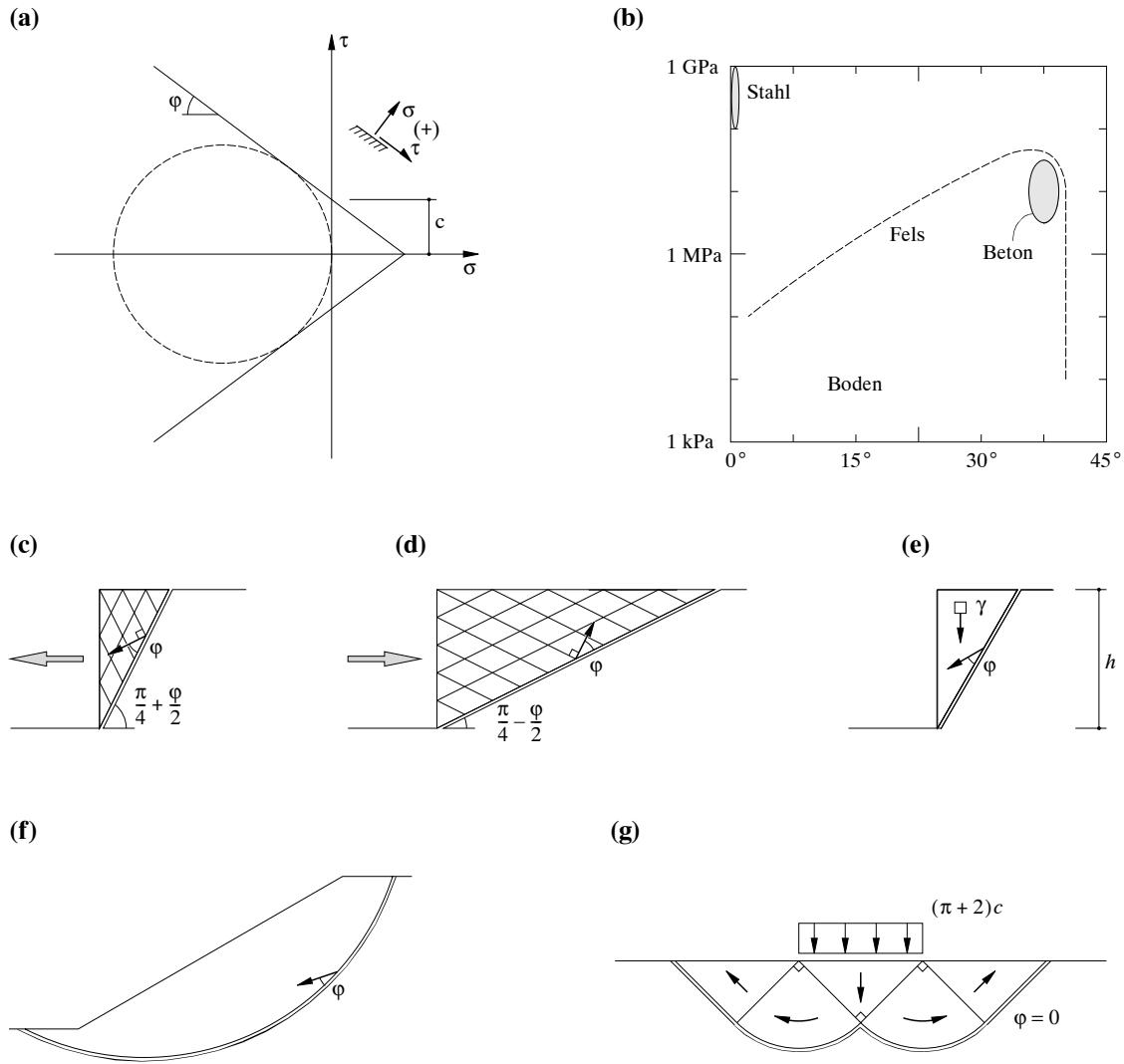


Bild 1.7 – Anwendung der Traglastverfahren auf Probleme des Grundbaus: (a) Fließbedingung von Coulomb; (b) Größenordnungen von Kohäsion  $c$  und innerem Reibungswinkel  $\varphi$ ; (c) aktiver Erddruck; (d) passiver Erddruck; (e) freie Standhöhe einer vertikalen Böschung; (f) Böschungsbruch; (g) Tragfähigkeit von Streifenfundamenten.

Bruch als kinematische Diskontinuitätslinie massgebenden Gleitlinie ergibt sich eine unter dem Winkel  $\varphi$  zur Gleitlinie geneigte Relativverschiebung der durch die Gleitlinie getrennten Körper und damit für  $\varphi > 0$  eine Dilatation. Bei entsprechenden homogenen Verformungszuständen werden die von den Gleitlinien gebildeten stumpfen (spitzen) Winkel verkleinert (vergrössert), was für  $\varphi > 0$  ebenfalls eine Dilatation verursacht.

Anwendung eines Bruchmechanismus analog Bild 1.7 (c) auf das in Bild 1.7 (e) dargestellte Problem der freien Standhöhe einer vertikalen Böschung liefert den oberen Grenzwert  $h = 4c \cos \varphi / [\gamma(1 - \sin \varphi)]$ , wobei  $\gamma$  das als konstant vorausgesetzte spezifische Gewicht des Bodens bezeichnet. Potentielle Böschungsbrüche erfordern im allgemeinen gemäss Bild 1.7 (f) die Untersuchung von Mechanismen mit Gleitlinien in der Form logarithmischer Spiralen; zur Vereinfachung und wegen der Inhomogenität des Baugrundes werden allerdings meist entsprechende Näherungsverfahren angewendet.

Schliesslich illustriert Bild 1.7 (g) das Problem der Tragfähigkeit von Streifenfundamenten auf einem rein kohäsiven Halbraum ( $\varphi = 0$ ). Mit dem im Bild angegebenen Bruchmechanismus und ergänzenden statischenen Betrachtungen lässt sich zeigen, dass die Traglast  $(\pi + 2)c$  beträgt.

Wie Bild 1.7 vor Augen führt, werden im Grundbau im Gegensatz zum Stahlbetonbau meist die kinematische Methode der Plastizitätstheorie oder entsprechende Näherungsverfahren angewendet. Mit der zunehmenden Komplexität des Bauens im bereits überbauten Gebiet werden jedoch statische Verfahren immer wichtiger. Das die statische Methode charakterisierende Verfolgen des Kraftflusses, also das Erfassen des Kräftespiels im Kleinen, tritt mehr und mehr neben die mit der kinematischen Methode mögliche Untersuchung des Gleichgewichts im Grossen. Die Notwendigkeit einer vertieften Betrachtung lokaler Kraftgrössen ergibt sich namentlich aus der zunehmenden Anwendung von Bewehrungen, Verankerungen und Injektionen aller Art. Ähnlich wie im Stahlbetonbau entstehen dadurch eigentliche Verbundkonstruktionen, und die Baugrund- und Baustoffeigenschaften werden gezielt ausgenutzt.

Die Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton profitierte sehr von entsprechenden früheren Entwicklungen im Grundbau. Vielleicht ergibt sich nun die Gelegenheit, dass einige Entwicklungen des Betonbaus ebenso fruchtbringend auf den Grundbau übertragen werden können.

## 1.4 Abschätzung von Verformungen

### 1.4.1 Allgemeines

Für Nachweise der Gebrauchstauglichkeit und für die Ermittlung der Anwendungsgrenzen von Traglastverfahren sind Verformungen von Bedeutung.

In der Praxis geht es meist darum, bestimmte Verformungsgrössen einigermassen zutreffend abzuschätzen. Eine umfassende Verformungsberechnung ist weder notwendig, noch könnten von ihr wegen des stets vorhandenen, praktisch aber höchstens annähernd erfassbaren Einflusses von Eigenspannungen genaue Ergebnisse erwartet werden. Zudem sollte man sich in erster Linie auf die Abschätzung von integralen Verformungsgrössen, wie z.B. Mittendurchbiegungen von Trägern oder Platten konzentrieren. Lokale Verformungsgrössen, z.B. Rissbreiten, unterliegen naturgemäss erheblichen Streuungen und sind rechnerisch nicht einfach zu erfassen. Um sie auf unbedenkliche Werte zu beschränken, ist ausser der Begrenzung der integralen Verformungsgrössen für eine gute Verteilung der lokalen Verformungen zu sorgen. Dies kann mit einer geeigneten konstruktiven Durchbildung erreicht werden, insbesondere mit einer guten Bewehrungsverteilung und durch Vermeiden abrupter Geometrieänderungen.

Zur Abschätzung von Verformungen ist es zweckmässig, die unter der Annahme eines linear elastischen Verhaltens im ungerissenen und gerissenen Zustand resultierenden Steifigkeiten zu ermitteln und die entsprechenden Geraden wie in Bild 1.2 (a) in einem Last-Verformungs-Diagramm einzutragen (Linien 2 und 3). Zusammen mit dem Ergebnis einer Traglastberechnung (Linie 4) sowie den rechnerischen Werten für Risslast und Fliessbeginn erfasst man damit die Grössenordnung der Verformungen und verfügt über ein Gerippe für alle weiterführenden Überlegungen.

### 1.4.2 Elementare Modelle

Die bei der Anwendung der statischenen Methode übliche Aufspaltung von Trägern in Zuggurte, Stegscheiben und Druckgurte (Bild 1.8) ist auch für die Abschätzung von Verformungen geeig-

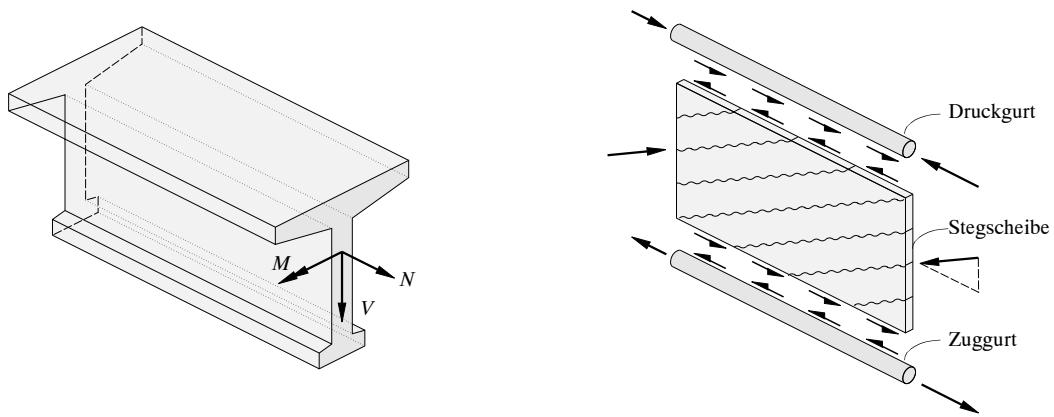


Bild 1.8 – Aufspaltung eines Trägers in Zuggurt, Stegscheibe und Druckgurt.

net. Auf der Grundlage von Kapitel 5 werden entsprechende Modelle in Kapitel 6 bis 8 diskutiert.

Das Zuggurtmodell (Kapitel 6) geht von der Betrachtung des Verbundes zwischen Beton und Bewehrung aus. Es gestattet die Abschätzung von Rissabständen und Rissbreiten, und es erlaubt die Ermittlung der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen auf Zug. Darüber hinaus ermöglicht es die Beurteilung des Einflusses der Verfestigungseigenschaften des Bewehrungsstahls auf die plastischen Verformungen.

Das Gerissene Scheibenmodell (Kapitel 7) überträgt die Grundideen des Zuggurtmodells auf ebene Spannungszustände. Die Verbindung zu entsprechenden Traglastverfahren (Kapitel 3) wird gewahrt, weil die Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen an den Rissen aufgestellt werden und nicht für mittlere Spannungen zwischen den Rissen.

Das Druckgurtmodell (Kapitel 8) berücksichtigt einerseits die Festigkeits- und Duktilitätssteigerung durch eine Umschnürungsbewehrung. Andererseits berücksichtigt es die bruchmechanisch begründete Entfestigung des gedrückten Betons und die damit einhergehende Verformungslokalisierung. Ebenfalls betrachtet werden die Beiträge der Betonüberdeckung und der Längsbewehrung.

#### 1.4.3 Plastische Verformungen

Ein ausreichendes plastisches Verformungsvermögen eines Tragwerks und all seiner Bauteile und Verbindungen ist nicht nur zur Ermöglichung von (bewusst oder stillschweigend ausgenutzten) Schnittgrößenumlagerungen notwendig. Wesentlich ist in diesem Zusammenhang (neben der Sicherstellung der Ankündigung eines möglichen Versagens) vor allem auch die Gewährleistung einer angemessenen Robustheit, d.h. der Fähigkeit eines Tragwerks, seiner Bauteile und Verbindungen, Schäden oder ein Versagen auf Ausmasse zu begrenzen, die in einem vertretbaren Verhältnis zur Ursache stehen.

Wie in Kapitel 9 ausgeführt wird, sind sowohl der plastische Verformungsbedarf als auch das plastische Verformungsvermögen im allgemeinen systemabhängig und im einzelnen durch viele Faktoren beeinflusst. Qualitativ lassen sich die wichtigsten Zusammenhänge etwa gemäß Bild 1.9 darstellen. Die ausgezogenen (gestrichelten) Linien entsprechen Verformungsbeschränkungen des Druckgurtes (Zuggurtes). Hohe Bewehrungsgehalte, geringe Duktilität der Bewehrung und mangelhafte konstruktive Durchbildung wirken sich negativ auf die erreichbaren plasti-

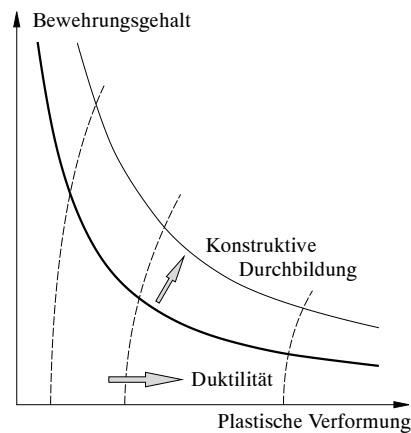


Bild 1.9 – Einfluss des Bewehrungsgehalts, der Duktilität der Bewehrung und der konstruktiven Durchbildung auf die plastische Verformung.

schen Verformungen aus. Umgekehrt kann – die Verwendung ausreichend duktiler Bewehrungsstäbe vorausgesetzt – das plastische Verformungsvermögen mit einer geeigneten konstruktiven Durchbildung wesentlich verbessert werden.

Duktilitätsanforderungen an die Bewehrungsstäbe werden in Kapitel 10 im Zusammenhang mit Fragen der Mindestbewehrung erörtert. Bei den konstruktiven Massnahmen stehen die Optimierung der Querschnittsgeometrie, die Umschnürung von Druckzonen sowie die korrekte Abstufung und Verankerung und eine ausgewogene Verteilung der Bewehrung im Vordergrund.



## 2 Traglastverfahren

Peter Marti

### 2.1 Elastisch-plastische Systeme

Zur Einführung der Traglastverfahren ist es zweckmässig, von der Betrachtung elastisch-plastischer Systeme auszugehen.

#### 2.1.1 Elastisch-plastisches Fachwerk

##### Linear elastisch-ideal plastisches Verhalten

Das in Bild 2.1 (a) dargestellte, einfach statisch unbestimmte Fachwerk besteht aus drei prismatischen Stäben, die alle die Querschnittsfläche  $A$  aufweisen. Das Stabmaterial verhält sich unter einachsiger Beanspruchung gemäss dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm von Bild 2.1 (b), wo bei  $E$  den Elastizitätsmodul und  $f_y$  die Fliessgrenze bezeichnet. Die Dehnungen  $\varepsilon$  setzen sich im allgemeinen aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen, d.h.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (2.1)$$

Der elastische Anteil

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E} \quad (|\sigma| \leq f_y) \quad (2.2)$$

bildet sich bei einer Entlastung zurück, während der plastische Anteil  $\varepsilon_p$  verbleibt. Für  $\sigma = \pm f_y$  können sich plastische Dehnungssinkremente  $\dot{\varepsilon}$  ergeben, deren Vorzeichen, sofern sie nicht ver-

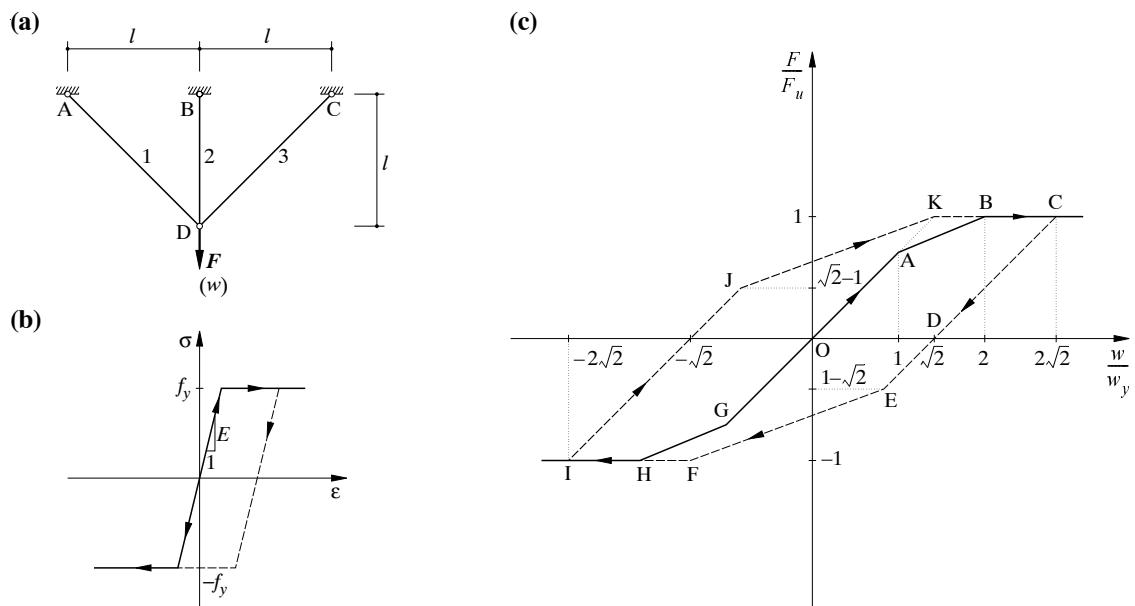


Bild 2.1 – Elastisch-plastisches Fachwerk: (a) System und Belastung; (b) Spannungs-Dehnungs-Diagramm; (c) Last-Verschiebungs-Diagramm.

schwinden, mit jenen der zugehörigen Spannungen übereinstimmen, also  $\dot{\varepsilon} \geq 0$  für  $\sigma = f_y$  und  $\dot{\varepsilon} \leq 0$  für  $\sigma = -f_y$ ; der hochgestellte Punkt in  $\dot{\varepsilon}$  bedeutet nicht Ableitung nach der physikalischen Zeit, sondern nach einem rein skalaren Parameter, und der Index  $p$  kann entfallen, da sich  $\dot{\varepsilon}$  nur auf plastische Dehnungssinkremente bezieht. Insgesamt spricht man wegen der Linearität der Beziehung (2.2) und der Konstanz der Fließgrenze von einem linear elastisch-ideal plastischen Verhalten, vgl. Bild 1.3 (c).

### Monotone Laststeigerung

Im folgenden wird das Tragverhalten des Systems unter einer monoton zunehmenden, vertikalen Einzelkraft  $F$  mit Betrag  $F$  untersucht, die am Fachwerknoten D angreift. Die zugehörige vertikale Verschiebung wird mit  $w$  bezeichnet. Im initialen Zustand, also für  $F = 0$ , sei das System spannungsfrei, und allfällige Instabilitäten gedrückter Stäbe sollen ausgeschlossen werden.

Zunächst verhält sich das System rein elastisch. Gleichgewicht des Knotens D verlangt

$$-N_1 + N_3 = 0 \quad , \quad N_2 + (N_1 + N_3)/\sqrt{2} - F = 0 \quad (2.3)$$

und Verträglichkeit der Verschiebung  $w$  mit den Stabverlängerungen erfordert

$$w = \frac{N_2 l}{AE} = \frac{2N_1 l}{AE} \quad (2.4)$$

Mithin folgen die Stabkräfte

$$N_1 = N_3 = \frac{N_2}{2} = \frac{F}{2 + \sqrt{2}} \quad (2.5)$$

Die elastische Phase gilt bis zum Fließbeginn von Stab 2, d.h.  $N_2 = Af_y$ . Einsetzen in (2.5) und (2.4) bringt die Last  $F_y$  und die Verschiebung  $w_y$  bei Fließbeginn:

$$F_y = Af_y(1 + \sqrt{2}/2) \quad , \quad w_y = lf_y/E \quad (2.6)$$

Für  $F \geq F_y$  bleibt  $N_2 = Af_y$  konstant. Das System ist statisch bestimmt geworden. Die Stabkräfte  $N_1$  und  $N_3$  ergeben sich aus (2.3),

$$N_1 = N_3 = \frac{F - Af_y}{\sqrt{2}} \quad (2.7)$$

und  $w$  folgt aus der weiterhin gültigen zweiten Gleichung (2.4), d.h.

$$w = \frac{(F - Af_y)l\sqrt{2}}{AE} \quad (2.8)$$

Die damit beschriebene elastisch-plastische Phase (oder Phase des beschränkten Fließens) gilt bis zum Fließbeginn der Stäbe 1 und 3, d.h.  $N_1 = N_3 = Af_y$ . Für diesen Zustand erhält man aus (2.7) und (2.8) die sogenannte Traglast  $F_u$  und die zugehörige Verschiebung  $w_u$ :

$$F_u = Af_y(1 + \sqrt{2}) \quad , \quad w_u = 2lf_y/E \quad (2.9)$$

Mit dem Erreichen der Traglast wird das System zu einem Mechanismus. Wegen der möglichen plastischen Dehnungssinkremente kann sich der Knoten D innerhalb des durch die Verlängerungen der Stäbe 1 und 3 gebildeten, rechtwinkligen Bereichs unter der konstant bleibenden Last  $F_u$  nach unten verschieben. Die damit charakterisierte plastische Phase wird auch Phase des unbeschränkten Fließens genannt.

Im Last-Verschiebungs-Diagramm von Bild 2.1 (c) liefern die bisherigen Überlegungen den Streckenzug OABC.

### Allgemeine Belastungsprozesse

Bei einer vollständigen Entlastung aus dem plastischen Zustand, z.B. aus Punkt C in Bild 2.1 (c), verhält sich das System rein elastisch, und man erreicht den Punkt D, wobei der Entlastungspfad CD zum initialen Belastungspfad OA parallel ist. Superposition der für den Punkt C auftretenden Stabkräfte  $N_1 = N_2 = N_3 = Af_y$  mit den aus (2.3) und (2.4) für die Entlastung  $F = -F_u$  resultierenden Stabkräften liefert die verbleibenden (oder residualen) Stabkräfte

$$N_1 = N_3 = Af_y(1 - \sqrt{2}/2) \quad , \quad N_2 = -Af_y(\sqrt{2} - 1) \quad (2.10)$$

Das System ist für  $F = 0$  also nicht mehr spannungsfrei, sondern einem sogenannten Eigenspannungszustand unterworfen.

Würde die Belastung vom Punkt D in Bild 2.1 (c) ausgehend im Gegensinne fortgesetzt, so würde beim Punkt E der Stab 2 die Fliessgrenze auf Druck erreichen. Anschliessend könnte die Belastung weiter fortgesetzt werden, bis beim Punkt F auch die Stäbe 1 und 3 auf Druck fliessen würden. Der zu AB parallele elastisch-plastische Belastungspfad EF würde für  $F = -F_u$  in den plastischen Belastungspfad FHI übergehen. Eine vollständige Entlastung aus diesem plastischen Zustand würde schliesslich zu einem Eigenspannungszustand führen, der jenem von (2.10) gerade entgegengesetzt ist, d.h. die Schrägstäbe 1 und 3 erhielten Druckkräfte  $-Af_y(1 - \sqrt{2}/2)$ , die von der Zugkraft  $Af_y(\sqrt{2} - 1)$  im Vertikalstab 2 gerade kompensiert würden.

Fortsetzung der Belastung ergäbe erneutes Fliessen von Stab 2 auf Zug bei Punkt J in Bild 2.1 (c), und entlang dem zu AB parallelen elastisch-plastischen Belastungspfad JK könnte schliesslich erneut die Traglast  $F_u$  entsprechend der plastischen Phase KBC erreicht werden.

Bild 2.2 fasst die Abhängigkeit der Stabkräfte von der Belastung zusammen. Die Strecken OA und OB entsprechen dem elastischen Belastungspfad OA in Bild 2.1 (c). Dem elastisch-plastischen Belastungspfad AB jenes Bildes entsprechen die Strecken AC und BC in Bild 2.2, und der Punkt C in Bild 2.2 entspricht der plastischen Phase (K)BC von Bild 2.1 (c). Der Entlastung CD in Bild 2.1 (c) entsprechen die Strecken CD und CE in Bild 2.2, und die Strecken DFH und EGH in Bild 2.2 entsprechen dem Belastungspfad DEF in Bild 2.1 (c). Vollständige Entlastung aus Punkt H in Bild 2.2 führt zu dem durch die Punkte I und J charakterisierten Eigenspannungszustand. Dieser ist dem durch die Punkte D und E charakterisierten Eigenspannungszustand, der bei vollständiger Entlastung aus C erreicht wird, gerade entgegengesetzt.

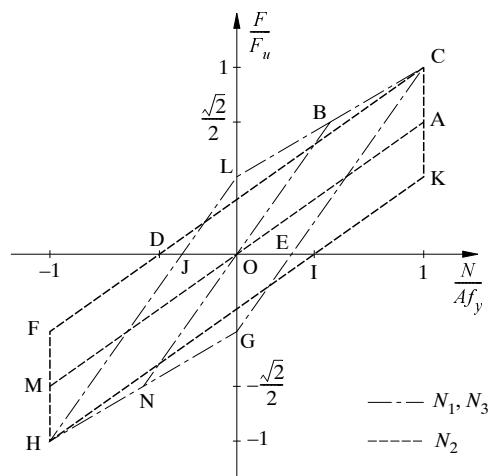


Bild 2.2 – Stabkräfte in Funktion der Belastung.

### Eigenspannungszustände

Wie man sieht, können anhand von Bild 2.1 (c) und Bild 2.2 beliebige Belastungsprozesse diskutiert werden. Eigenspannungszustände wirken sich offensichtlich auf das Last-Verschiebungs-Diagramm aus, haben aber keinen Einfluss auf die Traglast.

Eigenspannungszustände können verschiedene Ursachen haben, z.B. Zwängungen infolge Temperatur, Schwinden oder Kriechen, Passfehler bei der Montage oder differentielle Auflagerverschiebungen. Je nachdem ergibt sich eine erwünschte oder unerwünschte, d.h. für das Tragverhalten günstige oder ungünstige Vorspannung. Beispielsweise ergäbe sich bei Vorliegen eines den Punkten D und E in Bild 2.2 entsprechenden Eigenspannungszustandes bei monotoner Laststeigerung ein rein elastisches Verhalten bis zum Erreichen von  $F_u$ , d.h. es ergäbe sich keine elastisch-plastische Phase.

Im vorliegenden Fall gilt für die Eigenspannungen allgemein

$$N_1 = N_3 = -X_0/\sqrt{2} \quad , \quad N_2 = X_0 \quad (2.11)$$

wobei  $X_0$  die für  $F = 0$  im Stab 2 wirkende Normalkraft bezeichnet. Man beachte, dass z.B. infolge von Passfehlern – im Gegensatz zum bisher diskutierten Belastungsprozess – durchaus Werte von  $X_0$  erreicht werden könnten, die Punkten ausserhalb des Bereichs DI in Bild 2.2 entsprächen. Allerdings gilt die Begrenzung  $|X_0| \leq Af_y$ .

### Superposition von Last- und Eigenspannungszuständen

Anhand von Bild 2.2 erkennt man, dass die Stabkräfte allgemein aus Last- und Eigenspannungsanteilen zusammengesetzt sind:

$$N_i = N_{ie} + N_{ir} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.12)$$

wobei sich die Summanden  $N_{ie}$  und  $N_{ir}$  aus (2.5) bzw. (2.11) ergeben. Die Fliessbedingungen

$$-Af_y \leq N_i \leq Af_y \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.13)$$

beschränken die Lage der Bildpunkte in der in Bild 2.3 dargestellten Ebene der Parameter  $F$  und  $X_0$  auf streifenförmige Bereiche, deren Durchschnitt ein konkaves Fliesspolygon bildet. Punkte auf den Seiten AB und CD entsprechen  $N_1 = N_3 = Af_y$  bzw.  $-Af_y$ , und solche auf den Seiten AD und BC entsprechen  $N_2 = Af_y$  bzw.  $-Af_y$ . Die Grösse der Stabkräfte kann somit für jeden

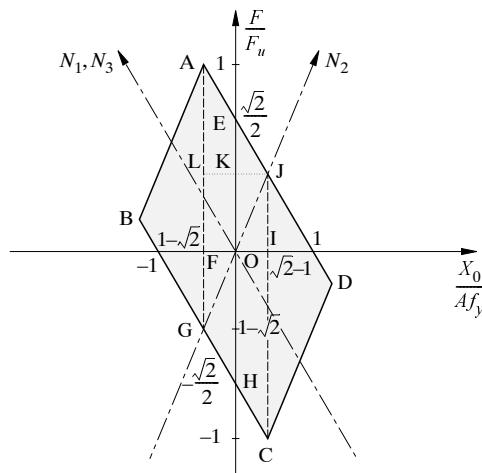


Bild 2.3 – Fliesspolygon in der Ebene der Last- und Eigenspannungsparameter  $F$  und  $X_0$ .

Bildpunkt anhand des in Bild 2.3 eingetragenen, schiefwinkligen Koordinatensystems herauslesen werden.

Der Belastungspfad OAB von Bild 2.1 (c) entspricht dem Pfad OEA in Bild 2.3, und die Fortsetzung CDEF in Bild 2.1 (c) entspricht dem Pfad AFGHC in Bild 2.3. Die Wiederbelastung IJK in Bild 2.1 (c) entspricht der Strecke CIJEA in Bild 2.3. Wie man sieht, hängen die Stabkräfte (d.h. der Spannungszustand des Systems) ausser für die Punkte A und C in Bild 2.3, für welche die Traglasten erreicht werden, im allgemeinen von der ganzen Belastungsgeschichte ab. Für eine bestimmte Belastungsintensität sind im allgemeinen unendlich viele Spannungszustände möglich, die sich lediglich durch Eigenspannungsanteile unterscheiden; solche Spannungszustände entsprechen Punkten auf sogenannten Gleichgewichtsgeraden, z.B. der zur  $X_0$ -Achse parallelen Strecke LKJ in Bild 2.3.

Die Betrachtung von zur  $F$ -Achse parallelen Strecken in Bild 2.3 gestattet ebenfalls eine interessante Feststellung. Betrachtet man gegebene Grenzwerte der Belastung, so erkennt man, ob die dazwischen liegenden Zustände rein elastisch, nach einer anfänglichen Plastifizierung elastisch oder nur unter wiederholter Plastifizierung realisiert werden können. Beispielsweise ergibt sich für die den Punkten A und G entsprechenden Lastgrenzwerte nach einer anfänglichen Plastifizierung (entsprechend der Strecke EA) ein rein elastisches Verhalten. Dagegen würde sich für eine zwischen den durch die Punkte A und H charakterisierten Grenzwerten oszillierende Belastung eine alternierende Plastifizierung (entsprechend den Strecken EA und GH) ergeben, was nach einer Anzahl Zyklen zur Erschöpfung des plastischen Verformungsvermögens und damit zum Bruch führen müsste. Dagegen könnte man für die den Punkten A und G entsprechenden Lastgrenzwerte erwarten, dass sich das System nach der anfänglichen Plastifizierung rein elastisch verhalten würde, sich also, wie man sagt, der gegebenen Belastung "angepasst" hätte.

Bild 2.3 erlaubt noch eine weitere interessante geometrische Deutung. Berechnet man die fiktive elastische Formänderungsarbeit  $U$ , so erhält man mit (2.12), (2.5) und (2.11)

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{N_i^2 l_i}{2EA} = \frac{F^2 l}{(2 + \sqrt{2})EA} + \frac{X_0^2 l (1 + \sqrt{2})}{2EA} \quad (2.14)$$

wenn man beachtet, dass der Eigenspannungszustand  $N_{ir}$  an den Verschiebungen des Lastspannungszustandes  $N_{ie}$  keine Arbeit leistet,  $N_{ie}$  und  $N_{ir}$  also zueinander orthogonal sind. Würde das Fliesspolygon von Bild 2.3 gemäss (2.14) in beiden Achsenrichtungen mit geeigneten Faktoren gestreckt, so entspräche das Quadrat des Abstandes eines beliebigen Bildpunktes vom Ursprung gerade der Formänderungsarbeit  $U$ .

### Allgemeine Aussagen

Anhand von Bild 2.3 und der geometrischen Deutung von  $U$  lassen sich folgende Sätze formulieren:

1. Bei einer monotonen Laststeigerung tritt beim initial eigenspannungsfreien System der Spannungszustand ein, welcher  $U$  minimiert, ohne dass die Fliessgrenze irgendwo überschritten wird.
2. Bei einer infinitesimalen Belastungsänderung  $dF$  tritt allgemein jene Änderung des Spannungszustandes ein, welche  $dU$  minimiert, ohne dass die Fliessgrenze irgendwo überschritten wird.

Ferner gelten offenbar folgende Sätze:

3. Die Tragfähigkeit ist nicht erschöpft, wenn sich ein Gleichgewichtszustand angeben lässt, der nirgends die Fliessgrenze erreicht.

4. Gegebene Grenzwerte der Belastung liegen innerhalb des Anpassungsvermögens eines Systems, wenn ein Eigenspannungszustand angegeben werden kann, derart, dass die Spannungen, welche durch Superposition der den Grenzbelastungen entsprechenden elastischen Spannungen mit diesen Eigenspannungen entstehen, nirgends die Fließgrenze überschreiten.

Die Sätze 1 und 2 entsprechen einer Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der Formänderungsarbeit für elastisch-plastische Systeme. Satz 3 entspricht dem in Kapitel 2.3.2 für starr-ideal plastische Systeme formulierten unteren oder statischen Grenzwertsatz, und Satz 4 wird als Einspielsatz bezeichnet.

Die anhand des betrachteten, einfach statisch unbestimmten Systems gemachten Feststellungen lassen sich ohne grundsätzliche Schwierigkeiten auf mehrfach statisch unbestimmte Systeme, mehrparametrische Belastungen und allgemeine Belastungs-Zwängungs-Zyklen übertragen.

### 2.1.2 Elastisch-plastische Balken

#### Momenten-Krümmungs-Diagramm für Rechteckquerschnitt

Ein Balken mit Rechteckquerschnitt sei gemäß Bild 2.4 (a) durch ein Biegemoment  $M$  um die  $y$ -Achse beansprucht. Alle Fasern des Balkens sollen dem in Bild 2.1 (b) dargestellten Spannungs-Dehnungs-Diagramm genügen.

Nach der Annahme von Jakob Bernoulli über die Balkenbiegung bleiben zur Stabachse  $x$  senkrechte Querschnitte während der Verformung eben und senkrecht zur verformten Stabachse. Für die Dehnungen  $\varepsilon_x$  der einzelnen Balkenfasern gilt somit

$$\varepsilon_x = \varepsilon_m + \chi_y z - \chi_z y \quad (2.15)$$

und die Spannungsresultierenden

$$N = \int_A \sigma_x dA \quad , \quad M_y = \int_A \sigma_x z dA \quad , \quad M_z = - \int_A \sigma_x y dA \quad (2.16)$$

können bei bekannten  $\sigma_x$ - $\varepsilon_x$ -Beziehungen durch Integration über die Querschnittsfläche  $A$  einfach gewonnen werden. Die Ermittlung der zu bestimmten Spannungsresultierenden oder verallgemeinerten Spannungen (Normalkraft  $N$  sowie Biegemomente  $M_y$  und  $M_z$ ) gehörigen verallgemeinerten Verformungen (Achsendehnung  $\varepsilon_m$  sowie Krümmungen  $\chi_y$  und  $\chi_z$ ) erfordert umgekehrt im allgemeinen ein iteratives Vorgehen.

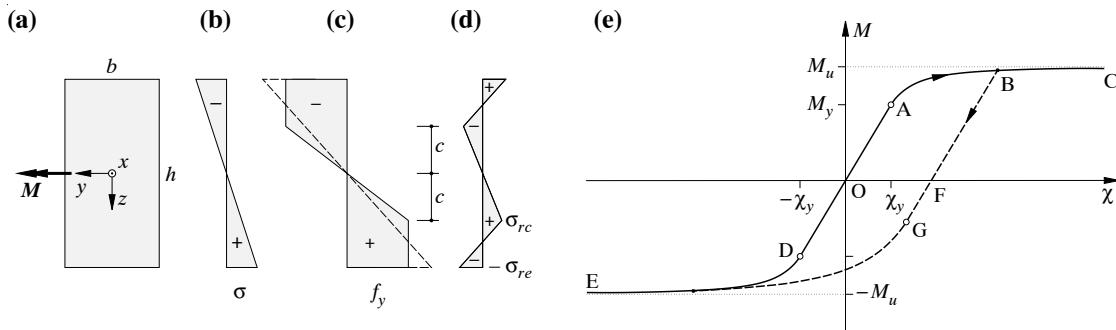


Bild 2.4 – Balkenbiegung: (a) Querschnitt; (b) elastische Spannungsverteilung; (c) elastisch-plastische Spannungsverteilung; (d) Eigenspannungszustand; (e) Momenten-Krümmungs-Diagramm.

Im vorliegenden Fall verschwinden wegen  $N = M_z = 0$  und der vorausgesetzten Symmetrie und Homogenität des Querschnitts die verallgemeinerten Verformungen  $\varepsilon_m$  und  $\chi_z$ . Die Indizes  $x$  (in  $\varepsilon_x$  und  $\sigma_x$ ) und  $y$  (in  $\chi_y$  und  $M_y$ ) können unterdrückt werden, und man erhält aus (2.2), (2.15) und (2.16) für einen initial spannungsfreien, elastischen Querschnitt die Beziehung

$$M = EI\chi \quad (2.17)$$

mit  $I = bh^3/12$ . Der in Bild 2.4 (b) dargestellten, elastischen Spannungsverteilung entspricht die Beziehung

$$\sigma = \frac{M}{I}z \quad (2.18)$$

Die Spannungen in den Randfasern  $z = \pm h/2$  erreichen die Fließgrenzen  $\pm f_y$  unter dem Moment

$$M_y = Wf_y \quad (2.19)$$

mit  $W = bh^2/6$ .

Mit dem in Bild 2.4 (c) eingetragenen Abstand  $c$  gilt in der anschliessenden elastisch-plastischen Phase  $\chi c = f_y/E$ , und für das zugehörige Biegemoment erhält man

$$M = M_y \left( \frac{3}{2} - \frac{\chi_y^2}{2\chi^2} \right) \quad (2.20)$$

wobei  $\chi_y = 2f_y/(Eh)$ . Für  $\chi \rightarrow \infty$  erreicht man das sogenannte plastische Moment

$$M_u = Zf_y \quad (2.21)$$

mit  $Z = bh^2/4$ . Das Verhältnis  $Z/W = 1.5$  der plastischen und elastischen Widerstandsmomente  $Z$  und  $W$  wird Formfaktor genannt, da es nur von der Querschnittsgeometrie abhängt.

Bei einer vollständigen Entlastung aus dem mit Bild 2.4 (c) charakterisierten elastisch-plastischen Zustand verbleibt der in Bild 2.4 (d) dargestellte Eigenspannungszustand mit

$$\sigma_{re} = f_y \left( \frac{1}{2} - \frac{2c^2}{h^2} \right) \quad , \quad \sigma_{rc} = f_y \left( 1 - \frac{3c}{h} + \frac{4c^3}{h^3} \right) \quad (2.22)$$

Im Momenten-Krümmungs-Diagramm von Bild 2.4 (e) bezeichnen OA und ABC die elastische und die elastisch-plastische Phase. Wird der Querschnitt nach der Entlastung von B nach F im Gegensinn belastet, beginnen die Randfasern bei dem durch den Punkt G charakterisierten Zustand zu fließen. Das zugehörige Moment  $M_G$  ist gleich  $M_B - 2M_y$ , wobei  $M_B$  für das durch (2.20) gegebene Moment vor der Entlastung steht. Wie man sieht, ist  $|M_G| \leq M_y$ , d.h. im Vergleich zum initial spannungsfreien Querschnitt mit  $|M_D| = M_y$  setzt das Fließen im allgemeinen unter einer geringeren Beanspruchung ein. Dieser nach Bauschinger benannte Effekt ist mit einem Steifigkeitsverlust verbunden, der sich bei Problemen 2. Ordnung negativ auswirken kann.

Wird die Belastung im Gegensinn vom Punkt G in Bild 2.4 (e) ausgehend fortgesetzt, so ergibt sich der Belastungspfad GE, der zum initialen elastisch-plastischen Pfad ABC nicht affin ist.

Die hier für einen homogenen Rechteckquerschnitt unter einachsiger Biegung hergeleiteten Beziehungen lassen sich mit Hilfe von (2.15) und (2.16) ohne grundsätzliche Schwierigkeiten auf beliebige Querschnitte, Spannungs-Dehnungs-Diagramme und allgemeine Beanspruchungen übertragen.

### Einfacher Balken

Der in Bild 2.5 (a) dargestellte, durch eine mittig angreifende und monoton gesteigerte Einzellast  $F$  belastete einfache Balken mit Rechteckquerschnitt sei initial spannungsfrei und genüge in jedem Querschnitt dem mit Bild 2.4 (e) beschriebenen Momenten-Krümmungs-Diagramm. Die Bilder 2.5 (b) und (c) illustrieren den Verlauf der Momente und Krümmungen in der elastischen Phase, beim Fliessbeginn und in der elastisch-plastischen Phase. Bild 2.5 (d) fasst das Tragverhalten zusammen. Die elastische Phase OA wird vom Fliessbeginn (Punkt A) mit

$$F_y = \frac{4M_y}{l} \quad , \quad w_y = \frac{\chi_y l^2}{12} \quad (2.23)$$

abgeschlossen. Der Punkt B mit

$$F_u = \frac{3F_y}{2} \quad , \quad w_u = \frac{20w_y}{9} \quad (2.24)$$

charakterisiert das Erreichen der Traglast. Im Vergleich zu Bild 2.4 (e), gemäss dem die Krümmungen  $\chi$  für das Erreichen von  $M_u$  unendlich gross werden müssen, ist es bemerkenswert, dass die Traglast  $F_u$  bei einem endlichen Wert  $w_u$  der Mittendurchbiegung erreicht wird.

Aus dem statisch bestimmten Verlauf der Biegemomente  $M$  kann mit Hilfe von Bild 2.4 (e) in jedem Querschnitt auf die zugehörigen Krümmungen geschlossen werden, und der Durchbiegungsverlauf ergibt sich durch zweifache Integration der negativen Krümmungen.

In der elastisch-plastischen Phase gilt  $\chi = \chi_y x/a$  für  $0 \leq x \leq a$  und  $\chi = \chi_y/(3 - 2x/a)^{1/2}$  für  $a \leq x \leq l/2$ . Da die Durchbiegung für  $x = 0$  verschwinden und die Biegelinie bei  $x = l/2$  horizontal sein muss, und da ferner sowohl die Durchbiegungsfunktion als auch deren Ableitung bei  $x = a$  stetig sein müssen, findet man für die Mittendurchbiegung

$$w = \frac{w_y F_y^2}{F^2} \left[ 5 - \left( 3 + \frac{F}{F_y} \right) \left( 3 - \frac{2F}{F_y} \right)^{1/2} \right] \quad (2.25)$$

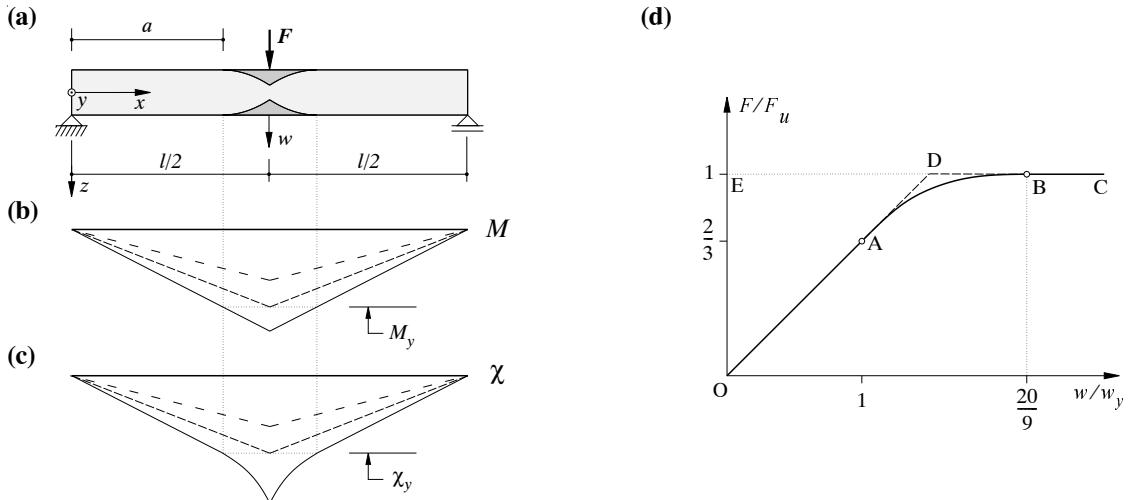


Bild 2.5 – Einfacher Balken mit Rechteckquerschnitt unter mittig angreifender Einzellast:  
(a) Bezeichnungen; (b) Biegemomente; (c) Krümmungen; (d) Last-Mittendurchbiegungs-Diagramm.

Für  $F = F_u$  kann sich an der Stelle  $x = l/2$  ein Knick der Biegelinie einstellen. Nur in diesem einen Querschnitt, dem sogenannten plastischen Gelenk, werden die Krümmungen theoretisch unendlich gross.

Die sogenannte plastische Reserve  $F_u/F_y$  des vorliegenden statisch bestimmten Systems ist gleich dem Formfaktor  $Z/W = 1.5$ . Für statisch unbestimmte Systeme gilt im allgemeinen  $F_u/F_y > Z/W$ .

Für  $n$ -fach statisch unbestimmte Systeme wird die Traglast spätestens dann erreicht, wenn sich  $n + 1$  plastische Gelenke gebildet haben. Meistens werden Teilmechanismen mit weniger als  $n + 1$  plastischen Gelenken massgebend.

Würde das Momenten-Krümmungs-Diagramm von Bild 2.4 (e) unter Vernachlässigung der elastisch-plastischen Phase durch ein bilineares, d.h. linear elastisch-ideal plastisches Diagramm approximiert, so ergäbe sich in Bild 2.5 (d) die Linie OADBC. Würde auch noch die elastische Phase unterdrückt, so ergäbe sich das starr-ideal plastische Verhalten OEDBC. Wie man sieht, ist die Traglast  $F_u$  des ideal plastischen Systems von den elastischen Verformungen unabhängig, d.h. man kann sich auf die Betrachtung vereinfachter Momenten-Krümmungs-Beziehungen beschränken, wenn nur Traglasten und zugehörige Bruchmechanismen von Interesse sind.

Die Länge des plastifizierten Bereiches [z.B.  $l - 2\alpha$  in Bild 2.5 (a)] hängt im allgemeinen nicht nur vom Belastungsniveau ab. Für grosse Formfaktoren  $Z/W$  und bei zusätzlicher Einwirkung von Normalkräften wird sie grösser, während eine Verfestigung einen gegenläufigen Einfluss hat.

### Beidseitig eingespannter Balken unter gleichmässig verteilter Belastung

Der in Bild 2.6 (a) dargestellte Balken entspricht bis auf die Belastung und Lagerung jenem von Bild 2.5 (a). Die Bilder 2.6 (b) und (c) illustrieren den Momenten- und Krümmungsverlauf beim Fliessbeginn und in der elastisch-plastischen Phase, und Bild 2.6 (d) fasst die Ergebnisse einer vereinfachten Betrachtung des Tragverhaltens zusammen.

Der Fliessbeginn wird durch das Erreichen der Fliessspannungen an den Querschnittsrändern bei den Einspannstellen charakterisiert:

$$q_y = \frac{12M_y}{l^2} \quad , \quad w_y = \frac{\chi_y l^2}{32} \quad (2.26)$$

Die Berechnungen für die elastisch-plastische Phase werden dadurch erschwert, dass sich einzelne Querschnitte nahe den Einspannstellen unter zunehmender Belastung elastisch entlasten. Wie beim Beispiel von Bild 2.5 wird aber die Traglast

$$q_u = 2q_y \quad (2.27)$$

bei einer endlichen Mittendurchbiegung erreicht. Die plastische Reserve  $q_u/q_y = 2$  ist in diesem statisch unbestimmten Fall grösser als der Formfaktor  $Z/W = 1.5$ .

Wird statt mit Bild 2.4 (e) mit einem vereinfachten bilinearen Momenten-Krümmungs-Diagramm gerechnet, so erhält man in Bild 2.6 (d) die Linie OABC. Plastische Gelenke bei den Einspannstellen treten bei Punkt A in Bild 2.6 (d) unter einer Belastung von  $12M_u/l^2$  und bei einer Mittendurchbiegung von  $3\chi_y l^2/64$  auf. Für zusätzliche Belastungen bis zum Erreichen der Traglast verhält sich der Träger zwischen den plastischen Gelenken wie ein einfacher Balken, d.h. die Steifigkeit nimmt im Vergleich zum beidseitig eingespannten Balken um einen Faktor 5 ab. Die Traglast  $q_u$  von  $16M_u/l^2$  wird in Bild 2.6 (d) beim Punkt B erreicht, wenn auch der Querschnitt in der Mitte der Spannweite  $l$  zu einem plastischen Gelenk wird. Die zugehörige Rotation der plastischen Gelenke bei der Einspannstelle lässt sich z.B. durch Anwendung der Ar-

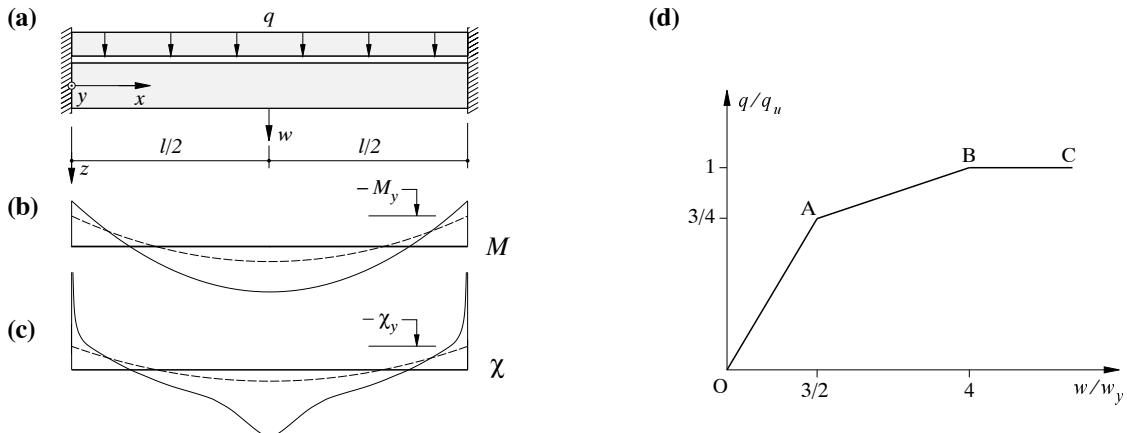


Bild 2.6 – Beidseitig eingespannter Balken unter gleichmaessig verteilter Belastung: (a) Bezeichnungen; (b) Biegemomente; (c) Krümmungen; (d) Belastungs-Mittendurchbiegungs-Diagramm.

beitsgleichung zu  $\chi_y l/4$  bestimmen, und für die entsprechende Mittendurchbiegung findet man  $w = 4w_y$ .

Die vereinfachende Annahme eines bilinearen Momenten-Krümmungs-Diagrammes mit plastischen Gelenken in den höchstbeanspruchten Querschnitten ergibt eine praktisch vernünftige Näherung. Wegen der stets vorhandenen, praktisch aber nicht erfassbaren (initialen) Eigenspannungszustände ist eine exakte Verformungsberechnung ohnehin illusorisch. Zudem weisen die in der Praxis meist verwendeten, profilierten Querschnitte wesentlich kleinere Formfaktoren auf, als der hier betrachtete Rechteckquerschnitt. Das plastische Moment liegt also näher beim Moment bei Fliessbeginn, und dadurch ist die Annahme eines linear elastisch-ideal plastischen Momenten-Krümmungs-Diagramms besser gerechtfertigt. Verformungsnachweise zur Ergänzung von Traglastberechnungen werden deshalb in der Regel auf vereinfachte Momenten-Krümmungs-Beziehungen und die Betrachtung von in einzelnen Querschnitten konzentrierten plastischen Gelenken abgestützt, vgl. Kapitel 9.

## 2.2 Fliessbedingungen

### 2.2.1 Rechteckiger Stahlbetonquerschnitt unter Biegung und Normalkraft

#### Fliessbedingungen für Betonstahl und Beton unter einachsiger Beanspruchung

Bild 2.7 (a) zeigt eine starr-ideal plastische Idealisierung des Verhaltens von Betonstahl unter einachsiger Beanspruchung. Das Diagramm entsteht aus Bild 2.1 (b) durch Vernachlässigung der elastischen Dehnungsanteile, d.h.  $E_s \rightarrow \infty$ . Nach einer Belastung OAB erfolgt die Entlastung BC parallel zur initialen Belastung OA, also ohne Veränderung von  $\varepsilon_s$ . Bei einer Belastung im Gegensinn ergibt sich Fliessen beim Punkt E, und nach einer zweiten plastischen Phase EFG kann z.B. eine Wiederbelastung entlang GHJ und eine dritte plastische Phase JABD anschliessen.

Bild 2.7 (b) fasst das durch Bild 2.7 (a) beschriebene Verhalten in der Form einer Fliessbedingung zusammen. Für  $|\sigma_s| < f_y$  treten keine Veränderungen von  $\varepsilon_s$  auf, d.h.  $\dot{\varepsilon}_s = 0$ . Für  $\sigma_s = \pm f_y$  sind plastische Dehnungssinkremente  $\dot{\varepsilon}_s$  möglich, deren Vorzeichen mit jenem der zu-

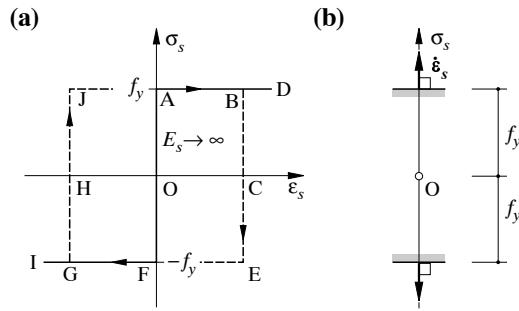


Bild 2.7 – Betonstahl unter einachsiger Beanspruchung: (a) Starr-ideal plastisches Verhalten; (b) Fliessbedingung.

gehörigen Spannung übereinstimmt. Zustände mit  $|\sigma_s| > f_y$  sind unmöglich.

Die beiden Fliessgrenzen in Bild 2.7 (b) werden analog zu den anschliessend zu diskutierenden allgemeinen Fliessfiguren durch Schraffuren an den Stellen  $\pm f_y$  auf der  $\sigma_s$ -Achse angedeutet, und die plastischen Dehnungssinkremente  $\dot{\varepsilon}_s$  werden auf dasselbe Koordinatensystem bezogen wie die Spannungen  $\sigma_s$ . Wie man sieht, entsprechen die möglichen plastischen Dehnungssinkremente Vektoren  $\dot{\varepsilon}_s$ , die senkrecht auf den Fliessgrenzen stehen und mit Bezug auf den zwischen den Fliessgrenzen liegenden aplastischen Bereich nach aussen zeigen.

Bild 2.8 (a) zeigt eine zu Bild 2.7 (a) teilweise analoge Darstellung für Beton mit einer endlichen Druckfestigkeit  $f_c$  und einer als verschwindend klein angenommenen Zugfestigkeit. Belastungszyklen auf Druck (z.B. entsprechend dem Pfad OABC) entsprechen dem Verhalten des Betonstahls gemäss Bild 2.7 (a). Beim Verhalten auf Zug ist dagegen ein markanter Unterschied festzustellen. Nach einer Belastung entsprechend der Strecke OE muss sich der damit verbundene Riss zunächst wieder schliessen, d.h. der Bildpunkt in Bild 2.8 (a) nimmt den Weg EO zurück zum Ursprung, bis das System wieder Druck aufnehmen kann. Ein starr-ideal plastisches Verhalten würde dagegen verlangen, dass vom Punkt E an der Zugfliessgrenze ausgehend die Druckfliessgrenze  $-f_c$  ohne Veränderung von  $\varepsilon_c$  erreicht würde. Dieses Abweichen von einem ideal plastischen Verhalten auf der Zugseite – und nicht, wie oft angenommen wird, jenes auf der Druckseite – bildet grundsätzlich eine der Hauptschwierigkeiten bei der Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton, vgl. die Bemerkungen zu Kontinuums- und Bruchmechanik am Schluss von Kapitel 1.2.3. Vielfach wirkt sich diese Schwierigkeit jedoch nicht aus, und die zu Bild 2.7 (b) analoge Idealisierung in Bild 2.8 (b) ist zulässig.

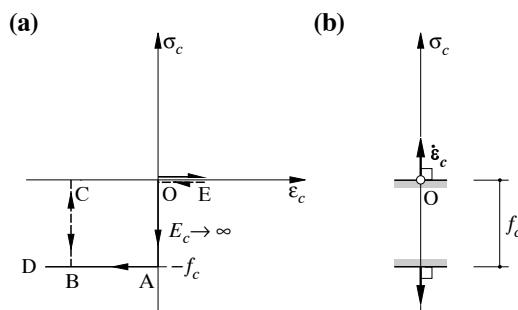


Bild 2.8 – Beton unter einachsiger Beanspruchung: (a) Starr-ideal plastisches Verhalten; (b) Fliessbedingung.

### Symmetrisch bewehrter Querschnitt ohne Betonüberdeckung

Der in Bild 2.9 (a) dargestellte, symmetrisch bewehrte Rechteckquerschnitt besteht aus Beton (Querschnittsfläche  $A_c = bh$ ) und Betonstahl (Querschnittsfläche  $A_s = \rho A_c$ ), deren Verhalten durch die Fliessbedingungen der Bilder 2.8 und 2.7 beschrieben werden soll. Bild 2.9 (b) zeigt die entsprechenden Dehnungssinkremente

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_m + \dot{\chi}z \quad (2.28)$$

mit den verallgemeinerten Verformungssinkrementen  $\dot{\epsilon}_m$  und  $\dot{\chi}$ , vgl. (2.15).

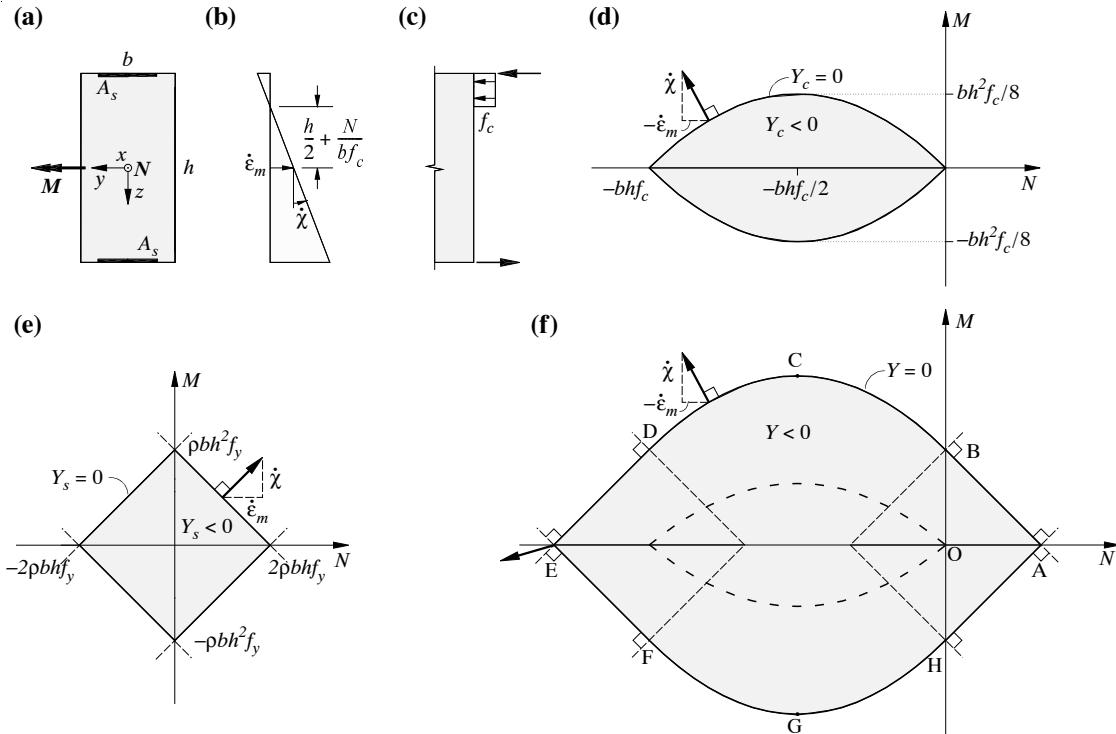


Bild 2.9 – Symmetrisch bewehrter Rechteckquerschnitt ohne Betonüberdeckung: (a) Bezeichnungen; (b) Dehnungssinkamente; (c) Spannungen; (d) Fliessfigur des Betonquerschnitts; (e) Fliessfigur der Bewehrung; (f) Fliessfigur des Stahlbetonquerschnitts.

Die neutrale Achse ( $\dot{\epsilon} = 0$ ) befindet sich in einem Abstand von  $h/2 + N/(bf_c)$  von der  $y$ -Achse, wenn zunächst nur der Beitrag des Betons betrachtet wird. In der Tat erfüllen die Druckspannungen vom Betrag  $f_c$  gemäss Bild 2.9 (c) eine Höhe von  $-N/(bf_c)$ . Ihr auf die  $y$ -Achse bezogenes Moment ergibt sich mit dem Hebelarm  $h/2 + N/(2bf_c)$  der resultierenden Kraft  $-N$  zu  $-N[h/2 + N/(2bf_c)]$ . Für negative  $\dot{\chi}$  folgt bis auf das Vorzeichen von  $M$  derselbe Ausdruck. Allgemein gilt also

$$Y_c = \pm M + N\left(\frac{h}{2} + \frac{N}{2bf_c}\right) = 0 \quad (2.29)$$

wobei die in den verallgemeinerten Spannungen  $N$  und  $M$  ausgedrückte Fliessfunktion  $Y_c$  die den aplastischen Bereich des Betons ( $Y_c < 0$ ) in Bild 2.9 (d) umschliessende, aus zwei Parabeln zusammengesetzte Fliessgrenze ( $Y_c = 0$ ) beschreibt.

Wie man sieht, ist der aplastische Bereich konvex, und der Gradient der Funktion  $Y_c$  an der Fliessgrenze hat Komponenten in  $N$ - und  $M$ -Richtung, die zu den verallgemeinerten Verformungskrementen proportional sind, d.h. der Vektor der verallgemeinerten Verformungskremente ist zur Fliessgrenze orthogonal. Tatsächlich gilt

$$\frac{\partial Y_c}{\partial N} = \frac{h}{2} + \frac{N}{bf_c} \quad , \quad \frac{\partial Y_c}{\partial M} = \pm 1 \quad (2.30)$$

und somit

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Y_c}{\partial N}\right)_{\text{Fliessgrenze}} &= \pm \left(\frac{h}{2} + \frac{N}{bf_c}\right) = \frac{\dot{\epsilon}_m}{\dot{\chi}} \\ \left(\frac{\partial Y_c}{\partial M}\right)_{\text{Fliessgrenze}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Der mit (2.31) ausgedrückte Sachverhalt lässt sich für beliebige, im Raum der (lokalen oder verallgemeinerten) Spannungen  $\sigma$  definierte Fliessbedingungen

$$Y(\sigma) = 0 \quad (2.32)$$

durch das Fliessgesetz

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{0} \quad (Y < 0) \quad , \quad \dot{\epsilon} = \kappa \operatorname{grad} Y \quad (Y = 0, \kappa \geq 0) \quad (2.33)$$

verallgemeinern, wobei  $\dot{\epsilon}$  für den Vektor der verallgemeinerten Verformungskremente steht und  $\kappa$  einen nicht negativen Faktor bezeichnet.

Betrachtet man nun die Wirkung der Bewehrung allein, so ergibt sich analog die in Bild 2.9 (e) dargestellte Fliessfigur  $Y_s = 0$ . Konvexität der Fliessgrenze und Orthogonalität der verallgemeinerten Verformungskremente gelten auch hier wieder. An den Ecken der Fliessfigur kann  $\operatorname{grad} Y_s$  irgendeine nicht negative Linearkombination der Gradienten der anschliessenden Seiten sein, d.h. die Richtung von  $\operatorname{grad} Y_s$  bleibt innerhalb des zulässigen Winkelbereichs unbestimmt.

Durch Linearkombination der gemäss den Bildern 2.9 (d) und (e) für den Beton und die Bewehrung möglichen Spannungszustände  $\sigma_c$  und  $\sigma_s$  resultiert schliesslich die in Bild 2.9 (f) dargestellte Fliessfigur  $Y = 0$  des Stahlbetonquerschnitts. Diese kann man sich z.B. bei festgehaltener Fliessfigur der Bewehrung dadurch entstanden denken, dass man die Fliessfigur des Betons rein translatorisch derart verschiebt, dass ihr Ursprung alle Lagen auf der Fliessgrenze der Bewehrung einnimmt. Die Umhüllende aller verschobenen Lagen der Fliessfigur des Betons ist dann die gesuchte Fliessfigur des Stahlbetonquerschnitts. Natürlich können die Rollen von Beton und Bewehrung bei dieser Konstruktion vertauscht werden. Wie man sich leicht überzeugt, gelten Konvexität der Fliessgrenze und Orthogonalität der verallgemeinerten Verformungskremente auch für Bild 2.9 (f).

### Asymmetrisch bewehrter Querschnitt ohne Betonüberdeckung

Bild 2.10 illustriert den Einfluss einer asymmetrischen Bewehrung auf die Fliessfigur. Im Beispiel beträgt  $A'_s = A_s/2$ . Die Konstruktion der Fliessfigur in Bild 2.10 (b) ist analog zu jener von Bild 2.9 (f). Alle übrigen Bemerkungen gelten sinngemäss auch hier.

### Einfluss einer endlichen Betonüberdeckung

Bild 2.11 entspricht Bild 2.9, die Betonüberdeckung  $c$  der Bewehrung am oberen und unteren Querschnittsrand verschwindet aber nicht. Bild 2.11 (b) zeigt die resultierende, analog zu Bild 2.9 (f) konstruierte Fliessfigur. Die beiden Parabeln sind je dreigeteilt.

## Fliessbedingungen

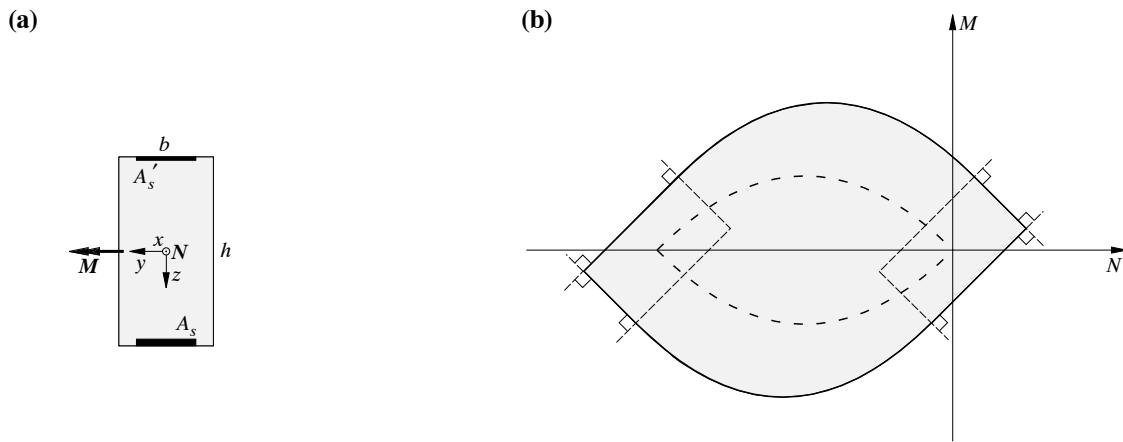


Bild 2.10 – Einfluss einer asymmetrischen Bewehrung: (a) Bezeichnungen; (b) Fliessfigur des Stahlbetonquerschnitts.

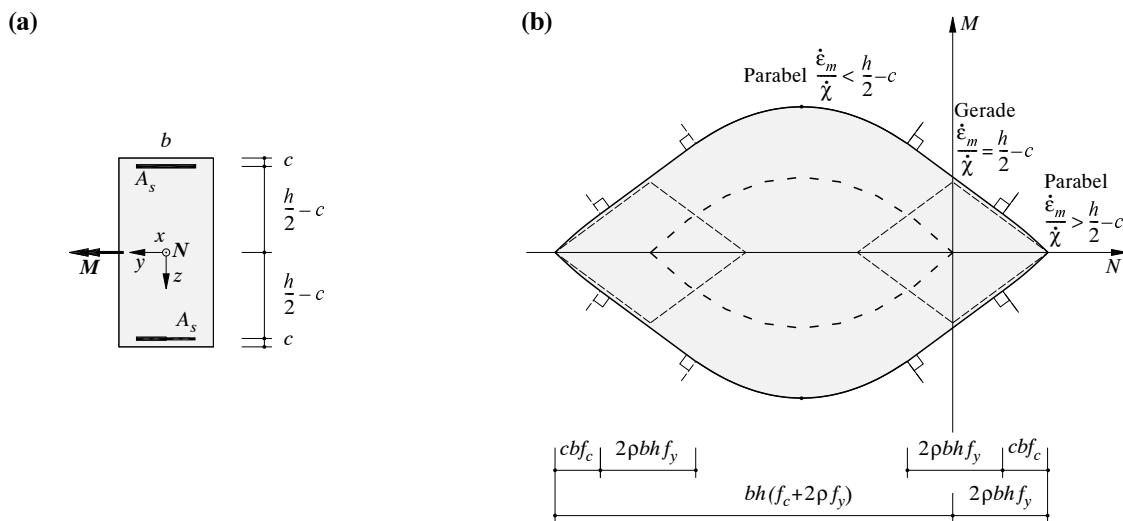


Bild 2.11 – Einfluss einer endlichen Betonüberdeckung: (a) Bezeichnungen; (b) Fliessfigur des Stahlbetonquerschnitts.

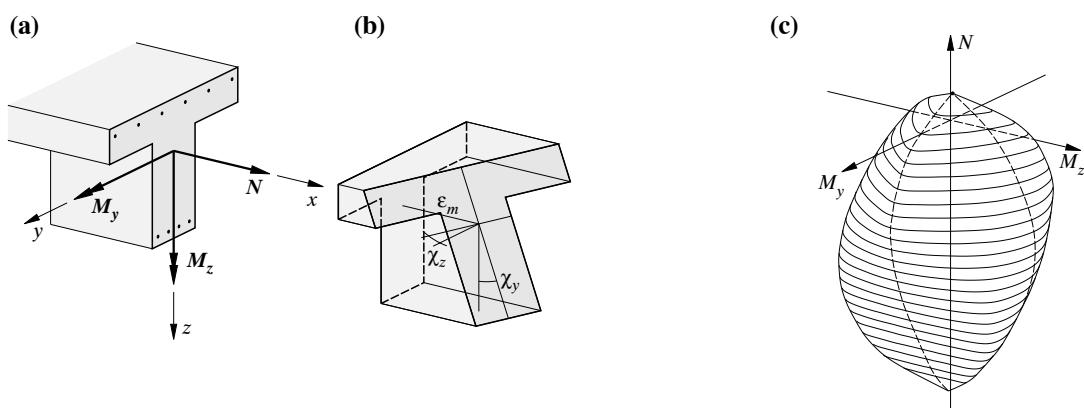


Bild 2.12 – Verallgemeinerung für beliebige Querschnitte und Spannungs-Dehnungs-Diagramme: (a) Bezeichnungen; (b) Dehnungsverteilung; (c) Interaktionsdiagramm.

## Verallgemeinerung für beliebige Querschnitte und Spannungs-Dehnungs-Diagramme

Die Verallgemeinerung der am Rechteckquerschnitt gemachten Feststellungen auf beliebige Querschnitte ist ohne grundsätzliche Schwierigkeiten möglich. Üblicherweise rechnet man mit Spannungs-Dehnungs-Diagrammen, die Dehnungsbegrenzungen enthalten. Im Vergleich zu einer starr-ideal plastischen Betrachtung ergeben sich ausser in aussergewöhnlichen Fällen nur verhältnismässig geringe Abweichungen. Zu beachten ist allerdings, dass sich wegen der Dehnungsbegrenzungen teilweise konkave Interaktionsfiguren ergeben können.

Bild 2.12 (b) illustriert beispielsweise die gemäss (2.15) unter einer bestimmten Schnittgrössenkombination für den in Bild 2.12 (a) dargestellten Querschnitt auftretenden Dehnungen  $\varepsilon_x$ , die einem Punkt auf der in Bild 2.12 (c) gezeigten Interaktionsfläche entsprechen mögen.

### 2.2.2 Theorie des plastischen Potentials

#### Fliessbedingungen im Spannungsraum

Setzt man die anhand des Stahlbetonquerschnitts in Kapitel 2.2.1 festgestellte Konvexität und Orthogonalität zunächst im Raum der lokalen Spannungskomponenten  $\sigma_{ij}$  und der zugeordneten plastischen Verzerrungskomponenten  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  voraus, so ergeben sich durch (2.32) beschriebene Fliessflächen, die nach (2.33) als Einhüllende aller Stützebenen aufgefasst werden können. Eine Stützebene ist die zu einem bestimmten Vektor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  orthogonale Ebene durch den Endpunkt des zugehörigen Spannungsvektors  $\boldsymbol{\sigma}$ . Zur Veranschaulichung dieser Zusammenhänge genügt die Beschränkung auf eine zweidimensionale Fliessfigur, siehe Bild 2.13 (a).

Offensichtlich gilt

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0 \quad (2.34)$$

wobei  $\boldsymbol{\sigma}^*$  einen beliebigen Spannungszustand an oder unter der Fliessgrenze bezeichnet. Das Skalarprodukt

$$D = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.35)$$

entspricht der elementaren (auf die Volumeneinheit bezogenen) Dissipationsarbeit, d.h. der spezifischen Energie, die bei der plastischen Verformung in Wärme übergeführt wird. Gemäss (2.34) nimmt  $D$  für einander zugeordnete oder, wie man sagt, miteinander verträgliche Vektoren  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  ein Maximum an; die fiktiven elementaren Dissipationsarbeiten  $\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$  von nicht mit  $\boldsymbol{\varepsilon}$  verträglichen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}^*$  können  $D$  nicht übertreffen. Die Relation (2.34) wird deshalb als

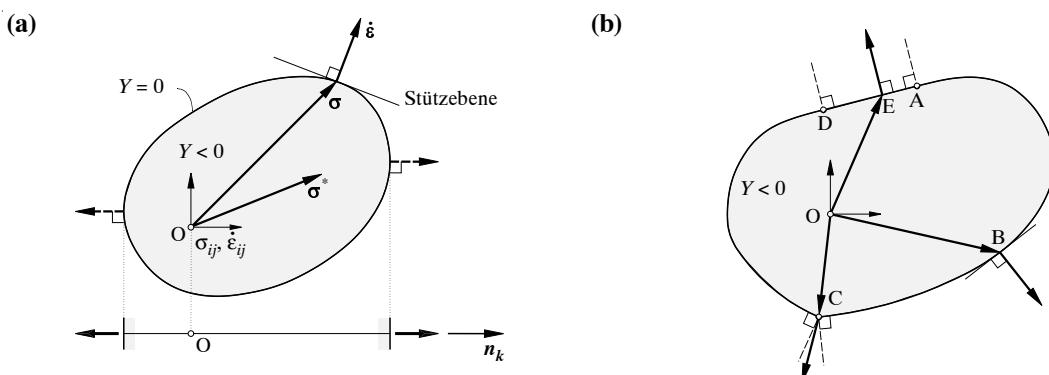


Bild 2.13 – Fliessbedingungen im Spannungsraum: (a) Reguläre Fliessfigur mit Projektion in Unterraum; (b) Fliessfigur mit Singularitäten.

Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit bezeichnet.

Setzt man (2.34) als Postulat voraus, so ergeben sich die bisher angenommenen Eigenschaften der Konvexität der Fliessgrenze und der Orthogonalität der plastischen Verzerrungskräfte als Folgerungen.

Nach dem Fliessgesetz (2.33) spielt die Fliessfunktion  $Y$  die Rolle einer plastischen Potentialfunktion. Die zweite Gleichung (2.33) gilt nur für reguläre Fliessflächen ohne Spitzen und Kanten, wie z.B. die in Bild 2.13 (a) dargestellte Fliessfigur. Für Fliessflächen mit Singularitäten, wie z.B. die Fliessfigur von Bild 2.13 (b), muss das Fliessgesetz verallgemeinert werden:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \sum_i \kappa_i \operatorname{grad} Y_i \quad (Y_i = 0, \kappa_i \geq 0) \quad (2.36)$$

In Bild 2.13 (b) entspricht der Punkt B einem regulären Bereich der Fliessgrenze; diese ist bei B stark konvex und glatt. Im singulären Punkt C ist die Fliessgrenze zwar ebenfalls stark konvex, aber nicht glatt; der äussere Normalenvektor kann sich gemäss (2.36) innerhalb eines Winkelbereiches frei einstellen, der durch die äusseren Normalen auf die in C zusammenstossenden Fliessgrenzen gegeben ist. Schliesslich ist auch das gerade (oder ebene) Stück DEA der Fliessgrenze singulär; die Fliessgrenze ist hier zwar glatt, aber nur schwach konvex.

In allen möglichen, durch Bild 2.13 (b) charakterisierten Fällen ist die elementare Dissipationsarbeit  $D$  eine eindeutige Funktion von  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ , und eine Multiplikation von  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  mit einem positiven Faktor  $k$  bewirkt eine Multiplikation von  $D$  mit demselben Faktor

$$D(k\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) = kD(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (2.37)$$

Demnach ist  $D$  eine homogene Funktion vom Grad eins. Allgemein heisst eine in einem Vektorraum  $\mathbf{r}$  definierte Funktion  $f(\mathbf{r})$  homogen vom Grad  $n$ , wenn  $f(k\mathbf{r}) = k^n f(\mathbf{r})$  ist, und nach einem Satz von Euler gilt dafür  $\mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} f = n f(\mathbf{r})$ . Also ist im vorliegenden Fall  $D = \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \operatorname{grad} D$ , und der Vergleich mit (2.35) bringt die zur zweiten Gleichung (2.33) analoge Beziehung

$$\boldsymbol{\sigma} = \operatorname{grad} D \quad (2.38)$$

## Übertragung auf gesamte Systeme

Die bisherigen Betrachtungen waren auf ein Volumenelement beschränkt. Die Essenz der sogenannten Theorie des plastischen Potentials (Konvexität und Orthogonalität) wurde durch das Prinzip der maximalen Dissipationsarbeit (2.34) ausgedrückt.

Durch Zusammenfassen der lokalen Spannungen und Verzerrungskräfte zu entsprechenden Vektoren  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  im Funktionenraum lässt sich zeigen, dass die Beziehungen (2.34) und (2.35) auch für gesamte Systeme gelten. Die Endpunkte aller Vektoren  $\boldsymbol{\sigma}$ , die einem Versagen des Gesamtsystems entsprechen, definieren eine Hyperfläche, die Fliessfläche des Gesamtsystems. Bezeichnet  $\boldsymbol{\sigma}^*$  einen beliebigen Spannungszustand an oder unter der Fliessgrenze des Gesamtsystems, so liegen die zugehörigen lokalen Spannungen überall an oder unter der Fliessgrenze im Spannungsraum. Somit folgt durch Integration der in lokalen Größen ausgedrückten Beziehung (2.34) über das ganze System, dass diese Beziehung auch für das gesamte System gültig bleibt. Analog folgt die für das Gesamtsystem ausgedrückte Beziehung (2.35) durch Integration der elementaren Dissipationsarbeiten;  $D$  bezeichnet dann nicht mehr die elementare, sondern die gesamte Dissipationsarbeit.

## Verallgemeinerte Spannungen und Verformungen

Beschränkt man sich durch Einführen von Bindungen (wie z.B. durch Annahme der Hypothese von Bernoulli für die Balkenbiegung) auf bestimmte Verformungen, so arbeitet man im Funktio-

nenraum mit entsprechenden Projektionen der Spannungsvektoren und Fliessflächen. Beschränkt man sich beispielsweise in Bild 2.13 (a) auf plastische Verzerrungssinkremente in der Richtung des Einheitsvektors  $\mathbf{n}_k$ , so wird die zweidimensionale Fliessfigur auf einen eindimensionalen Unterraum projiziert. Den mit den Verzerrungssinkrementen  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\epsilon}_k \mathbf{n}_k$  verträglichen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  entsprechen verallgemeinerte Spannungskomponenten  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k$ , die gemäss

$$D = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \sum_k \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_k \dot{\epsilon}_k \quad (2.39)$$

den verallgemeinerten Verformungskomponenten  $\dot{\epsilon}_k$  zugeordnet sind. Einsetzen in die (für das Gesamtsystem formulierte) Beziehung (2.34) zeigt, dass die Theorie des plastischen Potentials auch im Raum der verallgemeinerten Spannungen und Verformungen gültig bleibt.

Die bei der Projektion "verloren gegangenen" Spannungskomponenten werden als verallgemeinerte Reaktionen bezeichnet. Beispielsweise spielen die Querkräfte in Verbindung mit der Hypothese von Bernoulli diese Rolle; sie sind zwar für das Gleichgewicht notwendig, tragen aber gleich wie innere Kräfte starrer Körper nicht zur Dissipationsarbeit bei, da die ihnen zugeordneten Verformungen verschwinden.

### Verallgemeinerte Lasten und Verschiebungen

Im Rahmen der Kontinuumsmechanik beschreibt man beliebige Belastungsprozesse im allgemeinen durch Vorgabe von Volumen- und Oberflächenkräften sowie durch vorgeschrriebene Randverschiebungen. Meist beschränkt man sich auf wenige Lastfälle, d.h. man geht im Funktionsraum der Vektoren  $\boldsymbol{\sigma}$  und  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  zu entsprechenden  $n$ -dimensionalen Unterräumen über. Können lineare Abbildungen  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma})$  und  $\dot{\mathbf{u}}(\dot{\boldsymbol{\epsilon}})$  definiert werden, derart, dass

$$\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2.40)$$

so spricht man von einer  $n$ -parametrischen Belastung. Die verallgemeinerten Lasten  $\mathbf{F}$  und die verallgemeinerten Verschiebungssinkamente  $\dot{\mathbf{u}}$  werden damit explizit als Funktionen der lokalen Größen definiert.

Jedem Kollapsbelastungszustand  $\mathbf{F}$  entspricht mindestens ein Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}$  an der Fliessgrenze des Gesamtsystems, und jedem aplastischen Belastungszustand  $\mathbf{F}^*$  entspricht mindestens ein aplastischer Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}^*$ . Mithin gilt nach (2.40) und (2.34)

$$(\mathbf{F} - \mathbf{F}^*) \cdot \dot{\mathbf{u}} = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^*) \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \geq 0 \quad (2.41)$$

d.h. die Theorie des plastischen Potentials gilt auch im Raum der verallgemeinerten Lasten und Verschiebungen.

### 2.2.3 Fliessbedingungen für isotropes Material

#### Allgemeines

Für isotropes Verhalten können Fliessbedingungen als Funktionen der Grundinvarianten

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)} &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \sigma_{(2)} &= \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2 - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_y &= -\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1 - \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_{(3)} &= 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + \sigma_x \sigma_y \sigma_z &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.42)$$

des Spannungstensors  $\sigma_{ij}$  dargestellt werden, d.h.

$$Y(\sigma_{(1)}, \sigma_{(2)}, \sigma_{(3)}) = 0 \quad (2.43)$$

### Inkompressibles Material

Für inkompressibles Material gilt  $\dot{\varepsilon}_{(1)} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0$ , und im Raum der Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  ergeben sich als Fliessflächen zur hydrostatischen Achse  $\sigma_o = \sigma_{(1)}/3$  parallele Zylinder, deren Gleichungen sich durch die Grundinvarianten

$$\begin{aligned}s_{(2)} &= \sigma_{(2)} + \sigma_{(1)}^2/3 \\ s_{(3)} &= \sigma_{(3)} + s_{(2)}\sigma_{(1)}/3 - \sigma_{(1)}^3/27\end{aligned}\tag{2.44}$$

des Deviators

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{(1)}}{3}\delta_{ij}\tag{2.45}$$

ausdrücken lassen:

$$Y(s_{(2)}, s_{(3)}) = 0\tag{2.46}$$

Das Symbol  $\delta_{ij}$  in (2.45) bezeichnet den Einheitstensor mit  $\delta_{ij} = 1$  für  $i = j$  und  $\delta_{ij} = 0$  für  $i \neq j$ .

Als einfache Beispiele von (2.46) ergeben sich die Fliessbedingung von v. Mises

$$s_{(2)} = f_y^2/3\tag{2.47}$$

und die Fliessbedingung von Tresca

$$\tau_{max} = f_y/2\tag{2.48}$$

die auch in der Form

$$Y = 4s_{(2)}^3 - 27s_{(3)}^2 - 9f_y^2s_{(2)}^2 + 6f_y^4s_{(2)} - f_y^6 = 0\tag{2.49}$$

geschrieben werden kann.

In dem in Bild 2.14 (a) dargestellten Hauptspannungsraum entspricht die Fliessbedingung von v. Mises einem Kreiszylinder mit Radius  $f_y\sqrt{2/3}$ , und bei der Fliessbedingung von Tresca handelt es sich um einen dem Kreiszylinder einbeschriebenen Zylinder mit regulärem Sechseckquerschnitt. Bild 2.14 (b) zeigt den Schnitt der beiden Zylinder mit der deviatorischen Ebene  $\sigma_o = 0$ .

### Fliessbedingungen von Prager und Drucker

Als einfachste Verallgemeinerung von (2.47) für kompressibles Material ergibt sich die in Bild 2.15 dargestellte Fliessbedingung

$$s_{(2)} = \frac{f_y^2}{3}\left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{k}\right) \quad |k| > f_y\tag{2.50}$$

von Prager (“extended v. Mises”) mit den Fliessgrenzen  $f_y/(1+f_y/k)$  und  $-f_y/(1-f_y/k)$  unter einachsiger Beanspruchung. Die analoge Verallgemeinerung

$$\tau_{max} = \frac{f_y}{2}\left(1 - \frac{\sigma_{(1)}}{k}\right) \quad |k| > f_y\tag{2.51}$$

der Fliessbedingung von Tresca (“extended Tresca”) stammt von Drucker; die entsprechenden Fliessgrenzen unter einachsiger Beanspruchung betragen ebenfalls  $f_y/(1+f_y/k)$  bzw.  $-f_y/(1-f_y/k)$ . Im Hauptspannungsraum entspricht (2.50) einem Kreiskegel und (2.51) der einbeschriebenen, regulär hexagonalen Pyramide. Die Schnitte dieser Flächen mit der deviatorischen Ebene  $\sigma_o = 0$  sind gleich wie bei den Fliessbedingungen von v. Mises und Tresca, siehe Bild 2.14 (b).

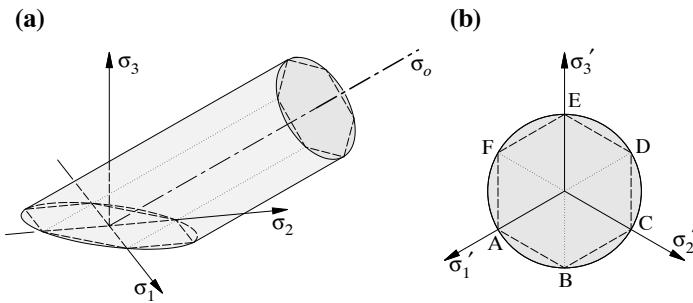


Bild 2.14 – Fliessbedingungen von v. Mises und Tresca: (a) Hauptspannungsraum; (b) deviatorische Ebene.

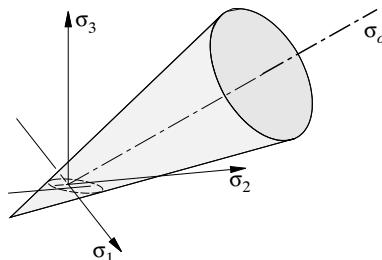


Bild 2.15 – Fliessbedingung von Prager.

### Fliessbedingung von Coulomb

Die in der Bodenmechanik gebräuchliche Fliessbedingung von Coulomb

$$|\tau| + \sigma \tan \varphi - c = 0 \quad (2.52)$$

lautet in Hauptspannungen formuliert

$$Y = \sigma_i(1 + \sin \varphi) - \sigma_k(1 - \sin \varphi) - 2c \cos \varphi = 0 \quad (\sigma_i \geq \sigma_j \geq \sigma_k) \quad (2.53)$$

da der Radius  $(\sigma_i - \sigma_k)/2$  des massgebenden Mohrschen Kreises gleich  $[c \cot \varphi - (\sigma_i + \sigma_k)/2] \sin \varphi$  ist. Dabei bezeichnet  $c$  die Kohäsion, und  $\varphi$  steht für den Winkel der inneren Reibung. Unter einachsiger Beanspruchung betragen die Fliessgrenzen gemäß Bild 2.16 (a)

$$f_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = 2c \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right), \quad f_t = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi} = 2c \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (2.54)$$

Nach (2.53) hat die mittlere Hauptspannung  $\sigma_j$  keinen Einfluss auf das Fliessen. Dementsprechend erhält man durch Anwenden des Fliessgesetzes (2.33) die Beziehung  $\dot{\varepsilon}_j = 0$ , d.h. es liegt ein ebener Verzerrungszustand vor; für  $\varphi > 0$  und endliche  $\kappa$  ergibt sich gemäß  $\dot{\varepsilon}_{(1)} = \dot{\varepsilon}_i + \dot{\varepsilon}_j + \dot{\varepsilon}_k = 2\kappa \sin \varphi$  eine Dilatation, vgl. Kapitel 1.3.3. In Bild 2.16 (b) ist  $\sigma_3$  die mittlere Hauptspannung. Die Fliessbedingungen (2.53) entsprechen zwei zur  $\sigma_1 - \sigma_2$ -Ebene senkrechten (bzw. zur  $\sigma_3$ -Achse parallelen) Ebenen mit Spuren GAF und GCD.

Für einen ebenen Spannungszustand mit  $\sigma_3 = 0$  ergibt sich gemäß Bild 2.16 (b) der irregulär hexagonale aplastische Bereich ABCDEF. Entlang AF und CD gilt  $\dot{\varepsilon}_3 = 0$ . Analog zu diesen

beiden Strecken entstehen die Begrenzungsgeraden CB und EF (mit  $\dot{\varepsilon}_1 = 0$ ) aus dem Schnitt der Ebene  $\sigma_3 = 0$  mit den zur  $\sigma_2 - \sigma_3$ -Ebene senkrechten beiden Seitenflächen der Fliessfläche von Coulomb im Hauptspannungsraum. Ebenso ergeben sich die Begrenzungsgeraden AB und ED (mit  $\dot{\varepsilon}_2 = 0$ ) aus dem Schnitt der Ebene  $\sigma_3 = 0$  mit den zur  $\sigma_1 - \sigma_3$ -Ebene senkrechten beiden Seitenflächen der Fliessfläche von Coulomb. Wie man sieht, ergibt sich für ebene Spannungszustände an den Ecken des aplastischen Bereichs nach dem verallgemeinerten Fliessgesetz (2.36) in der Regel ein räumlicher Verzerrungszustand. Ferner ist für Spannungszustände entlang DE und EF die zur Spannungsebene orthogonale Komponente  $\dot{\varepsilon}_3$  positiv und für solche entlang AB und BC negativ.

In der deviatorischen Ebene zeigt sich die Fliessfläche von Coulomb gemäss Bild 2.16 (c) als irreguläres Sechseck ABCDEF. Die Strecken OA und OB messen  $2c \cos \varphi \sqrt{6}/(3 + \sin \varphi)$  bzw.  $2c \cos \varphi \sqrt{6}/(3 - \sin \varphi)$ . Für  $\varphi = 0$  reduziert sich die Fliessbedingung von Coulomb auf jene von Tresca, und das irreguläre Sechseck ABCDEF wird zur Spur AGCHEI des regulär sechseckigen Primitiven des Coulomb-Kriteriums.

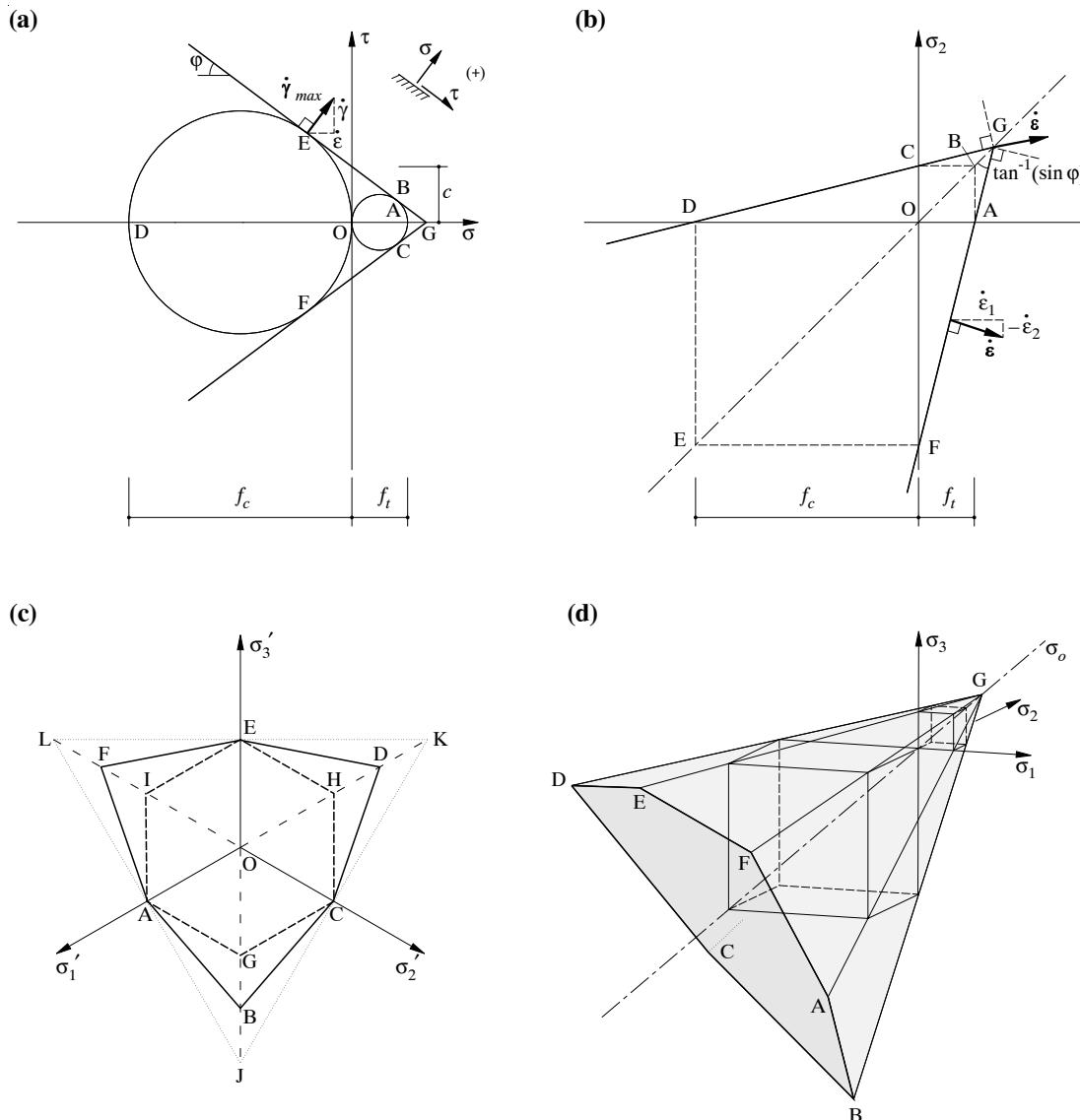


Bild 2.16 – Fliessbedingung von Coulomb: (a) Spannungsebene; (b) ebener Spannungs- bzw. Verzerrungszustand; (c) deviatorische Ebene; (d) Hauptspannungsraum.

kigen Tresca-Zylinders. Umgekehrt wird das Sechseck ABCDEF im theoretischen Grenzfall  $\varphi = \pi/2$  zum gleichseitigen Dreieck AJCKEL.

Im Hauptspannungsraum von Bild 2.16 (d) entspricht die Fliessbedingung von Coulomb einer irregulär hexagonalen Pyramide mit paarweise zu den Achsen parallelen Seitenflächen. Durch Verschieben der zur Fliessfläche orthogonalen Vektoren  $\dot{\varepsilon}$  in die Pyramidenspitze G erkennt man, dass das mit (2.35) definierte Skalarprodukt der elementaren Dissipationsarbeit allgemein (d.h. für die Seitenflächen und Kanten sowohl als auch für die Spitze der Pyramide) durch

$$D = c \cot \varphi \dot{\varepsilon}_{(1)} \quad (2.55)$$

ausgedrückt werden kann. Für die Seitenflächen gilt wegen (2.53) und (2.33)  $\dot{\varepsilon}_{(1)} = 2\kappa \sin \varphi$  und  $\dot{\gamma}_{max} = \dot{\varepsilon}_i - \dot{\varepsilon}_k = 2\kappa$ , mithin

$$D = c \cos \varphi \dot{\gamma}_{max} \quad (2.56)$$

wobei  $\dot{\gamma}_{max}$  den Durchmesser des Mohrschen Kreises der Verzerrungskräfte bezeichnet.

### Modifizierte Fliessbedingung von Coulomb

Oft wird die Fliessbedingung von Coulomb mit der zusätzlichen Bedingung

$$\sigma \leq f_{ct} \quad (2.57)$$

mit  $f_{ct} < 2c \cos \varphi / (1 + \sin \varphi)$  modifiziert, da sich sonst im Vergleich zur einachsigen Druckfestigkeit zu grosse Werte für die einachsige Zugfestigkeit ergäben. Beispielsweise ist für Beton die Annahme  $\tan \varphi = 3/4$  vernünftig, aus (2.54) resultiert aber damit ein im allgemeinen unrealistisches Verhältnis  $f_t/f_c = 1/4$ .

Im Vergleich zu Bild 2.16 (a) und (b) führt (2.57) zu den in Bild 2.17 dargestellten Modifikationen. Der die Fliessgrenze in Bild 2.17 (a) abschliessende Kreis BAC hat den Durchmesser  $f_c - 2 \sin \varphi f_{ct} / (1 - \sin \varphi)$ . Er entspricht den Punkten A und C in Bild 2.17 (b). Nach dem verallgemeinerten Fliessgesetz (2.36) lassen sich diesen beiden Punkten Coulombsche Fliessfiguren AHC mit Spitzen H zwischen den Punkten B und G und fiktiven Winkeln  $\alpha$  der inneren Reibung mit  $\pi/2 \geq \alpha \geq \varphi$  zuordnen. Die zugehörige elementare Dissipationsarbeit errechnet sich analog

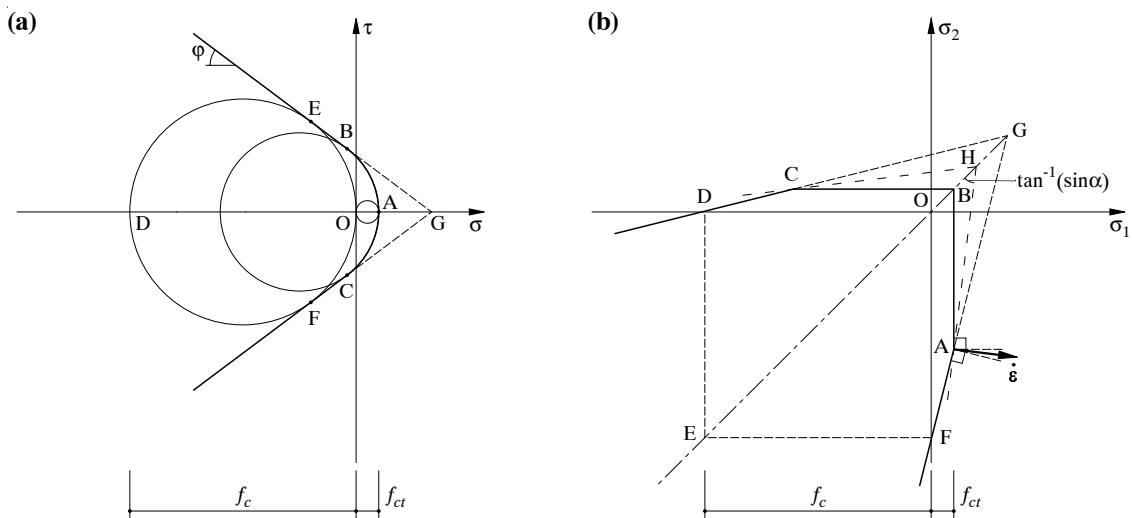


Bild 2.17 – Modifizierte Fliessbedingung von Coulomb: (a) Spannungsebene; (b) ebener Spannungs- bzw. Verzerrungszustand.

zu (2.56):

$$D = \left[ \frac{f_c(1 - \sin \alpha)}{2} + \frac{f_{ct}(\sin \alpha - \sin \varphi)}{1 - \sin \varphi} \right] \dot{\gamma}_{max} \quad \left( \frac{\pi}{2} \geq \alpha \geq \varphi \right) \quad (2.58)$$

Für  $\alpha = \pi/2$  ergibt sich  $D = f_{ct} \dot{\gamma}_{max}$ , und für  $\alpha = \varphi$  führt (2.58) wegen der ersten Gleichung (2.54) auf (2.56) zurück.

### Mohrsche Hüllkurven

Die Fliessbedingung (2.52) von Coulomb lässt sich nach Mohr wie folgt verallgemeinern

$$|\tau| - f(\sigma) = 0 \quad (2.59)$$

siehe Bild 2.18 (a). Dabei stellt man üblicherweise an die Funktion  $f$  folgende Anforderungen: Erstens soll  $f$  für einen bestimmten, nicht negativen Wert  $\sigma$  verschwinden. Zweitens sollen sowohl die erste als auch die zweite Ableitung von  $f$  nicht positiv sein, und drittens soll  $f$  für  $\sigma \rightarrow -\infty$  gegen einen endlichen Grenzwert streben, also in eine Fliessbedingung von Tresca übergehen.

Wie in Bild 2.18 (a) angedeutet, lässt sich jedem Punkt B auf der Hüllkurve eine umschriebene Fliessbedingung von Coulomb mit einem fiktiven Reibungswinkel  $\alpha$  und einer fiktiven Kohäsion  $c$  zuordnen. Der Abstand der zugehörigen Geraden DB vom Ursprung O beträgt  $c \cos \alpha$ . Betrachtet man nun eine kinematische Diskontinuität derart, dass entlang einer bestimmten Fläche eine unter dem Winkel  $\alpha$  zu dieser Fläche gerichtete Relativverschiebung vom Betrag eins auftritt, so ergeben sich in einer dünnen Zone der Dicke  $d$  entlang der Diskontinuitätsfläche die mittleren Dehnungssinkremente  $\dot{\varepsilon} = \sin \alpha / d$  und die mittleren Schiebungssinkremente  $\dot{\gamma} = \cos \alpha / d$  senkrecht und parallel zur Diskontinuitätsfläche, während parallel zur Diskontinuitätsfläche keine Dehnungssinkremente auftreten. Wie man sich anhand eines Mohrschen Kreises für die Verzerrungssinkremente leicht überzeugt, entspricht dies mittleren maximalen Schiebungssinkrementen  $\dot{\gamma}_{max}$  vom Betrag  $1/d$ , und gemäß (2.56) ist die mittlere elementare Dissipationsarbeit gleich  $c \cos \alpha / d$ . Integration über die Dicke  $d$  liefert die auf eine Einheitsfläche der Diskontinuität bezogene und für eine Einheitsverschiebung gültige Dissipationsarbeit

$$D = c \cos \alpha \quad (2.60)$$

die gerade gleich dem erwähnten Abstand der Geraden DB vom Ursprung O ist. Da die Dicke  $d$  aus der Rechnung fällt, kann anders als in Bild 2.16 (a), wo im Punkt E die Größen  $\dot{\gamma}_{max}$  und die Komponenten  $\dot{\varepsilon}$  und  $\dot{\gamma}$  angegeben sind, im Punkt B von Bild 2.18 (a) direkt der unter dem Winkel  $\alpha$  zur  $\tau$ -Achse geneigte Einheitsverschiebungsvektor eingetragen werden, und durch Anwenden von (2.35) können (2.56) und (2.60) auf geometrischem Wege bestätigt werden.

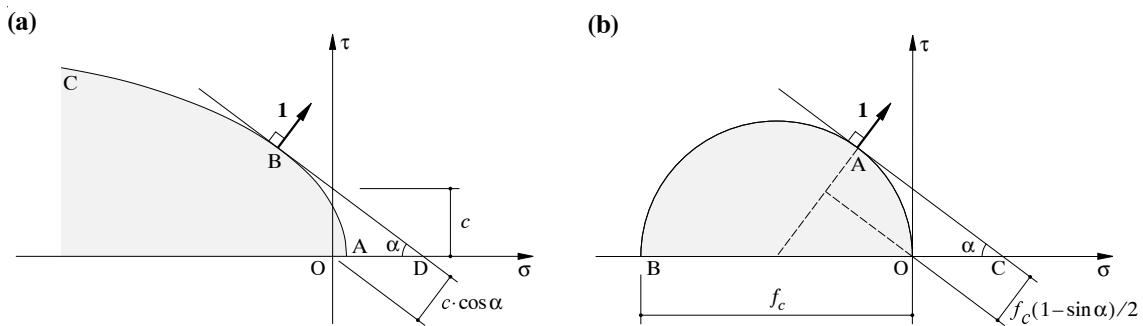


Bild 2.18 – Mohrsche Hüllkurven: (a) Allgemeine Darstellung in der Spannungsebene; (b) quadratische Fliessbedingung im ebenen Spannungszustand.

Vernachlässigt man gemäss Bild 2.17 (b) die Zugfestigkeit  $f_{ct}$ , so resultiert im ebenen Spannungszustand die quadratische Fliessfigur ODEF, die auch mit

$$-f_c \leq \sigma \leq 0 \quad (2.61)$$

beschrieben werden kann. Wegen der quadratischen Form des zugehörigen aplastischen Bereiches wird (2.61) üblicherweise “quadratische Fliessbedingung” genannt. In der Spannungsebene lässt sich (2.61) gemäss Bild 2.18 (b) als Kreis OAB darstellen, und Anwendung von (2.60) liefert

$$D = f_c (1 - \sin \alpha) / 2 \quad (2.62)$$

Dieser Ausdruck entspricht bis auf  $\dot{\gamma}_{max}$  dem aus (2.58) für  $f_{ct} = 0$  folgenden Betrag. Im Gegensatz zu (2.58) ist  $\alpha$  in (2.62) aber nicht auf das Intervall  $\pi/2 \geq \alpha \geq \varphi$  beschränkt, sondern kann alle Werte zwischen  $-\pi/2$  und  $\pi/2$  annehmen.

Nebenbei bemerkt man, dass die oben an Mohrsche Hüllkurven gestellten Anforderungen für (2.61) nur teilweise erfüllt sind. Da es sich aber im vorliegenden Fall um einen ebenen Spannungszustand und nicht einen ebenen Verzerrungszustand handelt, ist dies nicht weiter von Belang; wesentlich ist, dass (2.62) geometrisch analog zu (2.60) gewonnen werden kann.

## 2.3 Grenzwertsätze

### 2.3.1 Allgemeines

#### Prinzip der virtuellen Arbeiten

Wir betrachten ein starr-ideal plastisches System unter der Wirkung der verallgemeinerten Lasten  $\mathbf{F}$ . Die mit  $\mathbf{F}$  im Gleichgewicht stehenden verallgemeinerten Spannungen werden mit  $\boldsymbol{\sigma}$  bezeichnet. Neben diesem Gleichgewichtszustand betrachten wir einen beliebigen (virtuellen oder wirklichen) Verformungszustand, der durch die den Vektoren  $\mathbf{F}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  zugeordneten verallgemeinerten Verschiebungen  $\dot{\mathbf{u}}$  und die damit kompatiblen verallgemeinerten Verformungen  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  charakterisiert wird. Nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gilt

$$\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = 0 \quad (2.63)$$

#### Definitionen

Als statisch zulässiger Spannungszustand soll ein Spannungsfeld bezeichnet werden, das die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen erfüllt.

Als kinematisch zulässiger Verformungszustand wird ein Verschiebungs- und Verzerrungsfeld bezeichnet, das die kinematischen Relationen und Randbedingungen erfüllt.

Eine vollständige Lösung umfasst einen statisch zulässigen Spannungszustand, der die Fliessbedingung nirgends verletzt, und einen damit nach der Theorie des plastischen Potentials verträglichen, kinematisch zulässigen Verformungszustand.

### 2.3.2 Unterer Grenzwertsatz

Der untere oder statische Grenzwertsatz kann wie folgt formuliert werden:

Jede Belastung, zu der sich ein statisch zulässiger Spannungszustand angeben lässt, der die Fliessbedingung nirgends verletzt, liegt nicht höher als die Traglast.

Zum Beweis betrachten wir einen bestimmten Lastfall mit

$$F = Fn \quad (2.64)$$

wobei  $F$  die Belastungsintensität und  $n$  eine bestimmte Einheitsgrösse der verallgemeinerten Lasten bezeichnet. Der Traglast  $F_u$  entspreche der Spannungszustand  $\sigma$  und der Verformungszustand  $\dot{u}$ ,  $\dot{\epsilon}$ . Umgekehrt entspreche dem betrachteten statisch zulässigen Spannungszustand  $\sigma_s$  die Belastungsintensität  $F_s$ . Anwendung von (2.63) mit dem wirklichen Verformungszustand sowohl auf den wirklichen als auch auf den statisch zulässigen Spannungszustand bringt

$$F_u n \cdot \dot{u} - \sigma \cdot \dot{\epsilon} = 0 \quad , \quad F_s n \cdot \dot{u} - \sigma_s \cdot \dot{\epsilon} = 0 \quad (2.65)$$

und aus der Subtraktion der beiden Gleichungen (2.65) folgt

$$(F_u - F_s)n \cdot \dot{u} = (\sigma - \sigma_s) \cdot \dot{\epsilon} \quad (2.66)$$

Da das Skalarprodukt linkerhand in (2.66) als Ausdruck einer wirklichen Arbeit äusserer Kräfte positiv sein muss und jenes rechterhand gemäss (2.34) nicht negativ sein kann, ergibt sich wie behauptet

$$F_u \geq F_s \quad (2.67)$$

### 2.3.3 Oberer Grenzwertsatz

Der obere oder kinematische Grenzwertsatz kann wie folgt formuliert werden:

Jede Belastung, welche aus der Gleichsetzung der Arbeit der äusseren Kräfte bei einem kinematisch zulässigen Verformungszustand mit der zugehörigen Dissipationsarbeit resultiert, liegt nicht tiefer als die Traglast.

Zum Beweis wenden wir (2.63) mit dem kinematisch zulässigen Verformungszustand  $\dot{u}_k$ ,  $\dot{\epsilon}_k$  auf den wirklichen Spannungszustand an:

$$F_u n \cdot \dot{u}_k - \sigma \cdot \dot{\epsilon}_k = 0 \quad (2.68)$$

Gemäss (2.34) und (2.37) ist das zweite Skalarprodukt linkerhand in (2.68) nicht grösser als  $D(\dot{\epsilon}_k)$ , mithin wie behauptet

$$F_u \leq \frac{D(\dot{\epsilon}_k)}{n \cdot \dot{u}_k} = F_k \quad (2.69)$$

Man beachte, dass

$$W = F_k n \cdot \dot{u}_k \quad (2.70)$$

gleich der Arbeit der äusseren Kräfte beim betrachteten kinematisch zulässigen Verformungszustand ist.

### 2.3.4 Verträglichkeitssatz

Aufgrund der beiden Grenzwertsätze kann ein bei vielen Anwendungen äusserst nützlicher Satz formuliert werden:

Jede Belastung, zu der eine vollständige Lösung angegeben werden kann, ist eine Traglast.

Der Vorteil dieses Satzes liegt darin, dass die unter Umständen recht aufwendige Berechnung gemäss (2.69) nicht durchgeführt zu werden braucht, wenn die Existenz eines mit dem betrachteten statisch zulässigen Spannungszustand im Sinne der Theorie des plastischen Potentials ver-

träglichen, kinematisch zulässigen Verformungszustandes nachgewiesen ist.

### 2.3.5 Folgerungen aus den Grenzwertsätzen

Aus den Grenzwertsätzen ergeben sich einige für die Anwendung interessante Folgerungen:

1. Eigenspannungen haben keinen Einfluss auf die Traglast, wenn sie die Geometrie des Systems nicht um mehr als Größen zweiter Ordnung verändern.
2. Durch Erhöhen der Fliessgrenze oder Hinzufügen von gewichtslosem Material wird die Traglast nicht erniedrigt.
3. Die auf der Grundlage einer der wirklichen Fliessfläche umschriebenen (eingeschriebenen) Fliessfläche berechneten Traglasten sind obere (untere) Grenzwerte der wirklichen Traglast.
4. Die Traglast ist eindeutig bestimmt.
5. In der vollständigen Lösung ist der Verformungszustand nicht eindeutig bestimmt.
6. In der vollständigen Lösung sind die Spannungen in den starr bleibenden (plastisch sich nicht verformenden) Bereichen nicht eindeutig bestimmt, sondern es können im allgemeinen verschiedene statisch zulässige Spannungszustände auftreten.
7. Treten in einer vollständigen Lösung in einem bestimmten Bereich plastische Verformungen auf, so sind die zugehörigen Spannungen bei stark konvexer Fliessgrenze eindeutig bestimmt. Bei schwach konvexer Fliessgrenze sind verschiedene Spannungszustände möglich, die Punkten auf den zugeordneten Hyperebenen oder -geraden der Fliessfläche entsprechen.

### 2.3.6 Statische und kinematische Methoden

Die Traglastverfahren beruhen auf der aus (2.67) und (2.69) folgenden Einschränkung

$$F_s \leq F_u \leq F_k \quad (2.71)$$

der Traglast.

Nach der statischen Methode werden verschiedene mögliche Gleichgewichtszustände unabhängig von kinematischen Erwägungen untersucht. Sie liefert Aussagen über die erforderlichen Tragwiderstände an jeder Stelle eines Tragwerks und eignet sich deshalb besonders für die Bemessung. Der Kraftfluss kann bis ins Detail verfolgt werden, und eine entsprechende konstruktive Durchbildung wird ermöglicht.

Mit der kinematischen Methode werden verschiedene mögliche Bruchmechanismen unabhängig von Überlegungen des Kraftflusses untersucht. Im Gegensatz zur statischen Methode fallen nur die Tragwiderstände an den Stellen plastischer Verformung in Betracht. Hinsichtlich einer Bemessung liefert deshalb die kinematische im Vergleich zur statischen Methode keine gleichwertigen Aussagen. Allerdings ist im allgemeinen auch der mit der Anwendung der kinematischen Methode verbundene Aufwand geringer. Die kinematische Methode eignet sich deshalb in erster Linie für die Überprüfung bestehender oder im Entwurf vorliegender Konstruktionen. In einfachen Fällen kann ihre Anwendung aber auch bei der Bemessung sinnvoll sein. Schliesslich ergibt sich aus einer systematischen, dann aber auch entsprechend aufwendigen Anwendung der kinematischen Methode ein zur statischen Methode in jeder Hinsicht duales Vorgehen.

Die Kunst in der Anwendung der beiden Methoden besteht darin, diese derart einzusetzen, dass sie sich gegenseitig ergänzen und bei möglichst geringem Aufwand zu einer der jeweiligen Problemstellung angemessenen Lösung führen.

## 2.4 Anwendung auf Stabtragwerke

### 2.4.1 Einfacher Balken

Der in Bild 2.19 (a) dargestellte, einseitig auskragende einfache Balken wird zwischen den Auflagern und im Kragbereich von gleichmässig verteilten Lasten  $q_1$  und  $q_2$  belastet, die sich unabhängig zwischen den Grenzwerten  $q_{1\ min}$  und  $q_{1\ max}$  bzw.  $q_{2\ min}$  und  $q_{2\ max}$  verändern können. Die Bestimmung der in Bild 2.19 (b) aufgetragenen Biegemomente bietet im vorliegenden statisch bestimmten Fall keine Schwierigkeiten, und eine entsprechende Bemessung wäre ohne weiteres möglich.

Bild 2.19 (c) zeigt vier mögliche Bruchmechanismen mit je einem plastischen Gelenk, wobei der Mechanismus 3 den Grenzfall zwischen Mechanismus 2 ( $\eta = 1$ ) und Mechanismus 4 ( $\zeta = 1$ ) darstellt. Die nach dem oberen Grenzwertsatz für die vier Mechanismen aufzustellenden Gleichungen  $W = D$  lauten der Reihe nach:

$$\begin{aligned} \frac{q_1 l_1}{2} - \frac{q_2 l_2^2}{2l_1(1-\xi)} &= M_{u1} \left[ \frac{1}{\xi l_1} + \frac{1}{l_1(1-\xi)} \right] \\ -\frac{q_1 l_1}{2} + \frac{q_2 l_2^2}{2l_1(1-\eta)} &= M_{u2} \left[ \frac{1}{\eta l_1} + \frac{1}{l_1(1-\eta)} \right] \\ \frac{q_2 l_2}{2} &= M_{u3} \frac{1}{l_2} \\ \frac{q_2 \zeta l_2}{2} &= M_{u4} \frac{1}{\zeta l_2} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Man bemerkt, dass die absolute Grösse der (als infinitesimal klein angenommenen) Verformungen keine Rolle spielt. Wesentlich sind nur die relativen Verformungen der einzelnen Systemteile zueinander.

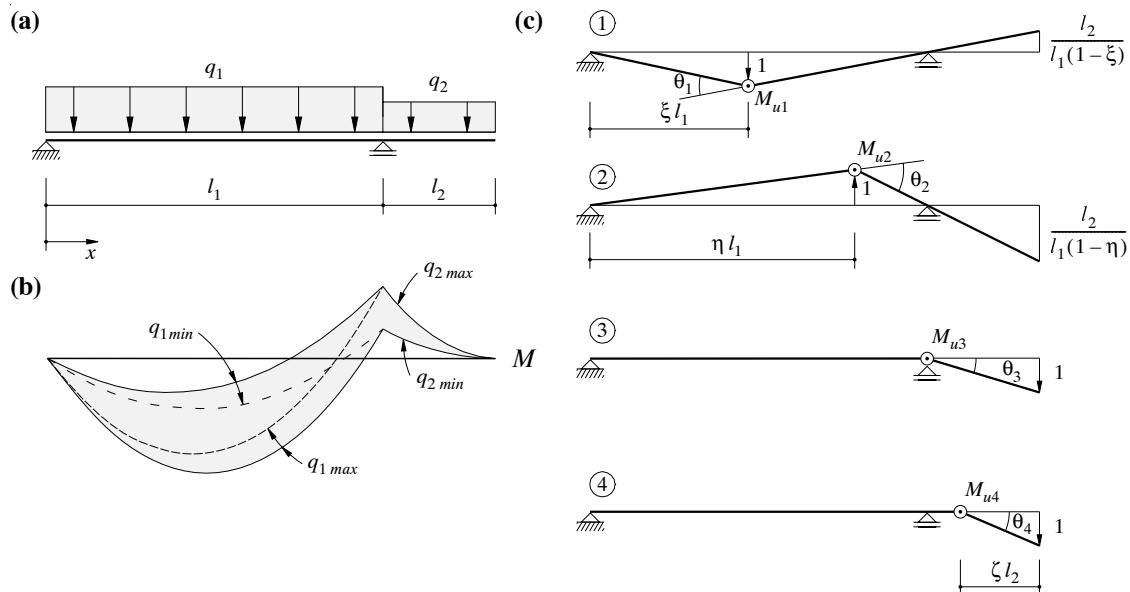


Bild 2.19 – Einfacher Balken: (a) Bezeichnungen; (b) Biegemomente; (c) Bruchmechanismen.

Die in Bild 2.19 (b) dargestellten Grenzwertlinien der Biegemomente können auch durch Variation von  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  sowie Einsetzen der entsprechenden Extremwerte von  $q_1$  und  $q_2$  in (2.72) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} M_{u1} &= \frac{q_{1\ max} l_1^2 \xi (1 - \xi)}{2} - \frac{q_{2\ min} l_2^2 \xi}{2} \\ M_{u2} &= -\frac{q_{1\ min} l_1^2 \eta (1 - \eta)}{2} + \frac{q_{2\ max} l_2^2 \eta}{2} \\ M_{u4} &= \frac{q_{2\ max} l_2^2 \zeta^2}{2} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Die systematische Anwendung der kinematischen Methode liefert also dasselbe Resultat wie das im vorliegenden Fall viel einfacher statische Vorgehen.

## 2.4.2 Durchlaufträger

Bei Durchlaufträgern können die Biegemomente beispielsweise aufgrund einer linear elastischen Berechnung ermittelt werden. Bei der Bemessung können dann für jeden einzelnen Lastfall oder für alle Lastfälle gesamthaft bestimmte Zwängungsmomente überlagert werden, was einer Verschiebung der Schlusslinie der Momenten-Diagramme entspricht. Dies ist in den Bildern 2.20 (a) und (b) für Rand- und Innenfelder illustriert. Die resultierenden Momente  $M$  ergeben sich aus den initial ermittelten Momenten  $M_0$  durch Überlagerung der (im allgemeinen linear veränderlichen) Zwängungsmomente  $\Delta M$ .

Die Bilder 2.20 (a) und (b) zeigen auch verschiedene mögliche Bruchmechanismen, die analog zu Bild 2.19 (c) analysiert werden könnten. Ausser den “gewöhnlichen” Mechanismen 1 mit plastischen Gelenken bei den Auflagern und im Bereich der Feldmitten sind die Mechanismen 2 bis 4 mit plastischen Gelenken im Bereich der Momentennullpunkte besonders zu beachten. Da die Stahlbetonbauweise eine praktisch stufenlose Anpassung des Biegewiderstandes an die Momentenlinie erlaubt, wird im Bereich der Momentennullpunkte oft nur wenig Längsbewehrung eingelegt, und es besteht die Gefahr, dass diese zu kurz abgestuft ist. Der Einfluss der Querkraft verschärft diesen Effekt noch, da zu deren Aufnahme eine zusätzliche Längsbewehrung erforderlich ist, vgl. Kapitel 3.

Bild 2.20 (c) zeigt, wie eine Momentendeckungslinie im Bereich einer Bewehrungsabstufung konstruiert werden kann. Der zum Biegewiderstand  $M_{u1}$  einer durchlaufenden Bewehrung 1 hinzukommende Widerstand  $M_{u2}$  der abgestuften Bewehrung 2 entwickelt sich über deren Verankerungslänge  $l_{b2}$  linear. Der Vergleich mit dem aufzunehmenden Moment  $M_{u\ req}$  lässt allfällige kritische Stellen erkennen.

Die Zwängungsmomente  $\Delta M$  leisten an den Bruchmechanismen insgesamt keine Arbeit. Der Zwängungszustand entspricht einem Gleichgewichtszustand ohne äussere Kräfte, und da die Arbeit der äusseren Kräfte verschwindet, muss bei jedem virtuellen Verformungszustand nach dem Prinzip der virtuellen Arbeiten auch die Arbeit der inneren Kräfte verschwinden. Analog zu den Überlegungen im Zusammenhang mit (2.14) bemerkt man damit, dass der Eigenspannungszustand  $\Delta M$  zum Lastspannungszustand  $M_0$  (oder  $M$ ) orthogonal ist, und dass die Traglasten unter den gemachten Voraussetzungen unabhängig von Zwängungen sind, vgl. Folgerung 1 in Kapitel 2.3.5.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass sich recht unterschiedliche Bemessungen ergeben können, je nachdem, ob für jeden einzelnen Lastfall oder gesamthaft für alle Lastfälle eine Momentenumla-

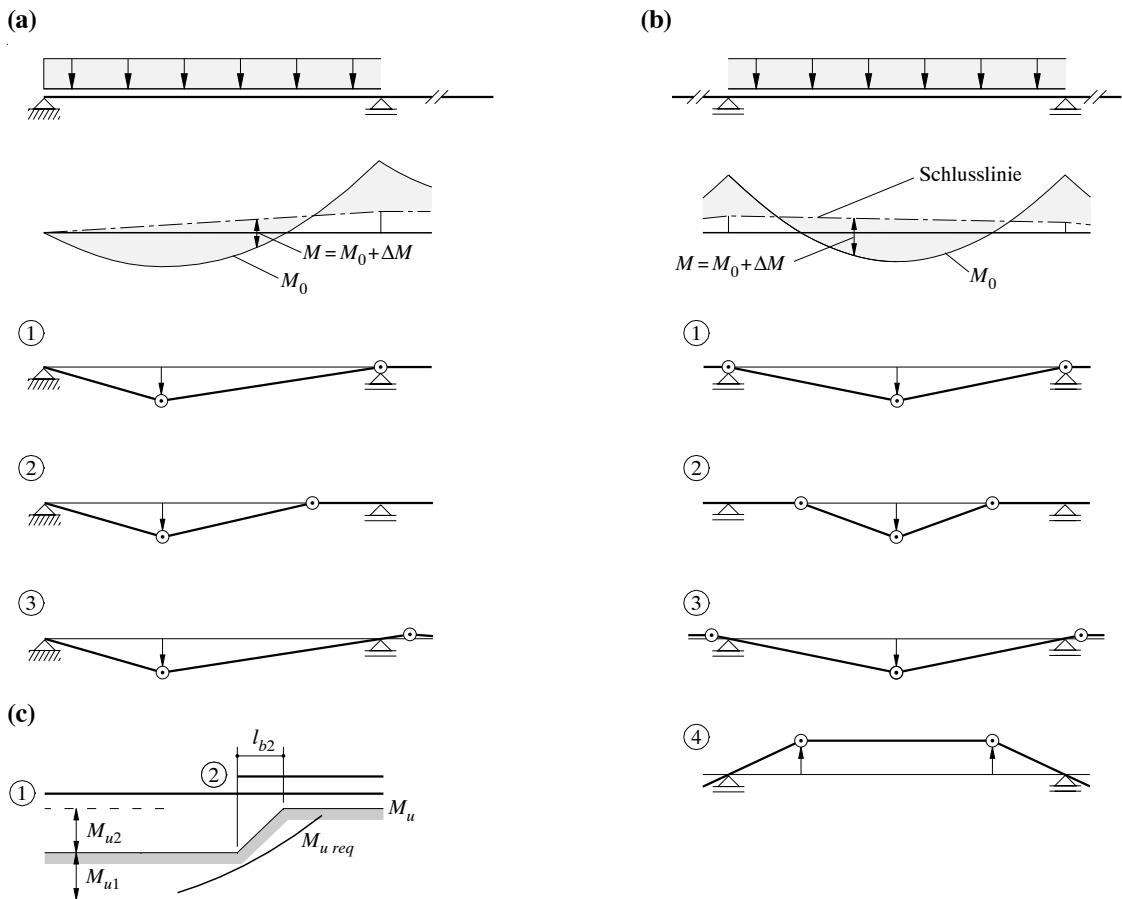


Bild 2.20 – Durchlaufträger: (a) Randfeld; (b) Innenfeld; (c) Abstufung der Längsbewehrung.

gerung vorgenommen wird. Im zweiten Fall ergibt sich im allgemeinen ein geringerer Anspruch an das Verformungsvermögen der einzelnen plastischen Gelenke. Zudem kann nach dem am Ende von Kapitel 2.1.1 formulierten Satz 4 davon ausgegangen werden, dass sich das Tragwerk nach einer elastisch-plastischen Anpassungsphase (“Einspielphase”) bei wiederholter Belastung innerhalb der gegebenen Lastgrenzwerte rein elastisch verhalten wird, wogegen dies im ersten Fall nicht sichergestellt ist.

### 2.4.3 Rahmen

Zum Abschluss dieses Kapitels wird der in Bild 2.21 dargestellte, ebene Rahmen betrachtet, der durch zwei unabhängige Einzelkräfte  $Q_1$  und  $Q_2$  belastet wird. Die beiden Stiele und der Riegel des Rahmens haben einen konstanten Biegewiderstand  $M_u$ .

Plastische Gelenke können an den fünf in Bild 2.21 identifizierten Stellen auftreten, nämlich bei den Krafteinleitungsstellen 1 und 3, bei den Rahmenecken 2 und 4 und bei der Einspannung 5. Das zweifach statisch unbestimmte System erfordert im Maximum drei plastische Gelenke, um zu einem Bruchmechanismus zu werden. Da an fünf Stellen plastische Gelenke auftreten können und das System zweifach statisch unbestimmt ist, können  $5 - 2 = 3$  voneinander unabhängige Grundmechanismen unterschieden werden, z.B. zwei Balkenmechanismen mit plastischen Gelenken bei 1 und 2 bzw. 2, 3 und 4 und ein Verschiebemechanismus mit plastischen Ge-

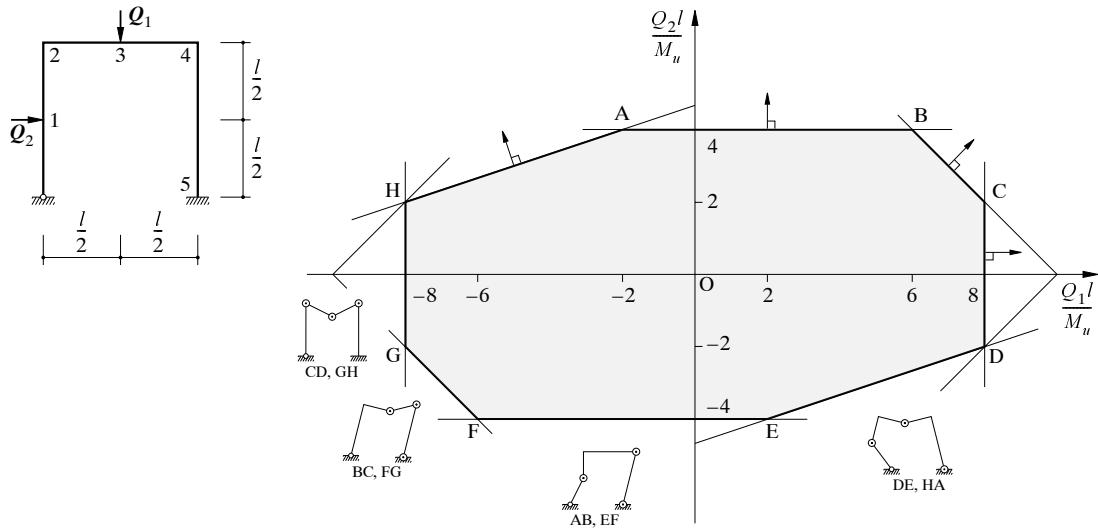


Bild 2.21 – Ebener Rahmen unter zweiparametrischer Belastung.

lenken bei 2, 4 und 5. Systematische Betrachtung dieser Grundmechanismen und ihrer möglichen Kombinationen führt zu streifenförmigen Bereichen in der  $Q_1$ - $Q_2$ -Ebene, und als deren Durchschnitt erhält man das in Bild 2.21 dargestellte Fliesspolygon ABCDEFGH. Wie man sich leicht überzeugt, gilt die Theorie des plastischen Potentials gemäss (2.41) auch in der Ebene der verallgemeinerten Lasten  $Q_1$  und  $Q_2$ .

Das Fliesspolygon könnte statt kinematisch “von aussen” auch auf rein statischem Wege “von innen” gewonnen werden. Darauf soll hier aber verzichtet werden.

Für den Fall einer einparametrischen Belastung mit festem Verhältnis  $Q_1/Q_2$  geht man zweckmässigerweise von der Betrachtung möglicher Bruchmechanismen und der Berechnung der zugehörigen oberen Grenzwerte der Traglast aus. Für den Mechanismus, der den niedrigsten oberen Grenzwert liefert, kann anschliessend mit der sogenannten Plastizitätskontrolle geprüft werden, ob ein mit dem Mechanismus verträglicher Spannungszustand vorliegt, der die Fliessbedingung nirgends verletzt. Ist dies der Fall, so ist die Traglast gefunden.



### 3 Bruchwiderstand von Scheiben

*Manuel Alvarez*

#### 3.1 Einleitung

Als Scheiben bezeichnet man ebene Tragwerke, welche nur durch in ihrer Ebene wirkende Kräfte belastet werden und deren Mittelebenen bei der Formänderung eben bleiben. Es wird vorausgesetzt, dass die Formänderung quer zur Scheibebene unbehindert ist und dass die Spannungen gleichförmig über die Scheibendicke  $h$  verteilt sind. Folglich herrscht in jedem Punkt einer Scheibe ein über die Scheibendicke konstanter ebener Spannungszustand mit  $\sigma_y \equiv \sigma_2 \equiv 0$ , siehe Bild 3.1 (a). Die Spannungsresultierenden  $n_x = h\sigma_x$ ,  $n_z = h\sigma_z$ ,  $n_{xz} = h\tau_{xz}$ ,  $n_{zx} = h\tau_{zx}$  werden als Scheiben- oder Membrankräfte bezeichnet.

In der Betonbauweise spielen Scheiben in der Form von Wänden und insbesondere als Teile zusammengesetzter Querschnitte (profilierte Träger, Hohlkastenträger, Träger mit offenen Querschnitten, Faltwerke) eine grosse Rolle. Ferner lässt sich die Tragwirkung von Platten und weitgehend auch jene von Schalen durch Anwendung von Sandwichmodellen auf das Tragverhalten von Scheiben zurückführen.

Im ungerissenen Zustand können die bekannten Beziehungen für den ebenen Spannungszustand elastischer Körper angewendet werden, Kapitel 3.2. Meist vernachlässigt man dabei den Beitrag der Bewehrung und rechnet mit reinen Betonquerschnittswerten. Der Spannungszustand in der Scheibe kann für einfache Probleme analytisch bestimmt werden, Kapitel 3.2.6. Für allgemeine Fragestellungen wird er unter Anwendung der Methode der finiten Elemente auf numerischem Wege ermittelt.

Nach dem Reissen bildet sich im Beton näherungsweise ein einachsiger Druckspannungszustand aus. Bruchwiderstand und Bruchmechanismen von Scheibenelementen können mit entsprechenden Fliessbedingungen erfasst werden, Kapitel 3.3. Das Verformungsverhalten von Scheiben kann mit Hilfe des Gerissenen Scheibenmodells oder der verwandten Druckfeldtheorien beschrieben werden, siehe Kapitel 7.

Für praktische Anwendungen empfiehlt sich in der Bemessung meist die Verwendung von Spannungsfeldern beziehungsweise von Fachwerkmodellen, Kapitel 3.4, welche eine Anwendung des unteren oder statischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie darstellen. Dabei ist es in gewissen Fällen hilfreich, die Resultate einer linear elastischen Berechnung (mit der Methode der finiten Elemente) zu berücksichtigen, um den generellen Kraftfluss und mögliche Umlagerungen der Scheibenkräfte zu erkennen beziehungsweise abzuschätzen.

Bruchmechanismen, Kapitel 3.5, als Anwendung des oberen oder kinematischen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie, eignen sich für die Beurteilung des Tragwiderstandes bestehender Tragwerke oder für die Überprüfung von mit Finite Element Programmen durchgeföhrten Bemessungen.

## 3.2 Statische und kinematische Beziehungen

### 3.2.1 Gleichgewichtsbedingungen

Für die am infinitesimalen Scheibenelement in Bild 3.1 (a) angreifenden Spannungen gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

und Momentengleichgewicht verlangt  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ . Die Gleichgewichtsbedingungen (3.1) stellen ein System partieller Differentialgleichungen für die ortsabhängigen Funktionen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $q_x$ ,  $q_z$  dar und bringen die Körperkräfte  $q$  mit den Spannungen  $\sigma$ ,  $\tau$  in Verbindung.

### 3.2.2 Spannungstransformation

Gleichgewicht an den in Bild 3.1 (b) dargestellten Scheibenelementen liefert

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_z \sin^2 \varphi + 2\tau_{xz} \sin \varphi \cos \varphi \\ \sigma_t &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_z \cos^2 \varphi - 2\tau_{xz} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_{nt} &= (\sigma_z - \sigma_x) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xz} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Unter Verwendung der trigonometrischen Beziehungen  $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ ,  $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$  erhält man aus (3.2)

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xz} \sin 2\varphi \\ \sigma_t &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \cos 2\varphi - \tau_{xz} \sin 2\varphi \\ \tau_{tn} &= -\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\varphi + \tau_{xz} \cos 2\varphi\end{aligned}\tag{3.3}$$

Die Beziehungen (3.2) und (3.3) stellen Transformationsformeln dar, welche der Bestimmung der an Flächenelementen mit gegenüber den Bezugsachsen  $x$  und  $z$  um einen beliebigen Winkel  $\varphi$  gedrehten äusseren Normalen  $n$ ,  $t$  wirkenden Normal- und Schubspannungen  $\sigma_n$ ,  $\sigma_t$  und  $\tau_{nt} = \tau_{tn}$  dienen. Die Transformationsformeln lassen sich mit Hilfe des sogenannten Mohrschen Kreises graphisch interpretieren, siehe Bild 3.1 (c). Den Spannungen an den Flächenelementen mit äusserer Normalen  $x$  beziehungsweise  $z$  entsprechen die Koordinaten der Bildpunkte X und Z, und einer Drehung der Flächenelemente um einen Winkel  $\varphi$  in der physikalischen Ebene entspricht eine Drehung um einen Winkel  $2\varphi$  in der Spannungsebene. Demzufolge enthält der Mohrsche Kreis die Bildpunkte der Spannungen an sämtlichen Flächenelementen senkrecht zur (spannungsfreien) Scheibenebene.

Für den Winkel  $\varphi = \varphi_1$ , mit

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} \right)\tag{3.4}$$

verschwinden die Schubspannungen,  $\tau_{nt} = \tau_{tn} = 0$ , und die Normalspannungen  $\sigma_n$  und  $\sigma_t$  wer-

den extremal, das heisst nehmen die Werte der sogenannten Hauptspannungen

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}}{2} \quad (3.5)$$

an. Die zugehörigen Normalenrichtungen  $n(\varphi_1)$  und  $t(\varphi_1)$  werden als Hauptachsen des ebenen Spannungszustandes bezeichnet.

Schliesslich stellt man fest, dass die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)} &= \sigma_x + \sigma_z = \sigma_n + \sigma_t = \sigma_1 + \sigma_2 \\ \sigma_{(2)} &= -\sigma_x \sigma_z + \tau_{xz}^2 = -\sigma_n \sigma_t + \tau_{nt}^2 = -\sigma_1 \sigma_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

von der Drehung des Koordinatensystems unabhängig, das heisst invariant sind.

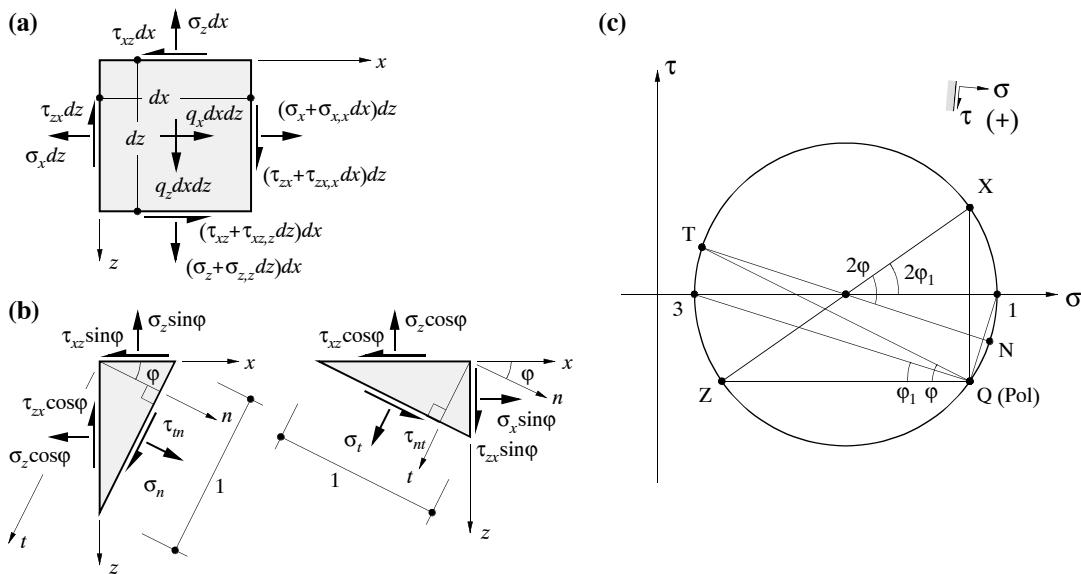


Bild 3.1 – Scheibenelement: (a) Spannungen; (b) Spannungstransformation; (c) Mohrscher Kreis für Spannungen. N.B.:  $,_x$  und  $,_z$  stellen partielle Ableitungen nach den entsprechenden Variablen dar.

### 3.2.3 Kinematische Beziehungen

Bild 3.2 (a) zeigt Verschiebungen und Formänderungen eines infinitesimalen Scheibenelements. Unter Voraussetzung kleiner Deformationen gelten die kinematischen Beziehungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.7)$$

welche die Verschiebungen  $u, w$  mit den Verzerrungen  $\varepsilon_x, \varepsilon_z$  (Dehnungen) und  $\gamma_{xz}$  (Schiebung) in Verbindung bringen. Die Beziehungen (3.7) stellen ein System partieller Differentialgleichungen für die ortsabhängigen Funktionen  $\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz}, u, w$  dar.

Bei gegebenen Verschiebungen können die Verzerrungen mit den kinematischen Beziehungen (3.7) ermittelt werden, Umkehrt können  $u$  und  $w$  durch Integration von (3.7) bestimmt werden, wobei die Verzerrungen die Verträglichkeitsbedingung

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (3.8)$$

erfüllen müssen, die aus (3.7) folgt.

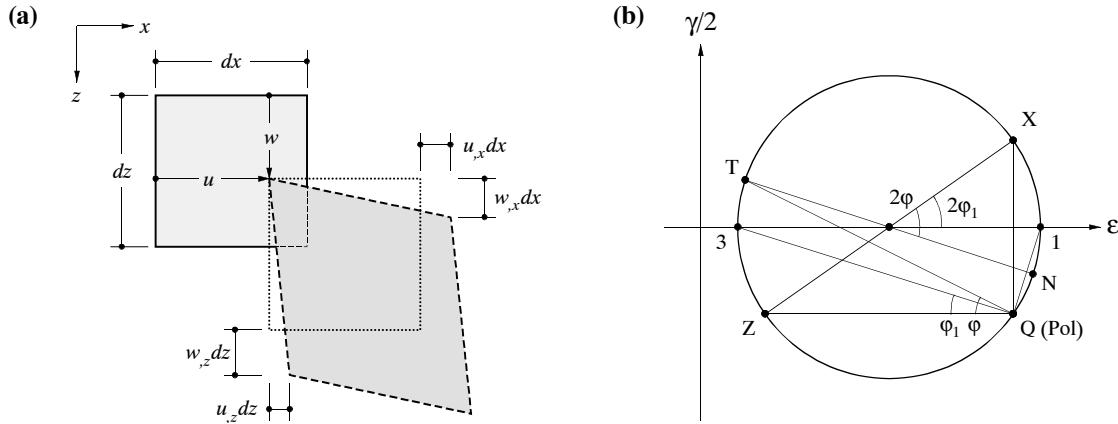


Bild 3.2 – Scheibenelement: (a) Verschiebungen und Verzerrungen; (b) Mohrscher Kreis für Verzerrungen.

### 3.2.4 Transformation der Verzerrungen

Bei Drehung des Koordinatensystems  $x, z$  um einen Winkel  $\varphi$  lassen sich für die auf die Achsen  $n, t$  bezogenen Verzerrungen  $\varepsilon_n, \varepsilon_t, \gamma_{nt}$  die Transformationsformeln

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \varepsilon_x \cos^2 \varphi + \varepsilon_z \sin^2 \varphi + \gamma_{xz} \sin \varphi \cos \varphi \\ \varepsilon_t &= \varepsilon_x \sin^2 \varphi + \varepsilon_z \cos^2 \varphi - \gamma_{xz} \sin \varphi \cos \varphi \\ \gamma_{tn} &= 2(\varepsilon_z - \varepsilon_x) \sin \varphi \cos \varphi + \gamma_{xz} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{aligned} \quad (3.9)$$

herleiten. Der Vergleich der Beziehungen (3.9) und (3.2) zeigt, dass sich  $\varepsilon_n, \varepsilon_t, \gamma_{nt}/2$  gleich transformieren wie  $\sigma_n, \sigma_t, \tau_{nt}$ . Dementsprechend lassen sich die Beziehungen (3.9) anhand eines Mohrschen Kreises für Verzerrungen graphisch interpretieren, siehe Bild 3.2 (b).

Die Hauptachsen des Verzerrungszustandes ( $\gamma_{nt} = \gamma_{tn} = 0$ ) ergeben sich mit dem Winkel

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_{xz}}{\varepsilon_x - \varepsilon_z} \right) \quad (3.10)$$

und die zugehörigen Hauptdehnungen betragen

$$\varepsilon_{1,3} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{2} \pm \frac{\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_z)^2 + \gamma_{xz}^2}}{2} \quad (3.11)$$

Die zu den Beziehungen (3.6) analogen Invarianten des Verzerrungstensors lauten

$$\begin{aligned} \varepsilon_{(1)} &= \varepsilon_x + \varepsilon_z = \varepsilon_n + \varepsilon_t = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \varepsilon_{(2)} &= -\varepsilon_x \varepsilon_z + \gamma_{xz}^2 / 4 = -\varepsilon_n \varepsilon_t + \gamma_{nt}^2 / 4 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

### 3.2.5 Statische und kinematische Randbedingungen

An den Rändern einer Scheibe müssen die für das betrachtete System gegebenen statischen und kinematischen Randbedingungen eingehalten sein. Mit den statischen Randbedingungen wird sichergestellt, dass Scheibenspannungen (beziehungsweise -kräfte), welche am Scheibenrand an Flächenelementen tangential zum Rand auftreten, statisch äquivalent zu allfällig an dieser Stelle angreifenden äusseren Spannungen (beziehungsweise Kräften) – Lasten oder Auflagerkräfte – sind; demzufolge müssen an einem freien, unbelasteten Rand die Spannung normal zum Rand und die Schubspannungen verschwinden. Zu beachten ist, dass die statischen Randbedingungen im Falle bewehrter Scheiben für die totalen Scheibenspannungen zu formulieren sind, welche aus der Summe der Beton- und Stahlspannungen gebildet werden. Kinematische Randbedingungen sind durch die behinderten (beziehungsweise nach Richtung und Betrag bestimmten) Verschiebungen der Auflager gegeben.

### 3.2.6 Ayrische Spannungsfunktion

Für linear elastisches Verhalten gilt

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - v\sigma_z) \quad \varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - v\sigma_x) \quad \gamma_{xz} = \frac{2(1+v)\tau_{xz}}{E} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (3.13)$$

wobei  $E$  = Elastizitätsmodul und  $G = 2(1+v)/E$  = Schubmodul. Einsetzen der Stoffgesetze (3.13) in die Verträglichkeitsbedingung (3.8) und Verknüpfung mit den unter Vernachlässigung von Körperkräften aus (3.1) folgenden Gleichgewichtsbedingungen führt zu

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)(\sigma_x + \sigma_z) = \Delta(\sigma_x + \sigma_z) = 0 \quad (3.14)$$

Für die Spannungsfunktion  $F = F(x, z)$  wird der Ansatz

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \quad (3.15)$$

gewählt. (3.15) befriedigt die (unter der Voraussetzung  $q = 0$  geltenden) Gleichgewichtsbedingungen (3.1). Einsetzen von (3.15) in (3.14) liefert die Bipotentialgleichung

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial z^4} = \Delta \Delta F = 0 \quad (3.16)$$

welche zur Bestimmung des Spannungs- und Verzerrungszustandes – bei Berücksichtigung der statischen und kinematischen Randbedingungen – eingesetzt werden kann. Gleichung (3.16) hat unendlich viele Lösungen; die Schwierigkeit besteht im Auffinden passender Lösungen  $F = F(x, z)$ , das heisst solcher, welche die Randbedingungen des untersuchten Systems befriedigen. Lösungen von (3.16) sind beispielsweise  $F = x, x^2, x^3, z, z^2, z^3, xz, x^2z, x^3z, xz^2, xz^3$  und ihre Linearkombinationen.

### 3.3 Fliessbedingungen

#### 3.3.1 Orthogonale Bewehrung

##### Fliessfigur und Fliessregimes

Bild 3.3 (a) zeigt ein orthogonal bewehrtes Stahlbeton-Scheibenelement, welches durch die Scheibenkräfte je Längeneinheit  $n_x$ ,  $n_z$ ,  $n_{xz} = n_{zx}$  (in  $\text{kNm}^{-1}$ ) beansprucht wird. Aus Gleichgewichtsgründen gilt

$$\begin{aligned} n_x &= n_{xc} + n_{xs} \\ n_z &= n_{zc} + n_{zs} \\ n_{xz} &= n_{xzc} + n_{xzs} \end{aligned} \quad (3.17)$$

wobei die Fusszeiger  $c$  und  $s$  Kräfte im Beton beziehungsweise in den Stahleinlagen bezeichnen.

Der Beton wird als homogenes, isotropes, ideal plastisches Material mit verschwindender Zugfestigkeit,  $f_{ct} = 0$ , angenommen, welches der Fliessbedingung

$$-f_c \leq \sigma_c \leq 0 \quad (3.18)$$

folgt. Im  $n_{xc}$ - $n_{zc}$ - $n_{xzc}$ -Spannungsraum ergibt sich aus der Fliessbedingung (3.18) die in Bild 3.3 (c) dargestellte, aus zwei elliptischen Kegeln zusammengesetzte Fliessfigur

$$n_{xzc}^2 = n_{xc} n_{zc}, \quad n_{xzc}^2 = (hf_c + n_{xc})(hf_c + n_{zc}) \quad (3.19)$$

Die Bewehrung wird mit unendlich fein verteilten Einzelfasern mit verschwindend kleinem Durchmesser und ideal plastischem Materialverhalten idealisiert, die in starrem Verbund zum umgebenden Beton stehen und in denen ein einachsiger Spannungszustand in Faserrichtung herrscht. Die angenommene Fliessbedingung  $-f'_y \leq \sigma_s \leq f_y$  führt zu der in Bild 3.3 (b) dargestellten rechteckigen Fliessfigur im  $n_{xs}$ - $n_{zs}$ - $n_{xzs}$ -Spannungsraum.

Die in Bild 3.3 (d) dargestellte Fliessfigur des Stahlbeton-Scheibenelements erhält man durch Linearkombination der gemäss den Bildern 3.3 (c) und (b) für den Beton und die Bewehrung möglichen Spannungszustände. Wie in Kapitel 2 dargelegt, kann die Fliessfigur des Stahlbetonelements geometrisch konstruiert werden, indem die Fliessfigur des Betons translatorisch derart verschoben wird, dass ihr Ursprung alle Lagen auf der Fliessgrenze der Bewehrung einnimmt; die Umhüllende aller verschobenen Lagen entspricht der Fliessfigur des Stahlbetonelements. Die einzelnen Flächenstücke der Fliessfigur genügen den Bedingungen

$$\begin{aligned} Y_1 &= n_{xz}^2 - (a_{sx}f_{yx} - n_x)(a_{sz}f_{yz} - n_z) = 0 \\ Y_2 &= n_{xz}^2 - (hf_c - a_{sz}f_{yz} + n_z)(a_{sz}f_{yz} - n_z) = 0 \\ Y_3 &= n_{xz}^2 - (a_{sx}f_{yx} - n_x)(hf_c - a_{sx}f_{yx} + n_x) = 0 \\ Y_4 &= n_{xz}^2 - (hf_c/2)^2 = 0 \\ Y_5 &= n_{xz}^2 + (a_{sx}f'_{yx} + n_x)(hf_c + a_{sx}f'_{yx} + n_x) = 0 \\ Y_6 &= n_{xz}^2 + (hf_c + a_{sz}f'_{yz} + n_z)(a_{sz}f'_{yz} + n_z) = 0 \\ Y_7 &= n_{xz}^2 - (hf_c + a_{sx}f'_{yx} + n_x)(hf_c + a_{sz}f'_{yz} + n_z) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

wobei  $a_{sx} = A_{sx}/s_x$ ,  $a_{sz} = A_{sz}/s_z$  (in m) die Bewehrungsflächen je Längeneinheit in  $x$ - und  $z$ -Richtung bezeichnen und der Kopfzeiger ' für Fliessen der betreffenden Bewehrung auf Druck steht.

Die den Beziehungen (3.20) entsprechenden, in Bild 3.3 (e) eingezeichneten Fliessregimes charakterisieren unterschiedliche Brucharten des Scheibenelements. Im Fliessregime 1 fliessen beide Bewehrungslagen auf Zug,  $\sigma_{sx} = f_{yx}$ ,  $\sigma_{sz} = f_{yz}$ , während die Betonhauptdruckspannung Werte  $0 \geq \sigma_{c3} \geq -f_c$  annehmen kann; im Regime 2 fliessst die z-Bewehrung auf Zug,  $\sigma_{sz} = f_{yz}$ , und der Beton bricht auf Druck,  $\sigma_{c3} = -f_c$ , während für die x-Bewehrung  $-f'_{yx} \leq \sigma_{sx} \leq f_{yx}$  gilt; Regime 3 ist analog dazu durch  $\sigma_{sx} = f_{yx}$ ,  $\sigma_{c3} = -f_c$ ,  $-f'_{yz} \leq \sigma_{sz} \leq f_{yz}$  gekennzeichnet; im Regime 5 fliessst die x-Bewehrung auf Druck,  $\sigma_{sx} = -f'_{yx}$ , der Beton bricht auf Druck,  $\sigma_{c3} = -f_c$ , und für die z-Bewehrung gilt  $-f'_{yz} \leq \sigma_{sz} \leq f_{yz}$ ; in Regime 6 gilt entsprechend  $\sigma_{sz} = -f'_{yz}$ ,  $\sigma_{c3} = -f_c$ ,  $-f'_{yx} \leq \sigma_{sx} \leq f_{yx}$ ; im Regime 4 wird keine der Bewehrungen massgebend,  $-f'_{yx} \leq \sigma_{sx} \leq f_{yx}$ ,  $-f'_{yz} \leq \sigma_{sz} \leq f_{yz}$ , während der Beton auf Druck bricht,  $\sigma_{c3} = -f_c$ ; schliesslich fliessen im Regime 7 beide Bewehrungen auf Druck,  $\sigma_{sx} = -f'_{yx}$ ,  $\sigma_{sz} = -f'_{yz}$ , der Beton bricht auf Druck,  $\sigma_{c3} = -f_c$ , und die mittlere Betonhauptspannung ist ebenfalls negativ,  $0 \geq \sigma_{c1} \geq -f_c$ .

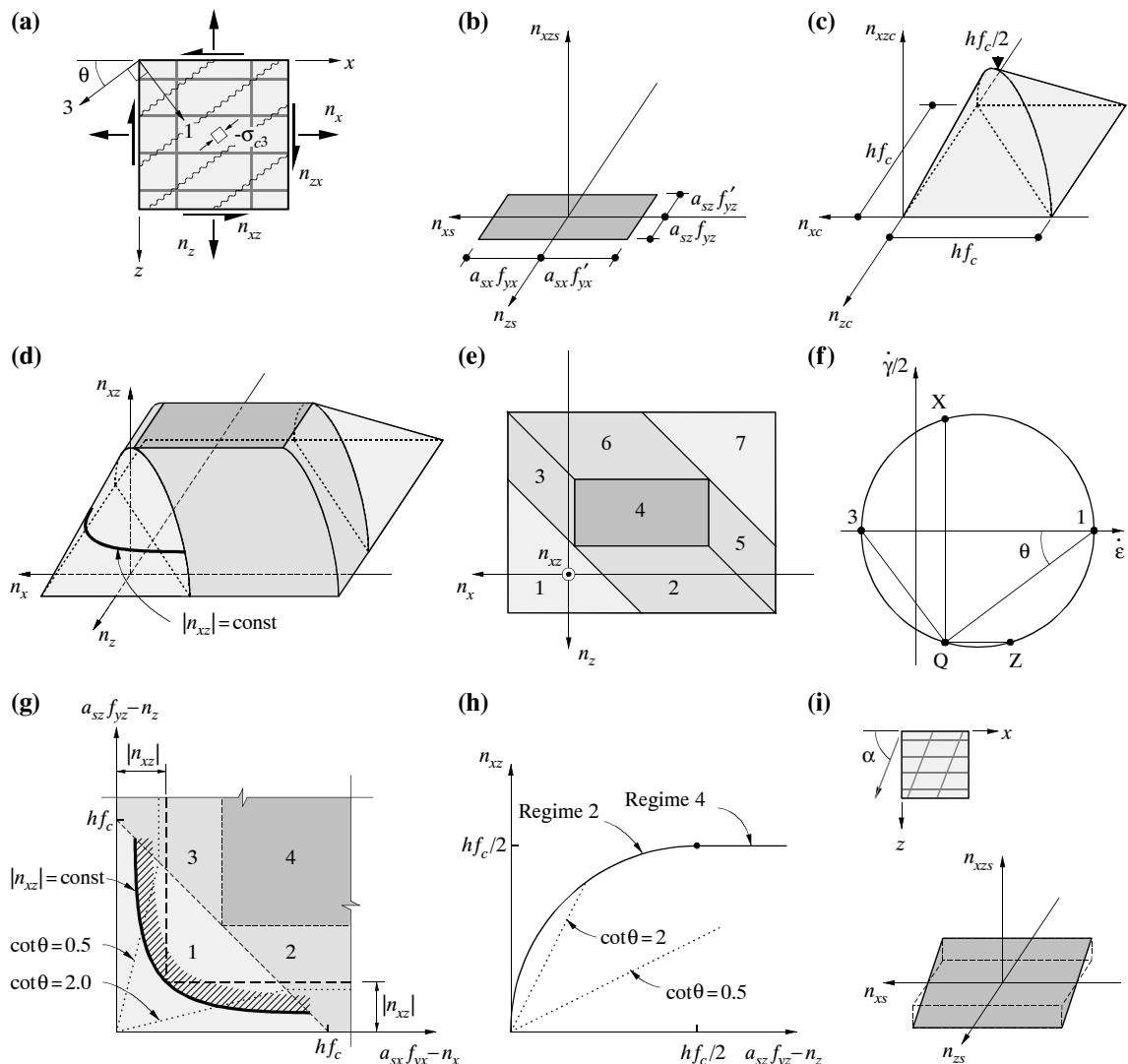


Bild 3.3 – Fliessbedingung für Scheibenelemente: (a) Scheibenelement; (b) Fliessbedingung für Orthogonalbewehrung; (c) Fliessbedingung für Beton; (d) und (e) Fliessbedingung und -regimes für Stahlbeton-Scheibenelement; (f) Mohrscher Kreis für Verzerrungssinkemente; (g) Bemessungsdiagramm für Orthogonalbewehrung; (h) Schubwiderstand bei Stegdruckbruchversagen; (i) Fliessbedingung für schiefe Bewehrung.

## Verzerrungssinkremente und Hauptdruckrichtung

Gemäss dem zugeordneten Fliessgesetz

$$\dot{\varepsilon}_x = \kappa \frac{\partial Y}{\partial n_x}, \quad \dot{\varepsilon}_z = \kappa \frac{\partial Y}{\partial n_z}, \quad \dot{\gamma}_{xz} = \kappa \frac{\partial Y}{\partial n_{xz}} \quad (3.21)$$

siehe (2.33) und (2.36), sind die plastischen Verzerrungssinkremente  $\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_z, \dot{\gamma}_{xz}$  proportional zu den Komponenten des Gradienten der Fliessfunktion  $Y$  im betrachteten Punkt der Fliessfigur, wobei  $\kappa$  einen beliebigen, nicht negativen Faktor bezeichnet,  $\kappa \geq 0$ . Für Punkte an den Ecken der Fliessfigur ergeben sich die plastischen Verzerrungssinkremente als eine beliebige nicht negative Linearkombination der für die angrenzenden Teilflächen der Fliessfigur bestimmten Verzerrungssinkremente (3.21); die Richtung des Vektors der Verzerrungssinkremente bleibt bei solchen Punkten innerhalb des zulässigen Winkelbereichs unbestimmt.

Mit Hilfe Mohrscher Kreise für die Verzerrungssinkremente, siehe Bild 3.3 (f), lässt sich die Neigung  $\theta$  der Hauptdruckspannungsrichtung 3 zur  $x$ -Achse bestimmen

$$\cot 2\theta = \frac{\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xz}}, \quad \cot \theta = \frac{\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xz}} + \sqrt{\left(\frac{\dot{\varepsilon}_z - \dot{\varepsilon}_x}{\dot{\gamma}_{xz}}\right)^2 + 1} \quad (3.22)$$

was zu folgenden Ausdrücken in den sieben Fliessregimes führt

$$\begin{aligned} Y_1: \quad & \cot^2 \theta = (a_{sx} f_{yx} - n_x) / (a_{sz} f_{yz} - n_z) \\ Y_2: \quad & \cot^2 \theta = (h f_c - a_{sz} f_{yz} + n_z) / (a_{sz} f_{yz} - n_z) \\ Y_3: \quad & \cot^2 \theta = (a_{sx} f_{yx} - n_x) / (h f_c - a_{sx} f_{yx} + n_x) \\ Y_4: \quad & \cot^2 \theta = 1 \\ Y_5: \quad & \cot^2 \theta = -(a_{sx} f'_{yx} + n_x) / (h f_c + a_{sx} f'_{yx} + n_x) \\ Y_6: \quad & \cot^2 \theta = -(h f_c + a_{sz} f'_{yz} + n_z) / (a_{sz} f'_{yz} + n_z) \\ Y_7: \quad & \cot^2 \theta = (h f_c + a_{sx} f'_{yx} + n_x) / (h f_c + a_{sz} f'_{yz} + n_z) \end{aligned} \quad (3.23)$$

## Bemessung der Bewehrung

Der Bemessung der Bewehrung von Scheibenelementen wird in der Regel das Regime 1 zugrundegelegt, denn es entspricht der in der praktischen Anwendung im allgemeinen erwünschten duktilen Bruchart Fliessen der beiden Bewehrungen vor Betonbruch. Aus der ersten Gleichung (3.20) lassen sich die Bemessungsgleichungen

$$a_{sx} f_{yx} \geq n_x + k |n_{xz}|, \quad a_{sz} f_{yz} \geq n_z + k^{-1} |n_{xz}|, \quad k = \cot \theta \quad (3.24)$$

herleiten. Die Beziehungen (3.24) entsprechen einer Parameter-Darstellung von Kurven mit gleichbleibender Schubbeanspruchung,  $n_{xz} = \text{konstant}$ , auf dem als Regime 1 bezeichneten Flächenstück der Fliessfigur, siehe Bilder 3.3 (d) und (g). In den meisten Normvorschriften werden, der Begrenzung der Neigung des schießen Betondruckfeldes entsprechend, Einschränkungen für  $k = \cot \theta$  festgelegt, zum Beispiel  $0.5 \leq k \leq 2$ , siehe Bild 3.3 (g). In der Bemessungspraxis wird oft  $k = 1$  ( $\theta = 45^\circ$ ) gesetzt, was in jedem Fall eine sichere Bemessung darstellt.

Die Bemessungsgleichungen (3.24) gelten nur für Fälle, in denen der Bruchzustand im Regime 1 eintritt, das heisst solange die Bedingung

$$h f_c \geq a_{sx} f_{yx} + a_{sz} f_{yz} - (n_x + n_z) \quad (3.25)$$

eingehalten ist. Andernfalls liegt – schliesst man die praktisch wenig relevanten Regimes 5 bis 7 aus – eine Bruchart vor, welche ein Versagen des Betons auf Druck beinhaltet, während nur eine (Regimes 2 und 3) oder keine der beiden Bewehrungen (Regime 4) auf Zug fliest. Von praktischer Bedeutung ist insbesondere Regime 2, das in Fällen mit  $a_{sx}f_{yx} - n_x > a_{sz}f_{yz} - n_z$  vorliegt; die zugehörige Bruchart mit Fliessen der  $z$ -Bewehrung und gleichzeitigem Betondruckbruch wird als Stegdruckbruchversagen bezeichnet, und der Schubwiderstand des Scheibenelements lässt sich mit dem in Bild 3.3 (h) dargestellten Viertelkreisbogen angeben.

### 3.3.2 Allgemeine Bewehrungsnetze

Im folgenden werden Fälle mit Bewehrungen, welche von den bisherigen Ausführungen zugrundeliegenden, in  $x$ - und  $z$ -Richtung eingelegten Orthogonalbewehrung abweichen, und die ihnen entsprechenden Fliessfiguren analog Bild 3.3 (b) kurz erläutert. Allgemein erhält man die Fliessfigur eines beliebigen Bewehrungsnetzes als Linearkombination der Fliessfiguren der einzelnen Bewehrungslagen.

Der Spannungszustand in einem aus mehreren, im allgemeinen in den nicht orthogonalen Richtungen  $n_i$  eingelegten Bewehrungslagen bestehenden Bewehrungsnetz lässt sich mit

$$\begin{aligned} n_{xs} &= \sum_i n_{is} \cos^2 \alpha_i \\ n_{zs} &= \sum_i n_{is} \sin^2 \alpha_i \\ n_{xzs} &= \sum_i n_{is} \sin \alpha_i \cos \alpha_i \end{aligned} \quad (3.26)$$

auf das  $x$ - $z$ -Koordinatensystem transformieren, wobei  $\alpha_i$  den Winkel der  $n_i$ -Richtung zur  $x$ -Achse bezeichnet. Mit der für den Bewehrungsstahl angenommenen Fliessbedingung  $-f'_y \leq \sigma_s \leq f_y$  ergibt sich für eine aus zwei schiefwinklig angeordneten Bewehrungslagen bestehende Bewehrung im  $n_{xs}$ - $n_{zs}$ - $n_{xzs}$ -Spannungsraum eine ebene, parallelogrammähnliche, gegenüber der  $n_{xs}$ - $n_{zs}$ -Ebene geneigte Fliessfigur der Bewehrung. Für ein in den Richtungen  $x$  und  $t$  eingelegtes Bewehrungsnetz erhält man die in Bild 3.3 (i) schematisch dargestellte Fliessfigur. Für ein aus drei Bewehrungslagen bestehendes Netz ist die Fliessfigur der Bewehrung ein Parallelepiped, und für noch mehr Bewehrungsrichtungen kann die Fliessfigur wie bereits erwähnt als Linearkombination der Fliessfiguren der einzelnen Bewehrungslagen konstruiert werden.

Die Fliessfiguren der Stahlbeton-Scheibenelemente ergeben sich wiederum als Umhüllende aller verschobenen Lagen, welche durch Translation der Fliessfigur des Betons derart, dass ihr Ursprung alle Lagen auf der Fliessgrenze der Bewehrung einnimmt, erhalten werden. Die mathematische Formulierung solcher Fliessfiguren gestaltet sich ungleich komplizierter als die Beziehungen (3.20) und beschränkt sich deshalb in der Regel auf die Beschreibung der in der praktischen Anwendung massgebenden Fliessregimes.

### 3.3.3 Geschichtliche Hinweise

Fliessbedingungen für Stahlbeton-Scheibenelemente wurden erstmals von Nielsen [77] für isotrope Bewehrung,  $a_{sx} = a_{sz}$ , und Beton mit der Fliessfigur gemäss Bild 3.3 (c) aufgestellt. Müller [73] diskutierte die statischen und kinematischen Bedingungen für die verschiedenen Fliessregimes (3.20) und behandelte Fliessbedingungen für beliebige Bewehrung. Fliessbedingungen für Stahlbeton-Scheibenelemente unter Voraussetzung komplexerer Fliessbedingungen für den Beton, welche dessen Zugfestigkeit oder den festigkeitssteigernden Einfluss einer zweiachsigen Druckbeanspruchung miteinbeziehen, findet man bei Müller [73] und Marti [49].

## 3.4 Spannungsfelder

### 3.4.1 Einleitung

#### Geschichtliche Entwicklung

Die Idee, den Kraftfluss in schubbeanspruchten gerissenen Stahlbetonelementen mit Fachwerkmodellen nachzubilden, geht auf Hennebique, Ritter und Mörsch zurück. Hennebique verwendete im Rahmen der Patentierung einer Vertikalbügelbewehrung eine Fachwerkanalogie zur Berechnung der Bügelkräfte. Ritter diskutierte die  $45^\circ$ -Fachwerkanalogie und empfahl die Durchführung von Versuchen zur Überprüfung der Modellaussagen [87]. Mörsch [72] fand die Fachwerkwirkung anhand eigener und fremder Versuche bestätigt. Gestützt auf Beobachtungen des Risseverhaltens der Versuchskörper erörterte er Modellvorstellungen der direkten Abstützung der Lasten auf die Auflager, der Kombination von Fachwerkwirkung und direkter Abstützung, der Fächerwirkung in Lasteinleitungsgebieten und der Veränderlichkeit der Druckstrebeneigung. Er erkannte, dass mit flacheren Druckstrebeneigungen Einsparungen in der Bügelbewehrung erreicht werden können, empfahl aber, die praktische Bemessung der Bügel in Trägerstegen unter Anwendung des konservativen  $45^\circ$ -Fachwerkmodells durchzuführen, weil die Druckstrebeneigung auf rechnerischem Wege nicht zu ermitteln sei.

Drucker stellte als erster Spannungsfelder als eine Anwendung des statischen Grenzwertes der Plastizitätstheorie vor [19]. Die konsequente Anwendung von Fachwerkmodellen und diskontinuierlichen Spannungsfeldern auf Stahlbeton auf der Grundlage der Plastizitätstheorie wurde von Forschergruppen um Nielsen in Kopenhagen und Thürlimann in Zürich vorangetrieben. Lampert führte bei der Berechnung des Bruchwiderstands von kombiniert beanspruchten Trägern die Druckstrebeneigung als frei wählbare Variable ein und begründete hiermit das Fachwerkmodell mit variabler (optimaler) Diagonaleigung [46]. Müller zeigte, dass die statischen Annahmen des Fachwerkmodells mit optimaler Druckstrebeneigung den Verhältnissen in Regime 1 der Fließbedingung für Scheibenelemente, siehe Bild 3.3 (d) und (e), sowie den üblichen Annahmen der Balkentheorie entsprechen, und er ergänzte für ausgewählte Anwendungen die statischen Fachwerkmodelle mit kinematisch zulässigen Verschiebungszuständen zu vollständigen Lösungen im Sinne der Plastizitätstheorie [73]. Schlaich et al. entwickelten eine Fachwerkmodell-Methodik zur Bestimmung der Bewehrungskräfte unter Einbezug elastizitätstheoretischer Überlegungen, welche allerdings den Nachweis ausreichender Betonabmessungen nicht einbezieht [92, 93]. Einen umfassenden Überblick über diese Entwicklungen und ihre Anwendungsmöglichkeiten vermitteln die Publikationen [107, 79, 13, 35, 50, 52, 53, 54, 55, 57, 60, 17, 75, 100, 101, 38, 65].

#### Allgemeine Bemerkungen

Fachwerkmodelle sind Stabmodelle, in denen die Tragwirkung des Betons und der Bewehrung auf in Druck- beziehungsweise Zugstäben konzentriert wirkende Einzelkräfte reduziert wird. Streben-Stab-Modelle oder einfach Streben-Modelle (strut and tie models) gehen aus Fachwerkmodellen direkt hervor, indem die Fachwerk-Druckstäbe und -Knoten in Elemente mit endlichen Abmessungen umgewandelt werden und zu einachsig beanspruchten Druckstrebeneigungen allseitig gedrückten Knotenbereiche werden. Mit Hilfe von Spannungsfeldern kann sowohl die mehrdimensionale Tragwirkung des Betons als auch die Wirkung der verteilten Bewehrungslagen beliebig genau modelliert werden. Die für praktische Anwendungen geeigneten ebenen diskontinuierlichen Spannungsfelder setzen sich aus einzelnen Grundelementen zusammen (deshalb diskontinuierlich), die ihrerseits von einer Schar von ein- oder zweiachsig beanspruchten Hauptspannungstrajektorien gebildet werden (im Falle von Knotenbereichen mit zweiachsiger

gleichförmigem Druckspannungszustand degeneriert die Trajektorienschar). Diese Trajektorien können zueinander parallel verlaufen (Druck- und Zugänder beziehungsweise -streben) oder aber divergierend sein (Fächer und Bogen); letztere werden in der Regel nur für die Beschreibung der Tragwirkung des Betons eingesetzt. Streben-Stab-Modelle können eigentlich als Zwischenraum zwischen diskontinuierlichen Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen bezeichnet werden, sind den Fachwerkmodellen jedoch sicher näher verwandt.

Mit Hilfe dieser Modelle lässt sich für beliebige Tragwerks- und Belastungsgeometrien ein statisch zulässiger Gleichgewichtszustand für das betrachtete System entwerfen und auf diese Weise eine (unter den beliebig vielen möglichen) denkbare Art des Kraftflusses im Tragwerk visualisieren.

Auf der Grundlage eines statisch zulässigen Spannungsfeldes können Lage, erforderlicher Gehalt, Abstufung und Verankerungslängen der Bewehrung ermittelt, die Betonabmessungen kontrolliert und erforderliche Auflagerdimensionen bestimmt werden. Damit wird sichergestellt, dass die Fließbedingungen nirgends verletzt werden, und folglich liegt die dem betrachteten Gleichgewichtszustand zugrundeliegende Belastung nicht höher als die Traglast des Systems (statischer Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie). Das Arbeiten mit Spannungsfeldern ermöglicht also zum einen eine sichere Bemessung und zum anderen eine saubere konstruktive Durchbildung sämtlicher Details.

Bei der Anwendung von Spannungsfeldern in der praktischen Bemessung ist es im Hinblick auf Gebrauchstauglichkeit und Verformungsvermögen des Tragwerks empfehlenswert, die Bereiche, in denen aus statischer Sicht keine Stahleinlagen erforderlich sind, im allgemeinen mit einer ausreichenden, fein verteilten Mindestbewehrung zu versehen. Aus Tragfähigkeitsgründen wichtig ist, dass die zur Überprüfung der Betonabmessungen verwendete, sogenannte effektive Betondruckfestigkeit  $f_c$  in vernünftigem Masse konservativ angesetzt wird, damit vorzeitige spröde Betondruckversagen vermieden werden können.

Fachwerkmodelle und Spannungsfelder sind nicht als Modelle aufzufassen, die eine möglichst wirklichkeitstreue Beschreibung des Tragverhaltens eines Bauteils erlauben. Vielmehr sind sie (auf einer zum Teil sehr starken Abstraktion basierende) einfache und klare Werkzeuge in der Hand des praktisch tätigen Ingenieurs, die es ihm ermöglichen, den Fluss der inneren Kräfte auf plausible Art zu erfassen und darauf basierend die wesentlichen Abmessungen und konstruktiven Details festzulegen. Die Entwicklung eines für eine konkrete Problemstellung im Hinblick auf Bemessung und konstruktive Durchbildung zufriedenstellenden Spannungsfelds erfordert in vielen Fällen ein iteratives Vorgehen. Man entwirft ein erstes Modell mit ungefähren Kräften, welches anschliessend modifiziert oder dann sukzessive beliebig verbessert und verfeinert werden kann. Meist genügt es, einige wichtige Details zu prüfen; vollständig ausgearbeitete Spannungsfelder einschließlich der Konstruktion sämtlicher Knotenbereiche werden nur selten benötigt. In jedem Fall hilfreich und Fehlern vorbeugend ist hingegen die Verwendung masstäblicher Zeichnungen der entworfenen Spannungsfelder.

### Vorgehen bei der Entwicklung von Spannungsfeldern

Ausgangspunkt für das Arbeiten mit Spannungsfeldern ist die Aufteilung des im allgemeinen dreidimensionalen Tragwerks (zum Beispiel profilierte Träger, Plattenbalken, Kastenträger) in einzelne Scheiben. Räumliche Spannungsfelder werden meist nur in der Boden- und Felsmechanik oder bei der Behandlung von Spezialproblemen, wie zum Beispiel Betongelenken oder Spanngliedverankerungen, verwendet. Für jedes Tragwerkselement lässt sich nun ein Schnittkörperdiagramm mit den im Gleichgewicht stehenden Last- und Auflagerkräftegruppen zeichnen. Bei statischer Überbestimmtheit ist die Grösse der überzähligen Auflagerkräfte frei wählbar; diese können zum Beispiel in Anlehnung an eine Lösung gemäss elastischer Balken- oder Scheiben-theorie festgelegt werden.

Für den in der praktischen Anwendung häufig auftretenden Fall, dass das untersuchte Element schlank ist und eine konstante Höhe aufweist, ist die Annahme parallel verlaufender Druck- und Zuggurte (und damit eines konstanten, konservativ angenommenen Hebelarms der Gurtkräfte) mit dazwischenliegender Stegscheibe konstanter Höhe zweckmäßig. In Schnitten mit verschwindender Querkraft ergibt sich im Spannungsfeld ein Wechsel des Schubflusses hin zu den Auflagern.

Im Rahmen der Beschreibung des Spannungszustandes in der Stegscheibe wird die Tragwirkung des Betons durch Zusammensetzung der Grundelemente paralleles Druckband, Fächer, Bogen und Knotenbereich erfasst, während der verteilten Bügelbewehrung parallele Zugbänder entsprechen. Knotenbereiche ergeben sich an Stellen, wo konzentrierte Kräfte eingeleitet oder umgelenkt werden. Meist ist es sinnvoll, in diesen Bereichen Fächer vorzusehen, um zu einem möglichst ausgeglichenen Spannungszustand zu gelangen und damit der zweidimensionalen Tragwirkung der Stegscheibe Rechnung zu tragen. Allgemein kann das Spannungsfeld einer Stegscheibe als Abfolge von Fächern konstruiert werden. In der praktischen Anwendung ist es aber zweckmäßig und übersichtlicher, in Bereichen, wo keine konzentrierten Kräfte anfallen, parallele Druckbänder mit gleichbleibendem, frei wählbarem Neigungswinkel vorzusehen, was einer Aufteilung der Stegscheibe in gleich lange Abschnitte entspricht.

Nachdem das Spannungsfeld für das untersuchte Tragwerkselement entwickelt ist, können die Gurt- und Auflagerkräfte auf die angrenzenden Tragwerkselemente (zum Beispiel Gurtplatten oder Kasten- beziehungsweise Faltwerkscheiben) übertragen und der Kraftfluss in diesen weiter verfolgt werden.

### 3.4.2 Grundelemente

#### Spannungsdiskontinuitätslinien

Für die praktische Anwendung geeignete ebene Spannungsfelder weisen in der Regel Unstetigkeiten oder sogenannte Spannungsdiskontinuitätslinien auf und werden daher als diskontinuierliche Spannungsfelder bezeichnet. Damit der untere Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie Gültigkeit hat, müssen an den Spannungsdiskontinuitätslinien die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein. Dies bedeutet, dass an einer Spannungsdiskontinuitätslinie nur Normalspannungen  $\sigma_t$  parallel zur Diskontinuitätslinie einen Sprung aufweisen dürfen,  $\sigma_t^- \neq \sigma_t^+$ , siehe Bild 3.4, während sowohl die Normalspannungen  $\sigma_n$  senkrecht zur Diskontinuitätslinie als auch die Schubspannungen  $\tau_{nt}$  ( $= \tau_{tn}$ ) kontinuierlich verlaufen müssen, das heißt  $\sigma_n^- = \sigma_n^+$ ,  $\tau_{nt}^- = \tau_{nt}^+$ .

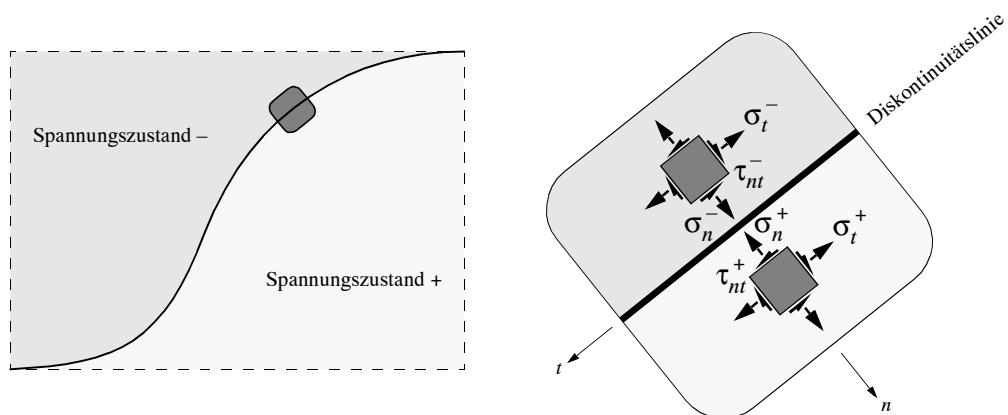


Bild 3.4 – Diskontinuitätslinie.

## Strebe und Knoten

Bild 3.5 zeigt eine Hälfte einer symmetrischen Scheibe mit Rechteck-Querschnitt  $b_w \cdot h$ , die eine Einzellast  $Q$  trägt. Die Last wird über die Betondruckstreb ACDF direkt zum Auflager übertragen, wo sie im Gleichgewicht mit der Auflagerkraft und der im horizontalen Zugstab wirkenden Kraft  $F_t$  steht. Die Einleitung und Umlenkung der Last und der Auflagerkraft erfordert Knotenbereiche ABC und DEF. Die erforderlichen Abmessungen der Lasteinleitungs-, Auflager- und Verankerungsplatten und somit jene der Knotenbereiche ergeben sich mit der Bedingung, dass an ihren Rändern die Betondruckfestigkeit  $-f_c$  ausgenützt ist. Folglich herrscht in den Knotenbereichen ein zweiachsiger, gleichförmiger Druckspannungszustand  $\sigma_{c1} = \sigma_{c3} = -f_c$ . Die Druckstreb bestehen aus parallel gerichteten, einachsig mit  $\sigma_{c3} = -f_c$  beanspruchten Spannungstrajektorien ("Fachwerkstäbe" mit verschwindender Abmessung). Das gewählte, direkte Abstützung genannte Gleichgewichtsmodell verlangt keinerlei vertikale Zugelemente. Dafür muss die im horizontalen Zugstab in Scheibenmitte auftretende Bewehrungskraft  $F_t$  hinter dem Auflager verankert werden. In den Bereichen CGD und AFH ist der Beton spannungsfrei.

Mit den Gleichgewichtsbedingungen

$$F_c = b_w c f_c = A_s f_{sy} = F_t, \quad Qa = b_w c f_c (h - c) \quad (3.27)$$

findet man

$$c = \frac{h}{2} - \sqrt{\frac{h^2}{4} - \frac{Qa}{b_w f_c}}, \quad A_s = b_w c \frac{f_c}{f_{sy}} \quad (3.28)$$

Unter Verwendung des mechanischen Bewehrungsgehalts,  $\omega = \rho (f_{sy}/f_c)$ , mit  $\rho = A_s/(b_w d) =$  geometrischer Bewehrungsgehalt, und der Beziehung  $c = \omega d$  erhält man aus der ersten Gleichung (3.28)

$$Q = \frac{b_w f_c h^2}{a} \cdot \frac{\omega(1 - \omega/2)}{(1 + \omega/2)^2} \quad \omega \leq 2/3 \quad (3.29)$$

$$Q = \frac{b_w f_c h^2}{4a} \quad \omega \geq 2/3 \quad (3.30)$$

Es existieren kinematisch zulässige, mit dem in Bild 3.5 dargestellten Gleichgewichtsmodell verträgliche Bruchmechanismen, siehe Kapitel 3.5, und daher ist mit den Beziehungen (3.29) und

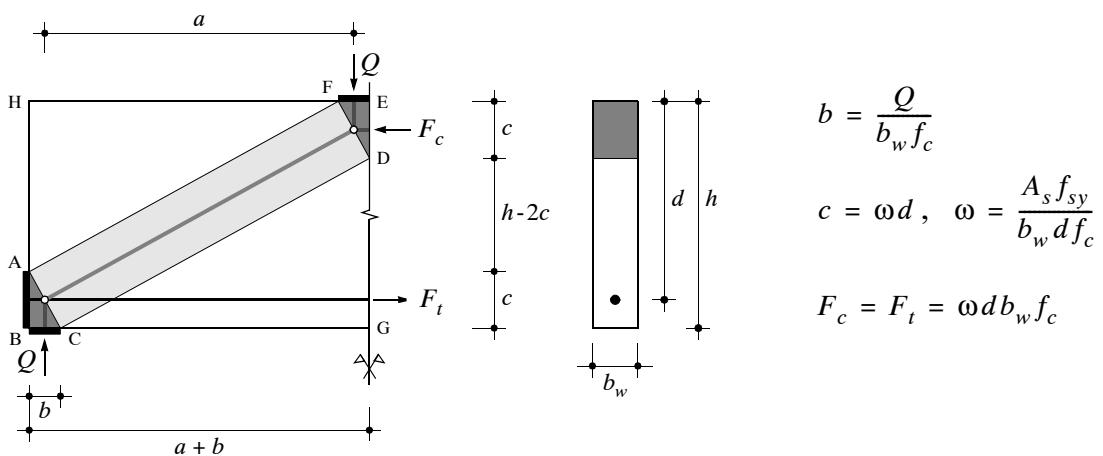


Bild 3.5 – Scheibe ohne Vertikalbewehrung unter Einzellast: direkte Abstützung über Strebenwirkung.

(3.30) die Traglast des Systems gegeben. Man beachte, dass  $Q_u$  für  $\omega = 2/3$  maximal wird und durch Vergrösserung von  $\omega$  nicht erhöht werden kann.

In Bild 3.5 sind auch die Wirkungslinien der Spannungsresultierenden der in der Druckstrebe und an den Rändern der Knotenbereiche auftretenden, verteilten Spannungen eingezeichnet, welche das dem Streben-Stab-Modell entsprechende Fachwerkmodell bilden. Man beachte, dass der im Fachwerkmodell maximal mögliche, wählbare Hebelarm,  $h - c$ , beziehungsweise die maximal mögliche statische Höhe  $d$  im Spannungsfeld nur unter Berücksichtigung der erforderlichen (Beton-)Abmessungen der Knotenbereiche gefunden wird.

Das Streben-Stab-Modell in Bild 3.5 stellt eine starke Idealisierung des wirklichen Tragverhaltens dar. In den Betonelementen treten ausschliesslich Hauptdruckspannungen auf, und der Zugstab wirkt wie eine Bewehrung ohne Verbund. In Wirklichkeit treten im Beton auch Zugspannungen und allgemein ebene Spannungszustände auf. Zwischen der Bewehrung und dem sie umgebenden Beton werden Verbundkräfte aktiviert, was zu sukzessiver Rissbildung und infolgedessen zur Ausbildung neuer statischer Systeme führt. Mit dem Nahen des Bruchzustandes kann der Verbund allerdings weitgehend zerstört sein und die Strebenwirkung vorherrschen.

In der praktischen Anwendung werden meist Druckstreben mit über der Breite der Strebe konstant verteilten Druckspannungen verwendet. Für Bauteile, welche durch relativ grosse Druckkräfte beansprucht sind (zum Beispiel Druckzonen stark bewehrter Biegeträger oder Stützen) und in denen entsprechend breite Druckstreben anzuordnen sind, kann die Wahl ungleichmässiger Verteilungen der Druckspannungen über die Strebenbreite vorteilhaft sein [75].

### Fächer und Bogen

Bild 3.6 illustriert den Übergang von einfachen (die Tragwirkung des Betons darstellenden) Streben-Modellen zu Spannungsfeldern mit nicht paralleler Trajektorienschar und dementsprechend entlang der Trajektorien variablen (Druck-)Spannungen.

Die betrachtete Scheibe weist nur eine Längsbewehrung auf. Aus Gleichgewichtsgründen müssen die Lasten weiterhin direkt zum Auflager übertragen werden, und die im horizontalen Zugstab in Scheibenmitte auftretende Bewehrungskraft  $F_t$ , muss hinter dem Auflager verankert werden.

Der in Bild 3.5 gezeigte Grundfall der direkten Abstützung kann bei Betrachtung zweier Einzellasten auf das Streben-Stab-Modell in Bild 3.6 (a) oder auch auf dasjenige in Bild 3.6 (c) weiterentwickelt werden. Durch gedankliches Hinzufügen (unendlich vieler) weiterer Einzellasten gelangt man schliesslich zu den in Bild 3.6 (b) und (d) dargestellten, der Abtragung einer verteilten Belastung  $q$  dienenden Fächer beziehungsweise Bogen. Ob sich in einem gegebenen Fall Fächer- oder Bogenwirkung einstellt, hängt unter anderem von der Schlankheit der Scheibe, dem Bewehrungsgehalt und der Belastungsgeschichte ab.

Man beachte, dass in allen vier Modellen in Bild 3.6 die Abmessungen der Lager- und Verankerungsplatten sowie die Geometrie der Druckstreben und des Fächers beziehungsweise des Bogens derart gewählt sind, dass in den Knotenbereichen ABC ein zweiachsig gleichförmiger Druckspannungszustand  $\sigma_{c1} = \sigma_{c3} = -f_c$  herrscht und dementsprechend die Punkte A bis E in den vier Modellen übereinstimmen. In den Bildern 3.6 (a) und (c) sind auch die Wirkungslinien der Spannungsresultierenden der in der Druckstrebe und an den Rändern der Knotenbereiche auftretenden, verteilten Spannungen eingezeichnet, welche das dem Streben-Modell entsprechende Fachwerkmodell bilden. Nebenbei erkennt man in Bild 3.6 (c), dass Fachwerknoten im allgemeinen nicht im Knotenbereich des entsprechenden (Streben-)Spannungsfelds zu liegen kommen.

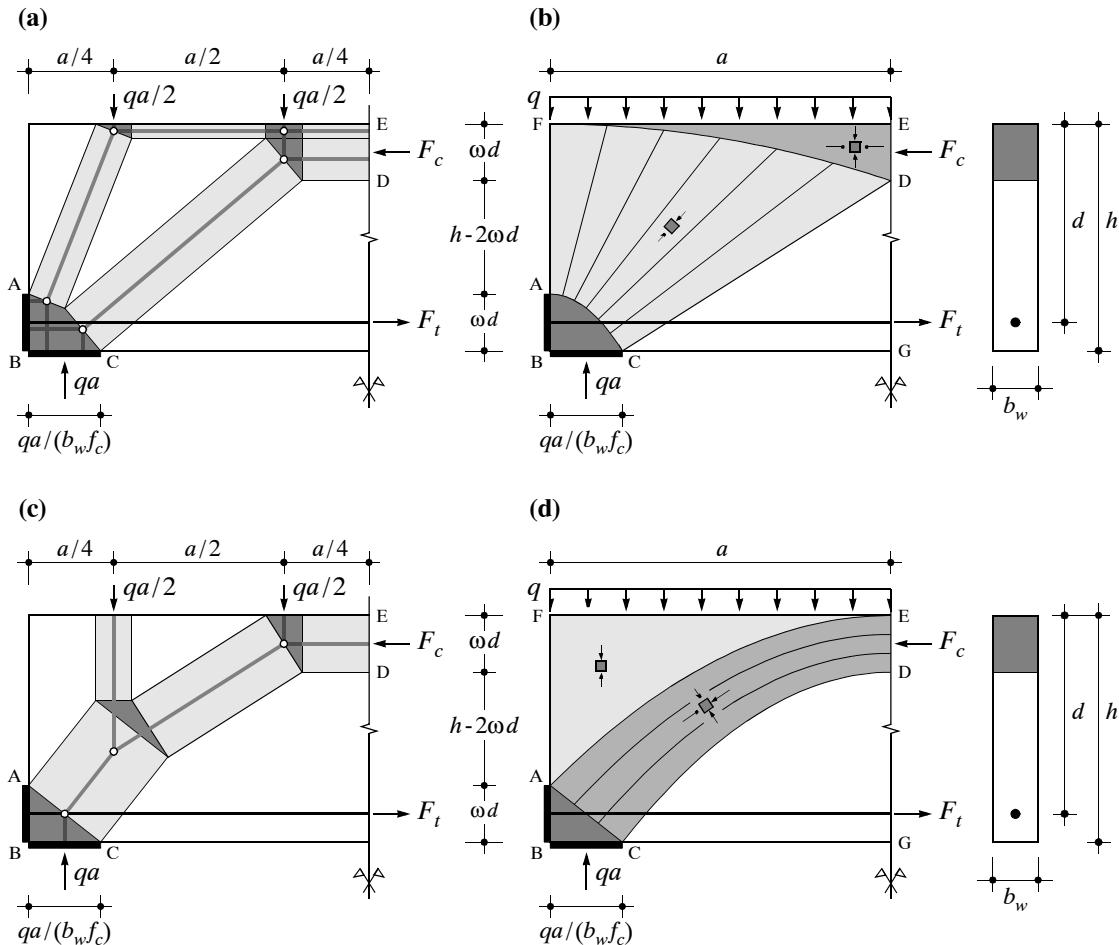


Bild 3.6 – Übergang von Strebenwirkung zu diskontinuierlichen Spannungsfeldern – Scheibe mit verteilter Belastung ohne Vertikalbewehrung: (a) und (b) Fächerwirkung; (c) und (d) Bogenwirkung.

In den Bildern 3.6 (a) und (c) werden die (der verteilten Belastung  $q$  statisch äquivalenten) zwei Einzellasten  $qa/2$  über fächer- beziehungsweise bogenförmig angeordnete Druckstreben mit  $\sigma_{c3} = -f_c$  zum Auflager übertragen, wo sie mit der Auflagerkraft und der im horizontalen Zugstab wirkenden Kraft  $F_t$  im Gleichgewicht gehalten werden. Der Übergang vom Streben-Modell in Bild 3.6 (a) zu dem in Bild 3.6 (b) dargestellten Fächer erfolgt, indem die Scheibe in differentielle Elemente der Länge  $dx$  unterteilt und eine Schar unendlich dünner Streben betrachtet wird, welche Lasten  $qdx$  abtragen und deren Enden durch den Knotenbereich ABC und die Druckzone DEF begrenzt werden. Durch Formulieren der Gleichgewichtsbedingungen an einer Einzelstrebe in allgemeiner Lage erhält man zwei Differentialgleichungen für die Funktionen der Linien AC und DF, welche sich als quadratische Parabeln herausstellen. Die Druckspannungen im Fächer nehmen entlang der geraden Trajektorien in Richtung des Knotenbereichs hyperbolisch zu, und zwar auf den entlang des Knotenrandes AC vorausgesetzten Wert  $\sigma_{c3} = -f_c$ . Die Hauptdruckspannungen in der Druckzone DEF betragen  $\sigma_{c1} = -q/b_w$  und  $\sigma_{c3} = -f_c$ .

Mit einem analogen Vorgehen gelangt man vom Streben-Modell in Bild 3.6 (c) zu dem in Bild 3.6 (d) gezeigten diskontinuierlichen Spannungsfeld und erhält die den Bogen bildenden Randtrajektorien AE und CD als quadratische Parabeln. Die Hauptdruckspannungen im Bogen betragen  $0 \geq \sigma_{c1} \geq -q/b_w$  und  $\sigma_{c3} = -f_c$ , wobei  $\sigma_{c1}$  entlang der geraden, senkrecht zur Parabel

CD verlaufenden Trajektorien hyperbolisch von der Bogenober- zur -unterseite abnimmt. Der Bereich AEF ist einachsig mit  $\sigma_{c3} = -q/b_w$  gedrückt.

In allen vier in Bild 3.6 dargestellten Modellen ergibt sich für eine gegebene Bruchlast  $q$  der erforderliche mechanische Bewehrungsgehalt  $\omega$  durch Lösen der Beziehung

$$\frac{\omega(1-\omega/2)}{(1+\omega/2)^2} = \frac{a^2}{2h^2} \cdot \frac{q}{b_w f_c} \cdot \left(1 - \frac{q}{b_w f_c}\right) \quad (3.31)$$

Umgekehrt gilt bei gegebenem Bewehrungsgehalt

$$q = \frac{b_w f_c}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8h^2}{a^2} \cdot \frac{\omega(1-\omega/2)}{(1+\omega/2)^2}}\right) \quad \text{für } \omega \leq 2/3$$

$$q = \frac{b_w f_c}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2h^2}{a^2}}\right) \quad \text{für } \omega \geq 2/3 \quad (3.32)$$

Es existieren kinematisch zulässige, mit den in den Bildern 3.6 (b) und (d) dargestellten Gleichgewichtsmodellen verträgliche Bruchmechanismen (Biegemechanismen mit Rotationszentrum in D und einem oder mehreren sogenannten Kollapsrissen im Bereich CDG) und daher ist mit den Beziehungen (3.32) die Traglast  $q_u$  des Systems gegeben.

### Lastaufhängung

Mit Bild 3.7 wird das Prinzip der Lastaufhängung eingeführt. Anstatt die Lasten ausschliesslich über Druckelemente direkt auf das Auflager zu übertragen, wie dies in den Bildern 3.5 und 3.6 der Fall ist, kann durch Anordnung einer Vertikalbewehrung eine Aufhängung der anfallenden Querkraft erwirkt werden. Dadurch kann einerseits die im horizontalen Zugstab wirkende Bewehrungskraft  $F_t$  abgestuft – sprunghaft gemäss den Streben-Modellen in den Bildern 3.7 (a) und (c), siehe Bild 3.7 (e), oder kontinuierlich gemäss den Spannungsfeldern in den Bildern 3.7 (a) und (c), siehe Bild 3.7 (f) – und ihre Verankerung am Auflager erleichtert werden, andererseits ergeben sich günstigere, das heisst steilere Neigungen der Druckspannungstrajektorien.

In Analogie zu Bild 3.6 werden sowohl reine Fächerwirkung als auch eine kombinierte Bogen- und Fächerwirkung betrachtet. Die in den Bildern 3.7 (b) und (d) dargestellten Spannungsfelder lassen sich durch gedankliche Abstraktion aus den in den Bildern 3.7 (a) und (c) gezeigten Streben-Modellen auf ähnliche Weise wie weiter oben für Bild 3.6 beschrieben ableiten. Die Lasteinleitungs- und Auflagerplatten in den in Bild 3.7 gezeigten Modellen haben alle gleiche Abmessungen  $b = Q/(b_w f_c)$ ; folglich gilt für alle vier Gleichgewichtszustände der gleiche untere Grenzwert der Traglast.

Im Spannungsfeld in Bild 3.7 (b) fliesst die gesamte Last  $Q$  zunächst über den Fächer DGIJ zum horizontalen Zugstab hinunter, wird von dort mittels des parallelen vertikalen Zugbandes FHIJ an der Scheibenoberkante FH aufgehängt, stützt sich über die Druckzone GFH auf den Fächerrand GH und fliesst von dort über den Fächer ACGH zum Auflager. Im Spannungsfeld in Bild 3.7 (d) hingegen fliesst nur ein Teil der Last  $Q$  über den Fächer DGIJ zum Zugstab und wird mit dem vertikalen parallelen Zugband FHIJ an der Bogenoberkante FH aufgehängt; der restliche Anteil der Last  $Q$  stützt sich über den Bogen GFHK und die Strebe ACKH direkt auf das Auflager ab. Dementsprechend erfordert die kombinierte Bogen- und Fächerwirkung gemäss Bild 3.7 (d) weniger vertikale Bewehrung als die in Bild 3.7 (b) gezeigte reine Fächerwirkung, dafür sind die am Auflager zu verankernde Bewehrungskraft  $F_{tAB}$  und die Höhe  $c_a$  des Knotenbereichs grösser, die nutzbare statische Höhe  $d$  kleiner und demzufolge die in Scheibenmitte auftretenden Kräfte  $F_t$  und  $F_c$  grösser als für die reine Fächerwirkung gemäss Bild 3.7 (b). Aus denselben Gründen sind die Schnittgrössen  $F_t$  und  $F_c$  in Scheibenmitte sowohl für Bild 3.7 (b)

als auch (d) kleiner als für die direkte Abstützung gemäss Bild 3.5. Die gemäss dem Spannungsfeld in Bild 3.7 (b) am Auflager zu verankernde Bewehrungskraft  $F_{t,AB} = c_a b_w f_c$  ergibt sich durch Lösen der Beziehung  $c_a^3 - 2h c_a^2 + [h^2 + (a+b)b/4] c_a - abh/2 = 0$ .

Das Verhältnis der in Bild 3.7 (d) über Bogen- und Fächerwirkung abgetragenen Lastanteile ist frei wählbar. Wird der über den Bogen direkt abgestützte Lastanteil stetig vergrössert, so nehmen die Bogenkrümmung und die Ausdehnung des Fächers DGIJ allmählich ab, während Länge und Breite der flacher werdenden Strebe ACKH anwachsen, so dass im Grenzfall die direkte Abstützung gemäss Bild 3.5 erreicht wird.

Der Fächer ACGH in Bild 3.7 (b) ist demjenigen in Bild 3.6 (b) analog. Der Belastung  $q$  in Bild 3.6 (b) entspricht die im parallelen vertikalen Zugband FHIJ wirkende, gleichmässig verteilte Bügelkraft  $a_{sw} f_{sy}$ , wobei  $a_{sw}$  die Querschnittsfläche der Bügelbewehrung je Längeneinheit bezeichnet. Die Fächerränder AC und GH sind parabelförmig, und die Hauptdruckspannungen in der Druckzone GFH betragen  $\sigma_{c1} = -a_{sw} f_{sy}/b_w$  und  $\sigma_{c3} = -f_c$ .

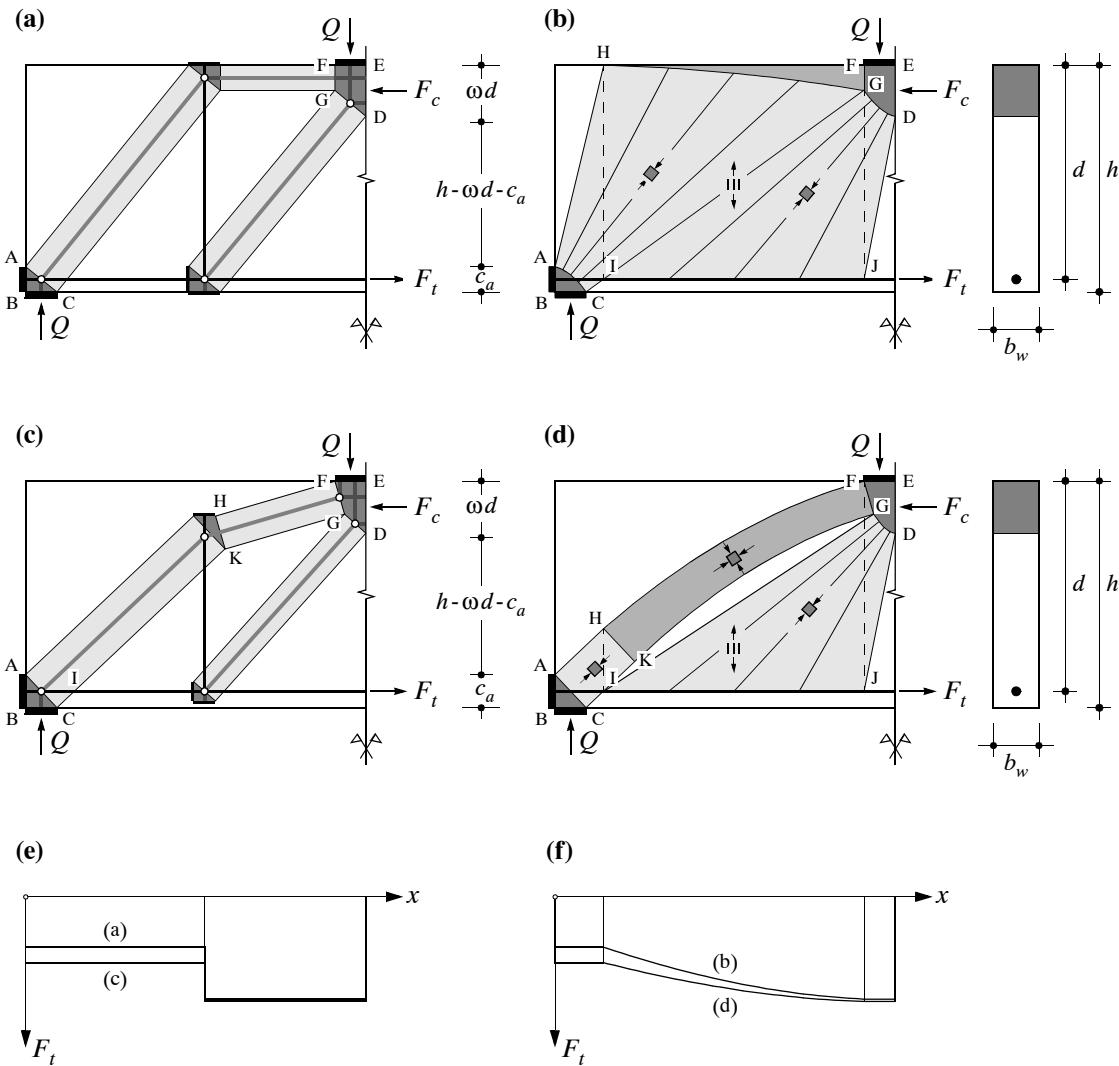


Bild 3.7 – Lastaufhängung – Scheibe mit vertikaler Bügelbewehrung unter Einzellast: (a) und (b) reine Fächerwirkung; (c) und (d) kombinierte Bogen- und Fächerwirkung; (e) und (f) Verlauf der Kraft  $F_t$  im horizontalen Zugstab für die verschiedenen Modelle.

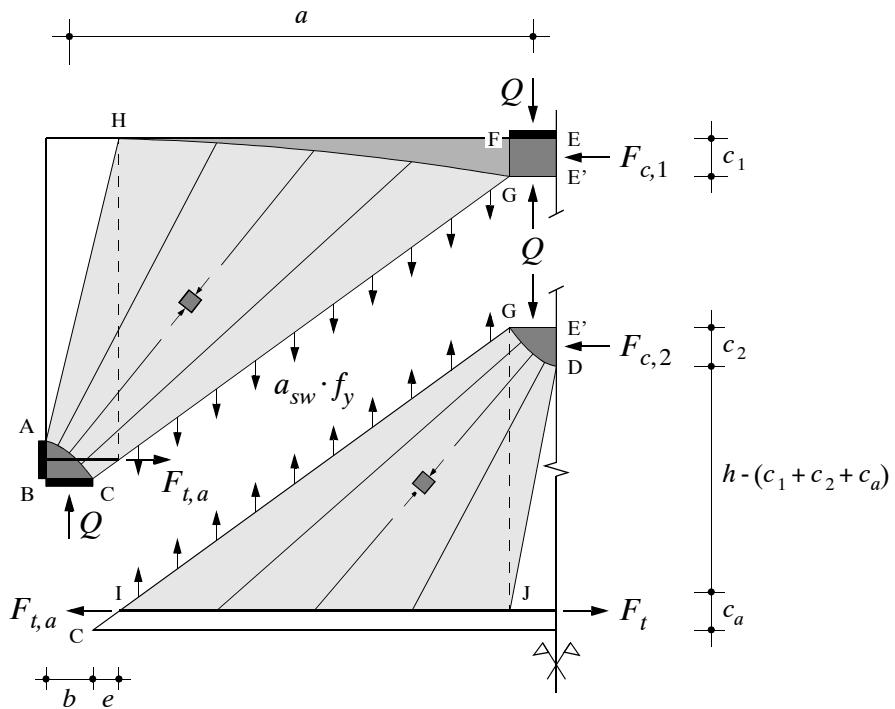


Bild 3.8 – Schnittkörperdiagramme zur Analyse des Spannungsfeldes in Bild 3.7 (b).

Die Fächer DGJ in den Bildern 3.7 (b) und (d) stützen sich an einem Ende auf einen Knotenbereich, am anderen auf einen geraden Stab ab; der Verlauf sowohl des Fächerrandes DG als auch der Stabkraft (im vorliegenden Fall die Zugkraft  $F_t$ ) ist hyperbolisch. Die Druckspannungen im Fächer betragen  $\sigma_{c3} = -f_c$  am Knotenrand DG, nehmen entlang der Spannungstrajektorien hyperbolisch ab und bilden entlang der Strecke IJ Gleichgewicht mit der vertikalen, gleichmäßig verteilten Bügelkraft sowie horizontalen Verbundkräften, welche die im Zugstab wirken-de Kraft  $F_t$  kontinuierlich abbauen. Nebenbei sei bemerkt, dass gemäss den Spannungsfeldern in Bild 3.7 (b) und (d) die betreffende erforderliche Bügelbewehrung strenggenommen nur auf den Bereich FHIJ zu verteilen wäre.

Bild 3.9 zeigt zwei Spannungsfelder, welche mit dem in Bild 3.7 (b) gezeigten Grundfall der reinen Fächerwirkung verwandt sind. In Bild 3.7 (b) ist der Bereich FHIJ mit Bügelbewehrung gerade so breit, dass die beiden Fächer genau aneinander grenzen, das heisst eine gemeinsame Randtrajektorie haben; das Spannungsfeld in Bild 3.9 (a) hingegen gilt für eine auf engerem Raum verteilte Bügelbewehrung. In Bild 3.9 (b) ist eine kombinierte Streben- und Fächerwirkung dargestellt, bei der ein Teil der Last  $Q$  über eine zwischen den beiden Fächern verlaufende Strebe direkt auf das Lager abgestützt ist, so dass (ähnlich wie im Fall der kombinierten Bogen- und Fächerwirkung) weniger vertikale Bewehrung als für die in Bild 3.7 (b) gezeigte reine Fächerwirkung erforderlich ist, dafür sowohl die am Auflager zu verankernde Bewehrungskraft  $F_{t,AB} = c_a b_w f_c$  als auch die in Scheibenmitte auftretenden Kräfte  $F_t$  und  $F_c$  grösser ausfallen.

### Knotenbereiche

Der mit einem Spannungsfeld (oder Fachwerkmodell) betrachtete Kräftefluss beziehungsweise Spannungszustand verletzt die Fließbedingungen, wenn die Knotenbereiche nicht ausreichende Abmessungen in Anspruch nehmen können. Folglich müssen Abmessungen der Knotenbereiche und allfällige Bewehrungsverankerungen an Knoten stets sorgfältig geprüft werden.

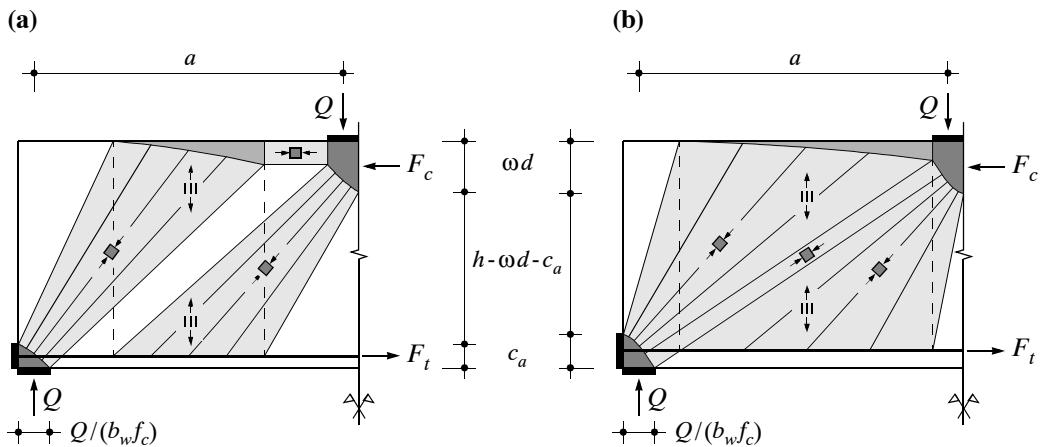


Bild 3.9 – Lastaufhängung – Scheibe mit vertikaler Bügelbewehrung unter Einzellast: (a) reduzierter Bereich mit Bügelbewehrung; (b) kombinierte Streben- und Fächerwirkung.

In ebenen Spannungsfeldern herrscht in Knotenbereichen ein zweiachsiger Spannungszustand. Die Konstruktion der Knotenbereiche (und darauf aufbauend sämtlicher Elemente des Spannungsfelds) erfolgt in der Regel unter der Voraussetzung, dass entlang der Knotenränder die (effektive) Betondruckfestigkeit  $-f_c$  ausgenützt ist. In diesem Fall herrscht im Knotenbereich ein zweiachsig gleichförmiger Druckspannungszustand  $\sigma_{c1} = \sigma_{c3} = -f_c$ , und die Knotenränder sind senkrecht zu den an ihnen anstossenden Hauptdruckspannungstrajektorien angrenzender Elemente. Allgemeinere Fälle mit unterschiedlichen Druckspannungen an den einzelnen Rändern eines Knotenbereichs und am Knotenrand schräg eintreffenden Hauptdruckspannungstrajektorien sind zwar theoretisch möglich [52, 100] aber von geringer praktischer Bedeutung; in solchen Fällen treten im Knotenbereich unterschiedlich grosse Hauptdruckspannungen auf, und die betragsmässig grössere Hauptdruckspannung kann die an den Knotenrändern angreifenden Spannungen übertreffen, so dass ein expliziter Nachweis der Spannungen im Knotenbereich erforderlich ist.

Die Bilder 3.10 (a) und (b) zeigen eine mögliche konstruktive Ausbildung der Verankerung der Bewehrung mit Steckbügeln hinter dem Knotenbereich eines Endauflagers, welche auch etwa als Haarnadel-Bewehrung bezeichnet wird, vergleiche mit Bildern 3.5, 3.6 (a), (c), 3.7 (a), (c), (d). Die Übertragung der am Knotenrand AC wirkenden verteilten Druckspannungen auf die aus Einzelstäben mit Endschlaufen bestehende Bewehrung wird von Druckschalen gewährleistet, die sich im Beton ausbilden und auf die Schlaufenabbiegungen abstützen. Diese Tragwirkung lässt sich mit Spannungsfeldern oder entsprechenden Fachwerkmodellen nachbilden, siehe Bilder 3.10 (c) und (d), und man sieht, dass Betonzugspannungen erforderlich sind, um die Übertragung der Kräfte vom Beton auf die Bewehrung zu gewährleisten. Die Anordnung von Dübelstäben an den Abbiegestellen unterstützt die Übertragung und gleichmässige Verteilung der Betondruckkraft auf die Bewehrung.

### Hinweise zur praktischen Anwendung

Die Grundelemente für das Entwickeln von Spannungsfeldern und grundsätzliche Möglichkeiten für deren Kombination sind oben aufgezeigt worden. Abschliessend einige Bemerkungen im Hinblick auf die praktische Anwendung:

1. Kombinierte Tragwirkungen gemäss den Bildern 3.7 (d) und 3.9 (b) sind als Bemessungsgrundlage von eher untergeordneter Bedeutung, da sie in vielen Fällen nur zu geringen Ein-

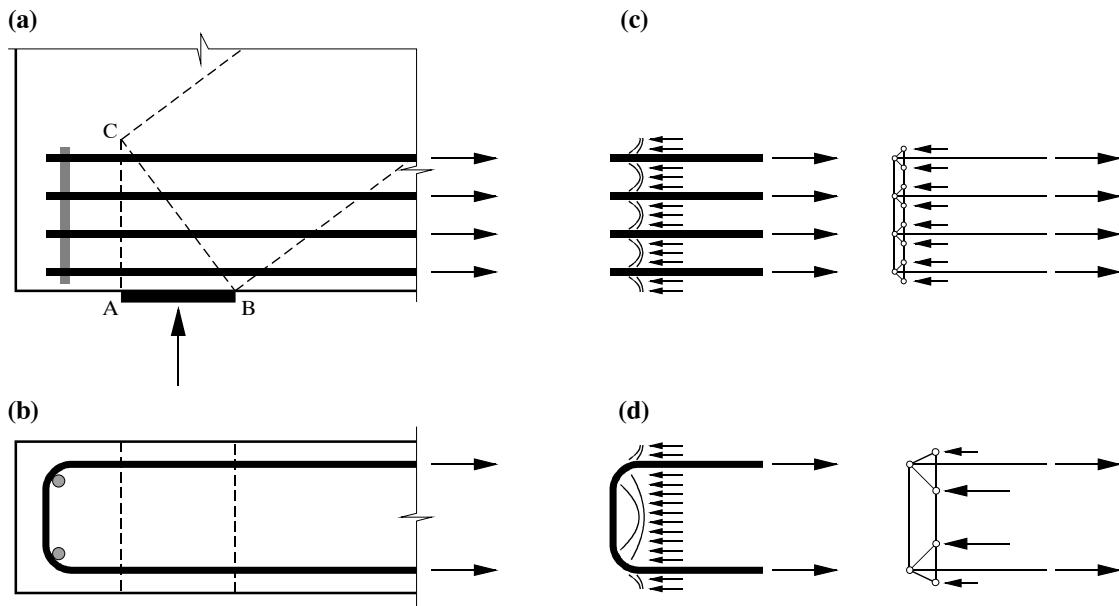


Bild 3.10 – Bewehrungsdetail am Auflager: (a) Ansicht; (b) Grundriss; (c) und (d) Spannungsfelder und Fachwerkmodelle für die Übertragung der Betondruckkräfte auf die Bewehrungsstäbe.

sparungen an Bügelbewehrung, dafür unter Umständen aufwendigen Verankerungen der Längsbewehrung führen.

2. Druckzonen mit veränderlicher Druckzonenhöhe, welche einen entlang der Scheibe veränderlichen Hebelarm der Schnittkräfte  $F_t$  und  $F_c$  bewirken, siehe Bilder 3.6 (b), 3.7 (b) und 3.9, spielen eine Rolle nur in Fällen, wo die Kräfte in der Druckzone nicht in angrenzende Tragwerksteile wie Druckplatten ausgebreitet werden können, das heisst für alleinstehende Träger oder Scheiben mit Rechteckquerschnitt. Selbst in diesen Fällen lässt sich jedoch die Druckzone einfachheitshalber auf einen geraden Druckgurt reduzieren, dessen Wirkungslinie mit der Resultierenden des dem ursprünglichen Fächer entsprechenden Knotenbereich(teilstück)s (DE in Bild 3.6 (b), GF in Bild 3.7 (b)) übereinstimmen muss oder weiter innen liegen kann, in keinem Fall aber näher am Scheibenrand angesetzt werden darf, weil sonst ungenügende Betonabmessungen in der Druckzone die Folge wären, vergleiche Bild 3.15 in Kapitel 3.4.4.
3. Im vorliegenden Kapitel wurde aus didaktischen Gründen eine eingehende Diskussion der Grundelemente von Spannungsfeldern durchgeführt. In der praktischen Anwendung ist jedoch die vollständige Bestimmung des Spannungszustands einschliesslich aller Finessen (wie genaue Konstruktion sämtlicher Fächerränder und Knotenbereiche sowie exakte Spannungs- und Gurtkraftverläufe bei Fächern) nie erforderlich. Meist genügt es, ein geeignet gewähltes Spannungsfeld unter Verwendung masstäblicher Zeichnungen grob zu entwerfen, auf dieser Grundlage (unter Umständen auch mit vereinfachenden Annahmen wie zum Beispiel zentrierte Fächer, siehe Kapitel 3.4.4) ausreichend zutreffende Gurtkraftverläufe, erforderliche Bügelbewehrung sowie kritische Betondruckspannungen zu ermitteln und schliesslich die wichtigen konstruktiven Details durch Ausarbeiten der entsprechenden Knotenbereiche festzulegen.

### 3.4.3 Tragwerkselemente mit statischen oder geometrischen Diskontinuitäten

Fachwerkmodelle und Spannungsfelder eignen sich ganz besonders für die Analyse von Tragwerkselementen mit statischen oder geometrischen Diskontinuitäten, das heisst sprunghaft ändernden Belastungen oder Abmessungen. Bild 3.11 zeigt für einige einfache Beispiele von Diskontinuitäten Streben-Stab-Modelle; diese können durch Einführen von Fächern, Bogen und (Druck- und Zug-)Bändern verfeinert werden, um so die flächige Tragwirkung des Betons und die verteilte Wirkung der Bewehrung besser zu erfassen. In Bild 3.11 (a) bis (c) sind Rahmenecken unter reiner Momentenbeanspruchung dargestellt. Die in Bild 3.11 (c) angeordnete, relativ schwache diagonale Bewehrung wirkt sich vorteilhaft auf die Verankerung der horizontalen und vertikalen Bewehrungskräfte aus; diese sind allerdings grösser als in Bild 3.11 (b), weil der Hebelarm der inneren Kräfte kleiner ist. Beispiele für Rahmenecken mit orthogonaler und mit schlaufenförmigen Bewehrungen und für Rahmenecken unter kombinierter Beanspruchung findet man in [107, 75]. Bei Rahmenecken kann der Biegewiderstand der angeschlossenen Bauteile im allgemeinen nicht voll ausgenützt werden, weil die Verankerung beziehungsweise Umlenkung der Kräfte im Rahmeneckbereich eine Reduktion des Hebelarms der inneren Kräfte gegenüber den in Bild 3.11 (a) und (b) gezeigten Grundfällen zur Folge hat. In Bild 3.11 (d) und (e) sind zwei mögliche Streben-Stab-Modelle für den Auflagerbereich eines Trägers mit eingeklinktem Auflager dargestellt; in Analogie zu den Rahmenecken sind auch Lösungen mit Diagonalbe-

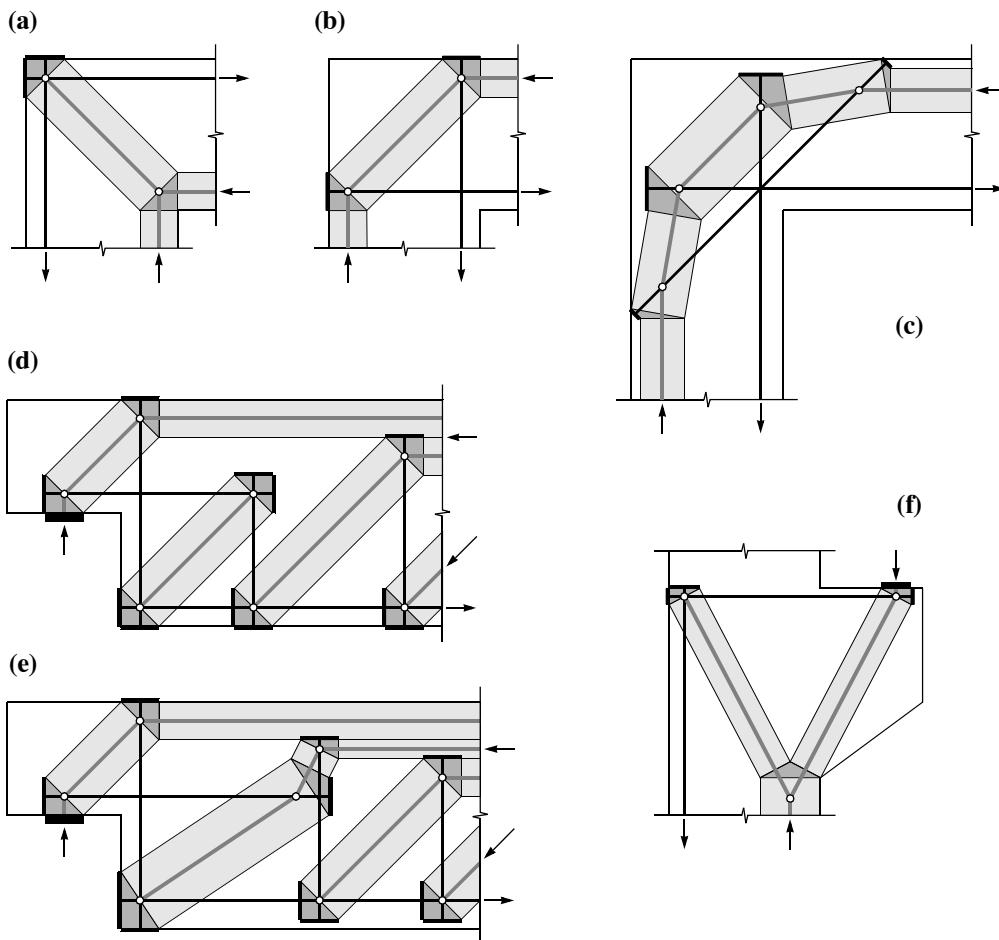


Bild 3.11 – Statische und geometrische Diskontinuitäten: (a) bis (c) Rahmenecken; (d) und (e) Träger mit eingeklinktem Auflager; (f) Konsole.

wehrungen denkbar [75, 92]. Bild 3.11 (f) zeigt den Grundfall der Kraftübertragung in Konsolen. Weitere Beispiele von Fachwerkmodellen beziehungsweise Spannungsfeldern für Fälle mit statischen oder geometrischen Diskontinuitäten sind in [107, 75, 92] zu finden.

### 3.4.4 Träger

#### Beispiele für Spannungsfelder

Bild 3.12 (a) zeigt Belastung und erwartetes Rissbild eines als einfacher Balken gelagerten profilierten Stahlbetonträgers. Der Träger wird nun als ebenes Element idealisiert; Ober- und Untergurt werden auf ihre Schwerpunktsachsen (sogenannte "stringer") reduziert und der Steg als ebene Scheibe (mit verschwindender Dicke) verstanden. In den Bildern 3.12 (b) bis (d) sind alternative, auf unterschiedlich gross angenommenen Neigungen der Betondruckdiagonalen basierende Fachwerkmodelle für das idealisierte ebene Tragwerkselement dargestellt, mit Druckkräften im Obergurt und den geneigten Diagonalen (Beton) sowie Zugkräften im Untergurt (Längsbewehrung) und in den vertikalen Pfosten (Bügelbewehrung); die verteilte Belastung ist dabei auf statisch äquivalente Einzellasten in den Knoten des Obergurts reduziert. Man erkennt, dass für flacher werdende Druckdiagonalen die erforderliche Menge an Längsbewehrung zu- und diejenige an Bügelbewehrung abnimmt.

Bild 3.12 (e) zeigt das dem Fachwerkmodell in Bild 3.12 (c) entsprechende Spannungsfeld; die gestrichelten Linien entsprechen den Wirkungslinien der Spannungsresultierenden der einzelnen Elemente des Spannungsfelds, und sie stimmen mit den Fachwerkstäben in Bild 3.12 (c) überein, ebenso wie die Beträge der Fachwerk-Stabkräfte und der Spannungsresultierenden. Das Spannungsfeld besteht aus Zug- und Druckstringer AF und GM, dem Fächer CEGI, dem im Auflagerpunkt A zentrierten Fächer AKM, dem parallelen Druckband ACIK sowie den vertikalen Zugbändern CEIK und ACKM. In Bild 3.12 (f) und (g) ist der Verlauf der Längskräfte in Zug- und Druckstringer aufgetragen; diese Verläufe können unter Betrachtung des Gleichgewichts der entlang der Gurtachsen wirkenden Belastung und der in den einzelnen Elementen auftretenden Kräfte ermittelt werden. Entlang der Fächerränder CE sowie GI und KM ergeben sich parabolische, entlang der Druckbandränder AC und IK lineare Verläufe. In den vertikalen Zugbändern CEIK und ACKM wirken gleichmässig verteilte Kräfte vom Betrag  $100 \text{ kNm}^{-1}$  beziehungsweise  $300 \text{ kNm}^{-1}$ . Man erkennt dass die Gurtkräfte gemäss Spannungsfeld und Fachwerkmodell in den Schnitten CK und EI übereinstimmen, also an Stellen, wo die vertikalen Bügelkräfte abgestuft sind (Diskontinuitätslinien der vertikalen Zugbänder).

Das in Bild 3.12 (h) dargestellte  $45^\circ$ -Fachwerkmodell veranschaulicht die Ausbreitung der Druckstringerkraft in der Obergurtplatte. Die eingeleitete Längskraft gemäss Bild 3.12 (k), welche dem Gradienten des Längskraftverlaufs in Bild 3.12 (g) entspricht (beziehungsweise der Horizontalkomponente der Druckkräfte in den Fächern und im parallelen Druckband entlang GM), stützt sich über geneigte Druckstreben auf die in den Schwerpunktsachsen der Oberflanschhälften angeordneten Druckstringer ab, siehe Bild 3.12 (i). Dies erfordert Querzugkräfte und eine entsprechende Verbügelung der Flanschplatte; man beachte, dass die Berücksichtigung der Stegbreite  $b_w = 200 \text{ mm}$  im Fachwerkmodell, siehe Bild 3.12 (i), zu einer Einsparung an Flanschbügelbewehrung führt. Analog kann die Ausbreitung der Zugstringerkraft auf die einzelnen Längsbewehrungsstäbe und die erforderliche Verbügelung im Untergurt untersucht werden. Selbstverständlich lassen sich die Fachwerkmodelle für die Ausbreitung der Gurtkräfte auch zu entsprechenden Spannungsfeldern verfeinern [75, 100].

Bild 3.13 (a) zeigt einen als einfachen Balken mit einseitigem Überhang gelagerten profilierten Stahlbetonträger und seine Belastung. In Bild 3.13 (b) sind ein mögliches Spannungsfeld und das entsprechende Fachwerkmodell dargestellt. Querkraftnullpunkte treten in einem Abstand von

4 m vom Auflager A, beim Lager B und am Balkenende C auf, und die entsprechenden Balkenabschnitte werden einfachheitshalber in gleich grosse Teilabschnitte unterteilt. Das Spannungsfeld besteht aus Zug- und Druckstringer, zentrierten Fächern an den Stellen, wo konzentrierte Kräfte eingeleitet werden, geneigten parallelen Druckbändern mit Seitenlängen von 1.0, 1.2 und 0.9 m (und folglich  $\theta = 42.0^\circ$ ,  $36.9^\circ$  und  $45.0^\circ$ ) sowie entsprechend breiten vertikalen Zugbändern. In Bild 3.13 (c) ist der Verlauf der Längskräfte  $F_{sup}$  und  $F_{inf}$  in den Gurten sowie der verteilten Bügelkraft  $f_w$  aufgetragen; wie bereits erwähnt, stimmen die Gurtkräfte gemäss Spannungsfeld und Fachwerkmodell an Stellen, wo die vertikalen, abschnittsweise gleichmässig verteilten Bügelkräfte abgestuft sind, überein. Ferner sei erwähnt, dass sich die Bügelkräfte an Schnittkörperdiagrammen mit Schnitten entlang der Ränder der parallelen Druckbänder beziehungsweise Fächer ( $f_w = \text{konstant}$ ) direkt bestimmen lassen. Der Verlauf der verteilten Bügel-

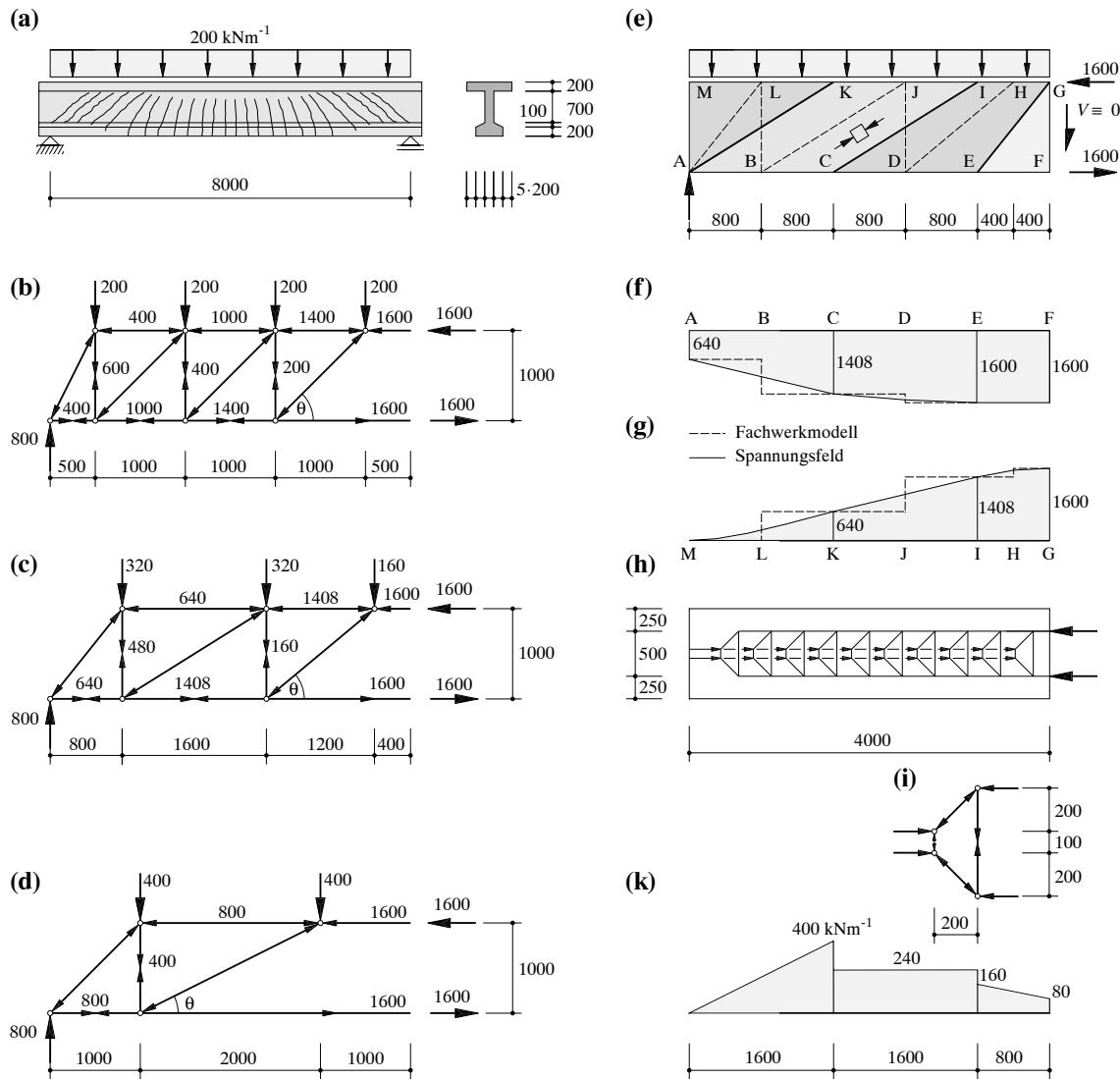


Bild 3.12 – Profilerter Stahlbetonträger: (a) statisches System, Belastung und Rissbild; (b) bis (d) alternative Fachwerkmodelle für eine Trägerhälfte; (e) diskontinuierliches Spannungsfeld entsprechend Fachwerkmodell (c); (f) Verlauf der Untergurtkraft; (g) Verlauf der Obergurtkraft; (h) Fachwerkmodell für Druckflansch; (i) Einzelfachwerk; (k) eingeleitete Längskraft je Längeneinheit und Flanschseite.

## Spannungsfelder

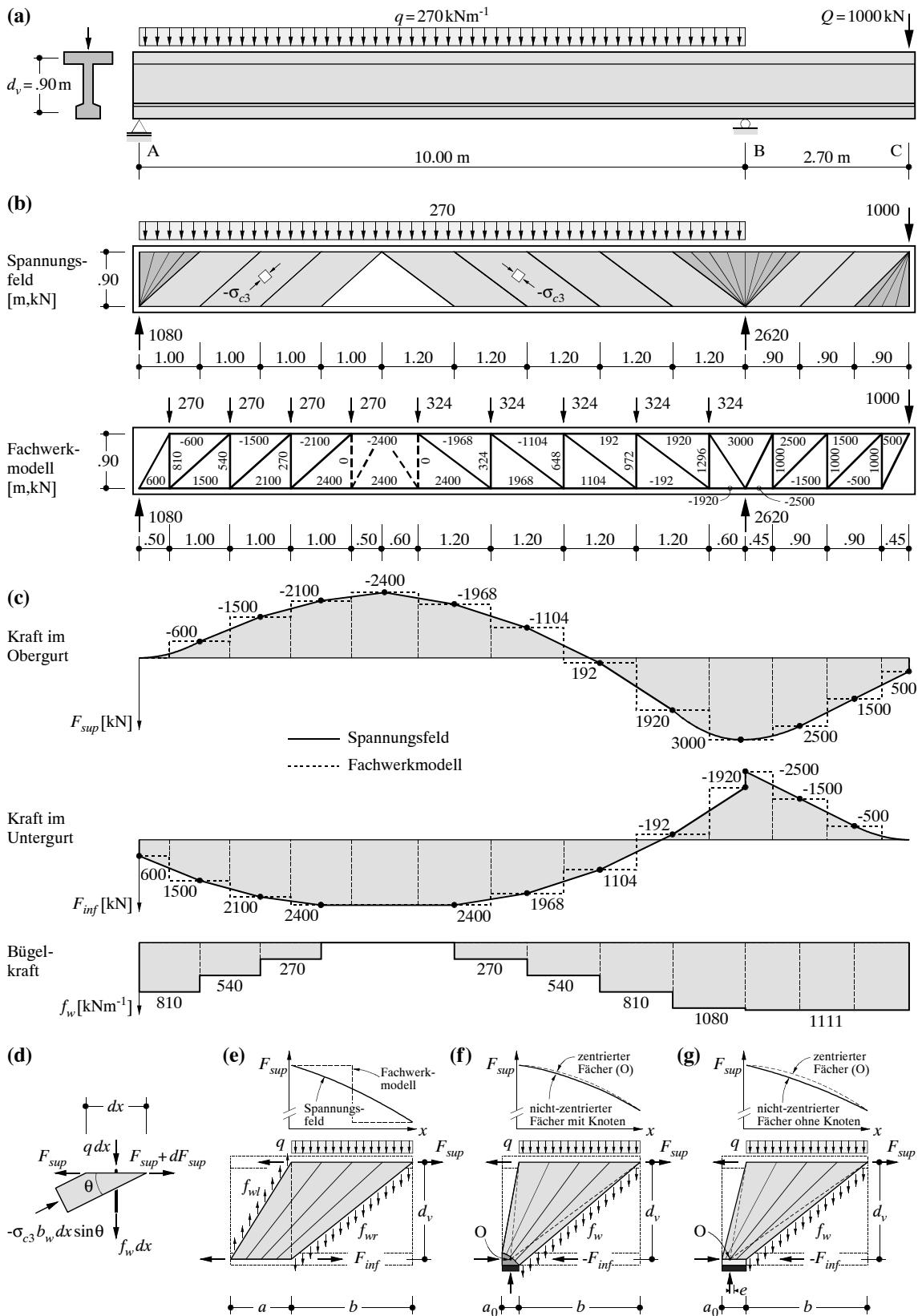


Bild 3.13 – Träger mit auskragendem Ende: (a) statisches System und Belastung; (b) diskontinuierliches Spannungsfeld und Fachwerkmodell; (c) Verlauf der Gurt- und Bügelkräfte; (d) Schnittkörperdiagramm am Obergurt; (e) zentrierter Fächer; (f) und (g) nicht-zentrierter Fächer mit beziehungsweise ohne Knotenbereich.

kraft ist treppenförmig. Solange Lasten nur am Obergurt angreifen und der Träger als gewichtslos angenommen wird, ist die Treppenlinie  $f_w \cot\theta$  der Querkraftlinie eingeschrieben; in der Literatur findet man für diese Tatsache den Begriff "staggering effect" [54, 55]. Allfällige unterhalb des Obergurts angreifende Lasten  $q_{inf}$  (im vorliegenden Fall das vernachlässigbare Eigengewicht der Stegscheibe und des Unterflansches) müssen mittels zusätzlicher Bügelbewehrung  $\Delta f_w = q_{inf}$  aufgehängt werden.

Für die Belastung und die Gurt- und Bügelkräfte lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen

$$\frac{dF_{sup}}{dx} = -(q + f_w) \cot\theta, \quad \frac{dF_{inf}}{dx} = f_w \cot\theta \quad (3.33)$$

formulieren ( $d_v = \text{konstant vorausgesetzt}$ ), siehe Bild 3.13 (d). Aus den Beziehungen (3.33) ist ersichtlich, dass, für  $q = \text{konstant}$ , die Gurtkräfte entlang der Ränder von parallelen Druckbändern linear ( $f_w = \text{konstant}$ ,  $\cot\theta = \text{konstant}$ ) und entlang der Ränder zentrierter Fächer parabolisch ( $f_w = \text{konstant}$ , lineare Variation von  $\cot\theta$ ) verlaufen.

Die Betondruckspannungen im Steg entlang des Ober- und Untergurts betragen

$$-\sigma_{c3} = (q + f_w)(1 + \cot^2\theta)/b_w \quad (3.34)$$

beziehungsweise

$$-\sigma_{c3} = f_w(1 + \cot^2\theta)/b_w \quad (3.35)$$

mit  $b_w = \text{Dicke der Stegscheibe}$ , siehe Bild 3.13 (d). Mit den Beziehungen (3.34) und (3.35) lässt sich die Fliessbedingung  $-\sigma_{c2} \leq f_c$  beziehungsweise die Stegdicke überprüfen. Allfällige am Untergurt angreifende Lasten  $q_{inf}$  werden durch Ersetzen von  $f_w$  durch  $(f_w - q_{inf})$  in den Beziehungen (3.34) und (3.35) mitberücksichtigt. Die Betondruckspannungen sind in den parallelen Druckbändern konstant (entlang der einzelnen Trajektorien und über die Breite des Druckbandes), entlang der (geraden) Trajektorien der Fächer variieren sie hyperbolisch.

Der Spannungszustand und die erforderliche Verbügelung in den Flanschen lassen sich auf der Grundlage der in die Gurte eingeleiteten Längskräfte (Gradienten der Gurtkraftverläufe in Bild 3.13 (c), vergleiche Bild 3.12 (k)) in Analogie zu Bild 3.12 (h) und (i) untersuchen.

### Allgemeiner zentrierter Fächer

Bild 3.13 (e) zeigt den für ein parallelgurtiges Spannungsfeld und gleichmässige Belastung allgemeinen Fall eines zentrierten Fächers, dessen gerade Trajektorien sich in einem ausserhalb des Spannungsfelds liegenden Punkt schneiden; wie bereits erwähnt, kann ein Spannungsfeld allgemein als Abfolge solcher Fächer konstruiert werden, was jedoch in der praktischen Anwendung unzweckmässig ist. Die Bügelkräfte auf beiden Seiten des Fächers erfüllen die Gleichgewichtsbedingung  $f_{wl} = (q + f_{wr})b/a$ . Die Betondruckspannungen  $-\sigma_{c3}$  variieren hyperbolisch entlang der Fächertrajektorien. Die grösste Betondruckspannung tritt in der rechten unteren Ecke des Fächers auf, wo die flachste Trajektorieneigung  $\theta$  zusammen mit dem grösseren Wert der verteilten Bügelkraft Max( $f_{wl}, f_{wr}$ ) auftritt, siehe (3.34) und (3.35). Die maximalen Betondruckspannungen können wesentlich grösser sein als in benachbarten Trajektorien paralleler Druckbänder; aus diesem Grunde sollten abrupte Änderungen der Trajektorieneigung  $\theta$  vermieden werden. Der zentrierte Fächer in Bild 3.13 (e) degeneriert für  $a = b$  zu einem parallelen Druckband und für  $a = 0$  zu einem zentrierten Fächer, der an seiner Spitze unendlich grosse Betondruckspannungen erzeugt.

## Dimensionierung der Knotenbereiche

In Wirklichkeit haben Auflager und Einzellasten immer endliche Ausdehnungen; diese können durch Einführung von nicht-zentrierten, auf ein Element mit endlicher Abmessung abgestützten Fächern überprüft werden, siehe Bilder 3.13 (f) und (g). Zentrierte Fächer gemäss Bild 3.13 (e) sind aufgrund der erwähnten hohen Konzentration der Betondruckspannungen in der flachsten Trajektorie ungeeignet. Man beachte, dass der in Bild 3.13 (g) dargestellte, auf der Länge  $a_0$  der Lagerplatte auf den Gurt abgestützte Fächer im Vergleich zu dem in Bild 3.13 (f) gezeigten Fächer, welcher auf einen Knotenbereich mit endlichen Abmessungen abgestützt ist, für gleiche Werte  $f_c$  eine grössere Ausdehnung der Lagerplatte erfordert (und ausserdem den Nachweis ausreichender Verbundfestigkeit, damit die Übertragung der Betondruckkräfte auf die Bewehrung auf der Länge der Auflagerbreite möglich ist); in der Regel wird sich deshalb die konstruktive Durchbildung der Auflager- und Lasteinleitungsdetails an Fächern gemäss Bild 3.13 (f) orientieren.

Die mit nicht-zentrierten Fächern erzeugten Gurtkräfte (hyperbolische Verläufe) sind kleiner als diejenigen, welche mit in einem Gurtpunkt zentrierten Fächern entwickelt werden (parabolische Verläufe), siehe Bilder 3.13 (f) und (g). Dies gilt, solange die Höhe des Knotenbereichs in Bild 3.13 (f) die entsprechende Flanschhöhe nicht übersteigt; andernfalls muss eine iterative Berechnung zur Bestimmung des reduzierten Hebelarms  $d_v$  durchgeführt werden. Die auf der Grundlage zentrierter Fächer gemäss Bild 3.13 (b) bestimmten Werte der Gurtkräfte liegen also auf der sicheren Seite, und die Anwendung nicht-zentrierter Fächer kann auf die Überprüfung ausreichender Abmessungen der Lager- beziehungsweise Lastplatten sowie der Flanschhöhe beschränkt werden.

## Nachweis der Betondruckfestigkeit im Fächerbereich

Der Spannungs- und folglich auch der Verzerrungszustand ist im allgemeinen für alle Trajektorienpunkte innerhalb eines Fächers unterschiedlich; für einen Fächer gemäss Bild 3.13 (f) liegt jedoch am Rande des Knotenbereichs in allen Trajektorien die Spannung  $\sigma_c = -f_c$  vor. Im Rahmen der Überprüfung der Stegbreite muss nachgewiesen werden, dass die Betondruckspannungen nirgends die effektive Betondruckfestigkeit  $f_c$  übersteigen, deren Grösse von der lokal vorhandenen Querverzerrung der Betondrucktrajektorien (in Normvorschriften meist in Abhängigkeit der Neigung des Druckfelds beziehungsweise der Drucktrajektorie,  $\theta$ , formuliert) abhängig ist, siehe Kapitel 7.1.4. Folglich müsste der Nachweis  $-\sigma_{c3} \leq f_c$  strenggenommen für alle Punkte eines Fächers geführt werden, weil in jedem Punkt eine unterschiedliche Kombination von  $-\sigma_{c3}$  und  $f_c$  vorliegt und nicht von vornherein feststeht, welches der kritische Punkt im Fächer ist. Allerdings fehlen sowohl die theoretischen als auch experimentelle Grundlagen, welche eine entsprechende Bemessung ermöglichen würden.

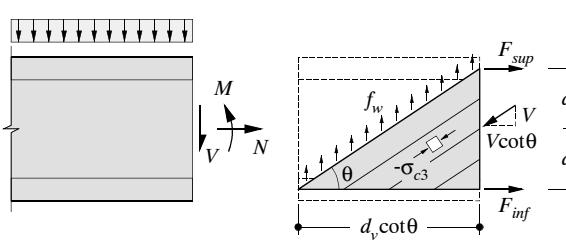
Deshalb wird für die Bemessungspraxis empfohlen [100, 101], einen nominellen Nachweis für die im parallelen Druckband, welches an den Fächer grenzt, auftretende Betondruckspannung durchzuführen (eine Querschnittsbemessung erfolgt dementsprechend in einem nominellen Querschnitt im Abstand  $d_v \cot \theta / 2$  vom Auflager), unter Verwendung eines in vernünftigem Masse konservativen Wertes für die effektive Betondruckfestigkeit  $f_c$ , damit ein sprödes Betonversagen durch Stegdruckbruch vermieden werden kann. Dieser nominelle Nachweis ist theoretisch gerechtfertigt, wenn die der Festlegung der effektiven Betondruckfestigkeit  $f_c$  zugrundeliegende Auswertung von Versuchsergebnissen ebenfalls bezogen auf die Fächergrenze beziehungsweise auf den nominellen Querschnitt erfolgt. Im allgemeinen treten im Fächerbereich deutlich kleinere Verzerrungen als im benachbarten parallelen Druckband auf, und demnach ist die Abminderung der Betonzylinderdruckfestigkeit auf den anzusetzenden effektiven Wert weniger ausgeprägt. Die im Fächer auftretenden höheren Betondruckspannungen führen daher in der

Regel nicht zu einem Versagen, und mit dem besprochenen Nachweisverfahren wird die tatsächlich kritische Betondruckspannung erfasst.

Auf der Grundlage einer eingehenden theoretischen Untersuchung wird in [38] die Berechtigung dieses Nachweisverfahrens bestätigt, sofern folgende zusätzliche Forderungen eingehalten sind: (1) die Breite der Lagerplatte ist für die Übertragung einer Betondruckspannung von  $2.5 \dots 3.0 \cdot (f'_c)^{2/3}$  auszulegen, falls der unterstützte Gurt ein Druckgurt ist (Zwischenauflager), beziehungsweise  $1.5 \dots 2.0 \cdot (f'_c)^{2/3}$  im Falle eines Endauflagers; (2) die im Fächer entlang des Gurtes auftretenden Betondruckspannungen dürfen die entsprechende, lokal vorliegende effektive Betondruckfestigkeit nicht übersteigen, was nur für Zuggurte, bei denen im Bruchzustand (aufgrund einer optimalen Abstufung der Längsbewehrung) eine Kombination von relativ flachen Druckspannungstrajektorien und bedeutenden plastischen Gurtdehnungen vorliegt, von Bedeutung ist, jedoch eines etwas umständlichen Nachweises bedarf.

### Querschnittsbemessung

Sofern alle statischen und geometrischen Größen entlang der Trägerachse nur allmählich veränderlich sind, lässt sich eine vereinfachte Querschnittsbetrachtung für kombinierte Beanspruchung aus Biegemoment, Quer- und Normalkraft rechtfertigen, siehe Bild 3.14. Man beachte, dass die Schnittgrößen  $M$  und  $N$  auf die Mitte der Steghöhe reduziert sind, welche im allgemeinen nicht mit der Schwerpunktsachse des Gesamtquerschnitts des Trägers übereinstimmt. Mit



$$\begin{aligned} F_{sup,inf} &= \mp \frac{M}{d_v} + \frac{|V|}{2} \cot \theta + \frac{N}{2} \\ f_w &= \frac{|V|}{d_v} \tan \theta \\ -\sigma_{c3} &= \frac{|V|}{b_w d_v} (\tan \theta + \cot \theta) \end{aligned} \quad (3.36)$$

Bild 3.14 – Querschnittsbemessung: (a) Schnittgrößen; (b) Schnittkörperdiagramm; (c) Gurtkräfte, verteilte Bügelkraft und Betondruckspannungen im Steg.

den Beziehungen (3.36) in Bild 3.14 (c) lassen sich die erforderlichen Widerstände der Gurte ( $A_s \geq F/f_{sy}$  beziehungsweise  $A_c \geq F/f'_c$ ) und der verteilten Bügelbewehrung ( $a_{sw} \geq f_w/f_{sy}$ ) sowie die erforderliche Dicke der Stegscheibe (mit  $-\sigma_{c3} \leq f_c$ ) bestimmen. Die mit der zweiten Gleichung (3.36) bestimmte Bügelbewehrung muss strenggenommen über eine Länge  $d_v \cot \theta$  in Richtung zunehmender Querkraft angeordnet werden (staggering effect), sodass man nicht von einer Querschnittsbemessung im eigentlichen Sinne sprechen kann. Allfällige am Untergurt angreifende Lasten  $q_{inf}$  müssen mittels zusätzlicher Bügelbewehrung  $\Delta f_w = q_{inf}$  aufgehängt werden. Die Neigung  $\theta$  des Betondruckfelds ist theoretisch frei wählbar; in der Regel werden aber Einschränkungen für  $\theta$  eingeführt, zum Beispiel  $0.5 \leq \cot \theta \leq 2.0$ , um ein frühzeitiges Versagen durch Zerreisen der Bügelbewehrung beziehungsweise Bruch des Stegbetons zu vermeiden. Formeln für eine Querschnittsbemessung bei vorgespannten Trägern mit veränderlicher Höhe und gekrümmter Spanngliedführung findet man in [60].

### Wahl der Neigung des Betondruckfelds

Wie bereits mehrfach erwähnt wurde, ist die Neigung  $\theta$  der Betondruckspannungstrajektorien in einem Spannungsfeld beziehungsweise jene der Betondruckdiagonalen in einem Fachwerkmo-

dell innerhalb der durch Normvorschriften vorgegebenen Schranken frei wählbar. Die Wahl von  $\theta$  hat eine unmittelbare Auswirkung auf die aus der Bemessung sich ergebenden Mengen an Längs- und Bügelbewehrung, da flachere Neigungen  $\theta$  zu grösseren Kräften in den Gurten und kleineren Bügelkräften im Steg führen.

Durch die Wahl von  $\theta$  lassen sich also die Mengen an Längs- und Bügelbewehrung direkt steuern. Dabei sollte man sich in erster Linie von praktischen und konstruktiven Gesichtspunkten leiten lassen, da für gegebene Geometrie und Belastung die erforderliche Gesamtmenge an Längs- und Bügelbewehrung (Mindestbügelbewehrung und Verankerungslängen der Längsbewehrung sind stets zu berücksichtigen) durch Variation von  $\theta$  nicht allzu stark beeinflusst werden kann; allgemein ist bei Trägern das Mengenverhältnis von erforderlicher Schub- und Längsbewehrung recht klein und nimmt mit zunehmender Trägerschlankheit ab. Flachere Winkel  $\theta$  ermöglichen (bei gleichem Bügeldurchmesser) grössere Bügelabstände, wodurch das Einbringen des Frischbetons erleichtert wird, jedoch wird gleichzeitig das Verankern der Mehrlängsbewehrung tendenziell erschwert. Zu beachten ist, dass sehr flache Neigungen  $\theta$  unter Umständen zu übergrossen erforderlichen Stegbreiten führen können.

Für Spannungsfelder und Fachwerkmodelle zur Bestimmung der erforderlichen Flanschverbügelung profilierten Träger werden folgende Werte für  $\theta$  empfohlen: in Druckflanschen  $\tan \theta \geq 0.5$ , in Zugflanschen  $\tan \theta \geq 0.8$ . Bei letzteren wird eine Einsparung an Flanschbügelbewehrung bei Wahl eines kleineren Winkels  $\theta$  weitgehend durch die dabei erwirkte notwendige Mehrlänge der Längsbewehrung getilgt.

### Durchlaufträger mit nicht-profiliertem Druckgurt

Ein wichtiger Sachverhalt ergibt sich bei Verwendung von nicht-zentrierten, auf einen Knotenbereich abgestützten Fächern gemäss Bild 3.13 (f) zur Beschreibung des Kraftflusses im Stützbereich eines Durchlaufträgers mit T- oder Rechteck-Querschnitt [100, 101], siehe Bild 3.15. Im Unterschied zu einem eine untere Flanschplatte aufweisenden Träger (Doppel-T-Querschnitt, Hohlkasten) können sich die Druckgurtkräfte in diesem Falle nicht in die äusseren Bereiche einer unteren Flanschplatte ausbreiten. Der Fächer über dem Zwischenauflager muss sich deshalb auf den Knotenbereich, welcher zur Aufnahme der Druckgurtkraft an der Spitze des benachbarten parallelen Druckbands erforderlich ist, aufsetzen. Folglich ist der Fächer mit einem reduzierten Hebelarm zu konstruieren, und es ergibt sich eine im Vergleich zu einem entsprechenden Träger mit unterer Flanschplatte grössere Zuggurtkraft über dem Zwischenauflager. Die Höhe der Biegedruckzone über dem Auflager,  $c$ , und die Breite der Lagerplatte,  $b$ , können direkt über

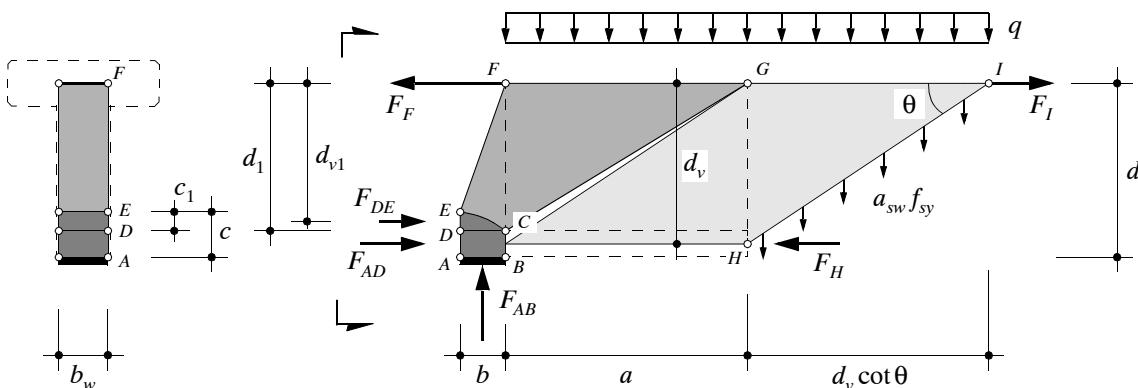


Bild 3.15 – Stützbereich eines Durchlaufträgers ohne untere Flanschplatte: Fächer und Knotenausbildung.

Gleichgewicht am Querschnitt beziehungsweise am Gesamtsystem bestimmt werden. Hingegen müssen – wenn man den Querschnittstragwiderstand voll ausnützen will – die für die korrekte Konstruktion des Knotenbereichs richtigen Größen der statisch-geometrisch miteinander verknüpften Hebelarme der parallelen Druckbänder,  $d_v$ , und des Fächers,  $d_{v1}$ , iterativ bestimmt werden. Mit anderen Worten wird in Fällen mit nicht-profilierten, aufgelagerten Druckgurten der Spannungszustand im Träger von der Knotengeometrie (über den Hebelarm des Spannungsfelds,  $d_v$ ) direkt beeinflusst. Im Beispiel von Bild 3.15 wird von einem konstanten Hebelarm der Gurtkräfte,  $d_v$ , ausgegangen, der einzig im Knotenbereich den statischen und geometrischen Gegebenheiten angepasst werden muss. Unter Berücksichtigung einer entlang des Trägers variablen Druckzonenhöhe lassen sich allgemeinere Lösungen entwickeln, vergleiche Kapitel 3.4.2, welche jedoch für die praktische Anwendung eine untergeordnete Rolle spielen; die Annahme eines parallelgurtigen Spannungsfelds führt in jedem Falle zu übersichtlicheren Berechnungen.

## 3.5 Bruchmechanismen

### 3.5.1 Einleitung

Die in Kapitel 3.4 behandelten Spannungsfelder (beziehungsweise Fachwerkmodelle) stellen eine direkte Anwendung des unteren (oder statischen) Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie dar. Sie führen deshalb zu einer sicheren Bemessung beziehungsweise zu einer auf der sicheren Seite liegenden Abschätzung der Traglast bestehender Tragwerke. Nicht selten jedoch ist das Entwickeln von Spannungsfeldern, welche die Beurteilung des Tragwiderstandes bestehender Tragwerke oder die Überprüfung von mit Finite Element Programmen durchgeföhrten Bemessungen ermöglichen sollen, eher beschwerlich. In solchen Fällen bietet sich die Betrachtung von Bruchmechanismen an, also eine Anwendung des oberen (oder kinematischen) Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie. Mit Hilfe geeigneter gewählter Bruchmechanismen können Bewehrungsgehalte, Betonabmessungen und wichtige konstruktive Details selbst in komplizierten Fällen mit relativ geringem rechnerischem Aufwand überprüft werden. Bruchmechanismen können auch verwendet werden, um das Sicherheitsmass einer anhand eines Spannungsfelds durchgeföhrten Bemessung abzuschätzen.

Bei der Anwendung des oberen Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie wird für einen gewählten Bruchmechanismus die Arbeit der äusseren Kräfte,  $W$ , mit der entlang der Gleitlinien (auch Bruchlinien genannt) dissipierten Arbeit  $D$  verglichen. Letztere setzt sich zusammen aus Anteilen infolge Fliessen der Bewehrung und Anteilen infolge plastischer Verzerrungen im Beton; die Dissipation in der fliessenden Bewehrung lässt sich sehr einfach berechnen, während die Dissipation im Beton einer etwas eingehenderen theoretischen Betrachtung bedarf. Der massgebende Mechanismus ist derjenige, welche das tiefste Verhältnis  $D/W$  beziehungsweise den tiefsten oberen Grenzwert für die Traglast ergibt.

### 3.5.2 Gleitlinien und Dissipation im Beton

Bild 3.16 (a) zeigt eine kinematische Diskontinuität (Gleitlinie, Bruchlinie) im Punkt P. Die  $n$ -Achse ist senkrecht zur Ebene der Diskontinuität und der Verschiebungs- oder Sprungvektor  $\delta$  liegt in der  $(n,t)$ -Ebene, in einem Winkel  $\alpha$  zu der  $t$ -Achse, welche parallel zur Diskontinuitätslinie ist.

Es wird angenommen, dass die den Richtungen  $n$  und  $t$  entsprechenden Komponenten  $\dot{u}_n$  und  $\dot{u}_t$  der plastischen Verschiebungskomponenten linear über die schmale Bruchzone der Dicke  $d$  va-

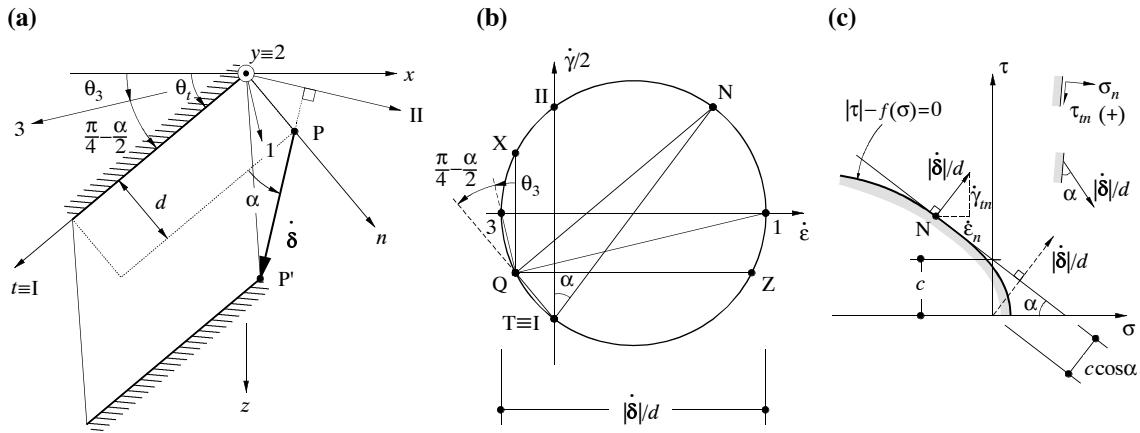


Bild 3.16 – Element einer Gleit- oder Bruchlinie (kinematischen Diskontinuität): (a) Bezeichnungen; (b) Mohrscher Kreis für Verzerrungssinkremente; (c) allgemeine Mohrsche Hüllkurve in der Spannungsebene, vergleiche Bild 2.18 (a).

riieren. Dies entspricht einem gleichförmigen Verzerrungszustand oder einer Zone homogener (plastischer) Deformation (da die plastischen Verzerrungssinkremente  $\dot{\varepsilon}_n = \partial \dot{u}_n / \partial n$ ,  $\dot{\varepsilon}_t = \partial \dot{u}_t / \partial t$  und  $\dot{\gamma}_{nt} = \partial \dot{u}_n / \partial t + \partial \dot{u}_t / \partial n$  von den Koordinaten  $n$  und  $t$  unabhängig sind). Die Hauptwerte  $\dot{\varepsilon}_1$  und  $\dot{\varepsilon}_3$  der plastischen Verzerrungssinkremente und die entsprechenden Hauptrichtungen lassen sich mit Hilfe eines Mohrschen Kreises, Bild 3.16 (b), bestimmen.

Für den Grenzfall  $d \rightarrow 0$  werden  $\dot{\varepsilon}_1$  und  $\dot{\varepsilon}_3$  unendlich gross, während der Hauptwert  $\dot{\varepsilon}_2$  (in Richtung der  $y$ -Achse) endlich bleibt; somit herrscht für  $d \rightarrow 0$  ein ebener Verzerrungszustand, da  $\dot{\varepsilon}_2 / \dot{\varepsilon}_1 \rightarrow 0$  und  $\dot{\varepsilon}_2 / \dot{\varepsilon}_3 \rightarrow 0$  (für eine endliche Dicke  $d > 0$  der Bruchzone wäre hingegen ein ebener Spannungszustand zu betrachten). Da  $y \equiv 2$  eine Hauptrichtung ist, ist die Betrachtung der Gleitlinie in der  $(n, t)$ -Ebene ausreichend. Die Hauptrichtungen 1 und 3 halbieren die Winkel zwischen der Parallelen (I) =  $t$  zur Gleitlinie und der Normalen (II) zur Verschiebungsrichtung; in diesen sogenannten charakteristischen Richtungen (I, II) treten reine Schiebungen auf. Die Hauptdehnungen  $\dot{\varepsilon}_1$  und  $\dot{\varepsilon}_3$  haben unterschiedliche Vorzeichen, außer im Spezialfall  $\alpha = \pi/2$ .

Unter der Annahme, der Beton sei ein isotropes, ideal plastisches (das heißt dem zugeordneten Fliessgesetz (2.33) beziehungsweise (2.36) folgendes) Material, das der modifizierten Fliessbedingung von Coulomb gehorcht, lässt sich bei Vernachlässigung der Betonzugfestigkeit  $f_{ct}$  (folglich gilt die “quadratische Fliessbedingung”, vergleiche Bilder 2.17 (b) und 2.18 (b)) die elementare Dissipationsarbeit (2.35) für den Beton mit der Beziehung (2.62) angeben, mit  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ , siehe Seite 33 ff. Für  $\alpha = \pi/2$  findet im Beton keine Dissipation statt, und man verwendet für diesen Spezialfall einer Gleitlinie den Begriff Kollapsriss.

### 3.5.3 Beispiele

#### Allgemeines

Bild 3.17 (a) zeigt die in Kapitel 3.4.2 (Bild 3.5) behandelte Scheibe mit Rechteckquerschnitt  $b_w \cdot h$  ohne Vertikalbewehrung, die eine über Strebewirkung direkt auf das Auflager abgestützte Einzellast trägt. Das in den Bildern 3.17 (a) beziehungsweise Bild 3.5 dargestellte Gleichgewichtsmodell ergibt für mechanische Bewehrungsgehalte  $\omega \leq 2/3$  (mit  $\omega = A_s f_{sy} / (b_w d f_c)$ ) den mit Gleichung (3.29) gegebenen unteren Grenzwert  $Q$  für die Traglast der Scheibe.

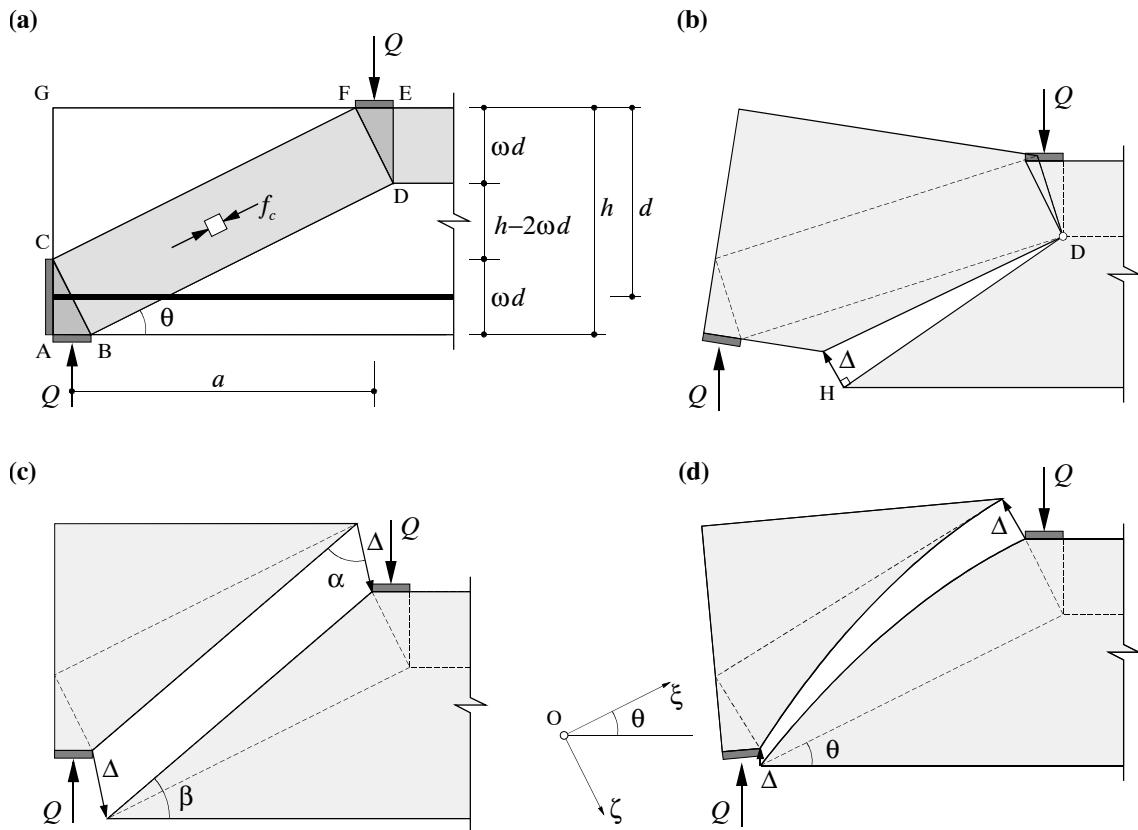


Bild 3.17 – Scheibe ohne Vertikalbewehrung unter Einzellast: (a) Streben-Modell; (b) Biege-mechanismus; (c) Translationsmechanismus; (d) Rotationsmechanismus.

Die drei in den Bildern 3.17 (b) bis (d) dargestellten Bruchmechanismen sind alle mit dem Streben-Stab-Modell in Bild 3.17 (a) verträglich, vergleiche Kapitel 2.3.4. Folglich liefert jeder der drei Mechanismen einen oberen Grenzwert  $Q$  für die Traglast, welcher mit dem Wert aus (3.29) identisch sein muss; somit ist mit (3.29) die Traglast  $Q_u$  des Systems (für  $\omega \leq 2/3$ ) gegeben.

### Translationsmechanismus

Am Beispiel des in Bild 3.17 (c) gezeigten translatorischen Bruchmechanismus lauten die Arbeit der äusseren Kräfte

$$W = \Delta \cos(\alpha + \beta - \pi/2) Q \quad (3.36)$$

und die Dissipationsarbeit

$$D = \Delta \cdot \frac{b_w h}{\sin \beta} \cdot \frac{f_c (1 - \sin \alpha)}{2} + \Delta b_w d \omega f_c \sin(\alpha + \beta - \pi/2) \quad (3.37)$$

Die beiden Terme rechterhand in (3.37) entsprechen der entlang der Bruchlinie BF im Beton erfolgten Dissipation, vergleiche (2.62), und der Dissipation in der Längsbewehrung. Gleichsetzen von  $W$  und  $D$  ergibt unter Verwendung von  $h/d = 1 + \omega/2$

$$Q = \frac{b_w h f_c}{2} \cdot \frac{\frac{1 - \sin \alpha}{\sin \beta} + 2 \sin(\alpha + \beta - \pi/2) \frac{\omega}{1 + \omega/2}}{\cos(\alpha + \beta - \pi/2)} \quad (3.38)$$

Der tiefste obere Grenzwert  $Q$  für die Traglast ergibt sich durch Minimierung des Ausdrucks (3.38) nach  $\alpha$ , was in (3.29) resultiert. Der optimale Wert von  $\alpha$  ergibt sich auch durch Beachtung der Tatsache, dass bei einem mit dem Streben-Stab-Modell verträglichen Mechanismus die Hauptdehnungsrichtung in der Bruchlinie mit der Hauptrichtung übereinstimmen muss. Diese Richtung halbiert den Winkel zwischen der Parallelen zur Bruchlinie und der Normalen zum Verschiebungsvektor eingeschlossenen Winkel (vergleiche Kapitel 3.5.2); dies bedeutet, dass die Verschiebung orthogonal zur Linie CD erfolgt. Für Bewehrungsgehalte  $\omega \geq 2/3$  ist die Verschiebung vertikal,  $\alpha + \beta = \pi/2$ , und in der Bewehrung findet keine Dissipation statt.

### Biegemechanismus

Der in Bild 3.17 (b) dargestellte Biegemechanismus führt, unabhängig von der Neigung des Kollapsrisses DH (Kollapsriss = Gleitlinie, die keine Dissipation im Beton hervorruft, bei der also der Verschiebungsvektor senkrecht zur Gleitlinie gerichtet ist), zu Gleichung (3.29). Dies bestätigt, dass in einer nur längs bewehrten Scheibe die Bewehrung (ohne Inanspruchnahme der Betonzugfestigkeit) nicht abgestuft werden kann.

### Rotationsmechanismus

Die Bruchlinie des in Bild 3.17 (d) gezeigten Rotationsmechanismus ist eine Hyperbel, welche in dem gemäss Bild gewählten Koordinatensystem mit  $\xi\zeta = \text{konstant}$  beschrieben wird. Das Rotationszentrum O liegt auf der Geraden durch D und C. Wird das Rotationszentrum entlang dieser Geraden ins Unendliche verschoben, degeneriert die Hyperbel zu einer Geraden, und man erhält den in Bild 3.17 (c) dargestellten Translationsmechanismus [50].

### Kollapsriss-Mechanismen

Im folgenden werden Scheiben mit Bewehrungen in horizontaler und vertikaler Richtung betrachtet. Solange die Betonabmessungen derart gewählt sind, dass der Bruch durch Fliessen der beiden Bewehrungen eintritt, werden Kollapsriss-Mechanismen gemäss Bild 3.18 eintreten.

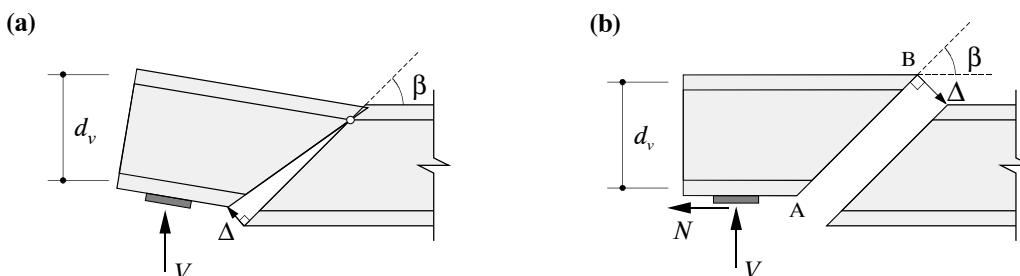


Bild 3.18 – Kollapsriss-Mechanismen: (a) Rotation; (b) Translation.

Obere Grenzwerte für die Traglast können in Abhängigkeit der Neigung  $\beta$  des Kollapsrisses ermittelt werden. Bei vollständigen Lösungen stimmt der optimale Winkel  $\beta$  mit der Neigung des entsprechenden parallelen Druckbandes im Spannungsfeld überein. Die massgebenden Mechanismen ergeben sich im allgemeinen, wenn die Kollapsrisse derart gewählt werden, dass ihre Enden in einem bügelbewehrten Querschnitt oder aber an Stellen, wo die Längsbewehrung abgestuft ist, zu liegen kommen [55]. Man beachte, dass herkömmliche Biegebruchmechanismen nichts anderes als Kollapsrissmechanismen mit vertikaler Bruchlinie sind.

### Stegdruckbruch-Mechanismen

Für grosse Längsbewehrungsgehalte tritt der Bruch durch Stegdruckbruchversagen ein, das heisst durch Versagen des Betons auf Druck bei gleichzeitigem Fliessen der Bügelbewehrung, ohne dass die Längsbewehrung ihre Fliessgrenze erreicht, siehe Bild 3.19. Da die Längsbewehrung nicht fliest, erfolgt die Bruchverschiebung in vertikaler Richtung. Obere Grenzwerte für die Traglast in Abhängigkeit der Neigung  $\beta$  der Bruchlinie können folgendermassen angegeben werden:

$$V = \frac{b_w d_v}{\sin \beta} \cdot \frac{f_c (1 - \cos \beta)}{2} + b_w d_v f_c \omega_v \cot \beta \quad (3.39)$$

$$\frac{\tau}{f_c} = \frac{V}{b_w d_v f_c} = \frac{1 - \cos \beta}{2 \sin \beta} + \omega_v \cot \beta \quad (3.40)$$

wobei  $\tau$  die nominelle Schubspannung und  $\omega_v = a_{sw} f_{sy} / (b_w f_c)$  den mechanischen Bewehrungsgehalt der Bügelbewehrung bezeichnen. Der erste Term rechterhand in (3.39) und (3.40) entspricht der entlang der Bruchlinie AB im Beton erfolgten Dissipation, siehe Bild 3.19 (a); der zweite Term stellt die Dissipation in der Bügelbewehrung dar. Minimierung des Ausdrucks (3.40) nach  $\beta$  führt zu

$$\tau/f_c = \sqrt{\omega_v (1 - \omega_v)}, \quad \cos \beta = 1 - 2 \omega_v \quad (3.41)$$

Der in Bild 3.19 (b) dargestellte, in Schubversuchen oft beobachtete Bruchmechanismus lässt sich als eine Serie von Bruchlinien gemäss Bild 3.19 (a) interpretieren; beide Mechanismen liefern die gleichen oberen Grenzwerte für die Traglast.

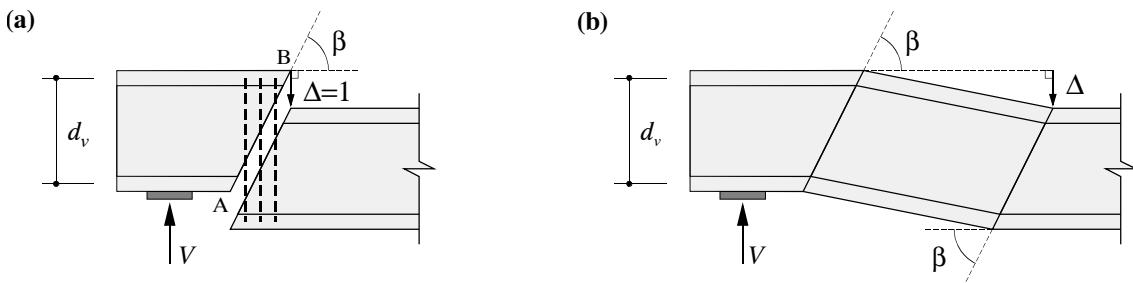


Bild 3.19 – Stegdruckbruch-Mechanismen: (a) diskrete Bruchlinie; (b) Bruchzone.

Für kleine Bügelbewehrungsgehalte gilt für die Neigung  $\beta$  der Bruchlinie die Einschränkung  

$$\tan \beta \geq h/a_{net} \quad (3.42)$$

wobei  $a_{net}$  den lichten Abstand zwischen Lasteinleitungs- und Auflagerplatte gemäss Bild 3.20 bezeichnet. Der kleinste obere Grenzwert für die Traglast beträgt

$$\frac{\tau}{f_c} = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1 + \frac{a_{net}^2}{h^2}} - \frac{a_{net}}{h} \right] + \omega_v \frac{a_{net}}{h} \quad (3.43)$$

Dieser Ausdruck kann in Beziehung gebracht werden zu der für eine Scheibe ohne Bügelbewehrung geltenden Gleichung (3.30), indem diese um den Beitrag der Bügel

$$\frac{\tau}{f_c} = \frac{h}{4a} + \omega_v \left( \frac{a}{h} - \frac{h}{4a} \right) \quad (3.44)$$

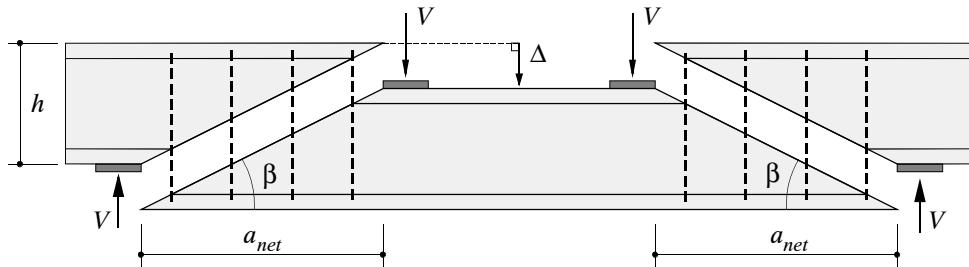


Bild 3.20 – Bruchmechanismus für Träger mit kleinem Bügelbewehrungsgehalt.

erweitert und die Beziehung

$$a_{net} = a - \frac{Q}{b_w f_c} = a - \frac{h^2}{4a} \quad (3.45)$$

verwendet wird.

Die für Stegdruckbruchversagen gefundenen Lösungen sind in Bild 3.21 dargestellt. Wie man sieht, kann mit einer Vergrösserung des Bügelbewehrungsgehalts über  $\omega_v = 0.5$  hinaus der Tragwiderstand nicht weiter erhöht werden.

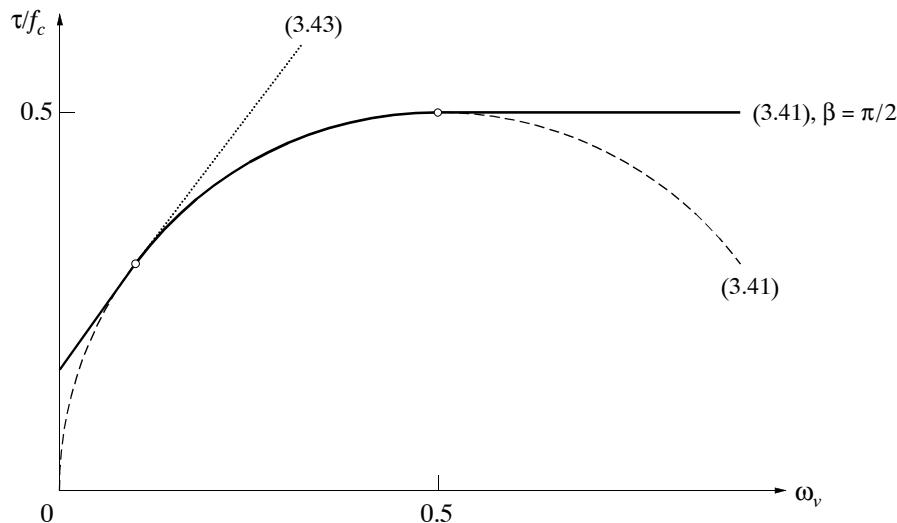


Bild 3.21 – Traglast für Träger mit starker Längsbewehrung.

### Bruchmechanismen für Durchlaufträger

Bild 3.22 zeigt mögliche Bruchmechanismen für (profilierte) Durchlaufträger. Weil das System statisch überbestimmt ist, treten im allgemeinen mehrere Kollapsrisse oder Stegdruckbruchzonen auf. Mögliche Kollapsriss-Mechanismen für Aussen- und Innenfelder sind in den Bildern 3.22 (a), (b), (d), (e) gezeigt. Die Kollapsrisse sind dabei derart zu wählen, dass sie in einem bügelbewehrten Querschnitt oder einem Querschnitt, in welchem die Längsbewehrung abgestuft ist, enden; insbesondere bei ungenügender Abdeckung der Zugkraftlinie werden solche Mechanismen oft massgebend. Dabei ist zu beachten, dass der Tragwiderstand gegenüber Fällen, bei

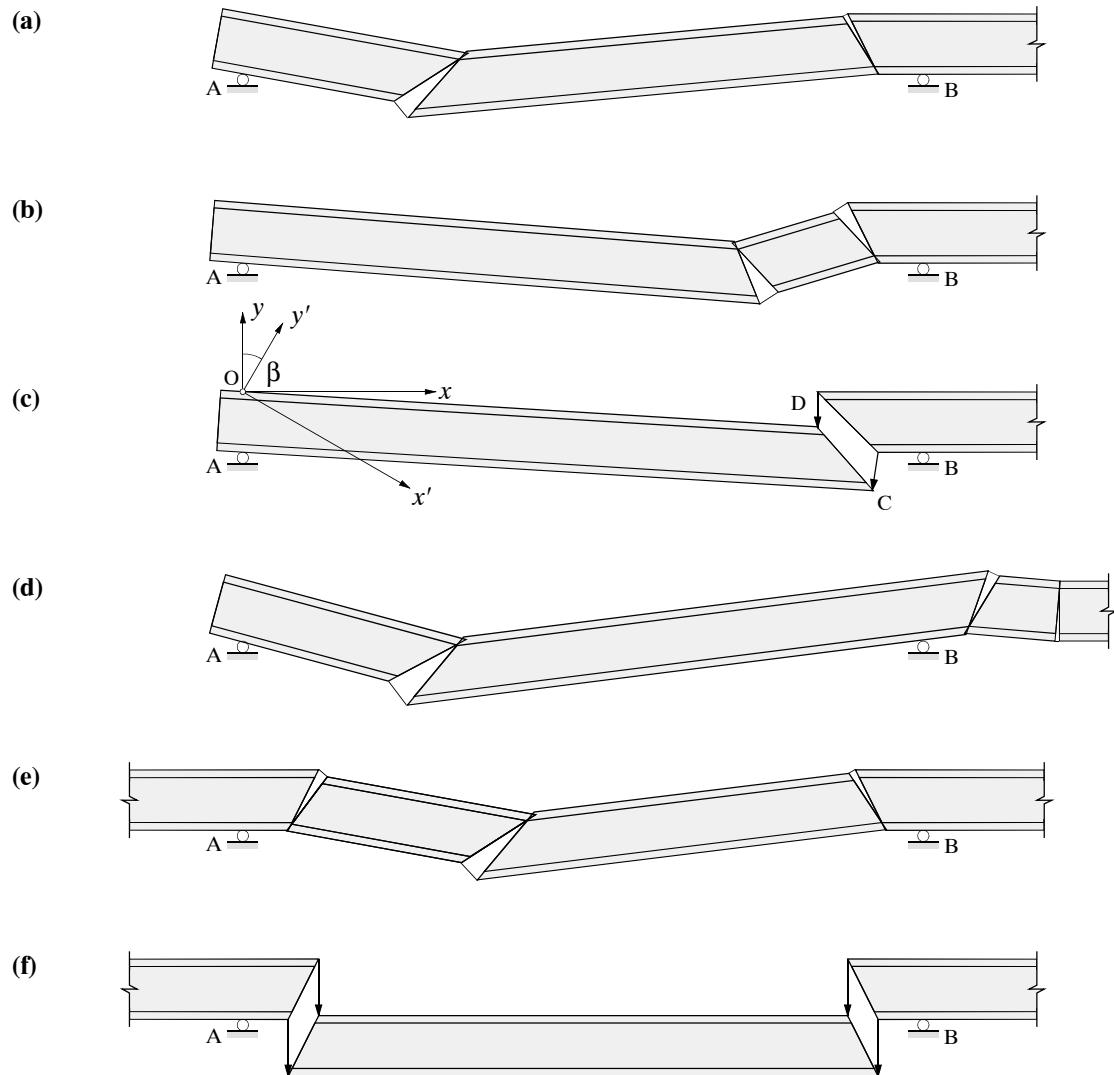


Bild 3.22 – Bruchmechanismen für Durchlaufträger.

denen herkömmliche Biegebruchmechanismen mit vertikal verlaufendem Kollapsriss den Bruchzustand bestimmen, wesentlich kleiner sein kann.

Der in Bild 3.22 (f) dargestellte Stegdruckbruchmechanismus ist identisch mit den in Bild 3.19 beziehungsweise 3.20 gezeigten Mechanismen. Der in Bild 3.22 (c) gezeigte Mechanismus ist analog zu jenem in Bild 3.17 (d); der Balkenabschnitt OACD rotiert um den Punkt O, und folglich ergibt sich im Obergurt keine Dissipation; die Bruchlinie CD ist eine Hyperbel, welche im gemäss Bild 3.22 (c) gewählten Koordinatensystem mit  $\xi \zeta = \text{konstant}$  beschrieben wird.

Falls Schubversagen und Versagen infolge ungenügender Verankerungslängen der Längsbewehrung ausgeschlossen werden können, resultieren herkömmliche Biegebruchmechanismen (z.B. gemäss den Bildern 2.19 bis 2.21) in guten Abschätzungen der Traglast.



## 4 Bruchwiderstand von Platten

*Walter Kaufmann*

### 4.1 Einleitung

#### 4.1.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird die Traglast dünner Platten mit kleinen Durchbiegungen untersucht. Dabei wird ideal plastisches Materialverhalten vorausgesetzt, ohne auf Fragen des Verformungsbedarfes und des Verformungsvermögens näher einzugehen. Da Platten in der Regel eher schwach bewehrt und somit sehr duktil sind, besteht diesbezüglich gewöhnlich wenig Anlass zu Bedenken.

Platten sind die am weitesten verbreitete Anwendung der Stahlbetonbauweise. Ihrer Bedeutung entsprechend werden sie in diesem Kapitel eingehend behandelt. Dabei werden zunächst einige grundlegende Beziehungen zusammengestellt, Kapitel 4.2, und Fliessbedingungen hergeleitet, Kapitel 4.3. Anschliessend werden Lösungen nach der statischen und der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie vorgestellt, Kapitel 4.4 und 4.5. Der Einfluss von Querkräften wird in Kapitel 4.6 erläutert, während sich Kapitel 4.7 dem Einfluss von Membrankräften widmet, deren günstige Wirkung bei der Bemessung zumeist vernachlässigt wird.

Das Hauptaugenmerk in den Kapiteln 4.4 und 4.5 liegt auf zwei Berechnungsverfahren, welche sich sehr gut für die Bemessungspraxis eignen: die Streifenmethode nach Hillerborg [29], welche auf dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie beruht, und die Fliessgelenklinienmethode nach Johansen [37]. Letztere wurde bereits vor der Entwicklung der Plastizitätstheorie verwendet und ist heute die mit Abstand am weitesten verbreitete Anwendung der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie. Während sich die Streifenmethode vor allem für die Bemessung eignet, leistet die Fliessgelenklinienmethode bei der Überprüfung von (Computer-)berechnungen und der Analyse bestehender Bauwerke gute Dienste.

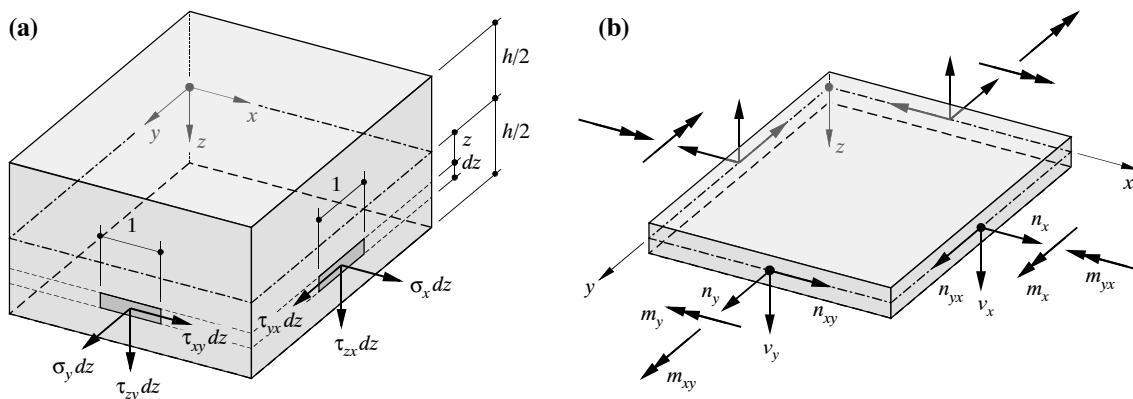


Bild 4.1 – Plattenelement: (a) Spannungen; (b) Spannungsresultierende für allgemeine Beanspruchung.

### 4.1.2 Spannungsresultierende

Die in den Schnittflächen eines Plattenelementes angreifenden Spannungen, Bild 4.1 (a), können zu Spannungsresultierenden gemäss Bild 4.1 (b) zusammengefasst werden. Allgemein ergeben sich für ein Plattenelement die Biege- und Drillmomente

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, \quad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, \quad m_{xy} = m_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (\text{in kNm/m} = \text{kN}) \quad (4.1)$$

die Querkräfte

$$v_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} z dz, \quad v_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} z dz \quad (\text{in kN/m}) \quad (4.2)$$

und die Membrankräfte

$$n_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz, \quad n_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz, \quad n_{xy} = n_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \quad (\text{in kN/m}) \quad (4.3)$$

Die Biege- und Drillmomente sowie die Querkräfte bilden den Biegespannungszustand, die Membrankräfte den Membranspannungszustand. Im folgenden werden primär oder ausschliesslich senkrecht zu ihrer Mittelfläche beanspruchte Platten betrachtet, in welchen ein Biegespannungszustand vorherrscht. Membrankräfte können deshalb vorerst ausser acht gelassen werden; ihr Einfluss auf das Tragverhalten von Platten wird in Kapitel 4.7 erläutert.

Für Spannungen und Spannungsresultierende werden die in Bild 4.1 illustrierten Vorzeichenkonventionen verwendet. Danach wirken positive Spannungen an Elementen mit positiver äusserer Normalenrichtung in positiver Koordinatenrichtung; für Normalspannungen bedeutet dies, dass Zugspannungen positiv sind. Positive Membran- und Querkräfte entsprechen positiven Spannungen, und positive Momente entsprechen positiven Spannungen nach obenstehender Definition für positive Werte der Koordinate  $z$ . Bei doppelten Indizes steht jeweils der erste Index für die Richtung, in welcher die Spannung wirkt, während der zweite Index die Normalenrichtung des Flächenelementes bezeichnet, an welchem die Spannung angreift.

## 4.2 Statische und kinematische Beziehungen

### 4.2.1 Gleichgewichtsbedingungen

#### Kartesische Koordinaten

Gleichgewicht der am Plattenelement in Bild 4.2 (a) angreifenden Kräfte und Momente liefert

$$\begin{aligned} v_{x,x} + v_{y,y} + q &= 0 \\ m_{x,x} + m_{xy,y} - v_x &= 0 \\ m_{y,y} + m_{yx,x} - v_y &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

wobei Indizes nach einem Komma partielle Ableitungen nach den entsprechenden Variablen bezeichnen. Daraus ergibt sich durch Einsetzen der zweiten und dritten in die erste Gleichung (4.4) die Gleichgewichtsbedingung in kartesischen Koordinaten

$$m_{x,xx} + 2m_{xy,xy} + m_{y,yy} + q = 0 \quad (4.5)$$

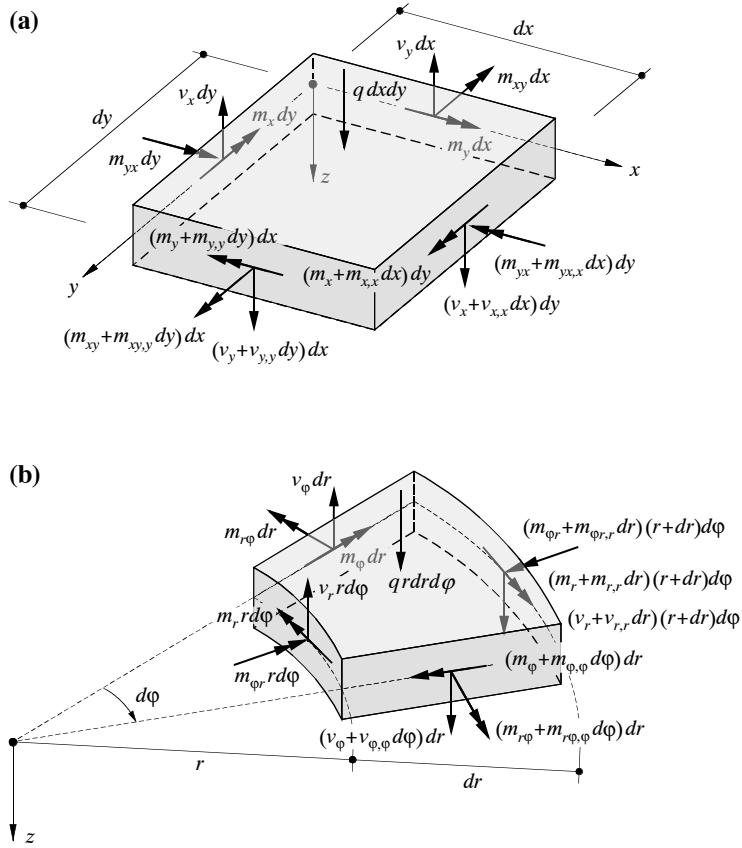


Bild 4.2 – Gleichgewichtsbedingungen: (a) kartesische Koordinaten; (b) Zylinderkoordinaten.

### Zylinderkoordinaten

Gleichgewicht der am Plattelement in Bild 4.2 (b) angreifenden Kräfte und Momente liefert die Beziehungen

$$\begin{aligned} (rv_r)_{,r} + v_{\phi,\phi} + qr &= 0 \\ (rm_r)_{,r} - m_\phi + m_{r\phi,\phi} - rv_r &= 0 \\ 2m_{r\phi} + r(m_{r\phi,r}) + m_{\phi,\phi} - rv_\phi &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

und somit, durch Einsetzen der zweiten und dritten in die erste Gleichung (4.6) die Gleichgewichtsbedingung in Zylinderkoordinaten

$$\frac{(rm_r)_{,rr}}{r} + \frac{m_{\phi,\phi\phi}}{r^2} - \frac{m_{\phi,r}}{r} + \frac{2(rm_{r\phi})_{,r\phi}}{r^2} + q = 0 \quad (4.7)$$

Für hinsichtlich Belastung und Lagerung rotationssymmetrische Fälle verschwinden die Drillmomente  $m_{r\phi}$  und die Querkräfte  $v_\phi$ , und die verbleibenden Spannungsresultierenden  $m_r$ ,  $m_\phi$  und  $v_r$  sind vom Winkel  $\phi$  unabhängig. Aus (4.7) folgt somit durch Integration über  $r$  die Beziehung

$$(rm_r)_{,r} - m_\phi + \int_0^r qr dr = 0 \quad (4.8)$$

#### 4.2.2 Spannungstransformation

##### Biege- und Drillmomente

Momentengleichgewicht an den in Bild 4.3 (a) dargestellten Plattenelementen liefert

$$\begin{aligned} m_n &= m_x \cos^2 \varphi + m_y \sin^2 \varphi + m_{xy} \sin 2\varphi \\ m_t &= m_x \sin^2 \varphi + m_y \cos^2 \varphi - m_{xy} \sin 2\varphi \\ m_{tn} &= (m_y - m_x) \sin \varphi \cos \varphi + m_{xy} \cos 2\varphi \end{aligned} \quad (4.9)$$

Diese Beziehungen können als Transformationsformeln für Biege- und Drillmomente in einem beliebigen Schnitt mit der Normalen  $n$ , deren Richtung durch den Winkel  $\varphi$  festgelegt ist, aufgefasst werden. Sie lassen sich mit Hilfe eines Mohrschen Kreises darstellen, Bild 4.3 (b); Drillmomente werden hier positiv gerechnet, wenn der ihnen entsprechende positive (rechtsdrehende) Momentenpfeil in Richtung des betrachteten Schnittrandes weist.

Die Hauptrichtungen, für welche die Drillmomente verschwinden,  $m_{tn} = 0$ , sind durch die Beziehung

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2m_{xy}}{m_x - m_y} \quad (4.10)$$

bestimmt, und die Hauptmomente  $m_1$  und  $m_2$  in den entsprechenden Richtungen betragen

$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4m_{xy}^2}}{2} \quad (4.11)$$

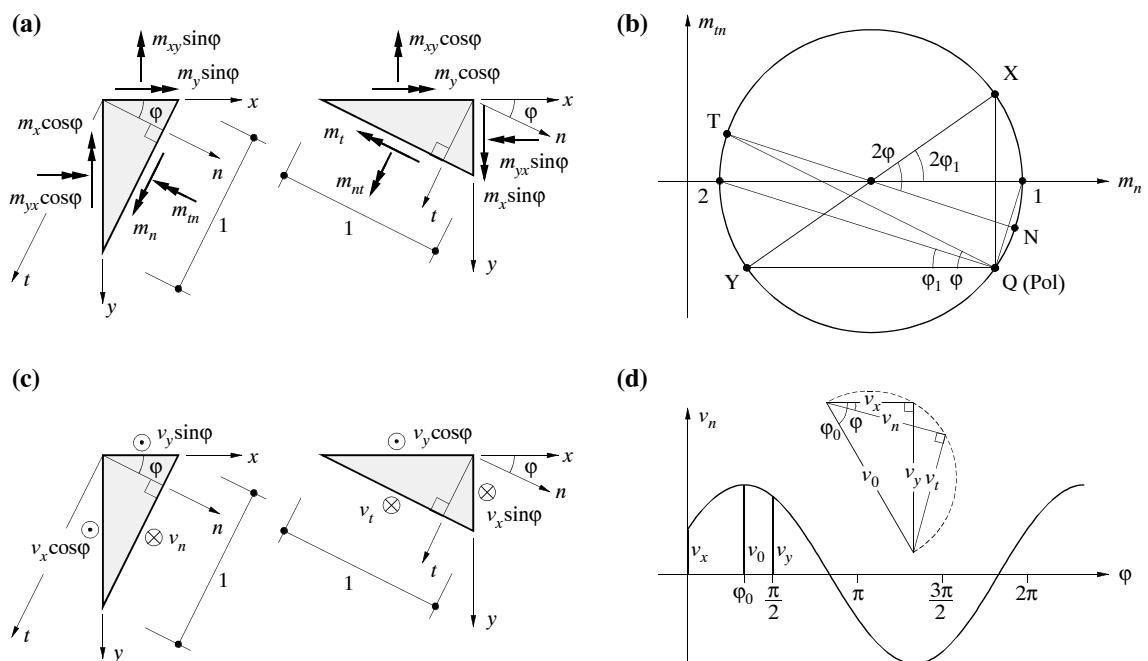


Bild 4.3 – Spannungstransformation: (a), (b) Momente; (c), (d) Querkräfte.

## Querkräfte

Gleichgewicht der an den Plattenelementen in Bild 4.3 (c) angreifenden Kräfte liefert

$$\begin{aligned} v_n &= v_x \cos \varphi + v_y \sin \varphi \\ v_t &= -v_x \sin \varphi + v_y \cos \varphi \end{aligned} \quad (4.12)$$

Diese Beziehungen können als Transformationsformeln für Querkräfte in einem beliebigen Schnitt mit der Normalen  $n$ , deren Richtung durch den Winkel  $\varphi$  festgelegt ist, aufgefasst werden. Die trigonometrischen Funktionen lassen sich mit Hilfe eines Thaleskreises deuten, Bild 4.3 (d). An jeder Stelle der Platte wird eine Hauptquerkraft

$$v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (4.13)$$

in Richtung  $\varphi_0$  übertragen, wobei

$$\tan \varphi_0 = \frac{v_y}{v_x} \quad (4.14)$$

ist. Senkrecht zu dieser Richtung wird keine Querkraft abgetragen. Die Hauptrichtungen der Querkräfte und der Momente fallen nur in Spezialfällen zusammen, allgemein ist  $\varphi_0 \neq \varphi$ .

### 4.2.3 Statische Randbedingungen und Diskontinuitäten

#### Randbedingungen

Am Rand einer Platte greift allgemein ein Biegemoment  $m_n$ , ein Drillmoment  $m_{tn}$  und eine Querkraft  $v_n$  an, Bild 4.4 (a). Nach Kirchhoff [41] erhält man für dünne elastische Platten mit kleinen Durchbiegungen eine inhomogene Bipotentialgleichung für die Durchbiegungen der Platte, deren Lösungen sich nur zwei Randbedingungen anpassen lassen. Deshalb wird bei der Behandlung von einfach gelagerten und freien Plattenrändern eine weitere Bedingung eingeführt. Die Drillmomente  $m_{tn}$  werden dabei durch eine stetige Verteilung von vertikalen Kräftepaaren ersetzt, Bild 4.4 (b), wobei sich an den Grenzen zwischen den infinitesimalen Elementen der Länge  $dt$  die Kräfte bis auf den Zuwachs  $m_{tn,t} dt$  aufheben. Der Zuwachs pro Längeneinheit  $m_{tn,t}$  wird nun mit der Querkraft  $v_n$  zu einer Stützkraft

$$v_n + m_{tn,t} = m_{n,n} + 2m_{nt,t} \quad (4.15)$$

zusammengefasst, Bild 4.4 (c). Für die rechte Seite von Gleichung (4.15) wurde die zweite Beziehung (4.4) benutzt. An einer Plattencke addieren sich die Drillmomente  $m_{tn}$  der beiden zusammentreffenden Ränder gemäss Bild 4.4 (d) zu einer Eckkraft

$$2m_{tn} \quad (4.16)$$

Die beschriebene Behandlung von Drillmomenten am Plattenrand geht auf Thomson und Tait [104] zurück und lässt sich mit dem Prinzip von de Saint Venant begründen. Aus der Sicht der statischen Methode der Plastizitätstheorie ist jedoch eine Erklärung der Tragwirkung im Bereich von Plattenrändern vorzuziehen, welche nur auf Gleichgewichtsüberlegungen beruht, Bild 4.4 (e). In einer schmalen Randzone der Platte muss aus Gleichgewichtsgründen eine Randquerkraft

$$V_t = -m_{tn} \quad (4.17)$$

existieren, sofern der Plattenrand spannungsfrei ist und die in der Randzone auftretenden Spannungen  $\sigma_t$  sich in  $t$ -Richtung nicht ändern [15].

Aus der Existenz der Randquerkräfte (4.17) folgen die Beziehung (4.16) für die Eckkräfte und der Beitrag  $m_{tn,t}$  der Drillmomente zur Stützkraft (4.15). Die entsprechenden Randbedingungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- eingespannter Rand:  $m_n$ ,  $m_{tn}$  und  $v_n$  beliebig
- einfach gelagerter Rand:  $m_n = 0$ , resultierende Stützkraft  $v_n + m_{tn,t} = m_{n,n} + 2m_{nt,t}$
- freier Rand:  $m_n = 0$ , verschwindende Stützkraft  $v_n + m_{tn,t} = m_{n,n} + 2m_{nt,t} = 0$

Diese Randbedingungen folgen aus reinen Gleichgewichtsbetrachtungen und sind somit für beliebiges Materialverhalten gültig. Für dünne elastische Platten können strengere Randbedingungen formuliert werden [109], welche jedoch für die Behandlung nach der Plastizitätstheorie nicht relevant sind.

Die Randquerkräfte (4.17) sind bei der Ausbildung der Bewehrung entlang von einfach gelagerten und freien Rändern von Stahlbetonplatten zu berücksichtigen. Werden entlang von solchen Rändern Drillmomente in Rechnung gestellt, so ist zur Aufnahme von  $V_t$  grundsätzlich eine entsprechende Bewehrung anzugeben. Dies kann anhand des in Bild 4.4 (f) dargestellten Fachwerkmodells für den Kraftfluss in der Ecke einer auf reine Drillung beanspruchten Rechteckplatte veranschaulicht werden. An der Plattenoberseite und an der Plattenunterseite bilden sich zueinander senkrechte, unter  $45^\circ$  zu den Plattenrändern geneigte Betondruckstreben aus, deren Komponenten in Richtung der Randnormalen durch randparallele Bewehrung aufgenommen werden. Die Komponenten in Richtung der Plattenränder werden durch geneigte Betondruckstreben in den Randstreifen weitergeleitet; die Vertikalkomponenten dieser Strebenkräfte entspre-

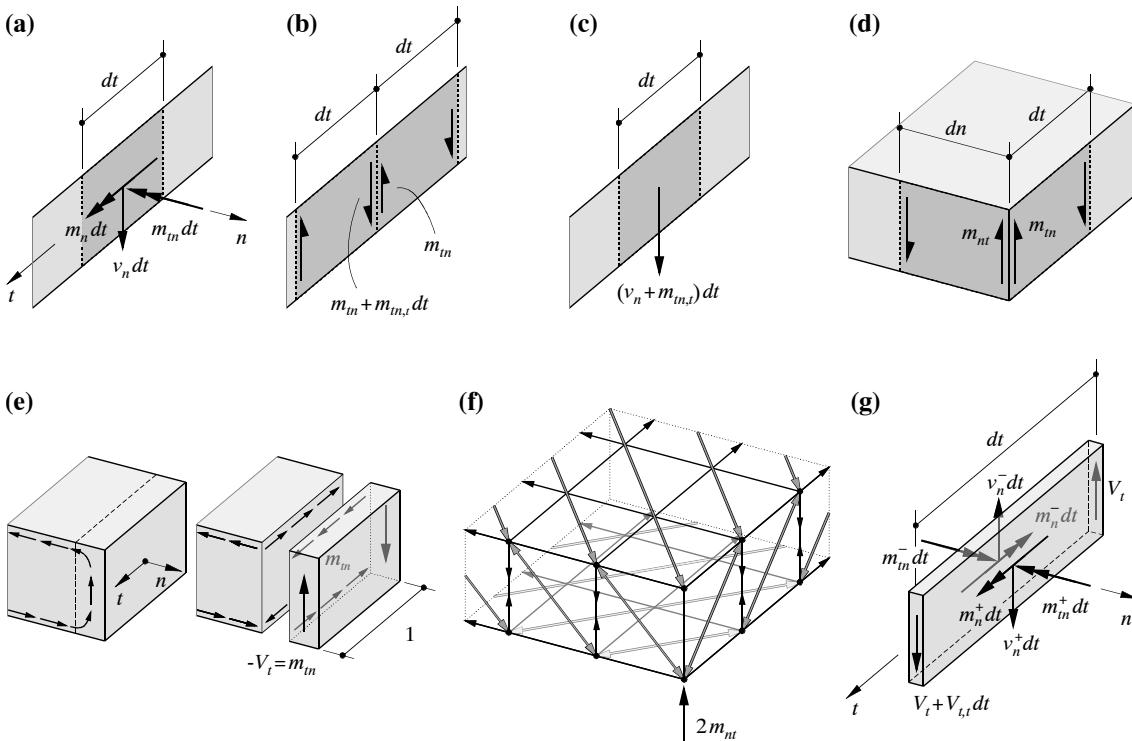


Bild 4.4 – Statische Randbedingungen und Diskontinuitäten: (a) Spannungsresultierende am Plattenrand; (b) Ersatzkräfte für Drillmoment; (c) Stützkraft; (d) Eckkraft; (e) Querkraft in Randzone; (f) Kraftfluss in Plattenecke; (g) Diskontinuität.

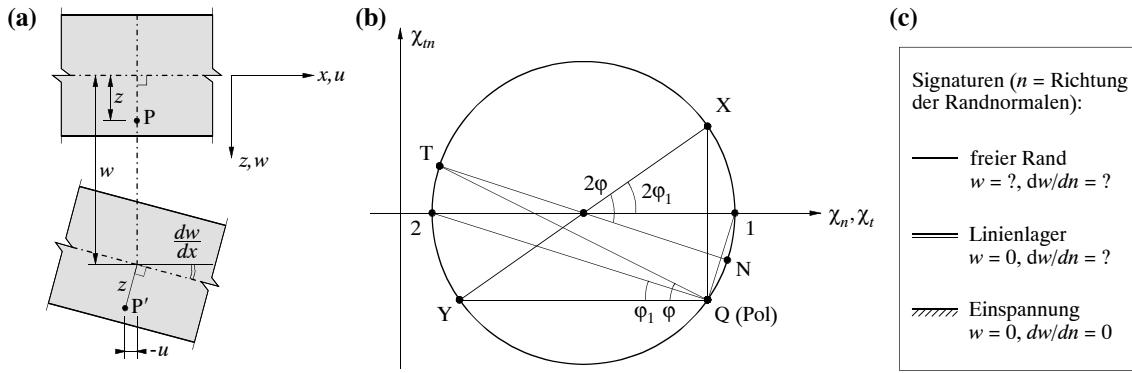


Bild 4.5 – Kinematische Randbedingungen und Diskontinuitäten: (a) Verformungen einer Platte; (b) Mohrscher Kreis für Krümmungen ( $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ ); (c) für kinematische Randbedingungen verwendete Signaturen.

chen den Randquerkräften (4.17). Zu ihrer Aufnahme ist eine vertikale Bewehrung erforderlich. Diese kann mit Steckbügeln oder durch eine entsprechende Abbiegung der Biegebewehrung realisiert werden.

### Diskontinuitätslinien

Fügt man in Gedanken zwei Platten an ihren freien Rändern zusammen, so kann aus der Äquivalenz von Drillmomenten am Plattenrand und Randquerkräften gemäss (4.17) darauf geschlossen werden, dass an statischen Diskontinuitätslinien im Platteninnern, Bild 4.4 (g), wohl die Biegemomente  $m_n$  stetig verlaufen müssen, die Drillmomente  $m_{nt}$  und die Querkräfte  $v_n$  hingegen springen dürfen. Dabei müssen an einer statischen Diskontinuitätslinie, entlang welcher eine Querkraft  $V_t$  abgetragen wird, die Beziehungen  $m_n^- = m_n^+$ ,  $V_t = m_{nt}^+ - m_{nt}^-$  und  $V_{t,t} = v_n^- - v_n^+$  erfüllt sein, siehe Bild 4.4 (g).

#### 4.2.4 Kinematische Beziehungen und Randbedingungen

Für dünne Platten geht man üblicherweise davon aus, dass Normalen zur Mittelebene der Platte gerade und senkrecht zur verformten Mittelfläche bleiben, Bild 4.5 (a). Somit ergeben sich die Verschiebungen  $u$ ,  $v$ , und  $w$  (in Richtung  $x$ ,  $y$ , und  $z$ ) eines beliebigen Punktes  $P$  im Abstand  $z$  von der Mittelebene zu

$$u = -zw_{,x}, \quad v = -zw_{,y}, \quad w = w \quad (4.18)$$

und aus den kinematischen Relationen

$$\varepsilon_x = u_{,x}, \dots, \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x}, \dots \quad (4.19)$$

erhält man die Verzerrungen

$$\varepsilon_x = -zw_{,xx}, \quad \varepsilon_y = -zw_{,yy}, \quad \gamma_{xy} = -2zw_{,xy}, \quad \varepsilon_z = \gamma_{zy} = \gamma_{zx} = 0 \quad (4.20)$$

oder bei Verwendung der Krümmungen  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  und der Drillung  $\chi_{xy}$  gemäss

$$\chi_x = -w_{,xx}, \quad \chi_y = -w_{,yy}, \quad \chi_{xy} = -w_{,xy} \quad (4.21)$$

die Beziehungen

$$\varepsilon_x = z\chi_x, \quad \varepsilon_y = z\chi_y, \quad \gamma_{xy}/2 = z\chi_{xy} \quad (4.22)$$

Aus (4.22) ist ersichtlich, dass die Krümmungen  $(\chi_x, \chi_y, \chi_{xy})$  analog zu den Verzerrungen  $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}/2)$  mit einem Mohrschen Kreis dargestellt werden können, Bild 4.5 (b).

Im allgemeinen ist die Mittelebene nicht verzerrungsfrei, sondern weist Verzerrungen  $\varepsilon_{x0}$ ,  $\varepsilon_{y0}$ ,  $\gamma_{xy0}$  auf. Anstelle von (4.22) erhält man die Beziehungen

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} + z\chi_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + z\chi_y, \quad \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{\gamma_{xy0}}{2} + z\chi_{xy} \quad (4.23)$$

wonach die Verformung eines Plattenelementes allgemein durch sechs kinematische Parameter  $(\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}, \gamma_{xy0}, \chi_x, \chi_y, \chi_{xy})$  festgelegt ist.

Je nach Ausbildung der Lagerung sind am Plattenrand bestimmte kinematische Randbedingungen vorgeschrieben, wobei in der Regel der Wert der vertikalen Verformung  $w$  oder ihrer Ableitung  $w_{,n}$  in Richtung der Randnormalen  $n$  verschwinden muss. Für die gebräuchlichen Lagerungsarten werden im folgenden die in Bild 4.5 (c) zusammengestellten Signaturen verwendet.

Kinematische Diskontinuitäten in Platten, welche allgemein als Fliessgelenklinien bezeichnet werden, werden in Kapitel 4.3.2 erläutert.

#### 4.2.5 Affinitätstheorem für orthotrope Platten

Mit Hilfe des Affinitätstheorems kann eine in den Koordinaten  $x$  und  $y$  gültige Lösung für eine isotrop bewehrte Platte mit den Biegewiderständen  $m_u$  (positive Momente) und  $m'_u$  (negative Momente) unter verteilter Belastung  $q$  und punktförmiger Belastung  $Q$  auf eine orthotrop bewehrte Platte mit  $m_{yu} = \mu m_{xu} = \mu m_u$  und  $m'_{yu} = \mu m'_{xu} = \mu m'_u$  übertragen werden. Dabei sind die Koordinaten gemäss den Beziehungen  $x^* = x$  und  $y^* = y\sqrt{\mu}$  zu transformieren, eine konzentrierte Belastung gemäss  $Q^* = Q\sqrt{\mu}$ , und verteilte Belastungen gemäss  $q^* = q$ . Für den Beweis dieses Theorems wird auf die Fachliteratur [37,79,83,115] verwiesen.

Das Affinitätstheorem ist vom theoretischen Standpunkt aus von gewissem Interesse; für übliche Fälle ergeben sich daraus jedoch unpraktische Bewehrungsgehalte. So entspricht beispielsweise einer isotrop bewehrten Quadratplatte eine orthotrop bewehrte Rechteckplatte mit stärkerer Bewehrung in Richtung der grösseren Spannweite. Daher wird hier nicht weiter auf das Affinitätstheorem eingegangen, und es werden lediglich einzelne sinnvolle Anwendungen gezeigt, siehe Kapitel 4.4.4 und 4.5.3.

### 4.3 Fliessbedingungen

#### 4.3.1 Allgemeines

Grundsätzlich kann man den Widerstand von Stahlbetonplatten mit Hilfe der Plastizitätstheorie untersuchen, indem man lokale Spannungen und Verzerrungen im Platteninnern sowie entsprechende Fliessbedingungen und Fliessgesetze für Beton und Bewehrung betrachtet. Dieses allgemeine Verfahren führt stets zum Ziel, seine Anwendung ist aber sehr aufwendig und nur selten gerechtfertigt. In den meisten Fällen kann man sich darauf beschränken, die statischen und kinematischen Beziehungen sowie die Fliessbedingungen und Fliessgesetze in verallgemeinerten Spannungen und Verformungen auszudrücken, Kapitel 2.2.2. Die Betrachtung der Spannungsresultierenden (4.1), (4.2) und (4.3) und entsprechender verallgemeinerter Verformungen ist dann ausreichend, die lokale Verteilung von Spannungen und Verformungen ist unwesentlich.

Fliessbedingungen in verallgemeinerten Grössen können sowohl mit der kinematischen als auch mit der statischen Methode der Plastizitätstheorie ermittelt werden. Nach der kinematischen Methode werden die Verformungen durch kinematische Annahmen auf eine bestimmte Klasse theoretisch möglicher Verformungen beschränkt, die sich mit einer endlichen Anzahl kinematischer Parameter beschreiben lassen. In Kapitel 4.3.2 wird auf dieser Basis die sogenannte Normalmomenten-Fliessbedingung hergeleitet. Nach der statischen Methode untersucht man statisch zulässige Spannungszustände im Platteninnern und verlangt, dass die Fliessbedingungen für Beton und Bewehrung nicht verletzt werden. Die auf diese Weise erhaltenen Beziehungen, so zum Beispiel die in Kapitel 4.3.3 mittels eines Sandwichmodells hergeleiteten Fliessbedingungen, sind streng genommen keine Fliessbedingungen, sondern liefern lediglich untere Grenzwerte für die Tragwiderstände, da im allgemeinen kein mit den Spannungen verträglicher Mechanismus angegeben werden kann.

Bei der Anwendung der Plastizitätstheorie auf Platten sind somit grundsätzlich vier Fälle zu unterscheiden, je nachdem, ob die statische oder die kinematischen Methode der Plastizitätstheorie verwendet wird, und ob mit der statischen Methode hergeleitete untere Grenzwerte für die Fliessbedingungen oder Fliessbedingungen kinematischen Ursprungs benutzt werden. Die Anwendung der statischen Methode unter Verwendung von Fliessbedingungen statischen Ursprungs liefert einen sicheren unteren Grenzwert, die Anwendung der kinematischen Methode unter Verwendung von Fliessbedingungen kinematischen Ursprungs hingegen einen sicheren oberen Grenzwert für die Traglast. Kombiniert man die statische Methode mit Fliessbedingungen kinematischen Ursprungs, oder aber die kinematischen Methode mit Fliessbedingungen statischen Ursprungs, so können obere oder untere Grenzwerte für die Traglast resultieren.

### 4.3.2 Normalmomenten-Fliessbedingung

#### Fliessgelenklinien

Das in Bild 4.6 (a) dargestellte, in  $x$ - und  $y$ -Richtung bewehrte Plattenelement sei durch Biege- und Drillmomente sowie Membran- und Querkräfte beansprucht. Bild 4.6 (b) zeigt ein Element einer Fliessgelenklinie in beliebiger Richtung  $t$ , wobei mit  $\dot{\omega}_n$  und  $\dot{\delta}_n$  die relative Rotationsgeschwindigkeit der beiden starren Plattenteile und die relative Extensionsgeschwindigkeit auf der Höhe der Plattenmittelebene bezeichnet werden. Bei diesem kinematisch zulässigen Mechanismus tragen die Momente  $m_n$  und die Normalkräfte  $n_n$  gemäss

$$D = m_n \dot{\omega}_n + n_n \dot{\delta}_n \quad (4.24)$$

zur Dissipationsarbeit bei. Für beliebige Werte von  $n_n$  kann die Druckzonendicke  $c = h/2 - \dot{\delta}_n / \dot{\omega}_n$  aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen in  $n$ -Richtung bestimmt werden, und es folgt ein Ausdruck für den Biegewiderstand  $m_{nu}$  in Richtung  $n$  und somit für die Dissipationsarbeit.

Im allgemeinen ergeben sich aus der Betrachtung eines Fliessgelenklinienmechanismus gemäss Bild 4.6 (b) nicht verschwindende Reaktionsmomente  $m_{tn}$  und Reaktionskräfte  $n_{tn}$ , Bild 4.6 (c). Diese leisten keinen Beitrag zur Dissipation, da die zugehörigen kinematischen Parameter verschwinden, sie sind somit verallgemeinerte Reaktionen gemäss Kapitel 2.2.2. Führt man einen dritten kinematischen Parameter  $\dot{\delta}_{tn}$  ein, welcher einer relativen Gleitung entlang der Fliessgelenklinie entspricht, so erhält man eine sogenannte verallgemeinerte Fliessgelenklinie, in welcher die Membrankräfte  $n_{tn}$  gemäss  $D = m_n \dot{\omega}_n + n_n \dot{\delta}_n + n_{tn} \dot{\delta}_{tn}$  zur Dissipationsarbeit beitragen, während die Momente  $m_{tn}$  weiterhin als Reaktion zu betrachten sind. Im folgenden werden ausschliesslich Fliessgelenklinien mit  $\dot{\delta}_{tn} = 0$  betrachtet und Membrankräfte vernachlässigt,  $n_n = 0$ . Somit tragen lediglich die Momente  $m_n$  zur Dissipation bei.

### Herleitung der Normalmomenten-Fliessbedingung

Durch Überlagerung der plastischen Momente  $m_{xu}$  und  $m_{yu}$  in den Bewehrungsrichtungen mit  $m_{xy} = n_x = n_y = 0$  erhält man einen statisch zulässigen Spannungszustand im Element, Bild 4.6 (c). Für eine beliebige Richtung  $n$  folgt  $n_n = n_{tn} = 0$  und  $m_n = m_{xu}\cos^2\varphi + m_{yu}\sin^2\varphi$ ,  $m_{tn} = (m_{yu} - m_{xu})\sin\varphi\cos\varphi$ , siehe (4.9). Im allgemeinen sind die Druckzonenhöhen in den beiden Bewehrungsrichtungen unterschiedlich,  $c_x \neq c_y$ , und es lässt sich dem betrachteten Spannungszustand kein verträglicher Mechanismus gemäss Bild 4.6 (b) zuordnen. Der auf die beschriebene Weise ermittelte Wert für  $m_n$  ist somit ein unterer Grenzwert für den Biegewiderstand  $m_{nu}$  in Richtung  $n$ ,  $m_{nu} \geq m_{xu}\cos^2\varphi + m_{yu}\sin^2\varphi$ .

Die Abweichungen für  $c_x \neq c_y$  sind in der Regel sehr gering, und das Ungleichheitszeichen kann daher unterdrückt werden. Somit erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned} m_{nu} &= m_{xu}\cos^2\varphi + m_{yu}\sin^2\varphi \\ m'_{nu} &= m'_{xu}\cos^2\varphi + m'_{yu}\sin^2\varphi \end{aligned} \quad (4.25)$$

Die Herleitung der zweiten Gleichung (4.25), welche für negative Momente gilt, ist analog zu denjenigen der für positive Momente geltenden ersten Gleichung (4.25).

Einer Beanspruchung  $m_x$ ,  $m_y$  und  $m_{xy}$  entsprechen in Richtung  $n$  gemäss (4.9) Momente

$$m_n = m_x\cos^2\varphi + m_y\sin^2\varphi + m_{xy}\sin 2\varphi \quad (4.26)$$

und aus der Bedingung

$$-m'_{nu} \leq m_n \leq m_{nu} \quad (4.27)$$

erhält man, durch Betrachtung aller Richtungen  $\varphi$ , die Fliessbedingungen

$$\begin{aligned} Y &= m_{xy}^2 - (m_{xu} - m_x)(m_{yu} - m_y) = 0 \\ Y' &= m_{xy}^2 - (m'_{xu} + m_x)(m'_{yu} + m_y) = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

wobei  $m_{xu} - m_x \geq 0$ ,  $m_{yu} - m_y \geq 0$ ,  $m'_{xu} + m_x \geq 0$  und  $m'_{yu} + m_y \geq 0$ . Den Beziehungen  $Y = 0$  und  $Y' = 0$  entsprechen im  $(m_x, m_y, m_{xy})$ -Raum zwei elliptische Kegel, Bild 4.6 (d).

Analog zu den Fliessbedingungen für orthogonal bewehrte Stahlbetonscheiben-Elemente, Kapitel 3.3, lassen sich die Fliessbedingungen (4.28) in Parameterform schreiben:

$$\begin{aligned} m_{xu} &\geq m_x + k|m_{xy}| & m_{yu} &\geq m_y + \frac{1}{k}|m_{xy}| \\ m'_{xu} &\geq -m_x + k|m_{xy}| & m'_{yu} &\geq -m_y + \frac{1}{k}|m_{xy}| \end{aligned} \quad (4.29)$$

Diese Beziehungen eignen sich besonders für die Bemessung der Bewehrung, Bild 4.6 (d), wobei oft  $k = 1$  gesetzt wird (linearisierte Fliessbedingungen).

### Verträgliche Bruchmechanismen

Nach der ersten Gleichung (4.28) und dem Fliessgesetz (2.33) gilt für die Kegelfläche  $Y = 0$

$$\dot{\chi}_x = \kappa \frac{\partial Y}{\partial m_x} = \kappa(m_u - m_y), \quad \dot{\chi}_y = \kappa \frac{\partial Y}{\partial m_y} = \kappa(m_u - m_x), \quad 2\dot{\chi}_{xy} = \kappa \frac{\partial Y}{\partial m_{xy}} = 2\kappa m_{xy} \quad (4.30)$$

Somit folgt mit (4.28) die Beziehung  $\dot{\chi}_x \dot{\chi}_y - \dot{\chi}_{xy}^2 = 0$  und daher, wie man mit einem Mohrschen Kreis gemäss Bild 4.5 (b) leicht verifiziert,  $\chi_1 \chi_2 = 0$ . Eines der Hauptkrümmungskremente verschwindet, und als verträgliche Bruchmechanismen ergeben sich abwickelbare Flächen.

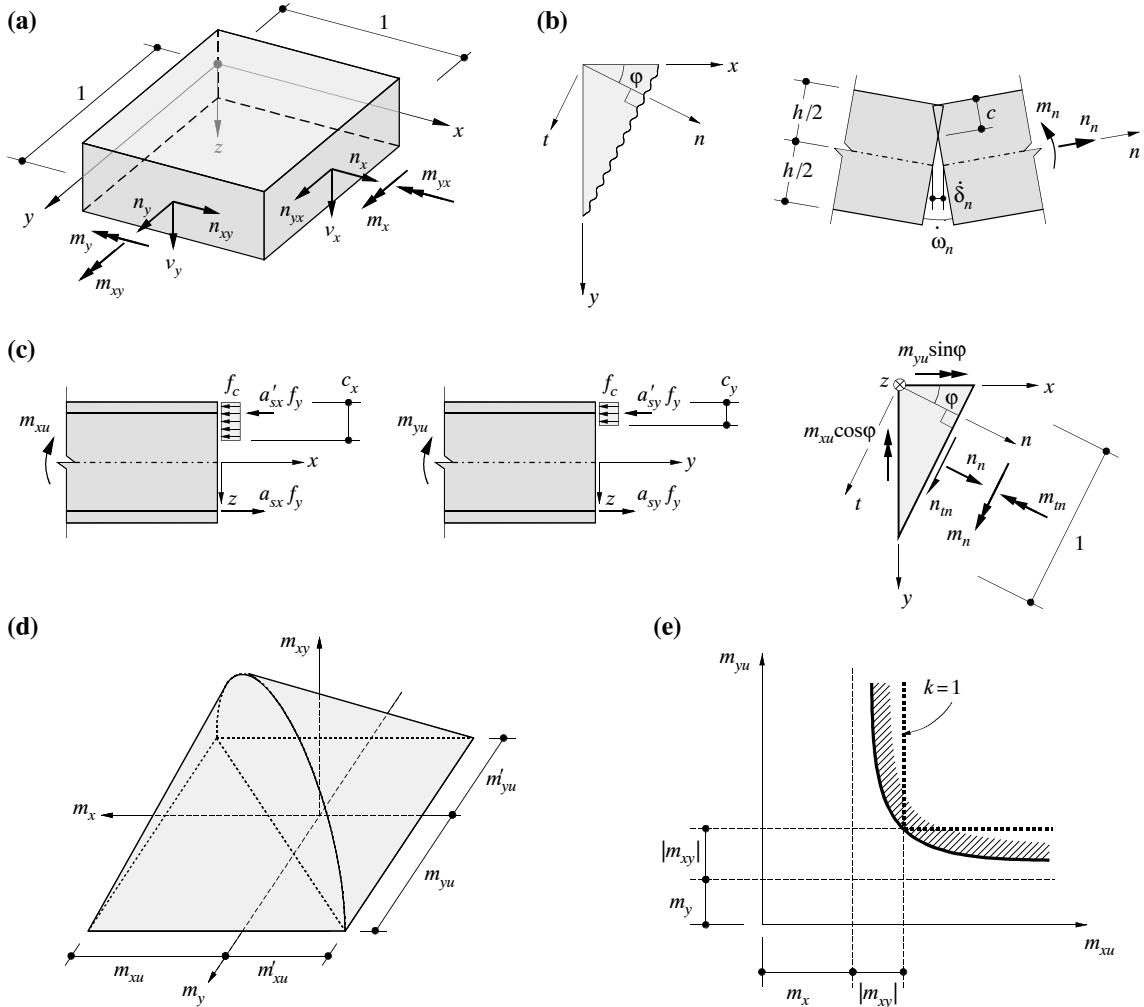


Bild 4.6 – Normalmomenten-Fliessbedingung: (a) Plattenelement; (b) Fliessgelenklinie; (c) Superposition der Biegewiderstände in  $x$ - und  $y$ -Richtung; (d) Fliessbedingung; (e) Bemessung.

## Diskussion

Nimmt man an, dass Normalen zur Mittelebene der Platte gerade und senkrecht zur verformten Mittelfläche bleiben, so lassen sich die Verformungen von dünnen Platten mit kleinen Durchbiegungen gemäss Kapitel 4.2.4 allgemein durch die sechs Parameter  $\varepsilon_{x0}$ ,  $\varepsilon_{y0}$ ,  $\gamma_{xy0}$ ,  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  und  $\chi_{xy}$  beschreiben. Die Betrachtung von Fliessgelenklinien ist kinematisch restriktiver, und die Beziehungen (4.28) und (4.29) überschätzen daher den Widerstand, insbesondere für grosse Drillmomente bezüglich der Bewehrungsrichtungen und hohe Bewehrungsgehalte [50,79]. Diese Über schätzung des Widerstandes wird in vielen Fällen durch die günstige Wirkung der bei der Bemessung üblicherweise vernachlässigten Membrankräfte, Kapitel 4.7, kompensiert. Vorsicht ist jedoch bei Eckstützen geboten, in deren unmittelbarer Umgebung näherungsweise ein Zustand reiner Drillung herrscht, siehe Kapitel 4.2.3.

### 4.3.3 Fliessbedingung nach statischer Methode

Eine einfache Möglichkeit, untere Grenzwerte für die Fliessbedingungen mit der statischen Methode der Plastizitätstheorie herzuleiten, besteht darin, die Platte als Sandwichelement zu modellieren. Im Sinne einer Gleichgewichtslösung werden dabei die Momente und Membrankräfte den Deckeln des Sandwichs zugewiesen, während der Kern der Übertragung der Querkräfte dient.

Für allgemein durch Biege- und Drillmomente, Querkräfte sowie Membrankräfte beanspruchte Plattenelemente wird auf Kapitel 4.6 verwiesen. Für den einfachen Fall einer Platte mit verschwindenden Membran- und Querkräften resultieren infolge der verbleibenden Beanspruchung durch Biege- und Drillmomente die Membrankräfte

$$n_{x \text{ inf, sup}} = \pm \frac{m_x}{d_v}, \quad n_{y \text{ inf, sup}} = \pm \frac{m_y}{d_v}, \quad n_{xy \text{ inf, sup}} = \pm \frac{m_{xy}}{d_v} \quad (4.31)$$

im unteren und oberen Sandwichdeckel. Mit  $d_v$  wird der Abstand der Schwerpunkte der beiden Sandwichdeckel bezeichnet. Dieser entspricht dem Hebelarm der inneren Kräfte und wird als konstant vorausgesetzt. Die Biegewiderstände in den beiden Bewehrungsrichtungen betragen

$$m_{xu} = d_v a_{sx \text{ inf}} f_y, \quad m_{yu} = d_v a_{sy \text{ inf}} f_y, \quad m'_{xu} = d_v a_{sx \text{ sup}} f_y, \quad m'_{yu} = d_v a_{sy \text{ sup}} f_y \quad (4.32)$$

wobei mit  $a_s$  die Querschnittsfläche der Bewehrungen pro Längeneinheit bezeichnet wird. Einsetzen der Beziehungen (4.31) und (4.32) in die Fliessbedingungen (3.20) für orthogonal bewehrte Scheibenelemente im Regime 1 liefert die Fliessbedingungen

$$\begin{aligned} \left( \frac{m_{xy}}{d_v} \right)^2 - \left( \frac{m_{xu}}{d_v} - \frac{m_x}{d_v} \right) \left( \frac{m_{yu}}{d_v} - \frac{m_y}{d_v} \right) &= 0 \\ \left( \frac{m_{xy}}{d_v} \right)^2 - \left( \frac{m'_{xu}}{d_v} + \frac{m_x}{d_v} \right) \left( \frac{m'_{yu}}{d_v} + \frac{m_y}{d_v} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Diese entsprechen offensichtlich den Beziehungen (4.28). Bei der Wahl der Dicken der Sandwichdeckel ist darauf zu achten, dass Betonbruch nicht massgebend wird. Um dies zu überprüfen setzt man am einfachsten die Werte der Membrankräfte (4.31) in die Beziehung (3.25) für die Regimegrenze ein. Unter Berücksichtigung von (4.32) folgen daraus die Bedingungen

$$\begin{aligned} f_c d_v t_{inf} &\geq m_{xu} - m_x + m_{yu} - m_y \\ f_c d_v t_{sup} &\geq m'_{xu} + m_x + m'_{yu} + m_y \end{aligned} \quad (4.34)$$

mit  $t_{inf}$ ,  $t_{sup}$  = Dicke des unteren und oberen Sandwichdeckels und  $f_c$  = Betondruckfestigkeit.

### 4.3.4 Schiefe Bewehrungsrichtungen

Fliessende Bewehrungen in beliebigen, zueinander schiefen Richtungen können stets durch eine äquivalente orthogonale Bewehrung ersetzt werden, wenn näherungsweise angenommen werden darf, dass alle Stäbe in einer Lage angeordnet sind.

Die Wirkung von mehreren, um verschiedene Winkel  $\alpha_i$  gegenüber der  $x$ -Achse geneigten Bewehrungen mit Widerständen  $n_{is} = (a_s f_{sy})_i$  pro Längeneinheit entspricht wie bei Scheiben, Kapitel 3.3.2, derjenigen einer fiktiven Bewehrung in  $x$ - und  $y$ -Richtung mit den Widerständen

$$n_{xs} = \sum_i n_{is} \cos^2 \alpha_i, \quad n_{ys} = \sum_i n_{is} \sin^2 \alpha_i, \quad n_{xys} = \sum_i n_{is} \sin \alpha_i \cos \alpha_i \quad (4.35)$$

Die Widerstände  $n_{xs}$ ,  $n_{ys}$  und  $n_{xys}$  können analog zu Biege- und Drillmomenten mittels der Beziehungen (4.9) – mit  $n_s$  anstelle von  $m$  – in beliebige Richtungen transformiert werden, und es

existieren zwei zueinander orthogonale, um einen Winkel  $\beta$  gegenüber der  $x$ - und  $y$ -Richtung geneigte Hauptrichtungen  $(\xi, \eta)$  mit  $n_{\xi\eta s} = 0$ . Die den Widerständen  $n_{\xi s}$  und  $n_{\eta s}$  entsprechenden Biegewiderstände  $m_{\xi u}$  und  $m_{\eta u}$  können nun mit den in diesen Richtungen wirkenden Momenten  $m_\xi$ ,  $m_\eta$  und  $m_{\xi\eta}$  in die Fliessbedingungen (4.28) eingesetzt werden

$$Y = m_{\xi\eta}^2 - (m_{\xi u} - m_\xi)(m_{\eta u} - m_\eta) = 0 \quad (4.36)$$

wobei  $m_{\xi u} - m_\xi \geq 0$  und  $m_{\eta u} - m_\eta \geq 0$ . Alternativ dazu ist es auch möglich, die Biegewiderstände  $m_{\xi u}$  und  $m_{\eta u}$  mit Hilfe von (4.9) in die  $x$ - und  $y$ -Richtung zu transformieren,  $m_{xu} = m_{\xi u} \cos^2 \beta + m_{\eta u} \sin^2 \beta$ ,  $m_{yu} = m_{\xi u} \sin^2 \beta + m_{\eta u} \cos^2 \beta$  und  $m_{xyu} = (m_{\eta u} - m_{\xi u}) \sin \beta \cos \beta$ , und sodann direkt den Momenten  $m_x$ ,  $m_y$  und  $m_{xy}$  gegenüberzustellen

$$Y = (m_{xyu} - m_{xy})^2 - (m_{xu} - m_x)(m_{yu} - m_y) = 0 \quad (4.37)$$

wobei  $m_{xu} - m_x \geq 0$  und  $m_{yu} - m_y \geq 0$ . Den Beziehungen  $Y = 0$  und  $Y' = 0$  (welche hier nicht aufgestellt ist, jedoch analog zur Beziehung für positive Momente hergeleitet werden kann) entsprechen wie den Fliessbedingungen (4.28) zwei elliptische Kegel im  $(m_x, m_y, m_{xy})$ -Raum; die Kegelspitzen liegen jedoch nicht mehr in der Ebene  $m_{xy} = 0$ .

Nimmt man näherungsweise an, dass die Hebelarme der inneren Kräfte in allen Richtungen konstant sind, so können  $m_{xu}$ ,  $m_{yu}$  und  $m_{xyu}$  ohne den Umweg über Hauptrichtungen  $(\xi, \eta)$  direkt aus den Beziehungen (4.35) ermittelt und in die Fliessbedingung (4.37) eingesetzt werden. Dieses Vorgehen ist analog zu einer Herleitung der Fliessbedingungen nach dem Sandwichmodell, Kapitel 4.3.3, unter Berücksichtigung schiefer Bewehrungslagen in den Sandwichdeckeln gemäss Kapitel 3.3.2.

## 4.4 Gleichgewichtslösungen

### 4.4.1 Allgemeines

Werden statisch zulässige Spannungszustände betrachtet, welche die Gleichgewichtsbedingungen (4.5) und die statischen Randbedingungen erfüllen, so resultiert nach dem statischen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie ein unterer Grenzwert für die Traglast einer Platte, falls die Fliessbedingungen nirgends verletzt werden. Wird eine Platte auf dieser Grundlage bemessen, so liegt ihre Traglast, sofern ihr Verformungsvermögen ausreicht, in keinem Fall unter der zur betrachteten Gleichgewichtslösung gehörigen Belastung. Der Kraftfluss kann dabei bis ins Detail verfolgt werden, was eine entsprechende konstruktive Durchbildung ermöglicht.

Der Bemessung von Stahlbetonplatten werden heute in der Regel mittels der Methode der Finiten Elemente nach der Kirchhoffschen Theorie dünner elastischer Platten mit kleinen Durchbiegungen berechnete Momente zugrunde gelegt. Oft ergeben sich jedoch bereits unter Eigengewicht Risse, insbesondere im Bereich von Krafteinleitungen, womit eine Umlagerung der inneren Kräfte verbunden ist. Durch Zwängungen, welche stets vorhanden sind, rechnerisch aber praktisch nicht erfasst werden können, ergeben sich weitere Umlagerungen. Somit weichen die inneren Kräfte bereits im Gebrauchszustand von den für ein homogenes elastisches Verhalten berechneten Werten ab. Es ist deshalb unrichtig, die Verwendung von nach der Kirchhoffschen Theorie dünner elastischer Platten berechneten Schnittgrößen damit zu begründen, dass der wirkliche Spannungszustand mit ausreichender Genauigkeit erfasst werde. Vielmehr handelt es sich um ein spezielles Vorgehen nach der statischen Methode der Plastizitätstheorie, liefert doch die elastische Lösung einen von unendlich vielen möglichen Gleichgewichtszuständen in der Platte.

Beschränkt man sich bei der Bemessung auf nach der elastischen Plattentheorie ermittelte Momente, so ergeben sich oft wenig rationelle Lösungen. In der Praxis werden daher die Momente oftmals in Querrichtung über eine bestimmte Breite ausgemittelt, insbesondere im Bereich von Momentenspitzen bei konzentrierten Krafteinleitungen. Dieses Vorgehen ist insofern fragwürdig, als der Einfluss auf die Drillmomente und auf die Momente senkrecht zur betrachteten Richtung vernachlässigt wird und daher im allgemeinen kein Gleichgewichtszustand resultiert. Dies ist zwar meist unbedenklich, grundsätzlich aber unbefriedigend, und es stellt sich die Frage, ob nicht bereits bei der Schnittgrößenberechnung von über einer bestimmten Breite konstanten Momenten ausgegangen werden kann.

Diesem Wunsch nach grösserer Freiheit bei der praktischen Bemessung kommt die statische Methode der Plastizitätstheorie entgegen. In den folgenden Kapiteln werden für Handrechnungen geeignete Verfahren vorgestellt, welche es ermöglichen, eine Platte mit Gleichgewichtslösungen zu bemessen. Daneben sei darauf hingewiesen, dass kürzlich leistungsfähige Computerprogramme entwickelt worden sind, welche auf der statischen Methode der Plastizitätstheorie beruhen und deren Vorteile mit den Vorzügen von computergestützten Berechnungen nach der Methode der Finiten Elemente kombinieren [5,6]. Diese erlauben es, komplexe Geometrien und unterschiedliche Lastfälle effizient zu bearbeiten. Daneben besteht auch die Möglichkeit, das Bewehrungsvolumen zu optimieren oder für eine gegebene Bewehrung eine starr-ideal plastische Traglastanalyse durchzuführen.

Mit der Bemessung einer Platte nach der statischen Methode der Plastizitätstheorie wird ein ausreichender Biegewiderstand sichergestellt. Der Einfluss von Querkräften wird dabei nicht berücksichtigt; dies gilt insbesondere auch für die erwähnten Computerprogramme [5,6]. Da Querkräfte zu einem schlagartigen Versagen führen können, wobei die spröde Natur des Bruches eine Schnittgrößenumlagerung verunmöglicht, dürfen sie bei der Bemessung keinesfalls ausser acht gelassen werden. Für die Berücksichtigung ihres Einflusses wird auf Kapitel 4.6 verwiesen.

#### 4.4.2 Momentenfelder

##### Allgemeines

Durch Aufspalten der Belastung  $q$  in drei Anteile  $q_x$ ,  $q_y$  und  $q_{xy}$  erhält man aus der Gleichgewichtsbedingung (4.5) die Beziehungen

$$m_{x,xx} = -q_x, \quad m_{y,yy} = -q_y, \quad 2m_{xy,xy} = -q_{xy}, \quad q = q_x + q_y + q_{xy} \quad (4.38)$$

Die ersten beiden Gleichungen (4.38) entsprechen den Gleichgewichtsbeziehungen der Balkentheorie, und  $q_x$  und  $q_y$  können als diejenigen Anteile der Belastung  $q$  aufgefasst werden, welche durch zu den Richtungen  $x$  und  $y$  parallele Balken abgetragen werden. Neben diesen naheliegenden Möglichkeiten zur Lastabtragung kann die Belastung gemäss der dritten Gleichung (4.38) auch durch eine reine Drillbeanspruchung abgetragen werden. Nach dem unteren Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie kann die Aufteilung der Belastung  $q$  in die drei Anteile  $q_x$ ,  $q_y$  und  $q_{xy}$  frei und prinzipiell an jeder Stelle der Platte unterschiedlich gewählt werden. Wolfensberger [114] verwendete die Idee der Lastaufteilung nach (4.38) in Verbindung mit linearer Optimierung für die Berechnung von unteren Grenzwerten der Traglast von Platten.

Durch geeignete Ansatzfunktionen für die Biege- und Drillmomente können für einfache Belastungs- und Lagerungskonfigurationen Gleichgewichtslösungen angegeben werden. Wie aus (4.38) ersichtlich ist, eignen sich zur Aufnahme einer gleichmässig verteilten Flächenlast  $q$  Ansätze der Form  $m_x \sim x^2$ ,  $m_y \sim y^2$  und  $m_{xy} \sim xy$ .

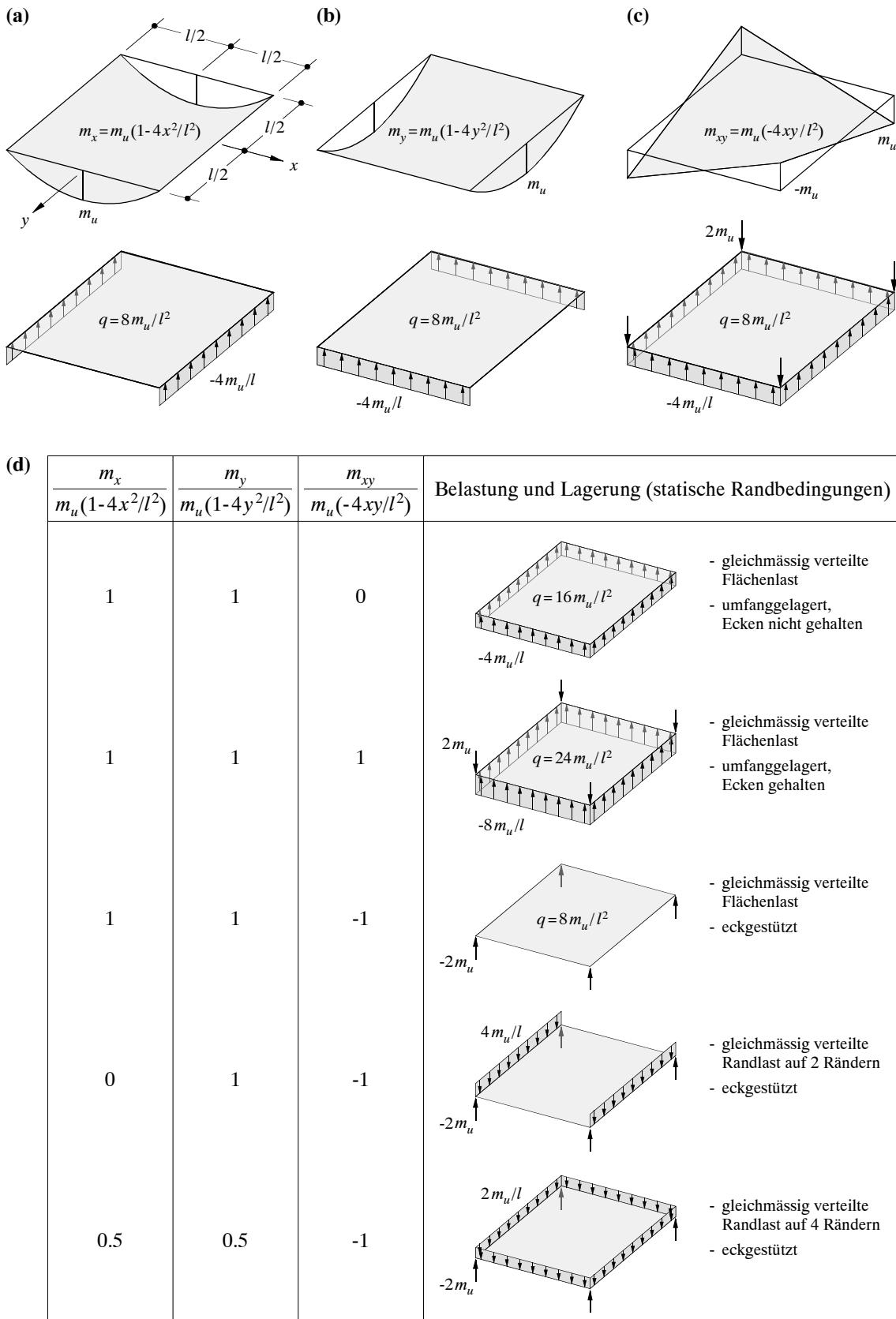


Bild 4.7 – Momentenfelder: (a) bis (c) Ansätze für  $m_x$ ,  $m_y$  und  $m_{xy}$  zur Aufnahme einer gleichmässig verteilten Flächenlast, mit zugehörigen statischen Randbedingungen; (d) Superposition von (a) bis (c) und resultierende statische Randbedingungen.

### Rand- und eckgestützte Quadratplatten unter gleichmässig verteilter Flächenlast

In Bild 4.7 sind verschiedene Momentenfelder für eine Quadratplatte zusammengestellt. Die in Bild 4.7 (a)-(c) dargestellten Ansätze für die Biege- und Drillmomente

$$m_x = m_u \left( 1 - \frac{4x^2}{l^2} \right), \quad m_y = m_u \left( 1 - \frac{4y^2}{l^2} \right), \quad m_{xy} = -m_u \frac{4xy}{l^2} \quad (4.39)$$

entsprechen gemäss (4.5) jeweils einer gleichmässig verteilten Flächenlast

$$q = \frac{8m_u}{l^2} \quad (4.40)$$

und aus den Beziehungen (4.15) und (4.16) folgen die im Bild gezeigten Stütz- und Eckkräfte als Auflagerreaktionen. Die Ansätze für die Biegemomente  $m_x$  und  $m_y$ , Bild 4.7 (a) und (b), entsprechen der Tragwirkung von einfachen Balken in  $x$ - respektive  $y$ -Richtung.

Durch Superposition der in Bild 4.7 (a)-(c) dargestellten Ansätze und der entsprechenden statischen Randbedingungen lassen sich verschiedene Konfigurationen von Belastung und Lagerung behandeln, wovon einige in Bild 4.7 (d) dargestellt sind. Für die zweite und dritte Kombination von Biege- und Drillmomenten in Bild 4.7 (d) ist die Fliessbedingung (4.28) für positive Momente mit  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  in jedem Punkt der Platte gerade erfüllt, diejenige für negative Momente für  $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$  lediglich in den Ecken. Für beide Fälle existieren verträgliche Bruchmechanismen, Kapitel 4.5, und es handelt sich somit im Rahmen der getroffenen Annahmen um vollständige Lösungen. Werden Drillmomente gemäss Bild 4.7 (c) in Rechnung gestellt, so ist zur Aufnahme von  $V_t = -m_{tn}$  entlang den Plattenrändern eine entsprechende Bewehrung gemäss Kapitel 4.2.3 anzugeben, und negative Eckreaktionen sind, sofern keine genügende Auflast vorhanden ist, durch eine entsprechende Bewehrung aufzunehmen.

### Einzellasten und punktförmige Stützungen

Durch Verwendung von diskontinuierlichen Drillmomentenfeldern können Einzellasten und punktförmige Stützungen behandelt werden. Die in Bild 4.8 dargestellten Ansätze für die Biege- und Drillmomente [51]

$$m_x = 0, \quad m_y = m_u \left( \frac{y^2}{x^2} - 1 \right), \quad m_{xy} = m_u \left( \frac{y}{x} - \frac{4xy}{l^2} \right) \quad (\text{für } x^2 > y^2) \quad (4.41)$$

$$m_x = m_u \left( \frac{x^2}{y^2} - 1 \right), \quad m_y = 0, \quad m_{xy} = m_u \left( \frac{x}{y} - \frac{4xy}{l^2} \right) \quad (\text{für } x^2 < y^2) \quad (4.42)$$

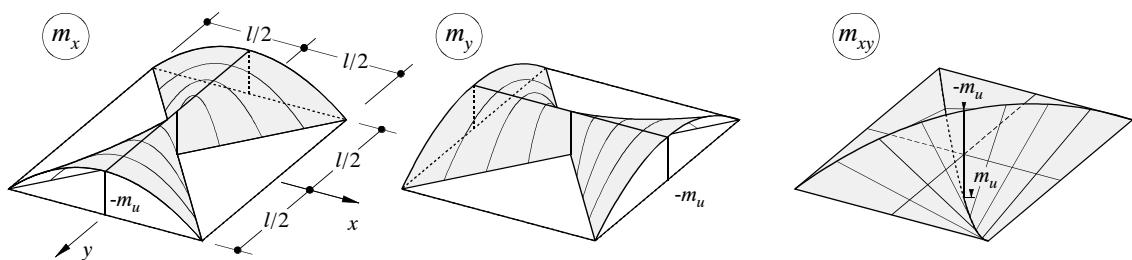


Bild 4.8 – Momentenfelder: Ansätze  $m_x$ ,  $m_y$  und  $m_{xy}$  für eine in der Mitte gestützte, durch eine gleichmässig verteilte Flächenlast belastete Quadratplatte mit freien Rändern.

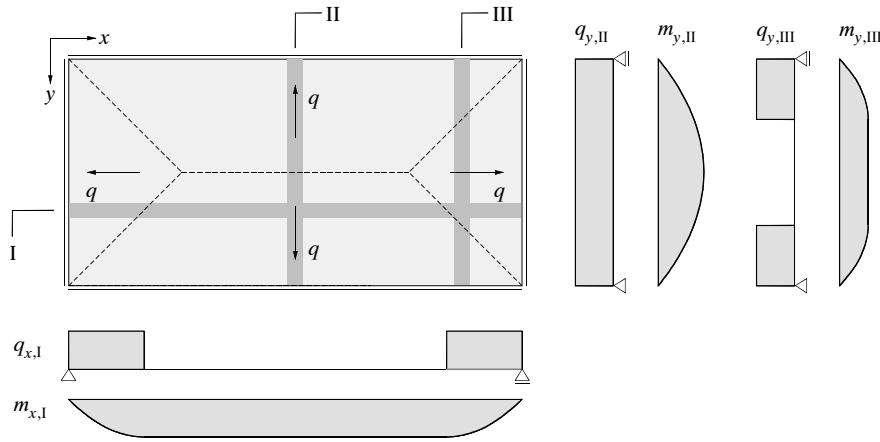


Bild 4.9 – Einfache Streifenmethode: mögliche Lastaufteilung und resultierende Momente  $m_x$ ,  $m_y$  für einfach gelagerte Rechteckplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast.

entsprechen einer in der Mitte gestützten Quadratplatte mit freien Rändern, welche durch eine gleichmäßig verteilte Flächenlast (4.40) belastet wird. Die Fliessbedingung (4.28) für positive Momente ist mit  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  nirgends verletzt und nur im Plattenzentrum gerade erfüllt. Die Fliessbedingung (4.28) für negative Momente ist für  $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$  ebenfalls nirgends verletzt und lediglich entlang der Koordinatenachsen  $x = 0$  und  $y = 0$  gerade erfüllt.

Überlagert man den Beziehungen (4.41) resp. (4.42) konstante positive Momente  $m_x$  und  $m_y$ , so erhält man mit  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  und  $m'_{xu} = m'_{yu} = \lambda m_u$  den unteren Grenzwert

$$q \geq 4(1 + \lambda) \frac{m_u}{l^2} \quad (4.43)$$

für die Traglast einer unendlich ausgedehnten Flachdecke unter gleichmäßig verteilter Belastung. Für einen strengen Beweis von (4.43) wird auf [51] verwiesen. An gleicher Stelle finden sich auch Momentenfelder für Eck- und Randfelder von Flachdecken.

#### 4.4.3 Einfache Streifenmethode

##### Allgemeines

Die Grundidee der einfachen Streifenmethode besteht darin, Drillmomente zu vernachlässigen und die Gleichgewichtsbedingungen (4.5) mit Biegemomenten  $m_x$  und  $m_y$  allein zu erfüllen. Durch Aufspalten der Belastung  $q$  in zwei Anteile  $q_x$  und  $q_y$  erhält man aus der Gleichgewichtsbedingung (4.5) mit  $m_{xy} = 0$

$$m_{x,xx} = -q_x, \quad m_{y,yy} = -q_y, \quad q = q_x + q_y \quad (4.44)$$

Im Unterschied zur allgemein gültigen Beziehung (4.38) ist somit  $q_{xy} = 0$ , und die gesamte Belastung  $q$  wird durch Balkentragwirkung in den Richtungen  $x$  und  $y$  abgetragen.

Die Idee, das Tragverhalten von Platten anhand von zueinander orthogonalen Balkenscharen zu untersuchen, wurde bereits sehr früh verwendet. So schlug zum Beispiel Marcus [48] vor, die Aufteilung der Belastung in ihre Anteile derart zu wählen, dass die nach Elastizitätstheorie errechneten Durchbiegungen der beiden fiktiven Balkenscharen an bestimmten Punkten der Platte übereinstimmen. Hillerborg [29] zeigte, dass die Behandlung von Platten als zueinander orthogo-

nale Balkenscharen eine Anwendung des unteren Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie darstellt, und dass die Aufteilung der Belastung in die beiden Anteile  $q_x$  und  $q_y$  gemäss (4.44) frei und an jeder Stelle der Platte unterschiedlich gewählt werden darf. Um ein ausreichendes Verformungsvermögen und ein zufriedenstellendes Verhalten im Gebrauchszustand zu gewährleisten, ist jedoch eine gewisse Vorsicht bei der Wahl von  $q_x$  und  $q_y$  angebracht, wie auch bei der Wahl allfälliger überzähliger Größen bei der Berechnung der einzelnen Streifen nach Balkentheorie.

### Beispiele

Bild 4.9 zeigt eine mögliche Lastaufteilung und die daraus resultierenden Momente  $m_x$ ,  $m_y$  für eine einfach gelagerte Rechteckplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast. Im vorliegenden Fall wird an jeder Stelle der Platte die volle Belastung zum nächsten Rand hin abgetragen. Diese Art der Lastaufteilung wurde von Hillerborg ursprünglich bevorzugt, da sie zu geringen Bewehrungsaufwänden führt. Die resultierenden Bewehrungsanordnungen sind jedoch unpraktisch, da im Prinzip eine kontinuierliche Variation des Biege widerstandes in den Streifen I und III erforderlich wäre. In der Regel sind daher, wie im folgenden Beispiel erläutert, andere Lastaufteilungen vorzuziehen.

Bild 4.10 zeigt drei verschiedene Lösungen nach der einfachen Streifenmethode für eine einfach gelagerte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast  $q$ . Bei der Lösung nach Bild 4.10 (a) wird an jeder Stelle der Platte je die Hälfte der Belastung in Richtung  $x$  und  $y$  abgetragen. Das mittlere Bewehrungsmoment pro Richtung beträgt  $m_{av} = 0.0417ql^2$  (mit Abstufung in Bewehrungsrichtung) resp.  $m_{av} = 0.0625ql^2$  (ohne Abstufung in Bewehrungsrichtung). Die resultierende Bewehrungsanordnung ist äusserst einfach. Bei der Lösung nach Bild 4.10 (b) werden randnahe Lasten direkt in der entsprechenden Richtung abgetragen, und es resultiert daher

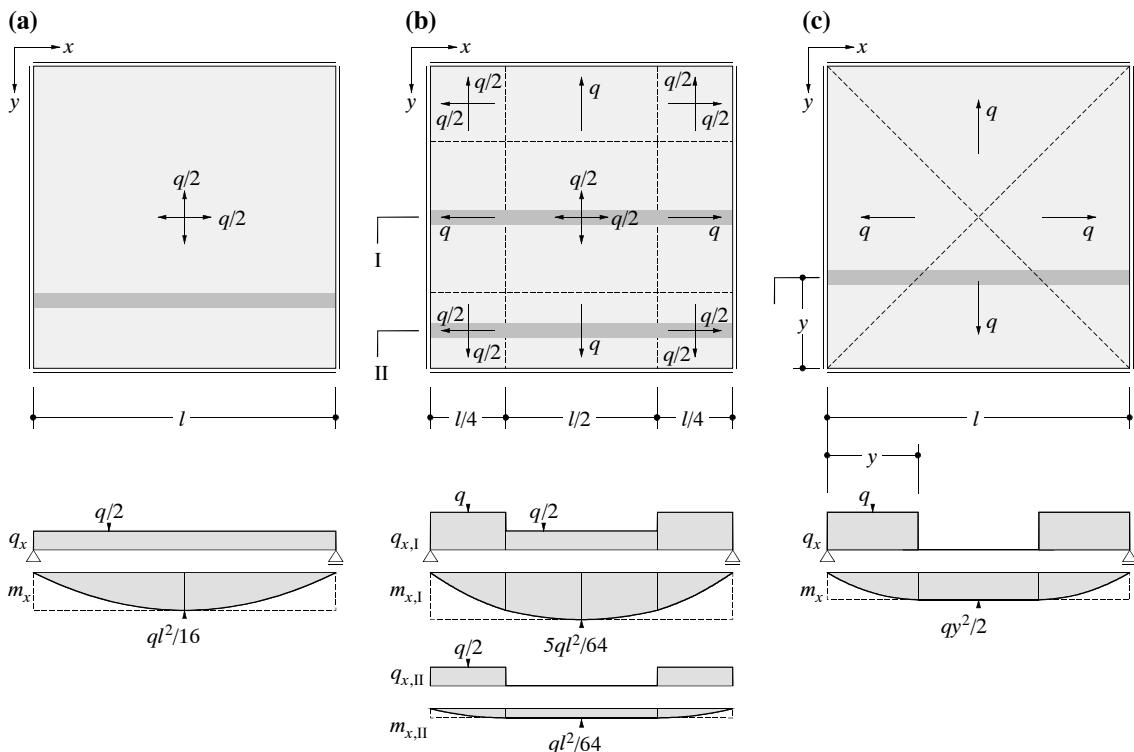


Bild 4.10 – Einfache Streifenmethode: (a) bis (c) Momente  $m_x$  für einfach gelagerte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast (Berechnung von  $m_y$  analog  $m_x$ ).

ein reduzierter Bewehrungsaufwand,  $m_{av} = 0.0339ql^2$  resp.  $m_{av} = 0.0470ql^2$ . Die Bewehrungsanordnung ist relativ einfach, sind doch pro Richtung lediglich zwei unterschiedlich stark bewehrte Streifen erforderlich. Nach Bild 4.10 (c) wird an jeder Stelle der Platte die volle Belastung zum nächsten Rand hin abgetragen, und der Bewehrungsaufwand ist daher mit  $m_{av} = 0.0313ql^2$  resp.  $m_{av} = 0.0417ql^2$  nochmals geringer. Wie bereits im Zusammenhang mit Bild 4.9 erwähnt ist die entsprechende Bewehrungsanordnung jedoch unpraktisch, da sie eine kontinuierliche Variation des Biegewiderstandes erfordert.

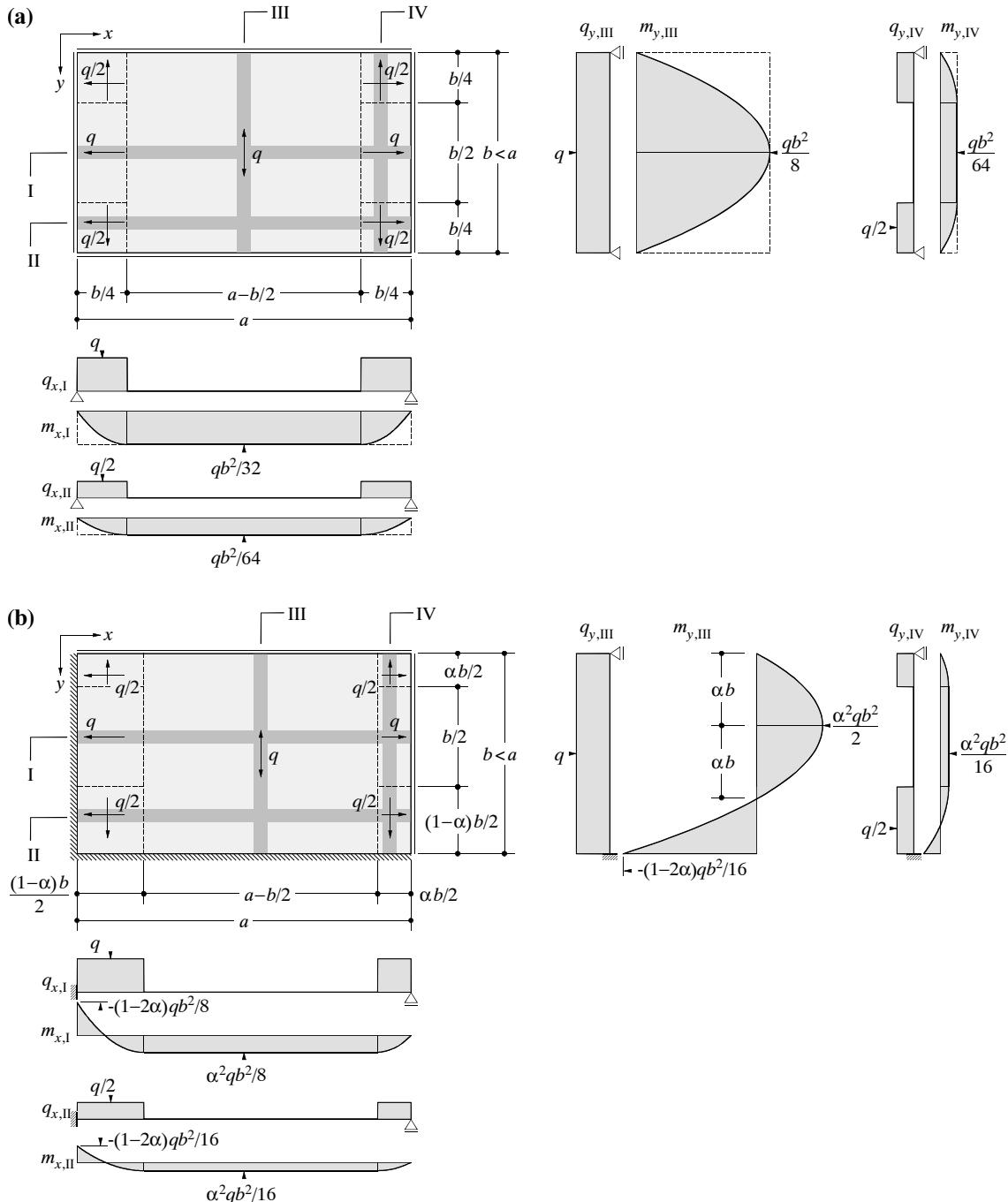


Bild 4.11 – Einfache Streifenmethode: (a) einfach gelagerte und (b) an zwei aneinanderliegenden Rändern eingespannte, an den übrigen Rändern einfach gelagerte Rechteckplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast.

Bild 4.11 zeigt Lösungen nach der einfachen Streifenmethode für unterschiedlich gelagerte Rechteckplatten. Für die in Bild 4.11 (a) dargestellte, einfach gelagerte Rechteckplatte ergeben sich, ohne Abstufung des Biege widerstandes in Bewehrungsrichtung, mittlere Momente von  $m_{xav} = 0.0234qb^2$  und  $m_{yav} = (0.125 - 0.0547b/a)qb^2$ .

Bei der in Bild 4.11 (b) dargestellten, an zwei aneinanderliegenden Rändern eingespannten, an den übrigen Rändern einfach gelagerten Rechteckplatte kann neben der Lastaufteilung auch das Verhältnis zwischen Stütz- und Feldmomenten frei gewählt werden. Im vorliegenden Fall wurden die Auflagerreaktionen in den Streifen I, II und IV so gewählt, dass die Momente in den unbelasteten Bereichen konstant sind. Somit beträgt das Verhältnis von Stütz- zu Feldmoment  $(1 - 2\alpha)/\alpha^2$ . Die Auflagerreaktionen im Streifen III wurden so gewählt, dass das gleiche Verhältnis von Stütz- zu Feldmoment resultiert. Sinnvolle Werte des Verhältnisses von Stütz- zu Feldmoment hinsichtlich des Verhaltens im Gebrauchszustand und des Verformungsvermögens liegen etwa im Bereich  $(1 - 2\alpha)/\alpha^2 = 1.5 \dots 2.5$  und resultieren somit für  $\alpha = 0.35 \dots 0.39$ .

### Versteckte Unterzüge

In den bisher behandelten Beispielen wurde die Belastung von jedem Streifen direkt zu einem Auflager abgetragen. Alternativ dazu bietet es sich oft an, sogenannte versteckte Unterzüge (strong bands) zu verwenden, auf welchen einzelne Streifen indirekt gelagert werden. Bild 4.12 illustriert das Vorgehen anhand einer dreiseitig frei drehbar gelagerten Rechteckplatte. In einem ersten Schritt denkt man sich dabei den versteckten Unterzug als Flächenlager mit gleichmäßig verteilter Reaktion und berechnet die entsprechenden Momente nach der Streifenmethode. Im zweiten Schritt werden die Reaktionen des Flächenlagers mit umgekehrtem Vorzeichen als Bela-

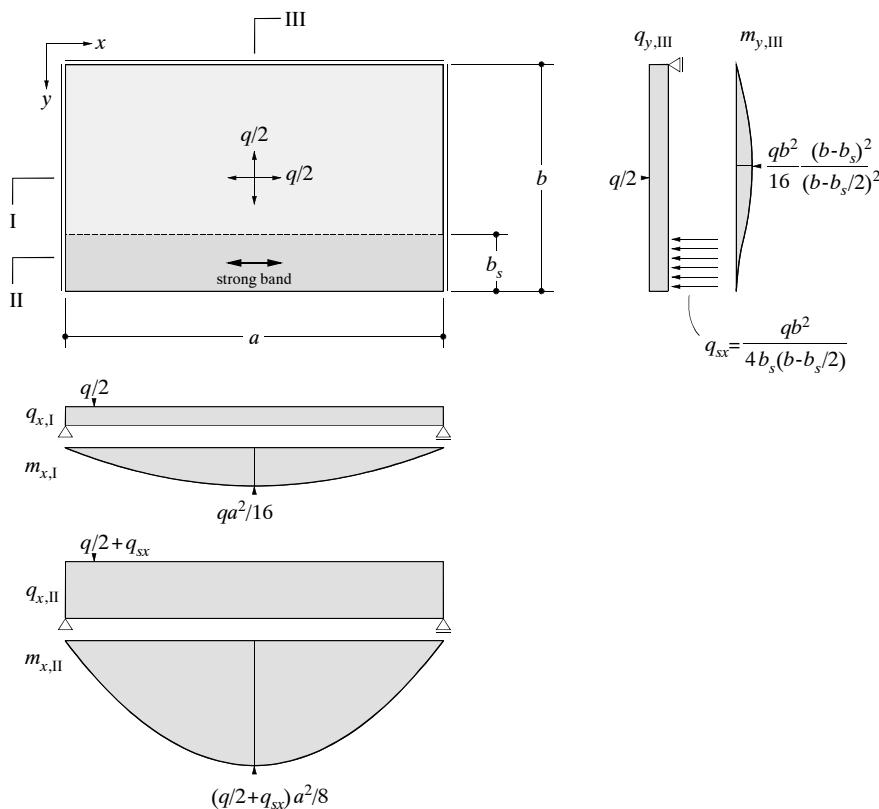


Bild 4.12 – Einfache Streifenmethode: dreiseitig einfach gelagerte Rechteckplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast, Lösung mit verstecktem Unterzug (strong band).

stung auf den versteckten Unterzug aufgebracht und die resultierenden Momente der Beanspruchung aus dem ersten Schritt im Bereich des versteckten Unterzugs superponiert. Wichtig ist dabei, den Kraftfluss konsequent vom Lastangriffspunkt bis zu den Lagern zu verfolgen.

#### 4.4.4 Erweiterte Streifenmethode

##### Allgemeines

Die Streifenmethode eignet sich naturgemäß primär für die Behandlung von linien- oder flächengestützten Platten mit verteilter Belastung. Die erweiterte Streifenmethode ermöglicht es, auch konzentrierte Belastungen und Punktstützen zu berücksichtigen. Dies wird nachfolgend für Punktstützen illustriert; konzentrierte Belastungen können natürlich analog behandelt werden.

Bei der Anwendung der erweiterten Streifenmethode kann man ähnlich vorgehen wie bei der Behandlung von versteckten Unterzügen, Kapitel 4.4.3. Dabei denkt man sich in einem ersten Schritt die Punktstützen als Flächenlager mit endlichen Abmessungen und gleichmäßig verteilter Reaktion und berechnet die entsprechenden Plattenmomente  $m_x$  und  $m_y$ . Dabei können verdeckte Unterzüge gemäß Kapitel 4.4.3 berücksichtigt werden. Im zweiten Schritt superponiert man diesen Momenten Biegewiderstände  $m_{xu}$  und  $m_{yu}$ , so dass die mit umgekehrtem Vorzeichen als Belastung aufgebrachten, gleichmäßig verteilten Reaktionen der Flächenlager zu den punktförmigen Stützen abgetragen werden können, ohne die Fliessbedingungen zu verletzen.

Im zweiten Schritt wird eine Gleichgewichtslösung für eine in der Mitte gestützte, durch eine gleichmäßig verteilte Flächenlast belastete Rechteckplatte mit freien Rändern benötigt. Zu diesem Zweck können für eine Quadratplatte grundsätzlich die in Bild 4.8 illustrierten Momentenfelder, beziehungsweise die daraus resultierende Gleichung (4.43), verwendet werden. Man erhält daraus die Bedingung

$$(m_u + m'_{uu}) \geq \frac{Q}{4} \quad (4.45)$$

für die in jeder Bewehrungsrichtung erforderlichen Biegewiderstände, mit  $Q = ql^2$  = Stützenreaktion. Der Ausdruck (4.45) stellt einen strengen unteren Grenzwert für die Traglast bei punktförmiger Stützung dar.

##### Beispiele

Bild 4.13 (a) illustriert eine Gleichgewichtslösung für eine in der Mitte gestützte Kreisplatte mit Durchmesser  $l$  unter gleichmäßig verteilter Flächenlast. Aus der Gleichgewichtsbedingung (4.8) für rotationssymmetrische Probleme erhält man mit der Annahme  $m_\phi = -m_u$  für die Momente in tangentialer Richtung die Beziehung

$$(rm_r)_{,r} = \frac{Q}{2\pi} - \frac{qr^2}{2} - m_u \quad (4.46)$$

mit der Stützenreaktion  $Q = q\pi l^2/4$ . Integration über  $r$  liefert die Momente in radialer Richtung

$$m_r = \frac{Q}{2\pi} - \frac{qr^2}{6} - m_u + \frac{c}{r} \quad (4.47)$$

Um im Plattenzentrum  $r = 0$  endliche radiale Momente  $m_r$  zu erhalten, muss  $c = 0$  sein, und mit  $m_r = 0$  entlang dem Plattenrand  $r = l/2$  folgen die Beziehungen

$$m_u = \frac{Q}{3\pi}, \quad m_\phi = -\frac{Q}{3\pi}, \quad m_r = \frac{Q}{6\pi} - \frac{qr^2}{6} \quad (4.48)$$

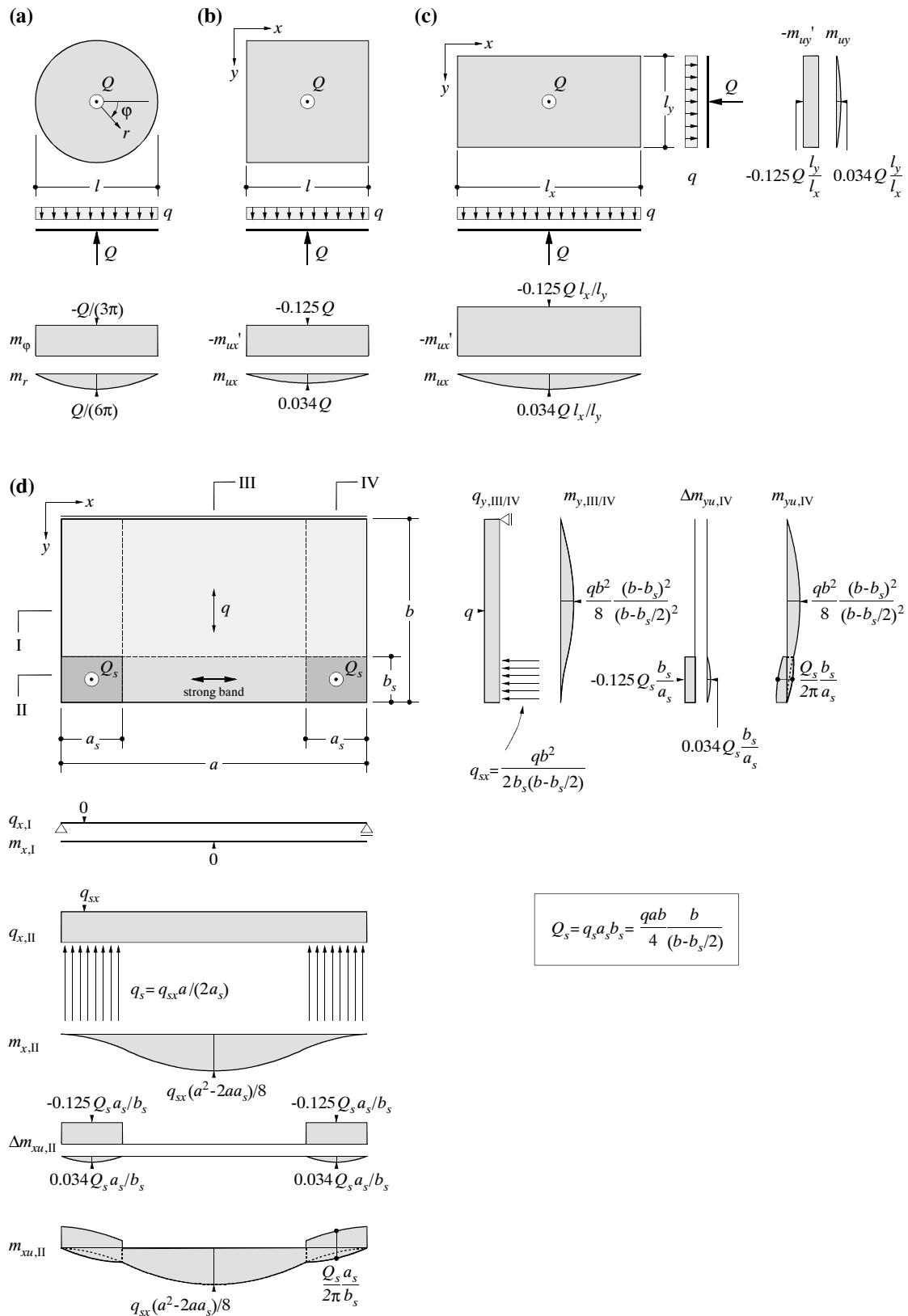


Bild 4.13 – Erweiterte Streifenmethode: (a) bis (c) in der Mitte gestützte Kreis-, Quadrat- und Rechteckplatten unter gleichmässig verteilter Flächenlast; (d) Lösung mit verstecktem Unterzug für einseitig aufgelegte und auf zwei Stützen gelagerte Rechteckplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast.

siehe Bild 4.13 (a). Für die in beiden Bewehrungsrichtungen erforderlichen Biegewiderstände im Plattenzentrum  $r = 0$  erhält man aus den Beziehungen (4.48) die Bedingung

$$(m_u + m'_u) \geq \frac{Q}{2\pi} \quad (4.49)$$

Das gleiche Resultat kann auch mit dem oberen Grenzwertsatz der Plastizitätstheorie hergeleitet werden, siehe Kapitel 4.5, und die Beziehungen (4.48) und (4.49) liefern somit die vollständige Lösung für eine in der Mitte gestützte Kreisplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast.

Für eine in der Mitte gestützte, durch eine gleichmäßig verteilte Flächenlast belastete Quadratplatte mit freien Rändern, Bild 4.13 (b), können, wie von Nielsen [79] in Anlehnung an die Beziehung (4.49) vorgeschlagen, an Stelle der Bedingung (4.45) auch die Beziehungen

$$m'_u \geq \frac{Q}{8}, \quad m_u \geq \left( \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{8} \right) Q = 0.034Q \quad (4.50)$$

für die in beiden Bewehrungsrichtungen erforderlichen Biegewiderstände verwendet werden. Wie in Bild 4.13 (b) illustriert, ist der negative Widerstand  $m'_u = 0.125Q$ , welcher dem Mittelwert der negativen Biegemomente in den Stützenachsen entspricht, über die gesamte Platte beizubehalten, während der positive Widerstand wie bei der Kreisplatte parabolisch abgestuft werden darf. Aus (4.50) folgt  $m_u + m'_u \geq Q/(2\pi)$ , was eigentlich einem oberen Grenzwert für die Traglast einer Platte beliebiger Geometrie unter punktförmiger Belastung  $Q$  entspricht, siehe Kapitel 4.5. Da in Wirklichkeit immer endliche Stützenabmessungen vorhanden sind und der untere Grenzwert (4.45) daher in der Regel stark auf der sicheren Seite liegt, können die Beziehungen (4.50) trotzdem für die Bemessung benutzt werden.

Ist die Fläche, auf welcher die gleichmäßig verteilte Flächenlast angreift, nicht quadratisch, sondern rechteckig, Bild 4.13 (c), so erhält man durch Anwendung des Affinitätstheorems, siehe Kapitel 4.2.5, an Stelle von (4.50) die Beziehungen

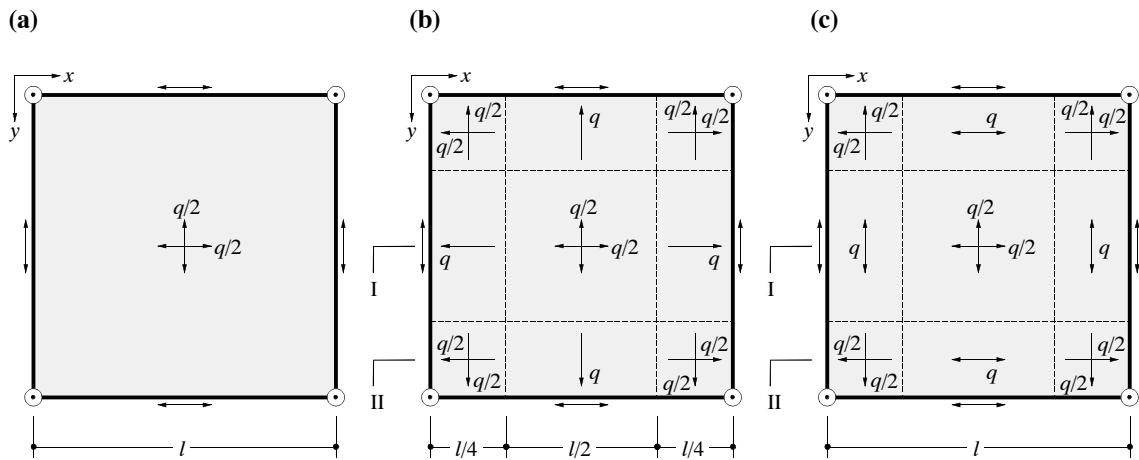
$$m'_{ux} \geq \frac{Q}{8} \frac{l_x}{l_y}, \quad m'_{uy} \geq \frac{Q}{8} \frac{l_y}{l_x}, \quad m_{ux} \geq 0.034ql_x^2 = 0.034Q \frac{l_x}{l_y}, \quad m_{uy} \geq 0.034ql_y^2 = Q \frac{l_y}{l_x} \quad (4.51)$$

wobei  $l_x$  und  $l_y$  die Abmessungen in den Richtungen  $x$  und  $y$  bezeichnen. Wiederum entsprechen die negativen Biegewiderstände  $m'_{ux}$  und  $m'_{uy}$  dem Mittelwert der entsprechenden negativen Biegemomente in den Stützenachsen.

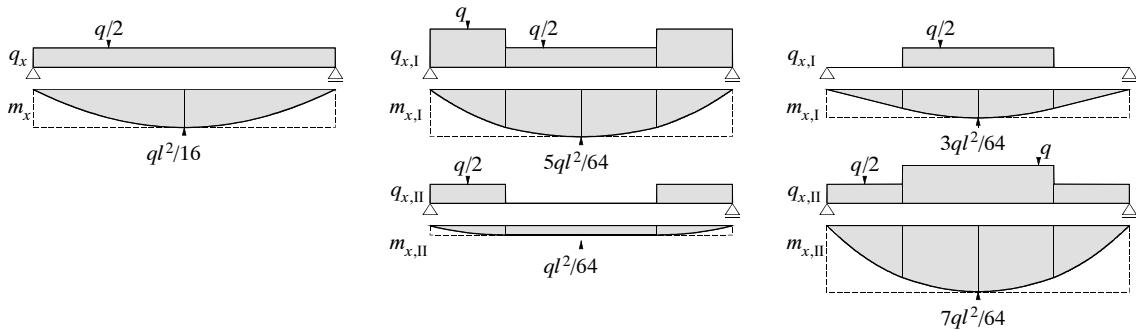
Bild 4.13 (d) illustriert die Anwendung der Beziehungen (4.51) auf eine einseitig aufgelegte und auf zwei Stützen gelagerte Rechteckplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast. Die gesamte Belastung wird zunächst in  $y$ -Richtung abgetragen, wobei der versteckte Unterzug der Breite  $b_s$  entlang des freien Randes wie in Bild 4.12 als Flächenlager mit gleichmäßig verteilter Auflagerpressung betrachtet wird. Die entsprechenden Reaktionen werden sodann vom versteckten Unterzug in  $x$ -Richtung abgetragen, wobei nun die Stützen als Flächenlager mit über den Bereich  $a_s \cdot b_s$  gleichmäßig verteilten Auflagerpressungen betrachtet werden. Im letzten Schritt werden die auf die beschriebene Weise berechneten Momenten die für die Lastabtragung im Stützenbereich  $a_s \cdot b_s$ , also für die Aufnahme der mit umgekehrtem Vorzeichen als Belastung aufgebrachten, gleichmäßig verteilten Auflagerpressungen durch die konzentrierte Stützenkraft, erforderlichen Biegewiderstände  $\Delta m_u$  gemäß (4.51) superponiert.

## Diskussion

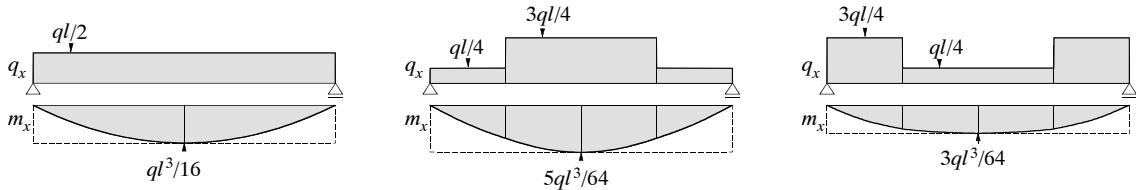
Nach (4.50) und (4.51) ist im Bereich von Punktlasten und Punktstützen sowohl eine obere als auch eine untere Bewehrung in beiden Bewehrungsrichtungen erforderlich. Dies röhrt daher, dass zur Aufnahme der punktförmigen Lasten Drillmomente bezüglich der Bewehrungsrichtungen verwendet werden, welche gemäß den Fliessbedingungen (4.28) resp. (4.29) sowohl eine



Belastung und Beanspruchung "Platte", nach einfacher Streifenmethode:



Reaktionen "Platte" = Belastung "Trägerrost" (mit umgekehrtem Vorzeichen); Beanspruchung "Trägerrost":



Beanspruchung in x-Richtung in Feldmitte, mit auf eine Breite l/2 verteilten "Trägerrost"-Momenten :

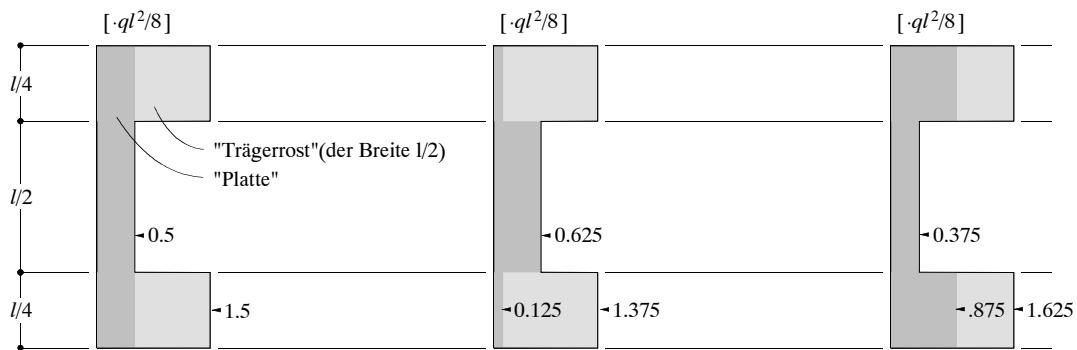


Bild 4.14 – Flachdecken: Modellierung einer eckgestützten Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast als auf einem Trägerrost in den Stützenachsen aufgelagerte Platte (Berechnung für y-Richtung analog).

obere als auch eine untere Bewehrung erfordern. Durch die Verwendung von statischen Diskontinuitäten, siehe Bild 4.4 (g), ist es möglich, punktförmige Lasten auch ohne Drillmomente bezüglich der Bewehrungsrichtungen aufzunehmen. Eine entsprechende Lösung unter Verwendung von statischen Diskontinuitäten entlang der Diagonalen wurde von Morley [71] für den in Bild 4.13 (b) illustrierten Fall vorgeschlagen.

#### 4.4.5 Flachdecken

Grundsätzlich ist es möglich, Flachdecken aufgrund der in Kapitel 4.4.2 und 4.4.4 angegebenen Lösungen für in der Mitte gestützte, durch eine gleichmäßig verteilte Flächenlast belastete Quadrat- oder Rechteckplatten mit freien Rändern zu bemessen. Bei Verwendung der in Bild 4.8 illustrierten Momentenfelder, beziehungsweise der daraus resultierenden Beziehung (4.43), resultiert bei diesem Vorgehen eine strenger unterer Grenzwert für die Traglast.

Eine alternative Möglichkeit zur Behandlung von Flachdecken zeigt Bild 4.14 am Beispiel einer in den Ecken gestützten Quadratplatte. Dabei denkt man sich zunächst einen Trägerrost in den Stützenachsen und berechnet in einem ersten Schritt Schnittgrößen und Auflagerreaktionen für eine umfanggelagerte Quadratplatte nach der einfachen Streifenmethode. In einem zweiten Schritt werden die Auflagerreaktionen aus der Plattenberechnung mit umgekehrtem Vorzeichen als Belastung auf den (torsionsweichen) Trägerrost aufgebracht und die entsprechenden Schnittgrößen im Trägerrost berechnet. Diese Schnittgrößen werden sodann auf eine endliche Breite der Platte verteilt und mit den Momenten aus der Plattenberechnung superponiert.

Je nach der bei der Plattenberechnung nach der Streifenmethode gewählten Lösung, Bild 4.14 (a)-(c), und je nach Verteilbreite der Trägerrostmomente, resultiert eine unterschiedliche Querverteilung der Biegemomente. Integration der Momente in Feldmitte über die Plattenbreite liefert in jedem Fall das Ergebnis  $\int m_x dy = \int m_y dx = ql^2/8$ ; in x- und y-Richtung wird also jeweils die volle Belastung  $q$  abgetragen.

In der Praxis wird für die Berechnung von Flachdecken oft die Methode der stellvertretenden Rahmen verwendet, Bild 4.15. In einem ersten Schritt werden mit Methoden der Stabstatik an stellvertretenden Rahmen in den Stützenachsen, Bild 4.15 (a), die Schnittgrößen oder entsprechende Grenzwerte berechnet, wobei in x- und y-Richtung je die volle Belastung  $q$  abgetragen werden muss, Bild 4.15 (b). Es können beliebige Lastfallkombinationen untersucht werden, und entsprechend ihrer Steifigkeit können den Stützen Momente zugewiesen werden sowie allenfalls vorhandene (Rand-)unterzüge wahlweise als torsionssteife Elemente modelliert werden; Stützen und Unterzüge sind dann natürlich für die entsprechenden Schnittgrößenkombinationen zu bemessen. In einem zweiten Schritt werden die Momente nach an elastischen Lösungen orientierten Regeln in Querrichtung auf die Platte verteilt, wobei für Pilzdecken mit Stützenkopfverstärkungen, Bild 4.15 (c), und für Flachdecken, Bild 4.15 (d), unterschiedliche Querverteilungen zur Anwendung kommen. Der Vergleich mit Bild 4.14 zeigt die enge Verwandtschaft der Methode der stellvertretenden Rahmen mit dem dort angewendeten Berechnungsverfahren.

Bei der Bemessung nach der Methode der stellvertretenden Rahmen oder nach dem in Bild 4.14 illustrierten Verfahren wird der Kraftfluss im Bereich der Stützen nicht im Detail untersucht. Auch wenn Schubversagen von der Betrachtung ausgeschlossen werden, resultiert somit kein strenger unterer Grenzwert für die Traglast. Um dennoch eine sichere Lastabtragung zu gewährleisten, ist im Bereich der Stützen ein ausreichender Biegewiderstand vorzusehen. Einen Anhaltspunkt für die Grösse des erforderlichen Widerstandes liefern die Bedingungen (4.51). Demnach ist ein negativer Biegewiderstand vom Betrag  $m_u' \geq Q/8$  pro Richtung erforderlich, wie dies beispielsweise auch von der Norm SIA 162 [96], im Mittel über eine Breite  $0.3l_x$  resp.  $0.3l_y$ , verlangt wird.

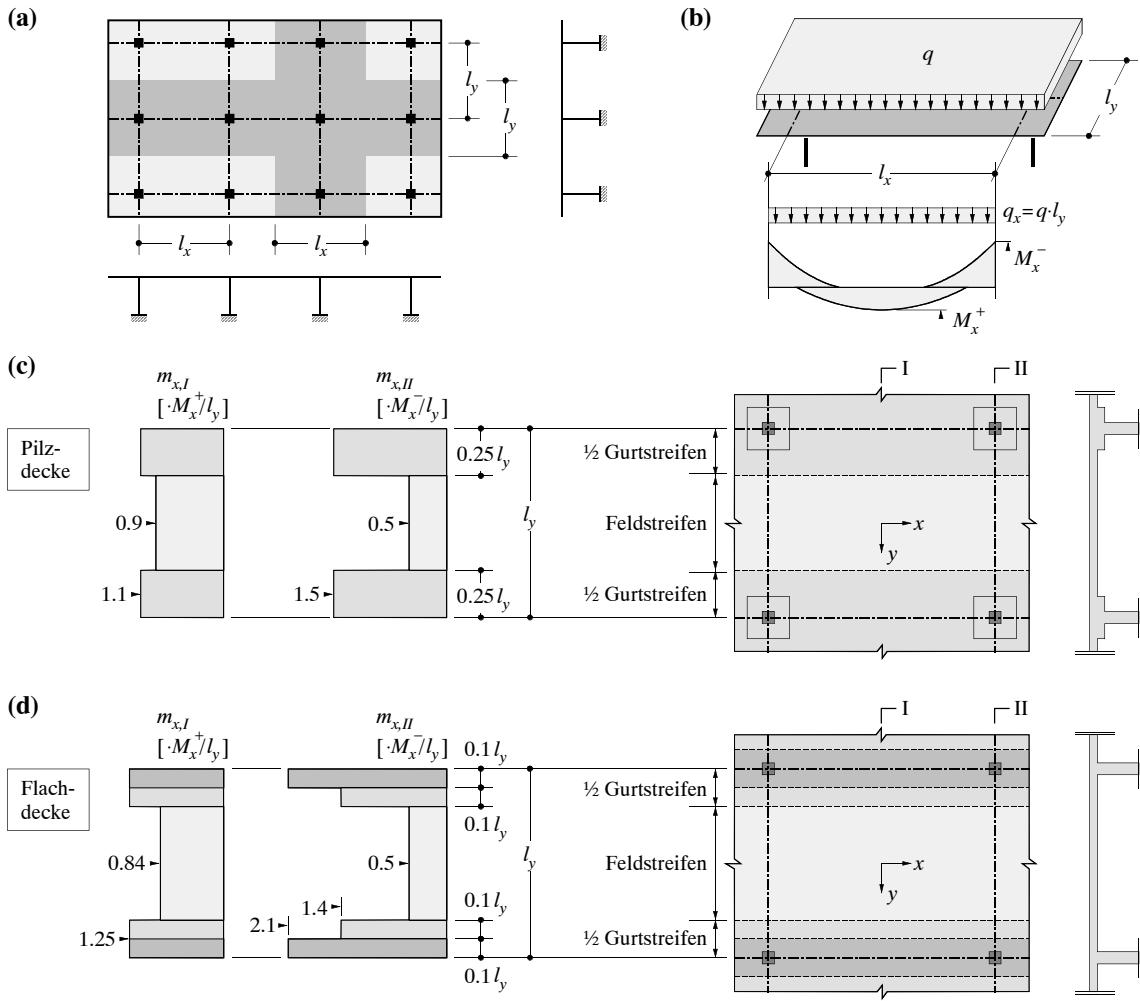


Bild 4.15 – Methode der stellvertretenden Rahmen: (a) Bezeichnungen; (b) Schnittgrößenberechnung; (c), (d) Aufteilung der Momente auf Gurt- und Feldstreifen im Feld und über den Stützen für Pilz- und Flachdecken (Berechnung für  $y$ -Richtung analog).

## 4.5 Fliessgelenklinienmethode

### 4.5.1 Allgemeines

Die auf Johansen [37] zurückgehende Fliessgelenklinienmethode ist eine Anwendung der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie. Dabei erhält man, wie in Kapitel 2.3.3 gezeigt, durch Gleichsetzen der Arbeit der äusseren Kräfte mit der Dissipationsarbeit für einen kinematisch zulässigen Bruchmechanismus einen oberen Grenzwert für die Traglast. In der Regel ist es erforderlich, verschiedene Bruchmechanismen zu untersuchen, wobei für jeden Mechanismus die Traglast bezüglich allfälliger freier Parameter zu minimieren ist. Da die starren Teile der Mechanismen in der Regel hochgradig innerlich statisch unbestimmt sind, ist es im Gegensatz zu Stabtragwerken nur in einfachen Spezialfällen möglich, eine Plastizitätskontrolle durchzuführen.

Die Fliessgelenklinienmethode ist im Vergleich mit Lösungen nach elastischer Plattentheorie oder auch Gleichgewichtslösungen recht einfach anzuwenden. Aus diesem Grund hat die kinematische Methode der Plastizitätstheorie bei Platten eine weitaus grössere Verbreitung erlangt als für Balken und Scheiben. Dazu beigetragen hat wohl auch, dass Lösungen nach der Fliessgelenklinienmethode – in Unkenntnis der Grenzwertsätze der Plastizitätstheorie und in Anbetracht der Tatsache, dass die Traglast in Versuchen oft wesentlich über den berechneten Werten liegt – vielfach als untere Grenzwerte für die Traglast betrachtet wurden.

Der unter Umständen analytisch aufwendige Minimierungsprozess beim Vorgehen nach der Fliessgelenklinienmethode kann mit der sogenannten Gleichgewichtsmethode [36], welche bereits einige Jahre vor der Verbreitung der Fliessgelenklinienmethode angewendet wurde, umgangen werden. Dabei wird Gleichgewicht an den einzelnen, starren Plattenteilen eines Mechanismus formuliert, wobei bestimmte sogenannte Knotenkräfte zu berücksichtigen sind. Da diese Methode nur beschränkt gültig ist und der Minimierungsprozess heute mit numerischen Verfahren problemlos durchgeführt werden kann, wird nicht näher auf diese Methode eingegangen.

#### 4.5.2 Berechnung der Dissipationsarbeit

##### Diskrete Fliessgelenklinie

Für die Dissipationsarbeit pro Einheitslänge einer Fliessgelenklinie in einem durch Biege- und Drillmomente sowie Membran- und Querkräfte beanspruchten Plattenelement, Bild 4.16 (a), erhält man gemäss Kapitel 4.3.2 den Wert  $dD = m_n \dot{\omega}_n + n_n \dot{\delta}_n$ . Dabei bezeichnen  $\dot{\omega}_n$  und  $\dot{\delta}_n$  die Gelenkrotation und die Gelenkkönnung in Plattenmittelebene, Bild 4.16 (b). Für verschwindende Membrankräfte,  $n_n = 0$ , folgt somit für die Dissipationsarbeit pro Elementlänge  $dt$  einer Fliessgelenklinie in  $t$ -Richtung

$$dD = m_n \dot{\omega}_n dt \quad (4.52)$$

Der Biegewiderstand einer orthotrop bewehrten Platte in einer beliebigen, unter dem Winkel  $\varphi$  gegenüber der  $x$ -Achse gedrehten Richtung wird durch die Beziehung (4.25) beschrieben. Einsetzen der ersten Gleichung (4.25) in (4.52) liefert die Dissipationsarbeit

$$dD = (m_{xu} \cos^2 \varphi + m_{yu} \sin^2 \varphi) \dot{\omega}_n dt \quad (4.53)$$

Gemäss Bild 4.16 (b) betragen die Rotationsgeschwindigkeiten um die  $y$ - resp.  $x$ -Achse für eine Rotation  $\dot{\omega}_n$  um die  $t$ -Achse  $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_n \cos \varphi$  und  $\dot{\omega}_y = \dot{\omega}_n \sin \varphi$ . Mit den geometrischen Beziehungen  $dx = dt \sin \varphi$  und  $dy = dt \cos \varphi$ , Bild 4.16 (a), folgt aus (4.53) der Ausdruck

$$dD = m_{xu} \dot{\omega}_x dy + m_{yu} \dot{\omega}_y dx \quad (4.54)$$

für die Dissipationsarbeit pro Elementlänge einer Fliessgelenklinie in einer orthotrop bewehrten Platte. Gemäss (4.53) kann die Dissipationsarbeit aus der Summe der Produkte von Biegewiderstand, Rotationsgeschwindigkeit um die entsprechende Achse und auf diese Achse projizierter Länge der Fliessgelenklinie in den beiden Bewehrungsrichtungen berechnet werden.

##### Fächermechanismen

Bild 4.16 (c) illustriert die Berechnung der Dissipationsarbeit für einen Fächermechanismus in einer isotrop bewehrte Platte,  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$ . Der Hauptkrümmungsradius im Kegelement beträgt  $\rho = Rr$ , die nicht verschwindende Hauptkrümmung somit  $\chi_1 = \rho^{-1} = (Rr)^{-1}$ . Für die Dissipationsarbeit pro Flächenelement im Fächer erhält man

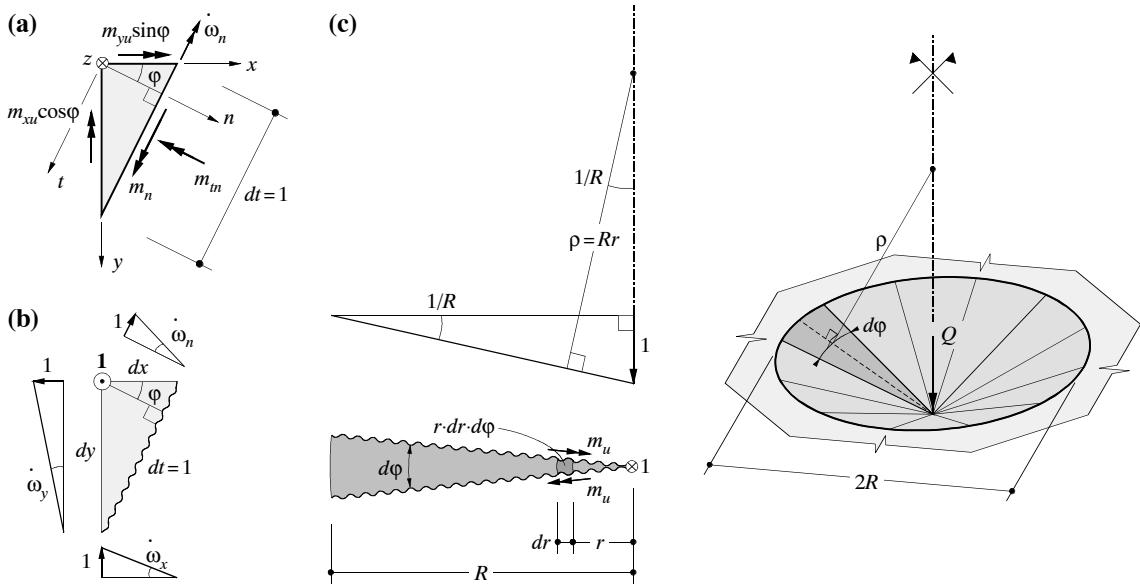


Bild 4.16 – Fliessgelenklinienmethode: (a) und (b) Berechnung der Dissipation für orthotrope Bewehrung; (c) Berechnung der Dissipation in einem Fächer.

$$dD = m_u dr \frac{1}{\rho} r d\varphi = \frac{m_u}{R} dr d\varphi \quad (4.55)$$

Die Dissipationsarbeit im Innern eines Fächers mit Öffnungswinkel  $\beta$  beträgt somit

$$D = \int_0^{\beta} \frac{1}{R(\varphi)} \int_0^{R(\varphi)} m_u(r, \varphi) dr d\varphi \quad (4.56)$$

wobei  $m_u$  und  $R$  allgemeine Funktionen des Winkels  $\varphi$  sein können. Für die Dissipationsarbeit entlang der Fächerberandung erhält man aus (4.52) die von  $R$  unabhängige Beziehung

$$D = \int_0^{\beta} \frac{1}{R} m'_u R d\varphi = \int_0^{\beta} m'_u(r, \varphi) d\varphi \quad (4.57)$$

Für konstante  $m_u$  und  $m'_u = \lambda m_u$  beträgt die Dissipationsarbeit eines Fächers mit Öffnungswinkel  $\beta$  somit insgesamt

$$D = \beta(m_u + m'_u) = \beta m_u(1 + \lambda) \quad (4.58)$$

Fächer in orthotrop bewehrten Platten sowie Fächer mit veränderlichem Radius  $R$  können durch Berücksichtigung der Variation von  $m_u$ ,  $m'_u$  und  $R$  in Funktion von  $\varphi$  in den Beziehungen (4.56) und (4.57) behandelt werden. Alternativ dazu kann für orthotrop bewehrte Platten das Affinitätstheorem, Kapitel 4.2.5, verwendet werden, was im folgenden Beispiel illustriert wird.

### 4.5.3 Beispiele

In den nachfolgenden Beispielen werden für Fliessgelenklinien die in Bild 4.17 (a) dargestellten Signaturen verwendet.

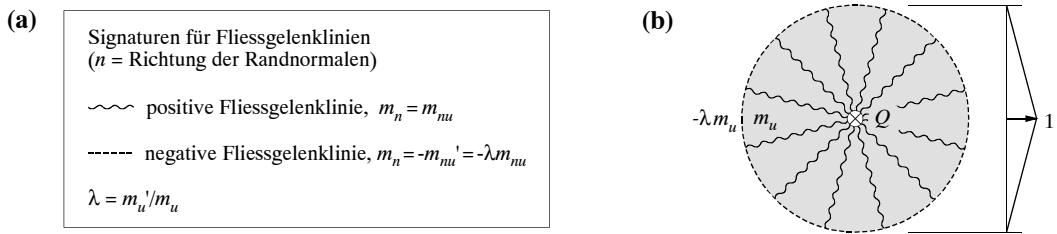


Bild 4.17 – Fließgelenklinienmethode: (a) Signaturen für Fließgelenklinien; (b) Bruchmechanismus für Platte beliebiger Geometrie unter Einzellast.

### Einzellast auf Platten beliebiger Geometrie

Der Fächermechanismus gemäss Bild 4.17 (b), siehe auch Bild 4.16 (c), liefert einen oberen Grenzwert für eine konzentrierte Belastung auf einer Platte beliebiger Geometrie. Für eine Einheitseinsenkung im Fächerzentrum beträgt die Arbeit der äusseren Kräfte  $W = Q \cdot 1$ , und für die Dissipationsarbeit erhält man mit  $\beta = 2\pi$  aus (4.58) den Wert  $D = 2\pi m_u(1 + \lambda)$ . Aus  $W = D$  folgt somit

$$Q_u \leq 2\pi(m_u + m'_u) = 2\pi m_u(1 + \lambda) \quad (4.59)$$

Der Vergleich mit dem aus einem statisch zulässigen Momentenfeld erhaltenen Wert (4.49) zeigt, dass (4.59) die vollständige Lösung für eine Kreisplatte liefert, während für Quadratplatten mit den Beziehungen (4.50) offensichtlich ein oberer Grenzwert verwendet wird.

Für eine orthotrop bewehrte Platte mit  $m_{yu}/m_{xu} = m'_{yu}/m'_{xu}$  erhält man mit Hilfe des Affinitätstheorems, Kapitel 4.2.5, anstelle von (4.59) den bei beliebiger Plattengeometrie gültigen oberen Grenzwert für eine konzentrierte Belastung

$$Q_u \leq 2\pi(\sqrt{m_{xu}m_{yu}} + \sqrt{m'_{xu}m'_{yu}}) = 2\pi\sqrt{m_{xu}m_{yu}}(1 + \lambda) \quad (4.60)$$

Der entsprechende Bruchmechanismus ist ein elliptischer Fächer, dessen Halbachsen sich um einen Faktor  $\sqrt{m_{yu}/m_{xu}}$  unterscheiden. Die grössere Halbachse liegt dabei in Richtung der stärkeren Bewehrung.

### Einzellast auf Plattenstreifen

Für einen eingespannten Plattenstreifen unter mittiger konzentrierter Belastung, Bild 4.18, erhält man mit einem Pyramidenmechanismus gemäss Bild 4.18 (a)

$$W = Q \cdot 1 \quad (4.61)$$

$$D = 2 \cdot m_u \left( 2a \cdot \frac{2}{b} + b \cdot \frac{1}{a} \right) + \lambda_e \cdot m_u \cdot 2 \cdot 2a \cdot \frac{2}{b} + \lambda_i \cdot m_u \cdot 2 \cdot b \cdot \frac{1}{a} \quad (4.62)$$

für die Arbeit der äusseren Kräfte und die Dissipationsarbeit, wobei  $m_{ux} = m_{uy} = m_u$  angenommen wurde. Mit  $W = D$  folgt aus (4.61) und (4.62) der obere Grenzwert für die Traglast

$$Q_u \leq 2m_u \left( \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} + \lambda_e \frac{4a}{b} + \lambda_i \frac{b}{a} \right) \quad (4.63)$$

Minimieren von  $Q_u$  bezüglich des freien Parameters  $a$  liefert die Beziehung

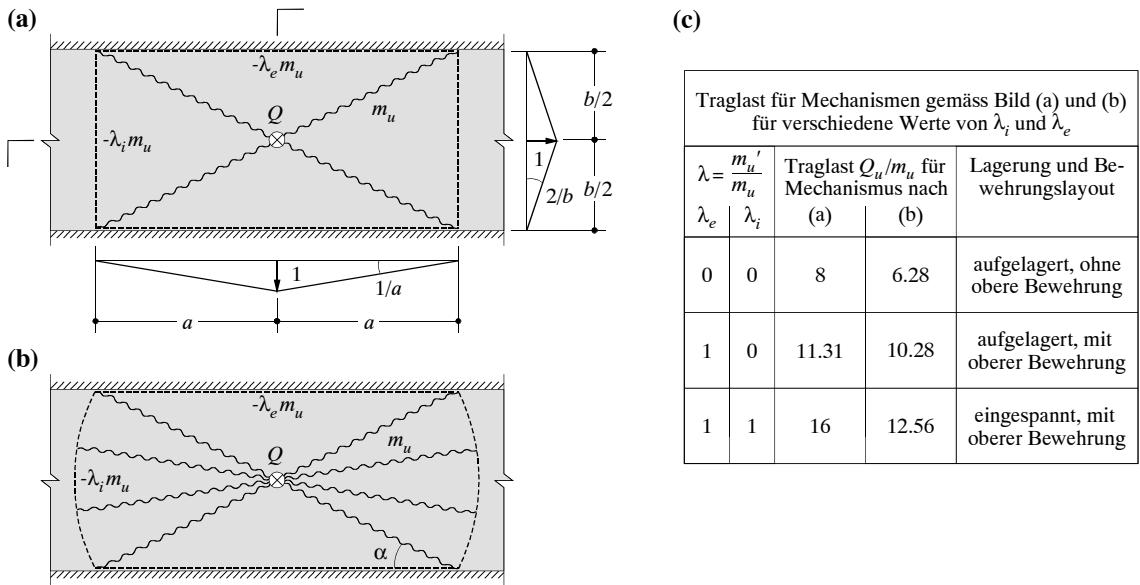


Bild 4.18 – Fliessgelenklinienmethode: (a) und (b) Bruchmechanismen für Plattenstreifen unter Einzellast; (c) Traglast für verschiedene Werte der negativen Biegewiderstände.

$$\frac{dQ}{da} = 2m_u \left[ \frac{4}{b}(1 + \lambda_e) - \frac{b}{a^2}(1 + \lambda_i) \right] = 0 \quad (4.64)$$

und somit

$$a_{opt} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1 + \lambda_i}{1 + \lambda_e}} \quad (4.65)$$

Einsetzen von (4.65) in (4.62) liefert den oberen Grenzwert für die Traglast

$$Q_u \leq 8m_u \sqrt{1 + \lambda_i} \sqrt{1 + \lambda_e} \quad (4.66)$$

Mit einem Fächermechanismus gemäss Bild 4.18 (b) erhält man

$$W = Q \cdot 1 \quad (4.67)$$

$$D = m_u(1 + \lambda_i) \cdot 2 \cdot 2\alpha + m_u(1 + \lambda_e) \cdot 2 \cdot 2a \cdot \frac{2}{b} \quad (4.68)$$

woraus, mit  $W = D$  und  $2a/b = \cot\alpha$ , der obere Grenzwert für die Traglast

$$Q_u \leq 4m_u [\alpha(1 + \lambda_i) + \cot\alpha(1 + \lambda_e)] \quad (4.69)$$

folgt. Minimieren von  $Q_u$  bezüglich des freien Parameters  $\alpha$ ,  $dQ/d\alpha = 0$ , liefert

$$\sin^2 \alpha_{opt} = \frac{1 + \lambda_e}{1 + \lambda_i} \quad (4.70)$$

Daraus kann für beliebige Werte von  $\lambda_i$  und  $\lambda_e$  der optimale Winkel  $\alpha$  berechnet werden, und durch Einsetzen in (4.69) folgt der entsprechende obere Grenzwert für die Traglast.

Die Traglast nach dem Pyramidenmechanismus, (4.66), und nach dem Fächermechanismus, (4.69) mit (4.70), ist in Bild 4.18 (c) für verschiedene Kombinationen von  $\lambda_i$  und  $\lambda_e$  angegeben. Es zeigt sich, dass in jedem Fall der Fächermechanismus, Bild 4.18 (b), massgebend wird.

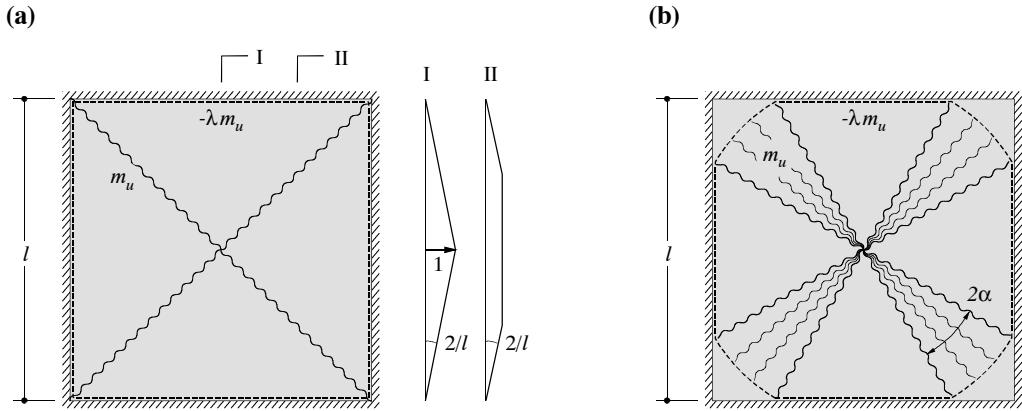


Bild 4.19 – Fliessgelenklinienmethode: (a) und (b) Bruchmechanismen für eingespannte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast.

### Eingespannte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast

Für eine allseitig eingespannte Quadratplatte unter gleichmässig verteilter Flächenlast, Bild 4.19, erhält man mit einem Pyramidenmechanismus gemäss Bild 4.19 (a)

$$W = \frac{q l^3}{3} \quad (4.71)$$

$$D = 4 \cdot l \cdot \frac{2}{l} \cdot m_u + 4 \cdot l \cdot \frac{2}{l} \cdot m'_u \quad (4.72)$$

wobei wiederum  $m_{ux} = m_{uy} = m_u$  angenommen wurde. Mit  $W = D$  folgt aus (4.71) und (4.72) der obere Grenzwert für die Traglast

$$q_u \leq 24 \frac{m_u}{l^2} (1 + \lambda) \quad (4.73)$$

Mit einem Fächermechanismus gemäss Bild 4.19 (b) erhält man mit  $\beta = \pi/4 - \alpha$

$$\frac{W}{8} = q \left[ \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \tan \beta \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{\cos \beta} \cdot \frac{l \alpha}{4 \cos \beta} \cdot \frac{1}{3} \right] = \frac{q l^2}{24} \left[ \tan \beta + \frac{\alpha}{\cos^2 \beta} \right] \quad (4.74)$$

$$\frac{D}{8} = m_u (1 + \lambda) \alpha + m_u (1 + \lambda) \cdot \frac{2}{l} \cdot \frac{l}{2} \tan \beta = m_u (1 + \lambda) (\alpha + \tan \beta) \quad (4.75)$$

wobei aus Symmetriegründen nur ein Achtel der Platte betrachtet wurde. Gleichsetzen der Arbeit der äusseren Kräfte mit der Dissipationsarbeit,  $W = D$ , und Minimieren bezüglich des freien Parameters  $\alpha$ ,  $dq/d\alpha = 0$ , liefert  $\alpha_{opt} = 14.3^\circ$  und den oberen Grenzwert

$$q_u \leq 21.75 \frac{m_u}{l^2} (1 + \lambda) \quad (4.76)$$

Dieser Wert liegt um knapp zehn Prozent unter demjenigen gemäss Pyramidenmechanismus, Bild 4.19 (b), und nur um rund 1.5% über der auf Fox [25] zurückgehenden vollständigen Lösung

$$q_u = 21.425 \frac{m_u}{l^2} (1 + \lambda) \quad (4.77)$$

### Einfach gelagerte Quadratplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast

Für eine einfach gelagerte Quadratplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast folgt aus (4.73) der obere Grenzwert für die Traglast  $q_u \leq 24m_u/l^2$ . Der gleiche Wert resultiert aus den Momentenfeldern nach Bild 4.7 für eine einfach gelagerte Quadratplatte unter gleichmäßig verteilter Flächenlast, falls die Ecken gehalten sind und der negative Biegewiderstand in den Ecken  $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$  beträgt, Bild 4.7 (d). Der Mechanismus gemäß Bild 4.19 (a) ist verträglich mit dem entsprechenden Momentenfeld, und (4.73) liefert somit für  $m'_{xu} = m'_{yu} = m_u$  die vollständige Lösung. Offensichtlich kann die Traglast durch Erhöhen von  $m'_u$  nicht weiter erhöht werden, da der Mechanismus nach Bild 4.19 (a) unabhängig von  $m'_u$  den Wert  $q_u = 24m_u/l^2$  liefert. Bei fehlender oberer Bewehrung wird hingegen der Mechanismus nach (4.76) massgebend, beziehungsweise der diesem sehr ähnliche Mechanismus, welcher die Beziehung (4.77) liefert. Mit dem für diesen Fall gemäß Bild 4.7 (b) resultierenden unteren Grenzwert für die Traglast von  $16m_u/l^2$  erhält man die Eingabelung  $16m_u/l^2 \leq q_u \leq 21.425m_u/l^2$ .

### Unendlich ausgedehnte Flachdecke unter gleichmäßig verteilter Flächenlast

Als nächstes Beispiel wird eine unendlich ausgedehnte Flachdecke mit  $m_{xu} = m_{yu} = m_u$  und  $m'_u = \lambda m_u$  unter gleichmäßig verteilter Flächenlast betrachtet, Bild 4.20. Der Linienmechanismus in  $x$ -Richtung gemäß Bild 4.20 (a) liefert die Beziehungen

$$W = \frac{1}{2} \cdot q \cdot (1 - \xi)a \quad (4.78)$$

$$D = 2 \cdot m_u (1 + \lambda) \cdot \frac{2}{(1 - \xi)^2} \quad (4.79)$$

pro Einheitsbreite der Platte in  $y$ -Richtung. Linienmechanismen in  $y$ -Richtung werden für  $b < a$  mit  $m_{xu} = m_{yu}$  offensichtlich nicht massgebend, und mit  $W = D$  folgt der obere Grenzwert

$$q_u \leq \frac{8m_u(1 + \lambda)}{a^2(1 - \xi)^2} \quad (4.80)$$

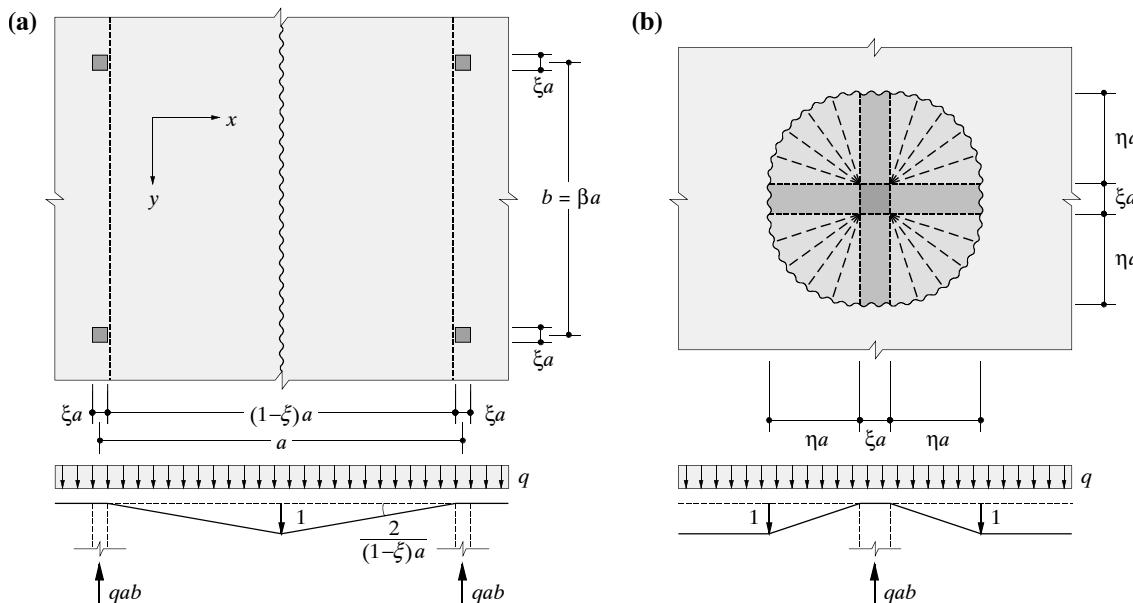


Bild 4.20 – Fließgelenklinienmethode: (a) Linienmechanismus und (b) Stützenmechanismus für unendlich ausgedehnte Flachdecke unter gleichmäßig verteilter Flächenlast.

Für den Stützenmechanismus gemäss Bild 4.20 (b) erhält man die Beziehungen

$$W = q \cdot a \cdot \beta a \cdot 1 - q \cdot (\xi a)^2 \cdot 1 - 4 \frac{q \cdot \xi a \cdot \eta a}{2} - \frac{1}{3} \cdot q \cdot \pi(\eta a)^2 \quad (4.81)$$

$$D = 4 \cdot m_u (1 + \lambda) \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\xi a}{\eta a} \right) \quad (4.82)$$

Daraus folgt mit  $W = D$  der obere Grenzwert für die Traglast

$$q_u \leq \frac{2m_u(1+\lambda)(\pi+2\xi/\eta)}{a^2(\beta-\xi^2-2\xi\eta-\pi\eta^2/3)} \quad (4.83)$$

Minimieren bezüglich des freien Parameters  $\eta$ ,  $dq/d\eta = 0$ , liefert die Beziehung

$$\frac{\pi^2 \eta^3}{3} + 2\pi\xi\eta^2 + 4\xi^2\eta - \xi(\beta - \xi^2) = 0 \quad (4.84)$$

Daraus kann bei gegebener Geometrie ( $\beta$  und  $\xi$ ) der optimale Wert von  $\eta$  bestimmt werden, und Einsetzen in (4.83) liefert den entsprechenden oberen Grenzwert für die Traglast.

Vergleicht man die Traglast einer Platte mit quadratischem Stützenraster nach dem Linienmechanismus, (4.80), und nach dem Stützenmechanismus, (4.83) mit (4.84), so zeigt sich, dass für beliebige Werte von  $\xi$  der Stützenmechanismus massgebend wird, falls die Bewehrung nicht abgestuft wird. Die in Kapitel 4.4.5 empfohlene Abstufung der Bewehrung in Querrichtung, etwa nach Bild 4.15, wird also durch die Betrachtung von Bruchmechanismen bestätigt.

Wird die Bewehrung in Querrichtung abgestuft, so erhält man durch Integration über eine Feldbreite  $a$  respektive  $b$  anstelle von (4.80) die oberen Grenzwerte für die Traglast

$$q_u \leq \frac{8}{a^2(1-\xi)^2} \cdot \frac{\int_b (m_{xu} + m'_{xu}) dy}{b}, \quad q_u \leq \frac{8}{b^2(1-\xi a/b)^2} \cdot \frac{\int_a (m_{yu} + m'_{yu}) dy}{b} \quad (4.85)$$

bei massgebender  $x$ - resp.  $y$ -Richtung; für  $m_{xu} \neq m_{yu}$  kann die kürzere Spannweite nicht mehr zum vornherein als nicht massgebend vernachlässigt werden. Die Traglast nach den Beziehungen (4.85) entspricht derjenigen für in  $x$ - resp.  $y$ -Richtung tragende, in den Stützenachsen senkrecht zur betrachteten Richtung gelagerte Plattenstreifen unter der vollen Belastung  $q$ . Somit wird die bereits im Zusammenhang mit den Bildern 4.14 und 4.15 gemachte Feststellung, dass bei punktstützten Platten in jede Richtung die volle Belastung  $q$  abgetragen werden muss, durch die Betrachtung von Bruchmechanismen ebenfalls bestätigt.

## 4.6 Einfluss von Querkräften

### 4.6.1 Allgemeines

Gemäss Kapitel 4.2.2 wird an jeder Stelle einer Platte eine Hauptquerkraft  $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  in Richtung  $\varphi_0 = \tan^{-1}(v_y/v_x)$  gegenüber der  $x$ -Achse abgetragen, wobei  $v_x$  und  $v_y$  die Querkräfte in  $x$ - und  $y$ -Richtung sind. Senkrecht zu dieser Richtung wird keine Querkraft abgetragen. Als Mass für die Grösse der Schubbeanspruchung einer Platte kann somit die nominelle Schubspannung  $v_0/d_v$  verwendet werden, mit  $d_v$  = Hebelarm der inneren Kräfte.

Ausser in unmittelbarer Umgebung von konzentrierten Krafteinleitungen ist die Schubbeanspruchung  $v_0/d_v$  in Platten in der Regel gering. Im Gegensatz zu Stabtragwerken, bei welchen in jedem Fall eine konstruktive Mindestbügelbewehrung eingelegt werden sollte, kann daher oft auf eine Schubbewehrung verzichtet werden. Die Schubtragsicherheit beruht in solchen Fällen

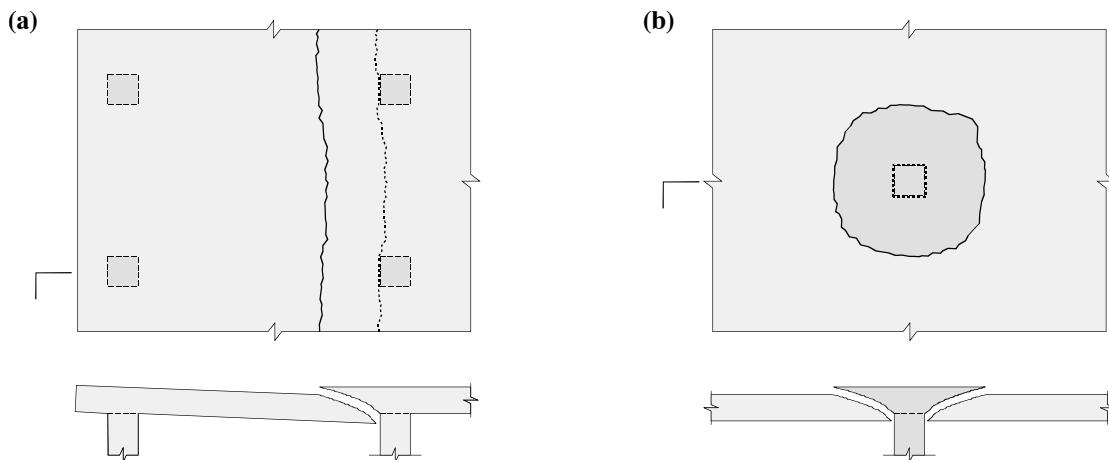


Bild 4.21 – Einfluss von Querkräften: (a) Schubbruch (breiter Balken); (b) Durchstanzversagen im Krafteinleitungsbereich.

auf der Zugfestigkeit des Betons, was dadurch gerechtfertigt werden kann, dass Platten im Vergleich mit Stabtragwerken eine höhere Redundanz aufweisen und die Ausbildung eines Versagensmechanismus, Bild 4.21 (a), weniger wahrscheinlich ist. Einen Grenzfall bilden nur in einer Richtung tragende Plattenstreifen, deren Abgrenzung gegenüber Balken mit Rechteckquerschnitt nicht ohne eine gewisse Willkür möglich ist.

Im Bereich von Krafteinleitungen, namentlich im Stützenbereich von Flachdecken, treten im allgemeinen hohe Schubbeanspruchungen auf. Bei fehlender Schubbewehrung kann dies zu schlagartigem, sprödem Versagen des Krafteinleitungsbereiches führen, Bild 4.21 (b). Auf dieses als Durchstanzen bekannte Phänomen wird in Kapitel 4.6.3 näher eingegangen.

Grundsätzlich sind Platten sehr duktile Tragwerke. Dies gilt besonders für Platten mit Schubbewehrung, da diese dreidimensional bewehrt sind. Versagt hingegen eine Platte ohne Schubbewehrung infolge Querkraft, so verhindert die spröde Natur des Bruches eine Schnittgrößenumlagerung, welche zur Entlastung der betroffenen Bereiche führen würde. Dabei ist zu beachten, dass die im Verlauf der Belastung auftretenden maximalen Querkräfte unter Umständen stark von der Schubbeanspruchung im der Bemessung zugrundegelegten Zustand abweichen können. Um eine sichere Bemessung zu gewährleisten, sollte daher bei fehlender Schubbewehrung grundsätzlich die Querkraftbeanspruchung an jeder Stelle der Platte während der gesamten Belastungsgeschichte überprüft werden. Dies gilt insbesondere auch für moderne Computerprogramme für die Bemessung von Stahlbetonplatten auf der Grundlage des unteren Grenzwertsatzes der Plastizitätstheorie [5,6].

In der Praxis begnügt man sich jedoch auch bei fehlender Schubbewehrung in der Regel damit, aufgrund der Schubbeanspruchung im Zustand der maximalen Schnittgrößenumlagerung, welcher auch der Biegebemessung zugrunde gelegt wird, eine ausreichende Sicherheit gegen Schubversagen vorzusehen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass der Schubwiderstand von dicken Platten ohne Schubbewehrung infolge des spröden Bruchvorganges einem Maßstabseffekt unterliegt. Dies bedeutet, dass die ohne Schubbewehrung aufnehmbare nominelle Schubspannung  $v_0/d_v$  mit der Plattendicke abnimmt, was durch eine entsprechende Reduktion des rechnerischen Schubwiderstandes in Funktion der Plattendicke berücksichtigt werden kann, siehe zum Beispiel [96].

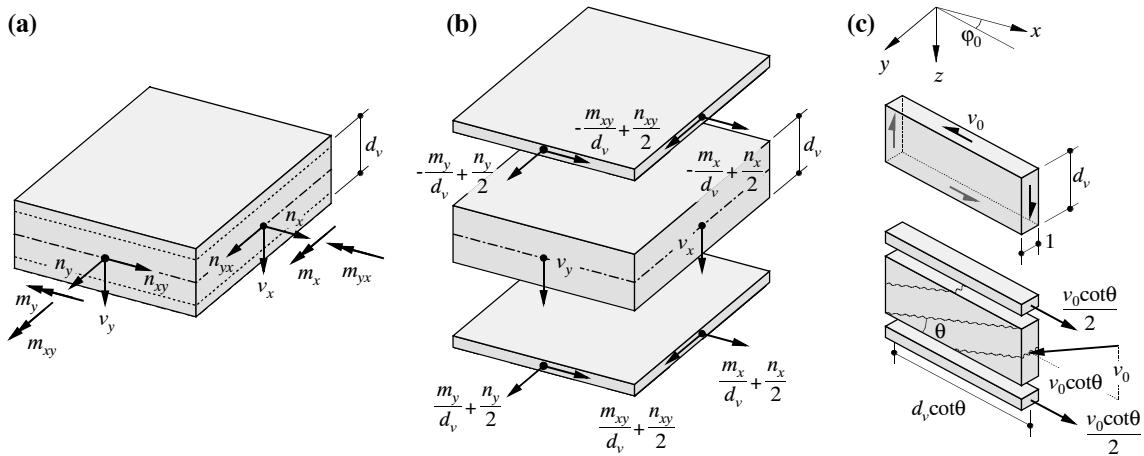


Bild 4.22 – Sandwichmodell: (a) allgemein beanspruchtes Plattenelement; (b) Aufteilung der Schnittgrößen; (c) Abtragung der Hauptquerkraft im ungerissenen und im gerissenen Kern.

#### 4.6.2 Sandwichmodell

Die auf ein Plattenelement unter allgemeiner Beanspruchung einwirkenden Schnittgrößen, Bild 4.22 (a), können mit einem Sandwichmodell aufgenommen werden. Im Sinne einer Gleichgewichtslösung werden dabei gemäss Bild 4.22 (b) die Biege- und Drillmomente sowie allfällige Membrankräfte den Sandwichdeckeln zugewiesen, während der Sandwichkern die Querkräfte aufnimmt.

In den beiden Sandwichdeckeln resultiert eine ebene Beanspruchung; sie können somit als Scheibenelemente behandelt und entsprechend Kapitel 3.3 bewehrt werden. Der Sandwichkern trägt die Hauptquerkraft  $v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  in der Richtung  $\varphi_0 = \tan^{-1}(v_y/v_x)$  ab und kann in dieser Richtung wie der Steg eines Trägers gemäss Bild 3.14 behandelt werden, Bild 4.22 (c). Dabei sind die resultierenden Zugkräfte in der Plattenebene durch die Sandwichdeckel aufzunehmen. Man erhält aus diesen Betrachtungen die Bedingungen [56]

$$\begin{aligned}
 a_{sx} f_y &\geq \frac{m_x}{d_v} + \frac{n_x}{2} + \frac{v_x^2}{2v_0 \tan \theta} + k \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2v_0 \tan \theta} \right| \\
 a_{sy} f_y &\geq \frac{m_y}{d_v} + \frac{n_y}{2} + \frac{v_y^2}{2v_0 \tan \theta} + \frac{1}{k} \left| \frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2v_0 \tan \theta} \right| \\
 a'_{sx} f_y &\geq -\frac{m_x}{d_v} + \frac{n_x}{2} + \frac{v_x^2}{2v_0 \tan \theta} + k' \left| -\frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2v_0 \tan \theta} \right| \\
 a'_{sy} f_y &\geq -\frac{m_y}{d_v} + \frac{n_y}{2} + \frac{v_y^2}{2v_0 \tan \theta} + \frac{1}{k'} \left| -\frac{m_{xy}}{d_v} + \frac{n_{xy}}{2} + \frac{v_x v_y}{2v_0 \tan \theta} \right|
 \end{aligned} \tag{4.86}$$

für die erforderlichen Querschnitte  $a_s$  und  $a'_s$  der orthogonalen unteren und oberen Bewehrung pro Einheitsbreite der Platte in  $x$ - und  $y$ -Richtung. Die für die Abtragung der Hauptquerkraft erforderliche vertikale Schubbewehrung beläuft sich auf

$$\rho_z = \frac{v_0 \tan \theta}{d_v f_y} \tag{4.87}$$

Dabei bezeichnet  $d_v$  den Hebelarm der Membrankräfte in den Sandwichdeckeln,  $k$  und  $k'$  sind beliebige positive Faktoren, und  $\theta$  ist die Neigung des diagonalen Druckfeldes im Sandwichkern. Die Werte von  $k$  und  $k'$  können im Prinzip an jeder Stelle der Platte unterschiedlich gewählt werden, wobei abrupte Wechsel zu vermeiden oder die resultierenden differentiellen Bewehrungskräfte zu verankern sind. Hinsichtlich der Festlegung von  $\theta$  gelten sinngemäß die gleichen Bemerkungen wie für Spannungsfelder in Trägerstegen, siehe Kapitel 3.4.4. In der Praxis wird man der Einfachheit halber oft die Werte  $k = k' = 1$  und  $\theta = 45^\circ$  wählen.

Falls die nominelle Schubspannung  $v_0/d_v$  im Kern einen bestimmten Wert  $\tau_{c,red}$  nicht überschreitet,  $v_0/d_v < \tau_{c,red}$ , so kann auf eine Schubbewehrung verzichtet werden,  $\rho_z = 0$ , und in den Beziehungen (4.86) entfallen die Terme, welche  $v_x$  und  $v_y$  enthalten. Dabei bezeichnet  $\tau_{c,red}$  den rechnerischen Schubwiderstand der Platte ohne Schubbewehrung, welcher infolge des Massstabseffektes eine Funktion der Plattendicke ist. Als Richtgrösse für übliche Plattenstärken gilt etwa  $\tau_{c,red} = f_{ct}/3$ , mit  $f_{ct}$  = Zugfestigkeit des Betons.

Eine Schubbewehrung in Platten ist relativ aufwendig zu verlegen. Es ist daher aus wirtschaftlichen Gründen in der Regel günstig, die Plattendicke und damit  $d_v$  so zu wählen, dass zumindest ausserhalb der Krafteinleitungsbereiche keine Schubbewehrung erforderlich ist.

#### 4.6.3 Durchstanzen

Wie bereits in Kapitel 4.6.1 bemerkt, können die im Bereich von Stützen und vergleichbaren Krafteinleitungen auftretenden hohen Schubbeanspruchungen bei fehlender Bügelbewehrung zu schlagartigem Durchstanzversagen führen, Bild 4.21 (b). Dieses Verhalten ist mit plastizitäts-theoretischen Modellen infolge des spröden Bruchvorganges nur bedingt erfassbar. Versuche zeigen, dass der Durchstanzwiderstand von zahlreichen Parametern abhängt, insbesondere von der Zug- und Druckfestigkeit des Betons, vom Bewehrungsgehalt und von der konstruktiven Ausbildung der Bewehrung.

Die Bemessungsvorschriften in den gängigen Normen beruhen auf (semi-)empirischen, an Versuchen kalibrierten Beziehungen. Dabei wird in der Regel ein massgebender Umfang in einem bestimmten Abstand vom Stützenrand definiert und der Durchstanzwiderstand als Produkt dieses Umfanges mit der statischen Höhe der Platte und einem nominellen Schubwiderstand ausgedrückt. Im folgenden werden die Bestimmungen nach der Norm SIA 162 [96] erläutert, welche dem heutigen Stand des Wissens weitgehend entsprechen.

Wie in Bild 4.23 (a) und (b) illustriert, liegt der massgebende Umfang  $u$  nach diesen Bestimmungen in einem Abstand  $d_m/2$  vom Stützenrand entfernt, mit  $d_m$  = mittlere statische Höhe der Biegebewehrung über der Stütze in beiden Richtungen. Sind Stützenkopfverstärkungen vorhanden, so liegt der massgebende Umfang  $u$  gemäss Bild 4.23 (a) entsprechend weiter aussen. Die nominelle Schubspannung entlang  $u$  darf den Wert von  $1.8\tau_{c,red}$  nicht überschreiten, der rechnerische Durchstanzwiderstand beträgt somit  $V_R = 1.8\tau_{c,red}ud_m$ . Zwischen dem massgebenden Umfang  $u$  und dem in Bild 4.23 (b) ebenfalls eingezeichneten Umfang, in welchem die nominelle Schubspannung  $v_0/d_m = \tau_{c,red}$  beträgt und somit gemäss Kapitel 4.6.2 gerade keine Schubbewehrung mehr erforderlich ist, liegt der sogenannte Krafteinleitungsbereich. Innerhalb dieses Bereiches ist eine Schubbeanspruchung  $v_0/d_m > \tau_{c,red}$  zulässig, was durch Versuche gelehrt wird. Dies verdeutlicht die Tatsache, dass der massgebende Umfang  $u$  und die entlang diesem maximal zulässige Schubspannung lediglich Hilfsgrössen zur Berechnung des Durchstanzwiderstandes sind, denen keine eigentliche physikalische Bedeutung zukommt.

Für grosse oder wandartige Stützen ist der massgebende Umfang entsprechend Bild 4.23 (b) zu reduzieren, da die Beanspruchung in den Randbereichen der Stütze konzentriert auftritt. Eben-

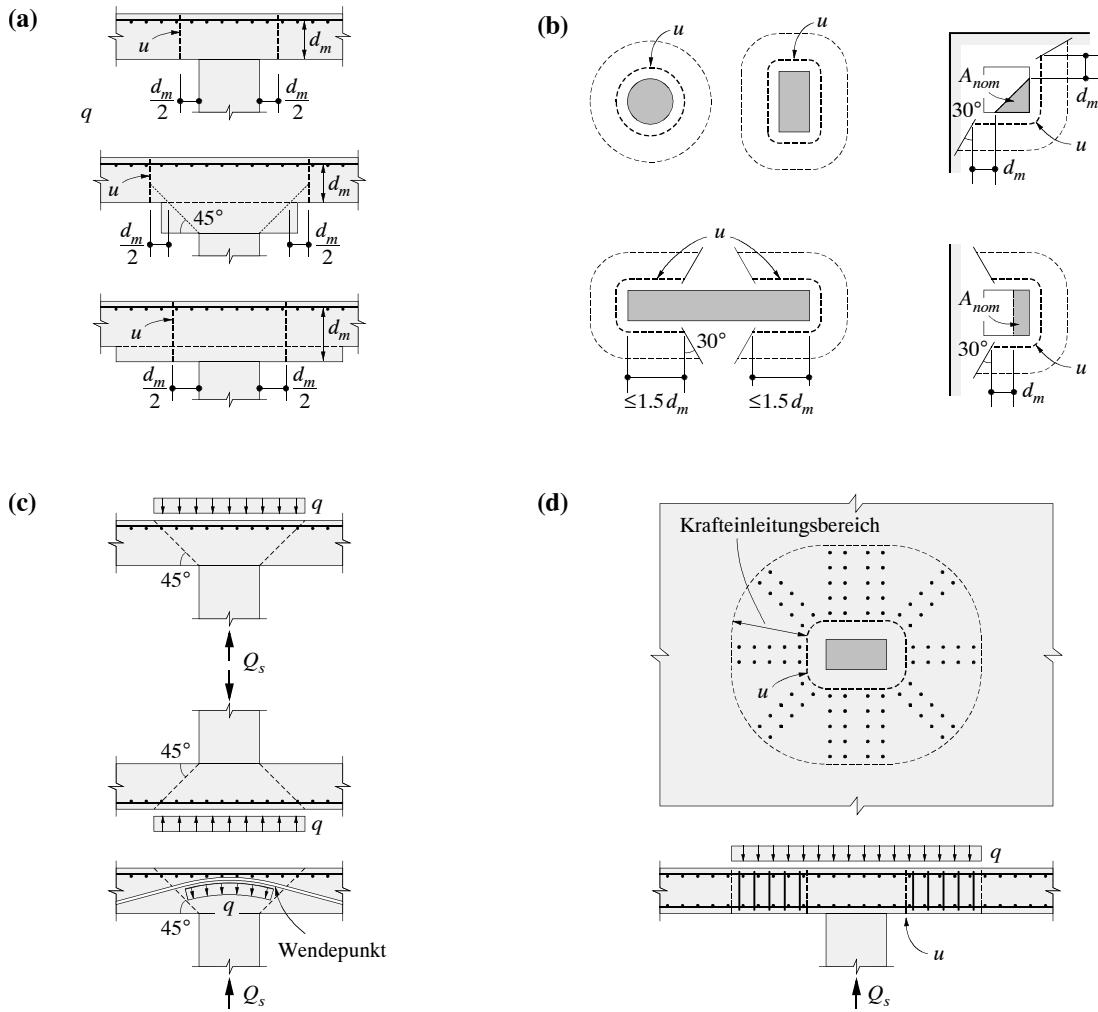


Bild 4.23 – Durchstanzen: (a) und (b) massgebender Umfang  $u$  und äusserer Umfang des Krafteinleitungsbereiches für verschiedene Stützengeometrie nach [96]; (c) günstig wirkende Belastungen; (d) Durchstanzbewehrung.

so ist für Rand- und Eckstützen ein reduzierter Wert von  $u$  zu verwenden, wobei als Ausgangsbasis die zur Aufnahme der Stützenreaktion  $Q_s$  minimal erforderliche Stützenfläche  $A_{nom}$  dient, Bild 4.23 (b). In diesen Fällen darf angenommen werden, dass sich der Krafteinleitungsbereich unter einem Winkel von 30° ausbreitet. Der Kraftfluss im Bereich von Rand- und Eckstützen ist mit einer entsprechenden Randlängs- und -querbewehrung sicherzustellen, wobei letztere um den Rand zu ziehen ist, siehe auch Bild 4.4 (f).

Bei der Berechnung der Durchstanzlast, welche dem Durchstanzwiderstand  $V_R$  gegenübergestellt wird, können innerhalb des Durchstanzkegels wirkende Belastungen in Abzug gebracht werden, Bild 4.23 (c); dies gilt insbesondere auch für Bodenpressungen auf Fundamentplatten. Für den Durchstanzkegel wird dabei in der Regel die eher konservative Annahme einer Ausbreitung unter 45° getroffen, Bild 4.23 (c). Die Abtragung der ausserhalb des Stützenbereiches wirkenden Belastungen ist anhand eines räumlichen Fachwerkmodells zu untersuchen, und resultierende Querzugkräfte sind durch eine Bewehrung abzudecken. Weiter kann die günstige Wirkung von innerhalb des Durchstanzkegels wirkenden Umlenkräften aus Vorspannung als zusätzlicher Widerstand berücksichtigt werden, Bild 4.23 (c), wobei die Spannkraft nach Abzug

aller Verluste und ohne Spannkraftzuwachs in Rechnung zu stellen ist. In der Regel wird die Spanngliedgeometrie daher so gewählt, dass die Wendepunkte innerhalb des Durchstanzkegels liegen. Es dürfen Spannglieder berücksichtigt werden, deren Abstand vom Stützenrand die statische Höhe  $d_m$  nicht überschreitet. Die Abtragung der ausserhalb des Stützenbereiches wirkenden Umlenkräfte ist wiederum anhand eines räumlichen Fachwerkmodells zu untersuchen, und resultierende Querzugkräfte sind durch eine Bewehrung abzudecken.

Reicht der Durchstanzwiderstand für die Aufnahme der Durchstanzlast nicht aus, so besteht die Möglichkeit, Stützenkopfverstärkungen anzurufen oder eine Durchstanzbewehrung einzulegen, Bild 4.23 (d). Eine Erhöhung der Plattendicke eignet sich nur bedingt, da dadurch das Eigengewicht und somit die Durchstanzlast ebenfalls erhöht werden. Ist eine Durchstanzbewehrung erforderlich, so muss diese für die Aufnahme der vollen Durchstanzlast ausgelegt werden, wobei der Durchstanzwiderstand anhand eines räumlichen Fachwerkmodells mit einer Betondruckdiagonaleneigung von  $45^\circ$  zu ermitteln ist. Dies bedeutet, dass pro Ring der Breite  $z_m$  die volle Querkraft aufzunehmen ist, mit  $z_m = \text{mittlerer Hebelarm der inneren Kräfte in beiden Richtungen}$ . Die Durchstanzbewehrung ist im gesamten Krafteinleitungsbereich anzurufen; bei der Ermittlung der Lage des äusseren Umfangs des Krafteinleitungsbereiches (nominelle Schubspannung  $v_0/d_m = \tau_{c,red}$ ) ist die günstige Wirkung von innerhalb des betrachteten Umfangs wirkenden Belastungen zu berücksichtigen. Der Durchstanzwiderstand mit Durchstanzbewehrung ist auf einen Maximalwert von  $V_R = 2.7\tau_{c,red}ud_m$  beschränkt, um ein Druckversagen des Betons zu verhindern.

Im Gegensatz zu einer Schubbewehrung in Plattenbereichen ausserhalb der Krafteinleitungsbereiche ist eine Durchstanzbewehrung auch aus wirtschaftlichen Überlegungen oft sinnvoll. Zudem wird durch die Durchstanzbewehrung ein duktiles Verhalten des Krafteinleitungsbereiches gewährleistet, und eine gut durchkonstruierte Durchstanzbewehrung ist daher in manchen Fällen der Erhöhung der Plattendicke vorzuziehen.

## 4.7 Membranwirkung

### 4.7.1 Allgemeines

In den vorhergehenden Abschnitten wurden primär oder ausschliesslich senkrecht zu ihrer Mittelebene beanspruchte Platten betrachtet, in welchen ein reiner Biegespannungszustand herrscht. Stahlbetonplatten weisen jedoch im gerissenen Zustand bereits unter Gebrauchslasten Dehnungen in ihrer Mittelebene auf, Bild 4.24 (a). Die resultierenden Verformungen erfüllen nur in den seltensten Fällen die Verträglichkeitsbedingungen und die kinematischen Randbedingungen gemäss der Theorie dünner elastischer Platten, und das dilatante Verhalten verursacht daher Membrankräfte in der Platte. In den gerissenen Bereichen einer Platte entstehen bei kleinen Verformungen vornehmlich Membrandruckkräfte, und da diese den Biegebruchwiderstand für nicht zu grosse Druckkräfte erhöhen, Bild 4.24 (b), resultiert eine höhere Traglast als bei verschwindenden Membrankräften.

Im theoretischen Fall einer starren Membranstützung, eines ideal plastischen Verhaltens und einer ausreichenden Dilatanz der Platte können die Membrankräfte als verallgemeinerte Reaktionen, Kapitel 2.2.2, behandelt und der maximale Biegewiderstand  $m_{max}$  gemäss Bild 4.24 (b) in Rechnung gestellt werden. Die Grösse der in einer realen Platte entstehenden Membrankräfte ist jedoch sehr stark von den geometrischen Verhältnissen, den effektiven Verformungen der Plattenmittelfläche und der Steifigkeit der Membranstützung abhängig. Letztere können in den meisten Fällen nur sehr grob abgeschätzt werden, und es ist praktisch unmöglich, die tatsächlich auf-

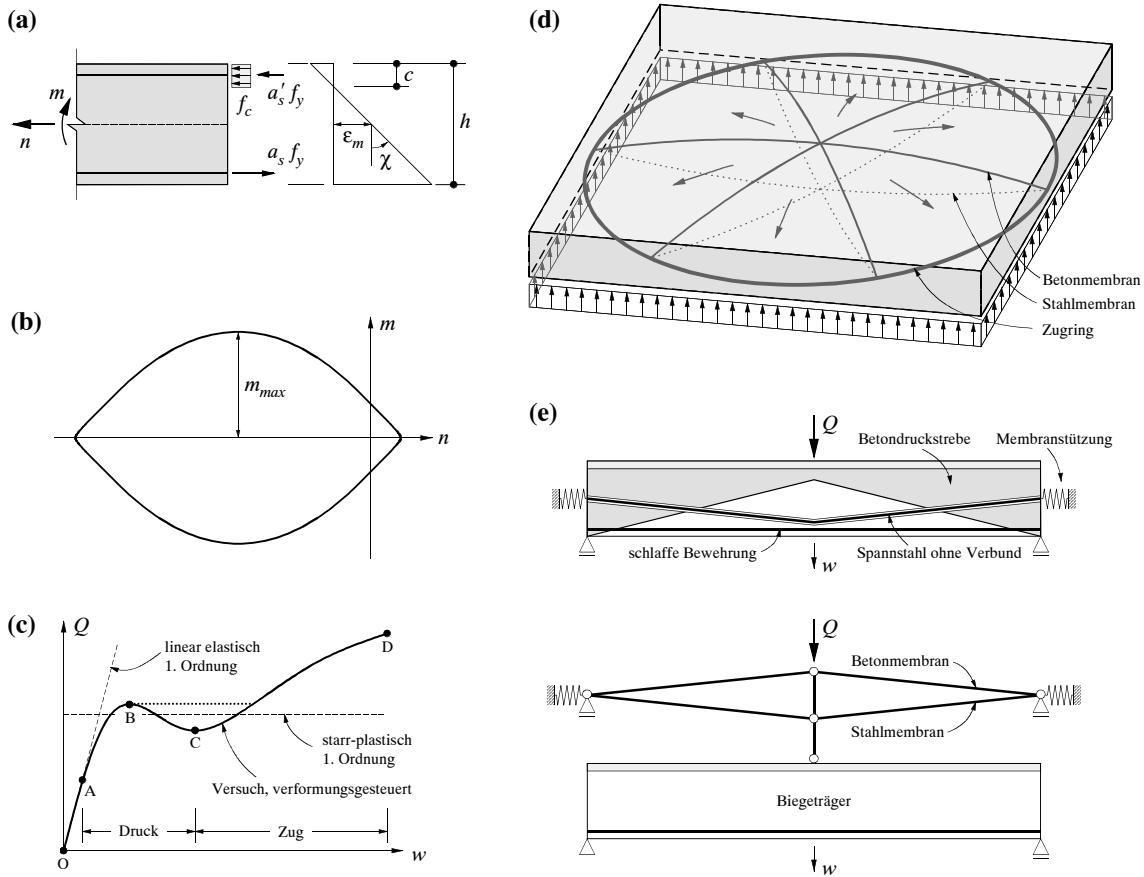


Bild 4.24 – Membranwirkung: (a) Verlängerung in Mittelebene bei Momentenbeanspruchung; (b) Querschnittsinteraktion für Biegung mit Normalkraft; (c) qualitatives Tragverhalten bei äusserer Membranstützung; (d) räumliches Modell der Tragwirkung; (e) Modell für Plattenstreifen nach Ritz [88].

tretenden Membrankräfte zu berechnen. Es ist somit in der Regel zweckmäßig, die günstige Wirkung von Membrankräften bei der Dimensionierung zu vernachlässigen, obschon dieses Vorgehen in manchen Fällen zu einer massiven Überbemessung der Platte führt.

Bild 4.24 (c) zeigt qualitativ das Tragverhalten einer Platte mit Membranstützung. Die Platte verhält sich zunächst linear elastisch (OA). Nach Beginn der Rissbildung wird die Platte weicher, und infolge der Dehnungen der Plattenmittelfläche im gerissenen Zustand bauen sich Membrandruckkräfte auf (AB). Die Maximallast (B) liegt daher über der für starr-ideal plastisches Verhalten ohne Membranwirkung errechneten Traglast. Nach dem Überschreiten der Maximallast sinkt die Belastung im verformungsgesteuerten Versuch, und die Membrandruckkräfte werden abgebaut (BC). Anschliessend bilden sich mit zunehmenden Durchbiegungen Membranzugkräfte, und die Last nimmt wieder zu, wobei die Bruchlast oft deutlich über dem ersten Lastmaximum liegt (CD). In einem lastgesteuerten Versuch wird der Punkt C nicht erreicht, da die Platte nach dem Erreichen des Lastmaximums (B) „durchschlägt“. Dabei nehmen die Verformungen unkontrolliert zu (gestrichelte Linie), bis die Last durch die Zugmembranwirkung aufgenommen werden kann.

In den bisherigen Betrachtungen wurde das Gleichgewicht am unverformten System formuliert (Theorie 1. Ordnung). Wirken in einer Platte Membrankräfte, so führt dieses Vorgehen nur

bei kleinen Durchbiegungen zu brauchbaren Resultaten. Während die Durchbiegungen in der Regel bis zum Erreichen des Lastmaximums (AB) einen verhältnismässig geringen Einfluss, haben, auch auf die Verformungen der Plattenmittelebene und die daraus resultierenden Membrankräfte, so kann das Tragverhalten im Bereich der Zugmembranwirkung (CD) nur erklärt werden, wenn Gleichgewicht in der verformten Lage formuliert wird.

Bild 4.24 (d) zeigt ein räumliches Modell für das Tragverhalten einer Platte mit Membranwirkung, wobei die Membranstützung nicht durch die Lagerung, sondern durch einen Zugring im ungerissenen Bereich der Platte bewirkt wird. Die Belastung wird durch eine Druckmembran aus Beton und eine Zugmembran aus Stahl (zum Beispiel Vorspannung ohne Verbund, siehe Kapitel 11.5) abgetragen. Fehlt die Membranstützung, so sind die Membrankräfte der Beton- und der Stahlmembran im Gleichgewicht, und es besteht keine eigentliche Membranwirkung. Bild 4.24 (d) entspricht in diesem Fall lediglich einer Interpretation der Tragwirkung einer Platte ohne Schubbewehrung unter Vernachlässigung der Zugfestigkeit des Betons, vergleiche auch Bild 3.6. Ist hingegen eine Membranstützung vorhanden, so kann mit dem gezeigten Modell auch das Tragverhalten einer unbewehrten Platte erklärt werden, wobei zu beachten ist, dass auch die vertikalen Komponenten der Betonmembrankräfte am Ort der Membranstützung aufzunehmen sind.

Ein anschauliches Makromodell für das Tragverhalten von Plattenstreifen mit Vorspannung ohne Verbund unter Berücksichtigung der Membranwirkung wurde von Ritz [88] vorgeschlagen, Bild 4.24 (e), siehe auch Kapitel 11.5. Die Belastung wird je nach Steifigkeitsverhältnissen durch den Biegeträger und über Membranwirkung der Beton- und der Stahlmembran abgetragen, wobei bei fehlender Membranstützung wiederum keine eigentliche Membranwirkung auftritt.

#### 4.7.2 Bemessung für allgemeine Beanspruchung

Die Bemessung für allgemeine Beanspruchung durch Biege- und Drillmomente, Querkräfte sowie Membrankräfte kann aufgrund des Sandwichmodells, Kapitel 4.6.2, erfolgen. Bei grossen Membrankräften besteht dabei die Möglichkeit, auch dem Kern einen Teil der Membrankräfte zuzuweisen. Dies ist vor allem für Druckkräfte sinnvoll, während Zugkräfte im Kern eine Reduktion der ohne Schubbewehrung übertragbaren Querkraft zur Folge haben.

Alternativ zum Sandwichmodell bieten sich für einfache Beanspruchungskombinationen weitere Bemessungsverfahren an. Ein praxisrelevantes Beispiel hierfür ist die Interaktion von Längsschub und Querbiegung in den Stegen von Hohlkastenträgern. Hier ist es möglich, durch eine Verschiebung des für die Abtragung des Längsschubes erforderlichen Schubfeldes (Beton-druckfeld und zugehörige Bügelkräfte) aus der Stegachse ein Querbiegemoment aufzunehmen [50, 69]. Allerdings entstehen dadurch auch Drillmomente und Querbiegemomente in Steglängsrichtung, welche am Stegende aufzunehmen sind. Wird dies stillschweigend vorausgesetzt [69], so bedeutet dies, dass Drillmomente und Querbiegemomente in Steglängsrichtung als verallgemeinerte Reaktionen gemäss Kapitel 2.2.2 behandelt werden und somit implizit denjenigen Wert annehmen, welcher den Maximalbetrag von Längsschub und Querbiegung liefert. Es ist daher ohne weiteres ersichtlich, dass auf diese Weise gewonnene Interaktionsbeziehungen grössere Werte für Längsschub und Querbiegung liefern, als wenn die Interaktionsbeziehung von Längsschub und Querbiegung für verschwindende Drillmomente und Querbiegemomente in Steglängsrichtung ermittelt wird.

# 5 Verhalten von Stahl und Beton

Viktor Sigrist

## 5.1 Einleitung

Die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Baustoffen erfolgt mit Stoffgesetzen, die durch Beziehungen zwischen Kraft- und Verformungsgrößen dargestellt werden. Zur anschaulichen Darstellung der Zusammenhänge ist es zweckmäßig, von einachsigen Beanspruchungen auszugehen und für komplexe Beanspruchungssituationen entsprechende Anpassungen vorzunehmen.

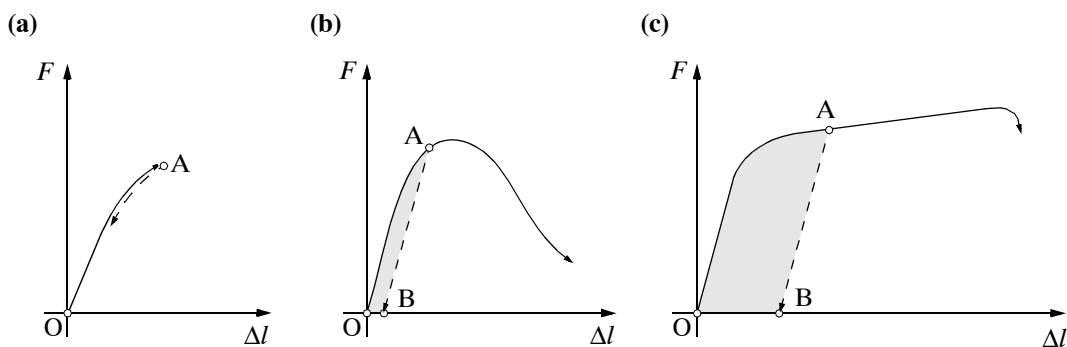


Bild 5.1 – Last-Verformungs-Diagramme bei einachsiger Beanspruchung: (a) Elastisches Verhalten; (b) elastisch-plastisches Verhalten mit Entfestigung; (c) elastisch-plastisches Verhalten mit Verfestigung.

In Bild 5.1 sind verschiedene Last-Verformungs-Beziehungen dargestellt, wie sie aus einachsigen Zug- oder Druckversuchen gewonnen werden können. Die Diagramme zeigen sowohl monotone Vergrößerungen der Verformungen (ausgezogene Linien) als auch Entlastungsvorgänge (gestrichelte Linien). Bild 5.1 (a) zeigt ein elastisches Stoffgesetz; jeder Kraft ist eineindeutig eine Verformung zugeordnet; die Verformungen sind vollständig reversibel, und es wird keine Energie dissipiert. In den Bildern 5.1 (b) und (c) werden elastisch-plastische Stoffgesetze dargestellt; die Last-Verformungs-Beziehungen sind nicht umkehrbar, und nach einer Entlastung aus den Punkten A verbleiben bestimmte plastische Verformungen. Die für den Verformungsprozess aufgebrachte Energie wird nur teilweise zurückgewonnen; die übrige Energiemenge wird dissipiert (Flächen OAB).

Die in Bild 5.1 (b) aufgetragene Last-Verformungs-Kurve charakterisiert ein entfestigendes Materialverhalten. Nach dem Erreichen der maximal möglichen Beanspruchung nimmt das Tragvermögen bei weiterer Verformungssteigerung kontinuierlich ab. Eine strenge Wegsteuerung ist für die experimentelle Ermittlung eines solchen Kurvenverlaufs Voraussetzung. Der entfestigende Ast des Diagramms beschreibt allerdings in der Regel nicht das Materialverhalten, sondern das Verhalten des Prüfkörpers im Zusammenwirken mit der Prüfeinrichtung. Auf Besonderheiten eines solchen Verhaltens wird in den nachfolgenden Abschnitten eingegangen.

Bild 5.1 (c) zeigt ein Stoffgesetz mit Verfestigung in der plastischen Phase. Nach dem Überschreiten der initialen Proportionalitätsgrenze beginnt die Verfestigungsphase, in der das Tragvermögen bei weiterer Verformungssteigerung stetig zunimmt. Wieviel der für den Verformungs-

prozess aufgebrachten Energie als elastisch gespeicherte Energie erhalten bleibt, ist erst anhand einer Entlastung zu erkennen.

Bei der ingenieurmässigen Idealisierung des Materialverhaltens ist es notwendig, dass man die für die jeweilige Anwendung bedeutsamen Merkmale berücksichtigt, untergeordnete Einflüsse jedoch vernachlässigt. Im Rahmen der Tragwerksanalyse beschränkt man sich deshalb auf möglichst einfache Beziehungen zwischen Kräften und Verformungen und vernachlässigt häufig Einflüsse des Baustoffklimas oder der Belastungsgeschichte. Es ist zudem im allgemeinen nicht erforderlich, die Kurvenverläufe mathematisch möglichst genau zu beschreiben, da damit nur eine scheinbare Genauigkeit erzielt wird und im Rahmen der Grenzbetrachtungen bezüglich Gebrauchstauglichkeit und Tragfähigkeit keine relevanten Zusatzinformationen gewonnen werden. Sollen bei der Berechnung möglichst wirklichkeitsnahe Stoffgesetze berücksichtigt werden, ist es hingegen wichtig, signifikante Steifigkeitsänderungen angemessen zu berücksichtigen und die Gesetze so zu formulieren, dass sie über den materialinternen Energiehaushalt eindeutig Auskunft geben. Solche Überlegungen sind insbesondere bei nichtlinearen Finite Elemente-Berechnungen von zentraler Bedeutung.

Werden die experimentell gewonnenen Zusammenhänge zwischen Kräften und Verformungen durch mittlere Spannungen und Dehnungen ausgedrückt, entspricht dies der üblichen kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise. Sollen hingegen Bruchprozesse in die Überlegungen mit einbezogen werden, so ist die kontinuumsmechanische Vorgehensweise nicht mehr ausreichend; in diesen Fällen gelangen bruchmechanische Modelle zur Anwendung, welche die Entfestigung und Verformungslokalisierung berücksichtigen.

## 5.2 Bewehrungsstahl

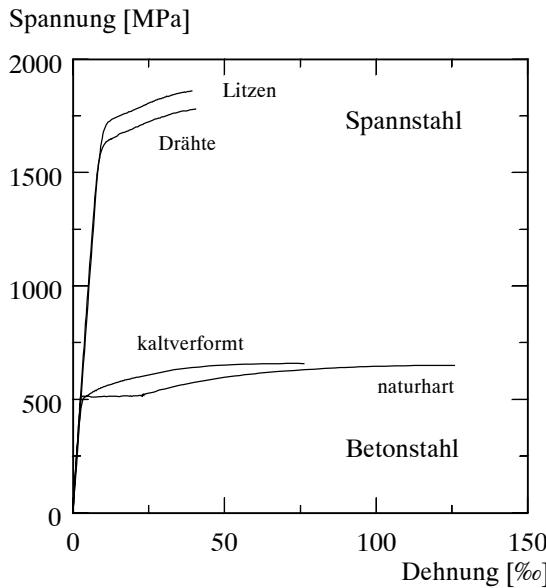
Bei der Bemessung im Stahlbetonbau geht man meist vereinfachend davon aus, dass der Bewehrungsstahl nur Kräfte in Stablängsrichtung aufnimmt und somit einachsig beansprucht ist. Oft stellt man sich die Bewehrung zudem als über eine gewisse Länge oder einen Bereich verteilt vor und berücksichtigt ihre Wirkung mit entsprechenden Linien- oder Flächenkräften in der Richtung der Bewehrungsstäbe.

### 5.2.1 Spannungs-Dehnungs-Verhalten

In Bild 5.2 sind typische Last-Verformungs-Diagramme von Beton- und Spannstählen aus einachsigen Zugversuchen aufgetragen [99].

Spannungs-Dehnungs-Kurven von naturhartem Stahl lassen sich im allgemeinen in vier unterschiedliche Abschnitte unterteilen. Bei Belastungsbeginn verhält sich der Stahl annähernd linear elastisch, und das Kristallgitter des Stahls wird reversibel verformt.

Nach dem Erreichen der Fliesszugkraft  $F_y$  folgt eine mehr oder weniger ideal plastische Phase, während der sich der Stahlstab bei konstanter Kraft weiter verlängert. Das Fliessen wird auf das Vorhandensein von Störstellen in der Kristallstruktur (Versetzungen) zurückgeführt, die unter einer kritischen Beanspruchung zu lokalem Abgleiten entlang der Kristallebenen und somit zu einer Veränderung des Kristallgitters führen. Der Zusammenhang des Gitters geht dabei nicht verloren, sondern es erfolgt eine zunehmende Verfestigung des ganzen Kristalls. Der Fliessvorgang erfolgt nicht auf der ganzen Stablänge gleichzeitig. Die Verformungen sind vielmehr in kleinen Stababschnitten (Lüders-Bänder) lokalisiert. Das Fliessen ist abgeschlossen, wenn sich die Lüders-Bänder auf die ganze Stablänge ausgebreitet haben und sich wieder eine gleichmässige Verteilung der Verformungen eingestellt hat.



Kennwerte für gebräuchliche Stähle:

- Betonstahl:
 

Fliessgrenze	$f_y = 450 \dots 550$ MPa
Elastizitätsmodul	$E_s = 200$ GPa
Bruchdehnung	$\varepsilon_u = 30 \dots 130$ %
Verfestigung	$f_t / f_y = 1.05 \dots 1.30$
- Spannstahl (Litzen, Drähte):
 

Fliessgrenze	$f_y = 1500 \dots 1700$ MPa
Elastizitätsmodul	$E_p = 190, 200$ GPa
Bruchdehnung	$\varepsilon_u = 30 \dots 50$ %
Verfestigung	$f_t / f_y = 1.05 \dots 1.15$

Bild 5.2 – Spannungs-Dehnungs-Kurven für verschiedene Stahlsorten.

Die Verfestigungsphase kann wieder als eigentliche Kontinuumseigenschaft betrachtet werden, da sich der gesamte Stab unter Kraftzunahme weiter verlängert. Die Verlängerung erfolgt praktisch ohne Volumenveränderung, was eine Querkontraktion des Stabes, also eine Reduktion der Querschnittsfläche zur Folge hat. Dividiert man die maximal erreichte Kraft  $F_u$  durch den Ausgangsquerschnitt des Prüfstabes, so erhält man die sogenannte technische Zugfestigkeit  $f_t$ , die bis zu 50 % unterhalb der eigentlichen Zerreissfestigkeit des Materials liegen kann.

Nach dem Erreichen der Höchstlast verhält sich der Stab entfestigend, was bedeutet, dass sich die Verformungen im sogenannten Einschnürbereich an der schwächsten Stelle des Stabs lokalisieren. Der Einschnürbereich erstreckt sich über eine Länge, die ungefähr dem Zweifachen des Stabdurchmessers entspricht, und die mittlere örtliche Dehnung erreicht beim Bruch Werte von bis zu 50 %. Die übrigen Teile des Stabes werden entlastet, und die dabei freigesetzte elastische Energie wird in der Bruchzone dissipiert. Übersteigt die elastisch gespeicherte Energie das Dissipationsvermögen der Bruchzone, was bei üblichen Prüfkörperabmessungen ab einem gewissen Einschnürungsgrad immer der Fall ist, so entsteht ein instabiler dynamischer Prozess, und der Stab wird schlagartig in zwei Teile getrennt.

In Bild 5.2 ebenfalls aufgetragen ist eine für kaltverformten Stahl charakteristische Spannungs-Dehnungs-Linie. Durch Kaltverformung bei der Herstellung bis in den Verfestigungsbe reich entfällt eine eigentliche Fliessphase, und die Stähle weisen einen stetigen Übergang von der elastischen in die plastisch verfestigende Phase auf. Die Fliesszugkraft (oder die Fliessgrenze) wird ersatzshalber üblicherweise durch die 0.2 %-Dehngrenze markiert, die Kraft also, bei der bei einer Entlastung eine plastische Dehnung von 2 % verbleiben würde. Die Verformungen sind bis zum Erreichen der Höchstlast gleichmäßig über die Stablänge verteilt, und erst nach deren Überschreiten erfolgt eine Verformungskonzentration im Einschnürbereich. Ähnliche Verformungseigenschaften charakterisieren auch das Verhalten von wärmebehandelten und von manchen vergüteten Stählen. Durch gezielten Einsatz von Vergütung, Kaltverformung und Wärmebehandlung können die Festigkeitseigenschaften von Stählen erheblich verbessert werden. Die Duktilität des Materials wird dabei in der Regel jedoch vermindert.

### 5.2.2 Duktilität

Die Duktilität von Bewehrungsstäben, die Eigenschaft also, bis zum Versagen durch plastische Verformungen Energie zu dissipieren, wird in hohem Masse von den Verfestigungseigenschaften des Stahles bestimmt. Allein die Tatsache, dass sich eine anfänglich lokale Fliesszone schliesslich auf die ganze Stablänge ausbreitet, setzt eine Materialverfestigung voraus. In Bild 5.3 ist ein einfaches Modell für einen Stab mit einer lokalen Störungszone dargestellt. Als Störungen kommen insbesondere örtliche Querschnittsschwächungen und lokal verminderte Festigkeitseigenschaften in Frage. Die Bedingung für ein homogenes Fliessen auf der ganzen Stablänge kann mit den im Bild angegebenen Bezeichnungen wie folgt ausgedrückt werden:

$$A_s f_{ts} > A_0 f_{y0} \quad (5.1)$$

Falls die Bedingung (5.1) erfüllt ist, kann das Stoffgesetz im Sinne der Kontinuumsmechanik durch mittlere Verzerrungen ausgedrückt werden. Weist ein Material hingegen grosse herstellungsbedingte oder materialspezifische Unregelmässigkeiten auf, so dass die Verfestigung nicht ausreicht, um ein Ausbreiten der Fliesszone zu ermöglichen, ist eine solche Formulierung nur noch für das lokale Kontinuum mit der Abmessung  $l_s$  zulässig. Das Verhalten des Stabes wird in diesem Fall von demjenigen der schwächsten Zone dominiert. Die kleinstmögliche Länge  $l_s$  der Störungszone müsste dabei als Baustoffkennwert experimentell ermittelt werden.

Dies bedeutet, dass für ein Material mit ideal plastischem Verhalten, respektive für ein Material ohne Verfestigung ( $f_t/f_y = 1$ ), das Verformungsvermögen des Stabes stark reduziert wäre, da bei realen Materialien immer lokale Störungszonen vorliegen. Falls sich das Material bis zum Erreichen der Fliessgrenze linear elastisch verhält, kann die Verlängerung des Stabes in Bild 5.3 beim Erreichen der Höchstlast wie folgt berechnet werden:

$$\Delta l_u = l_s \varepsilon_{su} + \frac{(l - l_s)F_u}{A_0 E_s} \quad (5.2)$$

Mit der als Kenngrösse zu betrachtenden Länge  $l_s$  ergibt sich somit auch bei zunehmender Stablänge keine Vergrösserung der möglichen plastischen Verformungsanteile. Damit wird deutlich, dass die Materialverfestigung für die Duktilität von zentraler Bedeutung ist. Auf diesen Sachver-

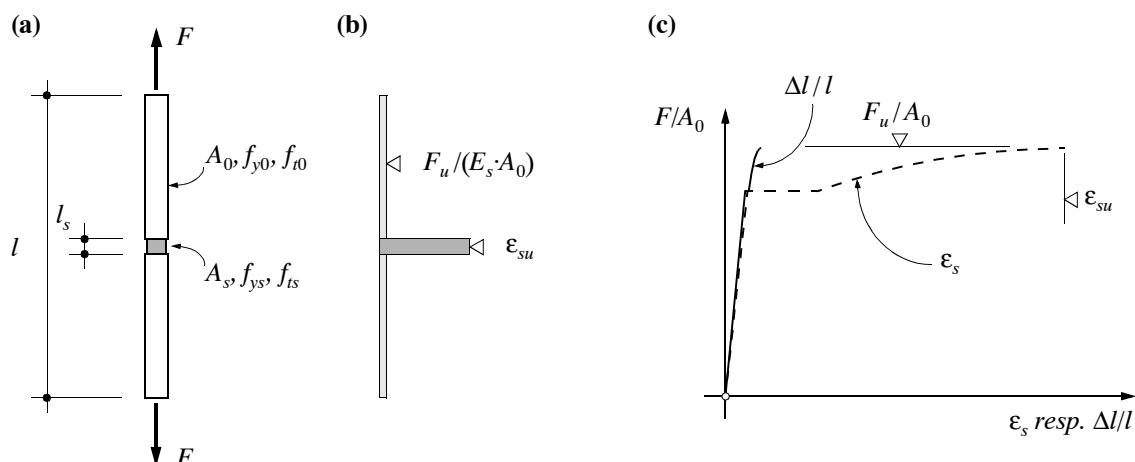


Bild 5.3 – Last-Verformungs-Verhalten eines Stabes mit lokaler Störungszone: (a) Bezeichnungen; (b) Dehnungsverteilung beim Erreichen der Höchstlast; (c) Last-Verformungs-Diagramm.

halt wurde bereits in [74] hingewiesen. Wie in Kapitel 6.3.3 gezeigt wird, sind die Verfestigungseigenschaften des Stahls, oft ausgedrückt durch das Verhältnis  $f_t/f_y$  der Zugfestigkeit zur Fliessgrenze, auch für das Verformungsvermögen des Verbundbaustoffs Stahlbeton von zentraler Bedeutung.

Übliche Bewehrungsstäbe weisen in der Regel ausreichende Verfestigungseigenschaften auf, d.h. die Verformungen können bis zum Erreichen der Höchstlast als gleichmäßig über die Länge der Prüfkörper verteilt angenommen und somit als mittlere Dehnungen ausgedrückt werden; den Wert beim Erreichen der Zugfestigkeit  $f_t$  bezeichnet man als Bruchdehnung  $\varepsilon_{su}$ . Mit Hilfe der Beziehung

$$\varepsilon_{su} = \varepsilon_{sg} + \frac{f_t}{E_s} \quad (5.3)$$

kann die Bruchdehnung aus der Gleichmassdehnung  $\varepsilon_{sg}$  berechnet werden; die beiden Kennwerte unterscheiden sich demzufolge um den elastischen Verformungsanteil  $f_t/E_s$ .

Die in Bild 5.2 angegebenen Materialkennwerte sind als Mittelwerte aufzufassen, wie sie anhand von Zugversuchen ermittelt werden können. Einige der heute in Europa verwendeten Stahlsorten weisen jedoch relativ stark abweichende Kennwerte auf. Insbesondere bei den duktilitätsrelevanten Größen (Verfestigung und Bruchdehnung) werden die angegebenen Werte teilweise unterschritten. Diese Entwicklung in der Stahlherstellung hat dazu geführt, dass heute die Duktilitätseigenschaften der Stähle in den Bemessungsnormen, beispielsweise im Eurocode 2 [22], festgelegt werden, wobei zwischen Stählen normaler und hoher Duktilität unterschieden wird. Bei den in Bild 5.2 angegebenen Kennwerten ist zudem zu beachten, dass der Elastizitätsmodul der Litzen (7-drähtige Litzen) keinen reinen Materialkennwert darstellt, da die Verlängerung auch durch die Querkontraktion der gewickelten Drahtbündel beeinflusst wird. Solche Effekte spielen in der Seiltechnik immer eine Rolle.

### 5.2.3 Idealisierte Spannungs-Dehnungs-Diagramme

Im Rahmen der Stahlbetontheorie ist es zweckmäßig, die Stoffgesetze zu vereinfachen und mit idealisierten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen zu arbeiten. Der Grad der Idealisierung kann je nach Fragestellung variieren, so dass die jeweils relevanten Eigenschaften berücksichtigt werden. In Bild 5.4 sind solche Stoffgesetze dargestellt. Für die Berechnung von Tragwiderständen ist es sinnvoll, von einem starr-ideal plastischen Fliessverhalten auszugehen, Bild 5.4 (a), während bei Verformungs- und Rissbildungsproblemen die initiale Steifigkeit miteinbezogen werden

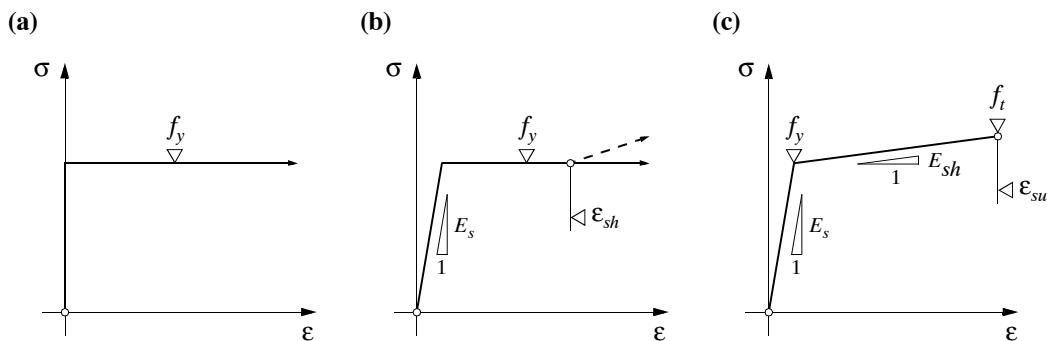


Bild 5.4 – Idealisierte Stoffgesetze für Bewehrungsstahl: (a) Starr-ideal plastisch; (b) linear elastisch-ideal plastisch; (c) linear elastisch-linear verfestigend plastisch.

muss, Bild 5.4 (b). Sollen hingegen plastische Verformungen untersucht werden, ist es notwendig, auch die Verfestigung zu berücksichtigen, Bild 5.4 (c). Für die Modellbildung im Stahlbetonbau stellen bilineare Stoffgesetze in der Regel ausreichende Näherungen dar.

Bei Druckbeanspruchung gelten für Stahl ähnliche Spannungs-Dehnungs-Beziehungen wie bei Zugbeanspruchung. Grundsätzlich kann etwa von analogen Materialkennwerten ausgegangen werden. Bei Bewehrungsstäben wird jedoch oft das Ausknicken massgebend, und die Verfestigungsphase kann nicht erreicht werden. Geht man davon aus, dass der Stab zentrisch beansprucht ist und keine Eigenspannungen aufweist, kann das Verzweigungsproblem als Eulerscher Grundfall behandelt werden. Soll ein Stab erst in der Fliessphase ausknicken, muss die Bedingung

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_s \varnothing^2}{16 l_{cr}^2} \geq f_y \quad (5.4)$$

erfüllt sein. Für gebräuchliche Stähle mit  $E_s = 200 \text{ GPa}$  und  $f_y = 500 \text{ MPa}$  findet man somit eine Grenzschlankheit  $l_{cr}/\varnothing$  von ungefähr 16. Bei sehr kleinen Schlankheiten von etwa  $l_{cr}/\varnothing < 2$  ergeben sich auch in der Verfestigungsphase noch stabile Zustände.

## 5.3 Beton unter einachsigem Zug

### 5.3.1 Fiktives Rissmodell

#### Allgemeines

Das Verhalten von Beton unter Zugbeanspruchungen, respektive die Rissbildung von unbewehrtem Beton, war in den letzten Jahren weltweit Gegenstand zahlreicher Forschungsarbeiten. Diese Entwicklung wurde durch Fortschritte in der Versuchstechnik ausgelöst; heute stehen steife Prüfmaschinen und hochpräzise Messeinrichtungen zur Verfügung. Die Entwicklung theoretischer Modelle zur Beschreibung der Rissbildung wurde insbesondere durch den Einbezug der nichtlinearen Bruchmechanik ermöglicht. Als Erweiterung des üblichen Zugfestigkeitskriteriums bezüglich des Auftretens von Rissen geben solche Modelle Auskunft darüber, ob sich ein bestehender Riss weiter fortpflanzt und ob das Risswachstum stabil erfolgen kann. Hintergrund derartiger Berechnungen ist der Vergleich der elastisch gespeicherten Energie mit der Energiemenge, die beim Bruch (Reissen) in der Prozesszone dissipiert werden kann (Bruchenergie).

In Zugversuchen an Betonzylin dern kann beobachtet werden, dass nach dem Erreichen der Betonzugfestigkeit die Prüfkörper nicht schlagartig in zwei Hälften getrennt werden, sondern dass bei einer gut kontrollierten Wegsteuerung ein entfestigendes Verhalten auftritt. Die Entfestigung ist begleitet durch eine Verformungslokalisierung, wobei sich bereits vorhandene Mikrorisse zwischen Zuschlagskörnern und Zementmatrix in der sogenannten Prozesszone fortpflanzen, bis sich schliesslich ein einzelner Trennriss gebildet hat. Die Lokalisierung der Verformungen ist in diesem Fall besonders augenfällig, da sich nahezu die gesamte Verlängerung des Prüfkörpers in einem Riss manifestiert.

#### Fiktives Rissmodell

Ein einfaches physikalisches Modell zur Beschreibung der Rissbildung geht auf Hillerborg [30] zurück. Beim sogenannten Fiktiven Rissmodell [31] geht man davon aus, dass die Verlängerung eines auf Zug beanspruchten Betonstabes durch das Verformungsverhalten des intakten Stabes und dasjenige der Risszone beschrieben werden kann. In Bild 5.5 sind die Grundbeziehungen

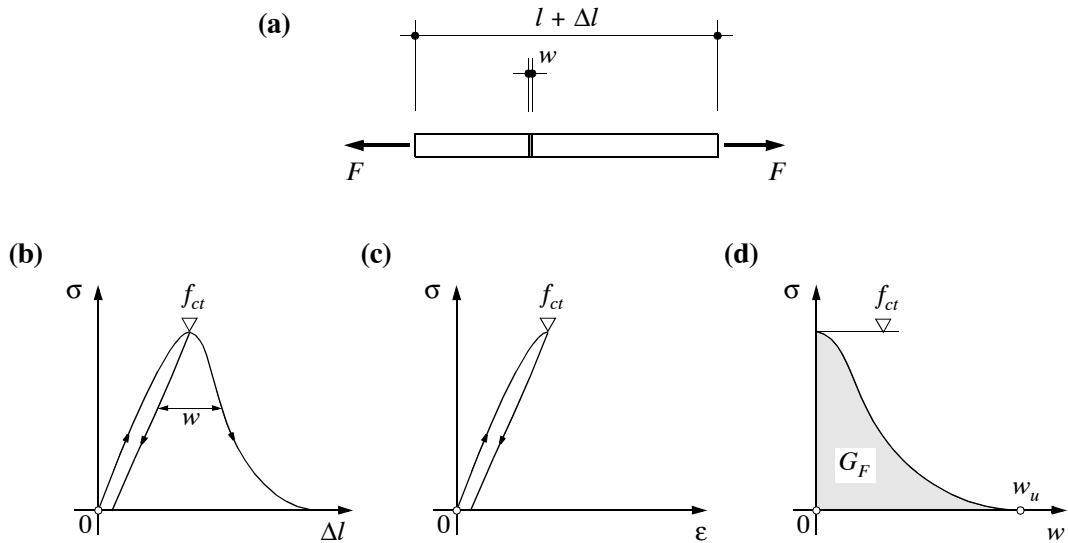


Bild 5.5 – Verhalten eines auf Zug beanspruchten Betonstabs [31]: (a) Bezeichnungen; (b) Spannungs-Verlängerungs-Diagramm; (c) Verhalten ausserhalb der Risszone; (d) Verhalten der Risszone.

dieses Modells zusammengestellt. Bis zum Erreichen der Zugfestigkeit verhält sich der Stab weitgehend elastisch, und nur geringe Energiemengen werden dissipiert. Wird die Verformung weiter vergrößert, bildet sich an der schwächsten Stelle des Stabes eine Risszone der Länge  $l_F$ .

Bei einer Risszone mit einer verschwindenden Anfangslänge ( $l_F = 0$ ), lokalisieren sich die Verformungen nach dem Erreichen der Zugfestigkeit  $f_{ct}$  im fiktiven Riss mit der Rissbreite  $w$ , während sich die Bereiche ausserhalb der Risszone wieder elastisch verkürzen. Die Verlängerung des Stabes beträgt dann

$$\Delta l = \varepsilon l + w \quad (5.5)$$

Da es sich beim entfestigenden Verhalten des Risses nicht um eine Kontinuumseigenschaft handelt, muss die Verformung des Risses als globale Verschiebung ausgedrückt werden. Die in der Risszone bis zur vollständigen Trennung dissipierte Energie kann anhand der Entfestigungskurve ermittelt werden und beträgt

$$D = A \int_0^{w_u} \sigma dw = AG_F \quad (5.6)$$

wobei  $A$  die Querschnittsfläche und  $G_F$  die (auf die Rissfläche bezogene) spezifische Bruchenergie bezeichnen.

Die spezifische Bruchenergie (respektive der Verlauf der Entfestigungskurve) kann dabei als eine von den Dimensionen des Betonkörpers unabhängige Materialkenngröße betrachtet werden. Obwohl bei zunehmender Größe der Prüfkörper auch die Wahrscheinlichkeit zunimmt, dass tiefere Werte der Zugfestigkeit und der Bruchenergie das Versagen bestimmen, kann ein solcher Einfluss vereinfachend vernachlässigt werden, da beide Kennwerte grossen Streuungen unterworfen sind. Die spezifische Bruchenergie muss experimentell ermittelt werden; sie hängt in erster Linie von der Betonfestigkeit und der Korngrößenverteilung der Zuschläge ab [33]. Für Beton normaler Festigkeit mit einem Größtkorn von 16 bis 32 mm beträgt sie etwa 80 bis 140 J/m<sup>2</sup>.

### Massstabseffekt

Der Verlauf der Spannungs-Verlängerungs-Kurve in Bild 5.5 (b) hängt für einen bestimmten Beton mit gegebener Zugfestigkeit und Bruchenergie von der Länge des Prüfstabes ab. Dieses Verhalten ist in Bild 5.6 für ein vereinfachtes Stoffgesetz dargestellt.

Mit der eingeführten Linearisierung des Stoffgesetzes kann die Rissbildung mit zwei Parametern, der Zugfestigkeit  $f_{ct}$  und der Entfestigungscharakteristik  $E_d$ , beschrieben werden. Anstelle von  $E_d$  könnte auch die spezifische Bruchenergie  $G_F$  verwendet werden, da diese beiden Größen im vorliegenden Fall über die Beziehung

$$G_F = -\frac{f_{ct}^2}{2E_d} \quad (5.7)$$

miteinander verknüpft sind. Unter Berücksichtigung der kinematischen Relation (5.5) für Zustände nach dem Überschreiten der Dehnung  $f_{ct}/E_c$  kann der in Bild 5.6 (c) angedeutete Entfestigungsmodul des Stabes ermittelt werden:

$$E_D = \frac{E_c E_d l}{E_d l + E_c} = -\frac{E_c f_{ct}^2 l}{2E_c G_F - f_{ct}^2 l} \quad (5.8)$$

Aus Bild 5.6 wie auch aus der Beziehung (5.8) kann ersehen werden, dass es sich hierbei nicht mehr um eine Materialkenngröße, sondern vielmehr um einen Systemwert handelt, wobei aufgrund der im Beispiel vorgenommenen Systemabgrenzung die Länge des Stabes als einzige Systemcharakteristik auftritt. Für eine kritische Stablänge  $l_{cr}$  wird der Nenner in Gleichung (5.8) zu Null und die Entfestigung erfolgt entlang der in Bild 5.6 (b) und (c) eingetragenen vertikalen Linien, d.h. ohne dass die Verformungen weiter vergrößert werden können. Die kritische Stablänge beträgt:

$$l_{cr} = \frac{2E_c G_F}{f_{ct}^2} = -\frac{E_c}{E_d} \quad (5.9)$$

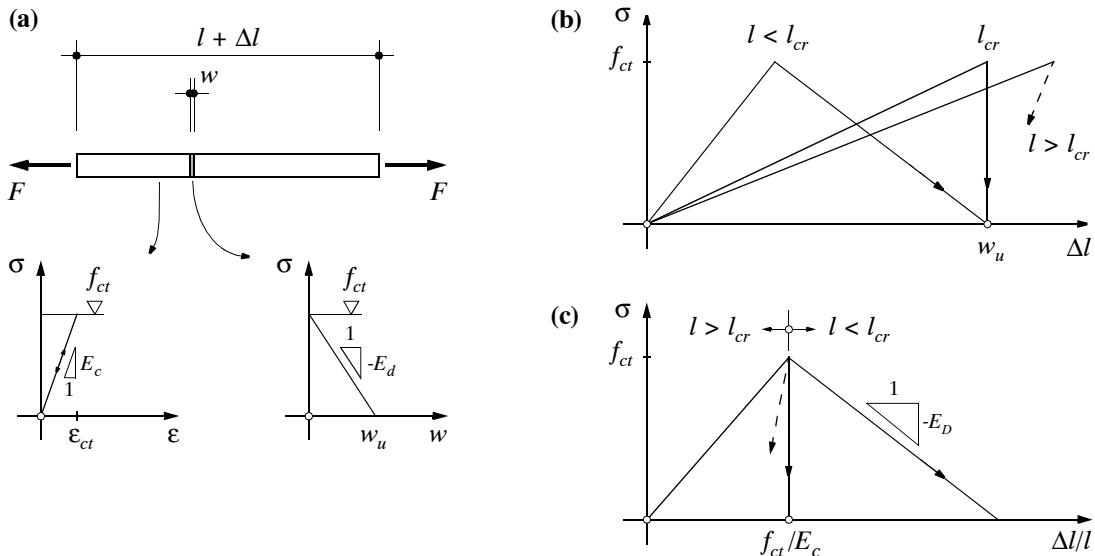


Bild 5.6 – Einfluss der Prüfkörperlänge auf die Entfestigung des Betonstabes: (a) Bezeichnungen und linearisierte Stoffgesetze; (b) Spannungs-Verlängerungs-Diagramm; (c) Spannungs-Dehnungs-Diagramm.

Das gleiche Resultat erhält man auch durch Gleichsetzen der während des Belastungsvorgangs gespeicherten elastischen Energie

$$U = \frac{Al f_{ct}^2}{2E_c} \quad (5.10)$$

mit der bei der Rissbildung dissipierten Energie  $D$  gemäss Gleichung (5.6). Für normalen Beton mit  $E_c = 30 \text{ GPa}$ ,  $G_F = 100 \text{ J/m}^2$  und  $f_{ct} = 3 \text{ bis } 4 \text{ MPa}$  ergeben sich somit Werte für  $l_{cr}$  von etwa 350 bis 650 mm. Prüfkörper, die länger sind als  $l_{cr}$ , speichern demnach während der Belastung mehr Energie als bei der Rissbildung dissipiert werden kann; beim Erreichen der Zugfestigkeit erfolgt eine instabile Entfestigung (snap-back behaviour). Ein solches Verhalten ist in den Bildern 5.6 (b) und (c) durch gestrichelte Linien angedeutet.

### 5.3.2 Biegezugversuch

#### Analytische Näherungslösung

Die Berücksichtigung des entfestigenden Rissverhaltens bietet bei der Behandlung weiterer Probleme, wo die Rissbildung das Versagen bestimmt, einige Schwierigkeiten. Die Berechnungen müssen in der Regel mittels numerischer Verfahren vorgenommen werden, meist auf der Grundlage der Methode der Finiten Elemente. Zur Erläuterung der Auswirkungen der Riss-Entfestigung auf das Last-Verformungs-Verhalten kann es jedoch sinnvoll sein, analytische Näherungslösungen zu erarbeiten. In [101] wurde eine solche Lösung entwickelt, die im folgenden dargestellt wird.

Bild 5.7 (a) zeigt einen Versuch, wie er zur Ermittlung der Biegezugfestigkeit üblicherweise durchgeführt wird. Wie in den Diagrammen von Bild 5.6 (a) wird davon ausgegangen, dass sich der Beton linear elastisch verhält und die Entfestigung des Risses mittels einer linearen Beziehung beschrieben werden kann.

Nach dem Erreichen einer Randspannung von  $f_{ct}$  bildet sich unmittelbar unter der Last  $F$  eine Risszone mit der Höhe  $a_F$ . In Anlehnung an die Balkentheorie kann angenommen werden,

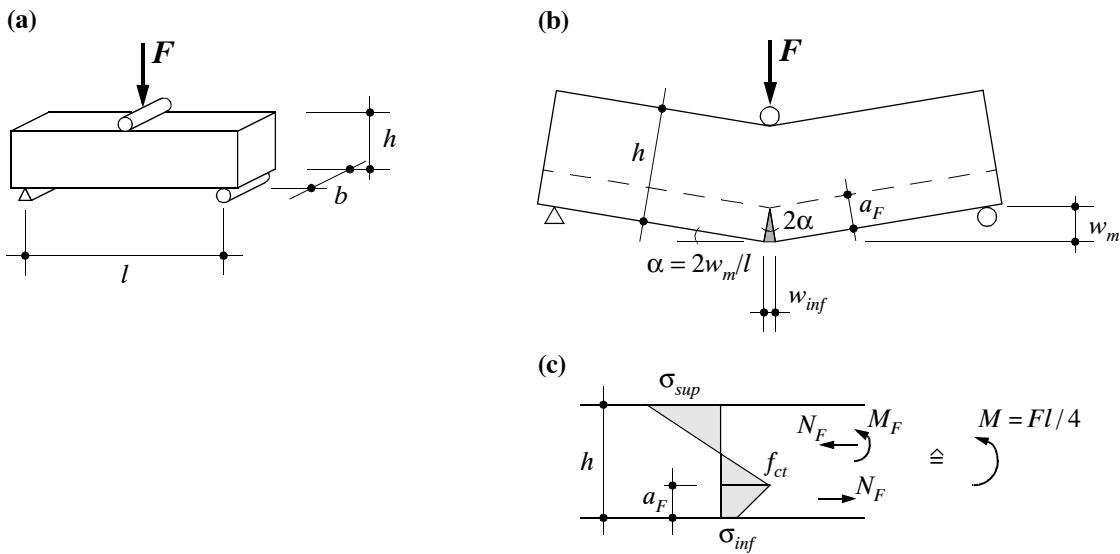


Bild 5.7 – Biegezugversuch: (a) Versuchsaufbau und Abmessungen; (b) vereinfachte Kinematik der Rissöffnung; (c) Gleichgewicht im Rissquerschnitt.

dass sowohl die Querschnitte oberhalb des vorerst fiktiven Risses, als auch, entsprechend einem Vorschlag von Zhu [116], die Rissufer eben bleiben. Daraus ergibt sich die entlang der Risszone lineare Verteilung der Entfestigungs-Spannungen gemäss Bild 5.7 (c). Aus den Gleichgewichtsbedingungen im Rissquerschnitt erhält man

$$M = \frac{Fl}{4} = \frac{f_{ct}bh^2}{6} \left( 1 + \frac{2a_F\sigma_{inf}}{hf_{ct}} \right) \quad (5.11)$$

Führt man die Normierungen

$$m = \frac{6M}{f_{ct}bh^2}, \quad \eta = \frac{a_F}{h}, \quad \zeta = \frac{\sigma_{inf}}{f_{ct}} \quad (5.12)$$

ein, so kann (5.11) wie folgt ausgedrückt werden:

$$m = 1 + 2\eta\zeta \quad (5.13)$$

Die Krümmung im Rissquerschnitt kann mit dem oberhalb des fiktiven Risses angreifenden Moment

$$M_F = \frac{f_{ct}bh^2(1-\eta)(2+\eta\zeta-\eta)}{12} \quad (5.14)$$

ermittelt werden, das zusammen mit der Normalkraft  $N_F$  auftritt. Die Mitten-Durchbiegung  $w_m$  ergibt sich näherungsweise am Balken mit der reduzierten Querschnittshöhe  $h-a_F$  zu

$$w_m = \frac{M_F l^2}{E_c b (h-a_F)^3} = \frac{f_{ct}l^2(2+\eta\zeta-\eta)}{12E_c h(1-\eta)^2} \quad (5.15)$$

respektive unter Berücksichtigung von (5.13) zu

$$w_m = \frac{f_{ct}l^2(3+m-2\eta)}{24E_c h(1-\eta)^2} \quad (5.16)$$

Dabei wird vereinfachend angenommen, dass die zur Berechnung der Durchbiegung relevante Krümmung affin zur Momentenlinie verläuft und zu den Auflagern hin linear abnimmt. Die Steifigkeit des Balkens wird damit etwas unterschätzt, was sich auf die Rechenergebnisse aber nur wenig auswirkt. Die Rissbreite am unteren Balkenrand kann in grober Näherung mit der in Bild 5.7 (b) angedeuteten kinematischen Beziehung bestimmt werden:

$$w_{inf} = \frac{w_m a_F}{l} = \frac{f_{ct}l\eta(2+\eta\zeta-\eta)}{3E_c(1-\eta)^2} \quad (5.17)$$

Die Kinematik der Rissöffnung entspricht der Vorstellung, dass sich die Verformungen des Balkens im Rissquerschnitt lokalisieren, was zumindest für Zustände mit grossen Rissstufen relativ gut zutrifft. Die Rissbreite wird demnach mit Gleichung (5.17) überschätzt, wobei der dabei gemachte Fehler mit wachsender Rissstufe kleiner wird. Durch Gleichsetzen von (5.17) mit der aus dem linearen Entfestigungsgesetz folgenden Beziehung

$$w_{inf} = \frac{\sigma_{inf} - f_{ct}}{D} = \frac{f_{ct}(\zeta-1)}{D} \quad (5.18)$$

findet man einen nur noch vom System und der bezogenen Rissstufe  $\eta$  abhängigen Ausdruck für das Spannungsverhältnis  $\zeta$ ; eingesetzt in (5.13) erhält man schliesslich

$$m = 1 + \frac{2\eta(3-6\eta-2B\eta+3\eta^2+B\eta^2)}{3-6\eta+3\eta^2+B\eta^2} \quad (5.19)$$

Die Systemcharakteristik wird dabei durch den Quotienten

$$B = -\frac{E_d l}{E_c} = \frac{f_{ct}^2 l}{2G_F E_c} = \frac{l}{l_{cr}} \quad (5.20)$$

ausgedrückt. Dieser Ausdruck beschreibt die Sprödigkeit des Systems, welche demzufolge von der Grösse des Balkens und von den Material- und Entfestigungseigenschaften des Betons abhängig ist. Die Sprödigkeitszahl  $B$  beinhaltet das Verhältnis der zum Volumen des Körpers proportionalen, elastisch gespeicherten Energie ( $\sim f_{ct}^2 l^3 / E_c$ ) zu der bis zur vollständigen Trennung dissipierten Bruchenergie ( $\sim G_F l^2$ ). Sie veranschaulicht, dass mit zunehmender Balkenlänge (Spannweite) auch die Sprödigkeit des Systems zunimmt, da die kritische Stablänge  $l_{cr}$  gemäss (5.9) für einen gegebenen Beton als Materialkennwert zu betrachten ist.

## Diskussion

Mit den Beziehungen (5.16) und (5.19) lassen sich für Biegezugversuche mit gegebenen Prüfkörperabmessungen und Betoneigenschaften die Last-Durchbiegungs-Kurven ermitteln. Die Resultate dreier solcher Berechnungen sind in Bild 5.8 (b) dargestellt. Die Abmessungen der Balken und die Zugfestigkeit wurden für alle Berechnungen gleich gewählt, siehe Bild 5.8 (a); nur die Sprödigkeitszahlen  $B$  und die Elastizitätsmoduli  $E_c$  wurden variiert. Mit den verwendeten Rechenparametern  $B = 1.0$  und  $E_c = 28$  GPa soll ein Mörtel charakterisiert werden, während für einen Beton normaler Festigkeit die Werte  $B = 0.3$  und  $E_c = 35$  GPa angenommen wurden. Die Werte  $B = 0.02$  und  $E_c = 30$  GPa können etwa für einen Stahlfaserbeton mit einem Fasergehalt von 1 % gefunden werden. In Bild 5.8 (b) ist die Beanspruchung durch das normierte Moment  $m$  angegeben, da damit direkt das Verhältnis der fiktiven Randspannung zur Zugfestigkeit ausgedrückt wird. Daraus kann ersehen werden, dass die in einem Biegezugversuch ermittelte fiktive Festigkeit wesentlich grösser ausfällt, als die aus einem direkten Zugversuch gewonnene Zugfestigkeit. Darüberhinaus zeigt Bild 5.8 (b), dass durch die Beeinflussung des Entfestigungsverhaltens des Betons die Verformungseigenschaften des Systems erheblich verbessert werden können. Damit kann beispielsweise die Effizienz einer Faserbewehrung veranschaulicht werden.

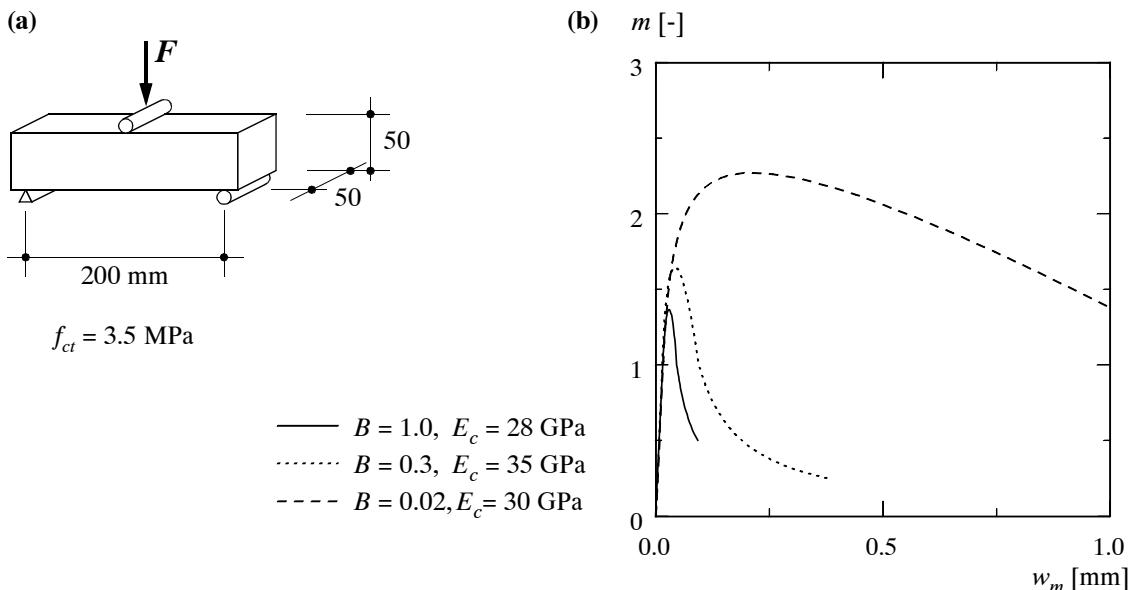


Bild 5.8 – Biegezugversuche an Prüfkörpern mit unterschiedlichen Betoneigenschaften: (a) Abmessungen in mm; (b) Last-Durchbiegungs-Kurven.

Die Maximalwerte für  $m$ , und somit die Biegezugfestigkeiten  $f_{ctb}$ , können bestimmt werden, indem die Ableitung der Beziehung (5.19) nach  $\eta$  gleich Null gesetzt wird, wofür man allerdings keine geschlossene Lösung findet. Für vorgegebene Sprödigkeitszahlen  $B$  können die Biegezugfestigkeiten jedoch auf numerischem Weg gefunden werden. Die Ergebnisse solcher Berechnungen sind in Bild 5.9 aufgetragen.

In Bild 5.9 (a) ist das Verhältnis der Biegezug- zur Zugfestigkeit in Funktion der Sprödigkeitszahl  $B$ , entsprechend der hier beschriebenen Näherungslösung dargestellt. Ebenfalls eingezeichnet sind die Ergebnisse von Finite Elemente-Berechnungen [32], bei denen eine bilineare Entfestigungscharakteristik berücksichtigt wurde. Zum Vergleich sind zudem einige Resultate von Versuchen eingetragen, über die Petersson [84] berichtete. In Bild 5.9 (b) sind wiederum die Ergebnisse der Näherungslösung denjenigen der Finite Elemente-Berechnung gegenübergestellt, diesmal allerdings in Abhängigkeit von der Balkenhöhe  $h$ , wobei den Berechnungen ein Beton mit  $l_{cr} = 500$  mm und eine Balkenschlankheit  $l/h$  von 4 zugrunde gelegt wurde. Aus den beiden Diagrammen kann ersehen werden, dass mit der Näherungslösung der Einfluss der Sprödigkeit respektive der Balkengröße qualitativ richtig erfasst, die Biegezugfestigkeit jedoch etwas unterschätzt wird. Dennoch kann damit für eine experimentell ermittelte Biegezugfestigkeit ein Näherungswert für die Zugfestigkeit des verwendeten Betons gefunden werden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass Streuungen der Materialeigenschaften, Querkrafteinflüsse und Einflüsse der Prüfeinrichtung mit dem hier besprochenen Modell nicht erfasst werden.

Interessant sind auch die theoretischen Biegezugfestigkeiten, die sich für die beiden Extremwerte der Sprödigkeit ergeben. Für eine Sprödigkeitszahl  $B = 0$  findet man  $f_{ctb} = 3 f_{ct}$ , was der Lösung für ein Material mit unendlich grosser Druckfestigkeit und unter Zugbeanspruchung starr-plastischem Verhalten entspricht. Andererseits ergibt sich für eine gegen unendlich strebende Sprödigkeitszahl das Resultat  $f_{ctb} = f_{ct}$ , was der linear elastischen Lösung entspricht. Für reale Materialien mit entfestigendem Verhalten liegen die Biegezugfestigkeiten zwischen diesen beiden Grenzen und können auf der Grundlage der hier entwickelten Näherungslösung abgeschätzt werden.

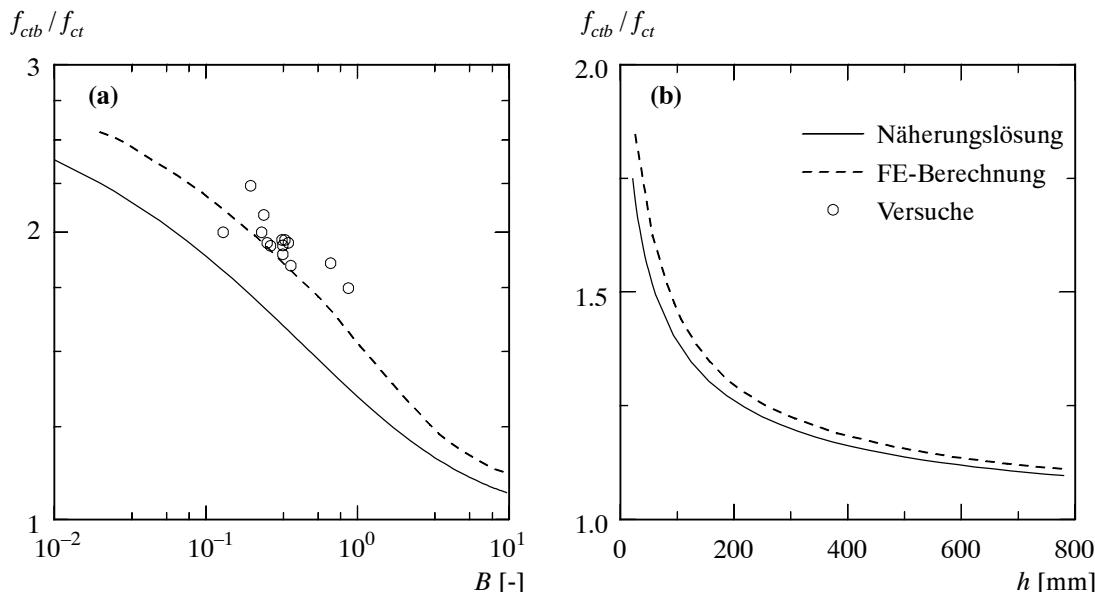


Bild 5.9 – Einflüsse auf die Biegezugfestigkeit: (a) Sprödigkeitszahl  $B$ ; (b) Balkenhöhe  $h$ . N.B.: Finite Elemente-Berechnungen gemäss Hillerborg [32]; Versuchsresultate von Petersson [84].

Die hier gezeigten Modellrechnungen verdeutlichen, dass die Entfestigung des Materials das Verhalten von Bauteilen (Prüfkörpern) wesentlich beeinflusst und dass insbesondere eine ausgeprägte Abhängigkeit des Last-Verformungs-Verhaltens eines Bauteils von der Sprödigkeit, und damit von der Bauteilgröße, besteht. Die Zusammenhänge illustrieren aber auch, dass es für entfestigende Materialien ausserordentlich schwierig ist, allgemein gültige Bemessungsregeln im üblichen Sinn zu entwickeln. Versuchsresultate können deshalb nicht ohne weiteres auf die Bemessung von Bauteilen übertragen werden. Zur Zeit gelingt es noch nicht, alle Einflüsse befriedigend zu erklären; Aufgabe der Forschung ist es, die noch vorhandenen Wissenslücken zu füllen.

## 5.4 Beton unter einachsiger Druck

### 5.4.1 Allgemeines

Bei der experimentellen Untersuchung des Verformungsverhaltens von Beton unter einachsiger Druckbeanspruchung kann ebenfalls eine Entfestigung beobachtet werden. Auch in diesem Fall handelt es sich bei dem gemessenen Verhalten nicht um das eigentliche Materialverhalten, sondern um das Verhalten des Betonkörpers im Zusammenwirken mit der Prüfeinrichtung.

Im Unterschied zum Verhalten im Zugversuch lokalisieren sich die Verformungen nicht in einem einzigen Querschnitt. Auch im unbelasteten Beton sind wegen der unterschiedlichen Eigenschaften der Komponenten bereits Mikrorisse zwischen den Zuschlagskörnern und der Zementmatrix vorhanden. Bei zunehmender Druckbeanspruchung dringen diese Risse aufgrund der dabei auftretenden Querzugsspannungen in die Matrix vor und spalten so den Beton sukzessive parallel zur Beanspruchungsrichtung auf. Der Beton wird schliesslich innerhalb der Bruchzone in einzelne lasttragende Lamellen unterteilt, die nach dem Überschreiten der Druckfestigkeit abscheren und instabil werden und somit den Beton entfestigen. Dass die Entfestigung nicht schlagartig erfolgt, ist den zwischen den Lamellen wirkenden Verzahnungs- und Reibungskräften zuzuschreiben.

Der Bruchprozess ist mit einer Zunahme der Querdehnungen verbunden, die ab einer Beanspruchung von ungefähr 80 % der Druckfestigkeit überproportional anwachsen. Dieser durch die Längsrissbildung begründete Effekt führt dazu, dass auch das Volumen der Bruchzone nach der anfänglichen Reduktion wieder zunimmt und schliesslich sogar seine Ausgangsgröße überschreitet. Mit dieser Volumenzunahme (Änderung der inneren Tragstruktur) verliert die kontinuumsmechanische Beschreibung des Materialverhaltens ihre Gültigkeit.

### 5.4.2 Modellvorstellung

#### Bruchzone und Bruchenergie

Ein einfaches Modell zur Beschreibung des Verhaltens von Beton unter Druckbeanspruchung ist in Bild 5.10 dargestellt [101]. Unter der Annahme, dass sich das Verformungsverhalten eines Betonzyinders mit einem eindimensionalen Modell ausreichend erfassen lässt, kann ein Druckversuch durch die Serieschaltung gemäss Bild 5.10 (a) idealisiert werden. Die Querdehnungen des Prüfkörpers werden in dieser Betrachtung vernachlässigt, und es wird angenommen, dass sich die Beanspruchungen des Betons für beliebige Verformungszustände durch mittlere Spannungen ausdrücken lassen. Die Nachgiebigkeit der Prüfmaschine wird durch die Feder mit der Konstanten  $c_f$  berücksichtigt. Nach dem Erreichen der Zylinderdruckfestigkeit bildet sich eine Bruchzone der Länge  $l_F$ , in der sich die Verformungen lokalisieren. Die Bereiche ausserhalb dieser Zone

werden wieder entlastet. Anhand dieses Modells soll zunächst auf der Grundlage einer Kontinuumsbetrachtung die Stabilität der Entfestigung untersucht werden.

Ausgehend von dem durch den Punkt  $A$  gekennzeichneten Gleichgewichtszustand auf dem abfallenden Ast der Last-Verformungs-Kurve in Bild 5.10 (c) soll die Verformung des Zylinders um den Betrag  $\delta(\Delta l)$  weiter gesteigert werden. Diese zusätzliche Deformation hat einen Lastabfall  $\delta\sigma$  zur Folge und kann unter der Annahme, dass sich die Bereiche ausserhalb der Bruchzone mit dem Elastizitätsmodul  $E_c$  wieder elastisch verlängern, berechnet werden:

$$\delta(\Delta l) = \left( \frac{l - l_F}{E_c} + \frac{l_F}{E_F} + A_c c_f \right) \delta\sigma \quad (5.21)$$

Da daraus insgesamt eine Verkürzung des Zylinders resultiert,  $\delta(\Delta l) < 0$ , und der Lastabfall betragsmäßig einem Spannungszuwachs entspricht,  $\delta\sigma > 0$ , muss für den Klammerausdruck rechterhand in (5.21) ein negativer Wert gefordert werden. Durch Umformung erhält man die Bedingung:

$$l \geq l_F > \frac{l + E_c A_c c_f}{1 - E_c/E_F} \quad (5.22)$$

Ein zu dieser Beziehung analoger Ausdruck wurde von Bazant [10] auf anderem Wege hergeleitet. Die Ungleichung (5.22) kann als Stabilitätsbedingung für die Entfestigung interpretiert werden; die Länge der Bruchzone ist demnach auf Werte zu beschränken, welche diese Bedingung erfüllen. Weist die Bruchzone eine kleinere Länge auf, erfolgt eine instabile Entfestigung. Wie Ottosen [82] und Borré und Maier [11] aufgrund thermodynamischer Überlegungen gezeigt haben, würde die Länge  $l_F$  einer entfestigenden und als Kontinuum betrachteten Störungszone jedoch spontan auf den durch (5.22) gegebenen Wert abnehmen. Die Ungleichung kann deshalb für ein Kontinuum nicht erfüllt werden, und ein entfestigendes Verhalten ist im Rahmen einer solchen Idealisierung ausgeschlossen. Diese Folgerung steht im Widerspruch zum experimentell gefundenen Entfestigungs-Verhalten und zu den dabei beobachteten Abmessungen der Bruchzonen. Wie bereits erwähnt, muss demnach die kontinuumsmechanische Betrachtungsweise für den Entfestigungsvorgang fallengelassen werden, und die Verformungen können nicht weiter durch mittlere Dehnungen, sondern müssen durch globale Verschiebungen ausgedrückt werden.

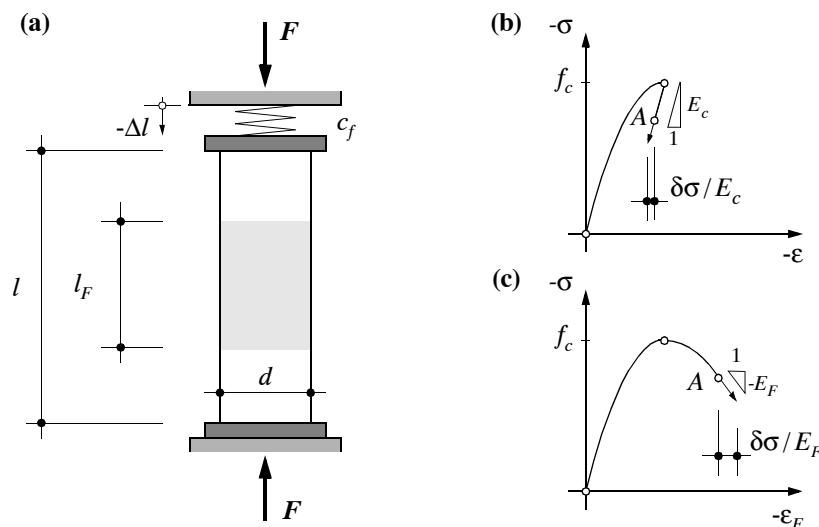


Bild 5.10 – Entfestigung eines auf Druck beanspruchten Betonzyinders: (a) Modell; (b) Verhalten ausserhalb der Bruchzone; (c) Verhalten in der Bruchzone.

Die Abmessungen der Bruchzone werden, aufgrund der geometrischen Verträglichkeit mit den ausserhalb liegenden Bereichen, in erster Linie durch die Geometrie des Prüfkörpers bestimmt. Im Entfestigungsprozess spielt zudem die Grösse der Zuschlagskörner eine wichtige Rolle, da über diesen Parameter die Rissbildung und auch die Bildung der eigentlichen Bruchflächen (Scherflächen) beeinflusst wird. Die Länge der Bruchzone kann aufgrund von theoretischen Erwägungen und Beobachtungen in Versuchen [74, 101] zu etwa

$$l_F \approx 2 \cdot d \quad (5.23)$$

angenommen werden. Anhand von Versuchen lässt sich, analog zum Vorgehen beim Zugversuch, die auf das Volumen der Bruchzone bezogene Bruchenergie näherungsweise ermitteln; man findet Werte von etwa  $G_{cF}/l_F = 60 \dots 120 \text{ kJ/m}^3$ , vgl. Bild 5.11 (b). Vernachlässigt man die Einflüsse der Korngrößenverteilung der Zuschläge und der Betonfestigkeit auf die Bruchenergie, was zumindest für Beton normaler Festigkeit zulässig erscheint, können diese Werte als Kenngrössen betrachtet und für einen bestimmten Beton näherungsweise als konstant vorausgesetzt werden.

### Vereinfachte Last-Verformungs-Charakteristik

Bis zum Erreichen der Druckfestigkeit folgt das Stoffgesetz des Betons in guter Näherung der Parabelgleichung

$$\sigma_c = \frac{f_c(\varepsilon_c^2 + 2\varepsilon_c\varepsilon_{c0})}{\varepsilon_{c0}^2} \quad (-\varepsilon_c \leq \varepsilon_{c0}) \quad (5.24)$$

Der Entfestigungsvorgang kann vereinfachend wiederum durch eine lineare Charakteristik angenähert werden. Beschränkt man sich weiterhin auf eine einachsige Beschreibung des Problems, so kann anhand des Modells der Serieschaltung gemäss Bild 5.10 das Verhalten für beliebige Zylinderproportionen hergeleitet werden. Mit der pro Volumenelement als konstant vorausgesetzten Bruchenergie kann der in (Bild 5.11 (c)) eingetragene Entfestigungsmodul  $E_{cD}$  wie folgt angegeben werden:

$$E_{cD} = \frac{E_c l}{l - l_F - 2E_c G_{cF}/f_c^2 + A_c E_c c_f} \quad (5.25)$$

Zur Bestimmung der Entfestigungscharakteristik benötigt man somit die auf das Volumen der Bruchzone bezogene Bruchenergie  $G_{cF}/l_F$ , sowie die Nachgiebigkeit der Prüfmaschine  $c_f$ . In Bild 5.11 (b) sind die Resultate der Auswertung einiger Druckversuche aufgetragen. Die Ermittlung der Bruchenergie erfolgte dabei entsprechend der in Bild 5.11 (a) angegebenen Definition. Für den Entlastungsmodul des Systems findet man den Ausdruck

$$E_0 = \frac{E_c l}{l - l_F + A_c E_c c_f} \quad (5.26)$$

wobei für die Auswertung der Versuche der Entlastungsmodul des Betons, auf der Grundlage der in [24] zusammengestellten Versuchsresultate, mit der Beziehung  $E_c = 18 \text{ GPa} + 400 f_c$  angenähert wurde. Eine gewisse Schwierigkeit bei der Auswertung und Interpretation von Versuchen besteht darin, dass in der Regel weder die Art der Steuerung, noch die Charakteristik der Prüfmaschine dokumentiert werden. Die Auswertung der Versuche von Vonk [113] sowie von Tanigawa und Yamada [103] basiert deshalb auf der Annahme von  $c_f = 0$ .

Mit den Gleichungen (5.24) und (5.25) sowie der Annahme  $l_F \approx 2d$  können vollständige Spannungs-Dehnungs-Diagramme für Beton unter Druckbeanspruchung berechnet werden. Bild 5.11 (c) zeigt den Einfluss der Prüfkörperschlankheit auf das Entfestigungsverhalten, wobei

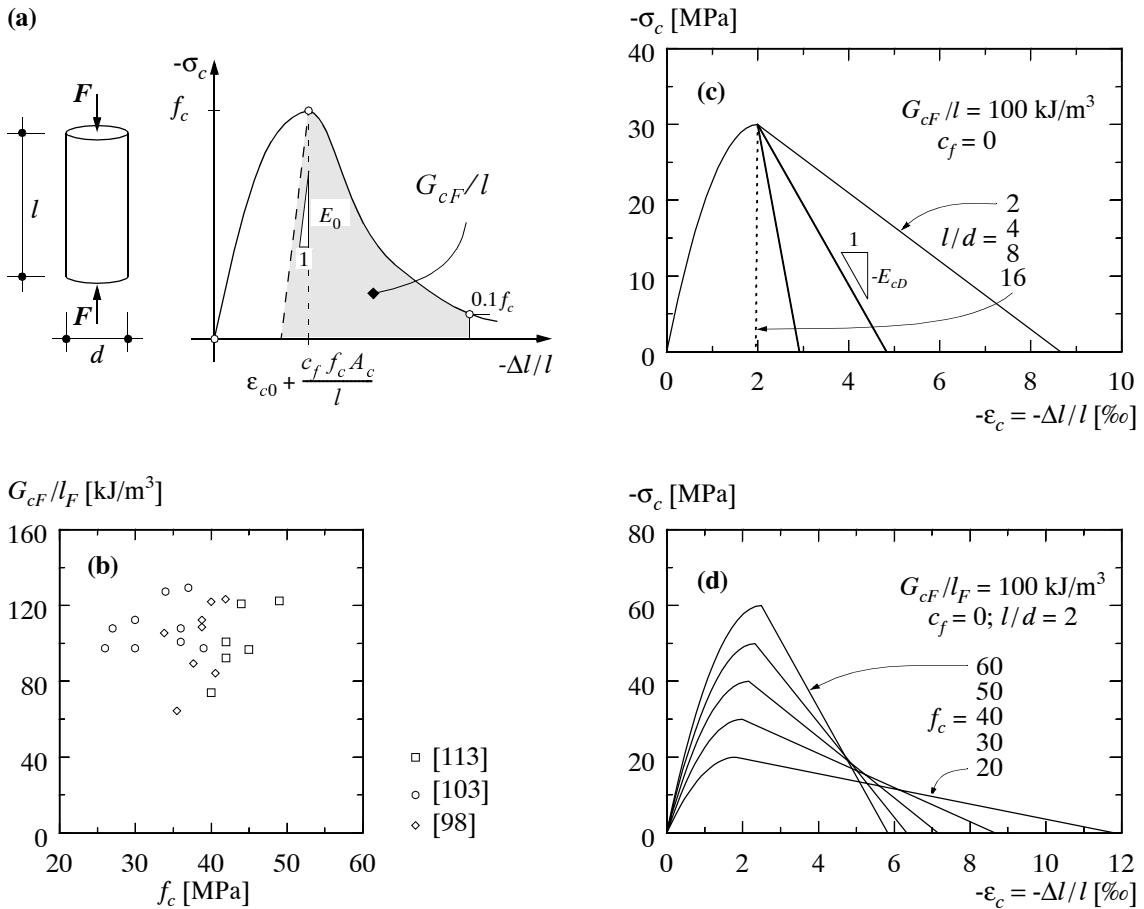


Bild 5.11 – Spannungs-Dehnungs-Diagramme für Beton: (a) Qualitativer Verlauf der Last-Verformungs-Kurven; (b) Versuchsergebnisse; (c) Einfluss der Prüfkörperabmessungen für Beton mit  $f_c = 30$  MPa; (d) Einfluss der Betonfestigkeit für  $l/d = 2$ .

den Berechnungen ein Beton mit  $G_{cF}/l_F = 100$  kJ/m<sup>3</sup> und  $f_c = 30$  MPa zugrundegelegt wurde. Das Diagramm verdeutlicht einmal mehr die Tatsache, dass mit der Entfestigung nicht das Materialverhalten sondern das Verhalten des Systems beschrieben wird. Für Zylinder mit

$$l > l_{cr} = l_F + \frac{2E_c G_{cF}}{f_c^2} - A_c E_c c_f \quad (5.27)$$

erfolgt die Entfestigung instabil und kann somit nicht kontrolliert werden. Ein solcher Fall ist in Bild 5.11 (c) mit einer punktierten Linie eingetragen.

In Bild 5.11 (d) sind berechnete Spannungs-Dehnungs-Linien für Prüfkörper mit einer Schlankheit  $l/d = 2$  für verschiedene Betonfestigkeiten dargestellt. Experimentell kann mit zunehmender Festigkeit  $f_c$  auch eine geringfügige Zunahme der Dehnung  $\varepsilon_{c0}$  beim Erreichen von  $f_c$  festgestellt werden [24]. Dieser Sachverhalt wurde in den Berechnungen mit der Beziehung  $\varepsilon_{c0} = f_c/60 + 3/2$  (in MPa und %) näherungsweise berücksichtigt. Die Spannungs-Dehnungs-Diagramme veranschaulichen die Auswirkung der Annahme, dass die beim Bruch dissipierte Energie auch bei zunehmender Festigkeit konstant bleibt; eine ausgeprägtere Entfestigung ist die Folge.

## 5.5 Beton unter mehrachsiger Beanspruchung

### 5.5.1 Dreiachsiger Druck

Unter der Wirkung einer dreiachsigen Druckbeanspruchung verändert sich das Verformungs- und Bruchverhalten von Beton, und es ergeben sich sowohl höhere Festigkeiten als auch grössere Stauchungen beim Erreichen der Höchstlast. Mit zunehmendem Manteldruck verlaufen die Spannungs-Dehnungs-Linien immer schwächer gekrümmmt, steigen steiler an und weisen beim Erreichen der dreiachsigen Druckfestigkeit  $f_{c3}$  ein Mehrfaches der in einachsigen Druckversuchen gemessenen Festigkeits- und Stauchungswerte  $f_c$  und  $\epsilon_{co}$  auf.

Für nicht allzu grosse Querdrücke  $-\sigma_1 = -\sigma_2$  von etwa  $-\sigma_1 \leq 2 f_c$  nimmt die dreiachsige Druckfestigkeit näherungsweise linear mit dem Manteldruck zu. Dieser Sachverhalt ist in Bild 5.12 anhand einer der Arbeit von Menne [70] entnommenen Zusammenstellung von Versuchsresultaten veranschaulicht. Eine gute Übereinstimmung mit den Versuchsresultaten findet man mit der Bruchbedingung

$$\sigma_1/f_c = \sigma_2/f_c \quad (5.28)$$

die einem Coulomb-Material mit einem durch  $\tan\phi = 3/4$  definierten Winkel der inneren Reibung und einer Kohäsion von  $f_c/4$  entspricht. Eine ausführliche Diskussion dieser Zusammenhänge findet man bei Marti [50].

$$\sigma_1/f_c = \sigma_2/f_c$$

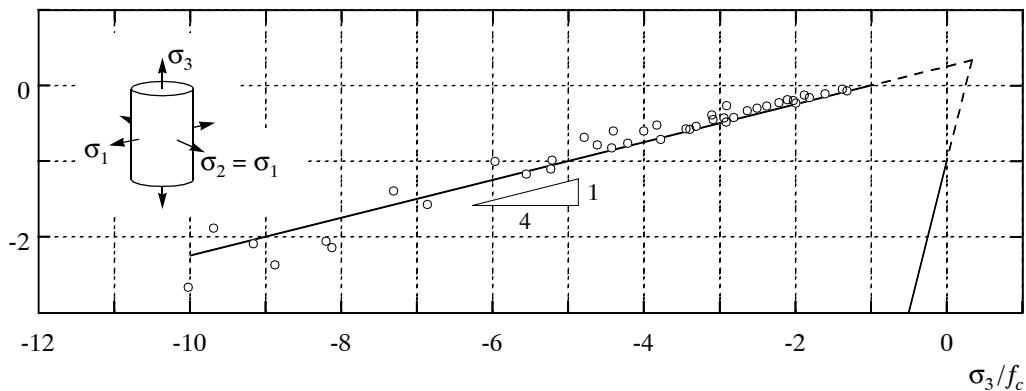


Bild 5.12 – Beton unter dreiachsiger Druckbeanspruchung. Zusammenstellung von Versuchsresultaten (aus Menne [70]) und Vergleich mit Fliessbedingung von Coulomb ( $\tan\phi = 3/4$ ).

Für die Zunahme der mit dem Erreichen der dreiachsigen Druckfestigkeit verbundenen Stauchung findet man anhand der Versuchsresultate von Richart, Brandtzaeg und Brown [86] ebenfalls eine lineare Abhängigkeit von der Querdruckbeanspruchung. Der entsprechende Proportionalitätsfaktor ist jedoch etwa fünfmal grösser als der für die Zunahme der Druckfestigkeit gefundene Wert. Die Stauchung  $\epsilon_{c3}$  beim Erreichen der dreiachsigen Druckfestigkeit kann demzufolge mit der Beziehung

$$\epsilon_{c3} = \epsilon_{c0} \left( 1 - 20 \frac{\sigma_1}{f_c} \right) \quad (5.29)$$

abgeschätzt werden.

Nach dem Erreichen der Druckfestigkeit erfolgt eine Entfestigung des Betons, die jedoch im Vergleich zum Verhalten im einachsigen Druckversuch weniger steil verläuft; die Prüfkörper weisen mit steigendem Manteldruck ein deutlich duktileres Verhalten auf, und die Spannungs-Dehnungs-Linien zeigen in zunehmendem Mass eine Art Fliessplateau. Der eigentliche Bruch erfolgt bereits unter relativ geringen Querpressungen primär als Gleitbruch entlang geneigter Scherflächen, und die Zerstörung der inneren Struktur des Betons wird stark vermindert.

### 5.5.2 Ebener Spannungszustand

Da im Stahlbetonbau viele Tragelemente oder Tragwerksbereiche als Scheiben idealisiert werden können, muss dem Verhalten von Beton unter zweiachsiger Beanspruchung besondere Beachtung geschenkt werden. In neuerer Zeit wurden zahlreiche Untersuchungen zu diesem Thema durchgeführt, wobei die Ermittlung der Festigkeitswerte oft im Vordergrund stand. In Bild 5.13 sind Resultate entsprechender Versuche zusammengestellt. Anhand solcher Versuchsergebnisse lässt sich für eine bestimmte Betonqualität eine zugehörige Versagenskurve konstruieren.

Zugspannungen aus einer äusseren Beanspruchung werden durch die unter gleichzeitiger Wirkung einer Druckbeanspruchung auftretenden Querzugspannungen vergrössert. Im Bereich zweiachsiger Druck/Zug-Bearbeitungen wird daher die Zugfestigkeit des Betons gemäss der in Bild 5.13 gezeigten Interaktion leicht vermindert. Wird diese Grenze erreicht, findet eine Entfestigung statt, und es bildet sich quer zur Richtung der Zugbeanspruchung ein Trennriss, der die Scheibe in zwei Risskörper teilt. Da die Zugspannungen aus der äusseren Last dann vollständig abgebaut sind, kann die vorhandene Druckbeanspruchung annähernd bis zur einachsigen Druckfestigkeit weiter gesteigert werden. Gewisse Reduktionen ergeben sich aus der Vorschädigung infolge des hier beschriebenen Belastungspfades.

Bei sehr geringen Zugbeanspruchungen, die nicht zu vorzeitigen Trennrissen führen, ergeben sich wieder eigentliche Druckbrüche, wobei die einachsige Druckfestigkeit nicht mehr erreicht werden kann. Im Stahlbetonbau treten solche Beanspruchungssituationen überall dort auf, wo auf Druck beanspruchter Beton von einer Zugbewehrung gequert wird. Aufgrund der Verbundwirkung zwischen Stahl und Beton werden dem Beton zwischen den sich einstellenden Rissen Verformungen aufgezwungen. Dieser für die Beurteilung des Tragwiderstands von Stegscheiben

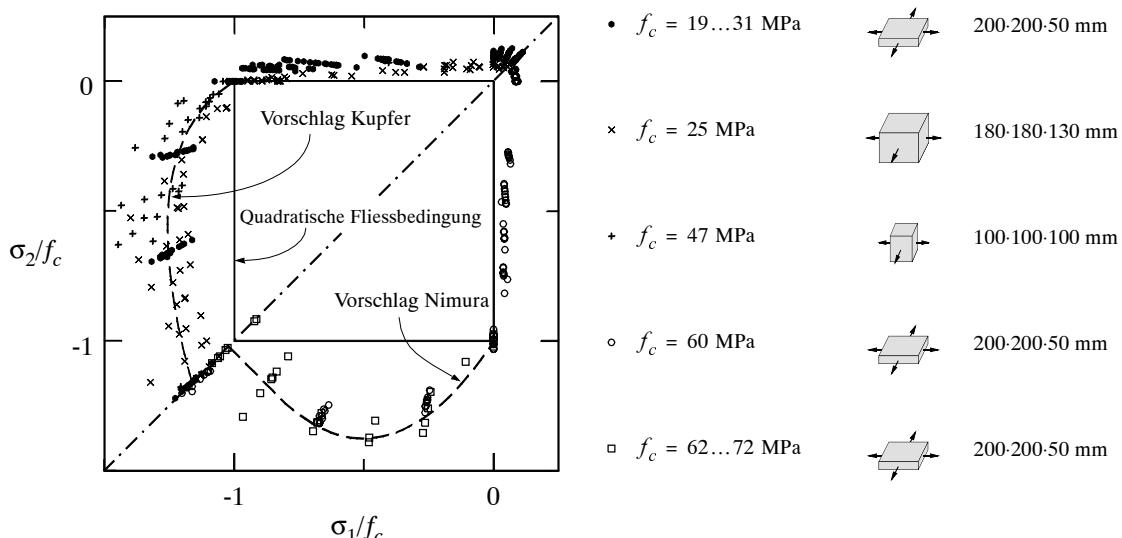


Bild 5.13 – Verhalten von Beton unter zweiachsiger Beanspruchung.

– respektive für die Wahl der dabei in der Berechnung zu berücksichtigenden effektiven Betondruckfestigkeit – wichtige Fall wird in Kapitel 7.1.4 ausführlich behandelt.

Eine für die analytische Behandlung ebener Probleme besonders geeignete Idealisierung stellt die in Bild 2.17 (b) gezeigte modifizierte Fliessbedingung von Coulomb dar; vernachlässigt man die Betonzugfestigkeit,  $f_{ct} = 0$ , so degeneriert die Fliessbedingung zum Quadrat. In der neueren Literatur werden für Beton Fliessbedingungen in allgemeineren Formulierungen vorgeschlagen, die im Hinblick auf eine wirklichkeitsnahe Erfassung des Bruches und auf eine Anwendung im Rahmen numerischer Berechnungsverfahren entwickelt wurden. Eine Übersicht über diese Entwicklungen findet man bei Chen und Han [14]. Für die Bemessung von Bauteilen aus Stahlbeton ist es in der Regel jedoch zweckmässig, von möglichst einfachen Annahmen auszugehen, vgl. Kapitel 3.3.

## 5.6 Verbund

### 5.6.1 Allgemeines

Das Zusammenwirken einbetonierter Stahlstäbe mit dem sie umgebenden Beton bestimmt das Verhalten des Verbundbaustoffs Stahlbeton in verschiedener Hinsicht. Die Eigenschaften des Verbundes steuern die Rissbildung sowie die sich ergebenden Rissbreiten, und sie sind, falls auf eine spezielle Formgebung der Bewehrungsstäbe verzichtet wird, verantwortlich für die Verankerung der Zugkräfte der Bewehrung im Beton. Über das Rissverhalten werden auch die globalen Verformungen von den Verbundeigenschaften beeinflusst, so dass sich die im Bruchzustand einstellenden Grenzverformungen nur unter deren Berücksichtigung zuverlässig beurteilen lassen. Fehlt ein kontinuierlicher Verbund zwischen Stahl und Beton, wie beispielsweise bei einer Vorspannung ohne Verbund, müssen die Kräfte mittels spezieller Endverankerungen vom Stahl auf den Beton übertragen werden. In jedem Fall stellt jedoch die einwandfreie Kraftübertragung zwischen Stahl und Beton die unabdingbare Grundlage für die Stahlbetonbauweise dar.

### 5.6.2 Verbundverhalten

Der Verbund beruht auf der Verzahnung der rauen und durch Rippen profilierten Staboberfläche mit dem Beton. Seine Qualität hängt in erster Linie von der Beschaffenheit der Verzahnungsfläche sowie vom Verformungsverhalten und der Scherfestigkeit des Betonmörtels in der Grenzschicht nahe der Staboberfläche ab. Die im einzelnen recht komplizierte Kraftübertragung zwischen Stahl und Beton wird vereinfachend durch eine am differentiellen Stabelement wirkende nominelle Verbundschubspannung  $\tau_b$  ausgedrückt. Zur Beschreibung der Verbundcharakteristik dient die Beziehung zwischen der mittleren örtlichen Verbundschubspannung  $\tau_b$  und der zugehörigen Relativverschiebung  $\delta$  (Schlupf), wie sie an Verbundelementkörpern mit kurzen Einbettungslängen experimentell ermittelt werden kann. Rehm [85] bezeichnete die  $\tau_b$ - $\delta$ -Beziehung als “Grundgesetz des Verbundes” und zeigte, dass dieses als fiktives Stoffgesetz betrachtet und zur Lösung von Verbundproblemen herangezogen werden kann.

Bei einem Ausziehversuch wird ein mit einer bestimmten Verbundlänge  $l_b$  einbetonierter Bewehrungsstab aus dem Prüfkörper herausgezogen, wobei die Verschiebung des Stabes gegenüber dem Beton am herausstehenden freien Ende gemessen wird. Grösse und Form der Prüfkörper sowie Lage und Länge der Verbundstrecke haben dabei einen wesentlichen Einfluss auf die Versuchsergebnisse. Zur Standardprüfung der Verbundeigenschaften von geripptem Betonstahl wird heute der in Bild 5.14 (a) gezeigte Versuchstyp verwendet. Da es schwierig und aufwendig ist,

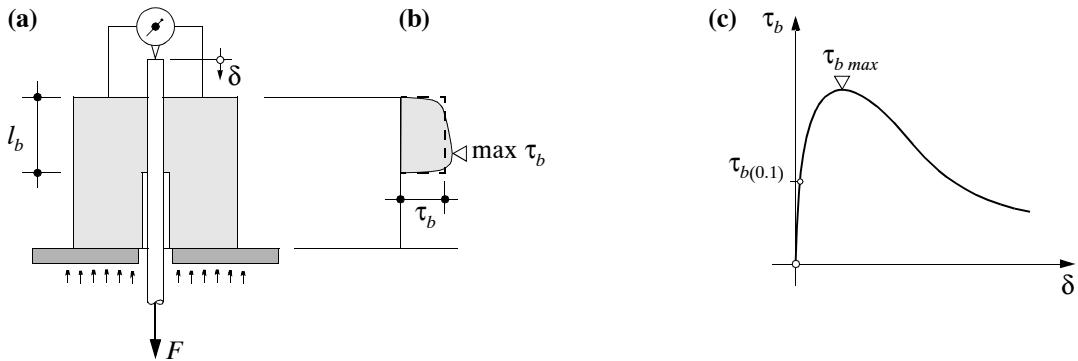


Bild 5.14 – Verbundverhalten: (a) Prüfkörper für Ausziehversuch; (b) Verlauf der Verbundschubspannung im Verbundbereich; (c) qualitativer Verlauf der Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung.

den Verlauf der Verbundschubspannungen über die Verbundlänge zu messen, werden als Ergebnisse meist die Mittelwerte

$$\tau_b = \frac{F}{\mathcal{O} \pi l_b} \quad (5.30)$$

angegeben, Bild 5.14 (b) und (c). Als Verbundfestigkeit bezeichnet man den mittleren Maximalwert  $\tau_{b \max}$ , der bei üblichen Betonstählen bei Schlupfwerten  $\delta$  von etwa 0.5 bis 1 mm erreicht wird. Durch das Einlegen einer Querbewehrung, respektive die Umschnürung des gezogenen Bewehrungsstabes, können sowohl die Verbundfestigkeit  $\tau_{b \max}$  als auch der Schlupf beim Erreichen von  $\tau_{b \max}$  erhöht werden [20]. Zur Charakterisierung der Verbundgüte werden oft die bei Schlupfwerten von 0.01, 0.1 oder 1.0 mm gemessenen Verbundschubspannungen angegeben. Für die Rissbildung unter Gebrauchslasten kann beispielsweise die Verbundschubspannung  $\tau_{b(0,1)}$  bei einem Schlupfwert von  $\delta = 0.1$  mm als kennzeichnend betrachtet werden. Eine Diskussion der verschiedenen baustoffspezifischen und geometrischen Einflüsse auf das Verbundverhalten findet man bei Alvarez [3].

Da das Verbundverhalten nach dem Überschreiten der anfänglich vorhandenen Haftung im wesentlichen durch die Verzahnung der Stahlrippen mit den dazwischenliegenden Betonkonsonen geprägt ist, kommen der Form der Rippen sowie der Rippenteilung besondere Bedeutung zu. Als Kenngröße für die Verzahnung wird in [85] die bezogene Rippenfläche  $f_R$  vorgeschlagen, die das Verhältnis der Rippenaufstandsfläche zur Mantelfläche der zwischen zwei Rippen eingeschlossenen Betonkonsole angibt. Für eine idealisierte kreisringförmige Rippe gemäß Bild 5.15 (a) ergibt sich

$$f_R = \frac{\pi a(\mathcal{O} + a)}{\pi b(\mathcal{O} + 2a)} \quad (5.31)$$

Für sichelförmige oder schräg verlaufende Rippen müssen die Projektionen der Rippenflächen eingesetzt werden. Bild 5.15 (b) zeigt qualitativ den Einfluss der bezogenen Rippenfläche auf die Verbundschubspannung  $\tau_{b(0,1)}$ . Anhand von Versuchen kann festgestellt werden, dass im Bereich kleiner Schlupfe eine Erhöhung von  $f_R$  eine nahezu lineare Zunahme der Verbundschubspannung bewirkt. Dabei ist allerdings zu beachten, dass dieser Zusammenhang nur dann gilt, wenn die Rippen schmal und nicht zu niedrig ausgebildet sind. Bei üblichen Betonstählen liegen die Werte der bezogenen Rippenflächen etwa zwischen  $f_R = 0.05$  und 0.1.

Die Übertragung der Verbundkräfte vom Stahl auf den Beton bewirkt einen räumlichen Beanspruchungszustand in der näheren Umgebung des Bewehrungsstabes, der insbesondere Ringzug-

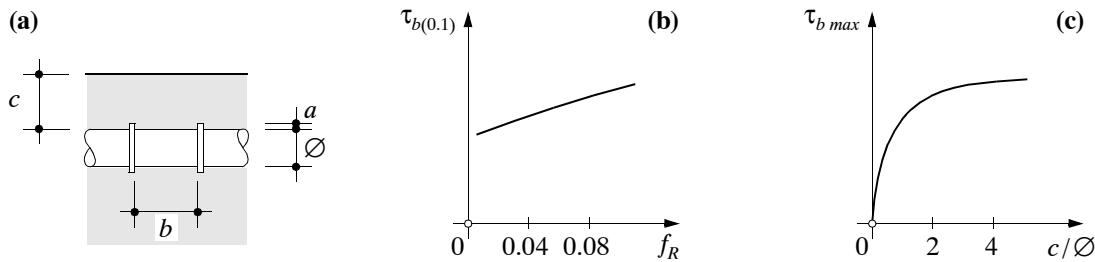


Bild 5.15 – Verbundverhalten gerippter Stäbe: (a) Rippengeometrie; (b) Einfluss der bezogenen Rippenfläche; (c) Einfluss der Betonüberdeckung der Bewehrung.

spannungen im Beton beinhaltet. Diese sind um so grösser, je höher die pro Längeneinheit eingeleiteten Stabkräfte sind, und sie führen schliesslich zur Bildung von Rissen entlang der Bewehrungsstäbe. Bei Bewehrungsstäben, die nahe der Betonoberfläche liegen, treten, im Vergleich zu innen liegenden Stäben, Längsrisse bei kleineren Verbundschubspannungen auf, da die geringe Betonüberdeckung eine Ausbreitung des Betonzugrings und eine Querdehnungsbehinderung nur beschränkt ermöglicht. Der Einfluss der auf den Stabdurchmesser bezogenen Betonüberdeckung auf die Verbundfestigkeit ist in Bild 5.15 (c) qualitativ dargestellt. Dieser Einfluss spielt vor allem für das Rissverhalten von Bauteilen mit geringer Betonüberdeckung der Bewehrung ( $c < \emptyset$ ) eine wichtige Rolle.

In Versuchen kann beobachtet werden, dass die Lage der Bewehrungsstäbe beim Betonieren das Verbundverhalten ebenfalls beeinflusst. Deutliche Unterschiede bezüglich der Verbundsteifigkeit und der Verbundfestigkeit ergeben sich abhängig davon, ob die Stäbe beim Betonieren waagrecht liegen, oder ob sie senkrecht stehen. Durch das Absetzen des Frischbetons beim Aus härten entstehen unterhalb der liegenden Stäbe Hohlräume, welche die Qualität des Verbundes im Vergleich zu stehenden Stäben vermindern. Zudem weist in der Schalung unten liegender Beton in der Regel eine etwas höhere Festigkeit und eine geringere Porosität auf.

Der ansteigende Ast der Verbundcharakteristik gemäss Bild 5.14 (c) ist für Beanspruchungszustände unter Gebrauchslasten von besonderer Bedeutung. Noakowski [81] schlug für diesen Teil der  $\tau_b$ - $\delta$ -Beziehung den Ansatz

$$\tau_b = \alpha \delta^\beta f_c^{2/3} \quad (\text{in mm und MPa}) \quad (5.32)$$

vor, wobei  $\alpha$  und  $\beta$  als von der Materialbeschaffenheit und von der Lage der Bewehrungsstäbe abhängige Konstanten zu betrachten sind. Für Beanspruchungen bis zur Fliessgrenze der Bewehrung liegen entsprechende mittlere Werte etwa bei  $\alpha = 0.8$  und  $\beta = 0.15$ . Der Einfluss der Betonfestigkeit geht somit über die Grösse  $f_c^{2/3}$  direkt in die Verbundbeziehung ein. Dies wider spiegelt die Tatsache, dass die Qualität des Verbundes im wesentlichen durch die Verformungseigenschaften und die Scherfestigkeit des Betons in den Zonen nahe der Staboberfläche bestimmt wird.

Bei oberflächennahen Stäben mit in der Praxis üblichen Betonüberdeckungen wird mit der Bildung von Längsrissen im allgemeinen die Verbundfestigkeit erreicht. Bei weiterer Steigerung der Verformungen fällt die Verbundschubspannung mit wachsendem Schlupf kontinuierlich ab. Dabei werden die zwischen den Rippen liegenden Betonkonsolen längs der Stäbe abgescherzt. Die Kraftübertragung erfolgt zunehmend durch Reibung zwischen den abgescherzten Konsolen und dem umliegenden Beton.

In Versuchen [21, 91] kann ein weiteres Phänomen beobachtet werden; nach dem Überschreiten der Fliessgrenze des Stahls erfolgt eine deutliche Abnahme der übertragenen Verbundschub-

spannungen. In der plastischen Phase nehmen sowohl die achsiale Dehnung als auch die Querkontraktion des Bewehrungsstahls stark zu, und die Verzahnungswirkung zwischen den Stahlrippen und dem Beton wird vermindert. Die daraus resultierende Veränderung des Verbundverhaltens muss insbesondere bei der Untersuchung des plastischen Verformungsvermögens von Stahlbetonbauteilen angemessen berücksichtigt werden.

### 5.6.3 Rechnerische Behandlung

Für die rechnerische Behandlung von Stahlbetonträgern erscheint es sinnvoll, mit stark vereinfachten Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehungen zu arbeiten, da in der Regel beliebige Beanspruchungen und Querschnittsgeometrien sowie mehrlagige Bewehrungen zu berücksichtigen sind. Die gewählte Idealisierung muss jedoch auf diejenige des Stoffgesetzes für den Bewehrungsstahl abgestimmt und derart beschaffen sein, dass einerseits die hauptsächlichen Einflüsse berücksichtigt und andererseits die Verformungen des Bauteils zuverlässig vorausgesagt werden können. Ein Vorschlag für eine solche Näherung ist in Bild 5.16 dargestellt.

Das Stoffgesetz für den Bewehrungsstahl, Bild 5.16 (b), entspricht der in Bild 5.4 (c) behandelten bilinearen Idealisierung. Das Verbundschubspannungs-Schlupf-Verhalten kann durch die in Bild 5.16 (c) gezeigte zweistufige, starr-plastische Beziehung angenähert werden. Die vermindeerte Verbundwirkung in den rissnahen Zonen und die Abnahme der übertragenen Verbundschubspannungen infolge des Fliessens der Bewehrung werden dabei durch die auf einem tieferen Niveau verlaufende Verbundschubspannung  $\tau_{b1}$  berücksichtigt. Der Schlupfwert  $\delta_y$ , bei dem diese Reduktion erfolgt, wird durch das Erreichen der Fliessgrenze des Bewehrungsstahls festgelegt,

$$\delta_y = \delta(\sigma_s = f_y) \quad (5.33)$$

Obwohl mit dieser Idealisierung die tatsächlichen Zusammenhänge sehr stark vereinfacht werden, gelingt es durch eine geeignete Wahl von  $\tau_{b0}$  und  $\tau_{b1}$ , das Verformungsverhalten von in Verbund liegenden Bewehrungsstäben für Beanspruchungen oberhalb der Risslast mit ausreichender Genauigkeit zu beschreiben.

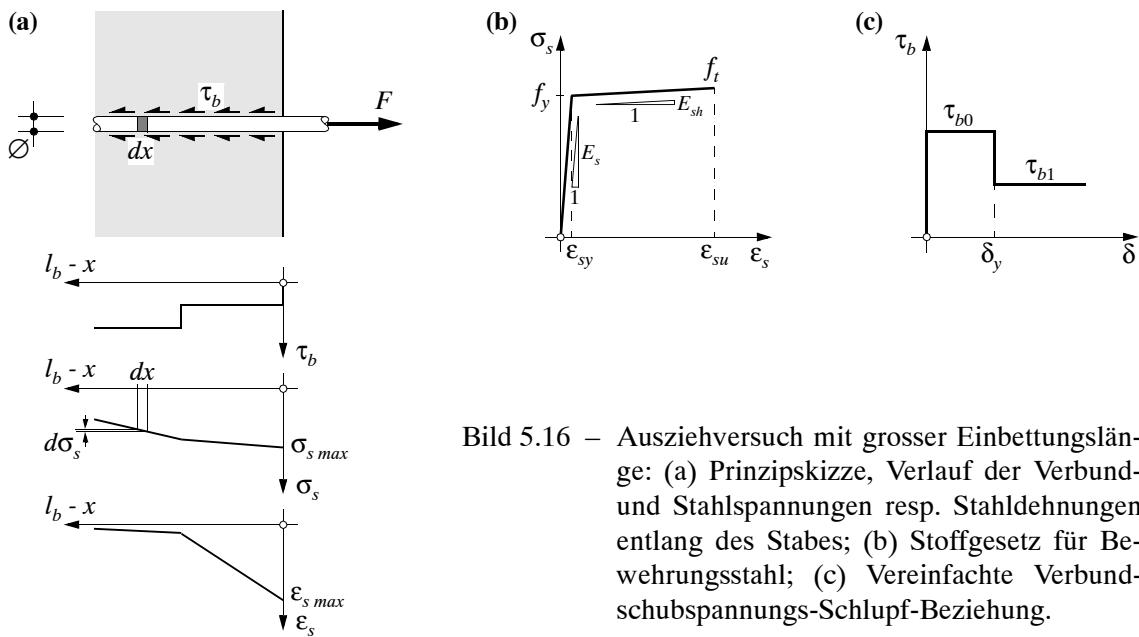


Bild 5.16 – Ausziehversuch mit grosser Einbettungslänge: (a) Prinzipskizze, Verlauf der Verbund- und Stahlspannungen resp. Stahldehnungen entlang des Stabes; (b) Stoffgesetz für Bewehrungsstahl; (c) Vereinfachte Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung.

Betrachtet man ein Stabelement der Länge  $dx$  gemäss Bild 5.16 (a), so gilt für beliebige Stoff- und Verbundgesetze aus Gleichgewichtsgründen

$$\frac{d\sigma_s}{dx} = \frac{4\tau_b}{\emptyset} \quad (5.34)$$

da die Änderung der Stahlzugkraft  $d\sigma_s \emptyset^2 \pi / 4$  der mittleren örtlichen Verbundkraft  $\tau_b \emptyset \pi dx$  entsprechen muss. Ferner gilt die kinematische Beziehung

$$\frac{d\delta}{dx} = \varepsilon_s(x) - \varepsilon_c(x) \quad (5.35)$$

die besagt, dass die Änderung des Schlupfes  $d\delta$ , unter der Annahme, dass die Querschnitte eben bleiben, der Differenz der Verformungen des Stahls und des Betons  $(\varepsilon_s - \varepsilon_c)dx$  entspricht. Die Verformungen des Betons können in erster Näherung vernachlässigt werden. Gleichung (5.35) vereinfacht sich dann zu

$$\frac{d\delta}{dx} = \varepsilon_s(x) \quad (5.36)$$

Setzt man bis zum Erreichen der Fliessgrenze ein linear elastisches Verhalten der Bewehrung voraus, so liefert die Verknüpfung von (5.34) und (5.36) die Beziehung

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{4\tau_b}{E_s \emptyset} \quad (5.37)$$

Dabei handelt es sich um eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich allerdings nur für spezielle Funktionen  $\tau_b$  analytisch integrieren lässt.

Werden die Verformungen des Betons nicht vernachlässigt und auch in Stabrichtung wirkende verteilte Lasten  $q(x)$  berücksichtigt, so kommt zu dem Ausdruck rechterhand in (5.37) ein Summand hinzu:

$$\frac{d^2\delta}{dx^2} = \frac{4\tau_b}{E_s \emptyset} + \frac{\emptyset \pi \tau_b + q}{A_c E_c (1 - \rho)} \quad (5.38)$$

In dieser allgemeinen, sogenannten Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes bezeichnet  $\rho = \emptyset^2 \pi / (4A_c)$  den geometrischen Bewehrungsgehalt und  $A_c$  die Querschnittsfläche des Betons inklusive Stahleinlage.

#### 5.6.4 Verbundkenngroßen

##### Ermittlung von $\tau_{b0}$

Für die Herleitung der Verbundkenngroßen ist zunächst das Erreichen der Fliessgrenze des Bewehrungsstahls von besonderem Interesse. Setzt man die Gültigkeit der  $\tau_b$ - $\delta$ -Beziehung (5.32) für den gesamten Schlupfbereich vor dem Erreichen der Fliessgrenze voraus, so findet man für den betrachteten Fall eines Ausziehversuchs mit grosser Einbettungslänge gemäss Bild 5.16 (a) die Verankerungslänge des Stabes

$$l_b = \frac{2}{1 - \beta} \left( \frac{(1 + \beta) E_s^\beta \emptyset \sigma_{s \max}^{1 - \beta}}{8 f_c^{2/3}} \right)^{\frac{1}{1 + \beta}} \quad (5.39)$$

innerhalb der die Stahlspannung von  $\sigma_{s \max}$  auf 0 abgebaut wird. Damit kann die mittlere auf der Verankerungsstrecke wirkende Verbundschubspannung  $\tau_{bm}$  berechnet werden. Mit der Gleichgewichtsbeziehung

$$\frac{\sigma_{s \max} \varnothing^2 \pi}{4} = \tau_{bm} \varnothing \pi l_b \quad (5.40)$$

und unter Berücksichtigung von  $\sigma_{s \ max} = f_y$  findet man

$$\tau_{bm} = \tau_{b0} = \frac{(1-\beta)}{8} \left( \frac{8\alpha f_c^{2/3}}{1+\beta} \right)^{\frac{1}{1+\beta}} \left( \frac{f_y^2 \varnothing}{E_s} \right)^{\frac{\beta}{1+\beta}} \quad (5.41)$$

Die mittlere Verbundschubspannung hängt demnach von den Konstanten ( $\alpha, \beta$ ) der Verbundcharakteristik, der Festigkeit ( $f_c$ ) des Betons, den Kennwerten ( $f_y, E_s$ ) des Bewehrungsstahls sowie vom Stabdurchmesser  $\varnothing$  ab.

Ist die Verbundcharakteristik bekannt, kann Gleichung (5.41) für verschiedene Beton- und Stahlqualitäten ausgewertet werden. Das Resultat einer solchen Berechnung ist in Bild 5.17 dargestellt. Die Verbundcharakteristik wurde dabei mit den Konstanten  $\alpha = 0.8$  und  $\beta = 0.15$  als gegeben vorausgesetzt. Für Beton mit  $f_c = 30$  MPa und Betonstahl mit  $f_y = 500$  MPa sowie  $E_s = 200$  GPa ist  $\tau_{b0} = 0.49 f_c^{2/3}$  für Stäbe  $\varnothing = 10$  mm und  $\tau_{b0} = 0.57 f_c^{2/3}$  für Stäbe  $\varnothing = 30$  mm. Die angegebenen Faktoren verändern sich bei einer Variation der Betonfestigkeit innerhalb der in Bild 5.17 angegebenen Grenzen nur geringfügig.

Die Verankerungslänge kann somit sehr einfach ausgedrückt werden und beträgt bei Fliessbeginn der Bewehrung

$$l_b(\sigma_{s \ max} = f_y) = \frac{f_y \varnothing}{4\tau_{b0}} \quad (5.42)$$

Die zugehörige Ausziehlänge, respektive der Schlupf  $\delta_{max}$  am belasteten Ende ( $x = l_b$ ) des Ausziehkörpers, kann durch Integration von Gleichung (5.36) gewonnen werden. Verwendet man hierzu die in Bild 5.16 (c) vorgeschlagene starr-ideal plastische  $\tau_b$ - $\delta$ -Beziehung anstelle von Gleichung (5.32), so resultieren etwas höhere Schlupfwerte. In Anbetracht der ohnehin grossen Unsicherheiten bezüglich des Verbundverhaltens fallen die Unterschiede jedoch unwesentlich aus. Beim Erreichen der Fliessgrenze beträgt die Ausziehlänge

$$\delta_{max}(\sigma_{s \ max} = f_y) = \frac{f_y^2 \varnothing}{8E_s \tau_{b0}} \quad (5.43)$$

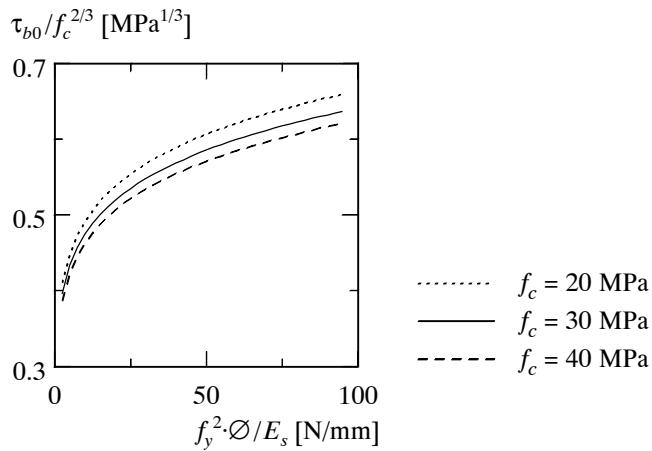


Bild 5.17 – Berechnung der mittleren Verbundschubspannung  $\tau_{b0}$  gemäss (5.41) für Ausziehversuche mit grosser Einbettungslänge.

### Ermittlung von $\tau_{b1}$

Bei weiterer Laststeigerung nimmt auch die Verankerungslänge zu. Die übertragene Verbundschubspannung sinkt gemäss der in Bild 5.16 (c) angegebenen Verbundcharakteristik in dem Bereich des Stabes, in dem die Fliessspannung bereits überschritten ist, auf den Wert  $\tau_{b1}$  ab. Die Verankerungslänge beträgt dann

$$l_b(\sigma_s \max > f_y) = \frac{f_y \emptyset}{4\tau_{b0}} + \frac{(\sigma_s \max - f_y) \emptyset}{4\tau_{b1}} \quad (5.44)$$

und der zugehörige Schlupfwert ist gleich

$$\delta_{max}(\sigma_s \max > f_y) = \frac{f_y^2 \emptyset}{8E_s \tau_{b0}} + \frac{(\sigma_s \max - f_y)^2 \emptyset}{8E_{sh} \tau_{b1}} + \frac{f_y (\sigma_s \max - f_y) \emptyset}{4E_s \tau_{b1}} \quad (5.45)$$

wobei die Verfestigung des Stahls gemäss der in Bild 5.16 (b) angegebenen bilinearen Idealisierung berücksichtigt wird. Mit Hilfe der hier hergeleiteten Beziehungen lässt sich  $\tau_{b1}$  bestimmen, indem die so ermittelten Grössen mit Versuchsresultaten verglichen werden.

### Nachrechnung der Versuche von Engström [21]

Engström [21] untersuchte, im Hinblick auf die Verbindung vorfabrizierter Stahlbetonelemente, das Verformungs- und Bruchverhalten bewehrter Fugen. Die in diesem Zusammenhang durchgeföhrten Versuche lassen sich, zumindest für kleinere Bewehrungsgehalte, als Ausziehversuche behandeln. Das Prinzip der Versuche ist in Bild 5.18 (a) dargestellt. Die Nachrechnung der Last-Verformungs-Kurven erfolgte unter Verwendung der Beziehungen (5.42) bis (5.45); als Vergleichsgrösse diente die gemessene Öffnung der Fuge. Neben den Materialkennwerten wurden auch die mit Gleichung (5.41) berechneten Werte  $\tau_{b0}$  als bekannt vorausgesetzt.

Durch Variation des Verbundkennwertes  $\tau_{b1}$  können Näherungslösungen für den gesamten Verformungsbereich gefunden werden. Bei der Berechnung ist zu beachten, dass die Verformung der bereits herausgezogenen Länge des Stabes ebenfalls zur Öffnung der Fuge beiträgt, was insbesondere bei grossen Fugenöffnungen eine nicht zu vernachlässigende Rolle spielt. Die gesamte Öffnung der Fuge ergibt sich somit zu

$$w = 2\delta_{max}(1 + \varepsilon_s \max) \quad (5.46)$$

Einige Ergebnisse solcher Nachrechnungen sind in Bild 5.18 (c) aufgetragen. Die dabei verwendeten Kennwerte liegen zwischen  $\tau_{b1} = 0.30 f_c^{2/3}$  und  $\tau_{b1} = 0.34 f_c^{2/3}$ . Vernachlässigt man bei der Berechnung den Einfluss der Verformung der verbundfreien Länge, so müssen, damit die gleichen Fugenöffnungen erzielt werden, die Werte für  $\tau_{b1}$  um 10 bis 15 % reduziert werden. Als Versagenszustand wird das Erreichen der Höchstlast respektive der Bruchdehnung  $\varepsilon_{su}$  definiert. Die danach einsetzende Verformungslokalisierung im Einschnürbereich und die dabei auftretende Materialentfestigung sind als vom Verbundverhalten nicht betroffene Zusatzefekte zu betrachten.

Die berechneten Last-Verformungs-Kurven stimmen über weite Bereiche relativ gut mit den gemessenen Punkten überein. Unterschiede zwischen Berechnung und Versuch ergeben sich vor allem infolge der Idealisierung des Stoffgesetzes des Bewehrungsstahls, bei der ein allfällig vorhandenes Fliessplateau vernachlässigt wird. Mit der Berechnung wird demzufolge die Phase unmittelbar nach dem Fliessbeginn am schlechtesten beschrieben. Dabei ist allerdings zu bedenken, dass das Verformungsverhalten einbetonierter Bewehrungsstäbe einer Vielzahl von Einflüssen mit erheblichen Streuungen unterliegt, so dass eine detailliertere Behandlung wenig sinnvoll erscheint, zumal speziell für die plastische Verformungsphase noch keine systematischen experimentellen Untersuchungen vorliegen.

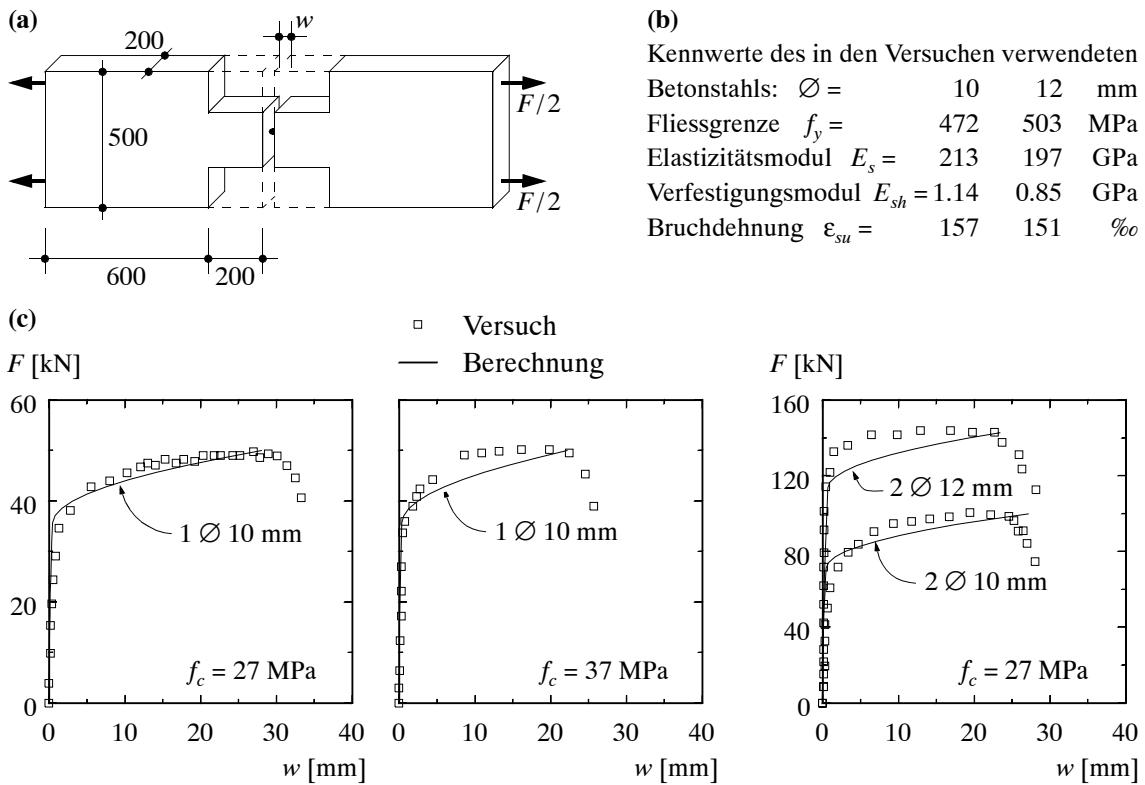


Bild 5.18 – Nachrechnung von Ausziehversuchen von Engström [21]: (a) Prinzip der Versuche; (b) Grundlagen für die Berechnung; (c) Vergleich der gemessenen Last-Verformungs-Diagramme mit den Nachrechnungen.

### Nachrechnung der Versuche von Shima et al. [91]

Auch die von Shima et al. [91] durchgeföhrten Ausziehversuche, in denen jeweils ein einzelner Bewehrungsstab aus einem grossen, vertikal stehenden Betonzyylinder herausgezogen wurde, können mit dem hier beschriebenen Näherungsverfahren nachgerechnet werden. Um den Einfluss des oberflächennahen Bereichs auf das Verbundverhalten zu reduzieren, wurde der Stab am belasteten Ende des Zylinders auf einer Länge von  $10\emptyset$  verbundfrei gehalten. Mit regelmässigen Abständen auf der Bewehrung aufgeklebten Dehnmessstreifen konnte der Verlauf der Stahldehnung entlang des Stabes aufgezeichnet werden. Die Ausziehlänge am belasteten Ende des Stabes wurde mit induktiven Weggebern gemessen. Anhand dieser Daten wurde schliesslich der Verlauf der Stahlspannung, des Schlupfs und der Verbundschubspannung berechnet.

In Bild 5.19 sind die Ergebnisse der Nachrechnung eines dieser Versuche zusammengestellt. Als Eingangsgrößen für die Berechnung wurden wiederum die Kennwerte der verwendeten Materialien und der mit Gleichung (5.41) berechnete Wert  $\tau_{b0}$  benutzt. Für die im Bild gezeigte Laststufe ergibt sich mit einem Wert von  $\tau_{b1} = 0.36 f_c^{2/3}$  eine befriedigende Übereinstimmung von Versuch und Berechnung. Dieser Wert liegt etwas höher als die Werte, die bei den Versuchen von Engström gefunden wurden. Dies ist darauf zurückzuföhren, dass im vorliegenden Fall mit der Anordnung einer verbundfreien Länge andere Randbedingungen vorlagen. Zudem könnte auch diese Kenngröße, wie schon  $\tau_{b0}$ , vom Stabdurchmesser und von den Materialeigenschaften des Stahls beeinflusst sein. Eine abschliessende Beurteilung der Resultate ist auf der Grundlage der zur Zeit vorliegenden Versuchsergebnisse nicht möglich. Die Rechenergebnisse zeigen aber deutlich, dass sowohl die Verankerungslänge als auch der Verlauf der Verformungsgrößen mit ausreichender Genauigkeit vorhergesagt werden können.

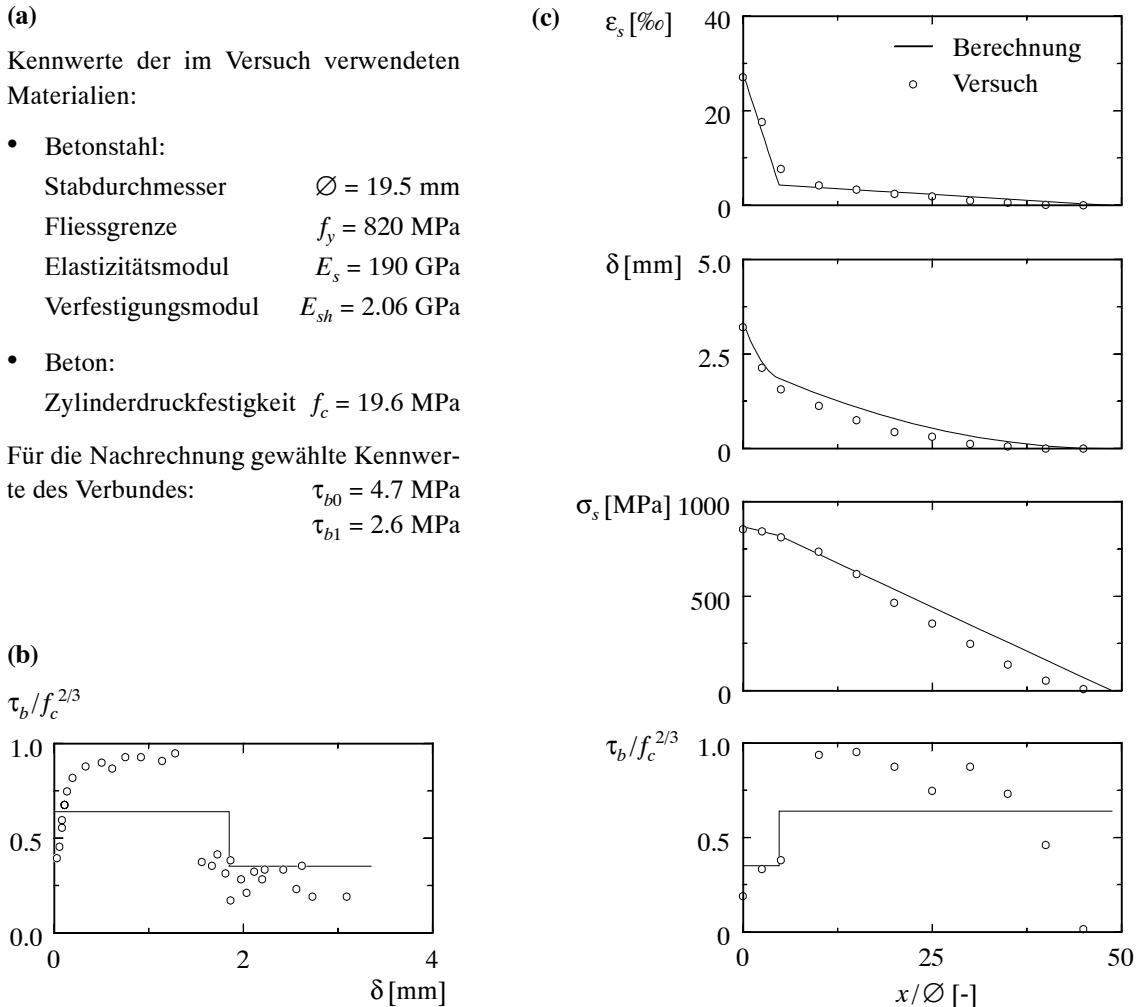


Bild 5.19 – Nachrechnung eines Ausziehversuchs von Shima et al. [91]: (a) Grundlagen für die Berechnung; (b) Vergleich der gemessenen Verbundcharakteristik mit der vorgeschlagenen Idealisierung; (c) Verlauf der Stahldehnung, des Schlupfes, der Stahldruckspannung und der Verbundschubspannung entlang der Verbundlänge.

### Verbundkennwerte des Zuggurtmodells

Das in Kapitel 6 dargestellte Zuggurtmodell geht von den mit den Bildern 5.16 (b) und (c) beschriebenen Modellannahmen aus. Für die Verbundkennwerte von Betonstählen mit üblicher Rippengeometrie wurde in [101]

$$\tau_{b0} = 2\tau_{b1} = 0.6 f_c^{2/3} = 2f_{ct} \quad (5.47)$$

vorgeschlagen. Wie in den nachfolgenden Kapiteln gezeigt wird, erweisen sich diese Werte für eine Vielzahl von Problemstellungen als zweckmässige Annahmen.

Um Verwechslungen zu vermeiden, sei abschliessend bemerkt, dass die Bezeichnung  $f_c$  im vorliegenden Kapitel stets für die Zylinderdruckfestigkeit verwendet worden ist. In anderen Kapiteln wird  $f_c$  für die gegenüber der Zylinderdruckfestigkeit im allgemeinen abgeminderte, effektive Betondruckfestigkeit verwendet; wo dies zur Unterscheidung nötig ist, wird dann die Zylinderdruckfestigkeit mit  $f'_c$  bezeichnet. In keinem Fall sollte  $f_c$  mit dem Rechenwert der Betondruckfestigkeit gemäss der Norm SIA 162 [96] verwechselt werden.



## 6 Zuggurtmodell

*Manuel Alvarez*

### 6.1 Einleitung

Das Verformungsverhalten eines Stahlbetonzuggliedes wird beeinflusst vom Stabdurchmesser (Verbundradius), dem Bewehrungsgehalt und den Verbundkennwerten der Bewehrung, von den Duktilitätskennwerten und der Verfestigungscharakteristik des Bewehrungsstahles sowie von der Grösse der Rissabstände. Letztere können sich innerhalb der theoretischen Schranken im übrigen beliebig einstellen, und sie haben in jedem Fall einen sehr grossen Einfluss auf die Grösse der für gerissene Stahlbetonbauteile rechnerisch ermittelten Verformungen; in vielen Fällen wird dieser Freiheitsgrad durch das Vorhandensein einer querschnittsmindernden Querbewehrung, deren Anordnung in der Regel die Lage der Rissquerschnitte vorgibt, eliminiert.

Im vorliegenden Kapitel wird das Zuggurtmodell dargestellt, welches auf der Grundlage eines linear elastischen Verhaltens des Betons, allgemeiner Stoffgesetze für den Bewehrungsstahl sowie starr - ideal plastischer Verbundgesetze eine konsistente Beschreibung des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahl- und Spannbetonzuggliedern (beziehungsweise von Zuggurten in Bauteilen) vom Zustand der Erstrissbildung bis zum Bruch der Bewehrung sowohl für Zwang- als auch für Lastbeanspruchung gestattet. Mit dem Zuggurtmodell werden sämtliche die Zugsteifigkeit des gerissenen Stahlbetons beeinflussenden material- und geometriespezifischen Parameter im Rahmen eines mechanisch einwandfreien Modells erfasst; die einzigen Freiheitsgrade des Modells bilden die den jeweils vorliegenden Verhältnissen entsprechende Festlegung der Kennwerte der Verbundschubspannung,  $\tau_{b0}$  und  $\tau_{b1}$ , sowie die Wahl der Rissabstände, welche sich innerhalb der zugehörigen theoretischen Schranken beliebig einstellen können.

Die analytische Kraft des Zuggurtmodells gründet auf der Tatsache, dass bei Verwendung starr - ideal plastischer Verbundgesetze die Wechselbeziehung zwischen den Gleichgewichtsbedingungen an den Bewehrungseinlagen und den kinematischen Relationen aufgehoben ist und somit der Spannungszustand direkt anhand einer Gleichgewichtsbetrachtung an den Bewehrungseinlagen ermittelt werden kann, ohne eine Integration der Differentialgleichung des verschieblichen Verbundes vornehmen zu müssen.

### 6.2 Modellbildung

Unter Voraussetzung starr - ideal plastischer Verbundgesetze lässt sich das Trag- und Verformungsverhalten von gerissenen Zuggliedern unter Berücksichtigung der versteifenden Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen analytisch formulieren. Das betrachtete Zugglied wird dabei in einzelne Risselemente mit gewählten Rissabständen unterteilt. Die in den Risselementen durch die Verbundschubspannungen  $\tau_b$  bewirkte Abnahme der Stahlspannungen lässt sich direkt anhand einer Gleichgewichtsbetrachtung an den Bewehrungseinlagen ermitteln. Über das Stahlstoffgesetz kann anschliessend der Dehnungsverlauf in der Bewehrung und daraus eine mittlere Dehnung oder die gesamte Verlängerung der Bewehrung beziehungsweise des Zuggliedes bestimmt werden. Im folgenden werden entlang des betrachteten Zuggliedes konstante Betonzugfestigkeit und konstante Rissabstände vorausgesetzt, wobei eine Verallgemeinerung auf Fälle mit einer Variation dieser Grössen ohne besondere Schwierigkeit gelingt, jedoch im allgemeinen keine wesentlichen weitergehenden Aussagen in sich birgt.

### 6.2.1 Maximaler Rissabstand

Bild 6.1 (a) zeigt die Hälfte eines Risselementes der Länge  $s_{r0} = \emptyset f_{ct}(1-\rho)/(2\tau_{b0}\rho)$ . Unter Voraussetzung der in Bild 5.16 (c) dargestellten starr - ideal plastischen Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung und der Annahme eines initial eigenspannungsfreien Zustandes gilt für einen vollständigen Erstbelastungs - Entlastungs - Wiederbelastungs - Zyklus zwischen dem initialen Zustand,  $\sigma_{sr} = 0$ , und dem Zustand

$$\sigma_{sr0} = \frac{f_{ct}}{\rho} [1 + \rho(n-1)] \quad (6.1)$$

bei Erreichen der Risszugspannung die in Bild 6.1 (b) bis (d) dargestellte Entwicklung der Spannungen im Beton und in der Bewehrung (welche beide als linear elastisch vorausgesetzt werden,  $n = E_s/E_c$ ,  $\sigma_{sr} \leq f_{sy}$ ); Bild 6.1 (e) zeigt die entsprechenden Verläufe der Stahlverschiebung am Riss,  $\Delta_s$ , und der (halben) Rissbreite  $w/2$  in Abhängigkeit der in Risselementmitte auftretenden Betonspannung  $\sigma_{c0}$  [62, 3]. Bei der Erstbelastung liegen im Risselement sowohl ein Bereich mit

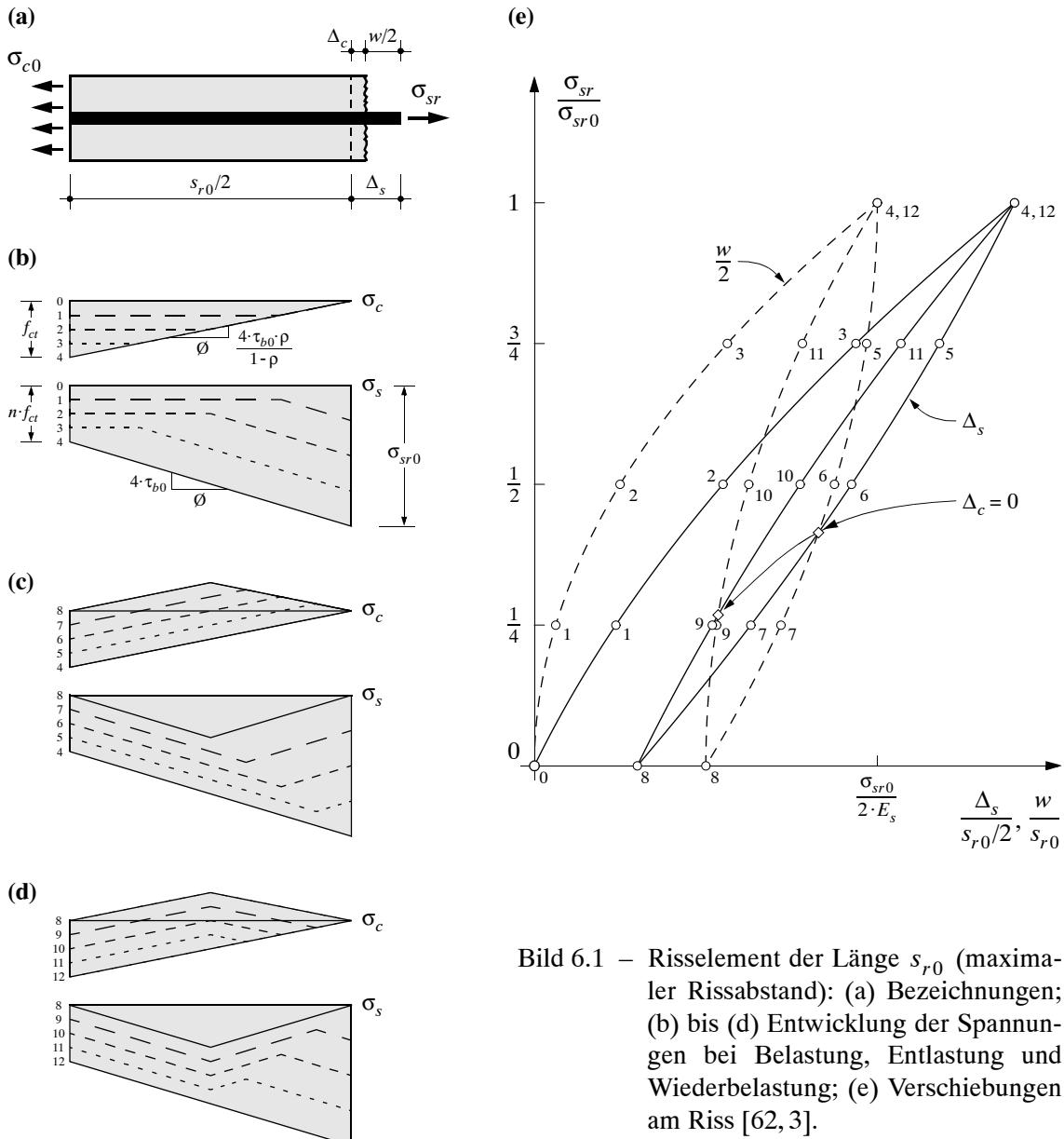


Bild 6.1 – Risselement der Länge  $s_{r0}$  (maximaler Rissabstand): (a) Bezeichnungen; (b) bis (d) Entwicklung der Spannungen bei Belastung, Entlastung und Wiederbelastung; (e) Verschiebungen am Riss [62, 3].

verschieblichem Verbund als auch ein Bereich mit ideellen Querschnitten vor; im ersten Bereich werden ausgehend vom Rissquerschnitt die Stahlspannungen gleichmäig ab- und entsprechende Betonspannungen aufgebaut; im zweiten sind die Stahl- und Betondehnungen gleich gross. Bei Erreichen der Risszugspannung,  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$  (Zustand 4), beträgt die Betonzugspannung in Risselementmitte  $f_{ct}$ , und gleichzeitig stellt die Risselementmitte den einzigen verbliebenen ideellen Querschnitt dar. Bei der Entlastung ist zu unterscheiden zwischen einem Bereich, in welchem eine Richtungsumkehr des zwischen Stahl und Beton auftretenden Schlupfes festzustellen ist, und einem Bereich mit vereinter Rückbildung der Stahl- und Betonspannungen. Nach vollständiger Entlastung (Zustand 8) verbleibt ein Eigenspannungszustand im Risselement, der aus Zugspannungen in der Bewehrung und entsprechenden Druckspannungen im Beton gebildet ist. Bei der Wiederbelastung erfolgt in rissnahen Bereichen eine erneute Schlupfumkehr, und mit dem Erreichen der Risszugspannung,  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$  (Zustand 12), stellen sich dem Zustand 4 identische Verhältnisse ein. Die in Bild 6.1 (e) dargestellte Entwicklung der Stahlverschiebung am Riss,  $\Delta_s$ , und der Rissbreite,  $w/2$ , gewinnt man durch Integration der den Spannungsverteilungen in Bild 6.1 (b) bis (d) affinen Dehnungsverläufe.

Bei Erreichen der Risszugspannung,  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$  beziehungsweise  $\sigma_{c0} = f_{ct}$  (Zustand 4), beträgt die Rissbreite

$$w_4 = \frac{f_{ct}^2 \emptyset (1 - \rho) [1 + \rho(n - 1)]}{4 \tau_{b0} E_s \rho^2} \quad (6.2)$$

Nach vollständiger Entlastung (Zustand 8) verbleibt eine Rissöffnung

$$w_8 = \frac{f_{ct}^2 \emptyset (1 - \rho) [1 + \rho(n - 1)]}{8 \tau_{b0} E_s \rho^2} \quad (6.3)$$

Bei Steigerung der Beanspruchung über die Risszugspannung hinaus,  $\sigma_{sr} > \sigma_{sr0}$ , verharret die Betonspannungsverteilung im Zustand 12 beziehungsweise 4, während die Stahlspannungen auf der ganzen Risselementlänge um den entsprechenden Betrag  $\sigma_{sr} - \sigma_{sr0}$  über Zustand 4 hinaus anwachsen. Die gewählte Risselementlänge,  $s_{r0} = \emptyset f_{ct}(1 - \rho)/(2 \tau_{b0} \rho)$ , entspricht somit der doppelten Eintragungslänge der Risszugspannung beziehungsweise dem (bei abgeschlossenem Rissbild) maximal möglichen Rissabstand, da für beliebige Zustände in Risselementmitte im Beton höchstens dessen Zugfestigkeit  $f_{ct}$  auftreten kann.

### 6.2.2 Minimaler Rissabstand

Falls sich in Risselementmitte ein weiterer Riss bildet, liegt der minimal mögliche Rissabstand  $s_{r0}/2 = \emptyset f_{ct}(1 - \rho)/(4 \tau_{b0} \rho)$  vor, siehe Bild 6.2 (a). Die Spannungsverteilungen in Bild 6.2 (b) bis (d) und die daraus folgende, in Bild 6.2 (e) dargestellte Entwicklung der Verformungen am Riss gelten wiederum unter Voraussetzung eines initial eigenspannungsfreien Zustandes und sind denjenigen in Bild 6.1 analog [62, 3].

Bei  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$  (Zustand 4) beträgt die Rissbreite

$$w_4 = \frac{3f_{ct}^2 \emptyset (1 - \rho) [1 + \rho(n - 1)]}{16 \tau_{b0} E_s \rho^2} \quad (6.4)$$

und nach vollständiger Entlastung (Zustand 8) verbleibt eine Rissöffnung

$$w_8 = \frac{f_{ct}^2 \emptyset (1 - \rho) [1 + \rho(n - 1)]}{16 \tau_{b0} E_s \rho^2} \quad (6.5)$$

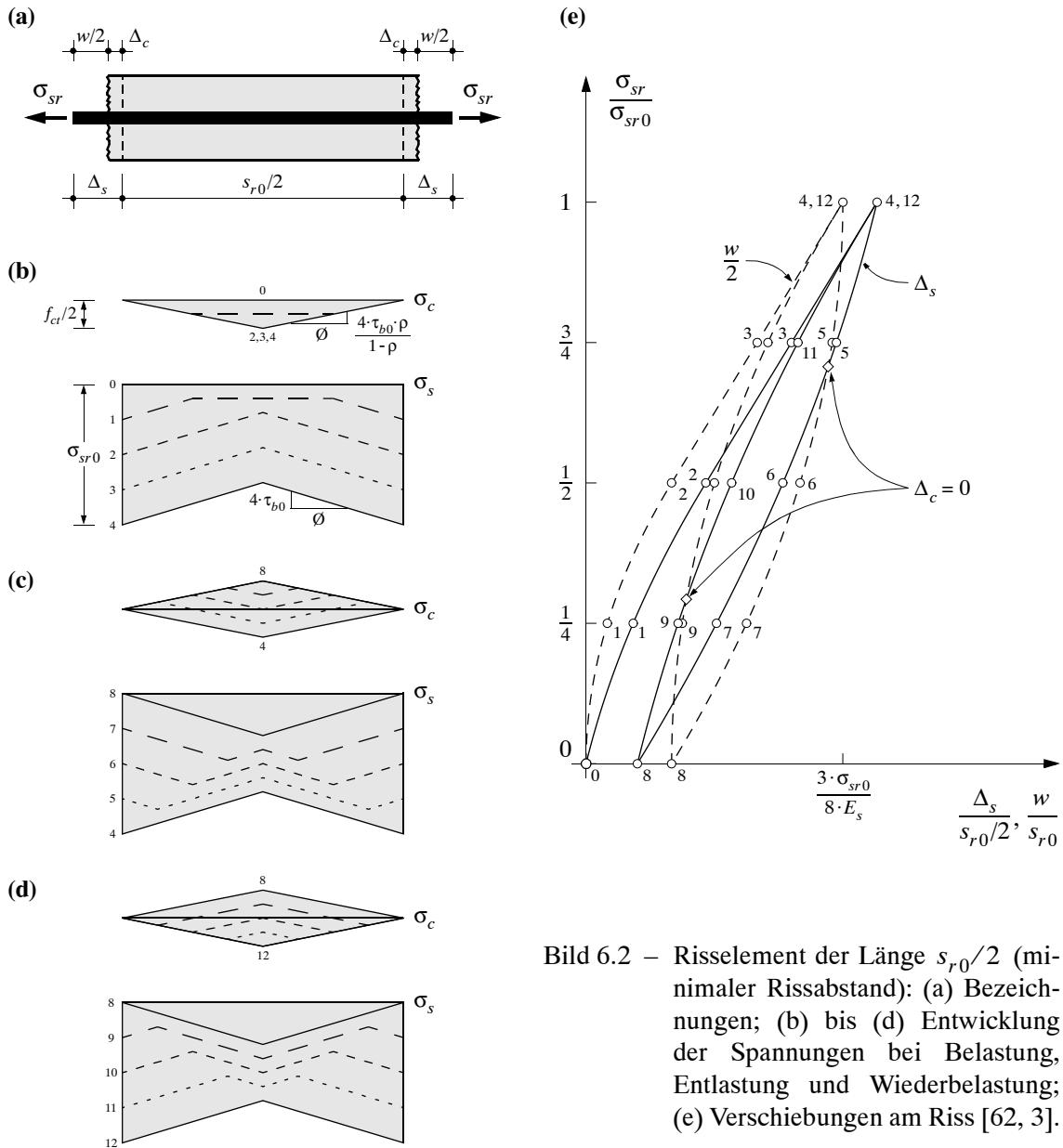


Bild 6.2 – Risselement der Länge  $s_{r0}/2$  (minimaler Rissabstand): (a) Bezeichnungen; (b) bis (d) Entwicklung der Spannungen bei Belastung, Entlastung und Wiederbelastung; (e) Verschiebungen am Riss [62, 3].

Die mit den Bildern 6.1 und 6.2 angestellten Betrachtungen zeigen, dass Entlastungs- und Wiederbelastungsvorgänge in Zuggliedern mit verschieblichem Verbund im allgemeinen (das heisst unter Berücksichtigung, dass bei einer Schlupfumkehr die Verbundschubspannungen ebenfalls ihren Richtungssinn kehren) Eigenspannungszustände in der Bewehrung und im Beton hervorrufen und somit eine Verbundhysterese bewirken.

Bei Voraussetzung einer starr - ideal plastischen Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung stellen sich bei Erreichen des Beanspruchungsniveaus  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$  in jedem Fall die mit Zustand 4 (beziehungsweise 12) in den Bildern 6.1 und 6.2 (für die Grenzfälle maximaler und minimaler Rissabstand) beschriebenen Verhältnisse ein; für Zustände oberhalb des Risslastniveaus ist der Spannungszustand demnach unabhängig von der vorangegangenen Belastungsgeschichte. Für starr - ideal plastisches Verbundverhalten sind die im Risselement wirkenden Verbundkräfte von dessen Länge, nicht aber von der Grösse der auftretenden Schlüpfen abhängig, und folglich bleiben die Grössen des maximalen und des minimalen Rissabstandes im gesamten Beanspruchungsprozess unverändert:

$$s_{r0}/2 \leq s_{rm} \leq s_{r0} \quad \text{mit } s_{r0} = \frac{\emptyset f_{ct}(1-\rho)}{2\tau_{b0}\rho} \quad (6.6)$$

## 6.3 Lasteinwirkung

### 6.3.1 Elastisch-gerissene Phase

Bild 6.3 illustriert das Verhalten eines Zuggliedes mit einheitlicher Bewehrung unter monoton steigender Last im Bereich elastischer Stahldehnungen für die beiden Grenzfälle, dass sich entlang des gesamten Zuggliedes der maximal beziehungsweise der minimal mögliche Rissabstand einstellt. Es wird vorausgesetzt, dass die Betonzugfestigkeit konstant ist und der Mindestbewehrungsgehalt eingehalten wird, so dass bei Rissbildung die Fliessgrenze des Bewehrungsstahls nicht erreicht wird. Die dem abgeschlossenen Rissbild entsprechenden Spannungsverteilungen sind in Bild 6.3 (a) und (b) dargestellt, und in Bild 6.3 (c) erscheinen die beiden entsprechenden Spannungs-Dehnungs-Charakteristiken des Zuggliedes. Auf der Ordinate ist die in Rissquerschnitten auftretende maximale Stahlspannung  $\sigma_{sr}$  aufgetragen, welche für Zustände vor der Rissbildung der Stahlspannung im ideellen Querschnitt entspricht (Strecke 0A) und bei Erreichen der rissauslösenden Dehnung  $\varepsilon_{ct} = f_{ct}/E_c$  schlagartig auf die Risszugspannung  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$  ansteigt. Auf der Abszisse erscheinen die mittleren Dehnungen des Zuggliedes,  $\varepsilon_m$ , im Vergleich zu den in Rissquerschnitten auftretenden maximalen Stahldehnungen,  $\varepsilon_{sr}$ . Bei  $\varepsilon_{ct} = f_{ct}/E_c$  stellt sich schlagartig das abgeschlossene Rissbild ein, und unter den getroffenen Voraussetzungen ist im weiteren Beanspruchungsprozess keine weitere Rissbildung möglich.

Für einen beliebigen konstanten mittleren Rissabstand,  $s_{rm}$ , mit  $s_{r0}/2 \leq s_{rm} \leq s_{r0}$ , verläuft der zugehörige Spannungspfad im Bereich zwischen den Strecken CD und EF. Bei Steigerung der Last über die Risszugspannung  $\sigma_{sr0}$  hinaus verharren die Betonspannungen im Zustand, welcher bei Rissbildung aufgebaut wird (vergleiche Bild 6.3 (a) beziehungsweise (b)), mit der in Risselementmitte auftretenden maximalen Betonzugspannung der Grösse  $f_{ct}(s_{rm}/s_{r0})$ , während die Stahlspannungen auf der ganzen Zuggliedlänge gleichmässig zunehmen (die Strecken CD und EF sowie sämtliche Spannungspfade sind zu GH parallel); demnach wächst die Rissbreite in Abhängigkeit des vorliegenden mittleren Rissabstandes  $s_{rm}$  proportional dem Spannungszuwachs ( $\sigma_{sr} - \sigma_{sr0}$ ) an

$$w = \frac{s_{rm}}{E_s} \left( \sigma_{sr} - \sigma_{sr0} \cdot \frac{s_{rm}}{2s_{r0}} \right) = \frac{s_{rm}}{E_s} \left( \sigma_{sr} - \frac{s_{rm}}{2s_{r0}} \cdot \frac{f_{ct}}{\rho} [1 + \rho(n-1)] \right) \quad (6.7)$$

wobei entsprechend der Grenzen für den Rissabstand die Eingabelung

$$\frac{s_{r0}}{2E_s} \left[ \sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{4} \right] \leq w \leq \frac{s_{r0}}{E_s} \left[ \sigma_{sr} - \frac{\sigma_{sr0}}{2} \right] \quad (6.8)$$

gilt. Bild 6.3 (d) und (e) zeigt die auf den Stabdurchmesser der Bewehrung normierten Grenzen für den Rissabstand,  $s_{rm}/\emptyset$ , sowie die ihnen entsprechenden Werte der normierten Rissbreite,  $w \cdot E_s / (\emptyset \cdot f_{ct})$ , für unterschiedliche Beanspruchungsintensitäten in Abhängigkeit des geometrischen Bewehrungsgehaltes des Zuggliedes.

### 6.3.2 Plastische Phase

Nach dem Überschreiten der Fliessgrenze des Bewehrungsstahles ist in den rissnahen Bereichen an Stellen, wo plastische Stahldehnungen eingetreten sind, der abgeminderte Verbundkennwert

$\tau_{b1}$  anzusetzen, siehe Bild 6.4 (b) und (d). In der Folge findet eine ausgeprägte Lokalisierung der Stahldehnungen in den rissnahen Bereichen statt, vergleiche Bild 6.4 (f), deren Grösse einerseits von der Entwicklung der Tangentensteifigkeit der Stahlkennlinie gemäss Bild 6.4 (c) und andererseits von der infolge des Auftretens plastischer Stahldehnungen bewirkten Minderung der Verbundschubspannungen (ausgedrückt durch die Grösse von  $\tau_{b1}$ ) abhängt. Man beachte, dass im Falle des naturharten Stahles das Fliessplateau an der Stelle wo  $\sigma_s = f_{sy}$  auftritt einen Dehnungssprung im Risselement bewirkt. Der Bereich mit plastischen Stahldehnungen wächst unter monoton gesteigerter Belastung kontinuierlich gegen die Risselementmitte hin an, und bei ausreichend grosser Verfestigung des Bewehrungsstahles beziehungsweise genügend kleinem Verbundkennwert  $\tau_{b1}$  kann sogar ein voll plastifizierter Zustand (der Bewehrung) erreicht werden,

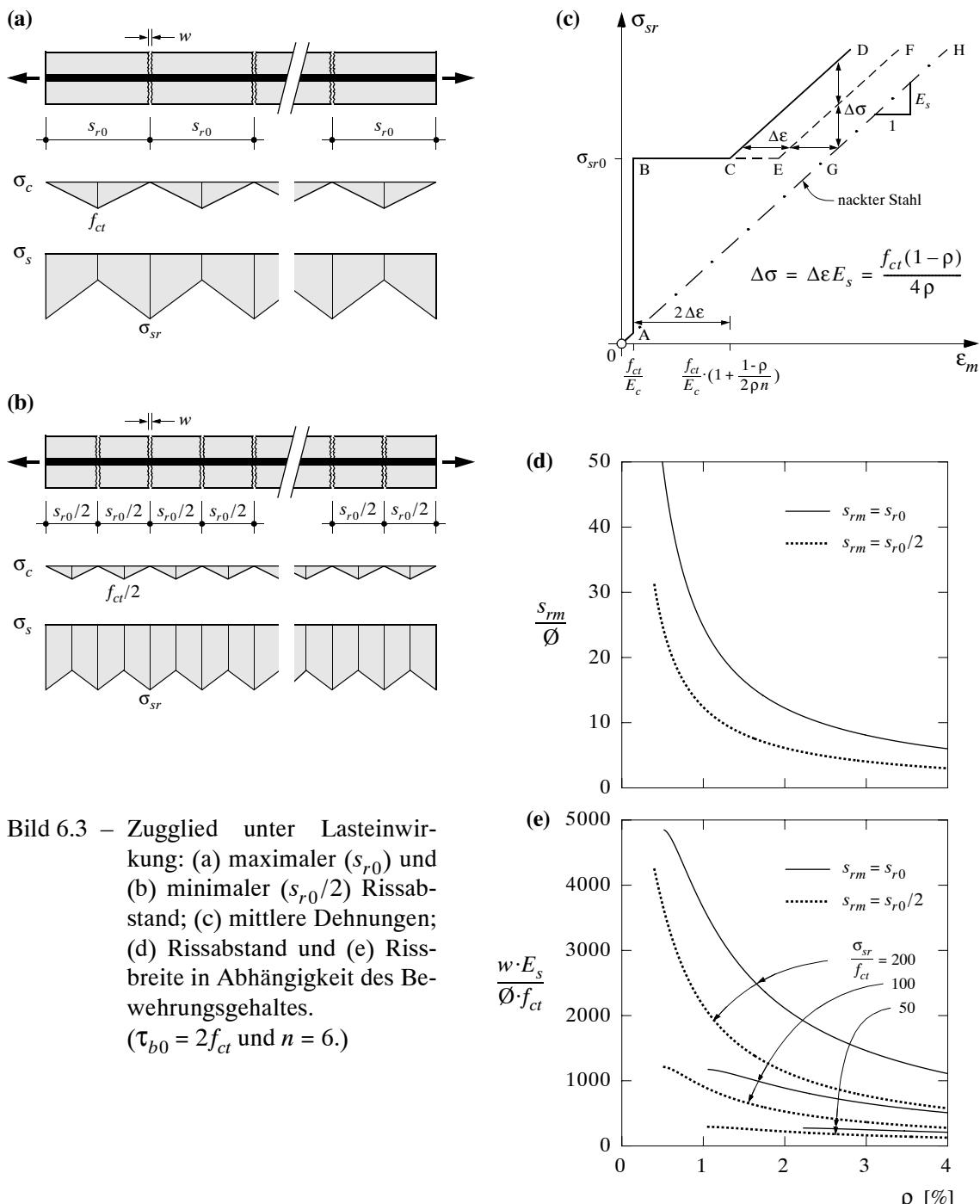


Bild 6.3 – Zugglied unter Lasteinwirkung: (a) maximaler ( $s_{r0}$ ) und (b) minimaler ( $s_{r0}/2$ ) Rissabstand; (c) mittlere Dehnungen; (d) Rissabstand und (e) Rissbreite in Abhängigkeit des Bewehrungsgehaltes.  
( $\tau_{b0} = 2f_{ct}$  und  $n = 6$ .)

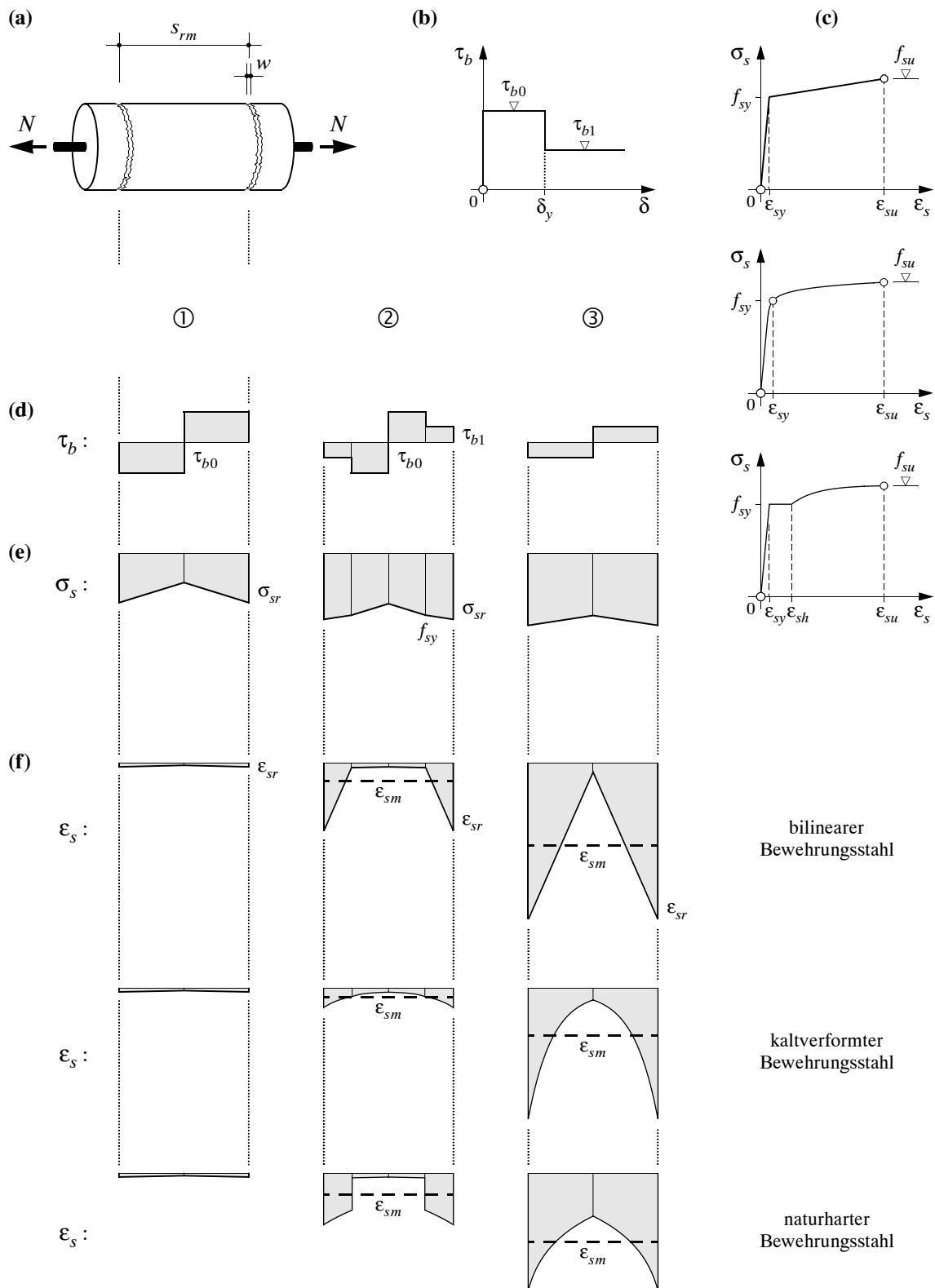


Bild 6.4 – Zuggurtmodell: (a) Symmetrisch belastetes Risselement; (b) Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung; (c) Stoffgesetze für bilinearen, kaltverformten und naturharten Bewehrungsstahl; Entwicklung (d) der Verbundspannungen, (e) der Stahlspannungen und (f) der Stahldehnungen.

was (bei genügender Tangentensteifigkeit der Stahlkennlinie) das Verformungsvermögen des Zuggliedes erheblich zu steigern vermag. Die Beschreibung des Verformungsverhaltens des Zuggliedes erfolgt durch Betrachtung des Gleichgewichtes am Bewehrungsstab und Integration der Stahldehnungsverteilungen, die den daraus abgeleiteten Stahlspannungsverläufen entsprechenden.

### 6.3.3 Spannungs-Dehnungs-Charakteristik und Verformungsvermögen des Zuggliedes

Unter Voraussetzung eines Bewehrungsstahles mit bilinearem Stoffgesetz ergeben sich gemäss dem Zuggurtmodell für die drei in Bild 6.4 (d) bis (f) illustrierten Regime folgende, eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung des gerissenen Zuggliedes darstellenden Ausdrücke [101, 2, 3]

$$\textcircled{1} \quad \epsilon_{sm} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \frac{\tau_{b0}s_{rm}}{E_s\emptyset} \quad \text{für } \sigma_{sr} \leq f_{sy} \quad (6.9)$$

$$\textcircled{2} \quad \epsilon_{sm} = \frac{(\sigma_{sr} - f_{sy})^2 \emptyset}{4E_{sh}\tau_{b1}s_{rm}} \cdot \left(1 - \frac{E_{sh}\tau_{b0}}{E_s\tau_{b1}}\right) + \frac{(\sigma_{sr} - f_{sy})}{E_s} \cdot \frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} + \left(\epsilon_{sy} - \frac{\tau_{b0}s_{rm}}{E_s\emptyset}\right) \quad \text{für } f_{sy} \leq \sigma_{sr} \leq \left(f_{sy} + \frac{2\tau_{b1}s_{rm}}{\emptyset}\right) \quad (6.10)$$

$$\textcircled{3} \quad \epsilon_{sm} = \frac{(\sigma_{sr} - f_{sy})}{E_{sh}} + \left(\epsilon_{sy} - \frac{\tau_{b1}s_{rm}}{E_{sh}\emptyset}\right) \quad \text{für } \left(f_{sy} + \frac{2\tau_{b1}s_{rm}}{\emptyset}\right) \leq \sigma_{sr} \leq f_{su} \quad (6.11)$$

Die für kaltverformte und naturharte Bewehrungsstäbe geltenden Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des gerissenen Zuggliedes sind in [3] angegeben. Man beachte, dass ein voll plastifizierter Zustand (Regime ③) nur unter Verwendung von Bewehrungsstäben mit ausreichender Verfestigung erreicht wird,  $(f_{su}/f_{sy}) \geq [1 + 2\tau_{b1}s_{rm}/(f_{sy}\emptyset)]$ ; für geringere Werte der Stahlverfestigung tritt der Bruchzustand im Regime ② ein, in einem nur teilweise plastifizierten Zustand der Risselemente.

In Bild 6.5 (a) und (b) sind die gemäss dem Zuggurtmodell für minimalen und maximalen Rissabstand geltenden Spannungs-Dehnungs-Charakteristiken eines einheitlich mit einem naturharten Bewehrungsstahl bewehrten Zuggliedes für Lastbeanspruchung dargestellt. Bild 6.5 (c) zeichnet für sämtliche Beanspruchungszustände  $\epsilon_{sr}$  das Verhältnis zwischen den mittleren Dehnungen des Zuggliedes und den in Rissquerschnitten vorliegenden maximalen Dehnungen,  $\epsilon_{sm}/\epsilon_{sr}$ , auf. Die Entwicklung dieses von Bachmann [8] als Verbundkoeffizient bezeichneten Quotienten visualisiert auf anschauliche Weise den im Verlauf des Belastungsprozesses veränderlichen Grad der Verformungslokalisierung; das Verhältnis  $\epsilon_{sm}/\epsilon_{sr}$  fällt um so kleiner aus, je stärker die Stahldehnungen entlang des Risselementes schwanken und je konzentrierter diese dementsprechend in den rissnahen Bereichen erscheinen. Insofern kann das Verhältnis  $\epsilon_{sm}/\epsilon_{sr}$  als direktes Mass für die durch die Verbundwirkung verursachte Minderung des Verformungsvermögens des nackten Bewehrungsstahles verstanden werden.

Bei Betrachtung eines gerissenen Zuggliedes mit finiten Rissabständen und Bewehrungsstahl in verschieblichem Verbund gilt für den Verbundkoeffizienten stets  $0 < \epsilon_{sm}/\epsilon_{sr} < 1$ , während sowohl im ungerissenen Zustand oder für Bewehrungen ohne Verbund als auch für die idealisierten Vorstellungen eines starren Verbundes beziehungsweise unendlich kleiner Rissabstände der Grenzfall  $\epsilon_{sm}/\epsilon_{sr} = 1$  vorliegt und der Betrachtung des Verbundkoeffizienten demzufolge keine tiefere Bedeutung zukommt. Einen weiteren Spezialfall bildet das Zugglied mit nicht verfestigenden, das heisst ideal plastischen und in verschieblichem Verbund wirkenden Stahleinlagen. Die nach Fliessbeginn eintretenden plastischen Stahldehnungen im Rissquerschnitt zuzüglich einer allfälligen vorhandenen, unmittelbar am Riss angrenzenden verbundlosen Strecke werden

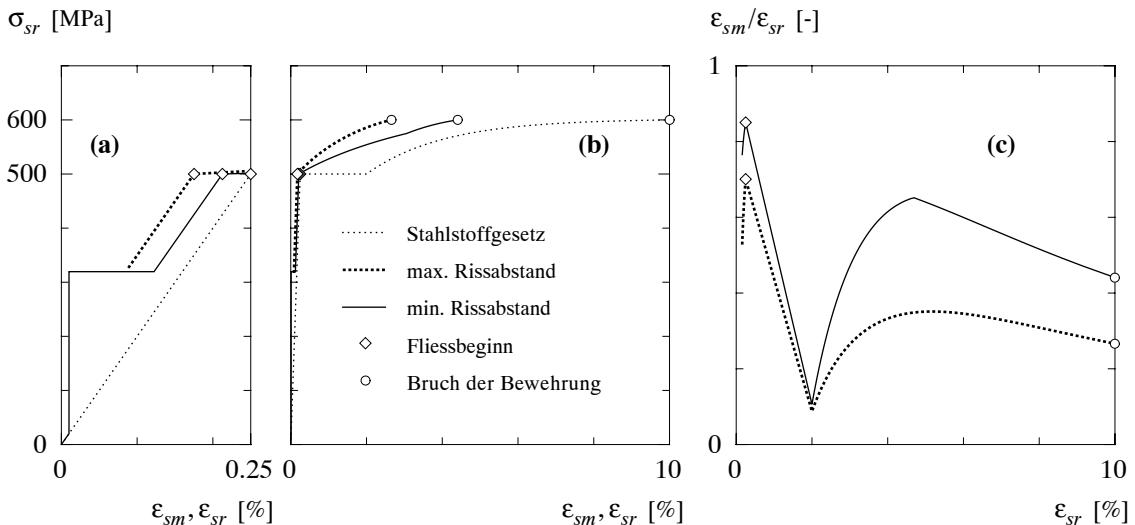


Bild 6.5 – Stahlbetonzugglied: (a) Mittlere Dehnungen bis Fliessbeginn und (b) im Verfestigungsbereich für minimalen und maximalen Rissabstand; (c) Verformungslokalisierung ( $\emptyset = 16$  mm,  $\rho = 1\%$ ,  $f_{ct} = 3$  MPa =  $\tau_{b1} = \tau_{b0}/2$ ,  $n = 6.7$ ).

lokalisiert, während für die Stahldehnungen entlang des Risselementes der Zustand bei Fliessbeginn eingeprägt bleibt. Dies bedeutet, dass für Bewehrungsstäbe ohne Verfestigung, bei Betrachtung finiter Rissabstände, keine plastischen Stahldehnungen in Bereichen mit verschieblichem Verbund möglich sind; die zusätzliche Verlängerung des Zuggliedes ab Fliessbeginn ist demnach verschwindend klein und das Verformungsvermögen des Zugglieds entsprechend stark eingeschränkt. Diese Betrachtung zeigt, dass nebst des Dehnvermögens des Bewehrungsstahles,  $\varepsilon_{su}$ , auch dessen Verfestigungseigenschaften,  $(f_{su}/f_{sy})$ , von entscheidender Bedeutung für das Verformungsvermögen des Verbundwerkstoffs Stahlbeton bei Zugbeanspruchung sind.

Gemäss Bild 6.5 (c) nimmt das Verhältnis  $\varepsilon_{sm}/\varepsilon_{sr}$  in der elastisch-gerissenen Phase verhältnismässig grosse Werte an, wobei diese vom Zustand der Rissbildung bis Fliessbeginn stetig anwachsen. Dies entspricht der im elastischen Bereich geringen und mit steigender Beanspruchung, relativ zur Verformungscharakteristik des nackten Bewehrungsstahles gesehen, allmählich abnehmenden Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen. Nach dem Überschreiten der Fliessgrenze des Bewehrungsstahles findet als Folge der markanten Abnahme der Tangentensteifigkeit der Stahlkennlinie eine ausgeprägte Lokalisierung der Stahldehnungen in den rissnahen Bereichen statt, was sich in einem starken Abfall des Verbundkoeffizienten bemerkbar macht; die verstieifende Mitwirkung des Betons auf Zug nimmt in diesem Stadium, relativ zur Verformungscharakteristik des nackten Bewehrungsstahls gesehen, sehr stark zu. Die weitere Entwicklung des Verhältnisses  $\varepsilon_{sm}/\varepsilon_{sr}$  wird von der Form der Stahlkennlinie im Verfestigungsbereich sowie von der Grösse der auftretenden Verbundkräfte beeinflusst, einschliesslich deren Minderung bei Steigerung der plastischen Stahldehnungen. Für das dem Bild 6.5 (c) zugrundeliegende Fallbeispiel ist nach Verfestigungsbeginn zunächst eine allmähliche Abnahme der Lokalisierung der Stahldehnungen festzustellen; mit dem Nahen des Bruchzustandes ergibt sich dann aber aufgrund der stark abnehmenden Tangentensteifigkeit der Stahlkennlinie eine erneute Steigerung der Verformungslokalisierung.

Bild 6.6 zeigt einen Vergleich der gemäss dem Zuggurtmodell für unterschiedliche Verfestigungscharakteristiken (bilineare, kaltverformte und naturharte) aber gleich grosse Duktilitätskennwerte  $\varepsilon_{su}$  und  $f_{su}/f_{sy}$  des Bewehrungsstahles ermittelten Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des Zuggliedes und der entsprechenden Entwicklungen der Verformungslokalisierung. Wie

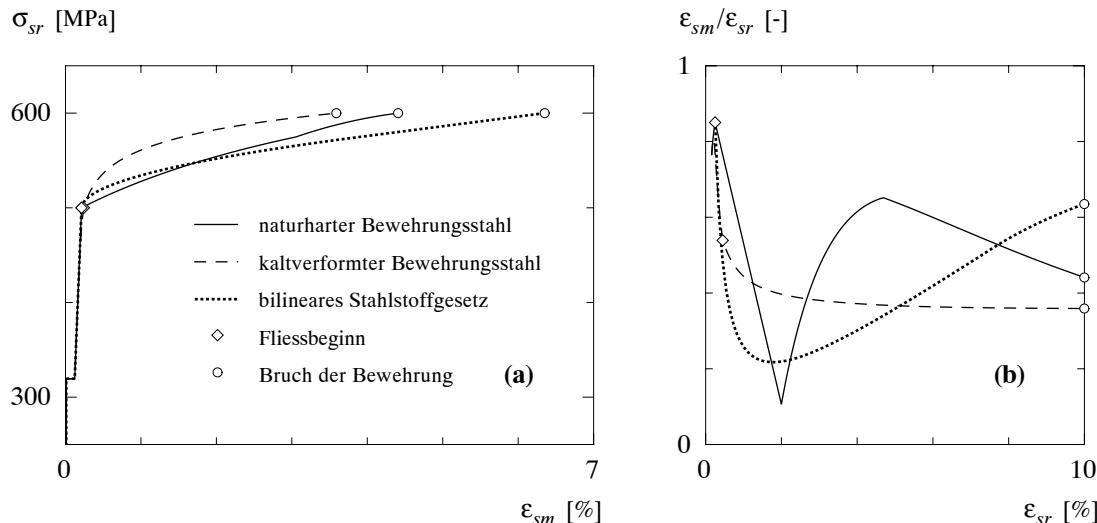


Bild 6.6 – Einfluss der Verfestigungscharakteristik des Bewehrungsstahls auf das Verformungsverhalten im plastischen Bereich: (a) Spannungs-Dehnungs-Charakteristik des Zugglieds; (b) Verformungslokalisierung.

man sieht, ist das Verformungsverhalten im Bereich plastischer Stahldehnungen sehr stark von der Verfestigungscharakteristik der Stahlkennlinie abhängig, wobei sich die Kurven für das bilineare und das kaltverformte Stahlstoffgesetz für abnehmende  $\epsilon_{su}$  gegenseitig immer mehr annähern würden. Für die Bild 6.6 zugrundeliegenden Parameter ist das Verformungsvermögen beim Bruch für das kaltverformte und das naturharte Stahlstoffgesetz ungefähr gleich gross, wohingegen das bilineare Stahlstoffgesetz eine bedeutend grössere Bruchverformung vorhersagt. Dies ist darin begründet, dass das bilineare Stahlstoffgesetz der im Verfestigungsbereich auftretenden, ausgeprägten Abnahme der Tangentensteifigkeit nicht Rechnung trägt; die Idealisierung von hochduktilen Bewehrungsstählen durch ein bilineares Stahlstoffgesetz führt deswegen in der Regel zu einer Überschätzung des Verformungsvermögens. Die Diagramme für die Verformungslokalisierung zeigen das grundsätzlich unterschiedliche Verhalten eines naturharten und eines kaltverformten Bewehrungsstahles im Verbund im Bereich plastischer Stahldehnungen auf; während für einen naturharten Stahl zunächst eine ausgeprägte Entspannung der Verformungslokalisierung und mit zunehmender plastischer Dehnung eine Umkehr zu erneuter verbundbedingter Minderung des Verformungsvermögens zu erkennen ist, stellt man für einen kaltverformten Bewehrungsstahl fest, dass das Ausmass der Verformungslokalisierung im Verfestigungsbereich etwa gleichbleibend gross ist und – aufgrund des relativ hoch gewählten Wertes der Bruchdehnung – sogar kontinuierlich leicht abgebaut wird.

Gemäss dem Zuggurtmodell lassen sich folgende Aussagen über das Verformungsverhalten eines gerissenen Zuggliedes machen. Der Stabdurchmesser der Bewehrung,  $\varnothing$ , hat für eine feste Grösse des Rissabstandes einen grossen Einfluss auf die Verformungen des Zuggliedes; falls hingegen eine direkte Abhängigkeit des Rissabstandes vom Stabdurchmesser entsprechend der Beziehung (6.6) vorausgesetzt wird, ist die Verfestigungscharakteristik des Zuggliedes (für beliebige  $s_{r0}/2 \leq s_{rm} \leq s_{r0}$ ) unabhängig von der Grösse des Stabdurchmessers. Umgekehrt besteht eine Abhängigkeit des Verformungsverhaltens vom Bewehrungsgehalt  $\rho$  nur für den Fall, dass sich der Rissabstand dem Bewehrungsgehalt entsprechend einstellt, während für eine fest vorgegebene Grösse des Rissabstandes, wie sie zum Beispiel durch eine Querbewehrung bewirkt werden kann, das Verformungsverhalten unabhängig von der Grösse von  $\rho$  ist. Der Einfluss der Betonfestigkeit  $f_c$  ist bei von ihr unabhängig angenommenem Rissabstand und insbesondere für verhältnismässig kleine Rissabstände praktisch unbedeutend. Die Grösse des sich einstellenden

Rissabstandes  $s_{rm}$  hat in jedem Fall einen ausgesprochen grossen Einfluss auf das Verformungsverhalten und -vermögen des Zuggliedes; die Verformungen des Zuggliedes nehmen mit grösser werdendem Rissabstand stark ab. Da sich der Rissabstand zwar innerhalb der exakt festlegbaren Schranken (6.6), ansonsten aber in beliebiger Grösse einstellen kann, ist eine Vorhersage der Verformungen des Stahlbetonzuggliedes stets mit einer bedeutenden Unsicherheit verbunden.

## 6.4 Zwangbeanspruchung

### 6.4.1 Allgemeines

Bei der Analyse des Spannungszustandes eines Tragwerkes sind neben den Schnittkräften aus Lasteinwirkung auch Zwangbeanspruchungen zu berücksichtigen, welche sich infolge dem Tragsystem aufgezwungener und durch dieses behinderter Verformungen ergeben. Ursachen für aufgezwungene Verformungen sind unter anderem Lager- oder Baugrundverschiebungen, Temperaturänderungen sowie die in der Bauausführung unvermeidbaren Abweichungen der Tragwerksgeometrie vom planmässigen Zustand. In der Regel ist die Grösse der tatsächlich auftretenden Zwangbeanspruchungen kaum zuverlässig abschätzbar. Eine zusätzlich zu einer Lasteinwirkung vorliegende Zwangbeanspruchung beeinflusst das Trag- und Verformungsverhalten des Bauteils im gesamten Beanspruchungsbereich. Bei ideal plastischem, ausreichend duktilem Bruchverhalten ist die Traglast von den Zwangbeanspruchungen unabhängig. Hingegen tritt eine Abhängigkeit der Bruchlast von den Zwangbeanspruchungen in Erscheinung für den Fall, dass eine (in entsprechend ausreichendem Masse) eingeschränkte Duktilität der plastischen Gelenkbereiche vorliegt.

Im Stahlbetonbau sind Zwangbeanspruchungen unter anderem in Zusammenhang mit der Festlegung der Mindestbewehrung von Bedeutung. Eine Mindestbewehrung sollte in erster Linie als Mittel zur Vermeidung eines Versagens ohne Vorankündigung bei Erstrissbildung aufgefasst werden; zusätzlich dient sie in Form einer Begrenzung der Rissbreiten aber auch der Gebrauchsstauglichkeit, siehe Kapitel 10. Für die Erfassung der Grösse einer Zwangbeanspruchung in Stahlbetonbauteilen sind, abgesehen von der grundlegenden Thematik der Gesetzmässigkeiten des verschieblichen Verbundes, folgende, miteinander zusammenhängende Fragenkreise von besonderem Interesse: Steifigkeitsverhältnisse im Bauteil, darin auftretende Dehnungsgradienten infolge Wärme- und Feuchtediffusion bei Temperatur- beziehungsweise Schwindeinwirkungen, Entwicklung des Schwindmasses, des Elastizitätsmoduls und der Zugfestigkeit des Betons sowie dessen Entfestigungsverhalten unter Zugbeanspruchung.

Im vorliegenden Kapitel wird ein mechanisches Modell für die Beschreibung des Trag- und Verformungsverhaltens von Bauteilen unter einachsiger Zwangbeanspruchung vorgestellt, welches auf folgenden, zum Teil sehr stark vereinfachenden Annahmen gründet: sowohl die durch Temperatur- oder Schwindeinwirkung aufgezwungenen Dehnungen als auch die Materialeigenschaften sind quer zur Beanspruchungsrichtung sowie entlang des betrachteten Zuggliedes (gleichbleibende Grösse des Querschnitts vorausgesetzt) konstant verteilt; der Betonquerschnitt reisst jeweils augenblicklich vollständig auf und ist fortan spannungsfrei; im Rissbildungsprozess liegt ein linear elastisches Verhalten des Betons und des Bewehrungsstahles vor; die Risse treten in einem konstanten Abstand zueinander auf; in ungerissenen Bereichen wird starrer und in gerissenen Bereichen wird verschieblicher, ideal plastischer Verbund gemäss Bild 5.16 (c) vorausgesetzt. Es wird unterschieden zwischen "Äusserem Zwang", welcher infolge einer aufgezwungenen äusseren Verschiebung oder bei Behinderung einer temperaturbedingten Verkürzung auftritt, und "Innerem Zwang", der bei Behinderung einer durch das Schwinden des Betons erzwungenen Verkürzung entsteht.

#### 6.4.2 Äusserer Zwang

In Bild 6.7 ist das Verhalten eines Zuggliedes unter äusserem Zwang dargestellt. Bild 6.7 (a) zeigt schematisch ein Zugglied der Länge  $l$ , dessen rechtes Ende einer von aussen aufgezwungenen, monoton gesteigerten Lagerverschiebung  $\epsilon_e \cdot l$  unterworfen ist. Die Behinderung dieser Verschiebung führt zu einer Zwangbeanspruchung, welche sich in einer entlang des Zuggliedes konstanten Normalkraft,  $N = N(\epsilon_e)$ , äussert. Bei einer Zwangsverlängerung des Betrages  $l \cdot f_{ct}/E_c$  entsteht unter der zugehörigen, die Grösse der Risszugkraft  $N_r$  annehmenden Zwangszugkraft ein erster Riss, und als Folge der dadurch bewirkten Abnahme der Stabsteifigkeit fällt die Zwangszugkraft schlagartig auf einen vorerst unbekannten Wert,  $N < N_r$ , ab. Bei weitergehender Zwangsverlängerung steigt die Zugbeanspruchung entsprechend der neu vorliegenden Steifigkeit wieder an, bis in einem nächsten kritischen Querschnitt die Betonzugfestigkeit erreicht wird, und so weiter. Ort und Reihenfolge des Auftretens der Risse sind zufällig, für das abgeschlossene Rissbild gilt jedoch in jedem Fall wieder  $s_{r0}/2 \leq s_{rm} \leq s_{r0}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im folgenden angenommen, dass die Risse der Reihe nach von links nach rechts im maximal möglichen Abstand  $s_{rm} = s_{r0}$  entstehen. In Bild 6.7 (b) ist die Verteilung der Beton- und Stahlspannungen für aufeinanderfolgende Rissbildungszustände dargestellt, und Bild 6.7 (c) zeigt die Entwicklung der Stahlspannung im ersten Riss.

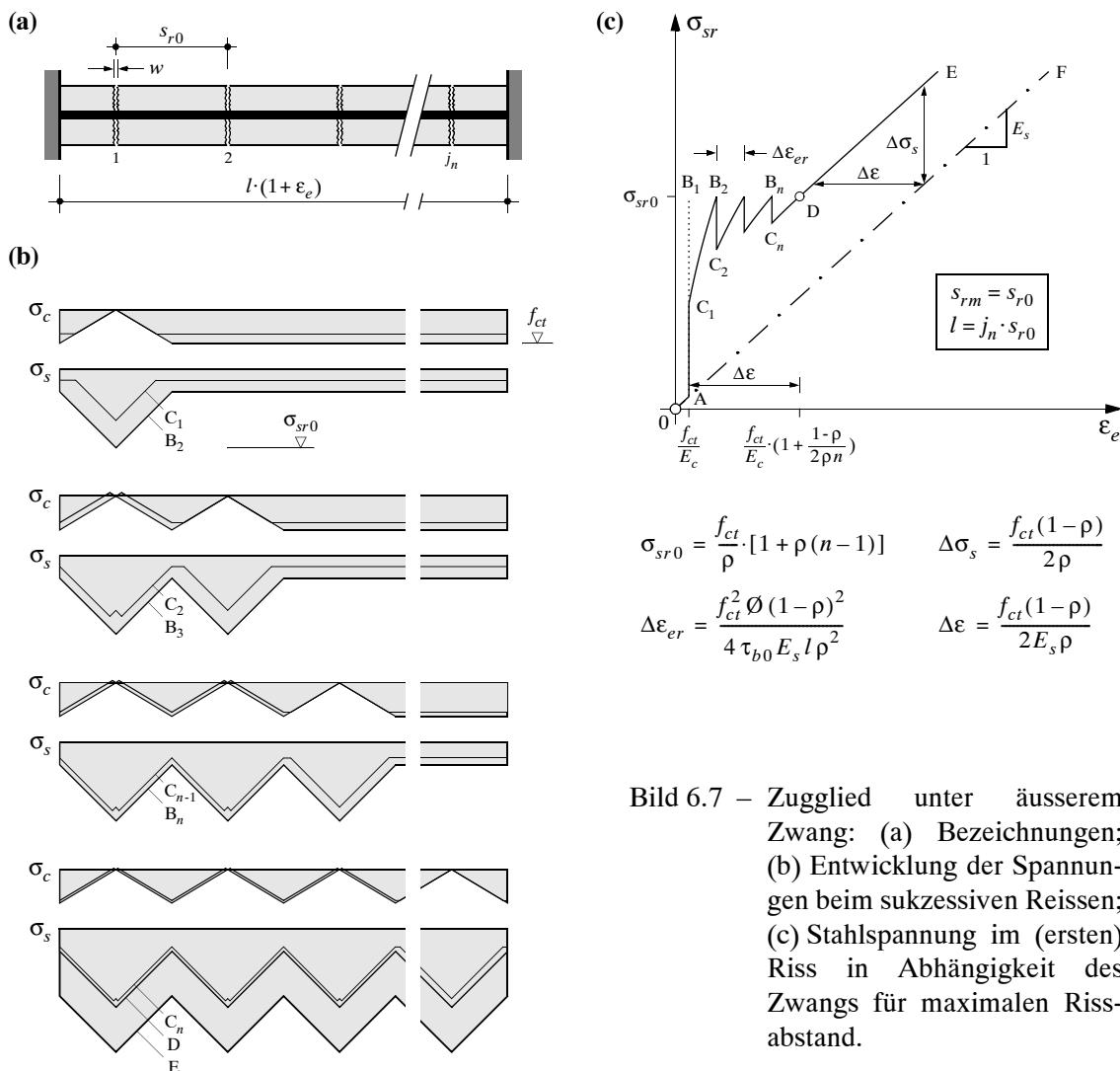


Bild 6.7 – Zugglied unter äusserem Zwang: (a) Bezeichnungen; (b) Entwicklung der Spannungen beim sukzessiven Reissen; (c) Stahlspannung im (ersten) Riss in Abhängigkeit des Zwangs für maximalen Rissabstand.

Die in der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik gemäss Bild 6.7 (c) zwischen zwei Rissbildungszuständen zu verzeichnenden, parabelförmigen Kurvenverläufe  $C_j B_{j+1}$  können näherungsweise mit der Beziehung

$$\sigma_{sr} = \frac{2 l n \rho \tau_{b0} [1 + \rho(n-1)]}{j \emptyset (1-\rho)^2} \left( \sqrt{1 + \frac{j \emptyset E_c \epsilon_e (1-\rho)^2}{ln \rho^2 \tau_{b0}}} - 1 \right) \quad (6.12)$$

beschrieben werden, wobei  $j = 1, 2, \dots j_n$  die jeweils vorliegende, sukzessive gesteigerte Anzahl Risse bezeichnet. Man beachte, dass bei Bildung des ersten Risses die im Rissquerschnitt auftretende Stahlspannung,  $\sigma_{sr}$ , in jedem Fall kleiner ist als die Risszugspannung  $\sigma_{sr0}$ , das heisst der Punkt  $B_1$  in Bild 6.7 (c) wird nicht erreicht; die im Rissbildungsprozess maximale Grösse der Stahlbeanspruchung,  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$ , stellt sich erstmals unmittelbar vor der Bildung des zweiten Risses im Erstriss ein, dargestellt durch Punkt  $B_2$  in Bild 6.7 (c).

Risse entstehen (im maximal möglichen Rissabstand) jeweils nach Dehnungssinkrementen

$$\Delta \epsilon_{er} = \frac{f_{ct}^2 \emptyset (1-\rho)^2}{4 \tau_{b0} E_s l \rho^2} = \frac{s_{r0}^2 \tau_{b0}}{\emptyset E_s l} \quad (6.13)$$

Die im Laufe des Rissbildungsprozesses maximale Grösse der Rissbreite

$$w_{max} = \frac{f_{ct}^2 \emptyset (1-\rho) [1 + \rho(n-1)]}{4 E_s \rho^2 \tau_{b0}} = \frac{s_{r0} \sigma_{sr0}}{2 E_s} \quad (6.14)$$

tritt jeweils unmittelbar vor der Bildung eines nächsten Risses auf, d.h. für die Punkte  $B_{j+1}$  in Bild 6.7 (c) und zwar für Werte der Zwangsverlängerung von  $\epsilon_e = f_{ct}/E_c + j \cdot \Delta \epsilon_{er}$ . Die maximale Rissbreite  $w_{max}$  entspricht dem mit  $s_{rm} = s_{r0}$  und  $\sigma_{sr} = \sigma_{sr0}$  aus der für Lasteinwirkung geltenden Beziehung (6.7) resultierenden Wert. Das abgeschlossene Rissbild, Punkt D in Bild 6.7 (c), ist erreicht, wenn auf der ganzen Zuggliedlänge verschieblicher Verbund herrscht. Der nach Abschluss des Rissbildungsprozesses beschrittene Spannungspfad ist, unter Voraussetzung gleicher Material- und Verbundkennwerte sowie gleicher Rissabstände, identisch demjenigen für Lasteinwirkung.

#### 6.4.3 Innerer Zwang

In Bild 6.8 ist das Verhalten eines Zuggliedes unter äusserem Zwang dargestellt. Bild 6.8 (a) zeigt schematisch ein Zugglied der Länge  $l$ , das eine durch das Schwinden des Betons,  $\epsilon_i$ , bewirkte, monoton gesteigerte Verkürzung erfährt. Die starre Lagerung der Endquerschnitte des Zuggliedes behindert die Schwindverkürzung, und infolgedessen baut sich eine innere Zwangbeanspruchung,  $N = N(\epsilon_i)$ , auf. Im ungerissenen Stadium werden dadurch Betonzugspannungen erzeugt, während der Stahl vorerst spannungsfrei bleibt. Bei einem Schwindmass des Betrages  $f_{ct}/E_c$  entsteht unter der zugehörigen, die Grösse der Risszugkraft  $N_r$  annehmenden Zwangszugkraft ein erster Riss, und als Folge der dadurch bewirkten Abnahme der Stabsteifigkeit fällt die Zwangszugkraft schlagartig auf einen vorerst unbekannten Wert,  $N < N_r$ , ab; im Eintragungsbereich des Erstrisses treten Stahlzugspannungen auf, und demnach müssen in den Bereichen mit ideellen Querschnitten Stahldruckspannungen vorliegen, siehe Bild 6.8 (b), damit die Verträglichkeitsbedingung, dass die Bewehrung keine Längenänderung erfährt, eingehalten ist. Bei weitergehender Schwindverkürzung steigt die Zugbeanspruchung entsprechend der neu vorliegenden Steifigkeit wieder an, bis in einem nächsten kritischen Querschnitt die Betonzugfestigkeit erreicht wird, und so weiter. Ort und Reihenfolge des Auftretens der Risse sind zufällig, für das abgeschlossene Rissbild gilt jedoch in jedem Fall wieder  $s_{r0}/2 \leq s_{rm} \leq s_{r0}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird im folgenden wiederum angenommen, dass die Risse der Reihe nach von

links nach rechts im maximal möglichen Abstand  $s_{rm} = s_{r0}$  entstehen, siehe Bild 6.8 (a) und (b). In Bild 6.8 (b) ist die Verteilung der Beton- und Stahlspannungen für aufeinanderfolgende Rissbildungszustände dargestellt, und Bild 6.8 (c) zeigt die Entwicklung der Stahlspannung im ersten Riss.

Die in der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik gemäss Bild 6.8 (c) zwischen zwei Rissbildungszuständen zu verzeichnenden, parabelförmigen Kurvenverläufe  $C_j B_{j+1}$  können näherungsweise mit der Beziehung

$$\sigma_{sr} = \frac{2 \ln \rho \tau_{b0} [1 + \rho(n-1)]}{j \bar{\rho} (1-\rho)^2} \left( \sqrt{1 + \frac{j \bar{\rho} E_c \varepsilon_i (1-\rho)^2}{\ln \rho^2 \tau_{b0}}} - 1 \right) - E_s \varepsilon_i \quad (6.15)$$

beschrieben werden, wobei  $j = 1, 2, \dots, j_n$  wiederum die jeweils vorliegende, sukzessive gesteigerte Anzahl Risse bezeichnet. Die Beziehung (6.15) entspricht der rechterhand um den Ausdruck  $-E_s \cdot \varepsilon_i$  ergänzten, für äusseren Zwang geltenden Gleichung (6.12). Folglich kann der in Bild 6.8 (c) dargestellte, einen inneren Zwang beschreibende Spannungspfad aus der in Bild 6.7 (c) aufgezeichneten, einem äusseren Zwang entsprechenden Spannungs-Dehnungs-Charakteristik direkt abgeleitet werden, indem sämtliche Ordinaten um den jeweiligen Abzugswert  $E_s \cdot \varepsilon_i$  reduziert werden. Konsequenterweise ist auch bei innerem Zwang die Grösse der Zunahme der Schwindverkürzung  $\Delta\varepsilon_{ir}$ , welche jeweils zur Bildung eines nächsten Risses führt, durch die Beziehung (6.13) gegeben. Man erkennt, dass bei innerem Zwang, ab dem Zustand der Bildung

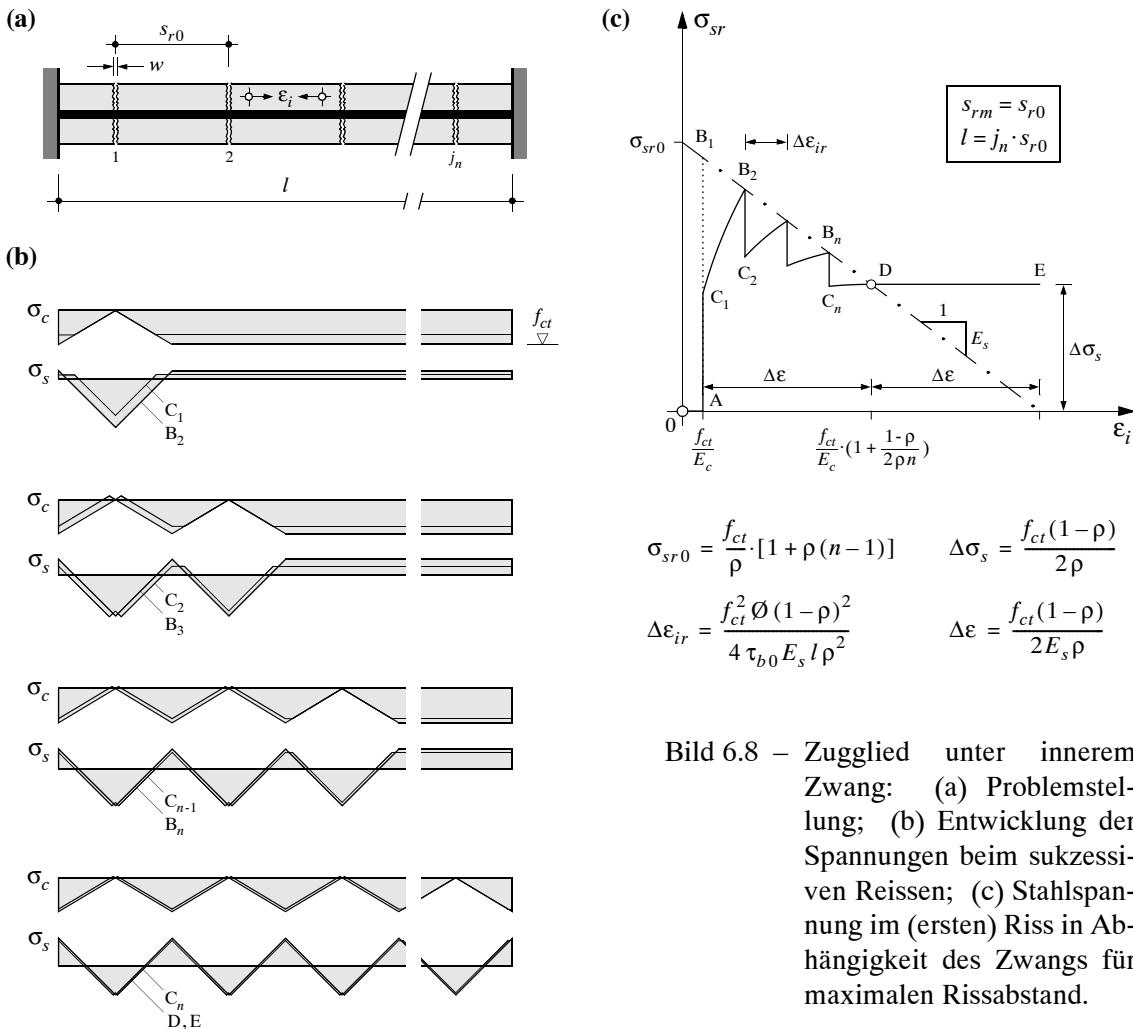


Bild 6.8 – Zugglied unter innerem Zwang: (a) Problemstellung; (b) Entwicklung der Spannungen beim sukzessiven Reissen; (c) Stahlspannung im (ersten) Riss in Abhängigkeit des Zwangs für maximalen Rissabstand.

des zweiten Risses und bis zum Erreichen des abgeschlossenen Rissbildes, eine sukzessive, gleichmässige Abnahme der bei Entstehung eines neuen Risses auftretenden relativen Maxima der Stahlspannungen und dementsprechend auch der Normalkraftbeanspruchung zu beobachten ist. Die grösstmögliche Stahlspannung bei innerem Zwang tritt demnach unmittelbar vor der Bildung des zweiten Risses im Erstrissquerschnitt auf, Punkt B<sub>2</sub> in Bild 6.8 (c), und sie beträgt

$$\sigma_{srmax} = f_{ct} \left[ \frac{1}{\rho} - 1 - \frac{\emptyset f_{ct} (1-\rho)^2}{4 l \rho^2 \tau_{b0}} \right] \quad (6.16)$$

Beim Erreichen des abgeschlossenen Rissbildes nehmen die Stahlspannungen in den Rissquerschnitten den Wert  $\sigma_{sr} = f_{ct} \cdot (1-\rho)/(2\rho) = s_{r0} \cdot \tau_{b0} / \emptyset$  an; bei einer darüber hinaus weitergehenden Schwindverkürzung bleiben diese eingeprägt, und es findet lediglich eine zunehmende, gleichmässige Verkürzung der einzelnen Betonabschnitte, welche je ein Risselement bilden, sowie eine entsprechende Vergrösserung der Rissbreiten statt, wohingegen der Spannungszustand im Zugglied unverändert bleibt.

Die bei innerem Zwang sich einstellenden Rissbreiten sind in jedem Zustand  $\epsilon_i$  gleich gross wie die für einen entsprechenden äusseren Zwang  $\epsilon_e = \epsilon_i$  auftretenden; bei innerem Zwang werden zwar für zunehmende Schwindverkürzung die Stahlspannungen und folglich der Schlupf der Bewehrung im Rissquerschnitt immer kleiner, die Grösse der Schwindverkürzung des Betons im Eintragungsbereich eines Risses nimmt jedoch in demselben Massen kontinuierlich zu, so dass die resultierende Rissbreite den exakt gleich grossen Wert wie bei einer entsprechenden äusseren Zwangbeanspruchung annimmt. Für die im Laufe des Rissbildungsprozesses maximale Grösse der Rissbreite, die jeweils unmittelbar vor der Bildung eines nächsten Risses auftritt, Punkte B<sub>j+1</sub> in Bild 6.7 (c), gilt demnach wiederum Beziehung (6.14).

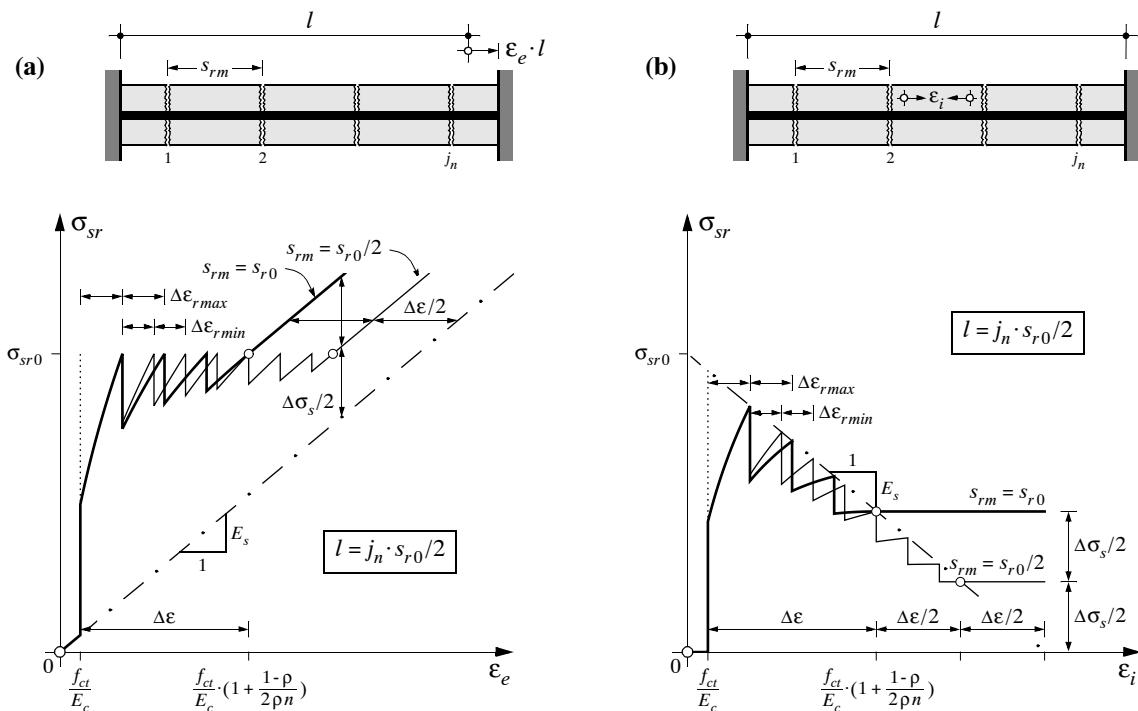


Bild 6.9 – Zugglied mit Länge  $l = 4s_{r0}$  unter Zwangbeanspruchung: Stahlspannungen für maximal und minimal möglichen Rissabstand bei (a) äusserem und (b) innerem Zwang; vergleiche Bilder 6.7 (c) und 6.8 (c).

Bild 6.9 zeigt einen Vergleich der Spannungspfade für zwei identische Zugglieder der Länge  $l = 4s_{r0}$ , welche äusserem beziehungsweise innerem Zwang unterworfen sind. Vorausgesetzt werden konstante, entweder maximal oder minimal mögliche Rissabstände; die für minimalen Rissabstand geltenden, den Gleichungen (6.12) bis (6.15) entsprechenden Beziehungen findet man in [3]. Für ungleichmässige Rissabstände stellen sich Beanspruchungscharakteristiken ein, die im Bereich, welcher von den Spannungspfaden für die beiden Grenzfälle  $s_{rm} = s_{r0} = \text{konstant}$  und  $s_{rm} = s_{r0}/2 = \text{konstant}$ , umrissen wird, verlaufen. Für praktisch vorkommende Grössen einer Zwangsverlängerung beziehungsweise einer behinderten Schwindverkürzung sowie für übliche Bewehrungsgehalte wird in Zuggliedern mit Bauteilgrösse in der Regel kein abgeschlossenes Rissbild erreicht.

## 6.5 Vorgespannte Zugglieder

### 6.5.1 Allgemeines

Spannbetonzugglieder zeigen vom lastfreien, initial vorgespannten Zustand bis zum Zustand unmittelbar vor der Erstrissbildung ein nahezu linear elastisches, der Steifigkeit des ideellen Querschnitts entsprechendes Verhalten. Ab dem Zustand der Erstrissbildung müssen die unterschiedlichen Verbundeigenschaften  $\tau_{bs}(\delta_s)$  und  $\tau_{bp}(\delta_p)$  der schlaffen und der vorgespannten Bewehrung berücksichtigt werden, welche entlang der in verschieblichem Verbund befindlichen Bereiche unterschiedliche Spannungsgradienten in den beiden Bewehrungseinlagen bewirken, siehe Bild 6.10. Die in Rissquerschnitten auftretenden maximalen Stahlspannungen ergeben sich, unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Verbundgesetzmässigkeiten der schlaffen und der vorgespannten Bewehrung, aus der Verträglichkeitsbedingung, dass beide Bewehrungseinlagen dieselbe mittlere Dehnung beziehungsweise Verlängerung erfahren müssen, was gleichbedeutend ist der Forderung, dass beide Bewehrungseinlagen in den Rissquerschnitten einen gleich grossen maximalen Schlupf aufweisen.

Der Unterschied in den Verbundeigenschaften der schlaffen und der vorgespannten Bewehrung beruht auf der unterschiedlichen Grösse der einem bestimmten Schlupf zugeordneten Verbundschubspannungen  $\tau_{bs}$  und  $\tau_{bp}$  einerseits und andererseits auf der unterschiedlichen Grösse der sogenannten Verbundradien, das heisst der Verhältnisse der Stahl-Querschnittsfläche zum wirksamen Verbundumfang,  $A/p_b$ , welche durch den entsprechenden – für Spannstahleinlagen im allgemeinen rein fiktiven – Stabdurchmesser  $\emptyset_s = 4A_s/p_{bs}$  und  $\emptyset_p = 4A_p/p_{bp}$  quantifiziert werden; insofern gelten die Ausführungen in diesem Kapitel gleichermassen für Zugglieder, deren Bewehrung aus Stäben besteht, die zwar identischen Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehungen gehorchen, jedoch (zwei) unterschiedliche Durchmesser beziehungsweise Verbundradien aufweisen (zum Beispiel schlaff gemischt bewehrte Zugglieder). In der Regel erzielen vorgespannte Bewehrungsstahleinlagen eine geringere Verbundwirkung als schlaffe Bewehrungsstäbe, zumeist sich die Einflüsse einer geringeren nominellen Verbundschubspannung  $\tau_{bp}$  und eines grösseren Verbundradius  $\emptyset_p$  addieren. Der wirksame Verbundumfang von Litzenspanngliedern kann als kleinste konvexe Hülle des ideal geordneten Litzenbündels definiert werden [61, 62]

$$p_{bp} = 6(\pi - 3 + \sqrt{12m - 3}) \sqrt{\frac{A_p}{7\pi m}} \quad (6.17)$$

und für den fiktiven Verbundradius von Litzenspanngliedern gilt demzufolge

$$\emptyset_p = \frac{4A_p}{p_{bp}} = \frac{2\sqrt{7\pi m}}{3(\pi - 3 + \sqrt{12m - 3})} \sqrt{A_p} \quad \left( \text{N.B.: } p_{bp} \neq \emptyset_p \pi ; A_p \neq \frac{\emptyset_p^2 \pi}{4} \right) \quad (6.18)$$

wobei  $A_p$  die Gesamt-Querschnittsfläche des Bündels und  $m$  die Anzahl siebendrähtiger Litzen bezeichnen. Die Gleichungen (6.17) und (6.18) sind für  $m = 1, 7, 19, 37, \dots$  exakt und stellen für andere  $m$  eine gute Näherung dar; für Paralleldrahtbündel lassen sich analoge Ausdrücke angeben [62].

Für die weiteren Ausführungen in diesem Kapitel wird ein teilweise vorgespanntes Zugglied betrachtet, bei welchem der Rissbildungsprozess im Bereich linear elastischer Spann- und Betonstahldehnungen stattfindet; der einfacheren Formulierung wegen werden die Normalkraft  $\Delta N = N - N_d$  sowie die Spannstahlspannungen  $\Delta\sigma_p = \sigma_p - \sigma_{pd}$  und -dehnungen  $\Delta\varepsilon_p = \varepsilon_p - \varepsilon_{pd}$  verwendet, welche den Zuwachs der entsprechenden Grösse ab der Dekompressionslast

$$N_d = A_p \sigma_{p0} \left[ 1 + \frac{n_p \rho_p}{1 + \rho_s (n_s - 1) - \rho_p} \right] \quad (6.19)$$

darstellen.

Im Zustand der Erstrissbildung liegen entlang des Zuggliedes sowohl Abschnitte mit ideellen Querschnitten als auch Abschnitte, welche sich im Einflussbereich eines Risses befinden und demnach verschieblichen Verbund aufweisen, vor, siehe Bild 6.10 (a). Entsprechend der im allgemeinen geringeren Verbundwirkung der vorgespannten Bewehrung und wegen der Bedingung gleicher mittlerer Dehnungen der Stahleinlagen ist sowohl der Gradient des Stahlspannungsverlaufs entlang des Einflussbereichs des Risses als auch die im Rissquerschnitt auftretende maximale Stahlspannung für die vorgespannte Bewehrung kleiner als für die schlaffe Bewehrung. Dementsprechend werden einerseits die Betonstahldehnungen ausgehend vom Rissquerschnitt

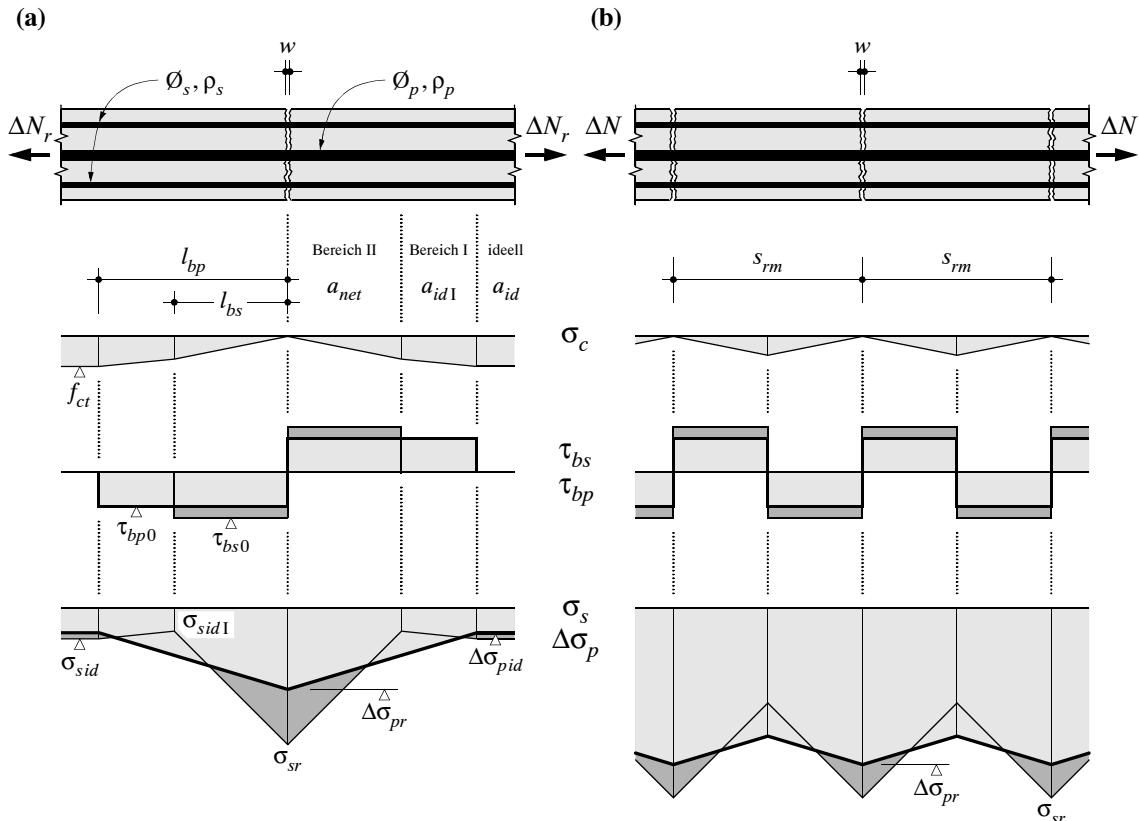


Bild 6.10 – Zuggurtmodell für vorgespannte Zugglieder: (a) im Zustand der Erstrissbildung ( $\Delta N = \Delta N_r$ ); (b) bei abgeschlossenem Rissbild ( $\Delta N > \Delta N_r$ ).

schneller abgebaut als die Spannstahldehnungen und andererseits der Zustand gleicher Dehnungen des Betonstahls und des ihn umgebenden Betons in einem kleineren Abstand zum Riss erreicht (an der Stelle mit  $\delta_s = 0$ ). Folglich sind im Einflussbereich des Erstrisses zwei Bereiche zu unterscheiden: im Bereich II wirken beide Bewehrungen in verschieblichem Verbund zum umgebenden Beton, während im Bereich I nur die vorgespannte Bewehrung relativ zum Beton verschoben wird und der Betonstahl zusammen mit dem Beton einen “teilweise” ideellen Querschnitt bildet. Der Zustand der Erstrissbildung stellt die Grundlage für die Betrachtung des Rissbildungsprozesses dar. Letzterer ist insbesondere im Fall einer Zwangbeanspruchung von Bedeutung, kann aber auch bei Lastbeanspruchung auftreten, falls eine entlang des Zuggliedes streuende Betonzugfestigkeit angesetzt wird. Man beachte, dass die jeweils bei Erreichen der Risslast  $\Delta N_r$  sich einstellende Grösse der Eintragungslänge  $l_{bp}$  dem im Zustand der Erstrissbildung theoretisch minimal möglichen Rissabstand entspricht.

Sobald der Erstrissbildungsprozess abgeschlossen ist, also keine “vollständig” ideellen Querschnitte (das heisst solche, in denen  $\epsilon_c = \epsilon_s = \Delta\epsilon_p$  gilt) mehr vorliegen, kann die Normalkraft über die Erstrisszugkraft

$$N_r = N_d + A_c f_{ct} [1 + \rho_s (n_s - 1) + \rho_p (n_p - 1)] \quad (6.20)$$

hinaus gesteigert werden. Bei genügend grossem Erstrissabstand werden dabei sukzessive weitere Risse gebildet, weil die zwischen den Erstrissen wirkenden Verbundkräfte kontinuierlich zunehmen und dadurch in bestimmten Querschnitten erneut die Betonzugfestigkeit aufgebaut wird. Dementsprechend findet ein im einzelnen recht komplexer, für den Einzelfall zu betrachtender Übergang vom Zustand der Erstrissbildung gemäss Bild 6.10 (a) zu dem in Bild 6.10 (b) dargestellten abgeschlossenen Rissbild statt, während dessen allfällig verbliebene Bereiche I verschwinden und sich auf der gesamten Zuggliedlänge verschieblicher Verbund für beide Bewehrungen einstellt. Der Zustand des abgeschlossenen Rissbildes stellt die Grundlage für die Betrachtung des weiteren Beanspruchungsprozesses bis zum Erreichen der nominellen Zugfestigkeit einer der beiden Bewehrungen dar.

Im folgenden werden starr - ideal plastische Verbundgesetze gemäss Bild 5.16 (c) für die Betonstahl- und die Spannstahlbewehrung vorausgesetzt, wobei in der Regel für die Spannbewehrung kleinere Verbundkennwerte anzusetzen sind,  $\tau_{bp0} < \tau_{bs0}$ ,  $\tau_{bp1} < \tau_{bs1}$ . Wie bisher wird weiterhin angenommen, dass die Betonzugfestigkeit und die Rissabstände entlang des Zuggliedes konstant sind und dass die im Rissbildungsprozess auftretenden Stahlspannungen kleiner sind als die betreffende Fliessgrenze.

### 6.5.2 Erstrissbildung

Bild 6.10 zeigt die gemäss dem Zuggurtmodell in einem symmetrisch beanspruchten, vorgespannten beziehungsweise zwei verschiedene Bewehrungen aufweisenden Zugglied im Zustand der Erstrissbildung sowie nach Abschluss des Rissbildungsprozesses herrschenden Verhältnisse.

Im Zustand der Erstrissbildung, Bild 6.10 (a), ergeben sich für die der Risszugkraft gemäss Gleichung (6.20) entsprechende Normalkraft  $\Delta N = \Delta N_r$  (das heisst in Zuständen unmittelbar vor der Bildung eines weiteren Risses) die Stahlspannungen

$$\sigma_{sr} = \frac{f_{ct}}{\rho_s} \cdot \frac{(\rho_s n_s + \xi a_{id1}) a_{id1}}{(1 + \xi) a_{id1} + (\kappa - 1) a_{net}} \quad (6.21)$$

$$\Delta \sigma_{pr} = \frac{f_{ct}}{\rho_p} \cdot \frac{\kappa a_{id} a_{net} + \rho_p n_p (\rho_s n_s + \xi a_{id1})}{(1 + \xi) a_{id1} + (\kappa - 1) a_{net}} \quad (6.22)$$

sowie die Rissbreite

$$w = \frac{\xi \emptyset_s f_{ct}^2}{4 E_s \rho_s^2 \tau_{bs0}} \cdot \frac{(\rho_s n_s + \xi a_{id1}) a_{id1}^2 a_{net}}{[(1 + \xi) a_{id1} + (\kappa - 1) a_{net}]^2} \quad (6.23)$$

mit

$$\xi = \frac{p_{bs} \tau_{bs0}}{p_{bp} \tau_{bp0}} = \frac{\emptyset_p \rho_s \tau_{bs0}}{\emptyset_s \rho_p \tau_{bp0}} \quad (6.24)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\rho_p n_p \cdot \rho_s n_s + \xi a_{id1}}{\rho_s n_s \cdot a_{id}}} = \frac{l_{bp}}{l_{bs}} \quad (6.25)$$

und unter Verwendung der Abkürzungen  $a_{net} = [1 - \rho_s - \rho_p]$ ,  $a_{id1} = [1 + \rho_s(n_s - 1) - \rho_p]$ ,  $a_{id} = [1 + \rho_s(n_s - 1) + \rho_p(n_p - 1)]$ .

Die Beziehungen (6.21) bis (6.25) gelten unter der Voraussetzung, dass die mit  $\emptyset_p, \rho_p, \tau_{bp0}$  charakterisierte Bewehrung schlechtere Verbundeigenschaften aufweist als die mit  $\emptyset_s, \rho_s, \tau_{bs0}$  beschriebene; die erstere bedarf demnach einer grösseren Eintragungslänge  $l_{bp} \geq l_{bs}$ , siehe Bild 6.10 (a); es muss also  $\kappa \geq 1$  beziehungsweise

$$\frac{\emptyset_p \tau_{bs0} n_p}{\emptyset_s \tau_{bp0} n_s} \geq 1 \quad (6.26)$$

gelten. Die Verhältnisse für den umgekehrten Fall erhält man durch Austauschen der Indizes  $s$  und  $p$  in den bisher aufgestellten Beziehungen.

### 6.5.3 Abgeschlossenes Rissbild

Im folgenden wird das Trag- und Verformungsverhalten vorgespannter Zugglieder unter monoton gesteigerter Zugkraft  $N$  im Beanspruchungsbereich zwischen dem Abschluss des Rissbildungsprozesses und dem durch das Zerreissen einer der beiden Bewehrungen gegebenen Bruchzustand beschrieben. Es wird vorausgesetzt, dass das unter der Risszugkraft  $N_r$  gemäss Gleichung (6.20) schlagartig sich einstellende Rissbild konstante Rissabstände aufweist und dass die in diesem Zustand in Rissquerschnitten auftretenden maximalen Stahlspannungen  $\sigma_{sr}$  und  $\Delta\sigma_{pr}$  die betreffende Fliessgrenze nicht erreichen.

Nach Abschluss des Rissbildungsprozesses genügt für die weitere Behandlung die Betrachtung des Risselementes, wie es in Bild 6.11 (a) und (d) für die beiden Fälle, dass die Rissabstände entlang der schlaffen und der vorgespannten Bewehrung gleich beziehungsweise unterschiedlich gross sind, dargestellt ist. Im ersten Fall gilt für den Rissabstand  $s_{rm}$  die Bedingung

$$s_{r0}/2 \leq s_{rm} \leq s_{r0} \quad \text{mit } s_{r0} = \frac{\emptyset_p f_{ct} (1 - \rho_s - \rho_p)}{2 \tau_{bp0} \rho_p (1 + \xi)} \quad (6.27)$$

während im zweiten Fall die Rissabstände  $s_{rms}$  und  $s_{rmp}$  mit der Beziehung (6.6) abgeschätzt werden können, indem den beiden Bewehrungseinlagen die in ihrem Einflussbereich befindlichen Anteile des Betonquerschnitts zugeordnet werden. Bild 6.11 (c) und (e) zeigt die entsprechenden, unter Voraussetzung von bilinearen Stahlstoffgesetzen und starr - ideal plastischen Verbundgesetzen gemäss Bild 6.11 (b) im Risselement geltenden Verteilungen der Verbundschubspannungen sowie der Stahlspannungen und -dehnungen in beiden Bewehrungen für verschiedene, in Analogie zu Bild 6.4 bezeichnete Beanspruchungszustände.

Die Beschreibung des Verformungsverhaltens des vorgespannten Zuggliedes kann aus den Beziehungen (6.9) bis (6.11) direkt abgeleitet werden, indem diese für beide Bewehrungen ausgedrückt werden und durch Formulierung des Gleichgewichtes der Stahlspannungen in Rissquerschnitten,  $\sigma_{sr} \cdot A_s + \sigma_{pr} \cdot A_p = N$ , sowie der Verträglichkeitsbedingung, dass die beiden Bewehrungen

Vorgespannte Zugglieder

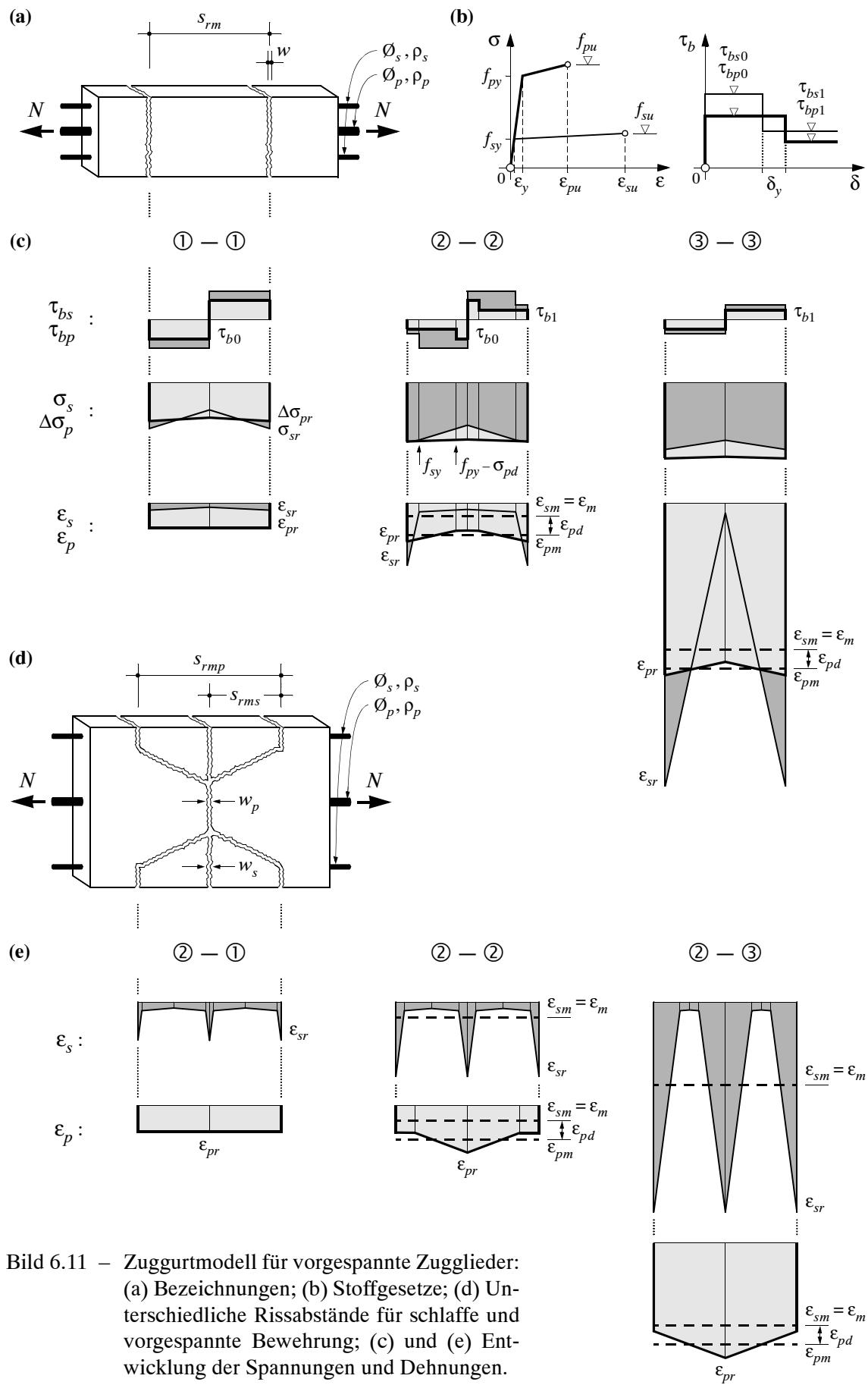


Bild 6.11 – Zugzugmodell für vorgespannte Zugglieder:  
 (a) Bezeichnungen; (b) Stoffgesetze; (d) Unterschiedliche Rissabstände für schlaffe und vorgespannte Bewehrung; (c) und (e) Entwicklung der Spannungen und Dehnungen.

rungseinlagen gleiche Längenänderungen erfahren müssen,  $\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{pm} - \varepsilon_{pd}$ , miteinander verknüpft werden. Auf diese Weise erhält man aus der Kombination der je Bewehrungseinlage möglichen drei Dehnungszustände gemäss (6.9) bis (6.11) insgesamt neun theoretisch mögliche Regimes für das gemischt bewehrte Zugglied [3].

Im Beanspruchungsstadium ① - ①, das heisst in der elastisch-gerissenen Phase, erhält man für die in Rissquerschnitten auftretenden maximalen Stahlspannungen

$$\sigma_{sr} = \sigma_s^{\text{II}} + \Delta\sigma_s \quad (6.28)$$

$$\sigma_{pr} = \sigma_{pd} + \sigma_s^{\text{II}} \cdot \frac{E_p}{E_s} - \Delta\sigma_s \cdot \frac{A_s}{A_p} \quad (6.29)$$

wobei  $\sigma_s^{\text{II}}$  die unter Vernachlässigung der unterschiedlichen Verbundeigenschaften der beiden Bewehrungen für die schlaffe Bewehrung geltende, nominelle Stahlspannung darstellt

$$\sigma_s^{\text{II}} = \frac{N - N_d}{A_s + A_p \cdot \frac{E_p}{E_s}} \quad (6.30)$$

während der Zusatzterm  $\Delta\sigma_s$

$$\Delta\sigma_s = \frac{\left( \frac{\tau_{bs0} s_{rms}}{E_s \emptyset_s} - \frac{\tau_{bp0} s_{rmp}}{E_p \emptyset_p} \right)}{A_s \left( \frac{1}{E_p A_p} + \frac{1}{E_s A_s} \right)} = \frac{\left( \frac{\tau_{bs0} s_{rms}}{\emptyset_s} - \frac{n_s \cdot \tau_{bp0} s_{rmp}}{n_p \cdot \emptyset_p} \right)}{1 + \frac{\rho_s n_s}{\rho_p n_p}} \quad (6.31)$$

die infolge unterschiedlicher Verbundwirkung zu berücksichtigende, von der Höhe der Normalkraftbeanspruchung unabhängige Abweichung von  $\sigma_s^{\text{II}}$  darstellt.

Man erkennt, dass für den Fall

$$\frac{\emptyset_p \tau_{bs0} n_p s_{rms}}{\emptyset_s \tau_{bp0} n_s s_{rmp}} = 1 \quad (6.32)$$

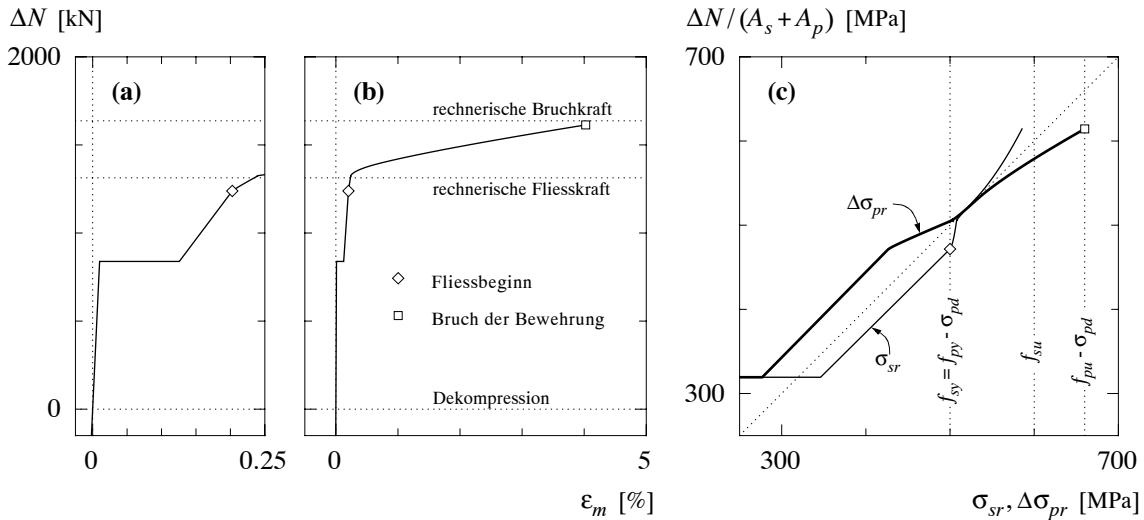
in Analogie zu Beziehung (6.26) die beiden Bewehrungseinlagen eine gleichwertige Verbundwirkung im elastisch-gerissenen Stadium erzielen, das heisst  $\Delta\sigma_s = 0$  wird, und dass nur unter der zusätzlichen Voraussetzung gleicher Elastizitätsmoduli,  $E_s = E_p$ , die beiden Bewehrungen in jedem Zustand bis zum Erreichen der Fliesslast auch dieselben Spannungszuwächse ab Dekompression aufweisen.

Die den maximalen Stahlspannungen in den Rissquerschnitten gemäss (6.28) und (6.29) entsprechenden mittleren Stahldehnungen im Risselement erhält man durch Auswertung der Beziehung (6.9) für die betreffende Bewehrung und Stahlspannung. Die Rissbreiten  $w_s$  und  $w_p$  gemäss Bild 6.11 (d) können unter Vernachlässigung der Betonverformungen mit  $w_s = \varepsilon_{sm} s_{rms}$  beziehungsweise  $w_p = (\varepsilon_{pm} - \varepsilon_{pd}) s_{rmp}$  abgeschätzt (leicht überschätzt) werden; für den Fall gleicher Rissabstände  $s_{rms} = s_{rmp} = s_{rm}$ , Bild 6.11 (a), erhält man für die Rissbreite in der elastisch-gerissenen Phase

$$w = s_{rm} \left( \varepsilon_{sm} - \frac{f_{ct}}{E_c} \cdot \frac{s_{rm}}{2 s_{r0}} \right) \quad (6.33)$$

wobei  $s_{r0}$  und  $\varepsilon_{sm}$  mit den Gleichungen (6.27) beziehungsweise (6.9) zu bestimmen sind.

Das elastisch-gerissene Beanspruchungsstadium ① - ① wird mit dem Erreichen der Fliesszugkraft  $N_y$  beendet. In der Regel ist die effektive Grösse der Fliesszugkraft kleiner als der entsprechende nominelle Wert  $N_{y nom} = A_s f_{sy} + A_p f_{py}$  weil aufgrund der unterschiedlichen



Parameter:

$$\begin{aligned}
 f_{sy} &= 500 \text{ MPa} & f_{py} &= 1600 \text{ MPa} & f_c &= 32 \text{ MPa} & f_{ct} &= 0.3 \cdot f_c^{2/3} \\
 f_{su} &= 600 \text{ MPa} & f_{pu} &= 1760 \text{ MPa} & n_s &= 6.67 & n_p &= 6.50 \\
 E_s &= 200 \text{ GPa} & E_p &= 195 \text{ GPa} & \tau_{bs0} &= 0.6 \cdot f_c^{2/3} & \tau_{bp0} &= 0.75 \cdot \tau_{bs0} \\
 \varepsilon_{su} &= 10 \% & \varepsilon_{pu} &= 5 \% & \tau_{bs1} &= 0.3 \cdot f_c^{2/3} & \tau_{bp1} &= 0.75 \cdot \tau_{bs1} \\
 \emptyset_s &= 16 \text{ mm} & \emptyset_p &= 36 \text{ mm} & \rho &= 1.0 \% & \sigma_{pd} &= 1100 \text{ MPa} \\
 A_s &= 1600 \text{ mm}^2 & A_p &= 1000 \text{ mm}^2 & s_{rms} &= 250 \text{ mm} & s_{rmp} &= 250 \text{ mm}
 \end{aligned}$$

Bild 6.12 – Vorgespanntes Zugglied: (a) Mittlere Dehnungen bis Fliessbeginn und (b) im Verfestigungsbereich; (c) Spannungen im Beton- und Spannstahl.

Spannungszuwächse der beiden Bewehrungen die betreffenden Fliessgrenzen,  $f_{sy}$  und  $f_{py}$ , im allgemeinen nicht gleichzeitig erreicht werden. Die nach dem Überschreiten der Fliesszugkraft folgenden plastischen Beanspruchungsstadien sind in [3] analytisch formuliert. Die effektive Grösse der Bruchkraft ist im allgemeinen wiederum kleiner als der nominelle Wert  $N_{unom} = A_s f_{su} + A_p f_{pu}$ .

Bild 6.12 zeigt die gemäss dem Zuggurtmodell für ein Fallbeispiel eines vorgespannten Zuggliedes ermittelte, vollständige Zugkraft-Dehnungs-Charakteristik für Lastbeanspruchung. Die Dekompressions- und die Risszugkraft sind mit den Gleichungen (6.19) beziehungsweise (6.20) gegeben. Es wird wiederum vorausgesetzt, dass sich unter der Risszugkraft schlagartig das abgeschlossene Rissbild gemäss Bild 6.10 (b) mit konstant angenommenen Rissabständen  $s_{rms} = s_{rmp} = 250$  mm einstellt. Die in Bild 6.10 (c) dargestellte Entwicklung der Zuwächse ab Dekompression der effektiven maximalen Stahlspannungen in Rissquerschnitten,  $\sigma_{sr}$  und  $\Delta\sigma_{pr} = \sigma_{pr} - \sigma_{pd}$ , verdeutlicht das gemäss dem Zuggurtmodell vorhergesagte Verhalten des vorgespannten Zuggliedes. In der elastisch-gerissenen Phase wachsen die Stahlspannungen linear an, vergleiche (6.28) bis (6.31), und die entsprechenden geraden Strecken in Bild 6.10 (c) sind aus Gleichgewichtsgründen zueinander parallel. Für das betrachtete Fallbeispiel, für welches  $f_{sy} = (f_{py} - \sigma_{pd})$  gilt, erreicht die schlaffe Bewehrung aufgrund der besseren Verbundwirkung als erste ihre Fliessgrenze. Die entsprechende Fliesszugkraft und die zugehörige Spannstahlspannung betragen  $N_y = N_d + 1238$  kN beziehungsweise  $\sigma_{pr} = \sigma_{pd} + 427$  MPa. Der mit dem Überschreiten der Fliessgrenze des Betonstahles verbundene Steifigkeitsabfall der schlaffen Bewehrung bewirkt, dass nun die Spannungen im Spannstahl stärker anwachsen, bis dessen Fliessgrenze erreicht ist (bei  $N_y = N_d + 1325$  kN und mit zugehörigem  $\sigma_{sr} = 508$  MPa), worauf eine erneute Verlagerung der relativen Zunahme der Stahlspannungen stattfindet; der weitere Verlauf wird im

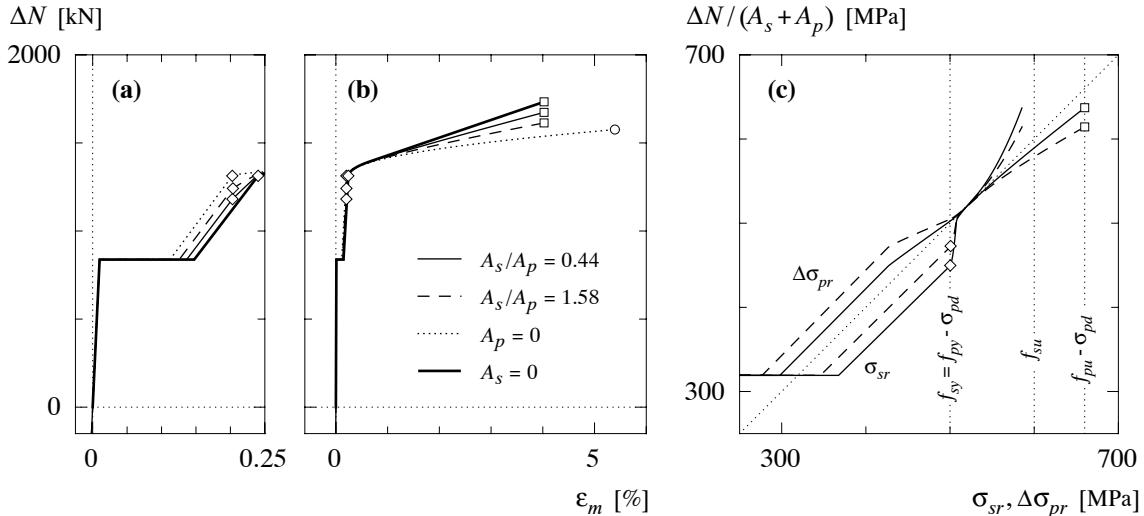


Bild 6.13 – Vorgespanntes Zugglied, Einfluss des Verhältnisses  $A_s/A_p$ : (a) Mittlere Dehnungen bis Fliessbeginn und (b) im Verfestigungsbereich; (c) Spannungen im Beton- und Spannstahl.

wesentlichen durch das Verhältnis der (konstanten) Verfestigungsmoduli der beiden Bewehrungsstäbe bestimmt. Der Bruchzustand des betrachteten vorgespannten Zuggliedes tritt im Beanspruchungsstadium ② - ③ ein und ist durch das Erreichen der Zugfestigkeit des Spannstahles gegeben. Die Bruchkraft beträgt  $N_u = N_d + 1614$  kN und die zugehörige Betonstahlspannung  $\sigma_{sr} = 586$  MPa.

Bild 6.13 illustriert den Einfluss des Verhältnisses der Querschnittsflächen  $A_s$  und  $A_p$  der beiden Bewehrungseinlagen  $\emptyset_s$  und  $\emptyset_p$  auf die Zugkraft-Dehnungs-Charakteristik des vorgespannten Zuggliedes und die Entwicklung der effektiven Stahlspannungen in den Rissquerschnitten. Wie man sieht, wirkt sich eine Variation von  $A_s/A_p$  auf das Verhältnis der effektiven Stahlspannungen und somit auf die Grösse der Fliess- und Bruchkraft aus, das Verformungsvermögen bei Bruch dagegen bleibt praktisch unverändert.

## 6.6 Vergleich mit Versuchsergebnissen

Im folgenden werden die Ergebnisse der Nachrechnung von Zugversuchen an grossmassstäblichen Stahlbetonscheiben und Rotationsversuchen an schlaff bewehrten, als Zweifeldträger gelagerten Stahlbetonplattenstreifen dargestellt. Die experimentellen Daten entstammen einer am Institut für Baustatik und Konstruktion der ETH Zürich im Rahmen des Forschungsprojektes “Verformungsvermögen von Massivbautragwerken” durchgeführten Versuchsserie [1].

Bild 6.14 (a) und (b) zeigt die Abmessungen und Bewehrung der im folgenden untersuchten Zugversuchskörper Z1 und Z5 beziehungsweise Z6 [1]. Die Scheibenelemente Z1 und Z5 wiesen dieselbe Bewehrungsgeometrie auf, sie unterschieden sich aber in den Duktilitätseigenschaften der (in der Beanspruchungsrichtung eingelegten) Längsbewehrungsstäbe ( $\emptyset = 14$  mm,  $\rho = 0.98\%$ ). Der Versuchskörper Z6 stellte ein teilweise vorgespanntes, das heisst gemischt bewehrtes Zugglied dar ( $\emptyset_s = 14$  mm,  $\rho_s = 0.56\%$ ;  $\emptyset_p = 4 A_p/p_{bp} = 4 \cdot 1050/143.25 = 30$  mm, wobei  $p_{bp}$  gemäss Gleichung (6.17) vorausgesetzt wird,  $\rho_p = 0.48\%$ ). Bild 6.14 (c) zeigt die Stahlkennlinien der verwendeten Längsbewehrung.

Bild 6.14 (d) und (e) vergleicht die experimentell ermittelten Zugkraft-Dehnungs-Charakteristiken der drei Zugversuchskörper mit den Ergebnissen der Nachrechnung auf der Grundlage des Zuggurtmodells für einheitlich beziehungsweise gemischt bewehrte Zugglieder. Der Nachrechnung der Versuchskörper Z1 und Z5 liegen analytisch formulerte Stahlstoffsgeze mit naturhafter beziehungsweise kaltverformter Charakteristik und entsprechende, gemäss dem Zuggurtmodell geltende Spannungs-Dehnungs-Charakteristiken des Zugglieds zugrunde [3]. Wie man sieht, ist die Übereinstimmung zwischen den Versuchsresultaten und der Nachrechnung zufriedenstellend. Insbesondere das Dehnvermögen beim Bruch wird zuverlässig vorhergesagt.

Bild 6.15 zeigt am Beispiel der Nachrechnung des Zugversuchs Z1 einen Vergleich zwischen dem Zuggurtmodell und den Ergebnissen numerischer Integrationen der Differentialbeziehungen des verschieblichen Verbundes unter Verwendung der aus der Literatur bekannten Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehungen gemäss Eligehausen et al. [20], CEB-FIP Model Code 1990 [18] und Shima et al. [91]. Wie man sieht, erweist sich die analytische Berechnung gemäss dem Zuggurtmodell als gleichwertig akkurate Vorhersage des Trag- und Verformungsverhaltens

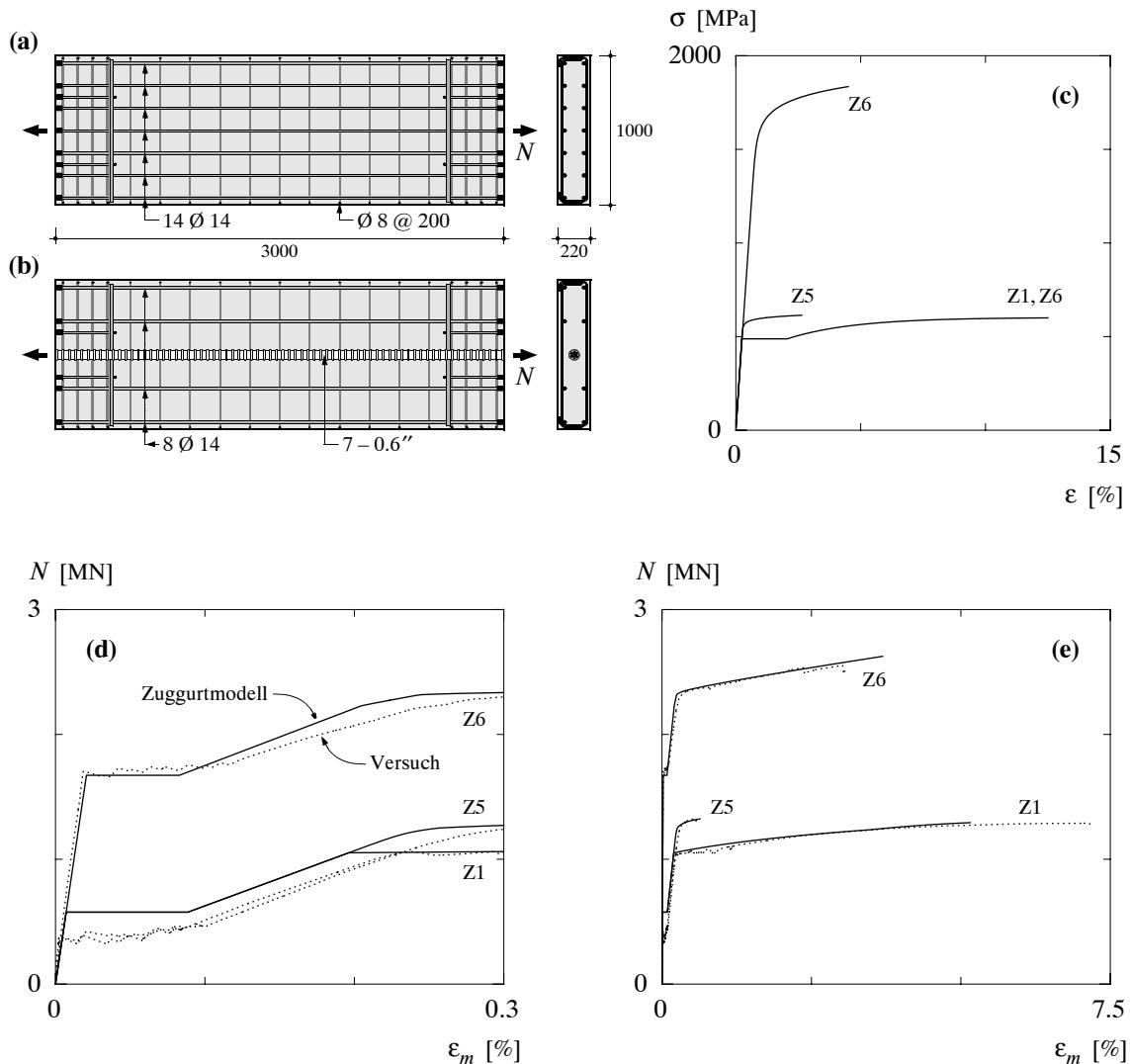


Bild 6.14 – Vergleich mit Zugversuchen: (a) Versuchskörper Z1 und Z5; (b) Versuchskörper Z6; (c) Spannungs-Dehnungs-Diagramme des Bewehrungsstahls; (d) und (e) Zugkraft-Verlängerungs-Diagramme. N.B.: Abmessungen in mm.

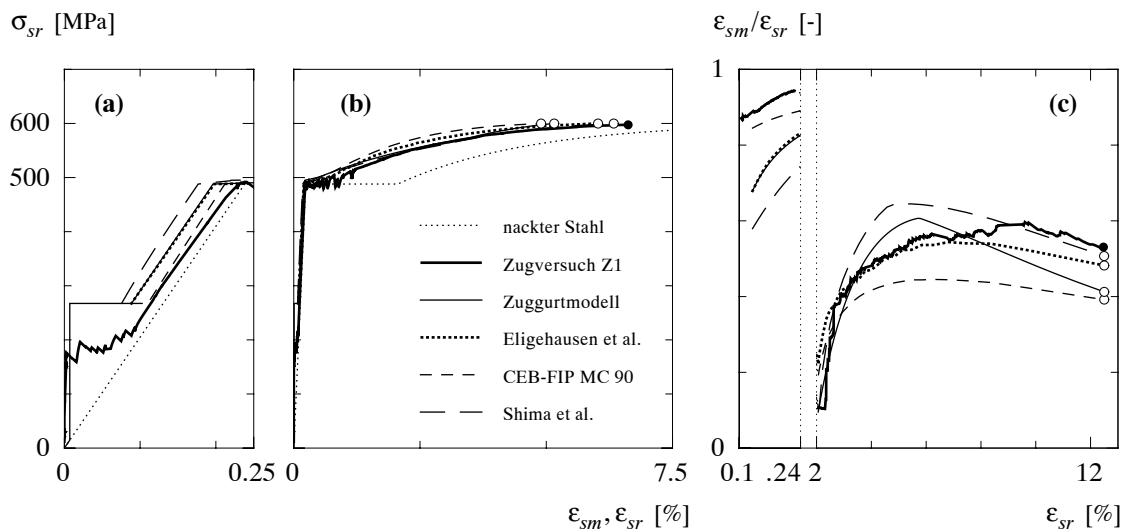


Bild 6.15 – Vergleich zwischen dem Zuggurtmodell und aus der Literatur bekannten Verbundmodellen am Beispiel der Nachrechnung des Zugversuchs Z1: (a) Mittlere Dehnungen bis Fließbeginn und (b) im Verfestigungsbereich; (c) Verformungslokalisierung.

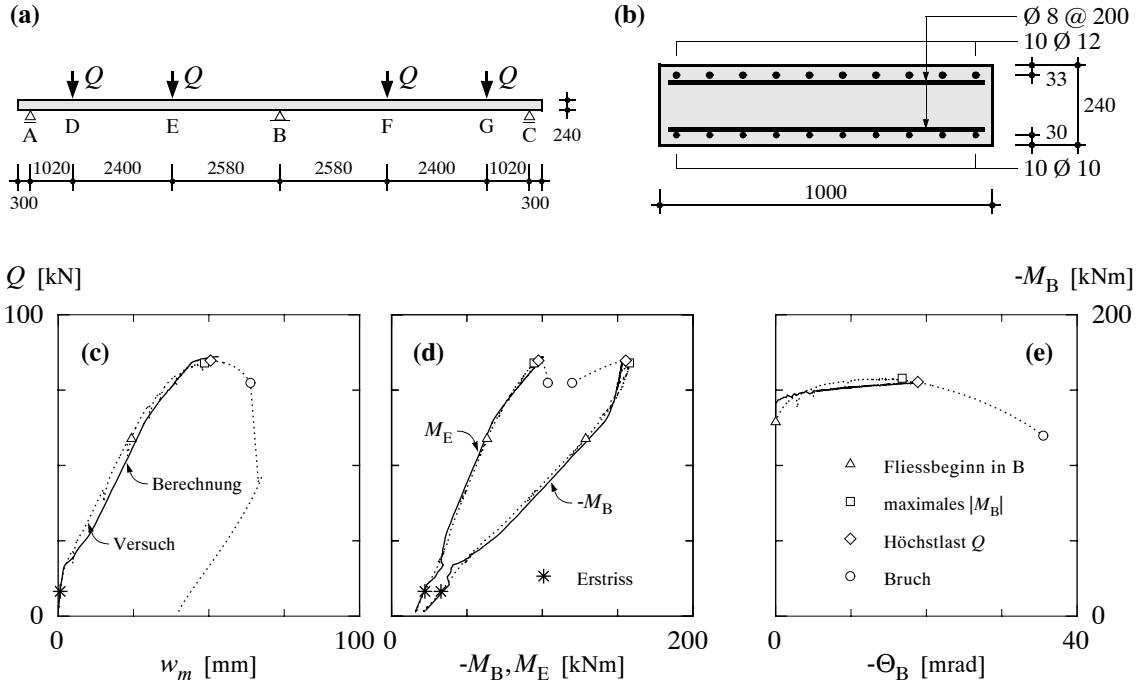


Bild 6.16 – Vergleich mit Plattenstreifenversuch ZP1: (a) Statisches System, Belastung und Bezeichnungen; (b) Querschnitt; (c) mittlere Einsenkung der Lastangriffspunkte, (d) Stütz- und Feldmomente; (e) plastische Rotation über dem Mittelauflager. Abmessungen in mm.

des Zuggliedes wie die Ergebnisse der numerischen Integrationen; hingegen ist der Rechenaufwand bei Anwendung des Zuggurtmodells enorm viel kleiner.

Bild 6.16 (a) und (b) zeigt das statische System, Abmessungen und Bewehrung des Plattenstreifenversuchskörpers ZP1 [1]. In Bild 6.16 (c) bis (e) sind ausgewählte experimentelle Resultate zusammen mit den entsprechenden Ergebnissen einer nichtlinearen Berechnung unter Verwendung des Zuggurtmodells (das zur Beschreibung der Zugsteifigkeit der Biegezugzone verwendet wird) dargestellt [4]. Wie man sieht, werden sowohl die Verformungsgrößen in Bild 6.16 (c) und (e) als auch die in Bild 6.16 (d) dargestellte Entwicklung des Stütz- und des maximalen Feldmoments (welche insbesondere von der Zugsteifigkeit der Biegezugzonen beeinflusst wird) von der nichtlinearen Analyse zufriedenstellend wiedergegeben.

## 7 Gerissenes Scheibenmodell

*Walter Kaufmann*

### 7.1 Einleitung

#### 7.1.1 Allgemeines

In diesem Kapitel wird ein neues Modell für gerissene, orthogonal bewehrte Betonscheibenelemente unter homogener ebener Beanspruchung vorgestellt, das Gerissene Scheibenmodell [38,39]. Dieses Modell kombiniert die Grundkonzepte der sogenannten Druckfeldmodelle (Kapitel 7.2) und des Zuggurtmodells (Kapitel 6). Rissabstände und Zugspannungen zwischen den Rissen werden von mechanischen Grundprinzipien abgeleitet, und die Verbindung zu den Traglastverfahren für Stahlbetonscheiben (Kapitel 3) bleibt erhalten, da Gleichgewicht in Spannungen an den Rissen – und nicht in mittleren Spannungen zwischen den Rissen – formuliert wird.

Zunächst (Kapitel 7.1) werden einige grundlegende Merkmale des Trag- und Verformungsverhaltens von Stahlbetonscheiben im gerissenen Zustand erörtert. In diesem Zusammenhang wird auch die Druckfestigkeit des Betons in scheibenförmigen Bauteilen diskutiert, insbesondere deren Reduktion infolge Querdehnungen, welche durch eine im Verbund wirkende Querbewehrung aufgezwungen werden. Anschliessend werden die Grundlagen der sogenannten Druckfeldmodelle dargelegt (Kapitel 7.2) und das Gerissene Scheibenmodell (Kapitel 7.3) sowie auf diesem beruhende Näherungslösungen (Kapitel 7.4) für das Verhalten im gerissen-elastischen Zustand sowie für die Traglast vorgestellt. Die Ausführungen zum Gerissenen Scheibenmodell werden durch einen Vergleich mit Versuchsresultaten (Kapitel 7.5) abgerundet.

Das Koordinatensystem wird wie in Kapitel 3 so gewählt, dass die  $x$ - und  $z$ -Achsen mit den Richtungen der Bewehrung zusammenfallen, während die  $y$ -Achse senkrecht zur Scheibenebene steht. Die Beanspruchung, welche gemäss Kapitel 3 allgemein aus den Membrankräften  $n_x$ ,  $n_z$  und  $n_{xz}$  besteht, wird hier durch nominelle Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  und  $\tau_{xz}$  ausgedrückt, da sich damit ein etwas einfacherer Formalismus ergibt. Die nominellen Spannungen entsprechen dabei den durch die Scheibendicke  $h$  dividierten Membrankräften,  $\sigma_x = n_x/h$ ,  $\sigma_z = n_z/h$  und  $\tau_{xz} = n_{xz}/h$ .

#### 7.1.2 Tragverhalten von orthogonal bewehrten Stahlbetonscheiben

##### Allgemeine Diskussion des Tragverhaltens

Das Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetonscheiben ist im allgemeinen recht komplex. Bevor mögliche Berechnungsmodelle und Lösungsverfahren für das Verhalten von orthogonal bewehrten Stahlbetonscheiben im gerissenen Zustand diskutiert werden, soll daher zunächst das Verhalten von nicht überwiegend auf Druck beanspruchten Scheiben in den wichtigsten Grundzügen beschrieben werden.

Vor der Rissbildung weicht das Verhalten, mit Ausnahme von durch das Schwinden des Betons hervorgerufenen Eigenspannungszuständen (innerer Zwang, Kapitel 6.4.3), nur unwesentlich von demjenigen einer homogenen Betonscheibe ab. Überschreitet die Hauptzugspannung im Beton die Zugfestigkeit  $f_{ct}$ , so bilden sich Risse, welche etwa senkrecht zur Hauptzugspan-

nungsrichtung verlaufen. Mit der Rissbildung sind Umlagerungen der inneren Kräfte verbunden, was im allgemeinen bereits unmittelbar nach der Rissbildung zu einer Änderung der Hauptspannungsrichtungen führt. Ist eine ausreichende Mindestbewehrung vorhanden (Kapitel 10), so ist die Bewehrung nach der Rissbildung zunächst elastisch beansprucht. Die Hauptspannungsrichtungen bleiben in diesem Fall bei zunehmender Belastung annähernd konstant, bis die Scheibe durch den Bruch des Betons versagt oder die Spannungen in einer der beiden Bewehrungen die Fliessgrenze überschreiten. Da die Steifigkeit der Bewehrung nach dem Fliessbeginn stark abfällt, erfolgt in letzterem Fall nach dem Fliessbeginn eine weitere Kräfteumlagerung. Dies äussert sich darin, dass mit steigender Belastung neue Risse entstehen, welche im Vergleich mit den vorhergehenden Rissen näher zur Richtung der nicht fliessenden Bewehrung verlaufen. Bei weiterer Laststeigerung versagt die Scheibe schliesslich durch den Bruch des Betons oder durch Fliessen der bis dahin elastischen Bewehrung. In letzterem Fall fliessen beim Bruch beide Bewehrungen, was zu einem sehr duktilen Bruchverhalten führt; bricht hingegen der Beton vor dem Fliessbeginn der Bewehrung, oder reisst die Bewehrung bereits bei der Rissbildung, so muss mit einem spröderen Verhalten gerechnet werden.

Im Verlaufe der Belastungsgeschichte bilden sich im allgemeinen Risse mit verschiedenen Richtungen. Diejenigen Risse, welche nicht in Hauptspannungsrichtung verlaufen, müssen offensichtlich Schubspannungen übertragen, was theoretisch zu einem Versagen durch Gleiten entlang der Rissufer führen könnte. Versuche haben jedoch gezeigt, dass – zumindest in Normalbeton – die Rissverzahnung in üblichen Fällen zur Übertragung der Schubspannungen ausreicht, so dass Gleitbrüche entlang von Rissen nur in Ausnahmefällen auftreten.

### Allgemeine Berechnungsmodelle

Nach dieser allgemein gehaltenen Diskussion des Tragverhaltens soll nun ein konkretes Berechnungsmodell für das Verhalten von Stahlbetonscheiben im gerissenen Zustand vorgestellt werden. Bild 7.1 (a) zeigt ein orthogonal bewehrtes Scheibenelement mit einer Schar von parallelen Rissen in gleichem Abstand  $s_{rm}$ . Gleichgewicht der Spannungen im Rissquerschnitt, Bild 7.1 (b), liefert die Beziehungen

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \rho_x \sigma_{sxr} + \sigma_{cnr} \sin^2 \theta_r + \sigma_{ctr} \cos^2 \theta_r - \tau_{ctnr} \sin(2\theta_r) \\ \sigma_z &= \rho_z \sigma_{szr} + \sigma_{cnr} \cos^2 \theta_r + \sigma_{ctr} \sin^2 \theta_r + \tau_{ctnr} \sin(2\theta_r) \\ \tau_{xz} &= (\sigma_{cnr} - \sigma_{ctr}) \sin \theta_r \cos \theta_r - \tau_{ctnr} \cos(2\theta_r)\end{aligned}\quad (7.1)$$

wobei  $n$  und  $t$  die Koordinaten in Rissrichtung bezeichnen. Nimmt man homogene Materialeigenschaften an und ersetzt die Spannungen in der Bewehrung sowie die Verbundspannungen durch äquivalente Spannungen, welche einer gleichförmigen Verteilung in Querrichtung zwischen den einzelnen Bewehrungsstäben entsprechen, so kann man darauf schliessen, dass die Rissuferverschiebungen und die Verzerrungen im Beton von der Koordinate  $t$  unabhängig sind, Bild 7.1 (c). Mit den für das Betonkontinuum zwischen den Rissen gültigen Beziehungen für die Verzerrungen  $\varepsilon_n = \partial u / \partial n$ ,  $\varepsilon_t = \partial v / \partial t$  und  $\gamma_{nt} = \partial u / \partial t + \partial v / \partial n$  folgt daher, dass auch die Verschiebungen  $u$  des Betons in  $n$ -Richtung nur von  $n$  abhängen, und mit  $\partial \gamma_{nt} / \partial t = 0$  erhält man  $\partial \varepsilon_t / \partial n = 0$  und somit  $\varepsilon_t = \text{konstant}$  [39]; dabei bezeichnet  $v$  die Verschiebungen des Betons in  $t$ -Richtung.

Für gegebene Werte der Rissneigung  $\theta_r$  und des Rissabstandes  $s_{rm}$  können der Spannungs- und der Verzerrungszustand vollständig bestimmt werden, falls die Stoffgesetze des Betons und der Bewehrung, die Verbundspannungs-Schlupf-Charakteristiken der Bewehrung in  $x$ - und  $z$ -Richtung sowie die Rissverzahnungsbeziehung bekannt sind; letztere drückt die Schub- und Normalspannungen am Riss,  $\sigma_{cnr}$  und  $\tau_{ctnr}$ , in Funktion der Rissuferverschiebungen  $\delta_n$  und  $\delta_t$  aus.

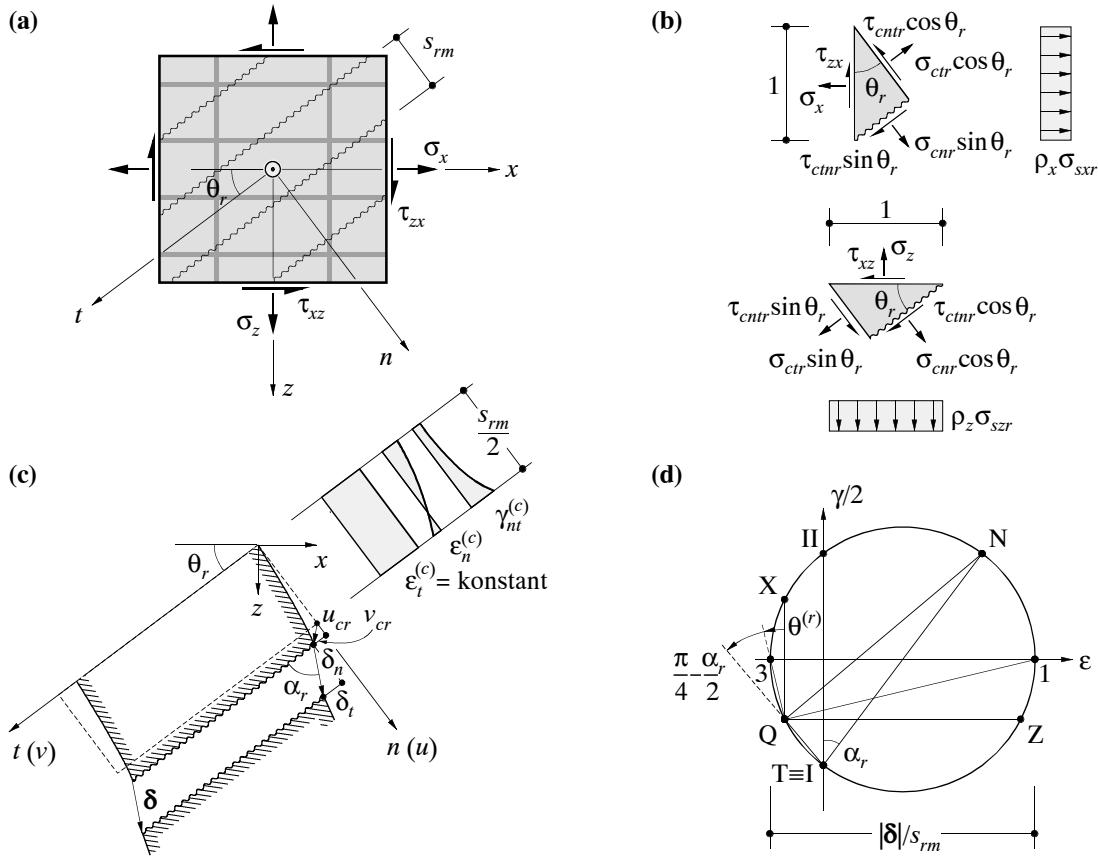


Bild 7.1 – Gerissene Scheibe: (a) Bezeichnungen; (b) Spannungen am Riss; (c) Verschiebungen und Verzerrungen; (d) Mohrscher Kreis mittlerer rissbedingter Verzerrungen.

Es müssen lediglich die Bedingungen entlang der  $n$ -Achse ( $t = 0$ ) betrachtet werden, da alle relevanten Funktionen von der Koordinate  $t$  unabhängig sind. Ein möglicher Lösungsalgorithmus wurde in [39] vorgeschlagen; dabei werden die Spannungen  $\sigma_{sxr}$  und  $\sigma_{szr}$  in der Bewehrung am Riss, die Komponente  $\sigma_{ctr}$  der Betonspannungen am Riss, die Rissuferverschiebungen  $\delta_n$  und  $\delta_t$  sowie die Verschiebungen des Betons  $u_{cr}$  und  $v_{cr}$  am Riss als primäre Unbekannte eingeführt. Dieses Vorgehen entspricht der allgemeinst möglichen Lösung, solange lediglich eine Schar von parallelen Rissen betrachtet wird und die Stahl- und Verbundspannungen als in Querrichtung zwischen den einzelnen Bewehrungsstäben gleichmäßig verteilt angenommen werden.

Vernachlässigt man lokale Variationen der Verzerrungen, so kann ein weniger aufwendiges Lösungsverfahren verwendet werden [38], welches auf einer Unterteilung der totalen mittleren (über den Rissabstand  $s_{rm}$ ) Verzerrungen in mittlere Verzerrungen des Betons zwischen den Rissen und mittlere rissbedingte Verzerrungen beruht. Betrachtet man eine Rissuferverschiebung gemäß Bild 7.1 (c), so betragen die mittleren rissbedingten Verzerrungen  $\varepsilon_n^{(r)} = \delta_n/s_{rm}$  und  $\varepsilon_t^{(r)} = 0$ , und die entsprechenden Hauptdehnungen können aus einem Mohrschen Verzerrungskreis gemäß Bild 7.1 (d) bestimmt werden. Für gegebene Werte der Rissneigung  $\theta_r$  und des Rissabstandes  $s_{rm}$  lassen sich die mittleren rissbedingten Verzerrungen somit in Funktion der Rissuferverschiebungen  $\delta_n$  und  $\delta_t$  ausdrücken. Andererseits sind die mittleren Verzerrungen des Betons zwischen den Rissen durch drei nicht kollineare Verzerrungen eindeutig bestimmt, da die  $y$ -Achse als Hauptrichtung bekannt ist. Die totalen mittleren Verzerrungen als Summe der mittleren rissbedingten Verzerrungen und der mittleren Verzerrungen des Betons zwischen den Rissen

lassen sich somit in Funktion von insgesamt fünf Unbekannten ausdrücken. Mit Hilfe der drei Gleichgewichtsbedingungen (7.1) sowie einer Rissverzahnungsbeziehung, welche die Schub- und Normalspannungen am Riss  $\sigma_{cnr}$  und  $\tau_{ctr}$  in Funktion der Rissuerverschiebungen  $\delta_n$  und  $\delta_t$  ausdrückt, können die fünf Unbekannten bestimmt werden.

Grundsätzlich ist es möglich, die beiden oben erläuterten allgemeinen Lösungsverfahren in Computerprogramme zu implementieren. Die Lösung ist jedoch numerisch aufwendig, da fünf oder sieben nichtlineare Gleichungen zu lösen sind. Die zur Lösung benötigte Rissverzahnungsbeziehung hängt zudem von verschiedenen Parametern ab und unterliegt grossen Streuungen. Insbesondere sind solche Beziehungen hochgradig nichtlinear und empfindlich auf kleinste Verschiebungen, während (bei gegebenen Verzerrungen) die Rissuerverschiebungen direkt proportional zum Rissabstand sind, für welchen nur obere und untere Schranken angegeben werden können, siehe Kapitel 6 und 7.3.2. Weiter wird die Rissneigung durch Eigenspannungszustände beeinflusst, und mit fortschreitender Belastung entstehen im allgemeinen Risse mit unterschiedlicher Neigung. Angesichts dieser Schwierigkeiten erscheint es praktisch unmöglich, ein für Bemessungszwecke taugliches Berechnungsverfahren aufzustellen, welches verzahnte Risse vorgegebener Neigung berücksichtigt. Solche Modelle sind lediglich für Forschungszwecke und bei der Überprüfung bestehender Tragwerke von gewissem Nutzen.

Stattdessen werden in üblichen Berechnungsmodellen fiktive Risse betrachtet, welche parallel zur Hauptdruckspannungsrichtung verlaufen und somit spannungsfrei sind. Da sich im allgemeinen die Hauptrichtungen während der Belastungsgeschichte ändern, drehen sich die betrachteten fiktiven Risse mit zunehmender Belastung ebenfalls. Für solche sogenannte Druckfeldmodelle, welche in Kapitel 7.2 näher beschrieben werden, eignen sich die oben beschriebenen Lösungsverfahren nicht, da die Rissverzahnungsbeziehung lediglich eine Gleichung liefert; die Rissöffnung muss für spannungsfreie Risse zwar senkrecht zur Rissrichtung erfolgen, ist in ihrer absoluten Grösse jedoch nicht bestimmt.

### 7.1.3 Schiefe und einachsige Bewehrung

In Stahlbetonscheiben wird heute in den meisten Fällen eine orthogonale Bewehrung angeordnet, oftmals in Form von geschweißten Netzen. Dies hat vor allem herstellungstechnische Gründe; betrachtet man den Bewehrungsaufwand, so wäre eine schiefwinklige Bewehrung (in Hauptspannungstrajektorienrichtung) oftmals wirtschaftlicher. So ist zum Beispiel der Bewehrungsaufwand zur Aufnahme einer Zugbeanspruchung bei Verwendung einer orthogonalen, um  $45^\circ$  gegenüber der Hauptzugrichtung geneigten Bewehrung gerade doppelt so gross wie bei Verwendung einer Bewehrung in Richtung der Zugbeanspruchung.

Eine Verallgemeinerung der hier beschriebenen Modelle für das Trag- und Verformungsverhalten von orthogonal bewehrten Stahlbetonscheiben auf schiefwinklige Bewehrungen wäre grundsätzlich möglich. Da solche Bewehrungen in der Praxis nur selten vorkommen, wird jedoch davon abgesehen. Soll dennoch eine schiefwinklige Bewehrung untersucht werden, so kann dies näherungsweise auf die gleiche Weise geschehen, wie in Kapitel 3.3.2 beschrieben.

Wird die Zugfestigkeit des Betons vernachlässigt, so können nur in einer Richtung bewehrte Scheiben nach der Rissbildung keine Schubbeanspruchungen bezüglich der Bewehrungsrichtung aufnehmen. Dies ist zum Beispiel aus den Fliessbedingungen für Scheibenelemente (3.20) sofort ersichtlich. Druckfeldmodelle (Kapitel 7.2), welche von fiktiven Rissen parallel zur Hauptdruckspannungsrichtung ausgehen, liefern dasselbe Resultat. In Versuchen kann jedoch beobachtet werden, dass einachsig bewehrte Stahlbetonscheiben – zum Beispiel Stege von Trägern ohne Bügelbewehrung – bei der Rissbildung nicht augenblicklich versagen; vielmehr sind sie oftmals in der Lage, Belastungen aufzunehmen, welche massgeblich über der Risslast liegen.

Das Verhalten einachsiger bewehrter Stahlbetonscheiben im gerissenen Zustand kann grundsätzlich mit den in Kapitel 7.1.2 beschriebenen Berechnungsverfahren, welche verzahnte Risse vorgegebener Neigung berücksichtigen, untersucht werden. Man sollte sich aber bewusst sein, dass dabei implizite von der Zugfestigkeit des Betons Gebrauch gemacht wird, und dass die Resultate einer solchen Berechnung starken Streuungen unterworfen sind. Eine einfachere Möglichkeit, das Verhalten einachsiger bewehrter Stahlbetonscheiben zu untersuchen, besteht darin, von einer Mohrschen Hüllkurve (Kapitel 2.2.3) für die über die Risse übertragbaren Spannungen auszugehen [38]. Mit diesem Vorgehen kann beispielsweise auf einfache Weise aufgezeigt werden, dass die Grösse der nach der Rissbildung aufnehmbaren Belastung wesentlich vom Bewehrungsgehalt der (Längs-)Bewehrung beeinflusst wird.

Das Bruchverhalten einachsiger bewehrter Stahlbetonscheiben ist, auch wenn das Versagen nicht bei der Erstrissbildung eintritt, sehr spröde, und der Bruchwiderstand beruht, wie oben dargelegt, auf der Zugfestigkeit des Betons. Bei der Bemessung sollte daher, wie auch von der Norm SIA 162 [96] verlangt, immer eine kreuzweise Mindestbewehrung angeordnet werden. Die erwähnten Berechnungsverfahren für einachsige Bewehrung können jedoch bei der Überprüfung bestehender Tragwerke wichtige Informationen liefern.

### 7.1.4 Betondruckfestigkeit in Stahlbetonscheiben

#### Querzugsspannungen und aufgezwungene Querdehnungen

Wird eine unbewehrte Betonscheibe einer ebenen Beanspruchung durch Druck- und Querzugsspannungen unterworfen (Kapitel 5.5.2), so tritt das Versagen bei geringeren Druckspannungen auf als bei einachsiger Druckbeanspruchung. Die Querzugsspannungen führen gewissermassen zu einer Reduktion der Druckfestigkeit des Betons. In (ausreichend bewehrten) Stahlbetonscheiben kann dagegen die Querzugbeanspruchung nach dem Reissen durch die Bewehrung aufgenommen werden, so dass bei der Rissbildung kein Versagen auftritt.

Nach der Rissbildung werden über Verbundwirkung Zugspannungen von der Bewehrung in den Beton eingeleitet. Diese Zugspannungen im Beton zwischen den Rissen führen dazu, dass bereits bei Druckbeanspruchungen, welche unterhalb der einachsigen Druckfestigkeit von unbewehrten Betonscheiben  $f_c$  liegen, Brüche durch laminares Aufspalten auftreten können. Eine elastisch beanspruchte Bewehrung bewirkt andererseits auch eine gewisse Querbehinderung des Betons, wodurch die Druckfestigkeit und die Duktilität tendenziell erhöht werden. Dieser Einfluss ist jedoch wesentlich weniger ausgeprägt als für eine dreiaxiale Querbehinderung durch eine Umschnürungsbewehrung, sind doch die Verformungen aus der Ebene der Scheibe unbehindert, siehe Kapitel 2.2.2 (Bild 2.16) und Kapitel 5.5. Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Druckfestigkeit von scheibenförmigen Stahlbetonbauteilen nicht wesentlich von derjenigen unbewehrter Scheiben abweicht, solange die Bewehrung nicht fliesst.

Werden dem Beton hingegen durch eine über die Proportionalitätsgrenze beanspruchte, im Verbund wirkende Bewehrung grosse Querdehnungen aufgezwungen, so fällt die Druckfestigkeit stark ab. Dieser Effekt wird im Englischen als "compression softening" bezeichnet. Biaxiale Zug-Druckversuche, wie sie im nächsten Unterabschnitt besprochen werden, haben gezeigt, dass die Druckfestigkeit von Stahlbetonscheiben bei sehr grossen aufgezwungenen Querdehnungen bis auf weniger als einen Viertel der Zylinderdruckfestigkeit  $f'_c$  abfallen kann. Eine derart drastische Reduktion der Druckfestigkeit kann nicht auf die mit den Querdehnungen einhergehenden breiten Risse zurückgeführt werden, welche parallel zur Druckbeanspruchung verlaufen und somit lediglich einen geringen Einfluss auf die Druckfestigkeit haben. Vielmehr haben die Rippen der Querbewehrung mit zunehmendem Schlupf zwischen Beton und Bewehrung die Tendenz, den Beton entlang der Ebene der Bewehrung aufzuspalten. Dies führt dazu, dass ein laminares

Aufspalten bereits bei Druckbeanspruchungen auftritt, welche wesentlich unterhalb der einachsigen Druckfestigkeit  $f_c$  von unbewehrten Betonscheiben liegen.

Während ein laminares Aufspalten in der Ebene der Bewehrung bei Scheiben mit nur einer Bewehrungslage unvermeidlich zum Bruch führt, platzt bei Elementen mit zwei Bewehrungslagen (wandartige Bewehrung) zunächst lediglich die Betonüberdeckung ab, und die Druckbeanspruchung kann oft weiter gesteigert werden. Die Reduktion der Betondruckfestigkeit durch aufgezwungene Querdehnungen ist also eigentlich keine Materialeigenschaft, da sie von der Art und der konstruktiven Durchbildung der Bewehrung abhängt. Im folgenden werden dennoch mögliche Versuchsanordnungen diskutiert, welche es erlauben, den Einfluss aufgezwungener Querdehnungen auf die Betondruckfestigkeit zu untersuchen.

### Experimentelle Ermittlung des Einflusses von Querdehnungen

Bild 7.2 zeigt verschiedene Versuchsanordnungen, mit welchen der Einfluss von aufgezwungenen Querdehnungen auf die Betondruckfestigkeit untersucht werden kann. Als Referenzversuch dient dabei eine Stahlbetonscheibe unter einachsiger Druckbeanspruchung, Bild 7.2 (a), deren Verhalten sich nur unwesentlich von demjenigen eines unbewehrten Elementes unterscheidet. Eine nicht fliessende Querbewehrung hat, wie einleitend bemerkt, einen geringfügigen günstigen Einfluss auf Druckfestigkeit und Duktilität. Eine Bewehrung in Druckrichtung nimmt einen Teil der Druckbeanspruchung direkt auf und wirkt sich ebenfalls günstig auf die Duktilität aus, indem lokale Streuungen der Betoneigenschaften ausgeglichen werden. Der typische Bruch durch laminares Aufspalten äussert sich in der stärkeren Zunahme der Querdehnung  $\varepsilon_2$  (senkrecht zur Scheibenebene) im Vergleich mit der Querdehnung  $\varepsilon_1$  (in der Scheibenebene).

Bild 7.2 (b) zeigt ein Scheibenelement mit Querbewehrung, welches einer sequentiellen Zug-Druckbelastung unterworfen wird. Mit solchen Versuchen können beliebige Querdehnungen  $\varepsilon_1 < \varepsilon_{su}$  untersucht werden. In einer ersten Phase wird dabei eine Querbeanspruchung  $N_1$  aufgebracht, bis der gewünschte Wert der Querdehnung  $\varepsilon_1$  erreicht ist; es bilden sich dabei Risse senkrecht zur Richtung der Zugbeanspruchung. Anschliessend wird bei konstanter Querdehnung  $\varepsilon_1$  die Druckbeanspruchung aufgebracht und sukzessive bis zum Bruch gesteigert. Die Druckfestigkeit liegt unter dem für eine einachsige Druckbeanspruchung ermittelten Wert, falls der Beitrag der aufgezwungenen Querdehnung  $\varepsilon_1$  grösser ist als im Bruchzustand bei einachsiger Druckbeanspruchung des identischen Elementes (für kleinere Werte von  $\varepsilon_1$  muss im Bereich der Bruchlast eine Querdruckbeanspruchung aufgebracht werden, um  $\varepsilon_1$  konstant zu halten, und es resultiert eine etwas höhere Druckfestigkeit als bei einachsiger Druckbeanspruchung). Der Bruch erfolgt auf die gleiche Weise wie bei einachsiger Druckbeanspruchung, und eine Bewehrung in Richtung der aufgebrachten Druckbeanspruchung hat auch hier einen günstigen Einfluss auf Tragwiderstand und Duktilität.

Bild 7.2 (c) zeigt eine Versuchsanordnung, die üblicherweise für die Untersuchung des Schubtragverhaltens von Stahlbetonscheiben eingesetzt wird. Für eine isotrope Bewehrung (gleicher Bewehrungsgehalt  $\rho$  in den beiden diagonalen Richtungen) können die Spannungen in der Bewehrung und im Beton an den Rissen aus einfachen Gleichgewichtsüberlegungen bestimmt werden, da die Hauptrichtungen aus Symmetriegründen bekannt sind. Dass die Druckspannungen im Beton zwischen den Rissen etwas geringer sind als an den Rissen (Kapitel 7.3), spielt hier keine Rolle. Sequentielle Zug-Druckversuche an solchen Versuchskörpern liefern typischerweise etwas geringere Werte der Betondruckfestigkeit als Versuche mit Bewehrung in Zugrichtung, Bild 7.2 (b), was bedeutet, dass die Richtung der Bewehrung einen Einfluss auf das Verhalten hat. In sogenannten Schubversuchen werden die Belastungen derart aufgebracht, dass  $\sigma_3 = -\sigma_1$  ist, was an den Rissen Betondruckspannungen von  $\sigma_{c3} = 2\sigma_3$  und Stahlspannungen in beiden Bewehrungsrichtungen von  $\sigma_s = \sigma_1/\rho$  entspricht, siehe Kapitel 7.2. Die Querdehnung  $\varepsilon_1$  wächst dabei, abhängig vom Bewehrungsgehalt, mit zunehmender Belastung schneller als die

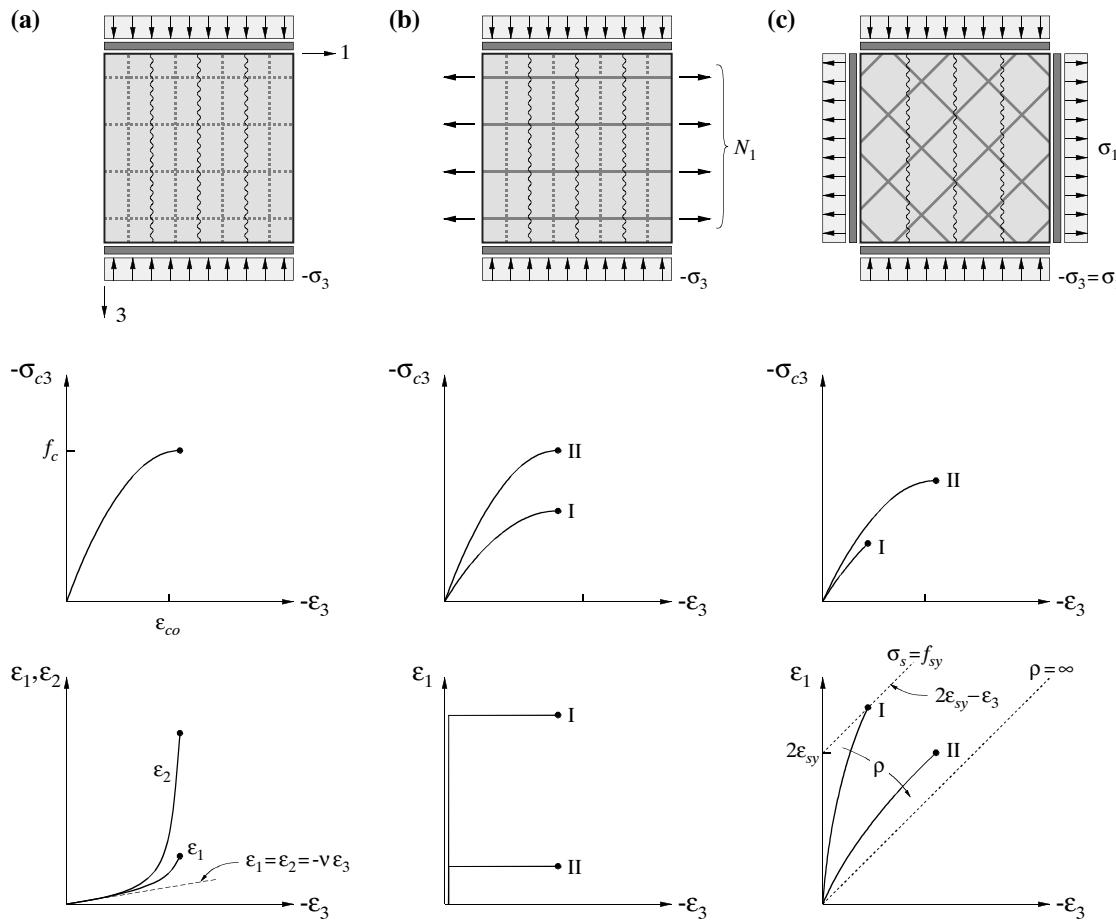


Bild 7.2 – Versuche zur Untersuchung der Reduktion der Betondruckfestigkeit durch aufgezwungene Querdehnungen: (a) einachsige Druckbeanspruchung; (b) sequentielle Zug-Druckbeanspruchung; (c) Schubversuch (isotrop bewehrte Scheibe).

Stauchung  $-\varepsilon_3$ , Bild 7.2 (c). Beim Bruch des Scheibenelementes fliesst die Bewehrung oder der Beton versagt, wobei in letzterem Fall die Bewehrung elastisch bleibt und die Druckfestigkeit sowie die Duktilität des Betons günstig beeinflusst. Bild 7.2 (c) verdeutlicht, dass nur ein beschränkter Bereich von Querdehnungen mit solchen Versuchen untersucht werden kann, da bei einer Querdehnung von maximal  $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_{sy} + \varepsilon_{co}$  die Bewehrung fliesst, oder der Beton bricht.

Schubversuche an orthotrop bewehrten Scheibenelementen, in welchen wesentlich grössere Querdehnungen  $\varepsilon_1$  auftreten, könnten an sich ebenfalls für die Kalibrierung von Beziehungen, welche die Reduktion der Betondruckfestigkeit durch aufgezwungene Querdehnungen beschreiben, verwendet werden. Die Bestimmung der Spannungen in der Bewehrung und im Beton beruht jedoch in solchen Versuchen immer auf einer Reihe von Annahmen, siehe Kapitel 7.2 und 7.3, und die Resultate einer solchen Kalibrierung geben daher zu einem bestimmten Grad lediglich die getroffenen Annahmen wieder.

### Analytische Beziehungen für die Betondruckfestigkeit

Die Abhängigkeit der Betondruckfestigkeit in Stahlbetonscheiben von Querdehnungen – und nicht Querzugspannungen – wurde erstmals von Robinson und Demorieux [90] untersucht. Collins und Vecchio [16,111,112] schlugen, gestützt auf umfangreiche experimentelle Untersuchun-

gen, verschiedene Ausdrücke für die Betondruckfestigkeit in Funktion der Querdehnungen vor, was letztendlich zur Beziehung

$$f_c = \frac{f'_c}{0.8 + 170\epsilon_1} \leq f'_c \quad (7.2)$$

führte. Bild 7.3 (a) vergleicht Gl. (7.2) sowie eine ähnliche, von Hsu [34] vorgeschlagene Beziehung mit den Resultaten von Zug-Druckversuchen gemäss Bild 7.2 (b); die Übereinstimmung ist befriedigend.

Unabhängig von den Querdehnungen weisen in Bild 7.3 (a) Versuche an Prüfkörpern aus Beton mit höherer Zylinderdruckfestigkeit  $f'_c$  tendenziell niedrigere Werte des Verhältnisses  $f_c/f'_c$  auf. Dies bedeutet, dass die Druckfestigkeit  $f_c$  weniger proportional mit der Zylinderdruckfestigkeit  $f'_c$  zunimmt. Diese Feststellung wird durch die in Zylinderdruckversuchen beobachteten unterschiedlichen Versagensmechanismen von Prüfkörpern aus Normalbeton (Gleitbrüche) und hochfestem Beton (laminares Aufspalten) untermauert [38]. Aufgrund einer umfassenden Auswertung von Versuchen wurde daher in [38,39] folgende Beziehung für die Betondruckfestigkeit in Stahlbetonscheiben vorgeschlagen

$$f_c = \frac{(f'_c)^{2/3}}{0.4 + 30\epsilon_1} \leq f'_c \quad (\text{in MPa}) \quad (7.3)$$

welche sowohl den Einfluss der Querdehnungen  $\epsilon_1$  als auch eine weniger als proportionale Zunahme der Druckfestigkeit mit der Zylinderdruckfestigkeit  $f'_c$  berücksichtigt. In Bild 7.3 (a) und (b) ist die Druckfestigkeit gemäss Gl. (7.3) aufgetragen; die Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen ist gut. Wie in [38,39] gezeigt wird, liefert die Beziehung (7.3) auch für orthogonal bewehrte Scheibenelemente unter ebener Beanspruchung gute Resultate.

Wie Bild 7.3 illustriert, ergeben sich für grosse Querdehnungen  $\epsilon_1$  in Zug-Druckversuchen tatsächlich beträchtliche Abminderungen der Druckfestigkeit im Vergleich mit der Zylinderdruckfestigkeit. Entsprechend hohe Werte von  $\epsilon_1$  treten hauptsächlich in orthotrop bewehrten Scheibenelementen und im Steg von dünnwandigen Trägern mit niedrigem Bügelbewehrungsgehalt auf. Unter solchen Umständen ist durchaus mit einer Reduktion der Betondruckfestigkeit im Rahmen der von Gl. (7.3) vorhergesagten Werte zu rechnen.

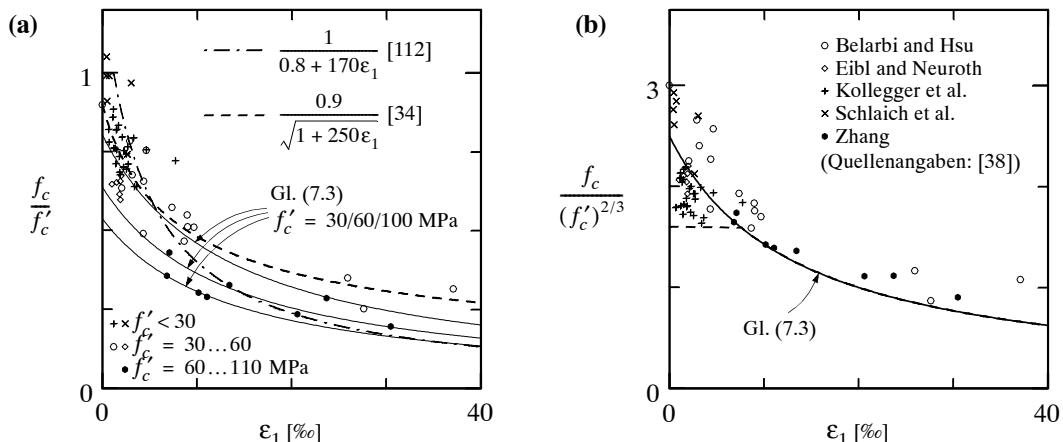


Bild 7.3 – Zug-Druckversuche an Stahlbetonscheiben: (a) Druckfestigkeit und (b) Verhältnis  $f_c/(f'_c)^{2/3}$  (in MPa) in Funktion der aufgezwungenen Querdehnungen und im Vergleich mit der Beziehung (7.3).

## 7.2 Druckfeldmodelle

### 7.2.1 Annahmen

Druckfeldmodelle für das Verhalten von Stahlbetonscheiben zeichnen sich dadurch aus, dass das Tragverhalten von einem gegenüber den Bewehrungsrichtungen geneigten Druckspannungszustand im Beton dominiert wird. Senkrecht zu diesen Hauptdruckspannungen können kleinere Zug- oder Druckspannungen im Beton wirken, und grundsätzlich können somit auch allgemeine Modelle, welche verzahnte Risse vorgegebener Neigung berücksichtigen (Kapitel 7.1.2) als Druckfeldmodelle bezeichnet werden. Solche Modelle werden hier jedoch aus den in Kapitel 7.1.2 erwähnten Gründen nicht weiter untersucht.

Nach dem klassischen Druckfeldmodell, Bild 7.4 (a), werden fiktive, drehbare Risse mit verschwindend kleinem Rissabstand betrachtet. Diese Risse sind spannungsfrei, verlaufen parallel zur Hauptdruckspannungsrichtung und öffnen sich senkrecht zu ihrer Richtung. Die Hauptrichtungen der Spannungen und der Verzerrungen sind somit identisch, Bild 7.4 (b) und (c). Lokale Variationen der Spannungen in der Bewehrung und im Beton, wie sie durch Verbundspannungen hervorgerufen werden, werden vernachlässigt, und im Beton herrscht daher ein uniformer einachsiger Druckspannungszustand, Bild 7.4 (c). Die Hauptrichtungen können sich während der Belastungsgeschichte je nach Grösse der aufgebrachten Lasten frei einstellen; im allgemeinen drehen sie sich mit zunehmender Belastung.

### 7.2.2 Allgemeines numerisches Lösungsverfahren

Der einachsige Druckspannungszustand, welcher aus den getroffenen Annahmen im Beton resultiert, entspricht in den Koordinatenrichtungen Spannungen von  $\sigma_{cx} = \sigma_{c3} \cos^2 \theta$ ,  $\sigma_{cz} = \sigma_{c3} \sin^2 \theta$  und  $\tau_{cxz} = -\sigma_{c3} \sin \theta \cos \theta$ . Mit den Beziehungen  $\sigma_x = \sigma_{cx} + \rho_x \sigma_{sx}$ ,  $\sigma_z = \sigma_{cz} + \rho_z \sigma_{sz}$  und  $\tau_{xz} = \tau_{cxz}$ , gemäss welchen die aufgebrachten nominellen Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  und  $\tau_{xz}$  durch die Resultierende der Spannungen in Beton und Bewehrung aufgenommen werden müssen, erhält man die Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \rho_x \sigma_{sx} + \sigma_{c3} \cos^2 \theta \\ \sigma_z &= \rho_z \sigma_{sz} + \sigma_{c3} \sin^2 \theta \\ \tau_{xz} &= -\sigma_{c3} \sin \theta \cos \theta\end{aligned}\tag{7.4}$$

Diese Beziehungen lassen sich auch direkt aus den Mohrschen Kreisen in Bild 7.4 (c) ablesen.

Betrachtet man die Verzerrungen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  und  $\varepsilon_3$  (oder drei beliebige, nicht kollineare Verzerrungen) als primäre Unbekannte, so können unter Berücksichtigung der Verträglichkeitsbedingung  $\cot^2 \theta_r = (\varepsilon_z - \varepsilon_3)/(\varepsilon_x - \varepsilon_3)$ , siehe Bild 7.4 (b), alle Größen in den drei Gleichgewichtsbedingungen (7.4) in Funktion der drei unbekannten Verzerrungen ausgedrückt werden, falls die Stoffgesetze der Bewehrung und des Betons bekannt sind. Da gemäss den getroffenen Annahmen keine Verbundspannungen auftreten, können die Spannungs-Dehnungs-Beziehungen des nackten Stahls und des unbewehrten Betons verwendet werden. Somit ist es also für jede gegebene Beanspruchung möglich, die drei unbekannten Verzerrungen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  und  $\varepsilon_3$  mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen (7.4) zu bestimmen, wobei allgemein ein iteratives numerisches Vorgehen erforderlich ist.

Sollen nicht bloss die Verzerrungen für eine bestimmte Beanspruchung, sondern vollständige Last-Verformungskurven ermittelt werden, so empfiehlt es sich, bei der Berechnung nicht die

Belastung, sondern die Stauchung  $-\varepsilon_3$  (oder eine andere Verzerrungsgrösse, welche während der Belastungsgeschichte monoton zunimmt) sukzessive zu erhöhen. Bei gegebenem  $\varepsilon_3$  können dann die zwei verbleibenden Verzerrungsgrößen jeweils aus den ersten beiden Gleichungen (7.4) bestimmt werden, und der zugehörige Wert von  $\tau_{xz}$  folgt nach abgeschlossener Iteration aus der dritten Gleichung (7.4). Dieses Vorgehen führt zu einer besseren Konvergenz, da lediglich zwei nichtlineare Gleichungen zu lösen sind, und es vermeidet numerische Probleme infolge entfestigenden Verhaltens des Betons nach dem Überschreiten der Druckfestigkeit.

### 7.2.3 Linear elastisches Materialverhalten

Aus den Gleichgewichtsbedingungen (7.4) erhält man für die Stahl- und Betonspannungen die Ausdrücke  $\sigma_{sx} = (\sigma_x + \tau_{xz} \cot\theta)/\rho_x$ ,  $\sigma_{sz} = (\sigma_z + \tau_{xz} \tan\theta)/\rho_z$  und  $\sigma_{c3} = -\tau_{xz}(\cot\theta + \tan\theta)$ , welche sich wiederum direkt aus den Mohrschen Kreisen in Bild 7.4 (c) ablesen lassen. Für linear elastisches Materialverhalten folgen die Verzerrungen aus den Beziehungen  $\sigma_{sx} = E_s \varepsilon_x$ ,  $\sigma_{sz} = E_s \varepsilon_z$  und  $\sigma_{c3} = E_c \varepsilon_3$ , und Einsetzen der entsprechenden Werte von  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  und  $\varepsilon_3$  in die Verträglichkeitsbedingung  $\cot^2\theta_r = (\varepsilon_z - \varepsilon_3)/(\varepsilon_x - \varepsilon_3)$  liefert die Beziehung

$$\tan^2\theta\rho_x(1+n\rho_z) + \tan\theta\rho_x\frac{\sigma_z}{\tau_{xz}} = \cot^2\theta\rho_z(1+n\rho_x) + \cot\theta\rho_z\frac{\sigma_x}{\tau_{xz}} \quad (7.5)$$

für die Neigung  $\theta$  der Hauptdruckrichtung der Spannungen und Verzerrungen in einem orthogonal bewehrten Scheibenelement unter ebener Beanspruchung, Bild 7.4 (a). Gleichung (7.5) wurde erstmals von Baumann [9] angegeben, welcher eine von Kupfer [44] angegebene Beziehung für die Hauptrichtung im Steg von Stahlbetonträgern verallgemeinerte.

### 7.2.4 Berücksichtigung des Verbundes

Mit klassischen Druckfeldmodellen werden die Verformungen stark überschätzt, da drehbare Risse betrachtet werden und die verstifende Wirkung des Betons zwischen den Rissen vernachlässigt wird. Da die Betondruckfestigkeit gemäss (7.3) vom Verzerrungszustand abhängt, kann somit auch die Bruchlast nur ungenau vorhergesagt werden. Um diese Schwierigkeiten zu überwinden, wurden verschiedene modifizierte Druckfeldmodelle vorgeschlagen.

Vecchio und Collins [112] nahmen in ihrer sogenannten Modified Compression Field Theory an, dass die Hauptrichtungen der Verzerrungen und sogenannter mittlerer Spannungen im Beton zusammenfallen; den mittleren Spannungen – als Mittelwerte der Spannungen über ein Risselement – kommt dabei keine direkte physikalische Bedeutung zu. Die Gleichgewichtsbeziehungen drückten Vecchio und Collins ebenfalls in mittleren Spannungen aus, unter Berücksichtigung von mittleren Zugspannungen im Beton, und sie führten empirische Beziehungen zwischen mittleren Verzerrungen und mittleren Zug- und Druckspannungen im Beton ein, die sie an zahlreichen Versuchen kalibrierten. Für die Bewehrung verwendeten sie die Spannungs-Dehnungsbeziehungen des nackten Stahls. Im allgemeinen wird nach diesem Modell die mittlere Hauptdruckspannung  $\sigma_{c3m}$  von einer mittleren Hauptzugspannung  $\sigma_{c1m}$  begleitet, Bild 7.4 (d), was zur Folge hat, dass bei gleicher Beanspruchung und identischer Hauptrichtung  $\theta = \theta_m$  die (mittleren) Stahlspannungen niedriger sind als nach dem klassischen Druckfeldmodell, Bild 7.4 (a). Somit fallen auch die entsprechenden Verzerrungen geringer aus, was einer impliziten Berücksichtigung der Verbundwirkung gleichkommt.

Vecchio und Collins' Modell ermöglichte erstmals die Berücksichtigung der Verbundwirkung in Stahlbetonscheiben und trug damit wesentlich zur Entwicklung des heutigen Kenntnisstandes bei. Die Verwendung der Spannungs-Dehnungsbeziehungen des nackten Stahls in Funktion von

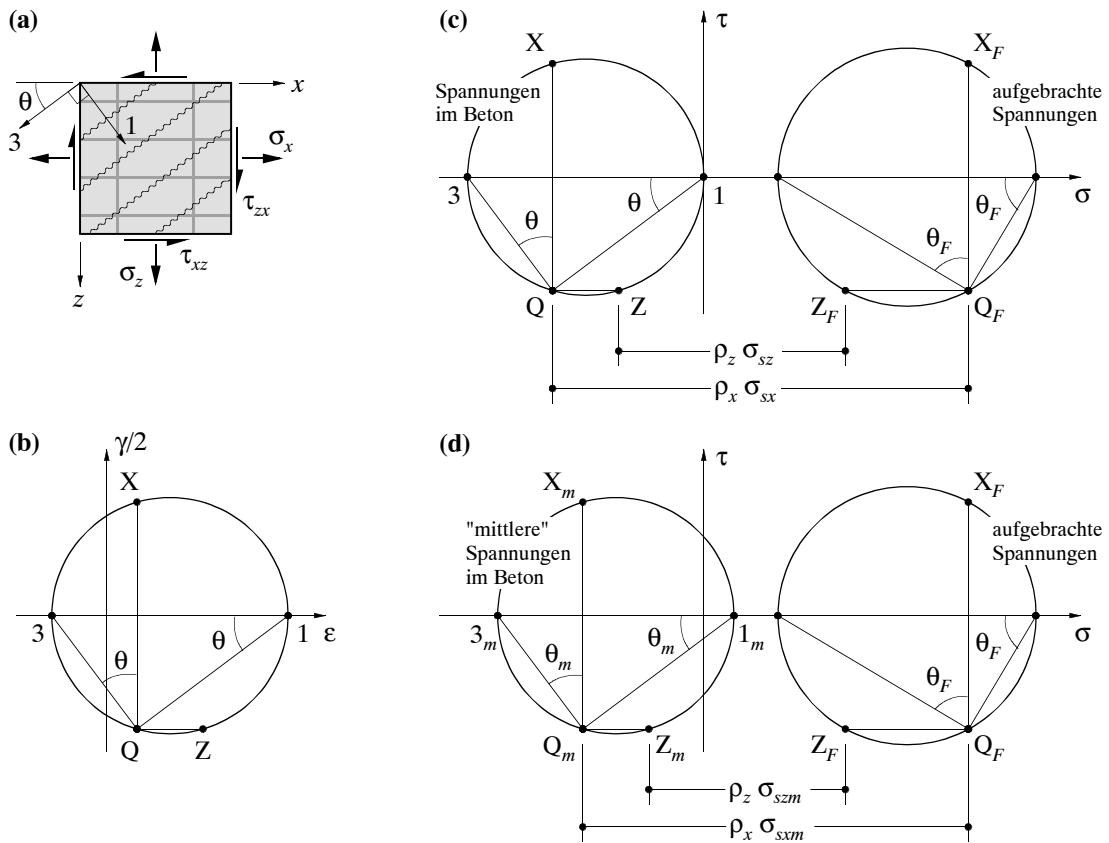


Bild 7.4 – Druckfeldmodelle: (a) Bezeichnungen; (b) Verzerrungen; (c) Spannungen nach klassischem Druckfeldmodell; (d) Spannungen nach Vecchio und Collins' sogenannter Modified Compression Field Theory [112].

mittleren Spannungen und Verzerrungen stellt jedoch einen gravierenden konzeptionellen Schwachpunkt dar [38]. Die zugrundeliegende Problematik kann am einfachsten anhand eines Stahlbetonzugglieds aufgezeigt werden, bei welchem in den Rissquerschnitten zweifellos die gesamte Zugkraft von der Bewehrung allein aufgenommen werden muss. Formuliert man nun – ungeteilt der Frage nach dem Schnitt, an welchem diese Spannungen angreifen sollen – Gleichgewicht in Funktion von mittleren Spannungen zwischen den Rissen, unter Berücksichtigung von mittleren Zugspannungen im Beton, so führt die Verwendung der Spannungs-Dehnungsbeziehung des nackten Stahls offensichtlich zu einer Überschätzung des Tragwiderstandes, und zwar gerade um den Betrag der Resultierenden der mittleren Betonzugspannungen. Um dies zu verhindern, führten Vecchio und Collins eine zusätzliche Kontrolle der Stahlspannungen an den Rissen ein, wobei sie beträchtliche Schubspannungen an den Rissufern zuließen. Dies ist jedoch unvereinbar mit der dem Modell zugrundeliegenden Annahme zusammenfallender Hauptrichtungen mittlerer Spannungen und Verzerrungen, gemäß welcher sich senkrecht öffnende Risse parallel zur Hauptdruckrichtung der mittleren Spannungen betrachtet werden.

Das sogenannte Softened Truss Model, welches von Hsu [34] vorgeschlagen wurde, stimmt im wesentlichen mit dem Modell von Vecchio und Collins überein. Es eliminiert jedoch den erwähnten konzeptionellen Schwachpunkt der Modified Compression Field Theory durch die Verwendung von in geeigneter Weise angepassten Beziehungen für die mittleren Spannungen in der Bewehrung in Funktion der mittleren Verzerrungen.

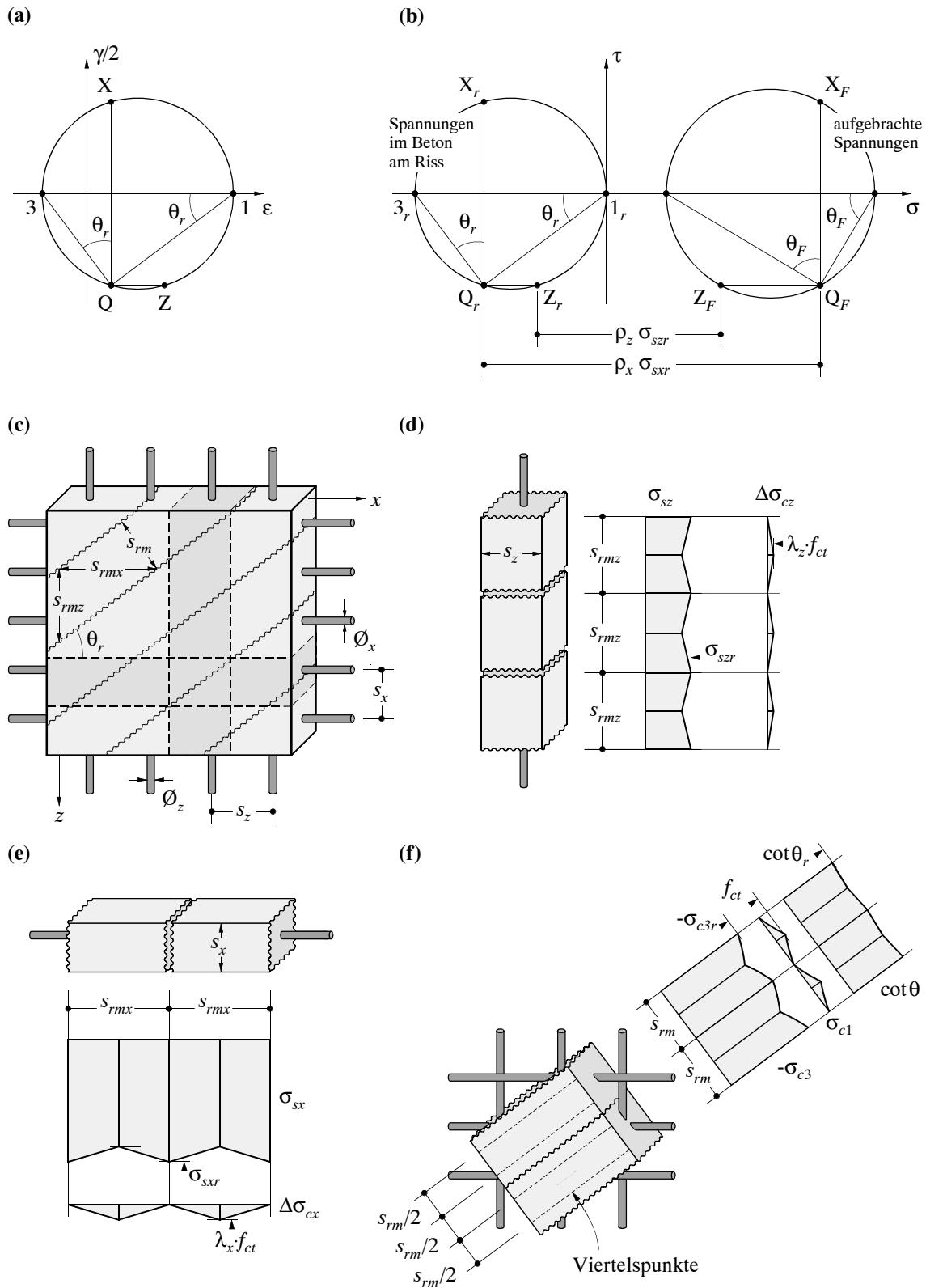


Bild 7.5 – Gerissenes Scheibenmodell: (a) Verzerrungen; (b) aufgebrachte Spannungen und Betonspannungen am Riss; (c) Stab- und Rissabstände; (d) und (e) Verlauf der Spannungen in vertikaler und horizontaler Richtung; (f) Hauptspannungen im Beton, Variation der Hauptdruckspannungsrichtung im Beton und Lage der Viertelpunkte.

Keines der besprochenen Druckfeldmodelle liefert Informationen über Rissabstände, Rissbreiten oder Verformungslokalisierungen in der Bewehrung in Rissnähe. Sie sind somit nicht dazu geeignet, Fragen der Mindestbewehrung oder des Verformungsvermögens zu diskutieren. Zudem haben Modelle, welche Gleichgewicht in Funktion von mittleren Sannungen zwischen den Rissen formulieren den Nachteil, dass durch die Einführung der mittleren Zugspannungen im Beton die Verbindung zu den Traglastverfahren (Kapitel 3.3) verloren geht. Auch für die Untersuchung der Anwendbarkeit plastizitätstheoretischer Methoden eignen sich die besprochenen Modelle somit nur beschränkt. Diese unbefriedigende Situation war der Ausgangspunkt für die Entwicklung des Gerissenen Scheibenmodells [38,39].

## 7.3 Gerissenes Scheibenmodell

### 7.3.1 Annahmen

Wie beim klassischen Druckfeldmodell werden spannungsfreie, drehbare Risse betrachtet, welche senkrecht zur Richtung der Hauptzugdehnung verlaufen. Die Rissrichtung  $\theta_r$  ist somit ein variabler und nicht ein vorgegebener Winkel, und die Hauptdruckrichtung der Betonspannungen an den Rissen fällt mit derjenigen der Hauptdehnungen zusammen, Bild 7.5 (a) und (b). Da die Hauptspannungsrichtung im Beton zwischen den Rissen im allgemeinen etwas variiert, ist diese Koaxialität in Wirklichkeit nur annähernd erfüllt; da die Betonverzerrungen nur einen kleinen Beitrag zu den totalen Verformungen liefern, sind die Abweichungen jedoch in der Regel gering.

Für spannungsfreie Risse erhält man aus den Gleichgewichtsbedingungen am Rissquerschnitt (7.1) mit  $\sigma_{cnr} = \tau_{ctnr} = 0$  die Beziehungen

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \rho_x \sigma_{sxr} + \sigma_{c3r} \cos^2 \theta_r \\ \sigma_z &= \rho_z \sigma_{szr} + \sigma_{c3r} \sin^2 \theta_r \\ \tau_{xz} &= -\sigma_{c3r} \sin \theta_r \cos \theta_r\end{aligned}\tag{7.6}$$

wobei  $\sigma_{c3r} = \sigma_{ctr}$  und  $\sigma_{c1r} = \sigma_{cnr} = 0$  ist. Diese Gleichungen stimmen bis auf den Index  $r$  mit den Gleichungen (7.4) überein. Durch Umformen erhält man die Stahl- und Betonspannungen am Riss in Funktion der Rissneigung und der aufgebrachten Spannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_z$  und  $\tau_{xz}$

$$\begin{aligned}\sigma_{sxr} &= (\sigma_x + \tau_{xz} \cot \theta_r) / \rho_x \\ \sigma_{szr} &= (\sigma_z + \tau_{xz} \tan \theta_r) / \rho_z \\ \sigma_{c3r} &= -\tau_{xz} / (\sin \theta_r \cos \theta_r) = -\tau_{xz} (\cot \theta_r + \tan \theta_r)\end{aligned}\tag{7.7}$$

Diese Beziehungen lassen sich aus den Mohrschen Kreisen in Bild 7.5 (b) direkt ablesen.

Stahl- und Verbundspannungen werden nach dem Zuggurtmodell, Kapitel 6, behandelt; die hier verwendeten Grundlagen sind in Bild 7.6 zusammengestellt. Grundsätzlich wäre es wie in Kapitel 6 möglich, verschiedene Spannungs-Dehnungs-Beziehungen der Bewehrung zu berücksichtigen. In Anbetracht der weiteren getroffenen Vereinfachungen (spannungsfreie, drehbare Risse) wird jedoch lediglich ein bilineares Stoffgesetz verwendet, Bild 7.6 (a). Die dreidimensionale Darstellung der Verbundspannungs-Schlupf Beziehung in Bild 7.6 (b) soll nochmals verdeutlichen, dass die Verbundspannungen vom Spannungszustand der Bewehrung abhängen, vom Schlupf der Bewehrung jedoch unabhängig sind. Dies ist bei Scheibenelementen besonders wichtig, da die Berechnung des Schlupfs mit enormem Aufwand verbunden wäre. Für die Verbundspannungen wird auch hier  $\tau_{b1} = \tau_{b0}/2 = f_{ct} = 0.3(f'_c)^{2/3}$  in MPa angenommen.

Für die maximalen Stahlspannungen  $\sigma_{sr}$  am Riss in Funktion der mittleren Verzerrungen  $\varepsilon_m$  erhält man für die getroffenen Annahmen aus den Spannungs- und Dehnungsverteilungen in Bild 7.6 (c) für  $\sigma_{sr} \leq f_{sy}$  (Stahlspannungen über ganzes Risselement im elastischen Bereich)

$$\sigma_{sr} = E_s \varepsilon_m + \frac{\tau_{b0} s_{rm}}{\emptyset} \quad (7.8)$$

für  $f_{sy} < \sigma_{sr} \leq f_{sy} + 2\tau_{b1} s_{rm}/\emptyset$  (Bewehrung fliesst in Rissnähe)

$$\sigma_{sr} = f_{sy} + 2 \frac{\frac{\tau_{b0} s_{rm}}{\emptyset} - \sqrt{(f_{sy} - E_s \varepsilon_m) \frac{\tau_{b1} s_{rm}}{\emptyset} \left( \frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - \frac{E_s}{E_{sh}} \right) + \frac{E_s}{E_{sh}} \tau_{b0} \tau_{b1} \frac{s_{rm}^2}{\emptyset^2}}}{\frac{\tau_{b0}}{\tau_{b1}} - \frac{E_s}{E_{sh}}} \quad (7.9)$$

und für  $f_{sy} + 2\tau_{b1} s_{rm}/\emptyset < \sigma_{sr} \leq f_{su}$  (Bewehrung fliesst über ganzes Risselement)

$$\sigma_{sr} = f_{sy} + E_{sh} \left( \varepsilon_m - \frac{f_{sy}}{E_s} \right) + \frac{\tau_{b1} s_{rm}}{\emptyset} \quad (7.10)$$

Diese Beziehungen sind zu den Gleichungen (6.9) bis (6.11) äquivalent.

Für die Betondruckspannungen  $\sigma_{c3r}$  am Riss wird folgendes Stoffgesetz verwendet

$$\sigma_{c3r} = \frac{(f'_c)^{2/3}}{0.4 + 30\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_3^2 + 2\varepsilon_3\varepsilon_{c0}}{\varepsilon_{c0}^2} \quad (7.11)$$

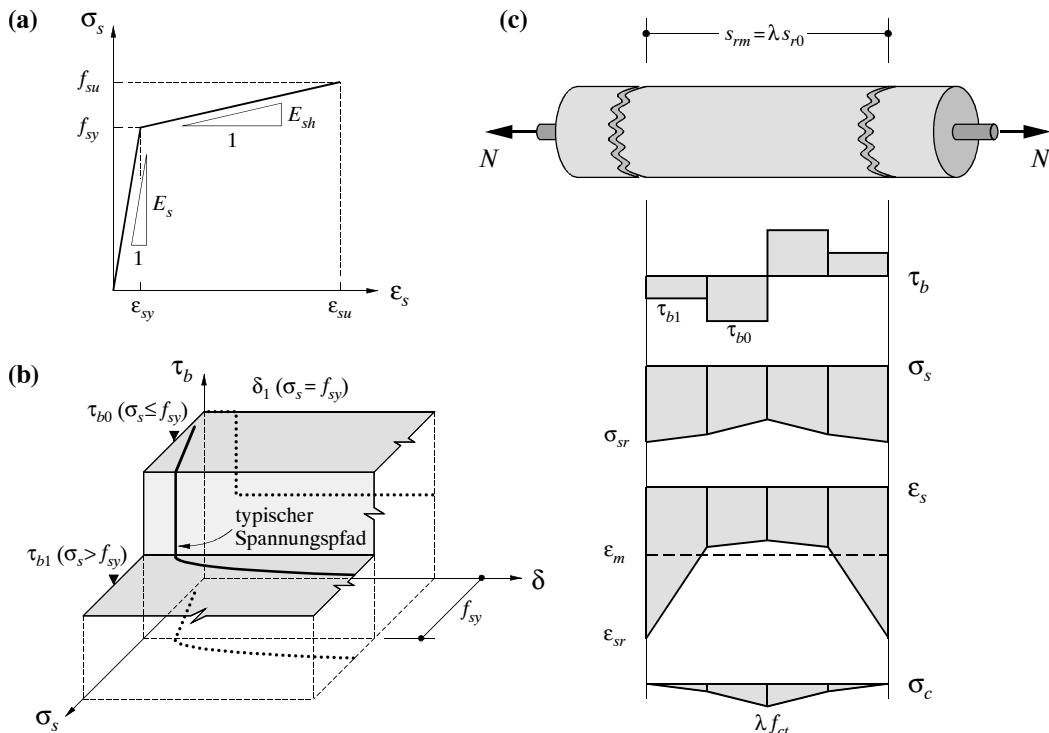


Bild 7.6 – Zusammenstellung der verwendeten Grundlagen des Zuggurtmodells: (a) bilineares Spannungs-Dehnungsgesetz der Bewehrung; (b) abgetreppte, starr-ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupf Beziehung; (c) Risselement mit Verteilung von Spannungen und Dehnungen.

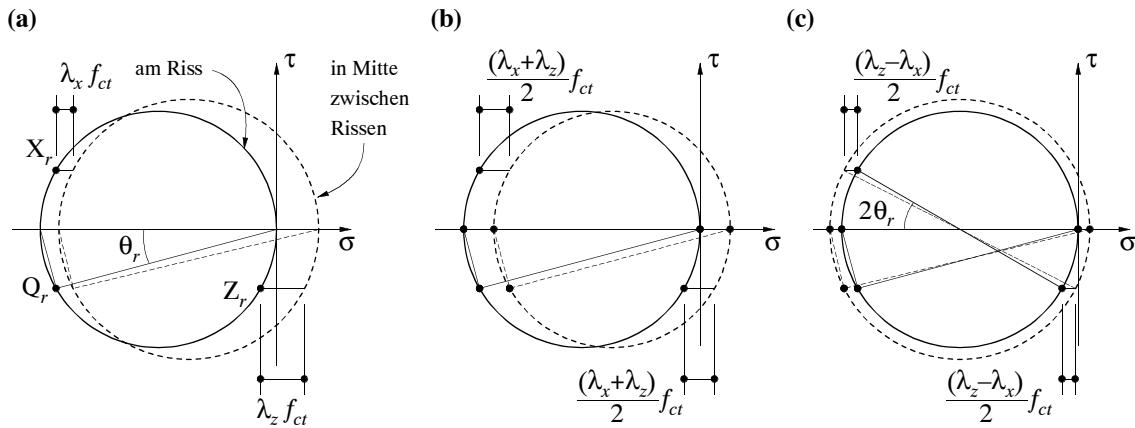


Bild 7.7 – Gerissenes Scheibenmodell: (a) Spannungen im Beton am Riss und in der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen; (b) und (c) Aufteilung der über Verbund auf den Beton einwirkenden Zugspannungen in einen symmetrischen und einen antimetrischen Anteil.

welches eine parabolische Grundkurve (für  $f_c = \text{konstant}$ ) mit der Betondruckfestigkeit nach (7.3) kombiniert. Dabei ist  $\varepsilon_{c0}$  die Betonstauchung beim Erreichen der Druckfestigkeit im Zylinderdruckversuch, und  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$  sind die Hauptwerte der mittleren totalen Verzerrungen.

### 7.3.2 Rissabstand und Spannungen im Beton

Gemäss Bild 7.5 (c) sind die Rissabstände in den Bewehrungsrichtungen,  $s_{rmx}$  und  $s_{rmz}$ , mit dem diagonalen Rissabstand  $s_{rm}$  über die Beziehung

$$s_{rm} = s_{rmx} \sin \theta_r = s_{rmz} \cos \theta_r \quad (7.12)$$

verknüpft. Der Spannungsverlauf zwischen den Rissen ist in Bild 7.5 (d) und (e) illustriert. In der Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen erreichen die durch Verbundspannungen auf den Beton übertragenen Zugspannungen ihre Maximalwerte  $\Delta\sigma_{cx} = \lambda_x f_{ct}$  und  $\Delta\sigma_{cz} = \lambda_z f_{ct}$ , mit den Parametern

$$\lambda_x = \frac{\Delta\sigma_{cx}}{f_{ct}} = \frac{s_{rmx}}{s_{rx0}} = \frac{s_{rm}}{s_{rx0} \sin \theta_r}, \quad \lambda_z = \frac{\Delta\sigma_{cz}}{f_{ct}} = \frac{s_{rmz}}{s_{rz0}} = \frac{s_{rm}}{s_{rz0} \cos \theta_r} \quad (7.13)$$

welche für eine Zugbeanspruchung in den Bewehrungsrichtungen den Bedingungen  $0.5 \leq \lambda_x \leq 1$  und  $0.5 \leq \lambda_z \leq 1$  genügen müssten, vergleiche (6.6). In (7.13) bezeichnen  $s_{rx0}$  und  $s_{rz0}$  die maximalen Rissabstände für eine Zugbeanspruchung in  $x$ - und  $z$ -Richtung, welche durch die Beziehungen

$$s_{rx0} = \frac{f_{ct}\emptyset_x(1-\rho_x)}{2\tau_{b0}}, \quad s_{rz0} = \frac{f_{ct}\emptyset_z(1-\rho_z)}{2\tau_{b0}} \quad (7.14)$$

bestimmt sind, siehe (6.6).

Bild 7.5 (f) illustriert den Verlauf der Hauptspannungen  $\sigma_{c1}$  und  $\sigma_{c3}$  im Beton sowie die Variation von  $\cot \theta$ . Mit  $\theta$  wird die Neigung der Hauptdruckrichtung der Betonspannungen bezüglich der  $x$ -Achse bezeichnet. Aus der Bedingung, dass die Hauptzugspannungen im Beton in der

Mitte zwischen zwei benachbarten Rissen die Zugfestigkeit des Betons nicht überschreiten können folgt mit Bild 7.7 (a) die Beziehung

$$\frac{f_{ct}}{2}(\lambda_x + \lambda_z) - \frac{\tau_{xz}}{2}(\cot\theta_r + \tan\theta_r) + \sqrt{\left[\frac{\tau_{xz}}{2}(\cot\theta_r - \tan\theta_r) - \frac{f_{ct}}{2}(\lambda_x - \lambda_z)\right]^2 + \tau_{xz}^2} \leq f_{ct} \quad (7.15)$$

Aus Gleichung (7.15) kann der maximale diagonale Rissabstand  $s_{r0}$ , unter Berücksichtigung von (7.13) und (7.14), numerisch bestimmt werden. Bild 7.8 zeigt polare Darstellungen der Lösung für  $\rho_x = 2.5\%$ ,  $\emptyset_x = \emptyset_z = 16$  mm,  $f'_c = 30$  MPa und  $\tau_{b0}/2 = f_{ct} = 0.3(f'_c)^{2/3}$  in MPa. Der minimale Rissabstand folgt aus der gleichen Überlegung wie für einachsige Zugbeanspruchung, Kapitel 6, zu  $s_{r0}/2$ , so dass der diagonale Rissabstand bei abgeschlossenem Rissbild durch die Schranken

$$s_{r0}/2 \leq s_{rm} \leq s_{r0} \quad (7.16)$$

begrenzt ist, oder, mit  $\lambda = s_{rm}/s_{r0}$ , durch die gleichbedeutende Bedingung  $0.5 \leq \lambda \leq 1$ .

Eine Näherungslösung für den diagonalen Rissabstand findet man, indem man die über Verbundwirkung auf den Beton einwirkenden Zugspannungen gemäss Bild 7.7 (b) und (c) in einen symmetrischen und einen antimetrischen Anteil aufteilt. Die maximale Zugspannung im Beton beträgt demnach näherungsweise

$$\frac{f_{ct}}{2}(\lambda_x + \lambda_z) - \frac{f_{ct}}{2}(\lambda_x - \lambda_z)\cos(2\theta_r) = f_{ct}(\lambda_x \sin^2\theta_r + \lambda_z \cos^2\theta_r) \quad (7.17)$$

und entspricht für den maximalen Rissabstand gerade der Zugfestigkeit  $f_{ct}$  des Betons. Mit (7.13) folgt somit die Näherung für den maximalen diagonalen Rissabstand

$$s_{r0} = \frac{1}{\frac{\sin\theta_r}{s_{rx0}} + \frac{\cos\theta_r}{s_{rz0}}} \quad (7.18)$$

Wie aus Bild 7.8 hervorgeht, fällt die Näherungslösung (7.18) sowohl für  $\lambda_x = \lambda_z$  als auch für hohe Werte von  $\tau_{xz}/f_{ct}$  mit der exakten numerischen Lösung gemäss Gleichung (7.15) zusammen. Allgemein liefert sie einen oberen Grenzwert für den maximalen diagonalen Rissabstand.

### 7.3.3 Allgemeines numerisches Lösungsverfahren

Das Lösungsverfahren ist identisch wie für Druckfeldmodelle, Kapitel 7.2.2. Man betrachtet die mittleren totalen Verzerrungen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  und  $\varepsilon_3$  (oder drei beliebige, nicht kollineare Verzerrungen) als primäre Unbekannte, und unter Berücksichtigung der Beziehungen  $\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_z - \varepsilon_3$  und  $\cot^2\theta_r = (\varepsilon_z - \varepsilon_3)/(\varepsilon_x - \varepsilon_3)$  können alle Größen in den drei Gleichgewichtsbedingungen (7.6) in Funktion dieser drei Unbekannten ausgedrückt werden. Die Betonspannungen  $\sigma_{c3r}$  am Riss sind durch die Beziehung (7.11) bestimmt, und die Stahlspannungen  $\sigma_{sxr}$  und  $\sigma_{szr}$  am Riss folgen aus den Gleichungen (7.8) bis (7.10), wobei natürlich für die  $x$ - und  $z$ -Richtung die entsprechenden Werte von  $f_{sy}$ ,  $f_{su}$ ,  $E_s$ ,  $E_{sh}$ ,  $\tau_{b0}$ ,  $\tau_{b1}$ ,  $\rho$ ,  $\emptyset$  und  $s_{rm}$  einzusetzen sind. Die Rissabstände  $s_{rm}$ ,  $s_{rmx}$  und  $s_{rmz}$  sind dabei über die Beziehung (7.12) verknüpft, und der maximale diagonale Rissabstand folgt aus Gleichung (7.15) oder der Näherungslösung (7.18). Somit ist es für jede gegebene Beanspruchung möglich, die Verzerrungen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  und  $\varepsilon_3$  aus den Gleichgewichtsbedingungen (7.6) zu bestimmen, wobei im allgemeinen ein iteratives Vorgehen erforderlich ist.

Sollen nicht bloss die Verzerrungen für eine bestimmte Beanspruchung, sondern vollständige Last-Verformungskurven ermittelt werden, so ist es auch hier besser, die Berechnungen durch in-

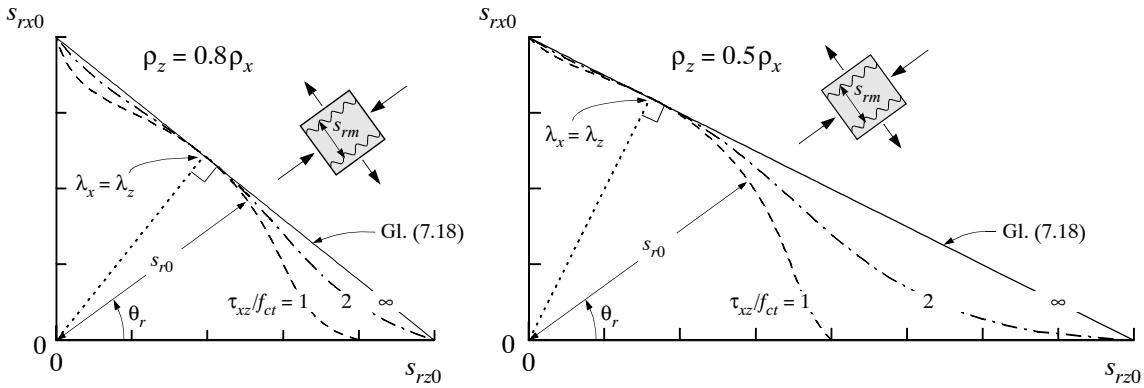


Bild 7.8 – Gerissenes Scheibenmodell: polare Darstellungen des maximalen diagonalen Rissabstandes  $s_{r0}$  für verschiedene Verhältnisse der Bewehrungsgehalte  $\rho_x$  und  $\rho_z$ .

krementelle Erhöhung von  $\varepsilon_3$  (und nicht der Belastung) durchzuführen. Dieses Vorgehen führt zu einer besseren Konvergenz, da lediglich zwei nichtlineare Gleichungen zu lösen sind, und vermeidet numerische Probleme, welche sich aus dem entfestigenden Verhalten des Betons nach dem Überschreiten der Druckfestigkeit ergeben.

### 7.3.4 Rissbreiten und Einfluss von Querdehneffekten

Wie in Kapitel 7.2.2 erläutert, können die totalen Verzerrungen einer Stahlbetonscheibe als Summe von mittleren rissbedingten Verzerrungen und mittleren Verzerrungen des Betons zwischen den Rissen aufgefasst werden. Die Rissbreite ergibt sich dann als Produkt der mittleren rissbedingten Hauptdehnung  $\varepsilon_1^{(r)}$  mit dem diagonalen Rissabstand  $s_{rm}$

$$w_r = \varepsilon_1^{(r)} s_{rm} \quad (7.19)$$

Im Gerissenen Scheibenmodell wurden bislang ausschliesslich totale Verzerrungen betrachtet. Die mittlere rissbedingte Hauptdehnung  $\varepsilon_1^{(r)}$  kann jedoch berechnet werden, indem die mittlere Hauptdehnung des Betons zwischen den Rissen,  $\varepsilon_1^{(c)}$ , von der totalen Hauptdehnung  $\varepsilon_1$  in Abzug gebracht wird. Die Verzerrungen des Betons zwischen den Rissen können grundsätzlich mit Hilfe einer biaxialen Spannungs-Dehnungsbeziehung aus den Spannungen im Beton zwischen den Rissen berechnet werden. Es zeigt sich jedoch [38], dass  $\varepsilon_1^{(c)}$  für nicht sehr grosse Bewehrungsgehalte im Vergleich mit  $\varepsilon_1$  vernachlässigt werden kann, zumal für den diagonalen Rissabstand  $s_{rm}$  lediglich obere und untere Schranken angegeben werden können. Die Rissbreite kann somit aufgrund der Beziehung

$$w_r = \varepsilon_1 s_{rm} \quad (7.20)$$

mit ausreichender Genauigkeit abgeschätzt werden.

Grundsätzlich sollte bei einer Berechnung nach dem Gerissenen Scheibenmodell berücksichtigt werden, dass die über Verbundwirkung in den Beton zwischen den Rissen eingetragenen Zugspannungen die Verzerrungen des Betons beeinflussen. Verhielte sich der Beton zwischen den Rissen linear elastisch, so würde infolge dieser Zugspannungen ein “weicheres” Verhalten des Betons in der Hauptdruckspannungsrichtung resultieren. Mit zunehmender Beanspruchung haben jedoch die Rippen der Bewehrungsstäbe eher die Tendenz, den Beton aufzuspalten, was wiederum zu einem “steiferen” Verhalten des Betons in der Hauptdruckspannungsrichtung führen würde. Eine nähere Untersuchung dieser Effekte [38] zeigt, dass ihr Einfluss gering ist und sie somit vernachlässigt werden können.

## 7.4 Näherungsverfahren

### 7.4.1 Analytische Näherungslösung

Nimmt man an, dass die Spannungen und Verzerrungen in den Viertelpunkten zwischen den Rissen, Bild 7.5 (f), charakteristisch für das Verhalten des Elementes sind, so kann eine analytische Näherungslösung für das Last-Verformungsverhalten hergeleitet werden.

Aus Bild 7.5 (d) und (e) sowie den Beziehungen (7.7) und (7.13) folgen die Stahlspannungen in der Bewehrung in den Viertelpunkten zu

$$\begin{aligned}\rho_x \sigma_{sx} &= \sigma_x + \tau_{xz} \cot \theta_r - \frac{f_{ct} \lambda_x (1 - \rho_x)}{2} \\ \rho_z \sigma_{sz} &= \sigma_z + \tau_{xz} \tan \theta_r - \frac{f_{ct} \lambda_z (1 - \rho_z)}{2}\end{aligned}\quad (7.21)$$

und mit der gleichen Näherung wie für Gleichung (7.18), Bild 7.7 (b) und (c), resultiert für die Hauptdruckspannungen im Beton in den Viertelpunkten zwischen den Rissen die Beziehung

$$-\sigma_{c3} = \tau_{xz} (\tan \theta_r + \cot \theta_r) - \frac{f_{ct} (\lambda_x + \lambda_z - \lambda)}{2} \quad (7.22)$$

Für linear elastisches Materialverhalten erhält man somit für die Verzerrungen  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  und  $\varepsilon_3$  in den Viertelpunkten zwischen den Rissen

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x + \tau_{xz} \cot \theta_r - f_{ct} \lambda_x (1 - \rho_x) / 2}{\rho_x E_s} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z + \tau_{xz} \tan \theta_r - f_{ct} \lambda_z (1 - \rho_z) / 2}{\rho_z E_s} \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\tau_{xz} (\tan \theta_r + \cot \theta_r) - f_{ct} (\lambda_x + \lambda_z - \lambda) / 2}{E_c}\end{aligned}\quad (7.23)$$

wenn der Einfluss von Querdehnungen vernachlässigt wird, siehe Kapitel 7.3.4. Einsetzen der Werte von  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_z$  und  $\varepsilon_3$  in die Verträglichkeitsbedingung  $\cot^2 \theta_r = (\varepsilon_z - \varepsilon_3) / (\varepsilon_x - \varepsilon_3)$  liefert die Beziehung für die Rissneigung  $\theta_r$

$$\begin{aligned}\tan^2 \theta_r \rho_x (1 + n \rho_z) + \tan \theta_r \rho_x \left\{ \frac{\sigma_z}{\tau_{xz}} - \frac{f_{ct}}{2 \tau_{xz}} \left[ \lambda_z + n \rho_z \left( \lambda_x + \frac{n-1}{n} \lambda_z - \lambda \right) \right] \right\} &= \\ \cot^2 \theta_r \rho_z (1 + n \rho_x) + \cot \theta_r \rho_z \left\{ \frac{\sigma_x}{\tau_{xz}} - \frac{f_{ct}}{2 \tau_{xz}} \left[ \lambda_x + n \rho_x \left( \lambda_z + \frac{n-1}{n} \lambda_x - \lambda \right) \right] \right\} &= \end{aligned}\quad (7.24)$$

Dabei sind  $\lambda_x$  und  $\lambda_z$  gemäß (7.13) von  $\theta_r$  abhängig, und die Lösung von (7.24) erfordert somit ein iteratives numerisches Vorgehen.

Gleichung (7.24) enthält die für eine Bewehrung ohne Verbund gültige Beziehung (7.5) als Spezialfall ( $f_{ct} = 0$ ), und für  $\lambda_x = \lambda_z = \lambda$  stimmt die Rissneigung mit derjenigen nach der sogenannten Modified Compression Field Theory [112] praktisch überein [38,39].

Maximale Rissbreiten im Gebrauchszustand (elastisches Verhalten von Stahl und Beton) können mit  $\varepsilon_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_z - \varepsilon_3$  aus den Beziehungen (7.19) bzw. (7.20) und (7.23) bestimmt werden, wobei der Wert von  $\theta_r$  aus Gl. (7.24) folgt.

### 7.4.2 Vereinfachter Bemessungsvorschlag

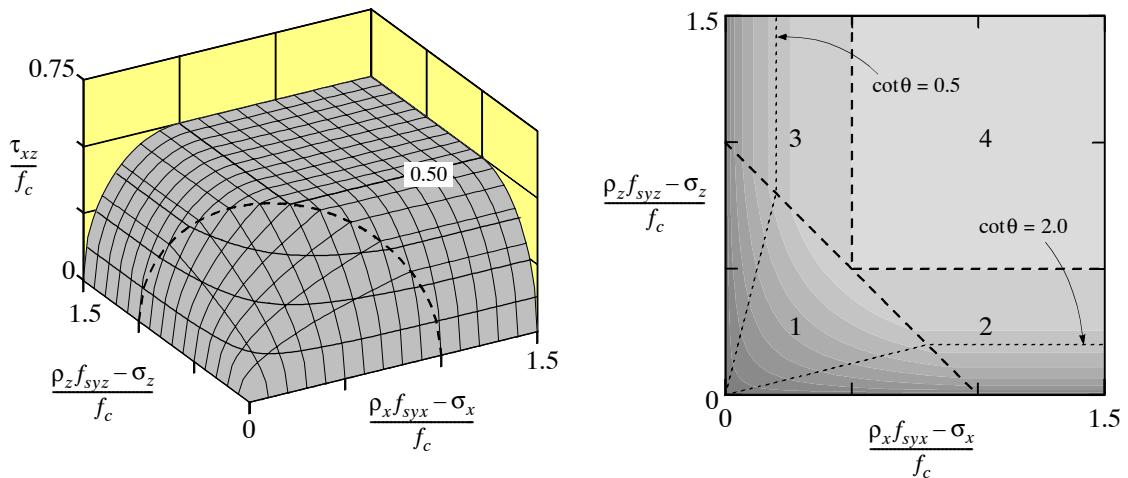
In der Bemessungspraxis geht es oftmals in erster Linie darum, die Traglast zu bestimmen. Nichtlineare Last-Verformungsberechnungen nach dem Gerissenen Scheibenmodell sind in solchen Fällen natürlich nicht besonders effizient. Für ideal plastisches Materialverhalten ist es möglich, die Traglast direkt aus den Fliessbedingungen (3.20) zu bestimmen. Bild 7.9 (a) zeigt die entsprechenden, für nicht primär auf Druck beanspruchte Scheiben relevanten Fliessregimes. In Regime 1 fliessen beide Bewehrungen, in den Regimes 2 und 3 bricht der Beton, während eine Bewehrung fliest und die andere elastisch bleibt, und in Regime 4 bricht der Beton, während beide Bewehrungen elastisch bleiben. Bei der Anwendung dieser Fliessbedingungen stellt sich immer die Frage nach der effektiven Betondruckfestigkeit  $f_c'$ . Diese hängt gemäss Kapitel 7.1.4 vom Verzerrungszustand ab, welcher aber im Rahmen der Traglastverfahren nicht bestimmt werden kann. Dieses Problem stellt sich auch bei einer Bemessung im Regime 1, in welchem die Traglast von  $f_c'$  unabhängig ist; für die Kontrolle der Hauptdruckspannungen (bzw. der Regimegrenze) gemäss Gl. (3.25) wird die Betondruckfestigkeit benötigt. In Bemessungsvorschriften begnügt man sich hierbei oftmals mit einem vom Verzerrungszustand unabhängigen, konservativen Wert von  $f_c'$  und führt, um vorzeitigem Versagen durch Betonbruch vorzubeugen, eine Begrenzung der Druckfeldneigung ein, zum Beispiel  $0.5 \leq \cot\theta \leq 2$ , siehe Bild 7.9 (a).

Führt man für verschiedene Kombinationen von Bewehrungsgehalten in  $x$ - und  $z$ -Richtung eine vollständige Last-Verformungsberechnung nach dem Gerissenen Scheibenmodell durch und ermittelt dabei jeweils die maximale Schubbeanspruchung, so erhält man Bruchbedingungen nach dem Gerissenen Scheibenmodell. Bild 7.9 (b) zeigt eine solche Bruchbedingung, welche für  $f_c' = 30 \text{ MPa}$  und  $\epsilon_{c0} = 0.002$  sowie für in beiden Bewehrungsrichtungen identische Werte von  $f_{sy} = 500 \text{ MPa}$ ,  $f_{su} = 625 \text{ MPa}$ ,  $E_s = 200 \text{ GPa}$ ,  $\epsilon_{su} = 0.05$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\emptyset = 16 \text{ mm}$  und  $\tau_{b1} = \tau_{b0}/2 = f_{ct} = 0.3(f_c')^{2/3}$  in MPa ermittelt wurde.

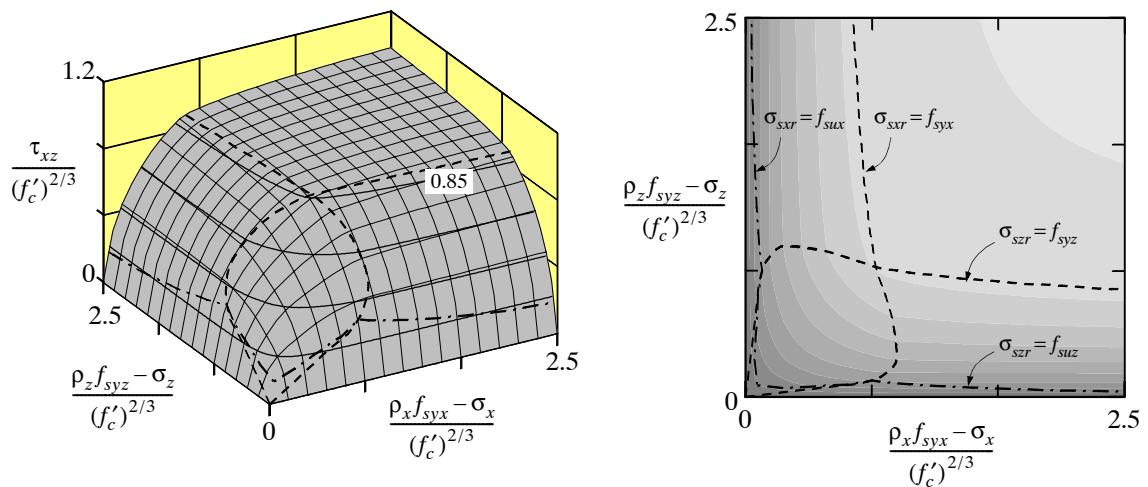
Vergleicht man diese Bruchbedingung mit den Fliessbedingungen nach Plastizitätstheorie, so stellt man fest, dass nur geringe Unterschiede bestehen, falls in den Fliessbedingungen (3.20)  $f_c \approx 1.7(f_c')^{2/3}$  in MPa angenommen wird. Insbesondere erhält man auch nach dem Gerissenen Scheibenmodell einen Bereich, innerhalb dessen beim Bruch beide Bewehrungen fliessen (entsprechend Regime 1), zwei Bereiche, in welchen jeweils eine Bewehrung beim Bruch fliest, während die andere elastisch bleibt (entsprechend Regimes 2 und 3), sowie einen Bereich, in welchem beide Bewehrungen beim Bruch elastisch bleiben (entsprechend Regime 4). Zusätzlich bestehen für sehr kleine Bewehrungsgehalte Bereiche, innerhalb derer das Versagen durch Zerreissen der Bewehrung verursacht wird; sofern eine ausreichende Mindestbewehrung eingelegt wird, sind diese Fälle jedoch nicht relevant. Der augenfälligste Unterschied zwischen der Bruchbedingung nach dem Gerissenen Scheibenmodell und den Fliessbedingungen nach Plastizitätstheorie besteht darin, dass der Bereich, innerhalb dessen beide Bewehrungen beim Bruch fliessen, nach dem Gerissenen Scheibenmodell um einiges kleiner ist, und dass die Grenze dieses Bereiches stark unterschiedlich verläuft. Eine Begrenzung der Druckfeldneigung,  $0.5 \leq \cot\theta \leq 2$  in Bild 7.9 (a), gibt den Verlauf dieser Regimegrenze offensichtlich nicht zufriedenstellend wieder. Ein detaillierter Vergleich [38] zeigt, dass – immer unter der Annahme  $f_c \approx 1.7(f_c')^{2/3}$  – die Fliessbedingungen nach Plastizitätstheorie die Traglast im Bereich kleiner oder stark unterschiedlicher Bewehrungsgehalte in den beiden Bewehrungsrichtungen sowie über weite Bereiche der Regimes 2 und 3 überschätzen.

Die enge Verwandtschaft zwischen der Bruchbedingung nach dem Gerissenen Scheibenmodell und den Fliessbedingungen nach Plastizitätstheorie legt den Gedanken nahe, Bemessungsgleichungen zu entwickeln, welche auf den Fliessbedingungen (3.20) basieren, jedoch den Einfluss von Querdehnungen auf die Druckfestigkeit des Betons gemäss Gl. (7.3) berücksichtigen. Vernachlässigt man die Verfestigung des Bewehrungsstahls und nimmt an, dass die mittleren

(a)



(b)



(c)

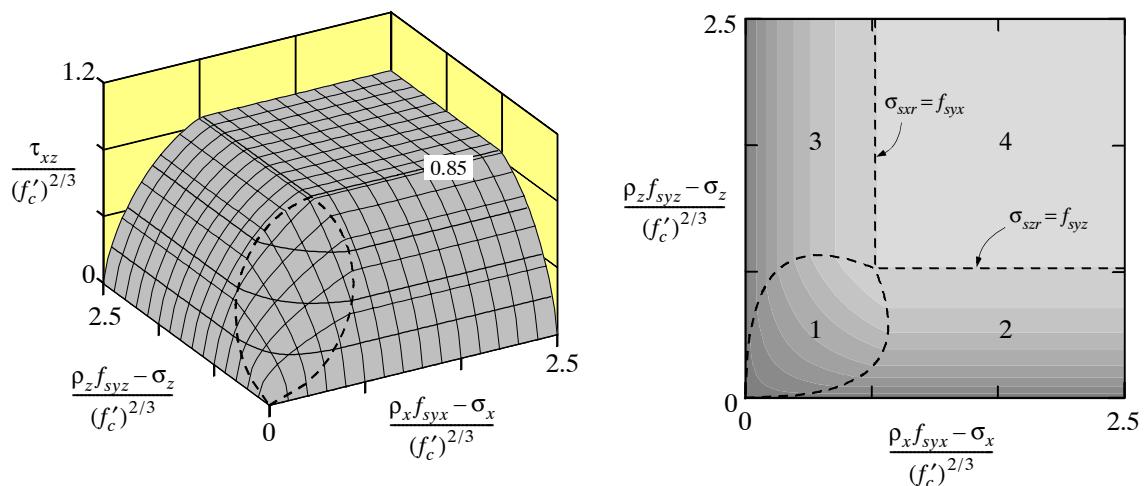


Bild 7.9 – Bruchbedingungen: (a) ideal plastisches Materialverhalten,  $f_c$  = konstant; (b) Gerissenes Scheibenmodell; (c) Bemessungsvorschlag (7.25).  $f'_c$  = Zylinderdruckfestigkeit des Betons in MPa.

Dehnungen in Richtung der nicht fliessenden Bewehrung unabhängig von deren Beanspruchung  $\varepsilon \approx 0.8f_{sy}/E_s$  betragen (womit für grosse Bewehrungsgehalte die Dehnungen etwas überschätzt werden), so gelingt es, die Hauptdehnung  $\varepsilon_1 = \varepsilon_x + (\varepsilon_x - \varepsilon_3)\cot^2\theta$  in (7.3) in Funktion von  $\rho_x f_{syx} - \sigma_x$  und  $\rho_z f_{syz} - \sigma_z$  auszudrücken [38]. Nach einiger Rechnung erhält man folgende Bemessungsgleichungen

$$\begin{aligned} Y_1: \quad \tau_{xz}^2 &= (\rho_x f_{syx} - \sigma_x)(\rho_z f_{syz} - \sigma_z) \\ Y_2: \quad \tau_{xz}^2 &= (\rho_z f_{syz} - \sigma_z)^2 \left( \sqrt{2.0 + \frac{25}{3} \frac{(f'_c)^{2/3}}{(\rho_z f_{syz} - \sigma_z)}} - \frac{29}{12} \right) \\ Y_3: \quad \tau_{xz}^2 &= (\rho_x f_{syx} - \sigma_x)^2 \left( \sqrt{2.0 + \frac{25}{3} \frac{(f'_c)^{2/3}}{(\rho_x f_{syx} - \sigma_x)}} - \frac{29}{12} \right) \\ Y_4: \quad \tau_{xz}^2 &= \left\{ \frac{25}{29} (f'_c)^{2/3} \right\}^2 \end{aligned} \quad (7.25)$$

mit  $f'_c$  = Zylinderdruckfestigkeit des Betons in MPa. Diese Beziehungen, welche in Bild 7.9 (c) dargestellt sind, stimmen sehr gut mit den Ergebnissen der nichtlinearen Berechnungen nach dem Gerissenen Scheibenmodell überein. Sie können für eine direkte Bemessung verwendet werden, drücken sie doch die Traglast in Funktion der Bewehrungsgehalte und der Zylinderdruckfestigkeit des Betons aus. Die erste Gleichung (7.25) stimmt mit der ersten Fliessbedingung (3.20) überein, so dass die Bemessung für Regime 1 weiterhin aufgrund der Beziehungen (3.24) erfolgen kann. Um sicherzustellen, dass der Beton nicht bricht, muss nun aber, anstelle von Gl. (3.25) und allfälliger Begrenzungen der Druckfeldneigung, die Regimegrenze der Bemessungsgleichung (7.25) verwendet werden. Diese ergibt sich aus den gleichen Annahmen wie für die Bemessungsgleichungen (7.25) zu

$$\frac{(f'_c)^{2/3}}{\rho_x f_{syx} + \rho_z f_{syz} - \sigma_x - \sigma_z} \geq 0.46 + 0.12 \frac{\rho_x f_{syx} - \sigma_x}{\rho_z f_{syz} - \sigma_z} \quad (\text{in MPa}) \quad (7.26)$$

Der Vorteil der Bemessungsgleichungen (7.25) gegenüber den Fliessbedingungen (3.20) resp. (3.24) nach Plastizitätstheorie besteht darin, dass keine Annahme über die effektive Betondruckfestigkeit  $f_c$  erforderlich ist, sondern direkt von der bekannten Zylinderdruckfestigkeit  $f'_c$  des Betons ausgegangen werden kann. Zudem wird mit den Bemessungsgleichungen das wirkliche Verhalten von Stahlbetonscheiben zutreffender erfasst, so dass bei Verwendung der Regimegrenze (7.26) empirische Begrenzungen der Druckfeldneigung entfallen können.

## 7.5 Vergleich mit Versuchsergebnissen

### 7.5.1 Last-Verformungsverhalten

Bild 7.10 zeigt einen Vergleich von Last-Verformungsberechnungen nach dem Gerissenen Scheibenmodell mit den Ergebnissen von Schubversuchen an orthogonal bewehrten Scheibenelementen. Zu Vergleichszwecken sind auch Vorhersagen des Verhaltens nach der sogenannten Modified Compression Field Theory [112] eingetragen. Die der Berechnung zugrundeliegenden Werte sind in [38] zusammengestellt, wo sich auch ein Vergleich mit weiteren Versuchen findet.

Vergleich mit Versuchsergebnissen

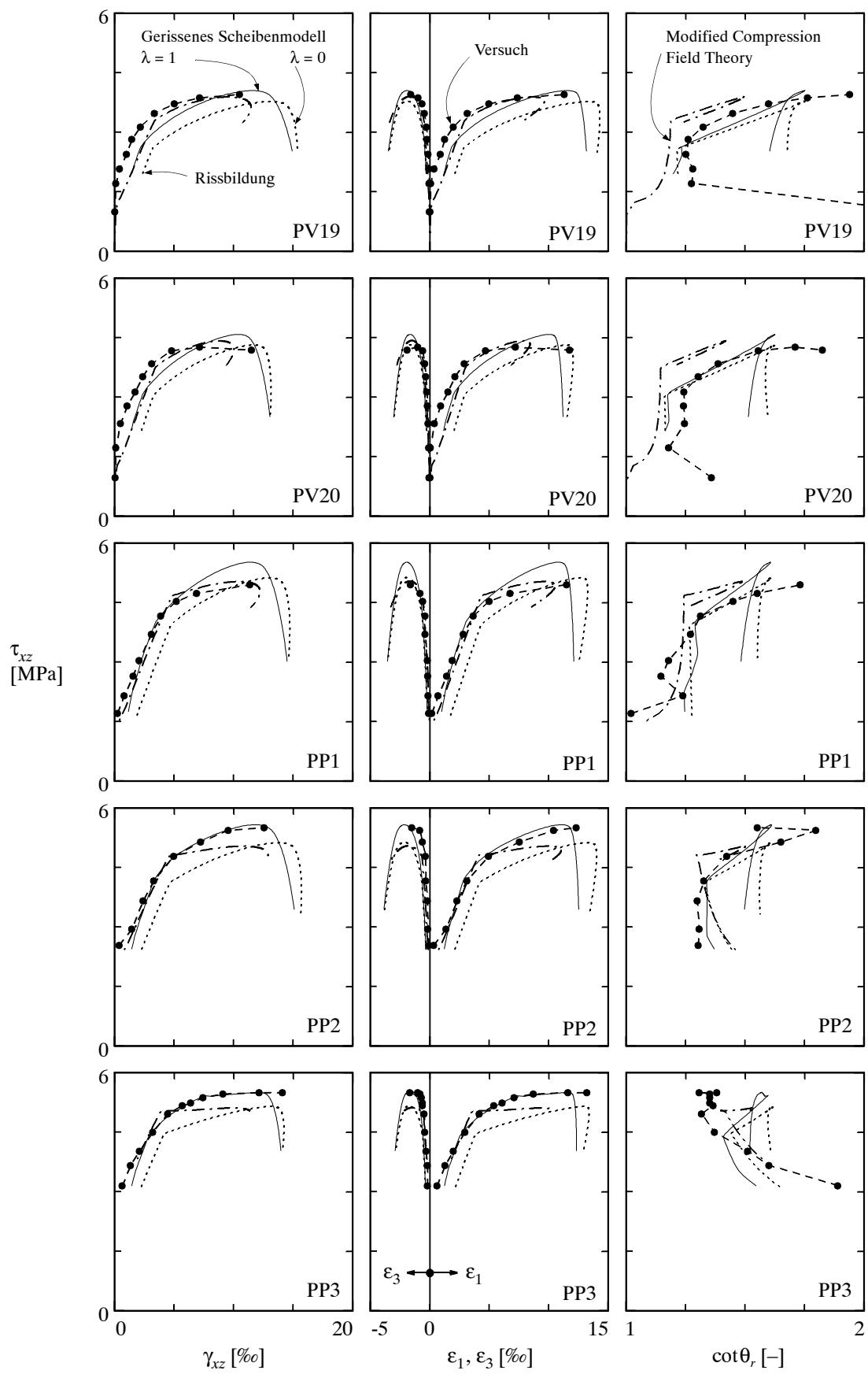


Bild 7.10 – Vergleich mit Versuchen der Serie PV von Vecchio und Collins [111] und der Serie PP von Marti und Meyboom [58].

Die Übereinstimmung der Berechnungen nach dem Gerissenen Scheibenmodell mit den Versuchsergebnissen kann grundsätzlich als sehr gut bezeichnet werden. Der Einfluss des Verbundes ist aus dem Vergleich der für  $\lambda = 1$  (maximaler diagonaler Rissabstand) und  $\lambda = 0$  (kein Verbund) ermittelten Kurven ersichtlich. Das ungerissene Verhalten wurde in den vorliegenden Berechnungen nicht berücksichtigt, und im Gegensatz zur sogenannten Modified Compression Field Theory beruht die Behandlung von Entlastungseffekten auf der Annahme eines elastisch-plastischen und nicht eines hyperelastischen Materialverhaltens.

Die schlaff bewehrten Versuchskörper PV19, PV20 und PP1 versagten alle durch Fliessen der z-Bewehrung und Bruch des Betons; die Berechnungen nach dem Gerissenen Scheibenmodell, wie auch nach der Modified Compression Field Theory, ergeben das gleiche Bruchverhalten. Die beiden teilweise vorgespannten Versuchskörper PP2 und PP3 versagten durch Fliessen der vorgespannten x-Bewehrung sowie beider schlaffer Bewehrungen und anschliessenden Betonbruch; während nach dem Gerissenen Scheibenmodell das gleiche Bruchverhalten resultiert, ergeben die Berechnungen nach der Modified Compression Field Theory Spannungen in der schlaffen Bewehrung in x-Richtung von weniger als 75% der Fliessgrenze.

Auffallend ist, dass die Vorhersagen der Rissrichtung  $\theta_r$  (bzw. der Hauptdruckrichtung der Verzerrungen) nach dem Gerissenen Scheibenmodell wesentlich besser mit den Versuchen übereinstimmen als die Berechnungen nach der Modified Compression Field Theory. Der Grund dafür liegt in der realistischeren Behandlung der Verbundwirkung durch das Gerissene Scheibenmodell. In einem Schubversuch verlaufen die diagonalen Risse typischerweise näher zur Richtung der starken Bewehrung, so dass der Rissabstand in Richtung der starken Bewehrung grösser ist als in Richtung der schwachen Bewehrung. Für eine Zugbeanspruchung in den Bewehrungsrichtungen wäre dies genau umgekehrt. Somit wird in einem orthogonal bewehrten Scheibenelement unter Schubbeanspruchung die starke Bewehrung durch die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen viel mehr verstiftet als die schwache Bewehrung. Dadurch ergeben sich Risse, welche näher zur Richtung der starken Bewehrung verlaufen als nach der Modified Compression Field Theory und anderen, auf mittleren Spannungen beruhenden Modellen, welche die genannten Effekte vernachlässigen und damit implizit eine gleiche Wirkung des Verbundes in beiden Bewehrungsrichtungen annehmen.

### 7.5.2 Traglast

In [38] wurde die in Versuchen an orthogonal bewehrten Scheibenelementen beobachtete Traglast mit Vorhersagen nach dem Gerissenen Scheibenmodell beziehungsweise der Beziehung (7.3) für die Betondruckfestigkeit, sowie nach dem vereinfachten Bemessungsvorschlag gemäss Kapitel 7.4.2 verglichen. Zu Vergleichszwecken wurde die Traglast ebenfalls mit Hilfe der Fliessbedingungen (3.20) unter Annahme eines konstanten Wertes der effektiven Betondruckfestigkeit sowie mit Hilfe der Beziehung (7.2) für die Betondruckfestigkeit vorhergesagt.

Für den Vergleich wurden aus über 200 Versuchen diejenigen ausgewählt, welche mit Sicherheit durch Bruch des Betons versagten, während mindestens eine Bewehrung elastisch blieb. Die Auswahl erfolgte, indem nur diejenigen 78 Versuche, welche bei einer Belastung von weniger als 95% der Traglast für Fliessen beider Bewehrungen versagten, berücksichtigt wurden. In 30 dieser Versuche wurden Verzerrungen aufgezeichnet, so dass ein Vergleich mit den Beziehungen (7.2) und (7.3) möglich war; für die übrigen 48 Versuche konnte lediglich die Traglast nach dem vereinfachten Bemessungsvorschlag und nach den Fliessbedingungen (3.20) ermittelt werden.

Der Vergleich der im Versuch beobachteten Traglast mit den Vorhersagen ergibt für die Beziehung (7.3) einen Variationskoeffizienten von 0.168 und für den vereinfachten Bemessungsvorschlag einen solchen von 0.163. Diese Übereinstimmung kann als gut bezeichnet werden, wur-

den doch ausschliesslich Versuche, in welchen der Beton versagte, berücksichtigt. Die Vorhersagen nach den Fließbedingungen (3.20) und nach der Beziehung (7.2) weisen wesentlich grössere Streuungen auf, wie die entsprechenden Variationskoeffizienten von 0.261 und 0.220 belegen. Werden auch für den Vergleich nach dem vereinfachten Bemessungsvorschlag und nach den Fließbedingungen (3.20) lediglich diejenigen 30 Versuche berücksichtigt, in welchen Verzerrungen aufgezeichnet wurden, so betragen die entsprechenden Variationskoeffizienten 0.145 und 0.302, was die gemachten Aussagen bestätigt.

# 8 Druckgurtmodell

Peter Marti

## 8.1 Einleitung

Im Vergleich zum Zuggurtmodell (Kapitel 6) und zum Gerissenen Scheibenmodell (Kapitel 7) ist das im folgenden beschriebene Druckgurtmodell nicht gleich weit entwickelt. Die vorliegende Darstellung stützt sich im wesentlichen auf die Arbeit von Sigrist [101], vgl. Kapitel 5.

## 8.2 Druckgurtmodell

### 8.2.1 Umschnürungswirkung

#### Allgemeines

Mit einer Umschnürungsbewehrung kann das Tragverhalten von Beton unter einachsiger Druckbeanspruchung markant verbessert werden. In dem von einer Wendel- oder Bügelbewehrung umschnürten Kernbeton ergeben sich günstige dreiachsig Druckspannungszustände. Die Querdehnung des Betons aktiviert die Umschnürungsbewehrung auf Zug, und damit werden im Kernbeton Querdruckspannungen aufgebaut. Bis zum Erreichen der einachsigen Betondruckfestigkeit  $f_{c0}$  ergeben sich allerdings kaum Unterschiede zwischen Druckgurten mit und ohne Umschnürungsbewehrung. Wegen der kleinen Querdehnungen bleiben die Zugspannungen in der Umschnürungsbewehrung und damit auch die Querdruckspannungen im Beton relativ gering. Nach dem Erreichen von  $f_{c0}$  nehmen die Querdehnungen mit zunehmender Stauchung des Betons in Längsrichtung rasch zu, und die Umschnürungswirkung kommt voll zum Tragen. Der Überdeckungsbeton beginnt zwar im allgemeinen beim Erreichen von  $f_{c0}$  abzuplatzen, die Druckbeanspruchung kann aber bei ausreichender Umschnürungsbewehrung unter weiter zunehmender Stauchung noch erhöht werden. Erst wenn der Tragwiderstand des umschnürten Kernbetons erschöpft ist, erfolgt eine Entfestigung, wobei sich primär Gleitbrüche entlang geneigter Scherflächen ausbilden. Die Stauchungen können dann unter abnehmender Druckbeanspruchung noch weiter gesteigert werden, bis Längsbewehrungsstäbe lokal ausknicken oder Bügel zerrissen werden.

Im Vergleich zur Zylinderdruckfestigkeit  $f_c$  sollte  $f_{c0}$  bei der praktischen Anwendung abgemindert werden, um Langzeitwirkungen und möglichen Abweichungen der Verhältnisse im Bau teil von jenen im Prüfkörper Rechnung zu tragen. Üblicherweise setzt man  $f_{c0} = 0.85 f_c$ .

#### Kreisquerschnitte

Fliest die in Bild 8.1 (a) dargestellte Wendelbewehrung auf Zug, so verursacht sie in dem von ihr umschnürten Kernbeton mittlere Querdruckspannungen

$$\sigma_{cy} = \sigma_{cz} = -\frac{\pi \varnothing_c^2 f_y}{2d_c s_c} \quad (8.1)$$

wobei  $\varnothing_c$ ,  $f_y$ ,  $d_c$  und  $s_c$  der Reihe nach den Stabdurchmesser, die Fliessgrenze, den Wendeldurchmesser und die Ganghöhe bezeichnen. Die einachsige Druckfestigkeit  $f_{c0}$  des unum-

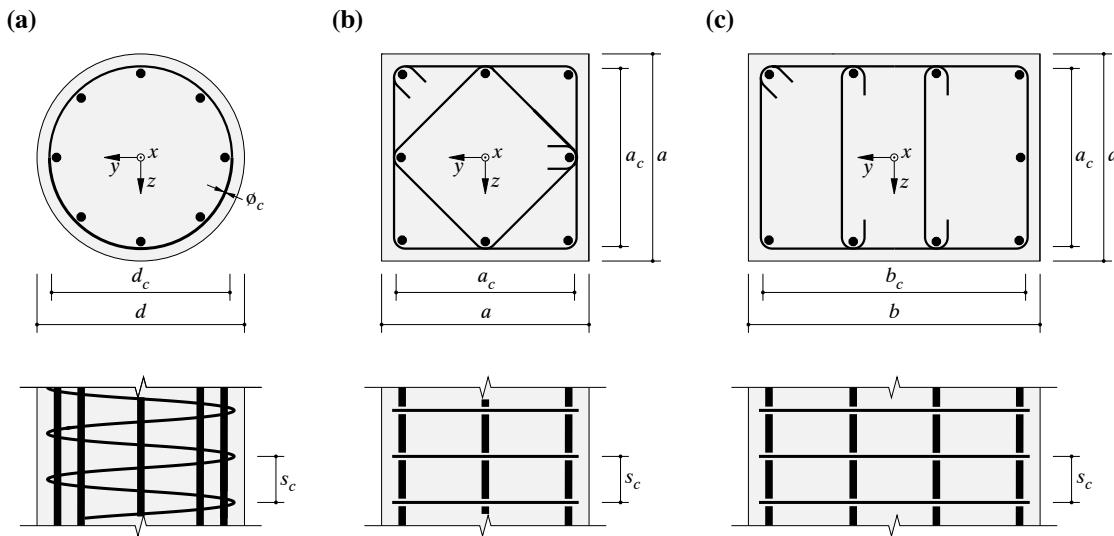


Bild 8.1 – Umschnürungsbewehrung: (a) Kreisquerschnitt; (b) quadratischer Querschnitt; (c) Rechteckquerschnitt.

schnürten Betons in  $x$ -Richtung wird dadurch unter der Voraussetzung der Fliessbedingung von Coulomb (vgl. Kapitel 2.2.3) mit  $\tan \varphi = 3/4$  auf den Betrag

$$f_{c1} = f_{c0} + \frac{2\pi \phi_c^2 f_y}{d_c s_c} \quad (8.2)$$

erhöht; die Zusatzfestigkeit in Längsrichtung ist viermal so gross wie der Betrag der Querdruckspannungen.

Für die Zunahme der mittleren Stauchung gilt ebenfalls eine annähernd lineare Abhängigkeit von der Querdruckbeanspruchung. Der Proportionalitätsfaktor ist aber etwa fünfmal grösser als jener für die Zunahme der Druckfestigkeit:

$$\epsilon_{c1} = \frac{\epsilon_{c0}(5 f_{c1} - 4 f_{c0})}{f_{c0}} \quad (8.3)$$

Nimmt man näherungsweise an, dass beim Erreichen von  $f_{c0}$  die Längsbewehrung mit der Querschnittsfläche  $A_{sx}$  auch gerade zu fliessen beginnt, so gilt für die zugehörige Druckkraft

$$F_0 = \left( \frac{d_c^2 \pi}{4} - A_{sx} \right) f_{c0} + A_{sx} f_y \quad (8.4)$$

Beim Erreichen von  $f_{c1}$  gilt dagegen

$$F_1 = \left( \frac{d_c^2 \pi}{4} - A_{sx} \right) f_{c1} + A_{sx} f_y \quad (8.5)$$

Selbstverständlich könnten zur Verbesserung der Genauigkeit in (8.4) und (8.5) statt  $f_y$  die aus dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm der Längsbewehrung für  $\epsilon_{c0}$  bzw.  $\epsilon_{c1}$  folgenden Spannungsbeträge eingesetzt werden.

Soll  $F_1$  den Wert  $F_0$  übertreffen, so ist nach (8.5) und (8.4)

$$\rho_c > \frac{f_{c0}(d^2 - d_c^2)}{2 f_y (1 - \rho_x) d_c^2} \quad (8.6)$$

zu verlangen. Dabei bezeichnet  $\rho_c = \emptyset_c^2 \pi / (s_c d_c)$  den auf das Volumen des Kernbetons bezogenen Wendelbewehrungsgehalt, und  $\rho_x = 4A_{sx}/(d_c^2 \pi)$  steht für den auf dasselbe Volumen bezogenen Längsbewehrungsgehalt.

Ist (8.6) erfüllt, so kann angenommen werden, dass der Überdeckungsbeton über die gesamte Länge des Druckgurtes abplatzt und dass die Verformungen bis zum Erreichen von  $F_1$  gleichmäßig verteilt bleiben. Andernfalls bleiben die Abplatzungen auf die Bruchzone beschränkt, und die übrigen Bereiche werden nach dem Erreichen von  $F_0$  wieder entlastet.

Einsetzen von (8.2) in (8.5) bringt

$$F_1 = \frac{d_c^2 \pi}{4} \left\{ f_{c0} + f_y \left[ 2\rho_c + \rho_x \left( 1 - 2\rho_c - \frac{f_{c0}}{f_y} \right) \right] \right\} \quad (8.7)$$

Man erkennt damit, dass die Wendelbewehrung bezüglich  $F_1$  etwa doppelt so wirksam ist wie die Längsbewehrung.

### Quadrat- und Rechteckquerschnitte

Bei bügelbewehrten Quadrat- und Rechteckquerschnitten beschränkt sich die günstige Wirkung der Querdruckspannungen auf die Bereiche im Innern des Querschnitts und bei den Bügelecken. Kräftige Längsbewehrungsstäbe bewirken eine willkommene Verteilung der Bügelumlenkkkräfte. Die Bügelschenkel nahe den freien Betonoberflächen bieten den Querdehnungen des Betons nur einen geringen Widerstand, so dass in diesen Bereichen keine nennenswerte Umschnürungswirkung auftreten kann. Im Vergleich zu wendelbewehrten Kreisquerschnitten ergeben sich insgesamt wesentlich ungünstigere Verhältnisse. Die Verformungsfähigkeit nimmt zwar immer noch beachtlich zu, die Festigkeitssteigerung ist aber bescheidener.

Mit den Bezeichnungen von Bild 8.1 (b) und (c) und

$$\omega_c = \text{Min} \left( \omega_y = \frac{A_{sy} f_y}{a_c s_c f_{c0}}, \quad \omega_z = \frac{A_{sz} f_y}{b_c s_c f_{c0}} \right) \quad (8.8)$$

kann analog zu (8.2) eine Druckfestigkeit von

$$f_{c0} (1 + 4\omega_c) \quad (8.9)$$

im wirksam umschnürten Bereich angenommen werden. Ein plausibler Ansatz für diesen Bereich ist in den Bildern 8.2 (a) und (b) dargestellt. Ein äusserer, umlaufender Querschnittsbereich mit einer Breite von  $s_c/2$  wird als nicht wirksam umschnürt betrachtet. Damit folgt die mittlere Druckfestigkeit

$$f_{c1} = f_{c0} \left[ 1 + 4\omega_c \left( 1 - \frac{s_c}{a_c} \right) \left( 1 - \frac{s_c}{b_c} \right) \right] \quad (s_c \leq a_c, b_c) \quad (8.10)$$

des Kernbetons. Zugehörige Stauchungen  $\varepsilon_{c1}$  können durch Einsetzen in (8.3) bestimmt werden.

Bild 8.2 (c) zeigt entsprechende Vergleiche mit Versuchen von Somes [102]. Die Versuchskörper wiesen keinen Überdeckungsbeton und keine Längsbewehrung auf, d.h. es wurden direkt mittlere Festigkeiten des Kernbetons ermittelt. Der Vergleich von Versuchsresultaten und Berechnung zeigt insbesondere für enge Verbügelungen eine gute Übereinstimmung. Für grössere

Bügelabstände liefern die Berechnungen eher konservative Ergebnisse. Im Hinblick auf die praktische Anwendung sind die hier vorgeschlagenen einfachen Näherungen aber akzeptabel.

### 8.2.2 Entfestigung des Kernbetons

#### Bruch in Zylinderdruckversuchen

Aus einachsigen Zugversuchen an Betonstäben ist bekannt, dass die spezifische Bruchenergie etwa mit der Beziehung

$$G_F \approx \frac{f_{ct} d_{max}^{1/4}}{80} \quad (\text{in N und mm}) \quad (8.11)$$

erfasst werden kann, wobei

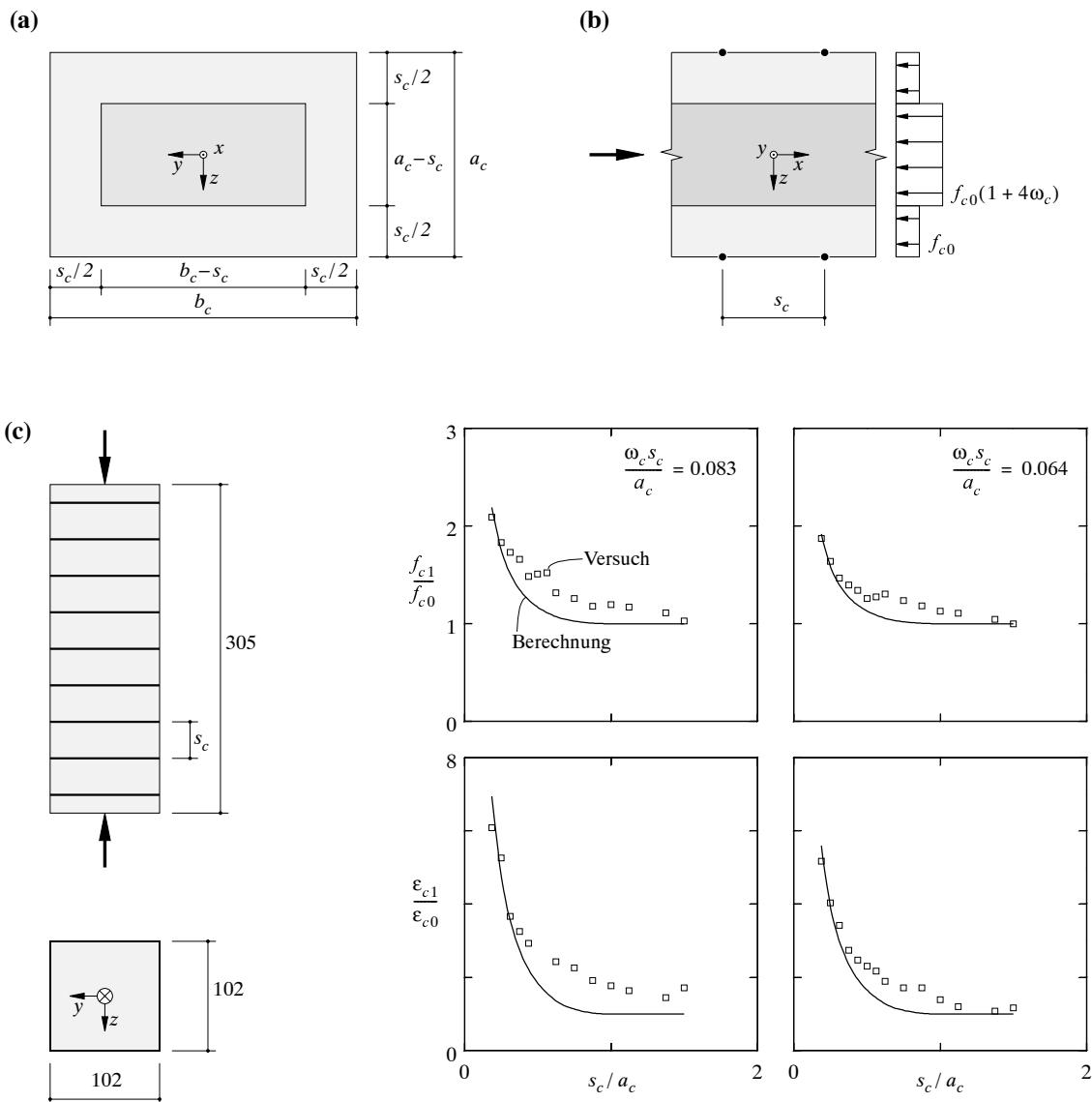


Bild 8.2 – Umschnürungswirkung: (a) Spannungsbereiche im Querschnitt; (b) Druckspannungsverteilung; (c) Vergleich mit Versuchen von Somes [102]. Abmessungen in mm.

$$f_{ct} \approx 0.3 f_c^{2/3} \quad (\text{in MPa}) \quad (8.12)$$

die einachsige Zugfestigkeit,  $f_c$  die Zylinderdruckfestigkeit und  $d_{max}$  den maximalen Zuschlagskorndurchmesser des Betons bezeichnet. Vereinfachend kann eine lineare Entfestigung von  $f_{ct}$  auf null angenommen werden, d.h. unter Berücksichtigung von (8.11) werden bei einer effektiven Rissbreite von  $d_{max}/40$  keine Zugspannungen mehr übertragen.

Bei Zylinderdruckversuchen lokalisieren sich die Verformungen beim Bruch gemäß Bild 8.3 (a) in einer Bruchzone von der Länge

$$l_F \approx 2d \quad (8.13)$$

Dieser Wert entspricht gerade der bei Annahme einer Fließbedingung von Coulomb mit

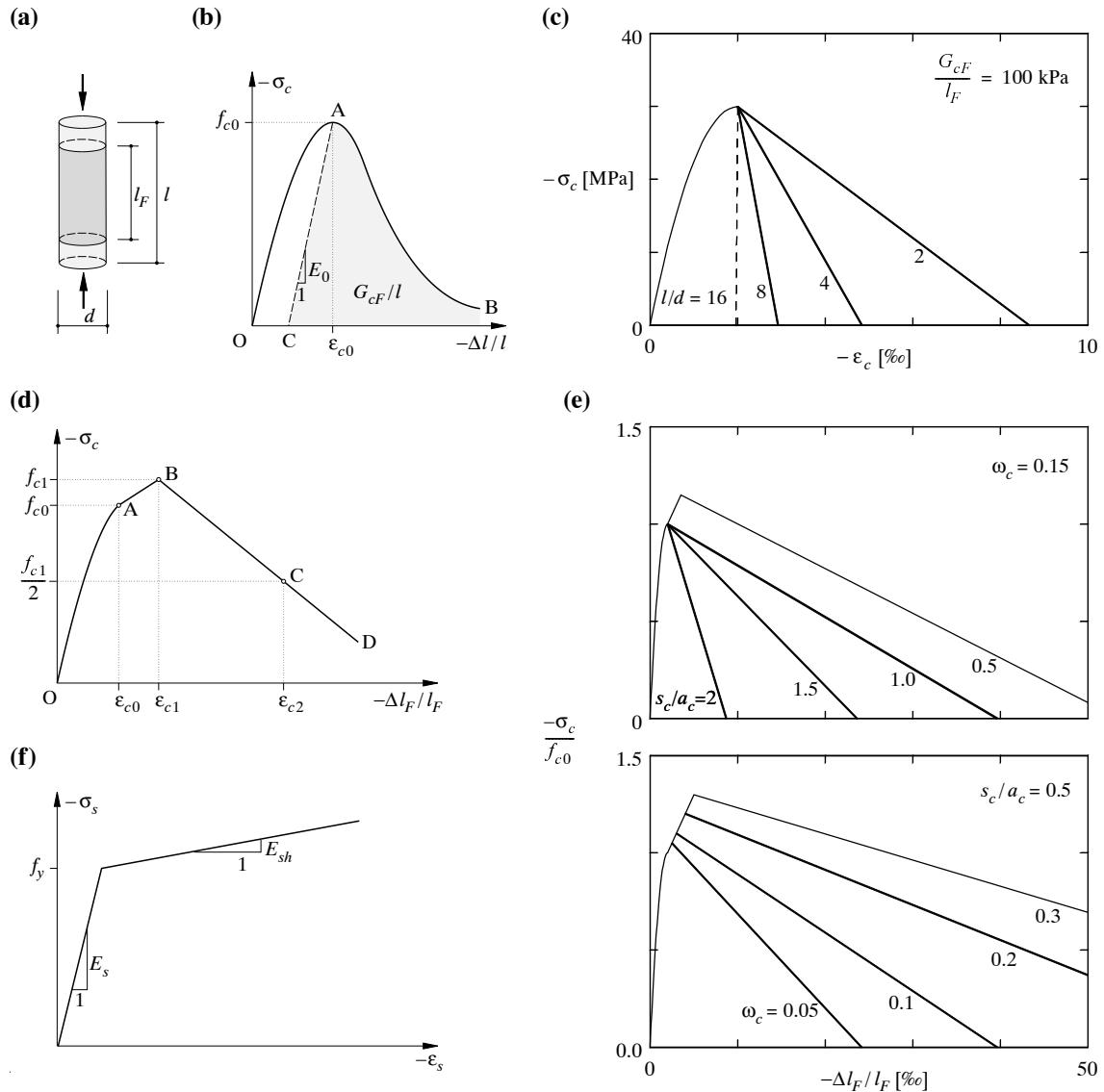


Bild 8.3 – Entfestigung des Kernbetons: (a) Bruchzone; (b) Spannungs-Dehnungs-Diagramm und spezifische Bruchenergie; (c) Einfluss der Druckgurtlänge; (d) idealisiertes Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Bruchzone; (e) Einfluss des Bügelbewehrungsgehalts und des Bügelabstands; (f) Stoffgesetz der Längsbewehrung.

$\tan \varphi = 3/4$  für die freie Ausbildung einer Gleitfläche erforderlichen Länge, vgl. Kapitel 2.2.3.

Berücksichtigt man die elastische Rückfederung des Betons in der Länge  $l - l_F$  ausserhalb der Bruchzone mit dem in Bild 8.3 (b) eingetragenen Entlastungsmodul

$$E_0 = \frac{E_c l}{l - l_F} \quad (8.14)$$

so kann aus dem Flächeninhalt des Bereiches CAB auf die pro Querschnittsflächeneinheit in der Bruchzone dissipierte Energie  $G_{cF}$  geschlossen werden. Durch Auswertung von Versuchen mit Zylinderdruckfestigkeiten  $f_c$  im Bereich von etwa 25 bis 50 MPa fand Sigrist [101] auf diese Weise für die pro Volumeneinheit der Bruchzone dissipierte Energie Werte in der Größenordnung von

$$\frac{G_{cF}}{l_F} \approx 100 \text{ kPa} \quad (8.15)$$

Setzt man wie beim Zugversagen vereinfachend eine lineare Entfestigung voraus, so kann die Neigung der abfallenden Äste in Spannungs-Dehnungs-Diagrammen wie Bild 8.3 (c) aus einer Verträglichkeitsbedingung für die Längstauchungen bestimmt werden. Analog zu (8.14) findet man den Entlastungsmodul

$$\frac{E_c l}{l - l_F - 2E_c G_{cF}/f_c^2} \quad (8.16)$$

Für

$$l > l_F + 2E_c G_{cF}/f_c^2 \quad (8.17)$$

ist offensichtlich keine stabile Entfestigung mehr möglich. Für den in Bild 8.3 (c) behandelten Fall mit  $f_c = 30 \text{ MPa}$ ,  $G_{cF}/l_F = 100 \text{ kPa}$  und  $E_c = 30 \text{ GPa}$  ergibt sich aus (8.17) unter Berücksichtigung von (8.13) eine kritische Länge von  $l = 15.3 d$ .

Der Einfachheit halber ist in den bisherigen Ableitungen die (elastische) Nachgiebigkeit der Prüfeinrichtung nicht berücksichtigt worden. Bezeichnet man die entsprechende Federkonstante mit  $c_f$  so wäre die Länge  $A_c E_c c_f$  in den Nennern der Ausdrücke (8.14) und (8.16) zu addieren und von der Summe rechterhand in (8.17) zu subtrahieren.  $A_c$  bezeichnet dabei die Querschnittsfläche des Betonzyinders.

Nebenbei sei noch bemerkt, dass für den ansteigenden Ast der Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Bild 8.3 (c) die übliche parabolische Näherung

$$\sigma_c = \frac{f_c(\varepsilon_c^2 + 2\varepsilon_c \varepsilon_{c0})}{\varepsilon_{c0}^2} \quad (8.18)$$

mit  $\varepsilon_{c0} = f_c/60 + 3/2$  (in MPa und %) verwendet wurde. Ferner wurde der in (8.14), (8.16) und (8.17) auftretende Elastizitätsmodul des Betons mit  $E_c = 18 \text{ GPa} + 400 f_c$  angenähert.

## Übertragung auf Kernbeton

Die Linie OA in Bild 8.3 (d) entspricht der parabolischen Näherung (8.18), wobei statt  $f_c$  der z.B. auf 85% von  $f_c$  abgeminderte Wert  $f_{c0}$  der einachsigen Druckfestigkeit im Druckgurt auftritt. Der Punkt B in Bild 8.3 (d) ist durch (8.3) und (8.10) bzw. (8.2) festgelegt.

Für den entfestigenden Ast BCD der Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Bruchzone mit der Länge  $l_F = 2a_c$  ( $a_c \leq b_c$ ) schlug Sigrist [101] in Anlehnung an das Vorgehen von Kent und Park [40] vor, die Stauchung beim Erreichen von  $\sigma_c = -f_{c1}/2$  wie folgt anzusetzen:

$$\varepsilon_{c2} = \varepsilon_{c1} + \frac{G_{cF}}{l_F f_{c1}} + \frac{(\omega_y + \omega_z)(2a_c - s_c)}{20a_c} \quad (s_c \leq 2a_c) \quad (8.19)$$

In Bild 8.3 (e) sind entsprechende Spannungs-Dehnungs-Diagramme für verschiedene Bügelbewehrungsgehalte und Bügelabstände dargestellt. Die Diagramme gelten für  $a_c = b_c$ ,  $\rho_x = 0$ ,  $\omega_y = \omega_z = \omega_c$ ,  $f_c = 30 \text{ MPa}$ ,  $G_{cF}/l_F = 100 \text{ kPa}$  und  $\varepsilon_{c0} = 2\%$ . Die Diagramme illustrieren die markante Verbesserung der Verformungsfähigkeit durch eine ausreichend enge und kräftige Bügelbewehrung.

Die Last-Verformungs-Kurve eines auch längsbewehrten Druckgurtes kann durch Superposition der Anteile des Kernbetons und der Längsbewehrung analog zu (8.4) und (8.5) bzw. (8.7) gewonnen werden. Die lineare Entfestigung des Betons gemäss der Linie BCD in Bild 8.3 (d) wird durch eine Verfestigung der Längsbewehrung gemäss Bild 8.3 (f) zumindest teilweise kompensiert. In der Bruchzone ergibt sich die Dehnsteifigkeit

$$\frac{(a_c b_c - A_{sx}) f_{c1}}{2(\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c2})} + A_{sx} E_{sh} \quad (8.20)$$

Wegen der Entlastung der Druckgurtbereiche ausserhalb der Bruchzone und der Verfestigung der Längsbewehrung in der Bruchzone ergibt sich eine lokale Kräfteumlagerung, welche Verbundkräfte zwischen der Längsbewehrung und dem Beton ausserhalb der Bruchzone aktiviert. Falls dies wegen des Abplatzens des Überdeckungsbetons nur teilweise oder gar nicht möglich ist, resultieren entsprechende Endverankerungskräfte.

### 8.2.3 Knicken der Längsbewehrung

Das Verformungsvermögen von Druckgurten wird durch das Ausknicken der Längsbewehrungsstäbe begrenzt. Für naturharten und vergüteten Stahl kann die kritische Stauchung  $\varepsilon_{cr}$  mit Hilfe des Berechnungsmodells von Thürlmann und Haaijer [106] abgeschätzt werden, siehe Bild 8.4.

Genügt der Stahl dem in Bild 8.4 (a) dargestellten Spannungs-Dehnungs-Diagramm, so sind für  $\sigma_s = -f_y$  inhomogene Verformungszustände möglich. Betrachtet man einen durchlaufenden, von Bügeln im Abstand  $s_c$  gehaltenen Längsbewehrungsstab als beidseitig eingespannt, siehe Bild 8.4 (b), so kann sich in einem inneren Bereich der Länge  $2\xi s_c$  die Stauchung  $\varepsilon_{sh}$  beim Verfestigungsbeginn einstellen, während in den beidseits anschliessenden äusseren Bereichen der Länge  $(1/2 - \xi)s_c$  die Stauchung beim Wert  $\varepsilon_{sy}$  liegt. Im Mittel beträgt die Stauchung

$$\varepsilon_{cr} = (1 - 2\xi)\varepsilon_{sy} + 2\xi\varepsilon_{sh} \quad (8.21)$$

Die Biegesteifigkeit in den äusseren Bereichen beträgt  $\pi\varnothing^4 E_s / 64$  und jene im inneren Bereich  $\pi\varnothing^4 E_{sh} / 64$ . Für die in Bild 8.4 (c) dargestellte Knickfigur ABCB'A' kann der Ansatz

$$w_1 = -w_{10} \cos\left(\frac{\pi x_1}{l_1}\right) \quad , \quad w_2 = w_{20} \cos\left(\frac{\pi x_2}{l_2}\right) \quad (8.22)$$

gemacht werden. Stetigkeit der Biegelinie und ihrer Neigung bei B und B' erfordert

$$\tan\left(\frac{\pi\xi s_c}{l_2}\right) + \sqrt{\frac{E_{sh}}{E_s}} \tan\left[\frac{\pi(1/2 - \xi)s_c}{l_1}\right] = 0 \quad (8.23)$$

wobei

$$l_1 = \frac{\varnothing\pi}{4} \sqrt{\frac{E_s}{f_y}} = l_2 \sqrt{\frac{E_s}{E_{sh}}} \quad (8.24)$$

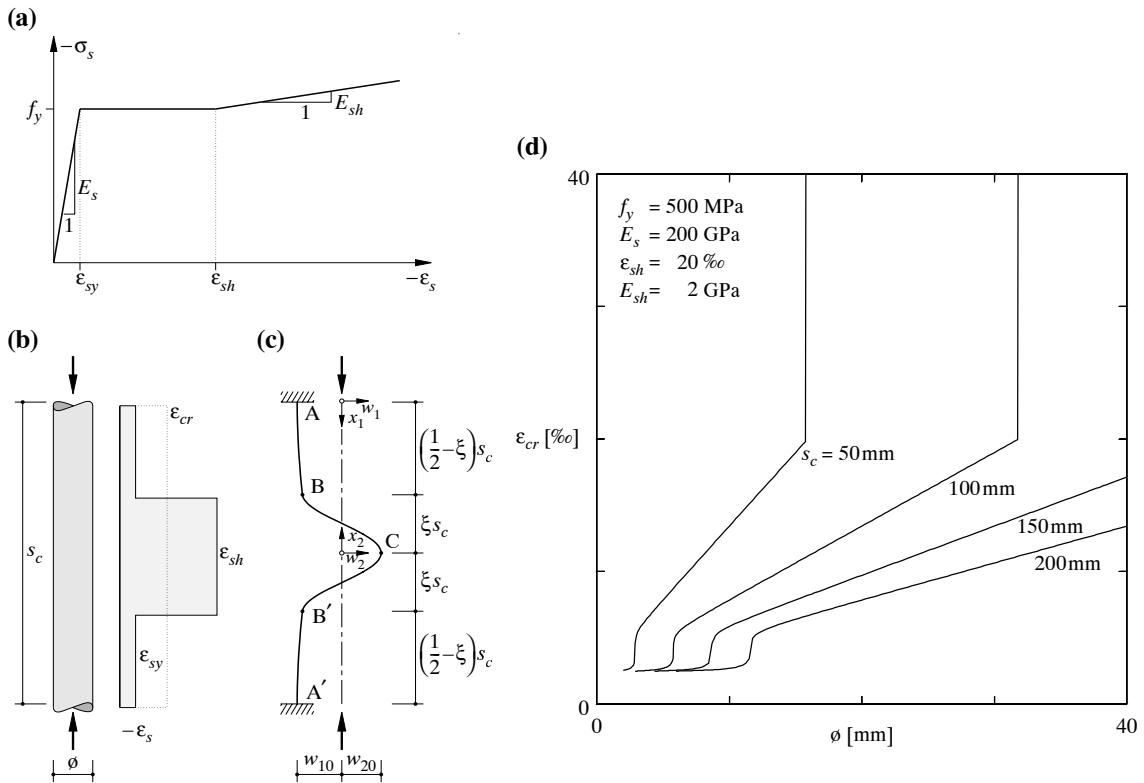


Bild 8.4 – Knicken der Längsbewehrung: (a) Soffgesetz der Längsbewehrung; (b) Dehnungsverteilung; (c) Knickfigur; (d) Knickstauchungen.

Damit kann  $\xi$  iterativ ermittelt werden, und  $\varepsilon_{cr}$  folgt aus (8.21). Bild 8.4 (d) fasst die Ergebnisse entsprechender Berechnungen für verschiedene Bügelabstände  $s_c$  in Abhängigkeit des Durchmessers  $\varnothing$  der Längsbewehrungsstäbe zusammen.

Für im Verhältnis zum Stabdurchmesser  $\varnothing$  enge Bügelabstände  $s_c$  ist es möglich, dass  $\xi$  den Wert 1/2 erreicht, d.h. der Stab verfestigt über seine ganze Länge. Die Knickspannung ist dann gleich

$$\sigma_s = -\frac{\pi^2 E_{sh} \varnothing^2}{4 s_c^2} < -f_y \quad (8.25)$$

und die zugehörige Stauchung lässt sich aus Bild 8.4 (a) bestimmen.

Das Bild 8.4 (d) zeigt, dass bei grossen  $\varnothing$  und kleinen  $s_c$  das Knicken der Längsbewehrungsstäbe nicht mehr massgebend ist. In solchen Fällen ist das Versagen in der Regel durch Zerreissen der Bügelbewehrung charakterisiert.

#### 8.2.4 Zerreissen der Bügelbewehrung

Nach einer empirischen Beziehung von Scott et al. [94] kann das Zerreissen von Umschnürungsbügeln ab Stauchungen von etwa

$$\varepsilon_{cc} = 4 + 3(\omega_y + \omega_z) f_c \quad (\text{in \%o und MPa}) \quad (8.26)$$

aufreten. Zusammen mit (8.21) stehen damit zwei Beziehungen zur Verfügung, mit welchen die

nominellen Grenzverformungen von Druckgurten abgeschätzt werden können. Dabei ist jeweils der kleinere der beiden Werte massgebend.

### 8.3 Praktische Anwendung

Als Anwendungsbeispiel wird die in Bild 8.5 (a) dargestellte Stütze betrachtet. Für den Beton werden die Werte  $f_c = 30 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{c0} = 2\%$  und  $G_{cF}/l_F = 100 \text{ kPa}$  angenommen. Für den Stahl gelte  $f_y = 500 \text{ MPa}$ ,  $E_s = 200 \text{ GPa}$  und  $E_{sh} = 2 \text{ GPa}$ .

Die in Bild 8.5 (b) eingetragenen Kurven wurden gemäss dem mit den Bildern 8.3 (d), (e) und (f) illustrierten Verfahren ermittelt, und insbesondere wurde bei der Entfestigung entsprechend (8.20) die Verfestigung der Längsbewehrung berücksichtigt. Das Beispiel zeigt erneut, dass durch eine engere Verbügelung eine deutliche Verbesserung des Tragverhaltens erreicht werden kann.

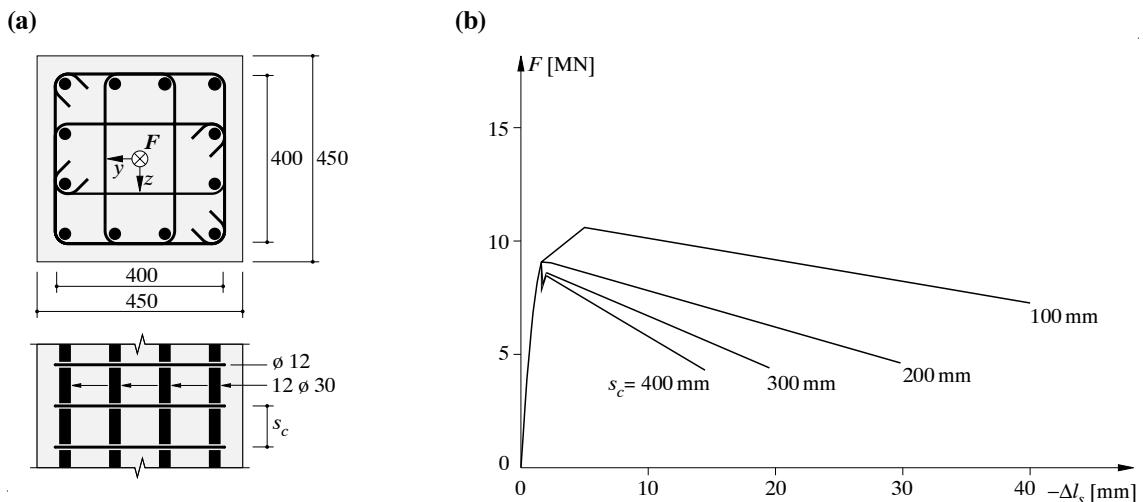


Bild 8.5 – Quadratische Stütze: (a) Abmessungen und Bewehrung; (b) Last-Verformungs-Kurven. Abmessungen in mm.



# 9 Verformungsnachweise

*Viktor Sigrist*

## 9.1 Einleitung

Die Anwendung der statischen und der kinematischen Methode der Plastizitätstheorie erlaubt die Eingrenzung der Traglast eines Tragwerks. Wird bei der Bemessung ein genügender Sicherheitsabstand zur Traglast eingehalten, so ergibt sich im allgemeinen auch ein befriedigendes Verhalten im Gebrauchszustand. In der Praxis sind in der Regel jedoch konkrete Angaben zum Verhalten unter Gebrauchslasten zu machen. Oft stellt sich auch die Frage, ob sich ein der Bemessung zugrunde gelegter Gleichgewichtszustand tatsächlich einstellen und vorzeitiges Versagen ausgeschlossen werden kann. Zu beiden Aufgaben, der Berechnung der Tragwerksverformungen unter Gebrauchslasten sowie der Ermittlung des Verformungsvermögens plastischer Bereiche, lassen sich aber kaum eindeutige Lösungen finden.

Ein Grundproblem von Verformungsuntersuchungen besteht darin, dass die wirkliche Belastungs- und Zwängungsgeschichte eines Tragwerks nicht hinreichend bekannt ist; üblicherweise wird stillschweigend angenommen, dass der initiale (lastfreie) Zustand frei von Spannungen und Verformungen ist. Tatsächlich liegen in jedem Fall aber mehr oder minder beträchtliche initiale Spannungen und Verformungen infolge vorangegangener Belastungen und Zwängungen vor. Ein weiteres Problem ergibt sich aus dem Umstand, dass für die Berechnung von Verformungen eine Vielzahl von Material- und Systemkennwerten benötigt werden, die oft entweder ungenügend bekannt sind oder grossen Streuungen unterliegen.

Aus den oben erwähnten Gründen begnügt man sich bei praktischen Anwendungen in der Regel damit, bestimmte Verformungsgrößen einigermaßen zuverlässig abzuschätzen. Detaillierte Berechnungen sind vergleichsweise aufwendig und nur bei speziellen Problemstellungen gerechtfertigt. Immer sollte man sich aber über die mit dem gewählten Rechenverfahren erreichbare Genauigkeit und über die Aussagekraft der gewonnenen Resultate im Klaren sein.

## 9.2 Balkenbiegung

Die grundlegende Voraussetzung für die Balkenbiegung ist die Hypothese von Jakob Bernoulli, nach der ebene, zur Balkenachse senkrechte Querschnitte während der Verformung eben und normal zur verformten Balkenachse bleiben. Gemäss dieser Voraussetzung ist die Verteilung der Dehnungen  $\varepsilon_x$  der einzelnen Balkenfasern über den Querschnitt linear, vgl. Kapitel 2.1.2. Für den Fall einachsiger Biegung ohne äussere Normalkraft lautet die entsprechende kinematische Relation

$$\varepsilon_x = \chi z \quad (9.1)$$

Setzt man zudem linear elastisches Materialverhalten voraus, wie dies für die Überprüfung der Gebrauchstauglichkeit von Stahlbetontragwerken üblich ist, erhält man daraus unter Beachtung von Gleichung (2.16) die Querschnittskrümmung

$$\chi = \frac{M}{EI} \quad (9.2)$$

Für das Trägheitsmoment  $I$  lassen sich in der Regel zwei Grenzwerte angeben. Für einen Rechteckquerschnitt gilt für den ungerissenen Zustand die Beziehung

$$I_{hom} = bh^3/12 \quad (9.3)$$

und für den gerissenen Zustand der Ausdruck

$$I^{II} = bd^3\left(\frac{\xi^3}{3} + \rho n(1 - \xi)^2\right) \quad (9.4)$$

wobei  $n$  das Verhältnis  $E_s/E_c$  und  $\xi$  die bezogene Druckzonenhöhe bezeichnen; diese beträgt bei Vernachlässigung einer möglicherweise vorhandenen Druckbewehrung

$$\xi = \frac{x}{d} = \rho n\left(\sqrt{1 + \frac{2}{\rho n}} - 1\right) \quad (9.5)$$

Im Sinne von Grenzbetrachtungen können die mit Hilfe der Gleichungen (9.3) und (9.4) gewonnenen Biegesteifigkeiten  $EI_{hom}$  und  $EI^{II}$  als über die Balkenlänge konstant angenommen werden. Durch Integration der Krümmung entlang der Balkenachse findet man schliesslich ausgewählte Verformungsgrössen. Für den Plattenstreifen von Bild 9.1 lassen sich auf diese Weise die in den Diagrammen eingetragenen Grenzgeraden für die Mittendurchbiegung berechnen.

Die Zuverlässigkeit der Eingrenzung kann durch einfache Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der tatsächlich zu erwartenden Mittendurchbiegung, wie sie in verschiedenen Bemessungsnormen angegeben sind [22, 96], erhöht werden. Bei einer Vielzahl von Problemstellungen in der Praxis können damit die für den Nachweis der Gebrauchstauglichkeit erforderlichen Verformungsuntersuchungen durchgeführt werden.

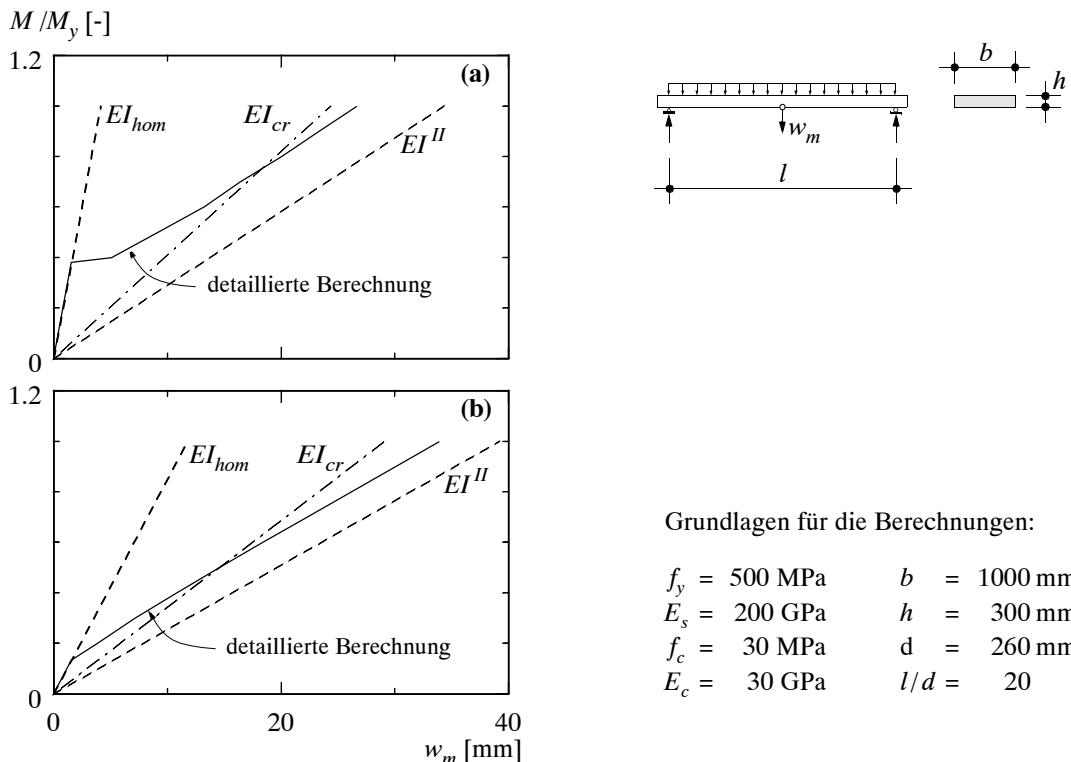


Bild 9.1 – Abschätzung von Durchbiegungen durch Eingrenzung respektive durch detaillierte Berechnungen: (a)  $\rho = 0.3 \%$ ; (b)  $\rho = 0.9 \%$ .

Sollen hingegen genauere Angaben gemacht werden können, sind detailliertere Untersuchungen nötig. Dabei sind die sukzessive Laststeigerung und Rissbildung, die damit zusammenhängende Veränderung der Steifigkeitsverteilung sowie die Verbundwirkung zwischen Bewehrung und Beton (Kapitel 5 und 6) zu berücksichtigen. Die Ergebnisse solcher Berechnungen sind in Bild 9.1 dargestellt.

In Bild 9.1 ebenfalls aufgetragen sind die Last-Verformungs-Geraden, die sich für die Annahme einer über die Länge der Platten konstanten Biegesteifigkeit  $EI_{cr}$  ergeben. Für die Biegesteifigkeit  $EI_{cr}$  kann etwa derjenige Wert angenommen werden, der sich unter der Annahme eines ideal plastischen Verhaltens der Materialien aus der Krümmung

$$\chi_y = \frac{M_y}{EI_{cr}} \quad (9.6)$$

bei Fliessbeginn der Längsbewehrung ermitteln lässt. Das entsprechende Biegemoment ergibt sich zu

$$M_y = f_c b d^2 \omega \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \quad (9.7)$$

wobei

$$\omega = \rho \frac{f_y}{f_c} = \frac{A_s f_y}{b d f_c} \quad (9.8)$$

den mechanischen Bewehrungsgehalt bezeichnet. Unter Verwendung von Gleichung (9.14) findet man [101] den Ausdruck

$$EI_{cr} = E_s b d^3 \omega \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) \frac{f_c \epsilon_{sy}}{f_y \epsilon_{smy}} \quad (9.9)$$

Die mittlere Dehnung bei Fliessbeginn  $\epsilon_{smy}$  kann mit Hilfe der Angaben in Kapitel 6 berechnet werden; die Werte für  $\epsilon_{smy}/\epsilon_{sy}$  liegen normalerweise etwa zwischen 0.85 und 0.95. Die auf diese Weise berechneten Mittendurchbiegungen stimmen über weite Bereiche relativ gut mit den detaillierteren Berechnungen überein. Auch beim Vergleich mit Versuchsresultaten stellt man fest, dass die Annahme  $EI_{cr} = \text{konstant}$  recht gute Näherungswerte liefert.

## 9.3 Plastische Verformungsbereiche

### 9.3.1 Rechenmodell

Das im folgenden beschriebene Rechenmodell [101] basiert auf der Analyse des Spannungszustands der plastischen Verformungsbereiche mit Hilfe diskontinuierlicher Spannungsfelder, siehe Kapitel 3. Für die Berechnung der Verformungen werden die in den Kapiteln 5 und 6 zusammengestellten Grundlagen verwendet. Plastische Verformungen ergeben sich hauptsächlich aus der Verlängerung der Längsbewehrung, weshalb dem Verformungsverhalten des Zuggurts besondere Beachtung geschenkt wird. Die Verformungen des Stegs und des Druckgurts haben demgegenüber eine eher untergeordnete Bedeutung. In Kapitel 9.4 wird die Berechnung für die plastischen Verformungsbereiche mit der Ermittlung der Schnittgrößen kombiniert. Hierzu werden die Kenngrößen der plastischen Verformungsbereiche – die Biegemomente bei Fliessbeginn und beim Eintreten des Versagens sowie die Verfestigung – auf idealisierte plastische Gelenke übertragen. Die Verformungen der plastischen Verformungsbereiche werden deshalb vereinfachend zu Gelenkwinkeln (Rotationswinkeln) zusammengefasst.

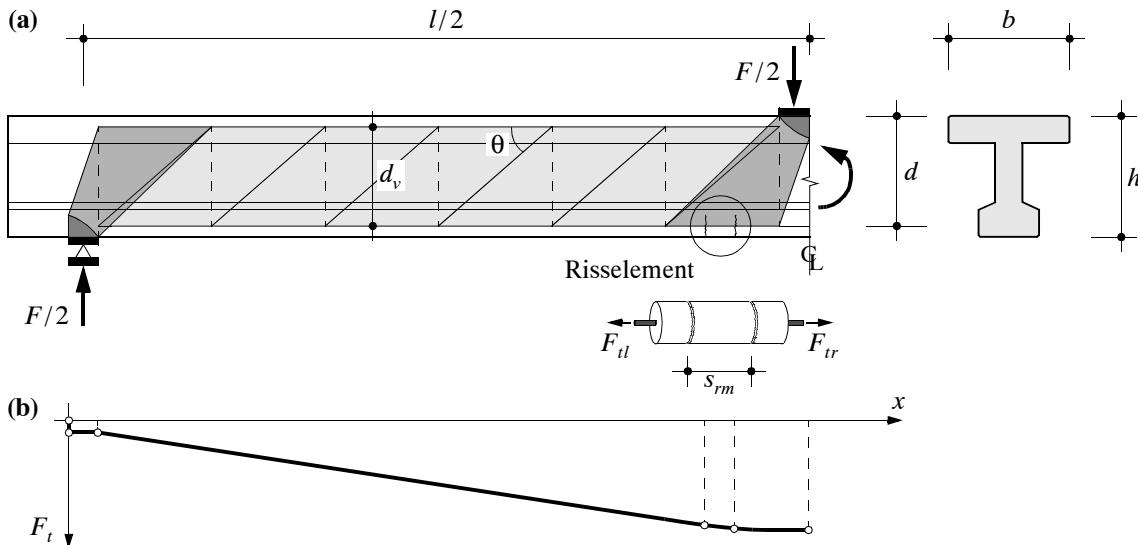


Bild 9.2 – Einfacher Balken unter einer Einzellast: (a) Spannungsfeld und idealisiertes Risselement; (b) Zugkraftverlauf in der Längsbewehrung.

Plastische Verformungen treten primär in Bereichen maximaler Momentenbeanspruchungen auf, wobei diese in der Regel dort liegen, wo konzentrierte Kräfte senkrecht zur Stabachse eingeleitet werden. Bild 9.2 (a) zeigt einen einfachen Balken unter einer Einzellast. Geht man davon aus, dass sich für den Steg ein mittlerer (über die Länge konstanter) Neigungswinkel der diagonalen Druckbänder bestimmen lässt, so ergibt sich damit das dargestellte Spannungsfeld, und insbesondere der in Bild 9.2 (b) aufgetragene Zugkraftverlauf in der Längsbewehrung. Der Zuggurt kann sodann in einzelne Risselemente unterteilt werden, wobei angenommen wird, dass für die untersuchten Beanspruchungszustände das vollständige Rissbild vorliegt. Der mittlere Rissabstand wird im allgemeinen dem Abstand der im unteren Flansch eingelegten Querbewehrung (Bügel) gleichgesetzt oder mit Hilfe von Gleichung (6.6) abgeschätzt. Der geometrische Bewehrungsgehalt des Zuggurts ergibt sich etwa als Verhältnis der Querschnittsfläche der Längsbewehrung zu derjenigen des Flansches. Für jedes Risselement lässt sich eine Verformungsberechnung durchführen. Grundlage hierfür ist das bilineare Stoffgesetz für den Bewehrungsstahl sowie die abgetreppte, starr - ideal plastische Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung gemäß Bild 5.16 (c). Die in Kapitel 6 für den Zugstab hergeleiteten Beziehungen können sinngemäß auf den vorliegenden Fall übertragen werden. In Bild 9.3 sind die dabei zu unterscheidenden Beanspruchungssituationen zusammengestellt.

Ausgangspunkt für die Verformungsberechnung ist die Bestimmung des Verschiebungsnullpunktes im Risselement, derjenigen Stelle also, wo die Verbundschubspannung das Vorzeichen wechselt und die kleinste Stahlspannung auftritt. Dies ist auf der Grundlage einfacher Gleichgewichtsbetrachtungen möglich. Für die beiden Abschnitte links und rechts des Verschiebungsnullpunktes können sodann wieder die in Kapitel 6 angegebenen Beziehungen zur Berechnung der mittleren Dehnungen verwendet werden.

Der skizzierte Rechengang kann, unter Berücksichtigung der in Bild 9.3 (c) gezeigten Fallunterscheidungen, für alle Risselemente des betrachteten Trägerabschnitts durchgeführt werden, und man findet so den Verlauf der mittleren Dehnung entlang des Zuggurts. Das besprochene Verfahren ist näherungsweise auch auf mehrlagige Bewehrungen anwendbar. In der Berechnung wird dabei, über die Annahme des Hebelarms der Gurtkräfte, ein mittlerer Zugkraft- oder Stahl-

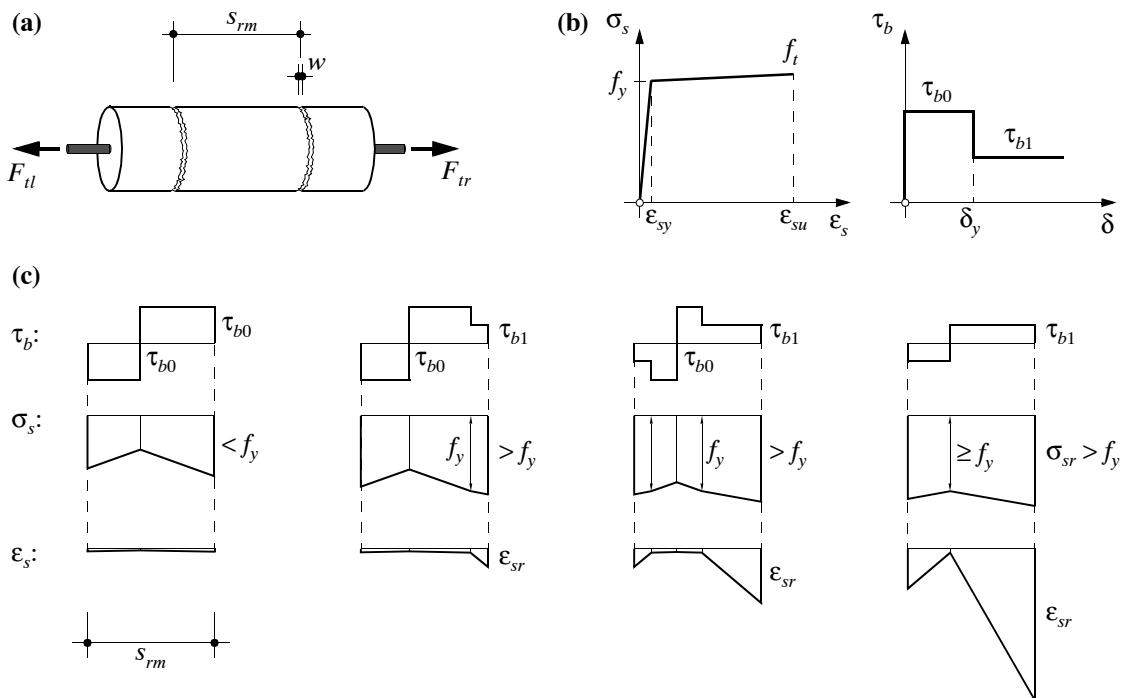


Bild 9.3 – Verformungen des Zuggurts: (a) Idealisiertes Risselement; (b) Modellannahmen für die Berechnung; (c) Entwicklung der Verbundschubspannungen, der Stahlspannungen und der Dehnungen bei sukzessiver Laststeigerung.

spannungsverlauf berücksichtigt. Obwohl detailliertere Untersuchungen möglich wären, lohnt es sich kaum, solche durchzuführen. Mit den dem Modell zugrundeliegenden Annahmen über den Verlauf der Gurtkraft und das Verbundverhalten der Bewehrung werden die Verhältnisse im Zuggurt in der Regel ausreichend genau erfasst. Der Einbezug weiterer Einflüsse würde demgegenüber nur den Rechenaufwand erhöhen.

In den Berechnungen wird davon ausgegangen, dass, sobald die maximale Stahldehnung  $\varepsilon_{sr\ max}$  im am stärksten beanspruchten Riss die Grenzdehnung  $\varepsilon_{su}$  erreicht, der Bruch eintritt. Die Annahme eines charakteristischen Wertes  $\varepsilon_{su}$  der Grenzdehnung, die teilweise beträchtlichen Streuungen unterworfen ist, muss demzufolge zur Festlegung dieses Versagenszustands genügen. In den nachfolgenden Berechnungen werden Betonstähle mit den in Tabelle 9.1 angegebenen Kennwerten unterschieden. Die Entfestigung (Einschnürungsphase) der Bewehrung wird nicht berücksichtigt, da sie bei üblichen Trägerabmessungen schlagartig erfolgt; die vom Träger elastisch gespeicherte Energie übersteigt in der Regel das Dissipationsvermögen der Einschnürbereiche bei weitem.

Duktilitätsklasse	$f_t/f_y$	$\varepsilon_{su}$
A	1.05	0.025
B	1.08	0.050
C	1.20	0.100

Tabelle 9.1 – Einteilung der Stähle aufgrund ihrer Duktilitätseigenschaften.

Als weitere Versagensform muss der Bruch der Biegedruckzone beachtet werden. Für die Entwicklung von Spannungsfeldern wird im allgemeinen ein starr-ideal plastisches Verhalten des Betons angenommen. Auf der Grundlage dieser Idealisierung können insbesondere die Knoten- und Fächergeometrie in Krafteinleitungsbereichen bestimmt werden. Mit Hilfe der in Kapitel 8 zusammengestellten Beziehungen gelingt es zudem, die Beanspruchungen der Biegedruckzone unmittelbar neben den Krafteinleitungsknoten, wo der Bruch in der Regel tatsächlich eintritt, zu beurteilen. Für die systematische Überprüfung des Verformungsvermögens sind solche Detailuntersuchungen allerdings wenig geeignet, da hierzu die konstruktive Durchbildung, speziell die Umschnürung der Biegedruckzone, und die Querschnittsabmessungen des Trägers bekannt sein müssen. In vollständiger Analogie zur Vorgehensweise bei der Biegebemessung wird deshalb die nominelle Randstauchung des Betons

$$\varepsilon_{cn} = \varepsilon_{sm} \frac{x}{d-x} \quad (9.10)$$

auf den Wert  $\varepsilon_{cn} = \varepsilon_{cu}$  limitiert. Das Bruchkriterium lautet dann

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{cu} \left( \frac{d}{x} - 1 \right) \quad (9.11)$$

und entsprechende Berechnungen müssen, da die Last, welche in dem am stärksten beanspruchten Risselement die mittlere Dehnung  $\varepsilon_{sm}$  hervorruft, vorerst unbekannt ist, iterativ vorgenommen werden. Vergleiche mit Versuchsergebnissen [7, 99] zeigen, dass von einer nominellen Bruchgrenze von etwa  $\varepsilon_{cu} = 5\%$  ausgegangen werden kann. Falls in der Biegedruckzone eine Umschnürungsbewehrung sowie eine kräftige Längsbewehrung vorhanden sind, können sogar bedeutend höhere Werte erreicht werden. In der Literatur wird der im Vergleich zu der im einachsigen Druckversuch festgestellten Stauchung  $\varepsilon_{c0}$  hohe Wert für  $\varepsilon_{cu}$  dadurch begründet, dass ein Dehnungsgradient über die Höhe der Biegedruckzone eine Behinderung der Querdehnungen zur Folge hat. Tatsächlich treten in der näheren Umgebung von Krafteinleitungen und speziell in den Knotenbereichen immer mehrachsige Spannungszustände auf.

Da das Versagen der Biegedruckzone durch die Entfestigung des Betons bestimmt wird, muss eine Abhängigkeit der nominellen Bruchstauchung  $\varepsilon_{cu}$  von der Grösse der Träger vermutet werden. Auf der Grundlage der zur Zeit vorliegenden Versuchsergebnisse kann jedoch nicht beurteilt werden, inwieweit  $\varepsilon_{cu}$  für die Behandlung sehr grosser Träger abgemindert werden müsste. In jedem Fall kann das Problem aber durch das Einlegen einer Längs- und einer Umschnürungsbewehrung entschärft werden.

In Bild 9.4 sind berechnete Spannungs- und Dehnungsverläufe für den Mittenbereich des in Bild 9.2 gezeigten Trägers dargestellt. Die Berechnungen wurden auf der Grundlage des hier beschriebenen Rechenmodells durchgeführt; Bild 9.4 (a) zeigt die Ergebnisse für Bewehrungsstahl der Duktilitätsklasse C und Bild 9.4 (b) diejenigen für Stahl der Duktilitätsklasse B. Der mechanische Bewehrungsgehalt wurde in beiden Berechnungen gleich gewählt; er beträgt  $\omega = 0.12$ . Die Resultate beziehen sich einerseits auf den Zustand bei Fliessbeginn der Längsbewehrung und andererseits auf den rechnerischen Bruchzustand.

Das Rechenbeispiel wurde so angelegt, dass für den Stahl der Duktilitätsklasse C der Bruch der Biegedruckzone massgebend wird, während für den Stahl der Duktilitätsklasse B das Zerreissen der Längsbewehrung das Versagen bestimmt. Die im Bruchzustand in Feldmitte erreichten maximalen Stahldehnungen  $\varepsilon_{sr max}$  unterscheiden sich nur wenig. Bezuglich des Verlaufs der mittleren Dehnung  $\varepsilon_{sm}$  und der Ausdehnung des plastifizierten Bereichs ergeben sich hingegen deutliche Unterschiede; dies ist auf den geringfügig grösseren Verfestigungsmodul des Stahls der Duktilitätsklasse C zurückzuführen. Die Verformungen in den Risselementen sind somit gleichmässiger verteilt, und insgesamt werden für gleiche Werte  $\varepsilon_{sr max}$  etwas höhere Stahlspannungen erreicht. Dieser Sachverhalt wird auch durch den Verlauf der Stahlspannung verdeutlicht; je

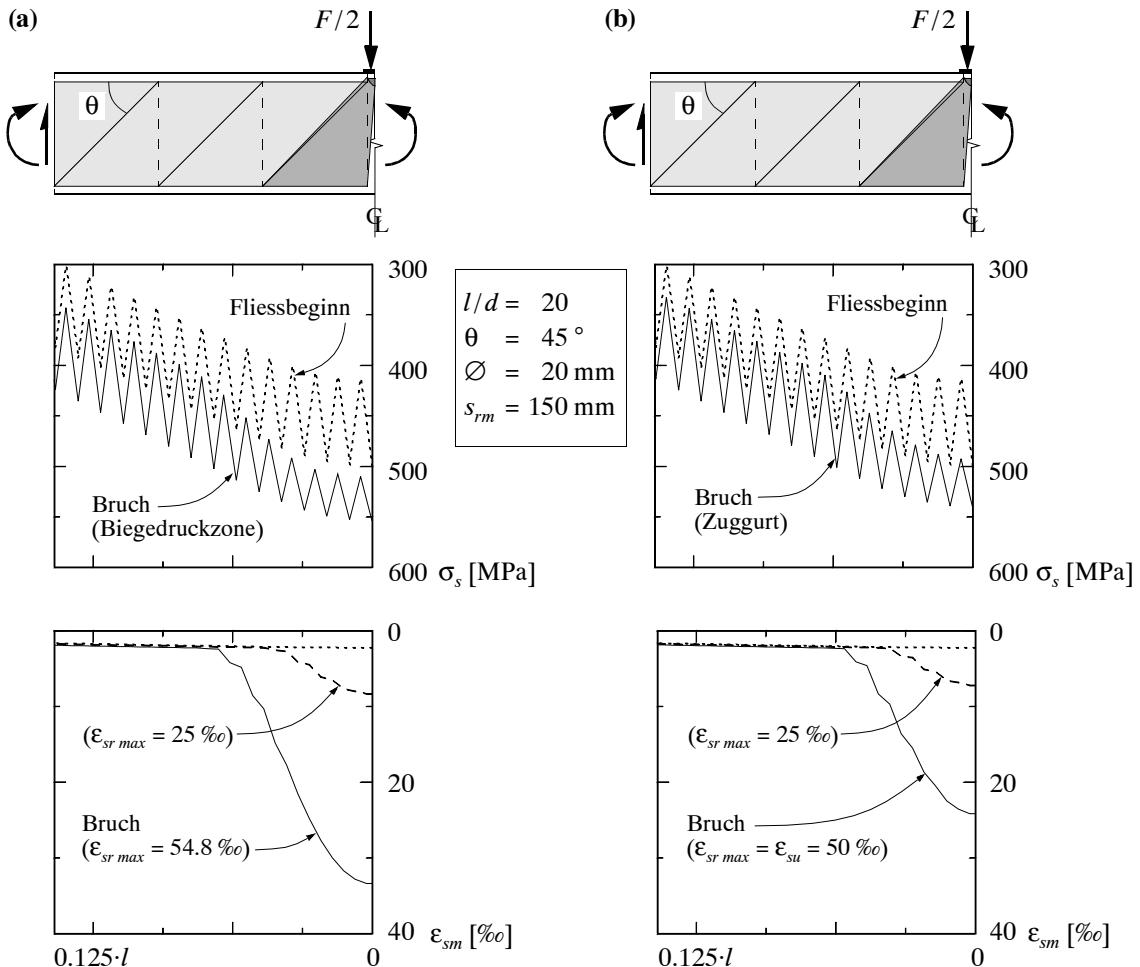


Bild 9.4 – Stahlspannungen und mittlere Gurtdehnungen für einen Träger mit  $\omega = 0.12$ :  
(a) Stahl der Duktilitätsklasse C; (b) Stahl der Duktilitätsklasse B.

schmäler das Band der Stahlspannungen (Zickzackverläufe zwischen den für die jeweiligen Riss-elemente extremalen Stahlspannungen) ausfällt, um so weiter ist die Plastifizierung des Stahls im Risselement fortgeschritten. Die Diagramme der mittleren Dehnungen zeigen zudem die Kurven für eine Laststufe, bei der die maximalen Dehnungen den Wert  $\epsilon_{sr max} = 25 \%o$  erreichen; auch in diesem Fall ergeben sich für den Stahl der Duktilitätsklasse B geringere Verformungen als für den Stahl der Duktilitätsklasse C.

### 9.3.2 Plastische Gelenkwinkel

Aus den berechneten Dehnungen können die Verformungen des Gelenkbereichs und damit der plastische Gelenkwinkel ermittelt werden. Ausgangspunkt für die Berechnung ist die Definition des elementaren Gelenkwinkels  $\Theta_i$  [8]. Mit den in Bild 9.5 angegebenen Bezeichnungen ergibt er sich näherungsweise zu

$$\Theta_i \approx \frac{\epsilon_{sm} s_{rm}}{d - x} \quad (9.12)$$

Dabei wird die in horizontaler Richtung gemessene Verlängerung des Risselements durch den vertikalen Abstand der Längsbewehrung von der Biegedruckzone dividiert. Die Summe der ele-

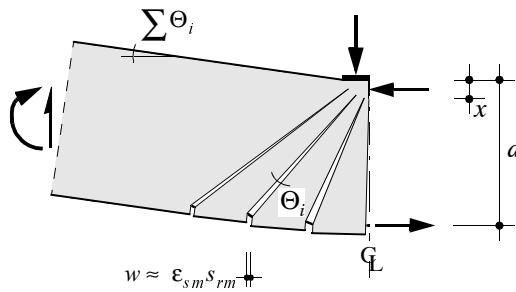


Bild 9.5 – Berechnung des plastischen Gelenkwinkels aus der Verlängerung des Zuggurts.

mentaren Gelenkwinkel des plastischen Verformungsbereichs beträgt

$$\sum \Theta_i = \Theta_y + \Theta_p \quad (9.13)$$

Bei Fliessbeginn der Längsbewehrung ( $F = F_y$ ) beträgt die Rotation  $\Theta_y$ , und der plastische Gelenkwinkel  $\Theta_p$  bezeichnet den Zuwachs der Rotation bis zum Bruch des Trägers. Bei der Summation der Risswinkel werden nur die Beiträge derjenigen Risse berücksichtigt, in denen die Längsbewehrung im rechnerischen Bruchzustand die Fliessgrenze erreicht oder überschreitet. Die Bestimmung des Winkels  $\Theta_y$  kann somit erst erfolgen, wenn die Ausdehnung des plastischen Bereichs bekannt ist.

Damit ist eine Möglichkeit gefunden, das Verformungsvermögen plastischer Verformungsbereiche systematisch zu untersuchen und einheitlich darzustellen. In Bild 9.6 sind die Resultate entsprechender Berechnungen für den bereits in den Bildern 9.2 und 9.4 behandelten Träger aufgetragen. Das Diagramm enthält die Rechenergebnisse für Stähle aller drei hier unterschiedenen Duktilitätsklassen ( $A, B, C$ ). Als Rechenparameter dient der mechanische Bewehrungsgehalt  $\omega$ . Er ist (für ideal plastisches Materialverhalten) über die Beziehung  $x = \omega d$  direkt mit der Höhe der Biegedruckzone verknüpft und kann somit, zumindest für den Fall des Versagens der Biegedruckzone, als Hauptparameter des Problems betrachtet werden. Alle weiteren Parameter wurden in den Berechnungen konstant gehalten.

In Bild 9.6 deutlich zu erkennen sind die unterschiedlichen Kurvenverläufe, die sich für die zwei bis anhin unterschiedenen Versagenszustände ergeben. Falls die Bruchdehnung des Stahls erreicht wird (Zerreissen der Bewehrung), nehmen die Werte für  $\Theta_p$  mit zunehmendem Bewehrungsgehalt ebenfalls leicht zu. Bestimmt hingegen der Bruch der Biegedruckzone das Versagen, so findet man mit zunehmendem Bewehrungsgehalt stark abnehmende plastische Gelenkwinkel. Für Stahl der Duktilitätsklasse  $C$  ist diese Art des Versagens im gesamten dargestellten Bereich von  $\Theta_p$  massgebend, und für solchen der Duktilitätsklasse  $B$  ab einem Bewehrungsgehalt  $\omega$  von etwa 0.16; unterhalb dieser Grenze erweist sich das Zerreissen der Bewehrung als Versagensursache. Für Stahl der Duktilitätsklasse  $A$  wird das Verformungsvermögen der Träger nahezu im gesamten Bereich der untersuchten Bewehrungsgehalte ( $\omega < 0.34$ ) durch das Versagen des Zuggurts begrenzt.

In den bisherigen Betrachtungen wurde davon ausgegangen, dass Stegbrüche durch geeignete Massnahmen verhindert werden. Durch die Wahl einer genügend grossen Stegdicke sowie die Annahme einer kräftigen Bügelbewehrung können solche Brüche tatsächlich ausgeschlossen werden; im Beispiel von Bild 9.6 wurde die diagonale Hauptdruckspannung deshalb auf einen (eher tiefen) Wert von  $\sigma_2 = -4$  MPa begrenzt.

### 9.3.3 Durchbiegungen

Das hier beschriebene Rechenmodell eignet sich auch für die Berechnung von Durchbiegungen; hierzu können die in der Stabstatik üblichen Beziehungen verwendet werden. Die Verformung des Zuggurts entlang der Stabachse ist durch den Verlauf der mittleren Dehnung  $\varepsilon_{sm}$  festgelegt. Geht man von einem konstanten Hebelarm der Gurtkräfte sowie von einer konstanten Druckzonenhöhe  $x$  aus, so können die Krümmungen  $\chi$  der Stabquerschnitte wie folgt ermittelt werden:

$$\chi = \frac{\varepsilon_{sm}}{d-x} \quad (9.14)$$

Die mittleren Dehnungen des Zugurts lassen sich mit dem in Bild 9.3 gezeigten Verfahren für beliebige Laststufen ermitteln; vereinfachend kann dabei angenommen werden, dass das endgültige Rissbild bereits bei Belastungsbeginn vorliegt und das Spannungsfeld während der Belastung unverändert bleibt.

In Bild 9.7 (a) sind die auf diese Weise berechneten Mittendurchbiegungen für einen Träger mit der Schlankheit  $l/d = 20$  und Stahl der Duktilitätsklasse B dargestellt. Die Querschnittsabmessungen des Trägers und die für die Berechnung benötigten Kennwerte der Materialien können dem Bild entnommen werden. Im Diagramm sind die Last-Durchbiegungs-Kurven für mechanische Bewehrungsgehalte  $\omega$  von 0.1, 0.2 und 0.3 aufgetragen. Bis zum Erreichen der Fliessgrenze unterscheidet sich die Form der Kurven nur wenig. Bei Fliessbeginn der Längsbewehrung weist der am schwächsten bewehrte Träger die kleinste Durchbiegung auf, bis zum Bruch des Trägers sind aber insgesamt die grössten Verformungen möglich; dabei wird das Zerreissen der Bewehrung massgebend. Für die grösseren Bewehrungsgehalte erfolgt das Versagen hingegen durch den Bruch der Biegedruckzone.

In Bild 9.7 (b) ist die auf  $F_y$  bezogene Zunahme der Last in Funktion des plastischen Gelenkwinkels dargestellt, wobei  $F_y$  die Last bei Fliessbeginn der Längsbewehrung bezeichnet. Die Kurven veranschaulichen die Verfestigungen der plastischen Gelenke. Im Fall des Trägers mit  $\omega = 0.1$  wächst die Zugkraft bis zum Bruch um den Faktor  $f_t/f_y = 1.08$  an, die Zunahme der

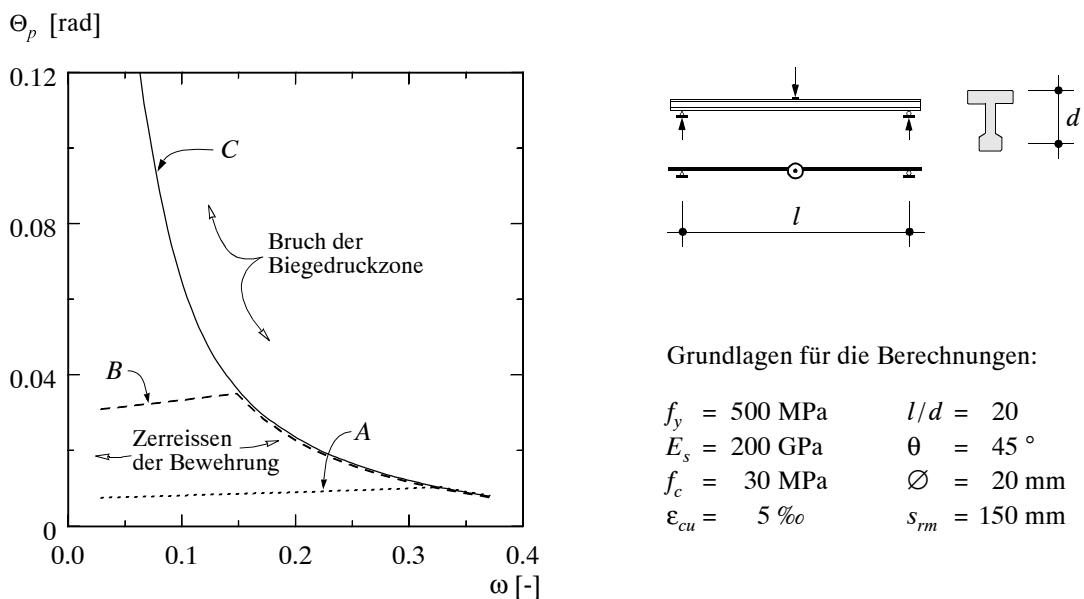
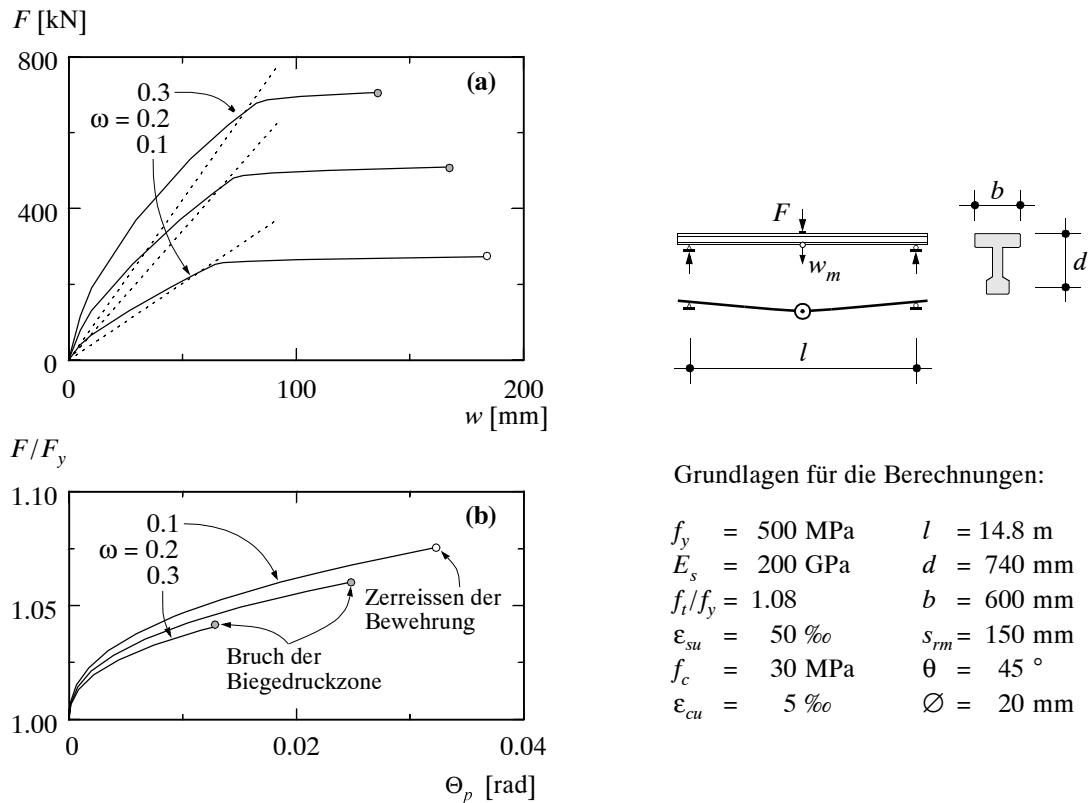


Bild 9.6 – Berechnete plastische Gelenkwinkel für einen einfachen Balken unter einer Einzellast: Stähle der Duktilitätsklassen A, B und C.



Grundlagen für die Berechnungen:

$f_y = 500 \text{ MPa}$	$l = 14.8 \text{ m}$
$E_s = 200 \text{ GPa}$	$d = 740 \text{ mm}$
$f_t/f_y = 1.08$	$b = 600 \text{ mm}$
$\varepsilon_{su} = 50 \%$	$s_{rm} = 150 \text{ mm}$
$f_c = 30 \text{ MPa}$	$\theta = 45^\circ$
$\varepsilon_{cu} = 5 \%$	$\emptyset = 20 \text{ mm}$

Bild 9.7 – Verformungsberechnung: (a) Last-Durchbiegungs-Kurven; (b) Verfestigung des plastischen Gelenks.

Last bleibt aber geringfügig hinter diesem Wert zurück. Der Grund hierfür ist die Abnahme des Hebelarms der Gurtkräfte, die sich in dieser Form infolge der Annahme des starr-ideal plastischen Verhaltens des Betons ergibt. Zur Bestimmung der Höhe der Biegendruckzone könnte das nichtlineare Verformungsverhalten des Betons ohne weiteres berücksichtigt werden. Für übliche Bewehrungsgehalte hat die Wahl des in der Berechnung verwendeten Stoffgesetzes allerdings keinen grossen Einfluss auf die Lage der Druckresultierenden. Es ist deshalb sinnvoll, von einer möglichst einfachen Annahme auszugehen. In Bild 9.7 (a) ebenfalls eingetragen sind die Last-Verformungs-Kurven (punktige Geraden), die sich für die Annahme der über die Trägerlänge konstanten Biegesteifigkeit  $EI_{cr}$  gemäss Gleichung (9.9) ergeben.

Für den einfachen Balken unter einer Einzellast findet man mit der Beziehung

$$\Theta_p \approx 4 \frac{w_{m \max} - w_{my}}{l} \quad (9.15)$$

einen Näherungswert für den plastischen Gelenkwinkel. Die Grössen  $w_{my}$  und  $w_{m \max}$  bezeichnen dabei die Mittendurchbiegungen des Trägers bei Fliessbeginn und beim Erreichen der Höchstlast. Die Näherung basiert auf der Modellvorstellung, dass die plastischen Verformungen des Gelenks als Starrkörperrotationen der beiden Trägerhälfte idealisiert werden können. Anhand eines Vergleichs der Diagramme in Bild 9.7 kann ersehen werden, dass damit die rechnerischen Gelenkwinkel recht gut erfasst werden; dies ist immer dann der Fall, wenn sich die plastischen Gelenke nicht allzu stark verfestigen und die Stegverzerrungen klein bleiben.

## 9.4 Schnittgrößenumlagerung

### 9.4.1 Allgemeines

Bei statisch unbestimmten Systemen treten infolge des nichtlinearen Tragwerksverhaltens Schnittgrößenumlagerungen auf, d.h. es stellen sich Schnittgrößenverteilungen ein, die von denjenigen abweichen, die auf der Grundlage eines linear elastischen Materialverhaltens berechnet werden. Bei Durchlaufträgern verwendet man üblicherweise das Stützmoment  $M_a$  als Bezugssgröße;  $M_a$  lässt sich immer als Momentendifferenz

$$M_a = M_{ae} - \Delta M_a \quad (9.16)$$

ausdrücken, wobei  $M_{ae}$  das Biegemoment gemäß Elastizitätstheorie bezeichnet. Die Verhältniszahl

$$\beta = \frac{\Delta M_a}{M_{ae}} = 1 - \frac{M_a}{M_{ae}} \quad (9.17)$$

kann sodann als Maß für die Schnittgrößenumlagerung betrachtet werden.

Die beiden für die Verteilung der Schnittgrößen bedeutendsten nichtlinearen Effekte, die innerhalb des Belastungsfortschritts auftreten, sind die Rissbildung und das Fliessen der Bewehrung. Die tatsächlich auftretenden Umlagerungen werden durch die Steifigkeits- und die Spannweitenverhältnisse sowie die Art der Belastung beeinflusst. Im Unterschied zu den plastischen Verformungen bleibt die Rissbildung nur anfänglich auf die am stärksten beanspruchten Bereiche des Tragwerks begrenzt. Bei profilierten Trägern ergeben sich in diesen frühen Rissbildungsphasen üblicherweise Umlagerungen von etwa 5 bis 10 %. Mit zunehmender Belastung bilden sich dann aber in nahezu allen Tragwerksbereichen Risse, so dass sich Steifigkeitsunterschiede wieder ausgleichen. Infolgedessen werden die Umlagerungen der Schnittgrößen bis zum Fliessbeginn der Längsbewehrung häufig auf Werte < 5 % abgebaut. Nach dem Auftreten von plastischen Verformungen wirkt sich die Rissbildung kaum mehr auf die Schnittgrößenumlagerung aus; ihr Einfluss wird deshalb in den folgenden Ausführungen vernachlässigt.

### 9.4.2 Beeinflussung des Verformungsvermögens

In diesem Abschnitt wird der Einfluss der Schnittgrößenverteilung auf das Verformungsvermögen plastischer Gelenkbereiche untersucht; da das Verformungsverhalten der plastischen Gelenke aber auch die Verteilung der Schnittgrößen beeinflusst, wird das in Kapitel 9.3.1 beschriebene Rechenmodell erweitert, so dass diese Wechselwirkung berücksichtigt werden kann.

Bild 9.8 (a) zeigt einen Zweifeldträger unter einer gleichmäigig verteilten Last  $q$ . In den nachfolgenden Berechnungen wird davon ausgegangen, dass  $q = 0$  den beanspruchungsfreien Zustand beschreibt, in dem auch keine Eigenspannungszustände vorhanden sind,  $M_{a0} = 0$ . Die Last soll sodann bis zum Bruch monoton anwachsen. Unter der Annahme eines linear elastischen Materialverhaltens sowie einer über die Trägerlänge konstanten Biegsteifigkeit ergibt sich das Moment beim Zwischenuflager zu

$$M_{ae} = \frac{ql^2}{8} \quad (9.18)$$

Geht man davon aus, dass sich das erste plastische Gelenk beim Zwischenuflager bildet, so kann die Berechnung für Zustände nach dem Überschreiten der Fliessgrenze der Längsbewehrung ( $M_a > M_{ay}$ ) auf der Grundlage des in Bild 9.8 (b) dargestellten statischen Systems vorge-

nommen werden. Die Verfestigung des Gelenks wird dabei durch eine lineare  $M_a$ - $\Theta_{ap}$ -Beziehung idealisiert, während das Verformungsverhalten des Trägers weiterhin durch eine konstante Biegesteifigkeit  $EI$  charakterisiert werden soll. Bei dem hier betrachteten Zweifeldträger findet man für den plastischen Gelenkwinkel die Beziehung

$$\Theta_{ap} = \frac{(q - q_y)l^3}{12EI + 8kl} \quad (9.19)$$

wobei die Last beim Erreichen der Fließgrenze durch

$$q_y = \frac{8M_{ay}}{l^2} \quad (9.20)$$

gegeben ist.

Für einen gewählten Wert  $\varepsilon_s$  ( $\varepsilon_s > \varepsilon_{sy}$ ) über dem Zwischenauflager und eine geschätzte Last  $q$  ( $q > q_y$ ) können einerseits das Biegemoment  $M_a$  und andererseits die Schnittgrößenverteilung sowie der Zugkraftverlauf der Längsbewehrung berechnet werden. Auf der Grundlage des in Kapitel 9.3.1 beschriebenen Modells können sodann der plastische Gelenkwinkel  $\Theta_{ap}$  und die Sekanten-Steifigkeit  $k = (M_a - M_{ay})/\Theta_{ap}$  des plastischen Gelenks bestimmt werden; damit lässt sich mit Hilfe von Gleichung (9.19) ein neuer Wert für die Last  $q$  ermitteln. Durch Variation der Last findet man schliesslich denjenigen Beanspruchungszustand, der mit den Verformungen des Systems kompatibel ist. Die Biegesteifigkeit  $EI$  des Trägers muss hierzu bekannt sein. Setzt

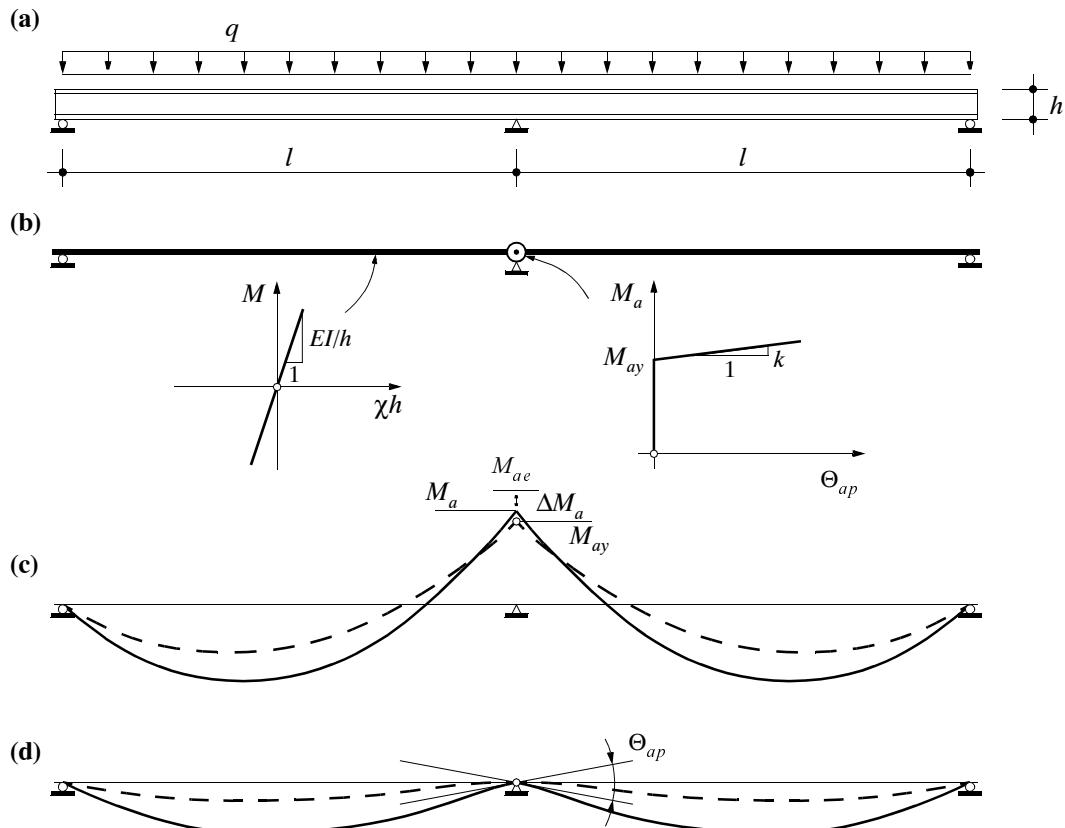


Bild 9.8 – Rechenbeispiel: (a) Geometrie und Belastung; (b) idealisiertes System; (c) Momentenverteilung bei Fließbeginn der Längsbewehrung und in der elastisch-plastischen Phase; (d) Durchbiegungen und plastischer Gelenkwinkel beim Zwischenauflager.

man  $EI = EI_{cr}$  gemäss Gleichung (9.9), so ist zu beachten, dass der zu berücksichtigende mechanische Bewehrungsgehalt  $\omega_b$  (in den Feldern) aufgrund des durch die Last  $q_u$  hervorgerufenen maximalen Feldmoments berechnet werden muss;  $q_u$  findet man für denjenigen Zustand, in dem über dem Zwischenuflager entweder die Bedingung  $\varepsilon_s = \varepsilon_{su}$ , d.h. Zerreissen der Bewehrung, oder das Bruchkriterium (9.11), d.h. Bruch der Biegedruckzone, erfüllt ist und die Bewehrung in den Feldern die Fließgrenze erreicht.

Analog zu Bild 9.4 lassen sich auch in diesem Fall die berechneten Spannungs- und Dehnungsverläufe graphisch darstellen. Bild 9.9 zeigt entsprechende Rechenergebnisse für den Auflagerbereich eines Trägers mit einer Schlankheit  $l/d$  von 20 und einem mechanischen Bewehrungsgehalt  $\omega_a$  von 0.131. Anders als bei einem einfachen Balken verändert sich mit zunehmender Last nicht nur das Beanspruchungsniveau der Stahlspannungen, sondern auch deren Verlauf entlang des Trägers. Dies veranschaulicht den Einfluss der Schnittgrößenumlagerung; die plastischen Verformungen der Längsbewehrung bleiben dadurch auf einen schmaleren Bereich nahe der Krafteinleitung begrenzt. Für die untersuchten Stähle ergeben sich ungefähr gleiche Ausdehnungen der plastischen Gelenkbereiche, obwohl für den Stahl der Duktilitätsklasse C, wie der Verlauf der Stahlspannungen andeutet, bis zum Bruch eine deutlich grössere Schnittgrößenumlagerung stattfindet. Da in diesem Fall jedoch auch grössere maximale Stahlspannungen auftreten

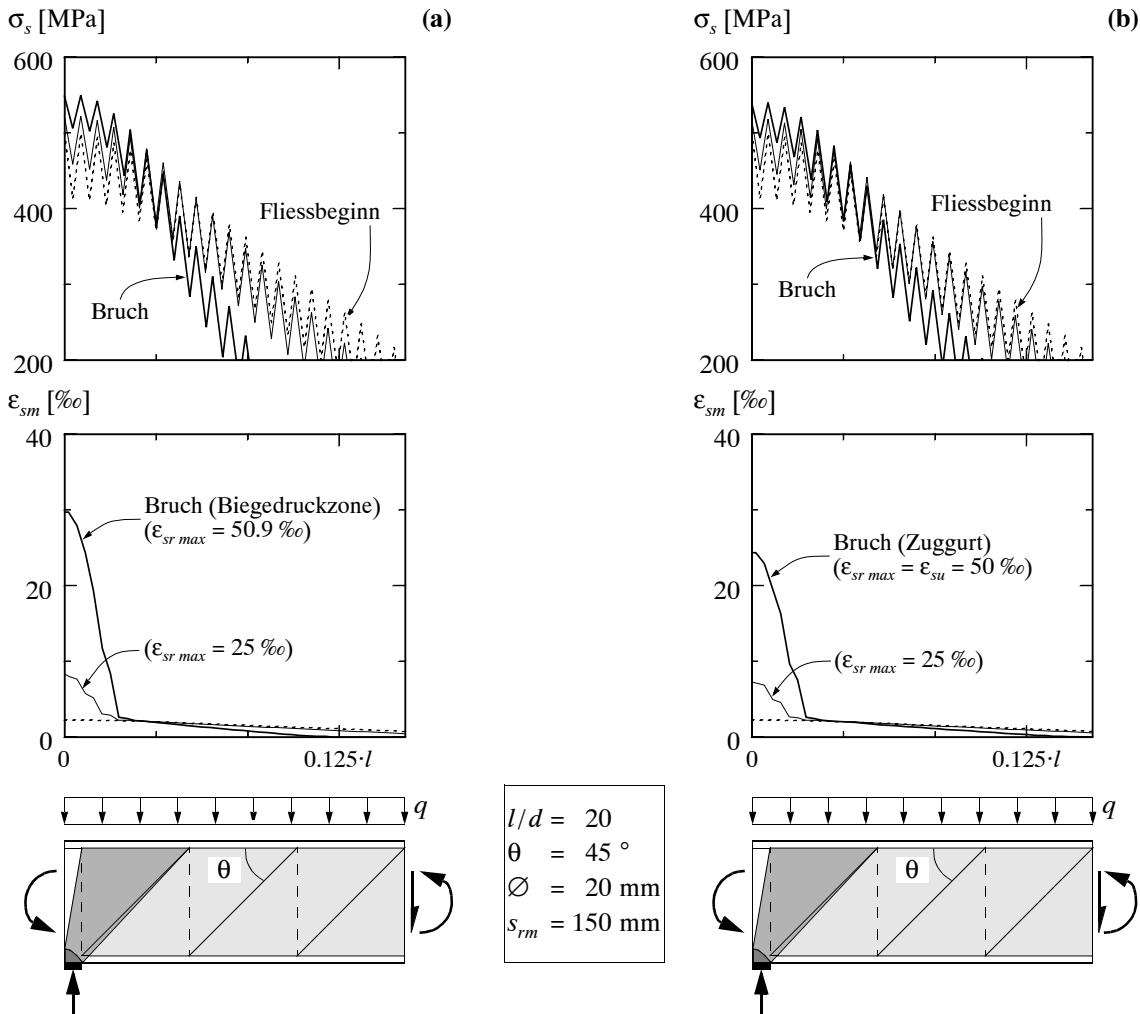


Bild 9.9 – Stahlspannungen und mittlere Gurtdehnungen beim Zwischenuflager: Träger mit  $\omega_a = 0.131$ ; Stahl der Duktilitätsklasse C (a) resp. B (b).

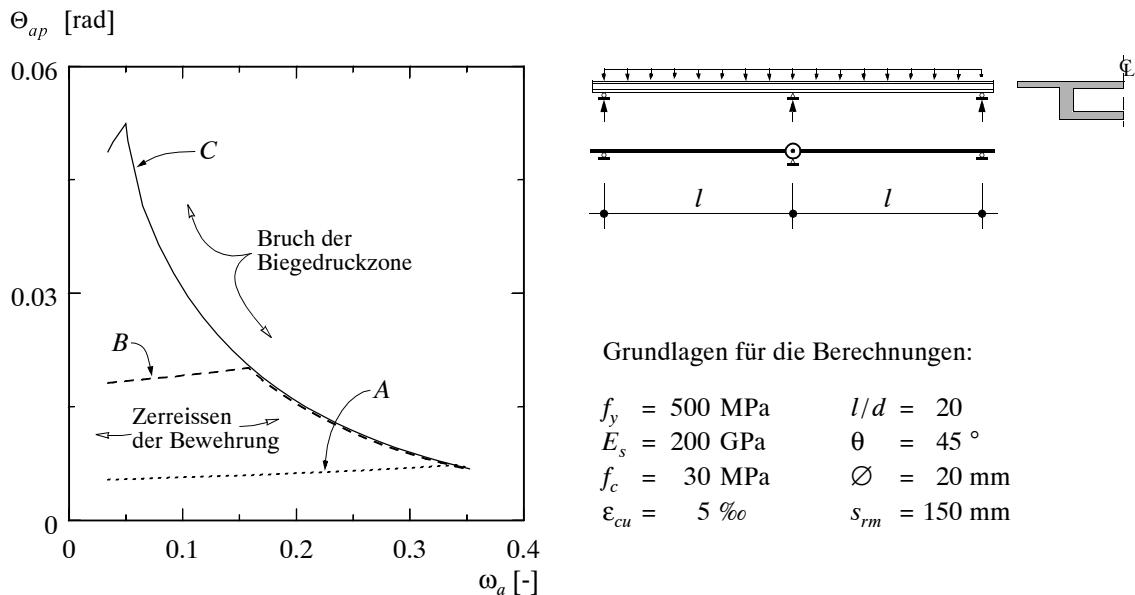


Bild 9.10 – Berechnete plastische Gelenkwinkel für einen Zweifeldträger unter einer gleichmäßig verteilten Last: Stähle der Duktilitätsklassen A, B und C.

ten, wird der ausgeprägtere Abbau der Zugkraft gerade etwa kompensiert. Das Beispiel wurde wiederum so gewählt, dass für den Stahl der Duktilitätsklasse C der Bruch der Biegedruckzone und für den Stahl der Duktilitätsklasse B das Zerreisen der Längsbewehrung massgebend wird.

Für den Bruchzustand können die berechneten plastischen Gelenkwinkel  $\Theta_{ap}$  wiederum in Funktion des mechanischen Bewehrungsgehalts  $\omega_a$  (beim Zwischenauflager) dargestellt werden. Bei entsprechenden Berechnungen sind eine Vielzahl von Parametern zu berücksichtigen. Insbesondere die Geometrie der Träger (Schlankheit, Querschnittsabmessungen) spielt eine entscheidende Rolle. In dem in Bild 9.10 behandelten Beispiel beträgt das Verhältnis der Breiten der oberen und unteren Flanschplatten 2:1. Die Plattenstärken wurden den Erfordernissen der maximalen Beanspruchungen angepasst, so dass sie jeweils grösser waren als die Höhen der Biegedruckzonen im Bruchzustand. Auch die Breite der Stege richtete sich nach den Beanspruchungen. Sie wurde so gewählt, dass die nominelle Schubspannung im Bemessungsquerschnitt für alle Bewehrungsgehalte den Wert  $\tau_{nom} = V/(b_w d_v) = 6 \text{ MPa}$  erreichte; aufgrund dieser Annahme können Stegbrüche ausgeschlossen werden.

Die in Bild 9.10 gezeigten Versagenskurven gelten für diejenigen Schnittgrössenumlagerungen, die Zustände zur Folge haben, in denen über dem Zwischenauflager der Bruch eintritt, während die Längsbewehrung in den Feldern die Fliessgrenze erreicht. Das Verformungsvermögen der Gelenkbereiche entspricht somit jeweils genau dem Verformungsbedarf, der aus den Gesamtdeformationen des Systems resultiert. Einem auf diese Weise ermittelten plastischen Gelenkwinkel  $\Theta_{ap}$  sind demnach immer eine bestimmte Schnittgrössenumlagerung  $\beta$  sowie ein mechanischer Bewehrungsgehalt  $\omega$  (respektive die zugehörige Biegesteifigkeit  $EI_{cr}$ ) für den am stärksten beanspruchten Feldquerschnitt zugeordnet.

Die Annahme, dass sich vor dem Erreichen des hier beschriebenen Versagenszustandes in den Feldern ebenfalls plastische Verformungsbereiche ausbilden, würde zu geringeren Schnittgrössenumlagerungen führen, hätte aber etwas grössere plastische Gelenkwinkel zur Folge. Die in Bild 9.10 aufgetragenen Rotationen können deshalb, für das im Bild behandelte Tragsystem, als untere Grenzwerte betrachtet werden.

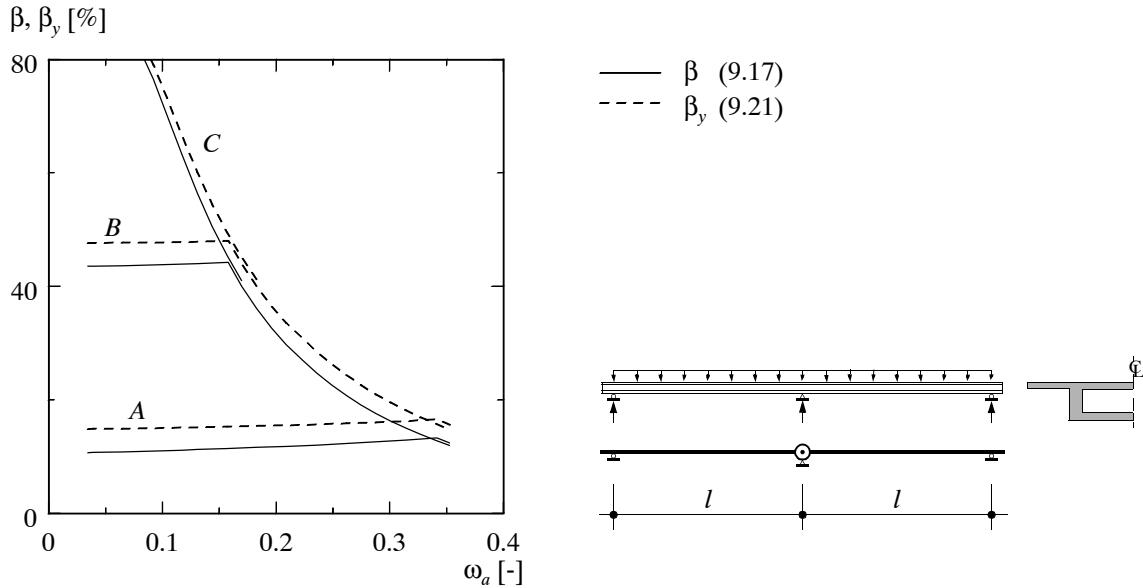


Bild 9.11 – Berechnete Schnittgrößenumlagerungen für das Beispiel von Bild 9.10: Stähle der Duktilitätsklassen A, B und C.

Im Diagramm in Bild 9.11 sind die für das Beispiel von Bild 9.10 berechneten Schnittgrößenumlagerungen  $\beta$  dargestellt. Ebenfalls eingetragen sind die diesen Werten entsprechenden Verhältniszahlen

$$\beta_y = 1 - \frac{M_{ay}}{M_{ae}} \quad (9.21)$$

wobei im Unterschied zur Definition gemäss Gleichung (9.17) als Bezugsgröße für die Schnittgrößenumlagerung das Moment  $M_{ay}$  verwendet wird. In der Praxis wird üblicherweise von dieser Definition ausgegangen, da dann die Verfestigung des Gelenks nicht ermittelt werden muss. Das Diagramm zeigt, dass bei Verwendung von Stählen der Duktilitätsklassen C und B über weite Bereiche der untersuchten Bewehrungsgehalte sehr grosse, für Stahl der Duktilitätsklasse A hingegen nur relativ bescheidene Umlagerungen möglich sind; die entsprechenden Werte für den Stahl A liegen etwa bei  $\beta = 10 \dots 13 \%$ .

## 9.5 Vergleich mit Versuchsergebnissen

### 9.5.1 Verformungen

Im Herbst 1992 wurden am Institut für Baustatik und Konstruktion (IBK) der ETH Zürich Versuche an vier schlaff bewehrten und zwei vorgespannten Trägern durchgeführt. Zu diesen Versuchen liegt ein ausführlicher Bericht vor [99]. Im folgenden soll gezeigt werden, wie die hier vorgestellten Modelle zur Nachrechnung von Versuchen verwendet werden können. Ein eingehender Vergleich von Rechenergebnissen und Messresultaten erfolgt für den Träger T3.

Bild 9.12 zeigt das generelle Versuchskonzept sowie ein diskontinuierliches Spannungsfeld, das die Beanspruchungen der Gurte und des Steges für eine bestimmte Belastung und Beweh-

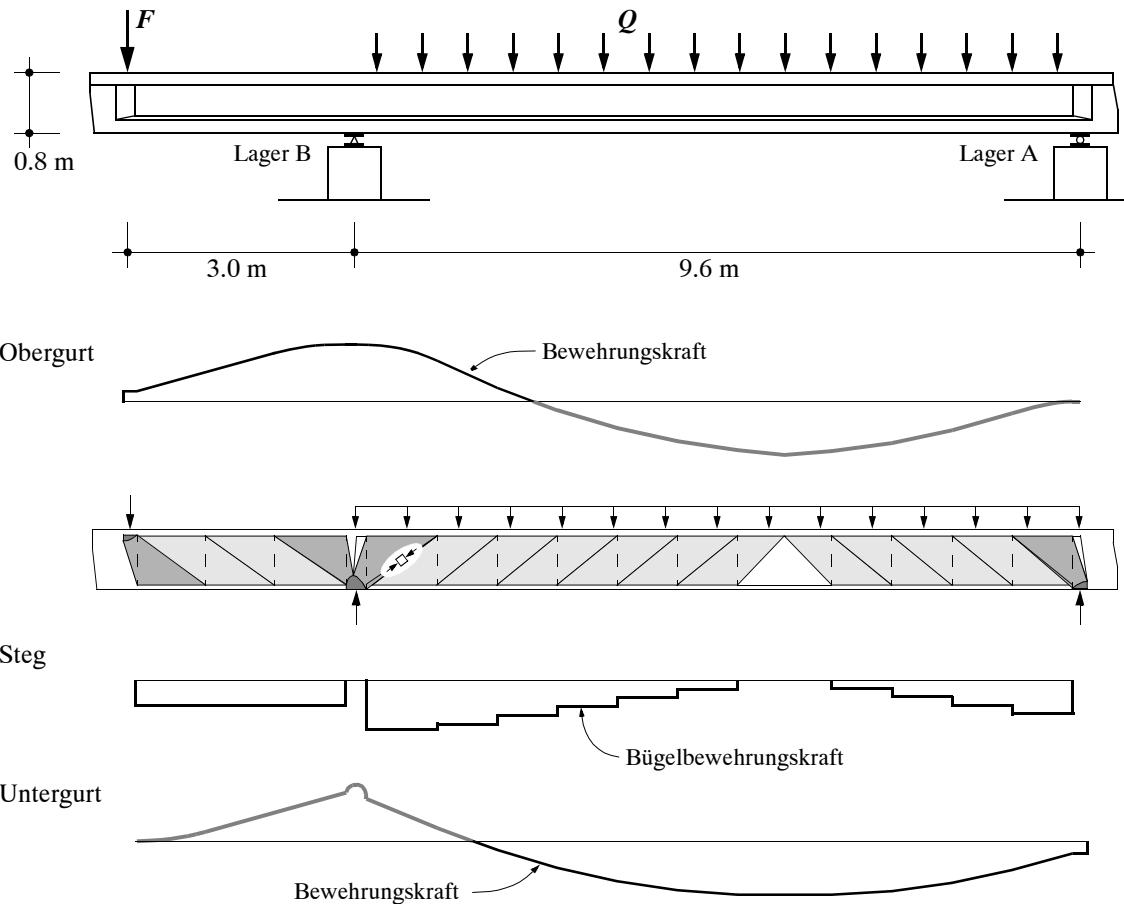


Bild 9.12 – Versuche am IBK [99]: Versuchsaufbau und Analyse des Spannungszustands mittels eines diskontinuierlichen Spannungsfelds.

rungskonfiguration beschreibt. Die Bemessung der Träger erfolgte ebenfalls auf der Grundlage von Spannungsfeldern, wobei die zu erwartenden mittleren Materialkennwerte als Bemessungsgrößen verwendet wurden. In den Versuchen wurden die Lasten anfänglich in einem konstanten Verhältnis gesteigert, bis die Längsbewehrung im Bereich des negativen Biegemoments (Lager B) die Fließgrenze erreichte. Anschließend wurden den Trägern sukzessive weitere Verformungen aufgezwungen, bis auch die Bewehrung im Feld die Fließspannung erreichte und schließlich im Bereich des Lagers B der Bruch eintrat.

Die Abmessungen der Versuchsträger wurden so gewählt, dass Betonbrüche in den Stegen oder in den Biegendruckzonen zu erwarten waren. Wie das in Bild 9.12 dargestellte Spannungsfeld zeigt, liegen die kritischen Bereiche einerseits unmittelbar links des Lagers B (Bruch der Biegendruckzone) und andererseits rechts des Lagers B, im Übergang des Fächers zum benachbarten Druckband (Stegbruch). Ein Versagen des Zuggurts oder der Bügelbewehrung konnte, zumindest für die schlaff bewehrten Träger, aufgrund der sehr guten Duktilitätseigenschaften des verwendeten Betonstahls – die entsprechenden Kenngrößen lagen für alle Stabdurchmesser über den für den Stahl C geforderten Werten – ausgeschlossen werden. Mit den Versuchen war die Möglichkeit gegeben, das gewählte Bemessungskonzept an Trägern realistischer Grösse zu überprüfen sowie die Ausbildung plastischer Gelenke in Bereichen grosser negativer Biegemomente und Querkräfte zu beobachten. Dabei konnte der Einfluss einiger wesentlicher Parameter auf das Verformungsvermögen der Gelenkbereiche studiert werden.

Beim Träger T3 betrug der mechanische Bewehrungsgehalt  $\omega_a$  über dem Lager B 0.132; der entsprechenden Wert im Feld lag bei 0.06. Der Bemessung des Trägers wurde ein Spannungsfeld mit einer Druckdiagonalensteigung von  $25^\circ$  zugrunde gelegt, und der Bügelbewehrungsgehalt  $\omega_z$  wurde entlang des Trägers durch unterschiedliche Bügelabstände variiert.

Mit dem in Kapitel 9.3 beschriebenen Rechenmodell können die Verformungen und insbesondere die Dehnungen des Zuggurts untersucht werden. Die Resultate entsprechender Nachrechnungen der beim Träger T3 bei den Laststufen 9 und 11 gemessenen Gurtdehnungen sind in Bild 9.13 dargestellt. Die aufgetragenen Messresultate beziehen sich auf eine Messbasis von 300 mm und entsprechen den Abständen der etwa auf halber Flanschhöhe angeordneten Messbolzen. In den Berechnungen wurden die in den Versuchen festgestellten mittleren Rissabstände von ungefähr 100 mm berücksichtigt; die Abstände der Risse entsprachen damit über weite Bereiche denjenigen der in den Flanschen eingelegten Bügel. Die den Berechnungen zugrunde gelegten Neigungen der Druckfelder wurden abschnittsweise mit der Gleichung

$$\tan \theta = \frac{\omega_z f_c}{\tau_{xz}} \quad (9.22)$$

ermittelt; als grösste Neigung wurde  $\theta = 45^\circ$  angenommen. Näherungsweise kann damit der Neigungswinkel  $\theta$  in Abhängigkeit von den Beanspruchungen des Steges bestimmt werden.

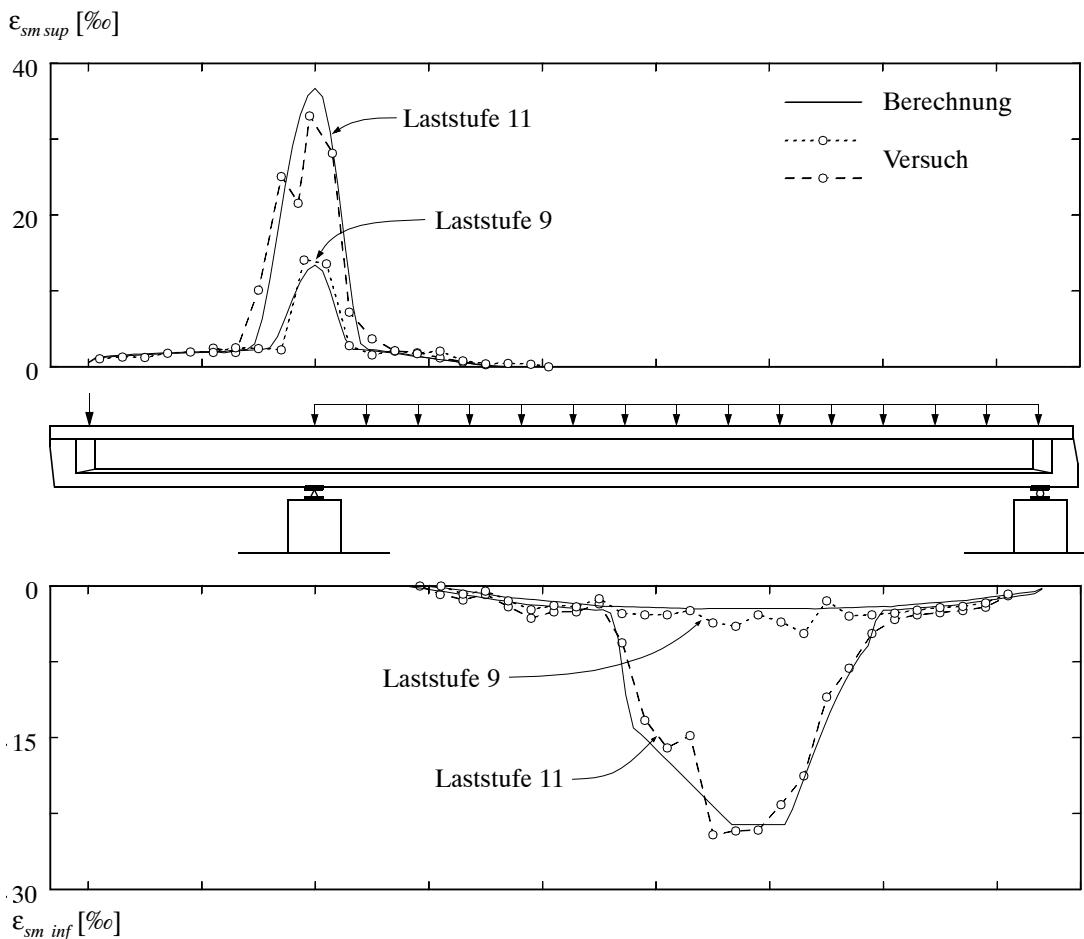


Bild 9.13 – Träger T3 [99]: Gemessene und berechnete mittlere Gurtdehnungen für die Laststufen 9 und 11.

Der in Bild 9.13 dargestellte Vergleich zeigt, dass die Verformungen des Zuggurts mit dem Rechenmodell recht gut erfasst werden. Dabei sind nicht nur erreichte Höchstwerte von Bedeutung, sondern auch die Ausdehnung der plastischen Verformungsbereiche, respektive der Verlauf der Zugkraft und der Gurtdehnung entlang des Trägers. Obwohl das Rissbild im Feld des Trägers, wo die Risse relativ steil verlaufen, auf grössere Neigungswinkel der Druckdiagonalen hinweisen würde, ergeben sich mit der gewählten Vorgehensweise auch in diesem Bereich gute Übereinstimmungen zwischen Versuch und Berechnung. Dies deutet darauf hin, dass gewisse Anteile der Last immer auch durch eine Neigung des Druckgurts abgetragen werden.

Unter Verwendung der Beziehung (9.14) können auch die Krümmungen berechnet werden; daraus lassen sich näherungsweise die Durchbiegungen des Trägers ermitteln. Bild 9.14 zeigt die gemessenen und berechneten Biegelinien für die Laststufen 9, 11 und 12.2. Im Bild ebenfalls aufgetragen sind die für die beiden Kontrolldurchbiegungen  $w_{I0}$  und  $w_{I8}$  berechneten Last-Durchbiegungs-Kurven. Im Anschluss an die Laststufe 12.2 wurden die Durchbiegungen des Kragarms, bei konstant gehaltener Felddurchbiegung, weiter vergrössert. In dieser Phase löste sich in der Biegedruckzone links des Lagers B nahezu der gesamte Überdeckungsbeton ab, wodurch die Lasten geringfügig abfielen. Da in den Berechnungen eine solche Systemänderung nicht explizit berücksichtigt wird, ergibt sich hier ein gegenteiliges Bild; die Unterschiede fallen

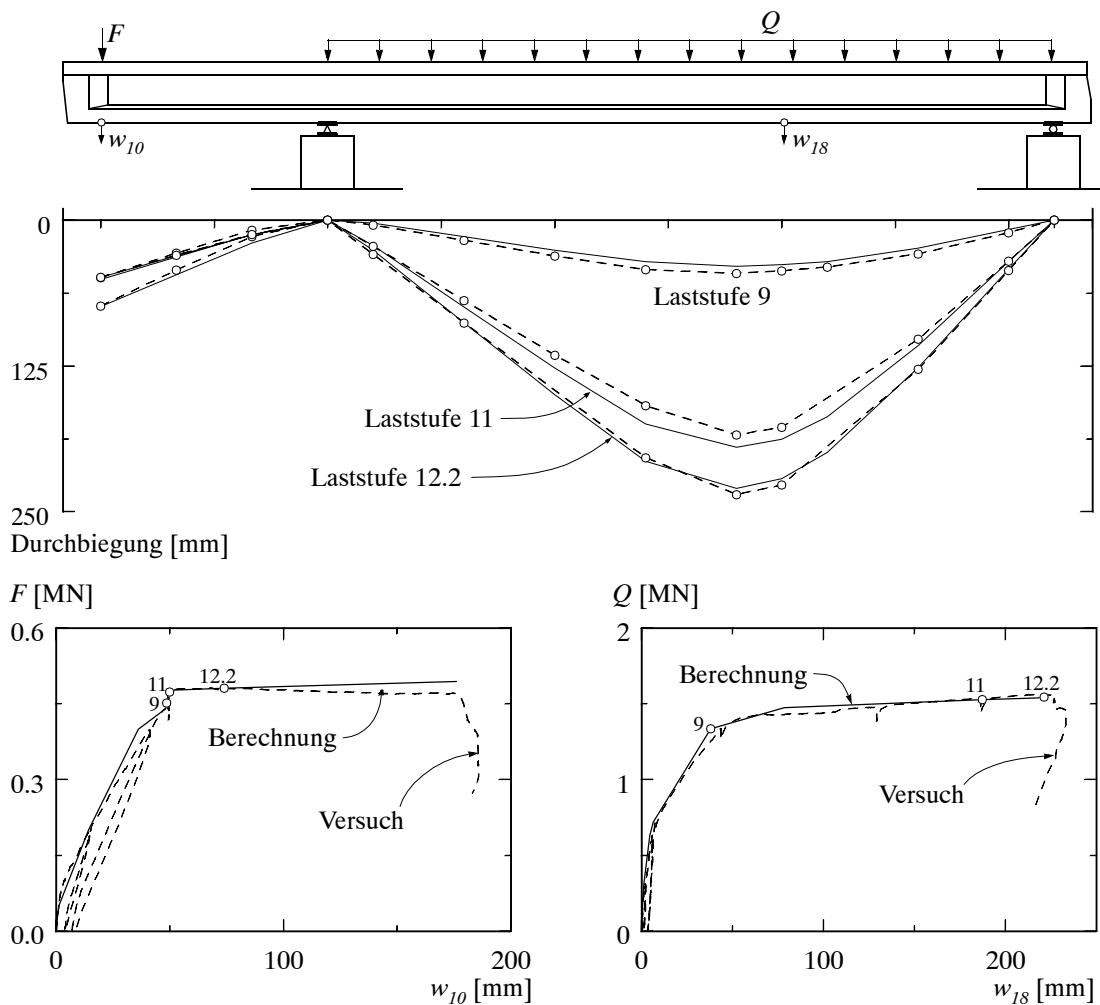


Bild 9.14 – Träger T3 [99]: Gemessene und berechnete Durchbiegungen und Last-Durchbiegungs-Kurven.

allerdings klein aus. Der eigentliche Bruch erfolgte durch das Ausknicken der in der Biegedruckzone eingelegten Längsbewehrungsstäbe.

In den Berechnungen können die Beanspruchungen der Biegedruckzone laufend kontrolliert werden. Die Biegedruckkraft unmittelbar links des Knotens beim Lager B erreicht bei Laststufe 12.2 ungefähr den Bruchwiderstand, der sich auf der Grundlage von Gleichung (8.10) ermitteln lässt. Dabei kann von der effektiv umschnürten Querschnittsfläche der Biegedruckzone ausgegangen werden; die Wirkung der Umschnürungs- (Bügel  $\varnothing 10 \text{ mm}$ ,  $s_c = 100 \text{ mm}$ ) und der Längsbewehrung kann in Analogie zu dem in Kapitel 8 beschriebenen Vorgehen berücksichtigt werden. Die für den Bruchzustand gemäss Gleichung (9.10) berechnete nominelle Randstauchung des Betons über dem Lager B beträgt  $\varepsilon_{cn} = 9.2\%$ ; aufgrund der grossflächigen Beton-Abplatzungen in der Biegedruckzone waren in diesem Zustand keine Messungen mehr möglich.

Bei der Berechnung der Last-Durchbiegungs-Kurven wurde davon ausgegangen, dass sich das endgültige Rissbild bereits bei der Erstrissbildung einstellt. Obwohl damit die tatsächlichen Gegebenheiten nur näherungsweise erfasst werden, ergeben sich auch in der Phase vor dem Fliessbeginn der Längsbewehrung keine grösseren Abweichungen von den gemessenen Werten. Die Rechenergebnisse werden im wesentlichen durch zwei Annahmen beeinflusst; diese betreffen einerseits den Verlauf der Zugkraft, respektive die Ermittlung der Druckfeldneigungen, und andererseits das Verbundverhalten der Bewehrung. Flachere Druckfeldneigungen würden sich auf die Verformungen gleich auswirken wie die Berücksichtigung von kleineren mittleren Verbundschubspannungen. Beide Rechenparameter beruhen letztlich aber auf Abschätzungen, für die im vorliegenden Fall offenbar einigermassen zutreffende Annahmen getroffen wurden. Dieser Sachverhalt widerspiegelt ganz generell die Problematik bei nichtlinearen Tragwerksberechnungen; mit der Komplexität der verwendeten Modelle wächst auch die Anzahl der zu berücksichtigenden Parameter und somit der Freiheitsgrad bezüglich der Beeinflussung der Rechenergebnisse. Einfachere Modelle weisen demgegenüber den Vorteil auf, dass die Berechnungen übersichtlich bleiben, und dass die Rechenparameter direkt das physikalische Verhalten der Tragwerkskomponenten betreffen.

### 9.5.2 Plastische Gelenkwinkel

Die Ermittlung der plastischen Gelenkwinkel aus vorliegenden Messergebnissen ist mit einigen Schwierigkeiten verbunden. So ist es im allgemeinen nicht möglich, hierfür die Gurtdehnungen heranzuziehen, da diese oft nicht bis zum Bruch aufgezeichnet werden können; in einigen Fällen liegen gar keine detaillierten Messungen vor, oder die Messergebnisse sind nur mangelhaft dokumentiert. Im folgenden werden die Versuche deshalb auf der Grundlage von Gleichung (9.15) ausgewertet. Da die Durchbiegungen in der Regel relativ genau gemessen werden und bei üblichen Tragsystemen vergleichsweise kleine Gelenkverfestigungen und Stegverzerrungen auftreten, findet man damit meist gute Näherungswerte für die plastischen Gelenkwinkel. In der Form

$$\Theta_p \approx \frac{w_{max} - w_y}{l_{ef}} \quad (9.23)$$

kann die Beziehung auch bei Durchlaufträgern verwendet werden, wobei dann die Länge  $l_{ef}$  eine zu wählende Bezugsgrösse darstellt; hierzu eignet sich beispielsweise der im Abstand  $x$  vom Auflager liegende Momentennullpunkt bei Fliessbeginn. Die Werte  $w_y$  und  $w_{max}$  bezeichnen die an dieser Stelle des Trägers gemessenen Durchbiegungen; sie beziehen sich auf den Fliessbeginn der Längsbewehrung respektive auf den Zustand beim Erreichen der Höchstlast oder, falls grosse plastische Verformungen auftreten (lange Plateaus ohne wesentliche Entfestigung), beim Eintreten eines markanten Lastabfalls. Eine geringfügig andere Wahl der Bezugslänge  $l_{ef}$  beeinflusst die Grösse der plastischen Gelenkwinkel in der Regel nur wenig.

In Bild 9.15 sind die aus den Durchbiegungen der Träger T1 bis T6 [99] ermittelten plastischen Gelenkwinkel zusammengestellt. Ein Vergleich zwischen Versuch und Berechnung ist im allgemeinen, aufgrund der Vielzahl der zu berücksichtigenden Parameter, nur für den Einzelfall, anhand einer detaillierten Nachrechnung, möglich. Für einen qualitativen Vergleich der Versuchsergebnisse ist es hingegen sinnvoll, diese den Resultaten von Berechnungen an einem Ersatzsystem gegenüberzustellen. Mit dem Ersatzsystem sollten die wesentlichsten Parameter berücksichtigt werden können, so dass die Rechenergebnisse das tatsächliche Verhalten zumindest näherungsweise widerspiegeln. Ein solcher Vergleich ist in Bild 9.15 dargestellt. Als Ersatzsystem dient ein einfacher Balken mit einer Schlankheit  $l/d$  von 8, und den Berechnungen liegen die im Bild angegebenen Kennwerte der Materialien zugrunde; als Bruchkriterium wurde das Erreichen einer nominellen Randstauchung von 8 % gewählt.

Im Bild ebenfalls eingetragen sind die bei den Trägern T5 und T6 beobachteten plastischen Gelenkwinkel. Diese beiden Träger waren teilweise vorgespannt und müssten deshalb eigentlich gesondert behandelt werden. Der Vergleich verdeutlicht aber, dass bei vorgespannten Trägern, in bezug auf die plastischen Verformungsbereiche, kein grundsätzlich anderes Verhalten zu erwarten ist. Diese Feststellung gilt zumindest dann, wenn zusätzlich zur Vorspannung eine schlaffe Bewehrung eingelegt wird; in den Versuchen betrug der aus dem Spannstahl resultierende Anteil am Biegewiderstand beim Lager B ungefähr 50 %. Aufgrund einer Vorspannung ergeben sich insbesondere bei relativ kleinen Lasten (Gebrauchslasten) deutlich geringere Durchbiegungen, da die Rissbildung im Vergleich zu schlaff bewehrten Trägern verzögert erfolgt. Bis zum Fliessbeginn der Längsbewehrung unterscheiden sich die Träger diesbezüglich aber nur noch wenig. Beim Träger T5 erfolgte das Versagen durch den Bruch der Biegendruckzone, eingeleitet durch das Ausknicken der äusseren Bewehrungsstäbe unmittelbar links des Lagers B. Das Versagen trat schlagartig ein, was darauf hindeutet, dass im Vergleich zu den schlaff bewehrten Trägern bis zum Bruch weniger Energie dissipiert wurde. Tatsächlich weisen Spannglieder nur gerade in den Bereichen maximaler Biegebeanspruchungen plastische Verformungen auf; bedingt durch die Kabelgeometrie bleiben die Zusatzbeanspruchungen der Spannglieder ausserhalb dieser Bereiche relativ klein.

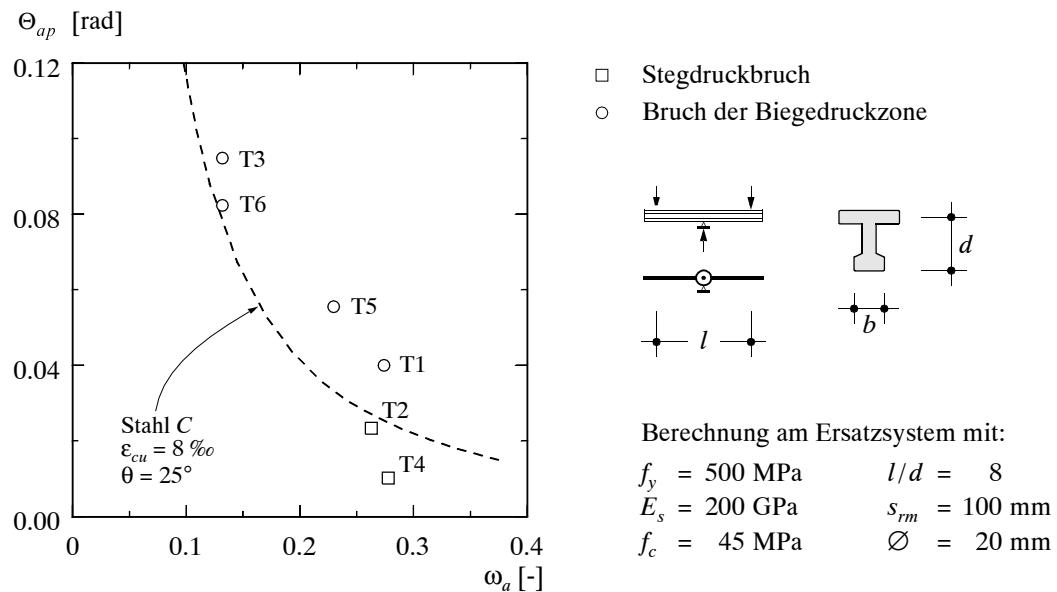


Bild 9.15 – Qualitativer Vergleich experimentell ermittelter plastischer Gelenkwinkel [99] mit Berechnungen am Ersatzsystem.

Beim Bruch des Trägers T6 wurde das Spannglied im Bereich des negativen Biegemoments (Lager B) zerrissen. Gleichzeitig war aber auch das Tragvermögen der Biegedruckzone erschöpft; bei den infolge der Abplatzungen des Überdeckungsbetons freigelegten Bewehrungsstäben zeigten sich bereits kleinere Ausbauchungen. Die auf der Flanschoberfläche gemessenen mittleren Dehnungen des Zuggurts wiesen in diesem Bereich Werte von mehr als 40 %o auf; sie lagen somit in der Größenordnung der Bruchdehnung der verwendeten Litzen. Diese Tatsache verdeutlicht, dass sich das Verbundverhalten von Spanngliedern (Hüllrohr, Injektionsgut und Litzen) von demjenigen der schlaffen Bewehrung unterscheidet, vgl. Kapitel 6. Zudem sind die Verformungen der Litzen nicht direkt mit dem sich einstellenden Rissbild gekoppelt. Aufgrund dieser Beobachtungen kann gefolgert werden, dass insbesondere in der Fliessphase nur noch geringe Verbundschubspannungen zwischen Beton und Litzen wirksam sind. Diese Besonderheiten des Verbundverhaltens sind letztlich der Grund dafür, dass Spannstähle, trotz ihrer eher niedrigen Duktilitätskennwerte, ein duktiles Tragwerksverhalten ermöglichen.

Im Sinne eines qualitativen Vergleichs sind in Bild 9.16 experimentell ermittelte plastische Gelenkwinkel den Ergebnissen von Berechnungen an einem Ersatzsystem gegenübergestellt. Die dargestellten Kurven beziehen sich auf Stähle der Duktilitätsklassen A, B und C und auf eine Trägerschlankheit  $l/d$  von 10; die übrigen Rechenparameter entsprechen den bereits in den Bildern 9.6 und 9.10 verwendeten Werten. Bei den im Diagramm eingetragenen Punkten handelt es sich um Versuchsergebnisse von Trägern mit profilierten Querschnitten [27, 99] und solche von Balken mit Rechteckquerschnitten [12, 67]. Die von Gauvreau [27] getesteten Träger waren verbundlos vorgespannt, enthielten aber auch eine kräftige schlaffe Bewehrung, die ungefähr 50 % des Biegewiderstands ausmachte. Die Träger versagten durch den Bruch der Biegedruckzonen, und bei einem der Träger wurden gleichzeitig die Bügel zerrissen. In bezug auf das Ver-

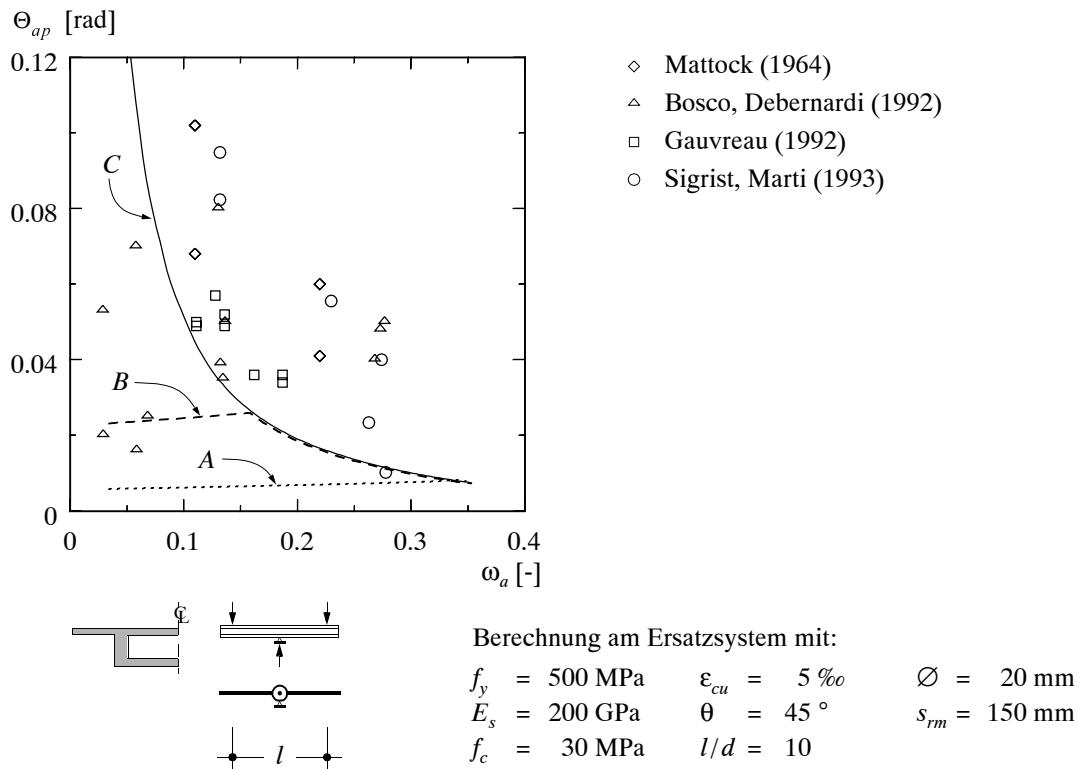


Bild 9.16 – Qualitativer Vergleich experimentell ermittelter plastischer Gelenkwinkel mit Berechnungen am Ersatzsystem: Stähle der Duktilitätsklassen A, B und C.

formungsvermögen ergeben sich daher keine grundlegenden Unterschiede zu den andern in dieser Zusammenstellung aufgeführten Trägern.

Es wurde bereits mehrfach darauf hingewiesen, dass sich Versuchsergebnisse anhand der Beziehung zwischen Längsbewehrungsgehalt und plastischem Gelenkwinkel (Bild 9.16) nur unzureichend vergleichen lassen, da bei der Interpretation eine sehr viel grössere Anzahl von Einflüssen berücksichtigt werden muss. Trotzdem kann eine solche Darstellung sinnvoll sein, da damit die in den Versuchen erzielten plastischen Gelenkwinkel in einen grösseren Zusammenhang gestellt werden. Der in Bild 9.16 gezeigte Vergleich veranschaulicht, dass es mit relativ einfachen Vergleichsrechnungen gelingt, die Größenordnungen der plastischen Gelenkwinkel abzuschätzen. Auf diese Weise lassen sich, zumindest für bestimmte Gruppen von Versuchsergebnissen, untere Grenzwerte der zu erwartenden plastischen Gelenkwinkel angeben, und die daraus gewonnenen Erkenntnisse können, falls die in den Vergleich mit einbezogenen Versuche repräsentativ sind, bei der Bemessung oder der nachträglichen Beurteilung von Stahlbetonträgern verwendet werden.

Das in Kapitel 9.3 gezeigte Verfahren eignet sich für eingehende Analysen des Verformungsverhaltens von Stahlbetontragwerken. Es können verschiedene Einflüsse studiert werden, und es gelingt, die zu erwartenden plastischen Verformungen relativ zuverlässig zu ermitteln. Für die Bemessungspraxis sind solch detaillierte Untersuchungen in der Regel zu aufwendig. Das Ziel der Bemessung ist nicht, möglichst umfangreiche Berechnungen durchzuführen, sondern durch eine umsichtige Dimensionierung und die Wahl geeigneter Materialien ein den Anforderungen angepasstes Tragwerksverhalten sicherzustellen. Hierzu ist es allerdings erforderlich, das Verhalten hoch beanspruchter Tragwerksbereiche richtig beurteilen zu können, wofür im allgemeinen einige wenige, aber aussagekräftige Abschätzungen herangezogen werden sollten. Vor diesem Hintergrund kommt einem generellen Vergleich, wie er beispielsweise in Bild 9.16 gezeigt ist, besondere Bedeutung zu. Allein deshalb wird es immer nötig sein, entsprechende Versuche durchzuführen.

## 9.6 Näherungsverfahren

### 9.6.1 Ermittlung der Schnittgrössen

Die Berechnung und Bemessung mehrfeldriger Träger gehört zu den alltäglichen Arbeiten eines konstruktiv tätigen Bauingenieurs. Der Ermittlung der Schnittgrössen kommt dabei besondere Bedeutung zu. Im folgenden werden hierzu die in Kapitel 2 dargelegten Methoden der Plastizitätstheorie verwendet. Das für die Umlagerung der Schnittgrössen erforderliche Verformungsvermögen der Gelenkbereiche kann anschliessend anhand einfacher Abschätzungen überprüft werden. Das grundsätzliche Vorgehen wird für das Beispiel des bereits in Bild 9.8 behandelten Zweifeldträgers erläutert, lässt sich aber auch auf andere Systeme und Belastungskonfigurationen übertragen [107]. Dabei wird nur die Biegetragwirkung untersucht, da diese, falls Stegbrüche verhindert werden, sowohl die Traglast des Systems als auch das Verformungsvermögen der Gelenkbereiche bestimmt. Um die Erläuterungen übersichtlich zu halten, wird auf die Berücksichtigung von Last- und Widerstandsbeiwerten verzichtet.

Bild 9.17 zeigt einen symmetrischen Zweifeldträger mit den zu untersuchenden Lastfällen;  $g$  bezeichnet die ständigen Lasten, und  $q$  stellt eine feldweise angeordnete Verkehrslast dar. Da nur zwei Lastfälle zu berücksichtigen sind, ergeben sich die Momentengrenzwertlinien direkt aus den Momentenlinien der Lasten  $g$  und  $q$ . Die Aufgabe des Ingenieurs besteht nun im wesentlichen darin, das Verhältnis  $M_{ay}/M_{by}$  festzulegen, was der Wahl eines statisch zulässigen Span-

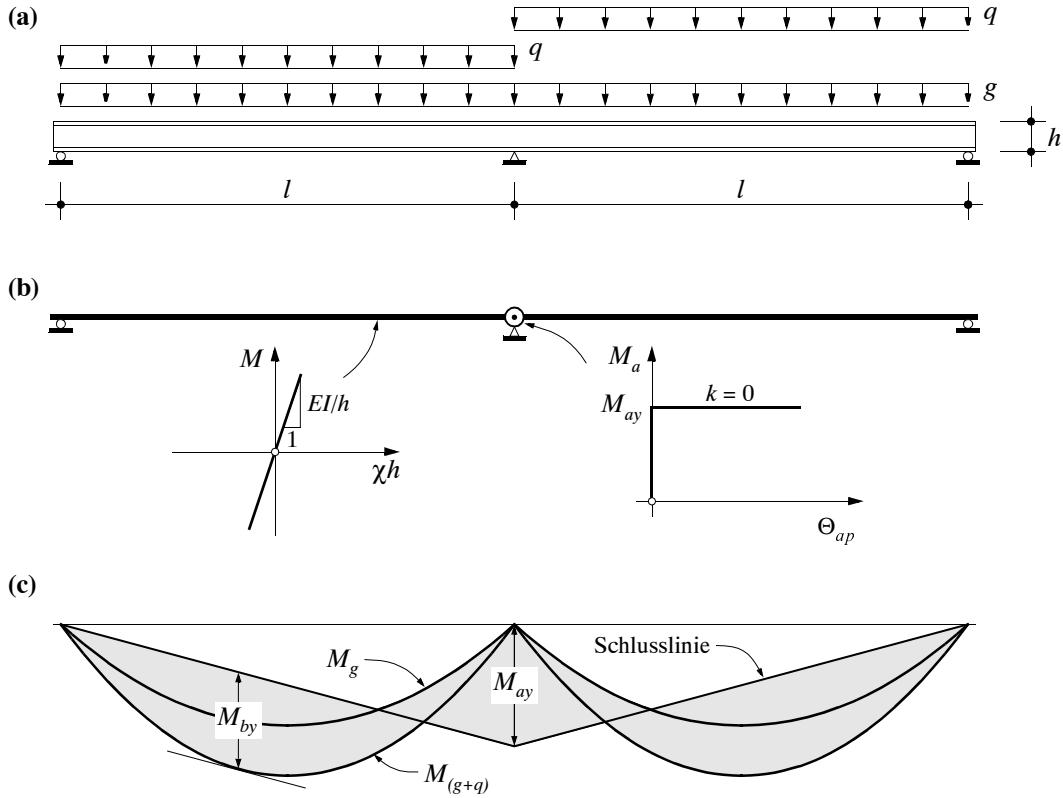


Bild 9.17 – Statische Methode der Plastizitätstheorie: (a) Geometrie und Belastung; (b) idealisiertes System; (c) statisch zulässiger Spannungszustand.

nungszustands entspricht. Im Sinne der statischen Methode der Plastizitätstheorie gibt es hierfür unendlich viele Möglichkeiten. Die Wahl erfolgt in der Regel aber nicht unbesehen; Überlegungen in bezug auf die konstruktive Durchbildung, das Tragwerksverhalten unter Gebrauchslasten sowie die Wirtschaftlichkeit spielen hierbei eine Rolle. Mittels eines Verformungsnachweises für die Gelenkbereiche kann die getroffene Annahme sodann überprüft werden. Bei der Wahl des statisch zulässigen Spannungszustands ist eine graphische Vorgehensweise häufig hilfreich; dabei ist die Schlusslinie der Momente festzulegen, Bild 9.17 (c). Verwendet man wie in (9.21) das Moment  $M_{ay}$  als Bezugsgröße, ergibt sich im vorliegenden Fall für die Schnittgrößenumlageung die Beziehung

$$\beta_y = 1 - \frac{g + q_y}{g + q} \quad (9.24)$$

Unter der Annahme eines initial zwängungsfreien Zustands sowie einer über die Trägerlänge konstanten Biegesteifigkeit, findet man bei monotoner Laststeigerung für die Last  $q_y$  (Fliessbeginn der Längsbewehrung) den Ausdruck

$$q_y = \frac{8M_{ay}}{l^2} - g \quad (9.25)$$

Im Vergleich zu  $g$  sollte  $q_y$  nicht zu klein sein, da sonst bereits im Gebrauchszustand mit relativ grossen Rissbreiten gerechnet werden muss; bei Fliessbeginn der Längsbewehrung betragen diese etwa 0.25 bis 0.35 mm. Setzt man für das plastische Gelenk ideal plastisches Fliessen voraus ( $k = 0$ ), so kann zu jedem gewählten Stützmoment  $M_{ay}$ , respektive zu jedem Wert  $\beta_y$ , das zuge-

hörige Feldmoment  $M_{by}$  berechnet werden. Für das Beispiel von Bild 9.17 findet man die Beziehung

$$M_{by} = \frac{(g+q)l^2(9 + \beta_y(6 + \beta_y))}{128} \quad (9.26)$$

Der statische Grenzwertsatz verlangt, dass die Fliessbedingung an keiner Stelle verletzt wird, was durch eine den Beanspruchungen angepasste Bewehrungsführung gewährleistet werden kann; dabei sind insbesondere der Einfluss der Querkraft sowie die erforderlichen Verankerungslängen der Bewehrungsstäbe zu beachten.

Bei einem einfach statisch unbestimmten System sind höchstens zwei plastische Gelenke erforderlich, damit sich ein Mechanismus ausbildet. Die für das vorliegende Beispiel zu untersuchenden Biegemechanismen sind in Bild 9.18 dargestellt. Die kinematische Methode der Plastizitätstheorie eignet sich zur Überprüfung der Tragfähigkeit in Situationen, in denen die Bewehrungsführung bereits vorliegt. Für eine vorgegebene Belastungskonfiguration wird dabei jeweils die kleinste Lastintensität ( $\lambda$ ) gesucht, die zum Kollaps der Struktur führt. Anhand der in den Bildern 9.18 (b) und (c) gezeigten Mechanismen kann beispielsweise kontrolliert werden, ob die Länge der Bewehrung über dem Zwischenauflager ausreichend gewählt wurde ( $\lambda \geq 1$ ). Unter Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeiten ergibt sich für den in Bild 9.18 (a) dargestellten Mechanismus das Moment  $M_{by}$  zu

$$M_{by} = \frac{(g+q)l^2}{8} - \frac{M_{ay}}{2} \left( 1 - \frac{M_{ay}}{(g+q)l^2} \right) \quad (9.27)$$

wobei die Lage des plastischen Gelenks ( $\xi \cdot l$ ) so bestimmt wurde, dass die Traglast des Systems gerade der Belastung  $(g+q)$  entspricht; Gleichung (9.27) stimmt folglich mit der Beziehung (9.26) überein. Verwendet man wiederum  $\beta_y$  als Bezugsgröße, so kann die Stelle, an der sich das plastische Gelenk im Feld ausbilden wird, wie folgt berechnet werden:

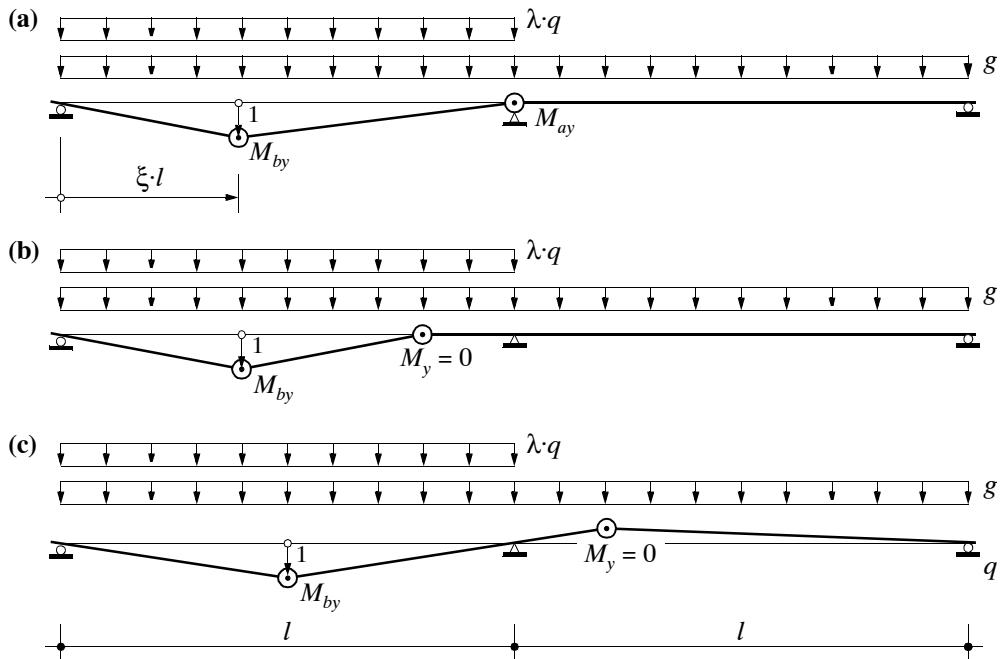


Bild 9.18 – Kinematische Methode der Plastizitätstheorie: Kinematisch zulässige Verschiebungszustände.

$$\xi l = \frac{l(3 + \beta_y)}{8} \quad (9.28)$$

Anhand von Gleichung (9.26) können die erforderlichen Hauptbewehrungen bestimmt werden. In Bild 9.19 ist der für verschiedene Verhältniszahlen  $\beta_y$  und  $b_{inf}/b_{sup}$  ermittelte Bewehrungsgehalt  $\omega_b$  (im Feld) in Funktion des Bewehrungsgehalts  $\omega_a$  (über dem Zwischenauflager) aufgetragen. Die Biegewiderstände  $M_y$  wurden dabei gemäss Gleichung (9.7) berechnet, und es wurde angenommen, dass die Querschnittsabmessungen entlang des Trägers nicht variieren und die statischen Höhen der Querschnitte im Feld und über dem Zwischenauflager gleich sind ( $d_b = d_a$ ). Die Anwendung der Beziehung (9.7) setzt zudem voraus, dass die Höhe der jeweiligen Druckplatte mindestens  $\omega d$  beträgt. Die Diagramme in Bild 9.19 können, ausgehend von einem vorgängig gewählten Wert  $\beta_y$ , direkt zur Dimensionierung der Hauptbewehrung verwendet werden; die auf diese Weise gefundenen Werte  $\omega_a$  und  $\omega_b$  entsprechen den für das Erreichen der Traglast erforderlichen Bewehrungsgehalten. Die detaillierte Bemessung des Trägers und die konstruktive Durchbildung können sodann in einem zweiten Schritt vorgenommen werden. Dies kann beispielsweise auf der Grundlage einfacher Spannungsfelder erfolgen, wobei in erster Linie diejenigen Trägerabschnitte untersucht werden müssen, in denen grosse Beanspruchungen auftreten.

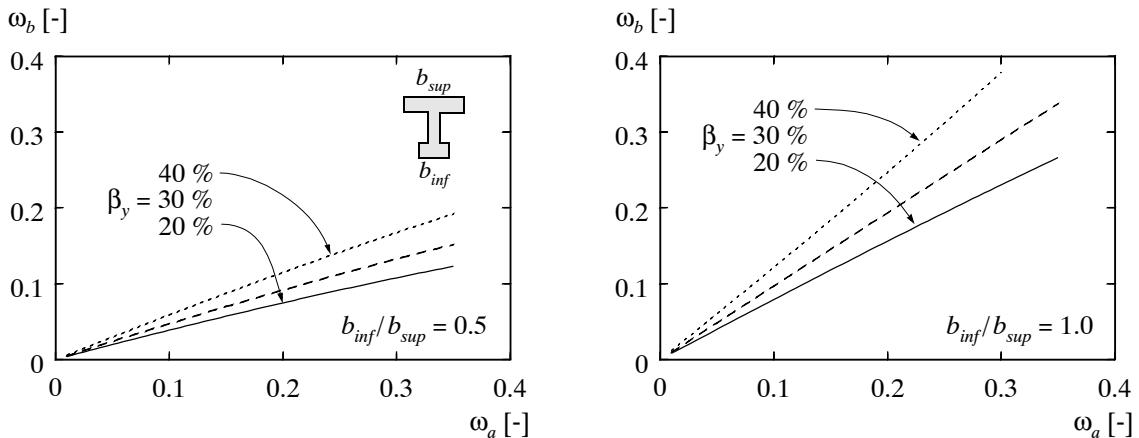


Bild 9.19 – Traglastberechnung für den Zweifeldträger von Bild 9.17. Erforderlicher Bewehrungsgehalt im Feld für verschiedene Umlagerungen  $\beta_y$  und Werte  $b_{inf}/b_{sup}$ .

Bei der Bemessung ist zu beachten, dass mit fortschreitender Gelenkrotation eine Verfestigung eintritt, vgl. Bild 9.7, ein Effekt, der mit der Idealisierung des Verformungsverhaltens der Gelenke gemäss Bild 9.17 (b) vernachlässigt wird. Im Vergleich zu den auf der Grundlage ideal plastischen Fliessens des Stahls berechneten Werten resultieren daraus für die plastischen Verformungsbereiche bis zu 20 % höhere Beanspruchungen. Dies ist insbesondere bei der Wahl der Stegabmessungen zu berücksichtigen; aber auch die konstruktive Durchbildung der Biegedruckzone ist unter Umständen den erhöhten Beanspruchungen anzupassen.

### 9.6.2 Näherungsverfahren für den Verformungsnachweis

Mit dem in Kapitel 9.3 vorgestellten Rechenmodell können die bis zum Bruch auftretenden Verformungen der plastischen Gelenkbereiche ermittelt werden. Detaillierte Untersuchungen bedingen einen gewissen Rechenaufwand, der in der Regel nur dann gerechtfertigt ist, wenn das Trag-

werksverhalten nicht durch konzeptionelle und konstruktive Massnahmen beeinflusst werden kann; dies entspricht der Situation bei der Beurteilung der Tragfähigkeit bestehender Bauwerke. Bei der Bemessung von Stahlbetonträgern wird man dagegen nur in Ausnahmefällen eingehende Verformungsberechnungen vornehmen, und der eigentlichen Ingenieuraufgabe, dem Konstruieren, kommt bedeutend mehr Gewicht zu. Für die Beurteilung der Wirksamkeit der angeordneten Massnahmen in bezug auf das Verformungsvermögen wird man sich auf die Erfahrung und auf einige grobe Abschätzungen stützen.

Im folgenden wird ein Näherungsverfahren für den Verformungsnachweis plastischer Gelenkbereiche gezeigt. Damit können der Verformungsbedarf sowie das Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern abgeschätzt werden. Ziel eines solchen Nachweises ist es nicht, die tatsächlich auftretenden Verformungen zu ermitteln; aufgrund der Vielzahl der Einflüsse, die dabei eine Rolle spielen, sind hierzu aufwendigere Berechnungen nötig. Der Nachweis soll den Ingenieur vielmehr in die Lage versetzen, kritische Tragwerksbereiche oder Beanspruchungssituationen zu erkennen. Anhand der Näherungsbeziehungen lässt sich zudem der Einfluss einzelner Parameter auf das Verformungsverhalten der Träger aufzeigen.

Eine getrennte Behandlung des Verformungsvermögens und des Verformungsbedarfs ist im allgemeinen nicht möglich, da die erreichbaren plastischen Gelenkwinkel bei statisch unbestimmten Systemen von den Verformungen des Systems, respektive von den Schnittgrößenumlagerungen, abhängig sind. Für nicht allzu grosse Schnittgrößenumlagerungen ( $\beta_y < 30\%$ ) kann diese Wechselwirkung aber näherungsweise vernachlässigt werden; dies entspricht auch der Betrachtungsweise, die den Bildern 9.15 und 9.16 zugrunde liegt. Eine weitere Vereinfachung betrifft die Annahmen bezüglich des Verformungsverhaltens der Träger und der plastischen Gelenke. Im folgenden wird wiederum von den in Bild 9.17 (b) dargestellten Idealisierungen ausgegangen; diese umfassen eine konstante Biegesteifigkeit  $EI$  und eine starr-ideal plastische  $M-\Theta_p$ -Beziehung ( $k = 0$ ). Für das Beispiel des im vorherigen Abschnitt behandelten Zweifeldträgers ergibt sich das erforderliche Verformungsvermögen des Gelenks beim Zwischenauflager anhand der Berechnung der Auflagerdrehwinkel für die beiden Trägerhälften, die für Zustände nach dem Erreichen von  $M_{ay}$  als einfache Balken betrachtet werden können. Der Verformungsbedarf wird maximal, falls auf der gesamten Trägerlänge die Höchstlast  $g + q$  aufgebracht wird, und man findet hierfür die Beziehungen

$$\Theta_{p \text{ req}} = \frac{(q - q_y)l^3}{12EI} = \frac{2M_{ay}l\beta_y}{3EI(1 - \beta_y)} \quad (9.29)$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass beim Erreichen von  $M_{ay}$  keine Eigenspannungszustände vorhanden sind,  $M_{a0} = 0$ . Setzt man in der Beziehung (9.29) für die Biegesteifigkeit den Wert  $EI_{cr}$  gemäß Gleichung (9.9) ein und drückt man  $M_{ay}$  durch den entsprechenden mechanischen Bewehrungsgehalt  $\omega_a$  aus, so ergibt sich der Ausdruck

$$\Theta_{p \text{ req}} = \frac{2b_{inf}l\omega_a(1 - \omega_a/2)\beta_y\epsilon_{smy}}{3b_{sup}d\omega_b(1 - \omega_b/2)(1 - \omega_b)(1 - \beta_y)} \quad (9.30)$$

wobei angenommen wird, dass die statischen Höhen der Querschnitte im Feld und über dem Zwischenauflager gleich sind ( $d_b = d_a = d$ ). Der mechanische Bewehrungsgehalt  $\omega_b$  im Feld kann auf der Grundlage einer Traglastberechnung ermittelt oder direkt aus den Diagrammen in Bild 9.19 herausgelesen werden. Anhand der Beziehung (9.30) können die wesentlichen Parameter ersehen werden, die den Verformungsbedarf des Systems beeinflussen. Es sind dies, neben den Bewehrungsgehalten  $\omega$  und der Verhältniszahl  $\beta_y$ , die Querschnittsgeometrie ( $b_{inf}/b_{sup}$ ), die Schlankheit des Trägers ( $l/d$ ) und die Eigenschaften des Bewehrungsstahls ( $\epsilon_{smy} \approx 0.9f_y/E_s$ ).

In den Bildern 9.20 (b) und (c) sind die Rechenergebnisse für verschiedene Annahmen für  $\beta_y$  und  $b_{inf}/b_{sup}$  dargestellt. Für grössere Umlagerungen steigt der Verformungsbedarf des Systems; die Zunahme ist allerdings für  $b_{inf}/b_{sup} = 1$  (z.B. Rechteckquerschnitt) ausgeprägter als für entsprechend kleinere Werte (z.B. Hohlkastenquerschnitt). Beide Parameter spielen sowohl bei der Traglastberechnung ( $\omega_b$ ) als auch bei der Ermittlung des erforderlichen Gelenkwinkels ( $\Theta_{p\ req}$ ) eine Rolle und sind somit nicht in dem Sinn unabhängig voneinander, wie es die Beziehung (9.30) auf den ersten Blick vermuten liesse.

Die Schlankheit des Trägers geht direkt in die Beziehung (9.30) ein; ein grösserer Wert für  $l/d$  bewirkt folglich eine proportionale Zunahme des erforderlichen plastischen Gelenkwinkels. Dies geht auch aus dem Diagramm in Bild 9.21 (a) hervor. In der gleichen Art würde sich auch eine höhere Fliessgrenze des Bewehrungsstahls auf  $\Theta_{p\ req}$  auswirken, da die mittlere Dehnung  $\epsilon_{smy}$  in erster Linie durch den Wert  $f_y$  beeinflusst wird; die Elastizitätsmoduli von Stählen verschiedener Festigkeitsklassen unterscheiden sich kaum, und auch aus der Verbundwirkung ergeben sich bis zum Fliessbeginn nur geringe Unterschiede. Eine Erhöhung der Fliessgrenze des Stahls von 500 auf 600 MPa hat demzufolge eine Zunahme des Verformungsbedarfs von etwa 20 % zur Folge.

Bild 9.21 (b) verdeutlicht, dass die plastischen Gelenkbereiche ganz grundsätzlich ein gewisses Verformungsvermögen aufweisen sollten, selbst wenn die Bewehrung anhand derjenigen Schnittgrössen festgelegt wird, die unter der Annahme eines linear elastischen Materialverhal-

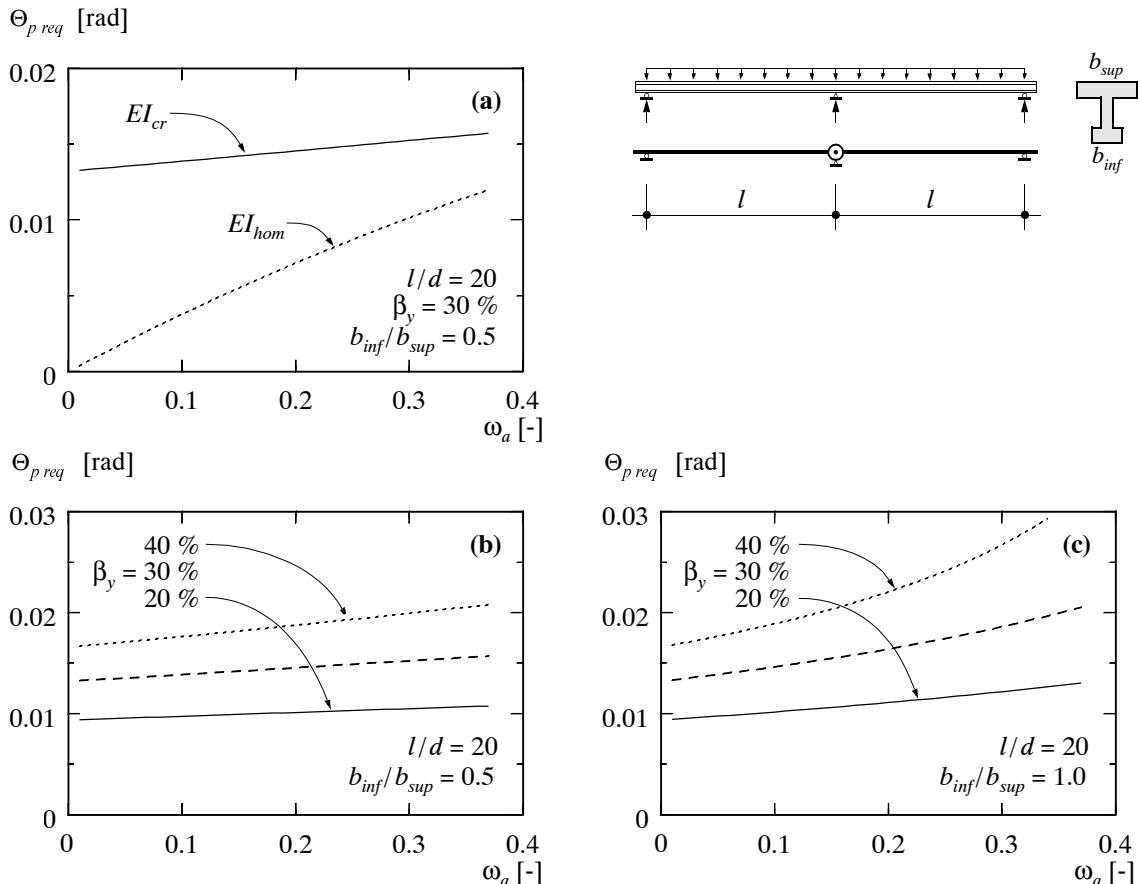


Bild 9.20 – Erforderliche plastische Gelenkwinkel: (a) Einfluss der angenommenen Biegesteifigkeit; (b) und (c) Einfluss der Umlagerung  $\beta_y$  für verschiedene Werte  $b_{inf}/b_{sup}$ .

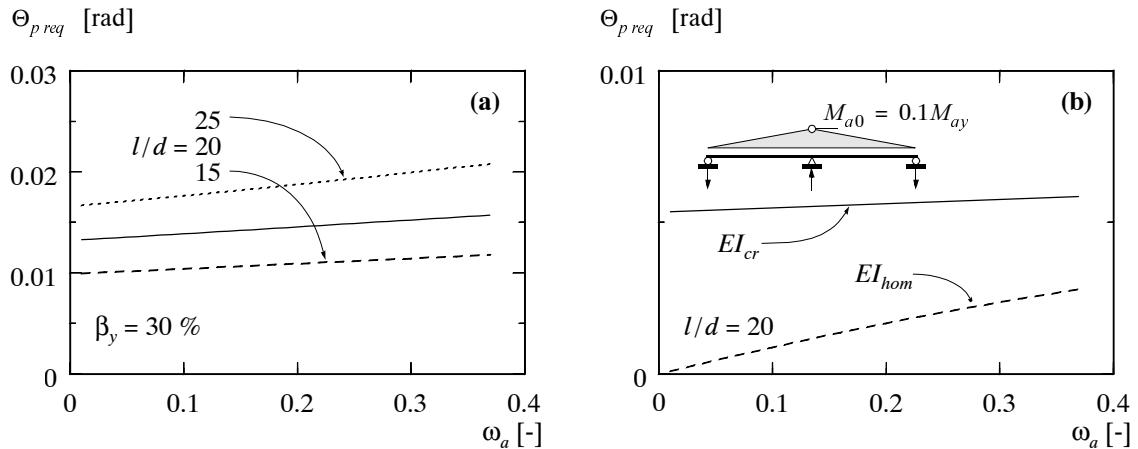


Bild 9.21 – Erforderliche plastische Gelenkwinkel für (a) verschiedene Schlankheiten und (b) für einen angenommenen Eigenspannungszustand.

tens berechnet werden. Das im Bild gezeigte Beispiel entspricht dem Fall  $M_{ay} = M_{ae}$ , d.h.  $\beta_y = 0$ . Den Berechnungen wurde aber ein angenommener Eigenspannungszustand  $M_{a0} = 0.1M_{ay}$  zugrundegelegt, und aus dem Diagramm in Bild 9.21 (b) können somit diejenigen Gelenkrotationen herausgelesen werden, die nötig sind, um diese Zwängungsbeanspruchung abzubauen. Jedes Tragwerk weist Eigenspannungszustände auf, die sich, wie das Beispiel zeigt, auf den Verformungsbedarf des Systems auswirken; bei Durchlaufträgern werden demnach die insgesamt erforderlichen Gelenkinkel  $\Theta_{p \text{ req}}$  an einigen Stellen vergrößert, an andern aber verkleinert. In Kapitel 9.1 wurde bereits darauf hingewiesen, dass der Spannungszustand eines Tragwerks bis zum Auftreten wesentlicher Plastifizierungen eigentlich nicht bestimmt werden kann. Die Grösse der für das Erreichen der Traglast erforderlichen plastischen Gelenkinkel kann deshalb letztlich nie eindeutig quantifiziert werden; dies ist bei der Interpretation der hier gezeigten Rechenergebnisse zu berücksichtigen.

Die näherungsweise Ermittlung des Verformungsvermögens der Gelenkbereiche erfolgt in Anlehnung an die klassische Bieglehre. Man findet den erreichbaren plastischen Gelenkinkel anhand der Multiplikation der maximalen Krümmungszunahme des am stärksten beanspruchten Gelenkquerschnitts mit der fiktiven Gelenklänge  $l_p$ . Die entsprechenden Beziehungen lauten

$$\Theta_{pus} = \frac{l_p(\epsilon_{smu} - \epsilon_{smy})}{d(1-\omega)} \quad (9.31)$$

und

$$\Theta_{puc} = \frac{l_p}{d} \left( \frac{\epsilon_{cnu}}{\omega} - \frac{\epsilon_{smy}}{1-\omega} \right) \quad (9.32)$$

wobei Gleichung (9.31) in den Fällen massgebend wird, in denen das Zerreissen der Längsbewehrung das Versagen bestimmt, während für den Bruch der Biegendruckzone Gleichung (9.32) zu berücksichtigen ist. Zur Bestimmung der mittleren Dehnungen  $\epsilon_{smy}$  und  $\epsilon_{smu}$  können die in Kapitel 6 angegebenen Beziehungen verwendet werden. Der Wert  $\epsilon_{cnu}$  stellt die nominelle Grenzstauchung des Betons dar; diese kann beispielsweise zu  $\epsilon_{cnu} = 3.5\%$  [96] gewählt werden, ist aber, abhängig auch von der Annahme bezüglich der Gelenklänge  $l_p$ , von Fall zu Fall festzulegen.

Bei Trägern mit profilierten Querschnitten kann näherungsweise von Druckfeldneigungen  $\theta$  von  $45^\circ$  ausgegangen werden, und für die Gelenklänge findet man dann etwa den Wert  $l_p = d$ .

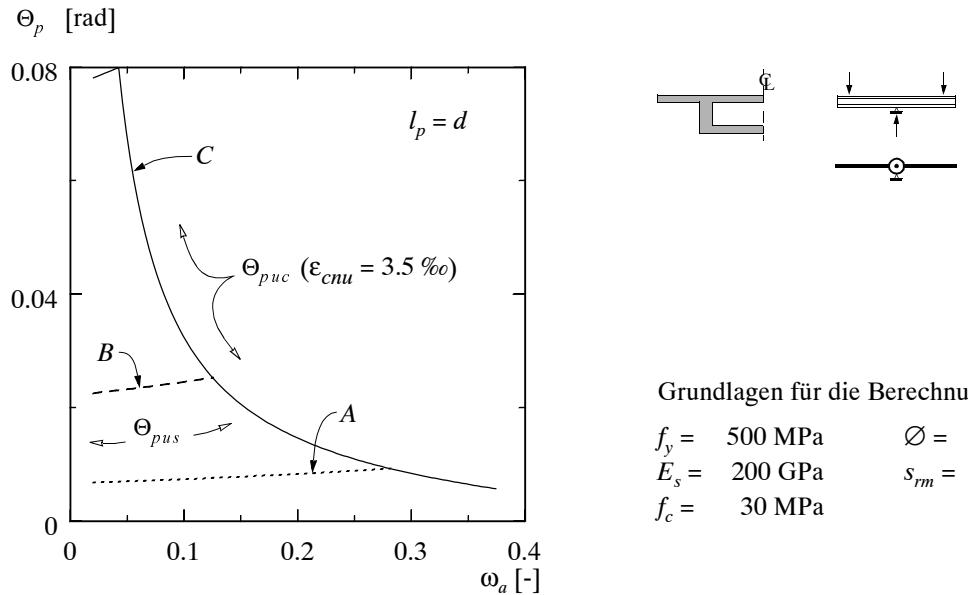


Bild 9.22 – Näherungsweise Ermittlung des Verformungsvermögens der plastischen Gelenkbeziehe für Stähle der Duktilitätsklassen A, B und C.

Bild 9.22 zeigt die für diese Annahme berechneten plastischen Gelenkwinkel  $\Theta_{pus}$  und  $\Theta_{puc}$  für Stähle der Duktilitätsklassen A, B und C. Die im Diagramm aufgetragenen Kurven verdeutlichen, dass mit den Gleichungen (9.31) und (9.32) die Zusammenhänge richtig erfasst werden. Für nicht allzu grosse Schnittgrössenumlagerungen stimmen die auf diese Weise ermittelten plastischen Gelenkwinkel recht gut mit denjenigen aus Bild 9.10 überein.

Die Bedingung für den Nachweis eines ausreichenden Verformungsvermögens der Gelenkbeziehe lässt sich wie folgt schreiben:

$$\Theta_{p\ req} \leq \Theta_{pu} \quad (9.33)$$

Obwohl mit der Entkopplung des Verformungsvermögens vom Verformungsbedarf die tatsächlichen Gegebenheiten stark vereinfacht werden, lassen sich mit dem hier gezeigten Verfahren brauchbare Näherungen finden; dies zumindest für übliche Trägerabmessungen und Bewehrungsanordnungen. Liegen deutlich andere Verhältnisse vor, muss die Wechselwirkung zwischen dem erreichbaren und dem erforderlichen Gelenkwinkel angemessen berücksichtigt werden.

Anhand der vorangehenden Ausführungen kommt die Komplexität des Problems zum Ausdruck. Die gezeigten Beispiele verdeutlichen zudem, dass berechnete Verformungen mit erheblich grösseren Unsicherheiten behaftet sind, als beispielsweise die Tragwiderstände. Daran ändert sich auch nichts, wenn aufwendige Berechnungsverfahren angewendet werden. Gerade deshalb kommt der Wahl geeigneter Materialien und der sorgfältigen konstruktiven Durchbildung besondere Bedeutung zu.



# 10 Mindestbewehrung

*Manuel Alvarez*

## 10.1 Einleitung

In Betonbauten sind Risse im allgemeinen nicht zu vermeiden. Bereits während des Erhärtens entstehen im jungen Beton aufgrund thermischer und hygrischer Gradienten meist feine Risse. Schwinden, Lasteinwirkungen, aufgezwungene oder behinderte Verformungen, Korrosion des Bewehrungsstahls und Frosteinwirkungen können zur weiteren Rissbildung führen.

Eine beschränkte Rissbildung ist für die Dauerhaftigkeit von Betonbauten in der Regel nicht nachteilig, d.h. die Anforderungen an Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit können im Rahmen der vorgesehenen Nutzung und der vorhersehbaren Einwirkungen ohne unvorhergesehnen Aufwand für Instandhaltung und Instandsetzung erfüllt werden.

Aus Tragfähigkeitsgründen muss ein Versagen ohne Vorankündigung bei Erstrissbildung vermieden werden. Über diese Forderung hinaus sollte ganz allgemein mit einer ausreichend starken, gut verankerten und ausreichend fein verteilten Bewehrung ein den jeweiligen Umständen angepasstes Verformungsvermögen von Betonbauteilen gewährleistet werden. Üblicherweise kann dies durch Einhalten von relativ einfachen, auf der Erfahrung beruhenden Regeln für die konstruktive Durchbildung erreicht werden.

Die Mindestbewehrung von Stahlbetonbauten dient in erster Linie der Vermeidung eines Versagens ohne Vorankündigung bei Erstrissbildung. Sie muss derart bemessen sein, dass sie die während des Rissbildungsprozesses auftretenden Zugkräfte in den Rissquerschnitten übertragen kann. In vielen Fällen wird eine Erhöhung der aus Tragfähigkeitsgründen notwendigen Mindestbewehrung verlangt, um im Gebrauchszustand eine den gestellten Anforderungen genügende Begrenzung der Rissbreiten zu gewährleisten. Eine Übersicht zum Themenkreis der Mindestbewehrung einschließlich entsprechender Normvorschriften findet man bei Marti et al. [62].

Nebst den erwähnten Anforderungen sollte die Bewehrung überdies ein ausreichendes plastisches Verformungsvermögen gerissener Tragwerksbereiche gewährleisten und dadurch dasjenige des gesamten Tragwerks sicherstellen helfen. Dies kann erreicht werden, indem unter Berücksichtigung der Verbundgegebenheiten beziehungsweise aller Systemparameter Duktilitätsanforderungen an den Bewehrungsstahl gestellt werden, was meist in Form einer Festlegung erforderlicher Kennwerte der Bruchdehnung  $\epsilon_{su}$  und der Verfestigung  $f_{su}/f_{sy}$  geschieht.

## 10.2 Mindestbewehrung nach Zuggurtmodell

### 10.2.1 Allgemeines

Im folgenden werden auf der Grundlage des Zuggurtmodells Beziehungen aufgestellt, welche die Bestimmung von Mindestbewehrungen zur Begrenzung der Stahlspannungen beziehungsweise der Rissbreiten ermöglichen. Die bei Betrachtung eines entfestigenden Verhaltens des Betons oder eines nicht schlagartigen, sondern sukzessiven Aufreissens des Betonquerschnitts im Falle einer reinen Zwangbeanspruchung sich ergebenden Reduktionen der erforderlichen Mindestbewehrung werden nicht berücksichtigt.

Bei der Bemessung der Mindestbewehrung zur Vermeidung von Sprödbrüchen sind lediglich die im Rissbildungsprozess vorliegenden Verhältnisse von Bedeutung. Eine Begrenzung der Rissbreiten kann sowohl bei (unter Zwangbeanspruchung) noch nicht abgeschlossenem Rissbild als auch (für Gebrauchszustände) oberhalb des Risslastniveaus angestrebt werden. Die Begrenzung der Rissbreiten erfolgt in jedem Fall für die massgebenden Verhältnisse bei maximal möglichem Rissabstand.

### 10.2.2 Einheitlich bewehrte Zugglieder

Bei Stahlbetonzuggliedern mit einheitlicher Bewehrung werden die bei Lasteinwirkung oder bei Beanspruchung aus äusserem Zwang während des Rissbildungsprozesses in Rissquerschnitten auftretenden grösstmöglichen Stahlspannungen  $\sigma_{sr0}$  gemäss Gleichung (6.1) mit der Bedingung

$$\rho \geq \frac{f_{ct}}{\sigma_{sadm} - f_{ct}(n-1)} \quad (10.1)$$

auf ein festgelegtes zulässiges Mass,  $\sigma_{sadm}$ , begrenzt. Die zulässige Stahlspannung könnte unter Vernachlässigung jeglicher Sicherheitsmarge gleich der Bruchfestigkeit des Bewehrungsstahles gewählt werden. In aller Regel wird jedoch  $\sigma_{sadm} \leq f_{sy}$  angesetzt.

Bei einer Beanspruchung aus innerem Zwang ist die grösstmögliche Stahlspannung in jedem Fall kleiner als für Lasteinwirkung oder äusseren Zwang,  $\sigma_{sr} < \sigma_{sr0}$ , siehe Punkt B<sub>2</sub> in Bild 6.8 (c). Demzufolge sind die aus der entsprechenden Gleichung (6.16) abgeleiteten Mindestbewehrungsgehalte

$$\rho \geq \frac{f_{ct} \left\{ 2l\tau_{b0} + \emptyset f_{ct} + \sqrt{4l^2\tau_{b0}^2 - 4l\tau_{b0}\emptyset\sigma_{sadm}} \right\}}{4l\tau_{b0}(\sigma_{sadm} + f_{ct}) + \emptyset f_{ct}^2} \quad \left( \frac{l}{\emptyset} > \frac{\sigma_{sadm}}{\tau_{b0}} \right) \quad (10.2)$$

zur Stahlspannungsbegrenzung bei innerem Zwang in jedem Fall kleiner als die gemäss Beziehung (10.1) für äusseren Zwang beziehungsweise Lastbeanspruchung geltenden Werte.

Die erforderlichen Mindestbewehrungsgehalte zur Begrenzung der im Rahmen des Rissbildungsprozesses auftretenden maximalen Rissbreiten auf ein zulässiges Mass,  $w_{adm}$ , sind von der Art der Beanspruchung unabhängig und folgen für Stahlbetonzugglieder mit einheitlicher Bewehrung aus Gleichung (6.14):

$$\rho \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{f_{ct}^2 \emptyset(n-2)}{4E_s w_{adm} \tau_{b0} + f_{ct}^2 \emptyset(n-1)} \left( 1 + \sqrt{1 + 4 \cdot \frac{4E_s w_{adm} \tau_{b0} + f_{ct}^2 \emptyset(n-1)}{f_{ct}^2 \emptyset(n-2)^2}} \right) \quad (10.3)$$

Mindestbewehrungsgehalte zur Begrenzung der Rissbreiten aus Lasteinwirkung für Gebrauchzustände oberhalb des Risslastniveaus können aus dem Ausdruck rechterhand in Beziehung (6.8) abgeleitet werden:

$$\rho \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{[2\sigma_{sr} - f_{ct}(n-2)]f_{ct}\emptyset}{4E_s w_{adm} \tau_{b0} + [2\sigma_{sr} - f_{ct}(n-1)]f_{ct}\emptyset} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{4E_s w_{adm} \tau_{b0} + [2\sigma_{sr} - f_{ct}(n-1)]f_{ct}\emptyset}{[2\sigma_{sr} - f_{ct}(n-2)]^2 \emptyset}} \right) \quad (10.4)$$

Dabei entspricht  $\sigma_{sr}$  dem gewählten Beanspruchungsniveau. Eine obere Grenze für die frei wählbare Grösse  $w_{adm}$  ergibt sich aus der Bedingung  $\sigma_{sr0}(\rho) \leq \sigma_{sr}$ .

### 10.2.3 Gemischt bewehrte Zugglieder

Bei vorgespannten Zuggliedern ist in der Regel für eine festgelegte Spannstahleinlage ein erforderlicher Mindestgehalt der schlaffen Bewehrung,  $\rho_{smin}$ , zu bestimmen. Dieser kann mit Hilfe der in Kapitel 6.5 dargelegten, im Rahmen des Zuggurtmodells exakten Gleichungen ermittelt werden. Eine den Beziehungen (10.1) bis (10.4) entsprechende, geschlossene Schreibweise würde zu umständlichen Ausdrücken führen; deshalb ist es praktischer, für die zugrundeliegenden Gleichungen eine numerische Lösung für  $\rho_{smin}$  zu bestimmen. Eine Näherungsbetrachtung, welche die Abschätzung der Mindestbewehrungsgehalte von vorgespannten Zuggliedern unter Verwendung von starr - ideal plastischen Verbundgesetzen ermöglicht, wurde von König und Fehling [42, 23] vorgeschlagen.

Eine Begrenzung der in vorgespannten Zuggliedern bei der Rissbildung auftretenden Stahlspannungen erfolgt auf der Grundlage des in Bild 6.10 (a) dargestellten Zustandes der Erstrissbildung. In diesem Zustand ist das Verhältnis  $\sigma_{sr}/\Delta\sigma_{pr}$  der beiden Stahlspannungen in jedem Fall grösser als für das abgeschlossene Rissbild gemäss Bild 6.10 (b). Die Begrenzung der unter Lasteinwirkung oder Beanspruchung aus äusserem Zwang auftretenden Stahlspannungen erfolgt in Analogie zu (10.1) anhand der Gleichungen (6.21) beziehungsweise (6.22). Dabei werden  $\sigma_{sr}$  und  $\Delta\sigma_{pr}$  durch  $\sigma_{sadm}$  beziehungsweise  $\Delta\sigma_{padm} = \sigma_{padm} - \sigma_{pd}$  ersetzt und für gegebenes  $\rho_p$  numerische Lösungswerte für  $\rho \equiv \rho_{smin}$  (oder für  $\rho \equiv \rho_{smin} \equiv \alpha \cdot \rho_{pmin}$  falls die Bewehrungsgehalte ein festgelegtes Verhältnis  $\alpha$  einhalten sollen) gefunden, unter Beachtung, dass die Bewehrungsgehalte  $\rho_s$  und  $\rho_p$  in sämtlichen verwendeten Hilfsgrössen,  $a_{id}$ ,  $a_{id1}$ ,  $a_{net}$ ,  $\xi$ ,  $\kappa$  auftauchen, siehe (6.24) und (6.25). Der jeweils kleinere der aus den Gleichungen (6.21) und (6.22) ermittelten Werte  $\rho_{smin}$  ist massgebend. Für vorgegebene Werte  $\sigma_{sadm}$  und  $\sigma_{padm}$  der zulässigen Stahlspannungen ist insbesondere die Grösse der initialen Vorspannung beziehungsweise des Dekompressionsniveaus,  $\sigma_{pd}$ , entscheidend dafür, ob die Betonstahl- oder die Spannstahlspannung kritisch wird.

Die Begrenzung der Stahlspannungen bei innerem Zwang erfolgt sinngemäss. Zunächst werden die Gleichungen (6.21) und (6.22) rechterhand um den Term  $-E_s \varepsilon_{ir}$  beziehungsweise  $-E_p \varepsilon_{ir}$  ergänzt, wobei für  $\varepsilon_{ir}$  die Beziehung

$$\varepsilon_{ir} = \frac{f_{ct}}{E_c} + \frac{\emptyset_p f_{ct}^2}{4 E_p \rho_p^2 \tau_{bp0} l} \cdot \left\{ \frac{\kappa a_{id1} a_{net}}{(1 + \xi) a_{id1} + (\kappa - 1) a_{net}} \right\}^2 \quad (10.5)$$

gilt. Anschliessend wird mit den erhaltenen Gleichungen in Analogie zum vorhergehenden Abschnitt verfahren, um für vorgegebene  $\sigma_{sadm}$  und  $\sigma_{padm}$  numerische Lösungswerte für  $\rho_{smin}$  zu bestimmen.

Die zur Begrenzung der im Rahmen des Rissbildungsprozesses auftretenden maximalen Rissbreiten erforderlichen Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{smin}$  beziehungsweise  $\rho_{pmin}$  sind analog zu (10.3) von der Art der Beanspruchung unabhängig. Sie werden durch numerische Lösung der mit  $w_{adm}$  anstatt  $w$  angeschriebenen Gleichung (6.23) erhalten.

Mindestbewehrungsgehalte zur Begrenzung der Rissbreiten aus Lasteinwirkung für Gebräuchszustände oberhalb des Risslastniveaus werden anhand der mit  $s_{rm} = s_{r0}$  aufgestellten Gleichung (6.33) bestimmt.

### 10.2.4 Rechenbeispiele

Die oberen Diagramme in Bild 10.1 zeigen die für ein Zugglied mit einheitlicher Bewehrung gemäss dem Zuggurtmodell in Abhängigkeit des Stabdurchmessers  $\emptyset$  der Bewehrung ermittelten Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{smin}$ . Die Beziehung (10.1) zur Begrenzung der Stahlspannungen

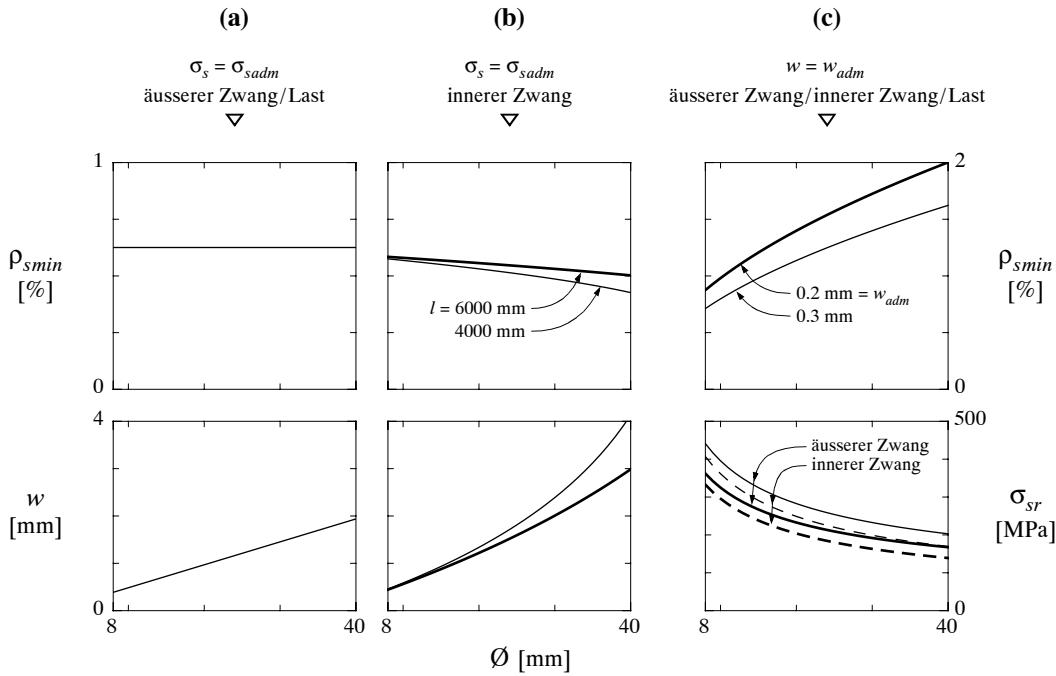


Bild 10.1 – Stahlbetonzugglied: Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{smin}$  bei äusserem und innerem Zwang und zugehörige Rissbreiten beziehungsweise Spannungen im Riss.  
 $\sigma_{sadm} = 500 \text{ MPa}$ ,  $f_c = 32 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{b0} = 2f_{ct} = 0.6f_c^{(2/3)}$ ,  $E_c = 10000f_c^{(1/3)}$ ,  $E_s = 205 \text{ GPa}$ .

in Rissquerschnitten bei äusserem Zwang beziehungsweise bei Rissbildung unter Lasteinwirkung resultiert in Bild 10.1 (a). Die im Vergleich dazu etwas kleineren  $\rho_{smin}$ , welche gemäss (10.2) bei innerem Zwang zu derselben Stahlspannung führen, sind in Bild 10.1 (b) dargestellt. Die in der Regel bedeutend grösseren, zur Begrenzung der (bei beliebiger Beanspruchungsart) im Rissbildungsprozess auftretenden Rissbreiten erforderlichen Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{smin}$  gemäss (10.3) gehen aus Bild 10.1 (c) hervor. Letztere müssen, falls eine Begrenzung der Rissbreiten für Zustände oberhalb des Rissbildungsniveaus erwünscht ist, entsprechend der Beziehung (10.4) vergrössert werden.

In den unteren Diagrammen in Bild 10.1 sind die jeweils resultierenden zugehörigen Werte der Rissbreite beziehungsweise der maximalen Stahlspannung in Rissquerschnitten dargestellt. Das Diagramm in Bild 10.1 (c) enthält sowohl die für äusseren Zwang beziehungsweise Lasteinwirkung geltenden Stahlspannungen als auch die bei innerem Zwang auftretenden, etwas kleineren Werte. Nebenbei sei bemerkt, dass die bei innerem Zwang gemäss Bild 10.1 (b) zur Begrenzung der Stahlspannungen erforderlichen Mindestbewehrungsgehalte sich mit zunehmender Zuggliedlänge  $l$  einem Endwert nähern, der dem  $[1 - (n \cdot f_{ct}) / (\sigma_{sadm} + f_{ct})]$ -fachen des für äusseren Zwang beziehungsweise Lasteinwirkung geltenden Wertes entspricht, also geringfügig kleiner ist.

Bild 10.2 zeigt Mindestbewehrungsgehalte der schlaffen Bewehrung eines vorgespannten Zuggliedes,  $\rho_{smin}$ , welche gemäss den Ausführungen in Kapitel 10.2.3 auf der Grundlage der Gleichungen (6.21) und (6.22) beziehungsweise (6.23) für den Zustand der Erstrissbildung gemäss Bild 6.10 (a) numerisch ermittelt worden sind. Die jeweils oben befindlichen Diagramme zeigen die Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{smin}$  sowohl für den Fall einer vorgegebenen festen Grösse der Spannstahlbewehrung (im Fallbeispiel  $\rho_p = 0.5\%$ ), als auch für festgelegte Verhält-

nisse der beiden Bewehrungseinlagen ( $\alpha = \rho_{smin}/\rho_{pmin} = 2.0, 1.0, 0.5$ ). Für die gewählte Parameterkombination wird von den beiden Bedingungen  $\sigma_{sr} \leq \sigma_{sadm}$  und  $\Delta\sigma_{pr} \leq \Delta\sigma_{padm}$  stets die ersterwähnte massgebend. Man beachte ausserdem, dass die den Mindestbewehrungsgehalten entsprechenden Rissbreiten beziehungsweise Stahlspannungen, welche in den jeweils unten angeordneten Diagrammen dargestellt sind, in jedem Fall unabhängig vom Verhältnis  $\rho_p/\rho_s$  der Bewehrungsgehalte sind; demzufolge resultieren für sämtliche Verhältnisse  $\rho_p/\rho_s$  deckungsgleiche Kurven.

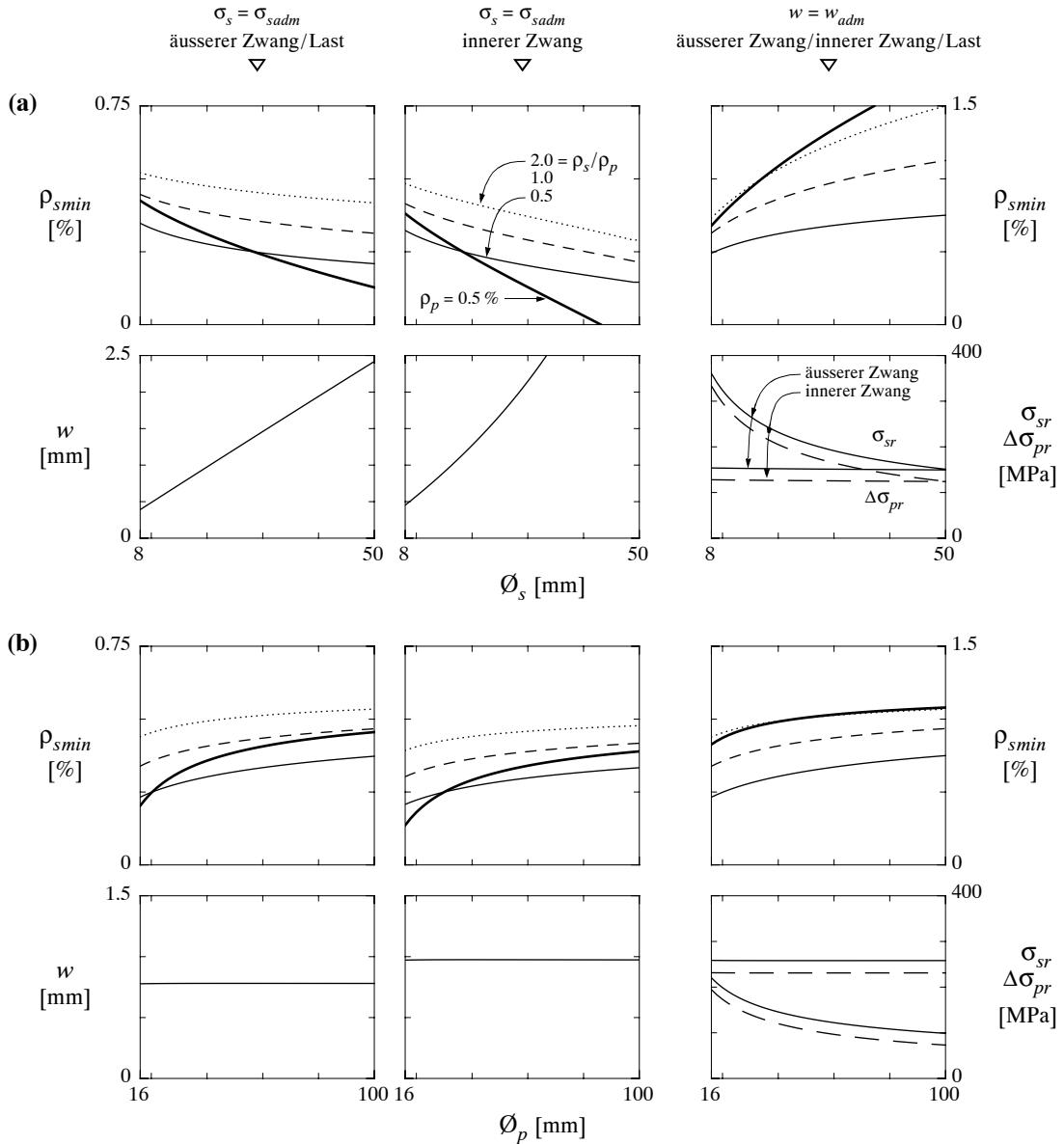


Bild 10.2 – Vorgespanntes Zugglied: Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{smin}$  bei äusserem und innerem Zwang und zugehörige Rissbreiten bzw. Spannungen im Riss bei Variation des Stabdurchmessers der (a) schlaffen und (b) vorgespannten Bewehrung.

$$\sigma_{sadm} = 500 \text{ MPa} = \Delta\sigma_{padm} = \sigma_{padm} - \sigma_{pd}, w_{adm} = 0.2 \text{ mm}, f_c = 32 \text{ MPa}, 2f_{ct} = \tau_{bs0} = 0.6f_c^{(2/3)} = \tau_{bp0}/0.75, E_s = 205 \text{ GPa}, E_p = 195 \text{ GPa}, E_c = 10000f_c^{(1/3)}, \varnothing_s = 16 \text{ mm}, \varnothing_p = 36 \text{ mm}, l = 5000 \text{ mm}.$$

Bild 10.2 (a) zeigt, dass mit grösser werdendem Verbundradius der schlaffen Bewehrung,  $\phi_s$ , und solange die Bedingung  $\sigma_{sr} \leq \sigma_{sadm}$  massgebend wird, die Anforderungen für eine Stahlspannungsbegrenzung stetig abnehmen, weil das Verhältnis der beiden Stahlspannungen aufgrund der verminderten Verbundeigenschaft  $\phi_s$  der schlaffen Bewehrung kleiner wird, wohingegen die für eine Rissbreitenbegrenzung erforderlichen Bewehrungsgehalte anwachsen. Im Gegensatz dazu nehmen bei grösser werdendem Verbundradius der Spannstahlbewehrung,  $\phi_p$ , wiederum solange die Bedingung  $\sigma_{sr} \leq \sigma_{sadm}$  massgebend wird, sowohl die für eine Spannungs- als auch die für eine Rissbreitenbegrenzung erforderlichen Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{smin}$  steigt zu, siehe Bild 10.2 (b).

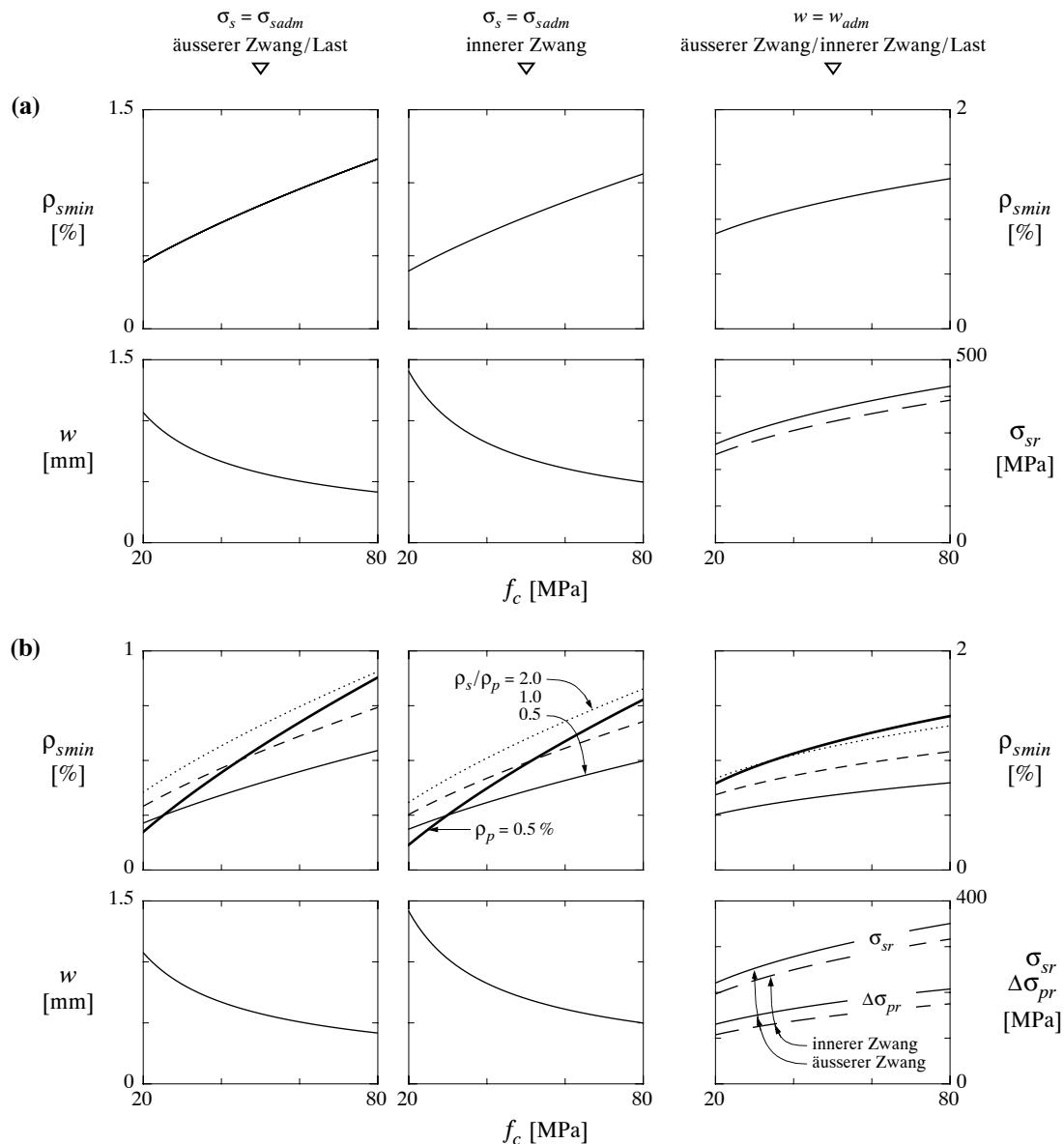


Bild 10.3 – Mindestbewehrungsgehalte  $\rho_{smin}$  bei äusserem und innerem Zwang und zugehörige Rissbreiten bzw. Spannungen im Riss bei Variation der Betonfestigkeit für (a) schlaff bewehrte ( $w_{adm} = 0.3 \text{ mm}$ ) und (b) vorgespannte Zugglieder ( $w_{adm} = 0.2 \text{ mm}$ ). Parameter wie für Bild 10.2.

Bild 10.3 zeigt den Einfluss der Betonfestigkeit (sowie der mit ihr zusammenhängenden Verbund- und übrigen Betonkennwerte) auf den erforderlichen Mindestbewehrungsgehalt  $\rho_{smin}$ .

Abschliessend sei bemerkt, dass bei der Festlegung von Mindestbewehrungsgehalten einer angemessenen Abschätzung der während des Rissbildungsprozesses vorliegenden Betonzugfestigkeit sehr grosse Bedeutung zukommt. Deren Grösse beeinflusst den Betrag des erforderlichen Bewehrungsgehaltes sehr stark. Allerdings ist die Abschätzung des Zeitpunktes der Rissbildung und des zu diesem Zeitpunkt vorliegenden Wertes der Betonzugfestigkeit in der Regel mit beträchtlichen Unsicherheiten verbunden.

## 10.3 Vergleich mit Normbestimmungen

### 10.3.1 Allgemeines

Die Beziehung (10.1) für den Mindestbewehrungsgehalt zur Stahlspannungsbegrenzung bei Lasteinwirkung oder bei Beanspruchung aus äusserem Zwang gleicht weitgehend den Forderungen  $\rho_{min} = \alpha \beta f_{ct}/f_y$  in SIA 162 [96] beziehungsweise  $\rho_{min} = k_c k f_{ct}/\sigma_{sadm}$  in ENV 1992-1-1 [22]. Die in den Normbestimmungen verwendeten Beiwerte dienen der Erfassung der Einflüsse des Stababstandes auf den mittleren Rissabstand ( $\alpha$ ), der Spannungsverteilung in der Zugzone (Biegung oder Zug) sowie von Eigenspannungen ( $\beta, k_c, k$ ). Das Zuggurtmodell gestattet keine direkte Berücksichtigung dieser Einflüsse. Unterschiede in den Mindestbewehrungsgehalten ergeben sich nicht zuletzt auch infolge der unterschiedlichen Festlegungen von  $f_{ct}$ . Andererseits wird in beiden Normen festgehalten, dass die erwähnten Bestimmungen zur Mindestbewehrung eine kombinierte Stahlspannungs- und Rissbreitenbegrenzung gewährleisten sollen, während das Zuggurtmodell eine getrennte Behandlung von Stahlspannungs- und Rissbreitenbegrenzung ermöglicht.

Im folgenden werden ausgewählte Normbestimmungen zur Rissbreitenbeschränkung mit entsprechenden Berechnungen auf der Grundlage des Zuggurtmodells verglichen. Eine eingehende Diskussion der Bestimmungen zur Mindestbewehrung in SIA 162, ENV 1992-1-1 sowie in ENV 1992-2 einschliesslich weiterer Vergleiche mit dem Zuggurtmodell findet man in [62].

### 10.3.2 Rissnachweis bei Lastbeanspruchung

Bild 10.4 (a) zeigt einen Vergleich zwischen den in SIA 162 [96], Figur 20, enthaltenen Bestimmungen zur Stahlspannungsbegrenzung im Rahmen des Rissnachweises bei Lastbeanspruchungen und analogen, auf der Grundlage des Zuggurtmodells ermittelten Aussagen. Den Kurven gemäss Zuggurtmodell liegt die Gleichung (6.7) zugrunde, mit  $w = w_{adm} = 0.15 \text{ mm}$ ,  $s_{rm} = s_{r0}$  sowie der Festlegung der wirksamen Zugzone  $A_c$  als derjenigen Querschnittsfläche, welche die Bewehrung umgibt und deren Höhe  $h_c$  gleich dem 2.5-fachen Randabstand des Schwerpunktes der Bewehrung ist, jedoch nicht mehr als ein Drittel der Höhe der (gerissenen) Biegezugzone der Platte beträgt [18]. Wertet man  $h_c$  entsprechend aus und setzt man  $\rho = h_c/s \cdot \emptyset^2 \pi / 4$  in (6.7) ein, so erhält man bei gegebener Betonfestigkeit und Betonüberdeckung eine nur von der Plattendicke  $h$ , vom Stabdurchmesser  $\emptyset$  und vom Stababstand  $s$  abhängige Beziehung für  $\sigma_{sr}$ , welche unter Elimination des Parameters  $\emptyset$  die in Bild 10.4 (a) gezeigten Umhüllenden liefert.

Bild 10.4 (a) zeigt, dass ein Rissnachweis nach dem Zuggurtmodell im allgemeinen etwas höhere Stahlspannungen zulassen würde als der Nachweis nach SIA 162, denn für eine bestimmte Querschnittshöhe  $h$  liegt die SIA-Kurve jeweils etwas tiefer als die entsprechende Zuggurtmodell-Kurve. Da aber für einen solchen Rissnachweis die massgebenden Parameter ausreichend

gut bekannt sein sollten und zudem im Vergleich zum Nachweis nach SIA 162 ein grösserer Aufwand nötig ist, wird die Anwendung des Zuggurtmodells eher auf Ausnahmefälle beschränkt bleiben; um so mehr, als hohe Anforderungen gemäss SIA 162, Ziffer 3 33 2, ohnehin in üblichen Fällen nicht gestellt werden sollten, siehe dazu [59].

### 10.3.3 Rissbreiten

Bild 10.4 (b) vergleicht für eine mittlere Betonqualität ( $f_c = 28 \text{ MPa}$ ) und  $\emptyset = 26 \text{ mm}$  den dem maximalen Rissabstand  $s_{r0}$  entsprechenden oberen Grenzwert für  $w$  aus Beziehung (6.8) mit der mittleren Rissbreite  $w_m = s_{rm} \cdot \varepsilon_{sm}$  gemäss ENV 1992 - 1 - 1 [22]. Insbesondere für kleinere Bewehrungsgehalte zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Demgegenüber ergäben sich naamentlich für grosse  $\sigma_{sr}$  aus dem dem minimalen Rissabstand  $s_{r0}/2$  entsprechenden unteren Grenzwert für  $w$  gemäss (6.8) wesentlich kleinere Rissbreiten. Bild 10.4 (b) beschränkt sich auf  $\emptyset = 26 \text{ mm}$ ; entsprechende Darstellungen für andere Stabdurchmesser sind in [62] enthalten.

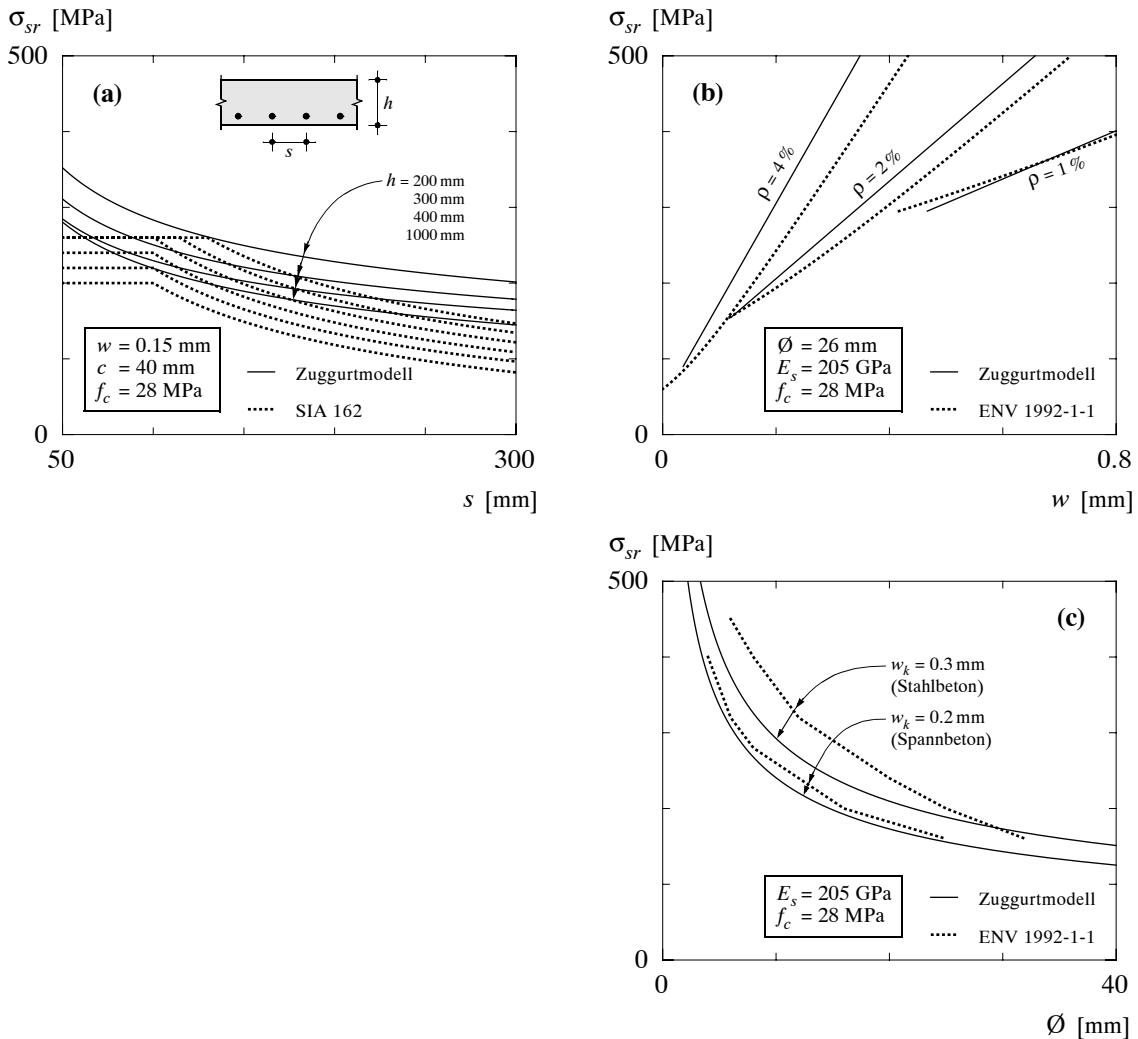


Bild 10.4 – Vergleich zwischen Normbestimmungen und dem Zuggurtmodell: (a) Rissnachweis bei Lastbeanspruchungen gemäss SIA 162 [96]; (b) Mittlere Rissbreite und (c) Zulässige Stabdurchmesser bei Zwangbeanspruchung gemäss ENV 1992 - 1 - 1 [22].

### 10.3.4 Stabdurchmesser bei Zwangbeanspruchung

Bild 10.4 (c) vergleicht die in ENV 1992-1-1 [22] zur Begrenzung der Rissbreite auf 0.3 mm bei Stahlbeton und 0.2 mm bei Spannbeton festgelegten Höchstwerte der Stabdurchmesser mit der Beziehung

$$\varnothing \leq \frac{8 E_s f_{ct} w_k}{1.7 \sigma_{sr} (\sigma_{sr} - n f_{ct})} \quad (10.6)$$

welche man aus der für den maximalen Rissabstand  $s_{r0}$  geltenden Gleichung (6.14) unter Verwendung von  $\sigma_{sr} = f_{ct}/\rho \cdot [1 + \rho(n-1)]$  und  $\tau_{b0} = 2 \cdot f_{ct}$  sowie unter Annahme eines Verhältnisses  $w_k/w_m$  zwischen charakteristischer und mittlerer Rissbreite von 1.7 erhält. Beim Vergleich der für Spannbeton ( $w_k = 0.2$  mm) praktisch zusammenfallenden und für Stahlbeton ( $w_k = 0.3$  mm) etwas divergierenden Kurven ist einerseits zu beachten, dass ENV 1992-1-1 von  $f_{ct} = 2.5$  MPa ausgeht, während für das Zuggurtmodell gemäß Beziehung (5.47) mit  $f_c = 28$  MPa ein leicht höherer Wert, nämlich  $f_{ct} = 2.77$  MPa verwendet worden ist. Andererseits sind die für das Zuggurtmodell gemachten Annahmen denkbar konservativ; die Zuggurtmodell-Kurven für Stahlbeton liegen "auf der sicheren Seite", während umgekehrt die entsprechenden Kurven nach ENV 1992-1-1 für kleine und mittlere Stabdurchmesser etwas "nach oben gewängt" erscheinen.

## 10.4 Praktische Anwendung

### 10.4.1 Lasteinwirkung – Stahlbeton

Der in Bild 10.5 dargestellte Plattenbalken trägt sein Eigengewicht  $g = 35.5 \text{ kNm}^{-1}$  und eine Nutzlast  $q = 25 \text{ kNm}^{-1}$ . Die Überdeckung der Bügel  $\varnothing 12$  mm beträgt 40 mm. Als Hauptbewehrung werden neun Stäbe  $\varnothing 26$  mm gewählt. Die verteilte Längsbewehrung im Steg besteht aus Stäben  $\varnothing 12$  mm in einem Abstand von 200 mm. Für den Beton wird mit einer mittleren Zylinderdruckfestigkeit von 28 MPa gerechnet, und für die Bewehrung wird eine Fliessgrenze von 500 MPa angenommen.

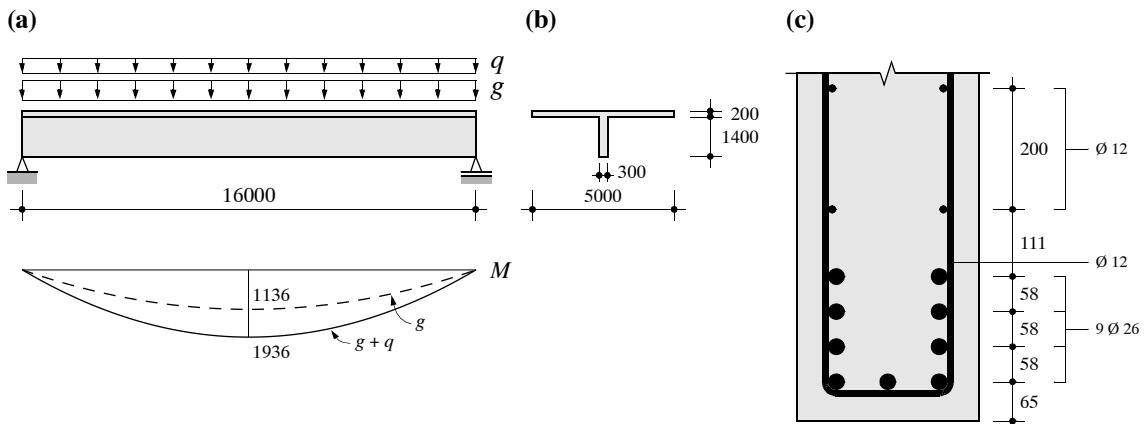


Bild 10.5 – Plattenbalken: (a) Längsschnitt, Belastung und Biegemomente; (b) Querschnitt; (c) Stegbewehrung. Abmessungen in mm, Momente in kNm.

Der Schwerpunkt der Hauptbewehrung (Querschnittsfläche =  $4778 \text{ mm}^2$ ) liegt 142 mm über dem unteren Stegrund, d.h. die statische Höhe beträgt  $1600 - 142 = 1458 \text{ mm}$ . Mit  $E_s = 205 \text{ GPa}$ ,  $E_c = 30 \text{ GPa}$  und unter Vernachlässigung der verteilten Längsbewehrung im Steg und in der Flanschplatte liefert eine linear elastische Analyse des gerissenen Verhaltens eine Druckzonenhöhe von 132 mm. Aus dem maximalen Biegemoment von 1936 kNm erhält man damit eine mittlere Stahlspannung am Riss von  $1936 \cdot 10^6 / [4778 \cdot (1458 - 132/3)] = 287 \text{ MPa}$ . Mit der wirksamen Zugzonenhöhe von  $2.5 \cdot 142 = 355 \text{ mm}$  und dem entsprechenden Bewehrungsgehalt von  $\rho = 4778 / (300 \cdot 355) = 4.5\%$  sowie den Werten  $\tau_{b0} = 2 \cdot f_{ct} = 0.6 \cdot f_c^{(2/3)} = 5.53 \text{ MPa}$  folgt aus (6.6)  $69 \text{ mm} \leq s_{rm} \leq 138 \text{ mm}$ , und mit (6.8) erhält man  $0.09 \text{ mm} \leq w \leq 0.17 \text{ mm}$ .

#### 10.4.2 Lasteinwirkung – Spannbeton

Der in Bild 10.6 dargestellte Spannbetonträger wird durch sein Eigengewicht  $g = 48 \text{ kNm}^{-1}$  und eine Nutzlast  $q = 18 \text{ kNm}^{-1}$  belastet. Die Überdeckung der Bügel  $\varnothing 12 \text{ mm}$  beträgt 40 mm. Als Hauptbewehrung dient ein parabolisch geführtes Spannglied mit 19 Litzen 0.6" ( $A_p = 2850 \text{ mm}^2$ ) in einem Stahlhüllrohr mit Innen- und Aussendurchmessern von 90 und 97 mm. Über den Auflagern ist das Spannglied auf der Höhe der  $x$ -Achse verankert, und in Trägermitte liegt der Schwerpunkt des Spannstahlquerschnitts wie jener der acht Längsbewehrungsstäbe  $\varnothing 26 \text{ mm}$  ( $A_s = 4247 \text{ mm}^2$ ) 109 mm über der Stegunterkante. Das Spannglied hat einen Bruchwiderstand von 5035 kN, und die Vorspannkraft nach Abzug aller Verluste beträgt 3279 kN. Für den Beton wird mit einer mittleren Zylinderdruckfestigkeit von 28 MPa gerechnet, und für die schlaffe Bewehrung wird eine Fliessgrenze von 500 MPa angenommen.

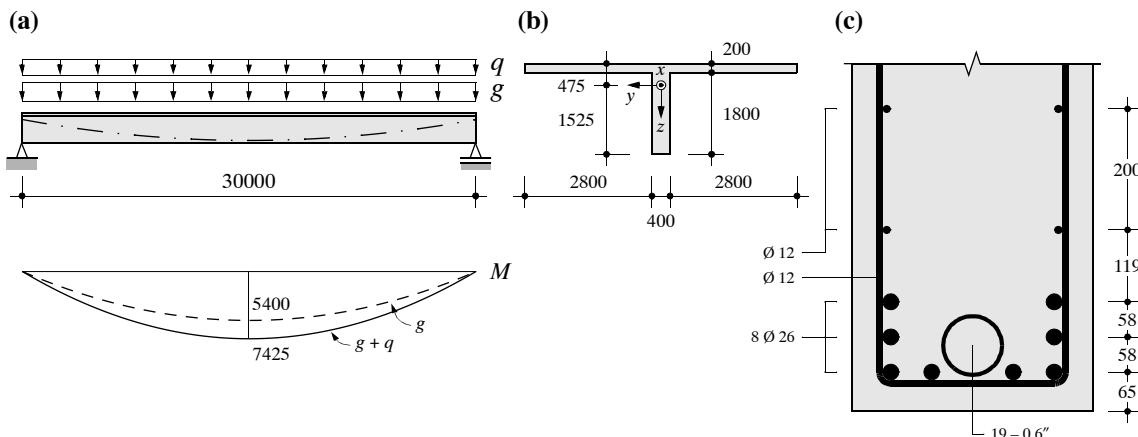


Bild 10.6 – Spannbetonträger: (a) Längsschnitt, Belastung und Biegemomente; (b) Querschnitt und Hauptachsen für reinen Betonquerschnitt ( $I_y = 0.6484 \text{ m}^4$ ); (c) Bewehrung. Abmessungen in mm, Momente in kNm.

Für den reinen Betonquerschnitt ergeben sich in Trägermitte unter Eigengewicht und Vorspannung Randspannungen oben und unten von -2.3 und 0.1 MPa. Die Umlenkkraft aus Vorspannung beträgt  $41.3 \text{ kNm}^{-1}$ , d.h. 86 % von  $g$ . Unter der zusätzlichen Wirkung der Nutzlast  $q$  ergeben sich am ungerissenen Querschnitt Randspannungen oben und unten von -3.7 und 4.8 MPa. Da die Randspannung unten die Betonzugfestigkeit von etwa 2.8 MPa übersteigt, ist eine Rechnung am gerissenen Querschnitt durchzuführen.

Eine linear elastische Analyse des gerissenen Querschnitts mit  $E_c = 30 \text{ GPa}$ ,  $E_s = 205 \text{ GPa}$  und  $E_p = 195 \text{ GPa}$  führt für  $N = -3279 \text{ kN}$  und  $M = 7425 - 1.416 \cdot 3279 = 2782 \text{ kNm}$  zu einer

Druckzonenhöhe von 286 mm, Randspannungen oben von -6.3 MPa, Stahlspannungen  $\sigma_s = 243$  MPa sowie Zusatzspannungen im Spannstahl  $\Delta\sigma_p = 231$  MPa.

Die wirksame Zugzone hat eine Höhe von  $2.5 \cdot 109 = 273$  mm, und somit ist  $\rho_s = 4247/(273 \cdot 400) = 3.90\%$  und  $\rho_p = 2850/(273 \cdot 400) = 2.61\%$ . Mit  $\emptyset_s = 26$  mm,  $f_{ct} = 2.77$  MPa =  $= \tau_{bs0}/2$ ,  $A_p = 2850$  mm<sup>2</sup>,  $p_{bp} = 237.3$  mm ( $m = 19$ ) und  $\tau_{bp0} = 1.42$  MPa ( $f_{mw} = 30$  MPa) liefert (6.27)  $s_{r0} = 143$  mm.

Setzt man  $\sigma_s^{II} = 243$  MPa, so erhält man mit (6.28) bis (6.31) die Spannungen  $\sigma_{sr} = 248.1$  MPa und  $\Delta\sigma_{pr} = 223.6$  MPa für  $s_{rm} = s_{r0}/2$  bzw.  $\sigma_{sr} = 253.1$  MPa und  $\Delta\sigma_{pr} = 216.1$  MPa für  $s_{rm} = s_{r0}$ . Schliesslich liefern (6.33) und (6.9) die Relation  $0.08 \text{ mm} \leq w \leq 0.15 \text{ mm}$ .

### 10.4.3 Äusserer Zwang

Der in Bild 10.7 dargestellte, verkürzungsbehinderte Plattenstreifen wird einer Abkühlung von 30°C unterworfen. Mindestbewehrung und Rissverhalten sind für die beiden Fälle ohne und mit Aussparung getrennt zu untersuchen. Die mittlere Zylinderdruckfestigkeit des Betons beträgt 28 MPa, und für die Fliessgrenze des Bewehrungsstahls wird ein Wert von 500 MPa vorausgesetzt. Der Temperaturausdehnungskoeffizient von Beton und Stahl ist gleich  $10^{-5}/^\circ\text{C}$ .

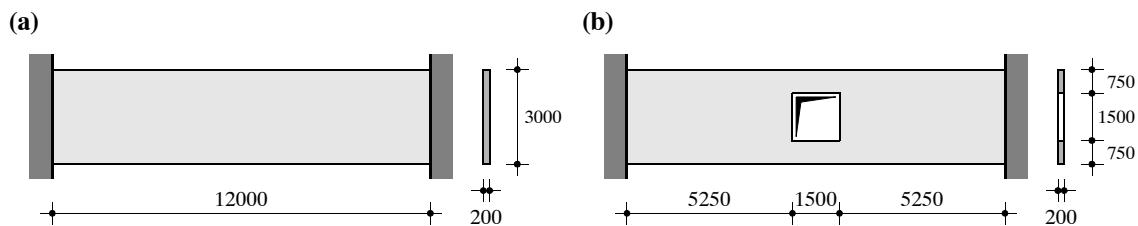


Bild 10.7 – Verkürzungsbehinderter Plattenstreifen: (a) Ohne Aussparung; (b) Mit Aussparung. Abmessungen in mm.

#### Fall ohne Aussparung

Die Bedingung (10.1) liefert (mit  $\sigma_{sadm} = f_{sy}$ )  $\rho > 2.77/[500 - 2.77 \cdot (205/30 - 1)] = 0.57\%$ . Ge wählt werden auf beiden Plattenseiten Stäbe  $\emptyset 14$  mm @ 200 mm mit  $\rho = 14^2 \cdot \pi / (4 \cdot 200 \cdot 100) = 0.77\%$ .

Mit  $f_{ct} = \tau_{b0}/2 = 2.77$  MPa ergibt sich aus (6.6)  $226 \text{ mm} \leq s_{rm} \leq 451 \text{ mm}$ . Die Anzahl Risse ergibt sich aus Bild 6.7(c), wenn man beachtet, dass  $f_{ct}/E_c = 2.77/30 = 0.092\%$  und  $f_{ct}^2 \emptyset (1-\rho)^2 / (4\tau_{b0} E_s l \rho^2) = 0.033\%$  ist. Somit gilt  $(0.3 - 0.092)/0.033 = 6.3$ , d.h. es können sich sieben Risse in einem maximal möglichen Abstand von  $s_{r0} = 451$  mm ergeben. Andererseits treten Risse im minimal möglichen Abstand von  $s_{r0}/2 = 226$  mm jeweils nach Dehnungssinkre men von  $3f_{ct}^2 \emptyset (1-\rho)^2 / (16\tau_{b0} E_s l \rho^2) = 0.025\%$  auf. Somit gilt  $(0.3 - 0.092 - 0.033)/0.025 + 1 = 8.0$ , d.h. es ergäben sich neun solche Risse. Für die Rissbreiten liefert (6.8) die Eingabelung  $0.31 \text{ mm} \leq w \leq 0.40 \text{ mm}$ . Bild 10.8 fasst diese Berechnungen in zwei zu Bild 6.7(c) analogen Diagrammen zusammen.

#### Fall mit Aussparung

Der Plattenstreifen reisst zunächst in dem durch die Aussparung geschwächten Bereich. Falls die Zwängung mit den dem abgeschlossenen Rissbild des Aussparungsbereichs entsprechenden Ver-

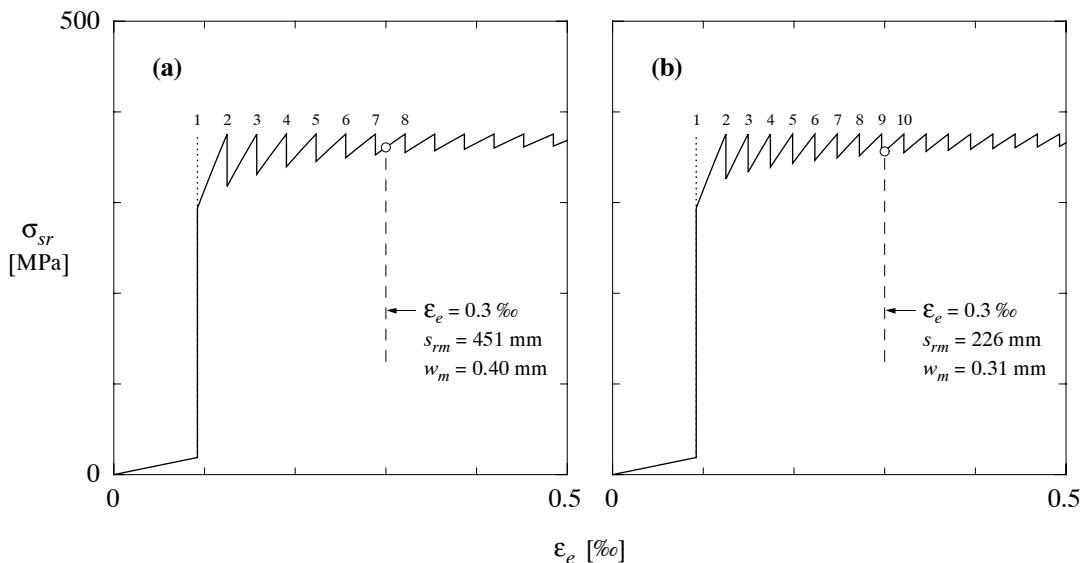


Bild 10.8 – Entwicklung der Stahlspannungen im Riss mit zunehmendem Zwang:  
(a) maximaler Rissabstand; (b) minimaler Rissabstand.

formungen aufgenommen werden kann, bleibt der Bereich ausserhalb der Aussparung ungerissen, und die Mindestbewehrung kann für den geschwächten Bereich ausgelegt werden. Andernfalls muss die Mindestbewehrung auch im Aussparungsbereich auf den ungeschwächten Bereich ausgelegt werden.

Nimmt man an, dass die gemäss Zuggurtmodell für den geschwächten Bereich bestimmte Mindestbewehrung mit einer Querschnittsfläche von  $0.0057 \cdot 1500 \cdot 200 = 1715 \text{ mm}^2$  ausreiche, so kann die aufnehmbare Zwangsverlängerung unter Verwendung von Bild 6.7 (c) abgeschätzt werden. Im besten Fall stellt sich im Aussparungsbereich der minimale Rissabstand  $s_{rm} = s_{r0}/2$

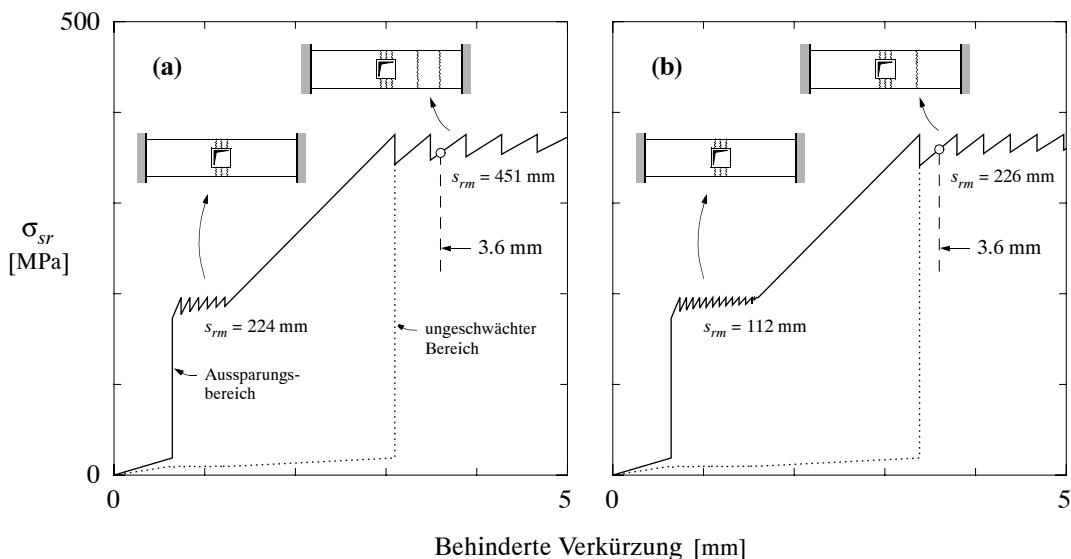


Bild 10.9 – Stahlspannungen im Bereich der Aussparung und im ungeschwächten Bereich:  
(a) Maximaler Rissabstand; (b) Minimaler Rissabstand.

ein. Damit die Mindestbewehrung ausreicht, darf die Zwängung im Maximum dem Wert  $(f_{ct}/E_c) \cdot [1 + 3(1 - \rho)/(4\rho n)] = 1.85\%$  entsprechen. Man erhält so eine durch das abgeschlossene Rissbild im Aussparungsbereich maximal aufnehmbare Verlängerung von  $1.85 \cdot 1.5 = 2.78$  mm. Dazu kommt noch die im ungeschwächten Bereich aufnehmbare elastische Verlängerung von  $(2.77/30'000) \cdot [(3000-1500)/3000] \cdot 10'500 = 0.48$  mm, insgesamt also  $3.26 \text{ mm} < 3.6 \text{ mm}$ . Die Mindestbewehrung ist deshalb durchgehend auf den ungeschwächten Bereich auszulegen, sollte also eine Querschnittsfläche von  $3430 \text{ mm}^2$  aufweisen. Die oben gewählte Bewehrung mit 30 Stäben Ø 14 mm weist eine Querschnittsfläche von  $4618 \text{ mm}^2$  auf, übertrifft das geforderte Minimum also um 35 %.

Ordnet man diese reichlich bemessene Mindestbewehrung an, so ergibt sich theoretisch das in Bild 10.9 zusammengefasste Verhalten, je nachdem, ob sich der maximale oder der minimale Rissabstand einstellt [3]. Für maximalen Rissabstand stellen sich zunächst im Bereich der Aussparung sieben Risse ein. Bei einer behinderten Verkürzung von 1.27 mm ist das Rissbild in diesem Bereich abgeschlossen, und die vorhandenen Risse öffnen sich weiter bis zu einer behinderten Verkürzung von 3.07 mm, wo der erste Riss im ungeschwächten Bereich auftritt. In der Folge öffnen sich weitere Risse im ungeschwächten Bereich. Bei der behinderten Verkürzung von 3.6 mm sind theoretisch zwei Risse im ungeschwächten Bereich vorhanden. Für minimalen Rissabstand ergeben sich bis zu einer behinderten Verkürzung von 1.59 mm im Bereich der Aussparung 14 Risse, die sich in der Folge bis zu einer behinderten Verkürzung von 3.39 mm weiter öffnen. Bei diesem Wert entsteht der erste Riss im ungeschwächten Bereich, gefolgt von einem zweiten bei einer behinderten Verkürzung von 3.79 mm, einem dritten bei einer behinderten Verkürzung von 4.09 mm, und so weiter. Bei der behinderten Verkürzung von 3.6 mm ist theoretisch ein Riss im ungeschwächten Bereich entstanden.

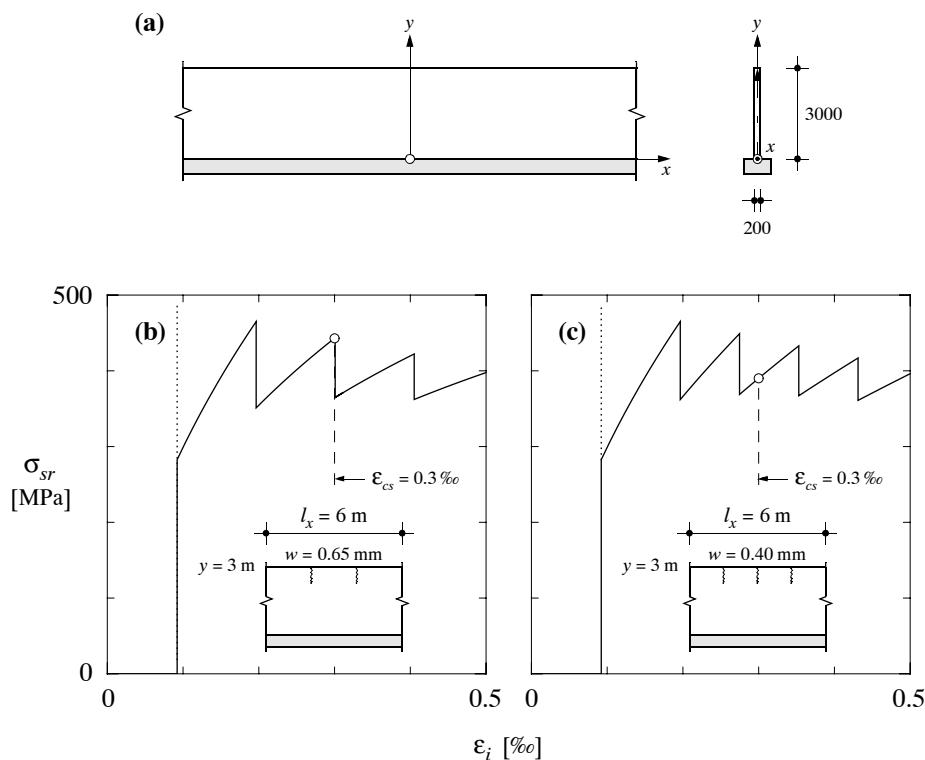


Bild 10.10 – Schwindbehinderte Wand: (a) Abmessungen in mm; (b) Verhalten am Wandkopf, maximaler Rissabstand; (c) Verhalten am Wandkopf, minimaler Rissabstand. Abmessungen in mm.

#### 10.4.4 Innerer Zwang

Die Schwindverkürzung von  $\varepsilon_{cs} = 0.3\%$  einer 3 m hohen und 200 mm dicken Wand wird durch ihr Fundament behindert, Bild 10.10 (a). Der Berechnung mit dem Zuggurtmodell werden die bereits in den vorangegangenen Anwendungsbeispielen verwendeten Kennwerte  $f_c = 28 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 2.77 \text{ MPa}$ ,  $E_c = 30 \text{ GPa}$ ,  $f_y = 500 \text{ MPa}$  und  $E_s = 205 \text{ GPa}$  zugrundegelegt.

Als Mindestbewehrung werden auf beiden Wandseiten Stäbe  $\varnothing 12 \text{ mm}$  im Abstand von 200 mm angeordnet ( $\rho = 0.57\%$ ).

Die Zuggurtlänge am Wandkopf lässt sich mit  $l = 6 \text{ m}$  abschätzen [62]. Die Bilder 10.10 (b) und (c) zeigen die aus Bild 6.8 (c) resultierenden Diagramme für maximalen und minimalen Rissabstand. Wie man sieht, sind am Wandkopf auf 6 m Länge zwei bzw. drei Risse mit einer Breite zwischen 0.65 (maximaler Rissabstand) und 0.40 mm (minimaler Rissabstand) zu erwarten.

### 10.5 Duktilitätsanforderungen

#### 10.5.1 Allgemeines

Das plastische Verformungsvermögen von Stahlbetonbauteilen unter vorwiegender Zug- oder Biegebeanspruchung wird massgeblich von den Duktilitätseigenschaften des verwendeten Bewehrungsstahles beeinflusst. Allerdings können auch zahlreiche andere Einflussfaktoren von zum Teil ebenso grosser Bedeutung sein, so zum Beispiel das Ausmass der von den Bewehrungseinlagen erzielten Verbundwirkung, das Verformungsvermögen der druck- und der schubbeanspruchten Bereiche, die Querschnittsausbildung (Geometrie und Bewehrungsgehalte), die Trägerschlankheit, die Art des statischen Systems, und nicht zuletzt auch die Belastungsanordnung [101]. Folglich kann das für das Erreichen des planmässigen Bruchzustandes erforderliche plastische Verformungsvermögen nicht in jedem Falle einzig durch Vorsehen ausreichender Duktilität des Bewehrungsstahles gewährleistet werden; dies gilt insbesondere für Fälle, in denen das Versagen nicht durch das Zerreissen der Bewehrung bestimmt wird, sondern durch den Bruch der Biegedruckzone oder des druckbeanspruchten Betons in der Stegscheibe. Demgegenüber kann das plastische Verformungsvermögen von vorwiegend biegebeanspruchten Bauteilen mit einem ausreichend niedrigen, das heisst zu einem Versagen durch Zerreisen der Bewehrung führenden Bewehrungsgehalt durch eine Erhöhung der Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahles zum Teil enorm vergrössert werden. In solchen Fällen ist das zum Erreichen des planmässigen Bruchzustandes erforderliche Verformungsvermögen bei Verwendung hochduktiler Bewehrungsstäbe für plastisch bemessene und nach konstruktiven Grundsätzen artgerecht ausgebildete Tragwerke im allgemeinen gewährleistet.

Das plastische Dehnvermögen des Bewehrungsstahles ist eine Grundkomponente des Verformungsvermögens von Stahlbetontragwerken. Diese kann bereits auf der Materialebene anhand der Bruchdehnung  $\varepsilon_{su}$  qualifiziert werden. Die wesentliche Grösse des vom Bewehrungsstahl gewinnbaren Verformungsvermögens stellt jedoch die im Verbund erreichbare Bruchdehnung  $\varepsilon_{smu}$  dar, welche sowohl von den Duktilitätskennwerten  $\varepsilon_{su}$  und  $(f_{su}/f_y)$  als auch von der Verbundwirkung der Stahleinlagen abhängig ist. Folglich ist stets das Zusammenspiel der Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahles und der Verbundeigenschaften der verwendeten Stahleinlagen (Verbundradien und -kennwerte sowie Bewehrungsgehalt) massgebend für das plastische Verformungsvermögen des Verbundwerkstoffes Stahlbeton. Insofern liefert die Be trachtung des Stahlbetonzuggliedes die einfachstmögliche Grundlage zur Festlegung der für das Erreichen eines bestimmten Dehnvermögens erforderlichen Duktilitätskennwerte des Beweh-

rungsstahles,  $\varepsilon_{su}$  und  $(f_{su}/f_{sy})$ . Allerdings sind die derart ermittelten Duktilitätsanforderungen nicht absolut gültig, da beim Übergang auf die Systemebene die Erfordernisse an die Bewehrungsstahlduktilität in Zusammenspiel mit sämtlichen zu berücksichtigenden Einflussgrößen, wie Querschnittsausbildung, Schlankheit, Steifigkeitsverteilung, Art des statischen Systems, usw., zu bestimmen sind. Dies kann entweder für den Einzelfall erfolgen oder indem Anforderungen einerseits für übliche und andererseits für kritische Fälle festgelegt werden.

### 10.5.2 Duktilitätsanforderungen nach Zuggurtmodell

Im folgenden werden auf der Grundlage des Zuggurtmodells die für ein bestimmtes erwünschtes plastisches Dehnvermögen erforderlichen Duktilitätskennwerte bestimmt. Die erforderlichen Duktilitätskennwerte werden jeweils sowohl für ein bilineares als auch für ein kaltverformtes sowie ein naturhartes Stahlstoffgesetz ermittelt. Unter Verwendung der Gleichungen (6.10) und (6.11) für bilineares Stahlstoffgesetz sowie der entsprechenden Beziehungen für kaltverformten und naturharten Bewehrungsstahl [3] kann für eine gegebene Parameterkombination und ein festgelegtes erwünschtes Dehnvermögen  $\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{smu}$  der Wert der erforderlichen Bruchspannung  $f_{su}$  numerisch bestimmt werden.

In Bild 10.11 sind für die drei verwendeten Stahlstoffgesetze Wertepaare der Bruchdehnung  $\varepsilon_{su}$  und des Verfestigungskennwertes  $f_{su}/f_{sy}$  aufgetragen, welche für die gewählte Parameterkombination jeweils ein gleich grosses Dehnvermögen  $\varepsilon_{smu}$  des Stahlbetonzuggliedes ermöglichen. Bild 10.11 (a) zeigt für alle drei Stoffgesetze eine hypothetische, als punktierte Kurve aufgezeichnete Kennlinie der Wertepaare  $\varepsilon_{su}$  und  $f_{su}$ . Die in Bild 10.11 (b) dargestellten Kurven geben die effektiven, gemäss dem Zuggurtmodell erforderlichen Größen der Wertepaare  $\varepsilon_{su}$  und  $f_{su}/f_{sy}$  für verschieden grosse Werte des erwünschten Dehnvermögens  $\varepsilon_{smu}$  wieder. In Bild 10.11 (c) ist für eine bestimmte Grösse des Dehnvermögens,  $\varepsilon_{smu} = 2\%$ , der Einfluss des Verbundkennwertes  $\tau_{b1}$  illustriert; wie erwartet sind die Anforderungen an die Duktilität des Bewehrungsstahles um so höher, je schwächer die Zerstörung des Verbundes im Bereich plastischer Stahldehnungen ausfällt, das heisst desto grösser das Verhältnis  $\tau_{b1}/\tau_{b0}$  angesetzt wird.

Eine wichtige Aussage bildet die Tatsache, dass sich – gemäss dem Zuggurtmodell – bei einer proportionalen Variation der beiden Verbundkennwerte,  $\tau_{b0}$  und  $\tau_{b1}$ , und entsprechender Anpassung des Rissabstandes keine Veränderung der Duktilitätsanforderungen ergibt. Die Kurven in Bild 10.11 (b) gelten für beliebige  $\tau_{b0} = 2 \cdot \tau_{b1}$  bei entsprechendem  $s_{rm} = 0.75 \cdot s_{r0}$ . Allgemein ist die ganze Spannungs-Dehnungs-Charakteristik des Zuggliedes von den absoluten Grössen von  $\tau_{b0}$  und  $\tau_{b1}$ , bei gleichbleibendem Verhältnis  $\tau_{b1}/\tau_{b0}$ , unabhängig, falls eine Abhängigkeit des Rissabstandes von  $\tau_{b0}$  entsprechend der Beziehung (6.6) in Rechnung gestellt wird. Wenn man hingegen die Verbundkennwerte bei festgehaltenem Rissabstand verkleinert oder vergrössert, resultiert daraus eine Verminderung beziehungsweise eine Erhöhung der Anforderungen an die Duktilität des Bewehrungsstahles.

Nebenbei sei bemerkt, dass, anstatt ein bestimmtes absolutes Mass des plastischen Dehnvermögens,  $\varepsilon_{smu}$ , zu verlangen, wie es die Grundlage für die in Bild 10.11 illustrierten Verhältnisse darstellt, auch die Forderung nach einem gleich grossen relativen Dehnvermögen,  $\varepsilon_{smu}/\varepsilon_{su}$ , denkbar wäre. In diesem Fall müsste die prozentuale Reduktion des Dehnvermögens des Bewehrungsstahles im Verbund jeweils gleich gross sein. Dieser gedankliche Fall ist zwar nicht von praktischer Bedeutung, es sei aber erwähnt, dass er zur Folge hätte, dass für zunehmende Bruchdehnung  $\varepsilon_{su}$  auch der Verfestigungskennwert  $(f_{su}/f_{sy})$  ansteigen müsste.

Ein Vergleich der für die verschiedenen Stahlstoffgesetze geltenden Duktilitätsanforderungen zeigt, dass mit der bilinearen Idealisierung der Stahlkennlinie in den allermeisten Fällen die niedrigsten Anforderungen erhalten werden. Dieser Sachverhalt liegt darin begründet, dass mit der

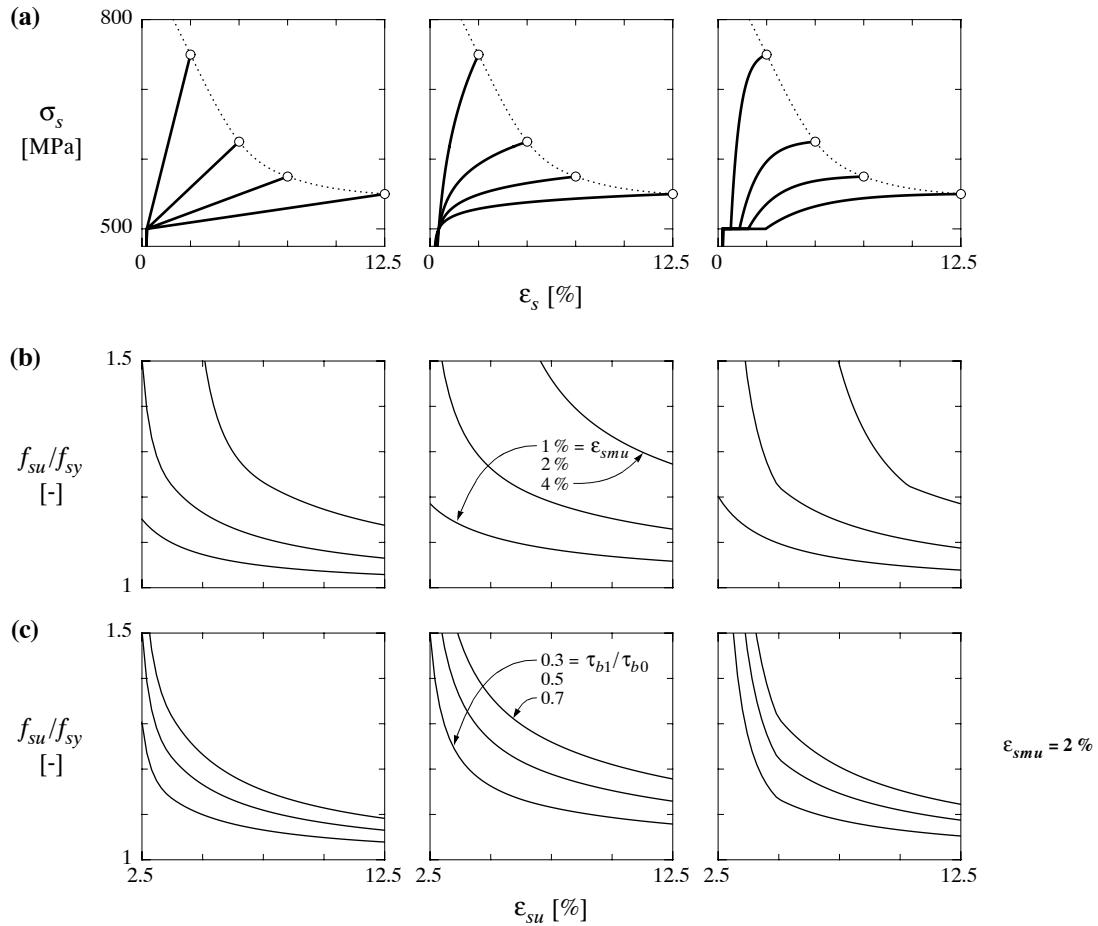


Bild 10.11 – Duktilität des Stahlbetonzuggliedes: (a) Stahlstoffgesetz im Verfestigungsbereich; (b) für erwünschtes Dehnvermögen erforderliche Bruchdehnung und Verfestigung; (c) Einfluss des Verbundkennwertes  $\tau_{b1}$ . N.B.:  $f_c = 32 \text{ MPa}$ ,  $\tau_{b0} = 2 \tau_{b1} = 2f_{ct} = 0.6f_c^{(2/3)}$ ,  $E_s = 200 \text{ GPa}$ ,  $f_{sy} = 500 \text{ MPa}$ ,  $\epsilon_{su} = 5\%$ ,  $\emptyset_s = 16 \text{ mm}$ ,  $\rho = 1\%$ ,  $s_{rm} = 0.75 \cdot s_{r0}$  mit  $s_{r0}$  gemäss Gleichung (6.6).

Annahme eines konstanten Verfestigungsmoduls das plastische Dehnvermögen in der Regel überschätzt wird. Folglich liegen die zugehörigen erforderlichen Duktilitätskennwerte praktisch immer auf der unsicheren Seite.

Ein Vergleich zwischen kaltverformtem und naturhartem Bewehrungsstahl erlaubt keine absolut gültigen Aussagen. Immerhin beobachtet man die Tendenz, dass der naturharte Bewehrungsstahl im Bereich grosser Bruchdehnungen  $\epsilon_{su}$ , jedoch nur bis zu einer bestimmten Grösse des erwünschten Dehnvermögens  $\epsilon_{smu}$  geringere Duktilitätskennwerte verlangt als der kaltverformte Bewehrungsstahl.

### 10.5.3 Schlussbemerkungen

Abschliessend lassen sich folgende Aussagen in Zusammenhang mit den Duktilitätsanforderungen an den Bewehrungsstahl machen:

1. Die Grösse des innerhalb der theoretischen Schranken  $s_{r0}/2 \leq s_{rm} \leq s_{r0}$  im Einzelfall effektiv sich einstellenden Rissabstandes  $s_{rm}$  hat einen grossen Einfluss auf die erforderliche

Grösse der Duktilitätseigenschaften des Bewehrungsstahles. Da zunehmender Rissabstand das Verformungsvermögen eines Stahlbetonzuggliedes reduziert, sind mit grösser werdendem Rissabstand höhere Duktilitätskennwerte des Bewehrungsstahles erforderlich, um ein festgelegtes erwünschtes plastisches Dehnvermögen sicherzustellen.

2. Der für eine gegebene Grösse der Bruchdehnung  $\epsilon_{su}$  jeweils erforderliche Verfestigungskennwert  $f_{su}/f_{sy}$  ist strenggenommen auch von der Grösse der Fliessgrenze  $f_{sy}$  abhängig, indem mit steigender Fliessgrenze  $f_{sy}$  der erforderliche Duktilitätskennwert  $f_{su}/f_{sy}$  leicht reduziert wird.
3. Eine Steigerung des Bewehrungsgehaltes  $\rho$  erhöht das Dehnvermögen eines Stahlbetonzuggliedes, sofern sich der Rissabstand entsprechend verkleinert. Die für eine festgelegte, konstante Grösse des erwünschten Dehnvermögens erforderlichen Duktilitätskennwerte des Bewehrungsstahles werden deshalb mit zunehmendem  $\rho$  reduziert.
4. Bei einer Zunahme der Betonfestigkeit  $f_c$  bleibt der Rissabstand aufgrund der Annahme  $\tau_{b0} = 2\tau_{b1} = 2f_{ct} = 0.6f_c^{(2/3)}$  unverändert, und somit hat die gleichzeitige Steigerung der Verbundkennwerte eine Erhöhung der Duktilitätsanforderungen zur Folge.
5. Ein Einfluss des Stabdurchmessers  $\varnothing$  besteht nur für den Fall, dass die Grösse des Rissabstandes unabhängig vom Stabdurchmesser ist. Wird hingegen der mit Beziehung (6.6) gegebene Zusammenhang berücksichtigt, sind das Verformungsverhalten und -vermögen des Stahlbetonzuggliedes, und somit auch die Duktilitätsanforderungen an den Bewehrungsstahl, vom Verbundradius der Bewehrungseinlagen unabhängig.



# 11 Vorspannung

*Walter Kaufmann*

## 11.1 Einleitung

### 11.1.1 Übersicht und Abgrenzung

In diesem Kapitel werden, im Sinne einer Ergänzung der vorhergehenden Kapitel, einige grundlegende Aspekte des Tragverhaltens vorgespannter Tragwerke erläutert. Das Schwergewicht liegt dabei auf dem Einfluss einer Vorspannung auf Spannungs- und Verformungsgrößen von Stabtragwerken, wie sie in Kapitel 2 behandelt worden sind. Falls nicht ausdrücklich etwas anderes erwähnt wird, ist mit dem Begriff Vorspannung im folgenden stets eine Vorspannung mit nachträglichem Verbund gemeint, und es wird angenommen, dass eine ausreichende Mindestbewehrung vorhanden ist, so dass bei der Rissbildung kein Versagen eintritt.

Eine umfassendere Behandlung der Vorspannung würde den Rahmen der vorliegenden Publikation sprengen; es wird daher nicht auf technologische und konstruktive Aspekte der Vorspannung eingegangen, und konzeptionelle Fragen, Spannkraftverluste und die Vorspannung von Platten und Scheiben werden nur kurz gestreift. Auch auf Fragen des Verbundes und des Verformungsvermögens wird nicht eingetreten; diesbezüglich wird auf Kapitel 6 und die Arbeit von Alvarez [3] verwiesen, in welcher der Einfluss des Verbundes auf das Trag- und Verformungsverhalten von vorgespannten Zuggliedern eingehend behandelt wird.

Nach einer Übersicht über einige grundlegende Merkmale vorgespannter Betontragwerke in Kapitel 11.1 wird das Tragverhalten von vorgespannten Zuggliedern (Kapitel 11.2), Biegeträgern (Kapitel 11.3) und Scheiben (Kapitel 11.4) behandelt. Schliesslich werden in den Kapiteln 11.5 und 11.6 einige Besonderheiten der Vorspannung ohne Verbund sowie der externen Vorspannung erläutert.

### 11.1.2 Sinn und Zweck der Vorspannung

#### Allgemeines

Eine Vorspannung ist ein dem Tragwerk mit aktiven Massnahmen aufgezwungener Eigenspannungszustand. Dieser sollte so gewählt werden, dass das Tragverhalten günstig beeinflusst wird.

Die Vorspannung wird in der Regel erzeugt, indem eine Bewehrung aus hochfestem Stahl gespannt und im Tragwerk selbst verankert wird. Aus diesem Vorgehen resultiert im Tragwerk in jedem Fall ein Eigenspannungszustand auf Querschnittsebene; die in der Vorspannbewehrung wirkende Zugkraft steht dabei in jedem Querschnitt mit den Kräften im (Stahl-)betontragwerk ohne Vorspannung im Gleichgewicht. Dem Eigenspannungszustand auf Querschnittsebene entsprechen im allgemeinen nicht verschwindende Deformationen, wodurch in statisch unbestimmten Tragwerken, falls die resultierenden Verformungen mit der Lagerung nicht verträglich sind, zusätzlich auch ein Eigenspannungszustand auf Systemebene erzeugt wird. Es resultieren Auflagerreaktionen und sogenannte Sekundärschnittgrößen, welche wiederum miteinander im Gleichgewicht sind.

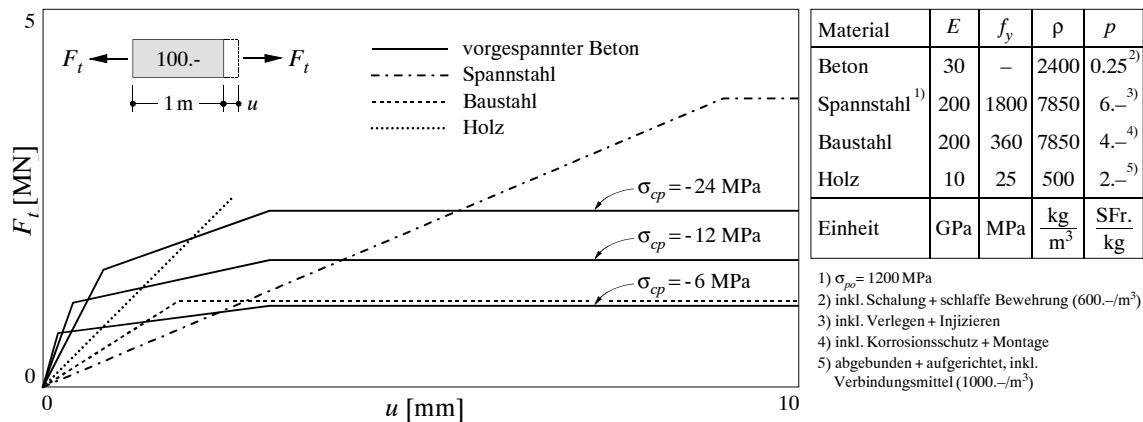


Bild 11.1 – Zugkraft-Verlängerungscharakteristiken von 1 m langen Zuggliedern im Wert von SFr. 100.- aus verschiedenen Materialien und zugrundeliegende Annahmen.

### Vergleich mit anderen Eigenspannungszuständen

Eigenspannungszustände, welche durch Zwängungen in statisch unbestimmten Systemen hervorgerufen werden, beispielsweise durch Bauvorgänge, Auflagerensenkungen oder Temperaturschwankungen, werden durch zeitabhängige Verformungen zu einem mehr oder weniger grossen Teil abgebaut. Die im Stahlbau übliche Art der “Vorspannung” durch Aufbringen von Auflagerverschiebungen ist daher problematisch und wird hier nicht weiter behandelt.

Bei der Vorspannung einer Bewehrung aus hochfestem Stahl gegen ein (Stahl-)betontragwerk ist hingegen die Stahlvordehnung um ein Vielfaches grösser als die zeitabhängigen Verformungen (Kriechen und Schwinden des Betons, Relaxation des Spannstahls), so dass die Vorspannkraft durch diese Effekte bei üblichen Verhältnissen lediglich um wenige Prozente abgebaut wird.

### Vorteile vorgespannter Tragwerke

Der Anwendungsbereich von schlaff bewehrten Stahlbetontragwerken wird durch die bei weitgespannten, schlanken Tragwerken resultierenden grossen Verformungen stark eingeschränkt. Problematisch sind dabei hauptsächlich die Verformungen unter Dauerlasten, welche durch das Kriechen des Betons im Laufe der Zeit bis etwa auf den dreifachen Wert ihrer initialen Grösse anwachsen können. Mit einer Vorspannung kann erreicht werden, dass die Rissbildung erst bei einer wesentlich höheren Belastung einsetzt als bei der Verwendung einer schlaffen Bewehrung. Da die Steifigkeit von (Stahl-)betonquerschnitten im ungerissenen Zustand um einiges grösser ist als im gerissenen Zustand, wird damit auch die Steifigkeit des gesamten Tragwerkes wesentlich erhöht und die Durchbiegungsproblematik entschärft.

Vor allem aber ist es mit einer geschickt gewählten Vorspannung möglich, diejenigen Schnittgrössen, welche unter Dauerlasten schädliche Verformungen hervorrufen, teilweise oder ganz zu kompensieren, siehe auch Kapitel 11.1.4. Damit werden weitgespannte, schlanken Betontragwerke machbar. Die Vorspannung ermöglicht zudem die Verwendung hochfester Stähle mit entsprechend kleineren Querschnitten; schlaff eingelegt kann eine hochfeste Bewehrung nicht voll ausgenutzt werden, da im Gebrauchszustand zu grosse Rissweiten resultieren würden. Die kleineren Stahlquerschnitte führen zu geringeren Querschnittsabmessungen und einem reduzierten Eigenwert, wodurch wiederum schlankere Tragwerke ermöglicht werden.

Durch die eingeschränkte oder gar verhinderte Rissbildung wird die Korrosion der Bewehrung reduziert und die Dichtigkeit des Tragwerkes erhöht. Zudem bewirkt eine wechselnde Belastung im ungerissenen Zustand nur kleine Spannungsamplituden in der Bewehrung, was eine erhöhte Ermüdungssicherheit zur Folge hat. Schliesslich können mit einer Vorspannung vorgefertigte Elemente zusammengefügt werden, und mit einer Kompensation des Eigengewichtes durch die Vorspannung sind kurze Ausschalfzeiten möglich, ohne dass dabei Durchbiegungsprobleme entstehen.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Vorspannung sehr effiziente Tragwerke ermöglicht, welche die Steifigkeit des Betons mit der Festigkeit des hochwertigen Spannstahls vereinen. Dies wird durch Bild 11.1 verdeutlicht, welches die Zugkraft-Verlängerungscharakteristiken von 1 m langen Zuggliedern im Wert von SFr. 100.- aus verschiedenen Materialien vergleicht; die getroffenen Annahmen sind in Bild 11.1 ebenfalls angegeben.

### 11.1.3 Berechnung vorgespannter Tragwerke

#### Allgemeines

Bei der Behandlung vorgespannter Tragwerke kommt der Frage der Systemabgrenzung eine zentrale Rolle zu. Grundsätzlich bestehen dabei zwei verschiedene Möglichkeiten. Die erste besteht darin, die Vorspannbewehrung als Teil des Tragwerkes zu behandeln und die Einwirkungen und Widerstände an diesem Gesamtsystem zu ermitteln. Dieses Vorgehen wird im folgenden als "Interpretation als Eigenspannungszustand" bezeichnet. Bei der zweiten Möglichkeit betrachtet man das (Stahl-)betontragwerk ohne Vorspannbewehrung und ermittelt die Einwirkungen und Widerstände an diesem Teilsystem. Dieses Vorgehen wird im folgenden als "Interpretation als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte" bezeichnet.

#### Interpretation als Eigenspannungszustand

Bei der Interpretation als Eigenspannungszustand, welche sich primär für Stabtragwerke eignet, werden die auf das Gesamtsystem inklusive Vorspannbewehrung wirkenden Kräfte betrachtet. In statisch bestimmten gelagerten Tragwerken resultieren somit aus der Vorspannung keine Schnittgrössen, da in jedem Querschnitt die Kräfte im (Stahl-)betonquerschnitt mit der Vorspannkraft im Gleichgewicht sind.

Werden hingegen die dem Eigenspannungszustand auf Querschnittsebene entsprechenden Verformungen durch eine statisch unbestimmte Lagerung behindert, so entstehen sogenannte Sekundärschnittgrössen. Diese wirken zusätzlich zur Beanspruchung durch äussere Lasten auf das Gesamtsystem ein und müssen bei der Bemessung berücksichtigt werden, sofern nicht gewährleistet werden kann, dass sie im betrachteten Grenzzustand wegplastifiziert werden können. Bei Stabtragwerken, welche auf Biegung versagen, ist dies für die Sekundärmomente – welche grundsätzlich nichts anderes als Zwängungsmomente gemäss Kapitel 2.4.2 sind – bei ausreichendem Rotationsvermögen der Fall; sie werden in der Regel dennoch berücksichtigt, da dies zu einer zweckmässigen Bewehrungsanordnung führt. Sekundärnormalkräfte, wie sie bei einer Vorspannung gegen vorgängig erstellte, steife Bauteile entstehen, können hingegen bei einem Biegeversagen kaum wegplastifiziert werden und sind daher in der Regel zu berücksichtigen.

Da bei der Anwendung der Interpretation als Eigenspannungszustand auf den Gesamtquerschnitt wirkende Schnittgrössen betrachtet werden, kann der Querschnittswiderstand ebenfalls am Gesamtquerschnitt inklusive Vorspannbewehrung berechnet werden. Dabei ist im allgemeinen die Vordehnung der Vorspannbewehrung wegen der beschränkten Duktilität und allfälliger weiterer Dehnungsbegrenzungen zu berücksichtigen, siehe Kapitel 11.3.1.

## Interpretation als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte

Bei der Interpretation als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte betrachtet man das (Stahl-)betontragwerk ohne Vorspannbewehrung. Auf dieses wirken zusätzlich zu den äusseren Lasten die von der Vorspannbewehrung auf das (Stahl-)betontragwerk einwirkenden Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte. Aufgrund dieser Belastung können in Stabtragwerken die Schnittgrössen ermittelt werden, und in scheibenförmigen oder räumlichen Tragwerken ist es möglich, den Kraftfluss mittels Spannungsfeldern und Fachwerkmodellen zu untersuchen.

Um bei der Ermittlung des Tragwiderstandes von der Differenz zwischen der Bruch- und der Vorspannkraft des Spanngliedes Gebrauch machen zu können, müssen grundsätzlich die der Beanspruchung des Spanngliedes im Bruchzustand entsprechenden Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte eingeführt werden. Da der Spannkraftzuwachs bei einer Vorspannung mit Verbund auf einer beschränkten Länge des Spanngliedes erfolgt, sind im entsprechenden Bereich grosse Reibungskräfte (Verbundkräfte) einzuführen, was zu recht komplexen Spannungsfeldern führen kann. Da der damit verbundene Gewinn an rechnerischem Tragwiderstand bei ausreichend hoher Vorspannung gering ist, verzichtet man bei scheibenförmigen oder räumlichen Tragwerken oft darauf, von der Differenz zwischen der Bruch- und der Vorspannkraft Gebrauch zu machen.

Bei Stabtragwerken besteht auch bei der Anwendung der Interpretation als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte die Möglichkeit, den Tragwiderstand mit Hilfe von Querschnittsbetrachtungen zu untersuchen. Werden die Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte aufgrund der Vorspannung ohne Spannkraftzuwachs ermittelt, so kann bei der Berechnung des Querschnittswiderstandes zusätzlich zum (Stahl-)betonquerschnitt die Differenz zwischen der Bruch- und der Vorspannkraft des Spanngliedes in Rechnung gestellt werden, wobei auch die Vordehnung der Vorspannbewehrung zu berücksichtigen ist. Dieses Vorgehen, welches in Kapitel 11.3.1 erläutert wird, gestattet eine einfache Berücksichtigung des Spannkraftzuwachses. Daher wird im folgenden bei Stabtragwerken immer angenommen, dass die auf den (Stahl-)betonträger wirkenden Schnittgrössen – beziehungsweise die diese verursachenden Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte – aufgrund der Vorspannung ohne Spannkraftzuwachs ermittelt werden, und der (Stahl-)betonquerschnitt beinhaltet den dabei nicht verwendeten Anteil der Vorspannbewehrung.

## Diskussion

Die Resultierende der Sekundärschnittgrössen und der infolge Eigenspannungszustand auf Querschnittsebene im (Stahl-)betontragwerk ohne Vorspannbewehrung wirksamen Kräfte, ermittelt nach der Interpretation als Eigenspannungszustand, entspricht den nach der Interpretation als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte ermittelten, infolge Vorspannung auf das (Stahl-)betontragwerk wirkenden Schnittgrössen, da die Sekundärschnittgrössen, obwohl auf das Gesamtsystem wirkend, vom (Stahl-)betontragwerk allein aufgenommen werden.

Auch bei der Anwendung der Interpretation als Eigenspannungszustand werden die infolge Vorspannung auf das (Stahl-)betontragwerk einwirkenden Schnittgrössen in der Regel als Schnittgrössen infolge Vorspannung bezeichnet. Man sollte sich dabei stets im klaren darüber sein, dass diese Schnittgrössen auf das (Stahl-)betontragwerk wirken, während am Gesamtsystem infolge Vorspannung lediglich die Sekundärschnittgrössen angreifen.

Welche der beschriebenen Möglichkeiten für die Behandlung der Vorspannung verwendet wird, spielt bei Stabtragwerken grundsätzlich keine Rolle. Bei scheibenförmigen oder räumlichen Tragwerken stellt jedoch die Ermittlung des Eigenspannungszustandes aus Vorspannung oft eine unüberwindliche Hürde dar, und die Interpretation als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte ist dann die einzige brauchbare Möglichkeit für die gesamte Projektierung. Diese sehr anschauliche Interpretation der Vorspannung eignet sich auch ausgezeichnet für den Tragwerksentwurf.

## Spannkraftverluste

Spannkraftverluste werden durch Reibung und zeitabhängige Effekte (Kriechen und Schwinden des Betons, Relaxation des Spannstahls) verursacht. Reibungsverluste haben zur Folge, dass die Vorspannkraft entlang des Spanngliedes variiert, und zeitabhängige Effekte führen dazu, dass die zum Zeitpunkt der Vorspannung wirksame Vorspannkraft  $P_0$  im Laufe der Zeit etwas abfällt, siehe auch Kapitel 11.1.2. Bei einer Vorspannung mit Verbund haben diese Spannkraftverluste praktisch keinen Einfluss auf die Traglast, da bei ausreichend hoher Vorspannung im Bruchzustand stets die Fliessgrenze des Spannstahls erreicht wird. Bei Spannungsberechnungen im Gebrauchs- zustand und bei einer Vorspannung ohne Verbund, Kapitel 11.5, ist jedoch ein entsprechend reduzierter Wert der Vorspannkraft in Rechnung zu stellen.

Im Rahmen der vorliegenden Publikation wird auf Spannkraftverluste nicht weiter eingegangen, und die Vorspannkraft wird durchwegs mit  $P_0$  bezeichnet. Es bleibt dem Leser überlassen, den jeweils passenden Wert der Vorspannkraft einzusetzen.

### 11.1.4 Vorspannkonzepte

#### Volle und teilweise Vorspannung

Grundsätzlich kann man zwischen einer vollen und einer teilweisen Vorspannung für eine bestimmte Last unterscheiden. Bei einer vollen Vorspannung treten unter der betrachteten Last im Gebrauchszustand rechnerisch keine oder nur minimale Zugspannungen in Richtung der Spannbewehrung auf, so dass das Tragwerk ungerissen bleibt. In der Anfangszeit des vorgespannten Betons wurden praktisch alle Bauwerke für die gesamte Gebrauchslast voll vorgespannt, und noch heute wird mit dem Begriff volle Vorspannung – ohne die Angabe einer bestimmten Belastung – eine volle Vorspannung für die gesamte Gebrauchslast bezeichnet.

Auch bei voller Vorspannung für die gesamte Gebrauchslast ist, sofern nicht eine zusätzliche, in der Regel unwirtschaftliche Druckreserve vorgesehen wird, eine schlaffe Mindestbewehrung erforderlich, um Risse, welche beispielsweise durch unvorhergesehene Zwängungen verursacht werden, zu verteilen. Bei der Anwendung üblicher Sicherheitsfaktoren ist jedoch der Nachweis der Tragsicherheit bei einer vollen Vorspannung für die gesamte Gebrauchslast auch ohne zusätzliche Bewehrung erfüllt. Eine solche Vorspannung führt daher oft zu einem wesentlich höheren Bewehrungsaufwand, als für die Gewährleistung der Tragsicherheit erforderlich wäre. Zudem entstehen hohe Druckbeanspruchungen, was grosse Spannkraftverluste zur Folge hat, und bei relativ hoher Nutzlast können durch die starke Vorspannung beträchtliche, der Belastung entgegengesetzte Durchbiegungen hervorgerufen werden. Eine volle Vorspannung für die gesamte Gebrauchslast ist daher in der Regel lediglich bei ermüdungsgefährdeten Tragwerken sinnvoll.

Bei einer teilweisen Vorspannung werden unter der betrachteten Last im Gebrauchszustand Risse zugelassen. Mit dem Begriff der teilweisen Vorspannung wird somit der gesamte Bereich zwischen schlaff bewehrten und für die gesamte Gebrauchslast voll vorgespannten Tragwerken abgedeckt.

#### Lastausgleichsverfahren

Eine sehr anschauliche Möglichkeit zur Bemessung einer teilweisen Vorspannung ist das sogenannte Lastausgleichsverfahren (Englisch: load balancing method). Dabei wird die Vorspannung so dimensioniert, dass die Anker- und Umlenkkräfte eine bestimmte Belastung, beispielsweise die ständigen Lasten, kompensieren. Das Lastausgleichsverfahren hat den grossen Vorteil, dass es – in Verbindung mit der Interpretation der Vorspannung als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte – ohne aufwendige Berechnungen auf beliebige Tragwerke angewendet werden kann.

## Einleitung

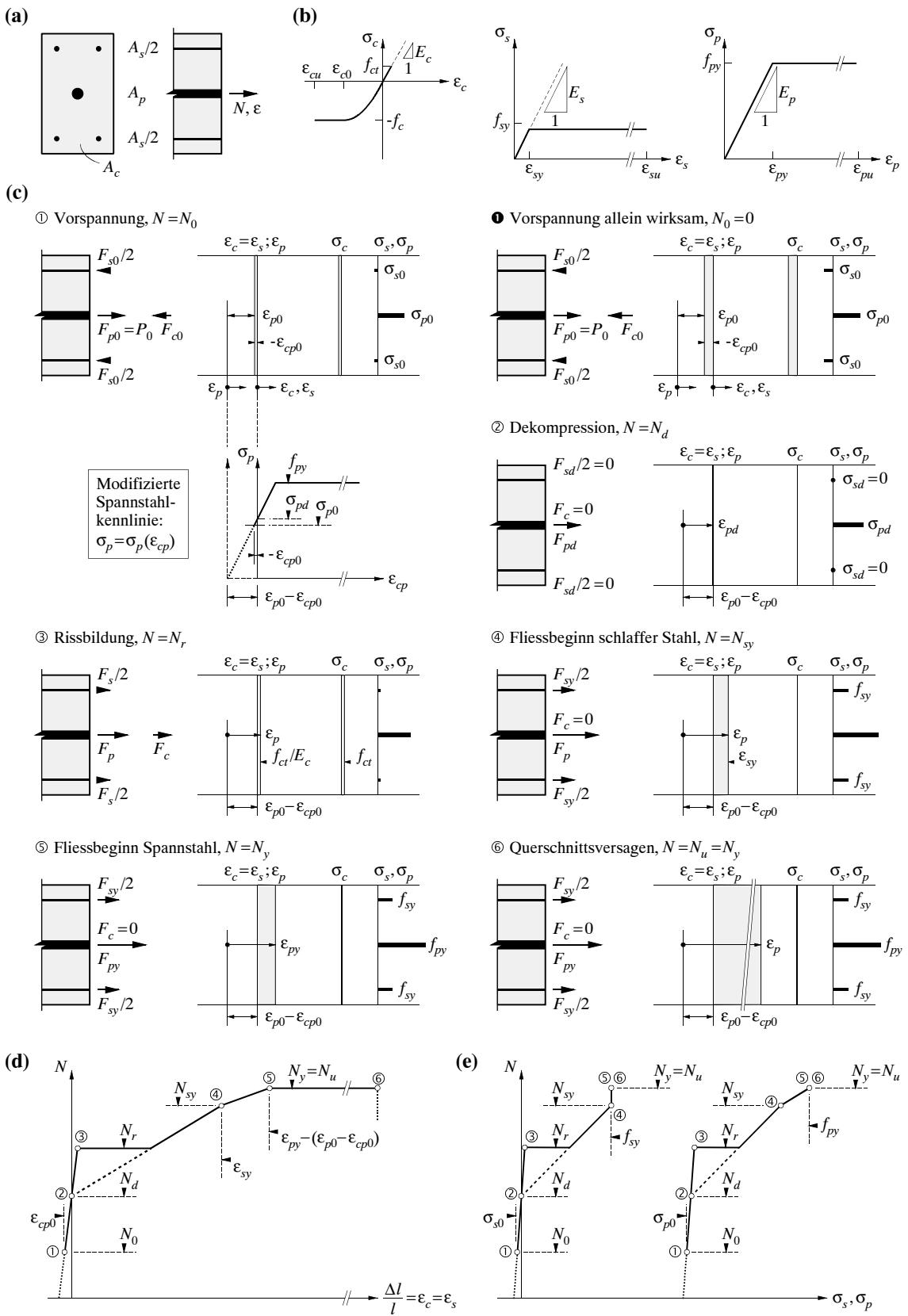


Bild 11.2 – Vorgespanntes Zugglied: (a) Bezeichnungen; (b) Materialverhalten; (c) Spannungen und Dehnungen für charakteristische Beanspruchungszustände; (d), (e) Verlauf der Verlängerung und der Stahlspannungen in Funktion der Zugbeanspruchung.

Werden in einem Biegeträger die ständigen Lasten mit einer Vorspannung kompensiert, so verbleibt im (Stahl-)betonquerschnitt unter dieser Belastung lediglich eine zentrische Druckbeanspruchung. Unter ständigen Lasten erfolgt somit lediglich eine Verkürzung des Trägers, so dass auch das Kriechen des Betons keine Biegeverformungen zur Folge hat.

## 11.2 Zugglieder

### 11.2.1 Verallgemeinerte Spannungen und Verformungen

#### Doppeltsymmetrische Querschnitte

Bild 11.2 illustriert das Verhalten eines vorgespannten Zuggliedes mit doppeltsymmetrischem Querschnitt gemäß Bild 11.2 (a) unter monoton wachsender, zentrischer Zugbeanspruchung. Für den Beton und die Bewehrung werden die in Bild 11.2 (b) gezeigten Stoffgesetze verwendet; die Kennlinie des Betons auf Druck spielt hier eine untergeordnete Rolle. In Bild 11.2 (c) sind innere Kräfte, Dehnungen sowie Spannungen im Beton, in der schlaffen und in der vorgespannten Bewehrung für charakteristische Beanspruchungszustände angegeben, während Bild 11.2 (d) die Entwicklung der Dehnung  $\epsilon$  der Mittelachse und Bild 11.2 (e) den Verlauf der Spannungen in der schlaffen ( $\sigma_s$ ) und in der vorgespannten ( $\sigma_p$ ) Bewehrung in Funktion der Zugbeanspruchung illustrieren. Die Diagramme wurden für  $A_p = 1800 \text{ mm}^2$ ,  $A_s = 1232 \text{ mm}^2$ ,  $A_c = 0.2 \text{ m}^2$ ,  $f_{py} = 1600 \text{ MPa}$ ,  $f_{sy} = 500 \text{ MPa}$ ,  $f_{ct} = 3.5 \text{ MPa}$ ,  $E_p = E_s = 200 \text{ GPa}$ ,  $E_c = 40 \text{ GPa}$  und  $\epsilon_{p0} = 0.0045$  ermittelt, mit  $\epsilon_{p0}$  = Vordehnung des Spannstahls. Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen wird vernachlässigt (unendlich kleine Rissabstände nach der Rissbildung), und für den (Stahl-)betonquerschnitt wird die Hypothese von Bernoulli vorausgesetzt.

Zum Zeitpunkt der Vorspannung ① wirkt auf den Gesamtquerschnitt in der Regel eine durch den Spannvorgang aktivierte, nicht genau bestimmbarer Normalkraft  $N_0$ . Der Fall ②, in welchem zum Zeitpunkt der Vorspannung keine weitere Belastung wirkt,  $N_0 = 0$ , tritt praktisch nur in der Vorfabrikation auf. Beträgt die Vorspannkraft  $P_0 = A_p \sigma_{p0} = A_p E_p \epsilon_{p0}$ , so wirkt zum Zeitpunkt der Vorspannung auf den (Stahl-)betonquerschnitt eine Druckkraft  $P_0 - N_0$ , was zu einer Verkürzung des Zuggliedes im Schwerpunkt der Vorspannbewehrung um den Betrag  $-\epsilon_{cp0}$  führt. Durch das Ausinjizieren des Hüllrohres wird die zu diesem Zeitpunkt vorhandene Differenz  $\epsilon_{p0} - \epsilon_{cp0}$  zwischen der Dehnung des Spannstahls und derjenigen des umliegendem Betons gewissermaßen eingefroren, so dass für den weiteren Verlauf der Belastung

$$\epsilon_p = \epsilon_{cp} + \epsilon_{p0} - \epsilon_{cp0} \quad (11.1)$$

gilt, mit  $\epsilon_{cp}$  = Dehnung des Betons im Schwerpunkt der Vorspannbewehrung. Der Wert von  $\epsilon_{cp}$  stimmt für allgemeine Querschnitte in der Regel nicht mit der Dehnung  $\epsilon$  der Mittelachse überein. Bei der Ermittlung der Spannungen in der vorgespannten Bewehrung in Funktion der Dehnungen  $\epsilon_{cp}$  des Betons (welche der Hypothese von Bernoulli genügen) im Schwerpunkt der Vorspannbewehrung ist aufgrund der Dehnungsdifferenz (11.1) die in Bild 11.2 (c) ebenfalls dargestellte, modifizierte Spannstahlkennlinie zu verwenden. Für übliche Fälle ist  $-\epsilon_{cp0} \ll \epsilon_{p0}$ , und die Betonstauchung  $-\epsilon_{cp0}$  kann vernachlässigt werden; diese Vereinfachung ist umso mehr gerechtfertigt, als  $\epsilon_{cp0}$  von der praktisch nicht genau bestimmbarer Normalkraft  $N_0$  abhängt. Im folgenden wird  $\epsilon_{cp0}$  der Vollständigkeit halber dennoch berücksichtigt.

Wird nach dem Erhärten des Injektionsmörtels die Zugkraft  $N$  gesteigert, so werden im (Stahl-)betonquerschnitt zunächst die Druckspannungen abgebaut, bis die Dekompression ② erreicht wird. Bei dieser Belastung verschwinden die Dehnungen des (Stahl-)betonquerschnitts,  $\epsilon_{cp} = 0$ , und die gesamte Zugkraft wird von der vorgespannten Bewehrung aufgenommen,

$N_d = A_p E_p (\varepsilon_{p0} - \varepsilon_{cp0})$ . Bei weiterer Laststeigerung bauen sich im (Stahl-)betonquerschnitt Zugspannungen auf, bis bei einer Dehnung von  $f_{ct}/E_c$  die Zugfestigkeit des Betons erreicht wird und die Rissbildung ③ erfolgt. Die bis zu dieser Belastung auftretenden Verlängerungen des Zuggliedes sind gering, und die Spannungen in der schlaffen und der vorgespannten Bewehrung nehmen vor der Rissbildung nur unwesentlich zu, da ein grosser Teil der Zugbeanspruchung durch den Betonquerschnitt aufgenommen wird.

Bei der Rissbildung springen die Spannungen im schlaffen Stahl und im Spannstahl schlagartig auf den zur Aufnahme der Risszugkraft  $N_r$  ohne Mitwirkung des Betons erforderlichen Wert, und das Zugglied verlängert sich entsprechend. Wird die Belastung anschliessend weiter erhöht, so muss die zusätzliche Beanspruchung von der Bewehrung allein aufgenommen werden, und die Spannungen in der schlaffen und der vorgespannten Bewehrung nehmen daher wesentlich stärker zu als im ungerissenen Zustand. Das Zugglied verhält sich zudem merklich weicher, da nicht mehr die Steifigkeit des ungerissenen Querschnittes, sondern lediglich noch diejenige der schlaffen und der vorgespannten Bewehrung wirksam ist. Bei steigender Belastung erreicht für übliche Verhältnisse die schlaffe Bewehrung als erste die Fliessgrenze ④. Ab diesem Zeitpunkt muss die zusätzliche Belastung vom Spannstahl allein aufgenommen werden, so dass die Steifigkeit des Zuggliedes nochmals abfällt und die Spannungen in der vorgespannten Bewehrung noch schneller anwachsen. Bei weiterer Laststeigerung erreicht schliesslich auch der Spannstahl die Fliessgrenze ⑤, wonach die Verlängerung bei gleichbleibender Zugkraft zunimmt, bis eine Bewehrung reisst ⑥.

### Allgemeine Querschnitte

Bei nicht doppeltsymmetrischen Querschnitten tritt im allgemeinen selbst unter zentrischer Zugbeanspruchung nicht nur eine Verlängerung, sondern auch eine Krümmung auf. Ist die Hauptbewehrung (Spannglied) bezüglich der Systemachse stark exzentrisch angeordnet, so kann nur eine geringe Zugbeanspruchungen aufgenommen werden kann, falls nicht gleichzeitig ein Biegemoment wirkt; im Idealfall greift die Zugkraft im Schwerpunkt der Fliesszugkräfte aller Bewehrungen an. In jedem Fall ist es bei nicht verschwindenden Normalkräften wichtig, dass Schnittgrössen und Widerstände konsequent bezüglich der gleichen Systemachsen ermittelt werden.

#### 11.2.2 Systemverhalten

Bild 11.3 illustriert einige Anwendungsmöglichkeiten vorgespannter Betonzugglieder. Generell lässt sich sagen, dass diese primär für Tragwerke zur Anwendung kommen, bei welchen neben der Festigkeit auch die Steifigkeit des Zuggliedes eine wichtige Rolle spielt. Wie in Kapitel 11.1.3 erläutert, weisen vorgespannte Betonzugglieder in diesem Bereich grosse Vorteile gegenüber anderen Zuggliedern auf, siehe Bild 11.1.

Wird ein Zugglied gegen starre Widerlager oder vorgängig erstellte, steife Bauteile vorgespannt, so wirkt nur ein Teil der Ankerkraft der Vorspannung auf das Zugglied. Im (Stahl-)betonquerschnitt resultiert somit infolge Vorspannung eine Druckkraft, deren Betrag kleiner ist als die Vorspannkraft, während im Spannglied die volle Vorspannkraft wirksam ist. Auf das vorgespannte Betonzugglied (Gesamtsystem) wirkt somit infolge Vorspannung eine Zugkraft, welche als Sekundärnormalkraft bezeichnet wird. Diese ist bei Berechnungen am Gesamtsystem zu berücksichtigen, sofern nicht sichergestellt werden kann, dass sie im betrachteten Grenzzustand weglassifiziert werden kann. Dieses Problem stellt sich beispielsweise bei der Längsvorspannung von Tunnelwänden zur Rissesicherung, da ein Teil der Vorspannkraft über Reibung an den Baugrund abgegeben wird.

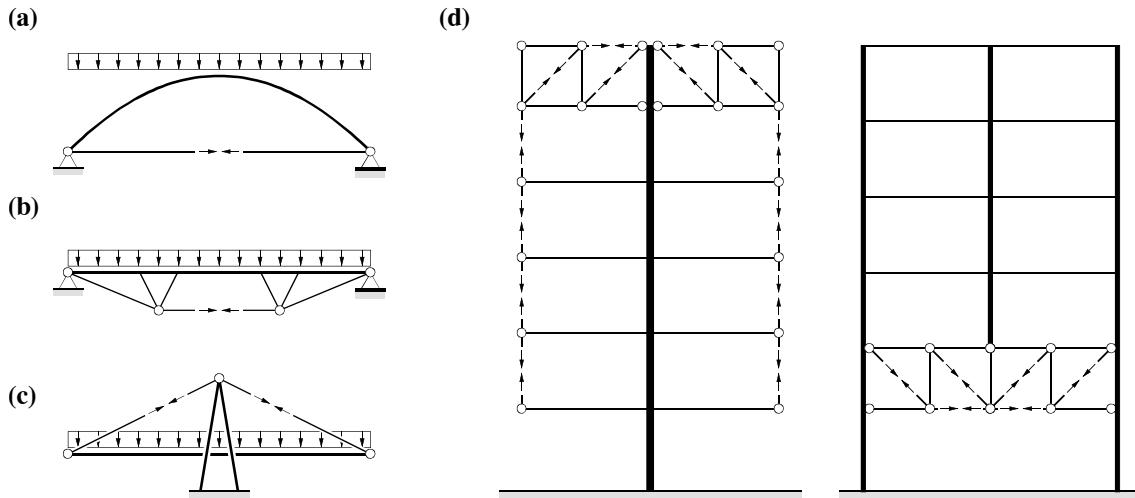


Bild 11.3 – Beispiele vorgespannter Zugglieder: (a) Zugband; (b) Unterspannung; (c) Abspannung; (d) Aufhängung und Abfangung (Zugstäbe in Grossfachwerken).

## 11.3 Biegeträger

### 11.3.1 Verallgemeinerte Spannungen und Verformungen

#### Verhalten unter reiner Biegebeanspruchung

Bild 11.4 illustriert das Verhalten eines vorgespannten Biegeträgers mit symmetrischem Querschnitt gemäss Bild 11.4 (a) unter monoton wachsender, reiner Biegebeanspruchung. Für den Beton und die Bewehrung werden die in Bild 11.4 (b) gezeigten Stoffgesetze verwendet; die Kennlinie des Betons auf Zug spielt hier eine untergeordnete Rolle. In Bild 11.4 (c) sind innere Kräfte, Dehnungen sowie Spannungen im Beton, in der schlaffen und in der vorgespannten Bewehrung für charakteristische Beanspruchungszustände angegeben, während Bild 11.4 (d) die Entwicklung der Krümmung  $\chi$  und Bild 11.4 (e) den Verlauf der Spannungen in der schlaffen ( $\sigma_s$ ) und in der vorgespannten ( $\sigma_p$ ) Bewehrung in Funktion der Biegebeanspruchung illustrieren. Die Diagramme wurden für den in Bild 11.6 (a) dargestellten Querschnitt ermittelt, jedoch ohne Druckbewehrung,  $A'_s = 0$ , und mit der zusätzlichen Annahme  $f_{ct} = 3.5 \text{ MPa}$ . Nach der Rissbildung wird die Mitwirkung des Betons auf Zug vollständig vernachlässigt (Annahme von  $f_{ct} = 0$  ab diesem Zeitpunkt), und für den (Stahl-)betonquerschnitt wird wiederum die Hypothese von Bernoulli vorausgesetzt.

Zum Zeitpunkt der Vorspannung ① wirkt auf den Gesamtquerschnitt in der Regel eine Biegebeanspruchung  $M_0 = P_0 a_0$ . Diese wird vom durch den Spannvorgang aktivierten Anteil des Eigengewichtes bewirkt und kann nicht genau bestimmt werden. Der Fall ②, in welchem zum Zeitpunkt der Vorspannung keine weitere Belastung wirkt,  $M_0 = 0$ , tritt praktisch nie auf. Beträgt die Vorspannkraft  $P_0 = A_p \sigma_{p0} = A_p E_p \varepsilon_{p0}$ , so wirken zum Zeitpunkt der Vorspannung auf den (Stahl-)betonquerschnitt eine Normalkraft  $-P_0$  und ein Biegemoment  $M_0 - P_0 e_p$ , was – im üblichen Fall  $a_0 < e_p$  – zu einer Verkürzung des Biegeträgers im Schwerpunkt der Vorspannbewehrung um den Betrag  $-\varepsilon_{cp0}$  führt. Durch das Ausinjizieren des Hüllrohres wird die zu diesem

## Biegeträger

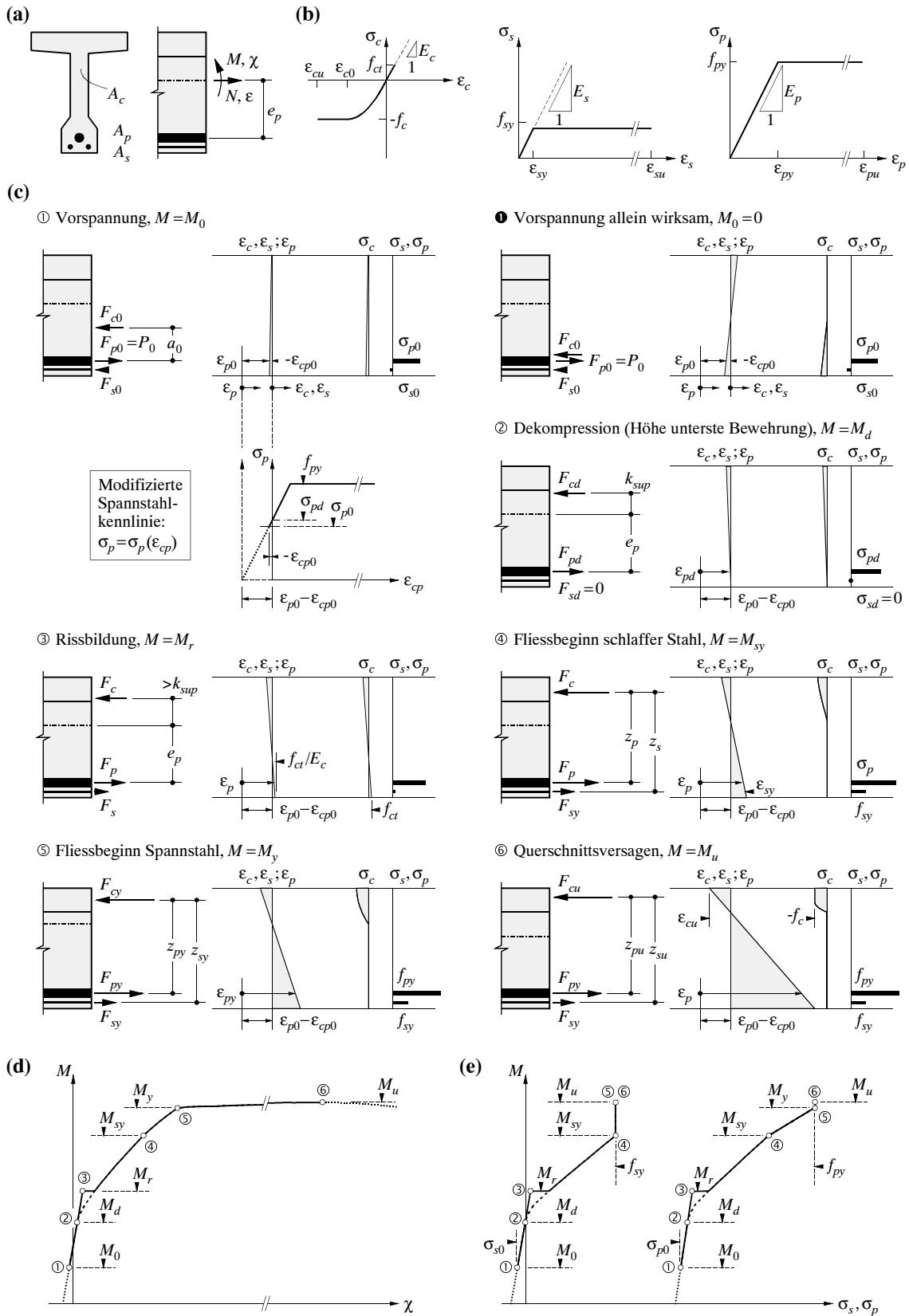


Bild 11.4 – Vorgespannter Biegeträger: (a) Bezeichnungen; (b) Materialverhalten; (c) Spannungen und Dehnungen für charakteristische Beanspruchungszustände; (d), (e) Verlauf der Krümmung und der Stahlspannungen in Funktion der Biegebeanspruchung.

Zeitpunkt vorhandene Differenz  $\varepsilon_{p0} - \varepsilon_{cp0}$  zwischen der Dehnung des Spannstahls und derjenigen des umliegendem Betons gewissermassen eingefroren, so dass für den weiteren Verlauf der Belastung wiederum die Beziehung (11.1) gilt und bei der Ermittlung der Spannungen in der vorgespannten Bewehrung in Funktion der Dehnungen des Betons  $\varepsilon_{cp}$  (welche der Hypothese von Bernoulli genügen) im Schwerpunkt der Vorspannbewehrung die in Bild 11.4 (c) dargestellte, modifizierte Spannstahlkennlinie zu verwenden ist. Wie bei Zuggliedern kann die Betonstauung  $-\varepsilon_{cp0}$  nicht genau bestimmt, wegen  $-\varepsilon_{cp0} << \varepsilon_{p0}$  jedoch für übliche Fälle vernachlässigt werden. Im folgenden wird  $\varepsilon_{cp0}$  der Vollständigkeit halber wiederum berücksichtigt.

Wird nach dem Erhärten des Injektionsmörtels die Biegebeanspruchung  $M$  gesteigert, so werden im (Stahl-)betonquerschnitt zunächst die Druckspannungen im unteren Teil des Querschnitts abgebaut, bis die Dekompression erreicht wird. Bei dieser Belastung verschwinden die Dehnungen des (Stahl-)betonquerschnitts am unteren Querschnittsrand; in Bild 11.4 (c) ist stattdessen der Zustand ② mit verschwindender Dehnung im Schwerpunkt der untersten Bewehrungslage dargestellt, welcher in der Praxis oft verwendet wird und sich nur geringfügig vom Zustand der Dekompression am unteren Querschnittsrand unterscheidet. Da bei dieser Belastung die Betondehnung  $\varepsilon_{cp0}$  im Schwerpunkt der Vorspannbewehrung näherungsweise verschwindet, gilt für das Dekompressionsmoment  $M_d = F_{pd}(e_p + k_{sup}) \approx A_p E_p (\varepsilon_{p0} - \varepsilon_{cp0})(e_p + k_{sup})$ , mit  $k_{sup}$  = obere Kernweite des Querschnitts. Bei weiterer Laststeigerung bauen sich im unteren Teil des Querschnitts Zugspannungen auf, bis bei einer Dehnung von  $f_{ct}/E_c$  am unteren Querschnittsrand die Zugfestigkeit des Betons erreicht wird und die Rissbildung ③ erfolgt. Die bis zu dieser Belastung auftretenden Krümmungen des Biegeträgers sind gering, und die Spannungen in der schlaffen und der vorgespannten Bewehrung nehmen vor der Rissbildung nur unwesentlich zu, da ein grosser Teil der zunehmenden Biegebeanspruchung durch den Betonquerschnitt aufgenommen wird.

Bei der Rissbildung springen die Spannungen im schlaffen Stahl und im Spannstahl schlagartig auf den zur Aufnahme des Rissmomentes  $M_r$  ohne Zugspannungen im Beton erforderlichen Wert, und die Krümmung wächst entsprechend an. Wird die Belastung anschliessend weiter erhöht, so muss die zusätzliche Beanspruchung ohne Zugspannungen im Beton aufgenommen werden, und die Spannungen in der schlaffen und der vorgespannten Bewehrung nehmen daher wesentlich stärker zu als im ungerissenen Zustand. Der Biegeträger verhält sich zudem merklich weicher, da lediglich noch die Steifigkeit des gerissenen Querschnittes wirksam ist. Bei steigender Belastung erreicht für übliche Verhältnisse die schlaffe Bewehrung als erste die Fliessgrenze ④. Die Steifigkeit des Biegeträgers fällt nochmals ab, und die Spannungen in der vorgespannten Bewehrung wachsen noch schneller an, da die Zugkraft in der schlaffen Bewehrung konstant bleibt. Bei weiterer Laststeigerung erreicht schliesslich auch der Spannstahl die Fliessgrenze ⑤. Anschliessend ist, anders als bei Zugbeanspruchung, nochmals eine geringfügige Erhöhung der Beanspruchung möglich, da der Hebelarm der inneren Kräfte mit zunehmender Krümmung etwas anwächst. Das Querschnittsversagen wird für übliche Bewehrungsgehalte durch den Bruch des Betons am oberen Querschnittsrand verursacht ⑥; bei schwach bewehrten Querschnitten ist jedoch auch ein Versagen durch Zerreissen der Bewehrung möglich.

### Gesamtquerschnitt und (Stahl-)betonquerschnitt

Wie in Kapitel 11.1.3 erwähnt, kommt der Frage der Systemabgrenzung bei der Behandlung vorgespannter Tragwerke eine zentrale Rolle zu. Anhand von Bild 11.5 soll daher der Unterschied zwischen dem Gesamtquerschnitt und dem (Stahl-)betonquerschnitt verdeutlicht werden. Dabei wird (wie in 11.1.3 erläutert) angenommen, dass die auf den (Stahl-)betonträger wirkenden Schnittgrössen – beziehungsweise die diese verursachenden Anker- Umlenk- und Reibungskräfte – aufgrund der Vorspannung ohne Spannkraftzuwachs ermittelt wurden, und der (Stahl-)betonquerschnitt beinhaltet den dabei nicht verwendeten Anteil der Vorspannbewehrung.

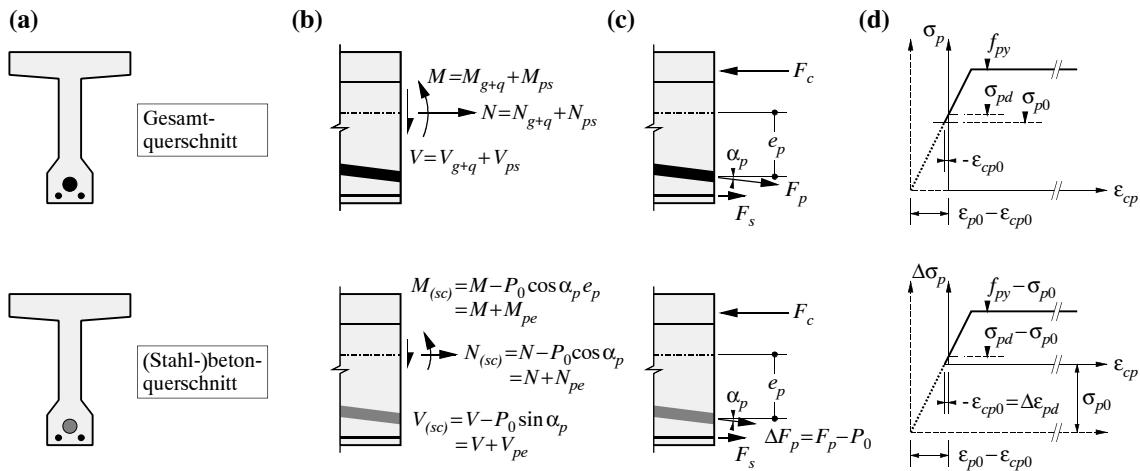


Bild 11.5 – Gesamtquerschnitt und (Stahl-)betonquerschnitt: (a) Querschnitte; (b) Schnittgrößen; (c) innere Kräfte; (d) modifizierte Spannstahlkennlinien.

Bild 11.5 (b) vergleicht die Schnittgrößen  $M$ ,  $V$  und  $N$  im Gesamtquerschnitt mit den bei identischer Belastung ( $g + q$ ) auf den (Stahl-)betonquerschnitt einwirkenden Schnittgrößen  $M_{(sc)}$ ,  $V_{(sc)}$  und  $N_{(sc)}$ . Die Schnittgrößen unterscheiden sich exakt um die infolge Eigenspannungszustand auf Querschnittsebene auf den (Stahl-)betonquerschnitt ohne Vorspannbewehrung einwirkenden Kräfte  $M_{pe} = -P_0 \cos \alpha_p e_p$ ,  $V_{pe} = -P_0 \sin \alpha_p$  und  $N_{pe} = -P_0 \cos \alpha_p$

$$\begin{aligned} M_{(sc)} &= M - P_0 \cos \alpha_p e_p = M + M_{pe} \\ V_{(sc)} &= V - P_0 \sin \alpha_p = V + V_{pe} \\ N_{(sc)} &= N - P_0 \cos \alpha_p = N + N_{pe} \end{aligned} \quad (11.2)$$

Die Beziehungen (11.2) gelten, wie in Kapitel 11.1.3 erwähnt und in Bild 11.5 (b) angedeutet, auch bei nicht verschwindenden Sekundärschnittgrößen, da diese, obwohl auf das Gesamtsystem wirkend, vom (Stahl-)betontragwerk allein aufgenommen werden. Üblicherweise ist die Spanngliedneigung gering, so dass  $\cos \alpha_p \approx 1$  und  $\sin \alpha_p \approx \tan \alpha_p$  angenommen werden darf.

Bild 11.5 (c) vergleicht die den Schnittgrößen gemäss Bild 11.5 (b) entsprechenden inneren Kräfte im Gesamtquerschnitt und im (Stahl-)betonquerschnitt. Der einzige Unterschied besteht in der Grösse der Kraft in der Vorspannbewehrung. Während im Gesamtquerschnitt die effektiv vorhandene Zugkraft  $F_p$  in der Vorspannbewehrung wirksam ist, wirkt auf den (Stahl-)betonquerschnitt lediglich die Differenz

$$\Delta F_p = F_p - P_0 \quad (11.3)$$

zwischen der Zugkraft  $F_p$  und der Vorspannkraft  $P_0$ , also der Spannkraftzuwachs.

Bild 11.5 (d) zeigt modifizierte Spannstahlkennlinien, welche bei Querschnittsanalysen zur Anwendung kommen. Sie liefern die Spannungen im Spannstahl in Funktion der Dehnungen des Betons  $\epsilon_{cp}$  im Schwerpunkt der Vorspannbewehrung. Bei der Analyse des Gesamtquerschnittes ist dabei, wie bereits an verschiedener Stelle erwähnt, die Differenz zwischen der Dehnung des Spannstahls und derjenigen des umliegenden Betons gemäss (11.1) zu berücksichtigen, was im Vergleich mit der normalen Spannstahlkennlinie eine Verschiebung der Ordinate um den Betrag  $\epsilon_{p0} - \epsilon_{cp0}$  zur Folge hat. Bei der Analyse des (Stahl-)betonquerschnittes ist zusätzlich zu beachten, dass nur der bei der Berechnung der Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte nicht verwendete Anteil der Vorspannbewehrung zur Verfügung steht. Dies bedeutet, dass neben der Verschiebung

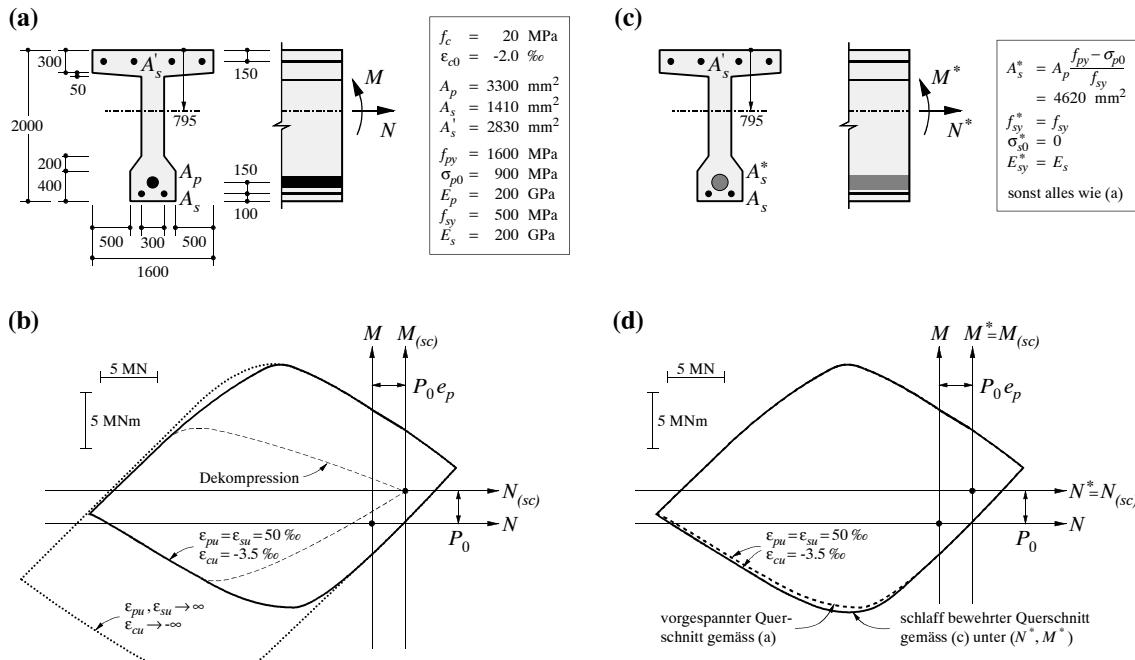


Bild 11.6 – Interaktion von Biegung und Normalkraft: (a), (b) vorgespannter Querschnitt mit Interaktionsdiagrammen; (c), (d) äquivalenter schlaff bewehrter Querschnitt mit Interaktionsdiagramm, Vergleich mit vorgespanntem Querschnitt.

der Ordinate um den Betrag  $\epsilon_{p0} - \epsilon_{cp0}$  auch die Abszisse verschoben werden muss, und zwar um den Betrag der Vorspannung  $\sigma_{p0}$ , siehe Bild 11.5 (d).

Wie man leicht verifiziert, ist bei der Verwendung der modifizierten Spannstahlkennlinien gemäss Bild 11.5 (d) die Betrachtung des (Stahl-)betonquerschnittes zu derjenigen des Gesamtquerschnittes äquivalent. Eine Analyse des (Stahl-)betonquerschnittes liefert im Vergleich mit einer Analyse des Gesamtquerschnittes für den gleichen Dehnungszustand eine um  $P_0 = A_p \sigma_{p0}$  kleinere Kraft in der Vorspannbewehrung und somit um  $P_0 \cos \alpha_p e_p$ ,  $P_0 \sin \alpha_p$  und  $P_0 \cos \alpha_p$  geringere Biegemomente, Quer- und Normalkräfte. Diese sind den auf den (Stahl-)betonquerschnitt einwirkenden Schnittgrößen gegenüberzustellen, welche sich gemäss (11.2) von den im Gesamtquerschnitt wirkenden Schnittgrößen um exakt den gleichen Betrag unterscheiden.

### Interaktion von Biegung und Normalkraft

Der in Bild 11.6 (a) dargestellte vorgespannte (Gesamt-)querschnitt wird durch ein Biegemoment  $M$  und eine Normalkraft  $N$  beansprucht. Für den Beton und die Bewehrung gelten die in Bild 11.6 (a) angegebenen Materialkennwerte mit den Stoffgesetzen gemäss Bild 11.4 (b).

Bild 11.6 (b) illustriert die  $(M, N)$ -Interaktionsdiagramme des vorgespannten Querschnittes in Bild 11.6 (a) für ideal plastisches Materialverhalten und für übliche Dehnungsbegrenzungen,  $\epsilon_{pu} = \epsilon_{su} = 0.05$  und  $\epsilon_{cu} = -0.0035$ . Der Vergleich zeigt, dass die beiden Diagramme praktisch deckungsgleich sind, mit Ausnahme des Bereiches, in welchem die Vorspannbewehrung im gedrückten Teil des Querschnittes liegt. Die grossen Unterschiede in diesem Abschnitt des Interaktionsdiagramms werden primär dadurch verursacht, dass für ideal plastisches Materialverhalten der Spannstahl auf Druck fliesst, während die Dehnungsbegrenzung des Betons in Verbindung mit der Dehnungsdifferenz (11.1) bewirkt, dass im rechnerischen Bruchzustand eine Zugspannung im Spannstahl herrscht. Auch wenn Fälle, in welchen die Vorspannbewehrung im

gedrückten Teil des Querschnittes liegt, in der Praxis selten sind (beispielsweise vorgespannte Stützen), so wird damit doch die Feststellung untermauert, dass die Dehnungsdifferenz (11.1) bei der Behandlung vorgespannter Querschnitte grundsätzlich zu berücksichtigen ist.

Wie anhand von Bild 11.5 erläutert, sind die auf den Gesamtquerschnitt und die auf den (Stahl-)betonquerschnitt wirkenden Schnittgrößen über die Beziehungen (11.2) verknüpft. Dementsprechend können für den Gesamtquerschnitt ermittelte  $(M, N)$ -Interaktionsdiagramme als  $(M_{(sc)}, N_{(sc)})$ -Interaktionsdiagramme des (Stahl-)betonquerschnittes aufgefasst werden. Dazu sind lediglich die Achsen um  $P_0$  und  $P_0 e_p$  (für  $\alpha_p = 0$ ) gemäss Bild 11.6 (b) zu verschieben.

Der in Bild 11.6 (c) dargestellte schlaff bewehrte Querschnitt, welcher durch ein Biegemoment  $M^*$  und eine Normalkraft  $N^*$  beansprucht wird, stimmt grundsätzlich mit dem vorgespannten Querschnitt gemäss Bild 11.6 (a) überein, weist jedoch anstelle der Vorspannbewehrung  $A_p$  eine schlaffe Ersatzbewehrung mit

$$A_s^* = A_p \frac{f_{py} - \sigma_{p0}}{f_{sy}}, \quad f_{sy}^* = f_{sy} \quad (11.4)$$

auf. Im Bereich, in welchem die schlaffe Ersatzbewehrung des Querschnittes gemäss Bild 11.6 (c), beziehungsweise die Vorspannbewehrung des Querschnittes in Bild 11.6 (a) auf Zug fliessen, ist infolge der Beziehung (11.4) die Zugkraft  $A_s^* f_{sy}^*$  in der schlaffen Ersatzbewehrung gleich gross wie der im (Stahl-)betonquerschnitt gemäss Bild 11.6 (a) wirksame Spannkraftzuwachs  $A_p(f_{py} - \sigma_{p0})$ . Dadurch wird erreicht, dass in diesem Bereich das  $(M^*, N^*)$ -Interaktionsdiagramm des schlaff bewehrten Querschnittes mit dem  $(M_{(sc)}, N_{(sc)})$ -Interaktionsdiagramm des (Stahl-)betonquerschnittes gemäss Bild 11.6 (a) übereinstimmt. Es unterscheidet sich somit vom  $(M, N)$ -Interaktionsdiagramm des vorgespannten (Gesamt-)querschnitts ebenfalls lediglich um eine Verschiebung der Achsen um  $P_0$  und  $P_0 e_p$  gemäss Bild 11.6 (d). Im Bereich, in welchem die schlaffe Ersatzbewehrung, beziehungsweise die Vorspannbewehrung im gedrückten Teil des Querschnittes liegt, ergeben sich wiederum gewisse Abweichungen, da die schlaffe Ersatzbewehrung auf Druck fliesst, während im Spannstahl Zugspannungen herrschen; dieser Bereich ist jedoch wie bereits erwähnt wenig relevant.

Allgemein kann nun das  $(M^*, N^*)$ -Interaktionsdiagramm eines schlaff bewehrten Querschnittes mit  $(A_s^*, f_{sy}^*)$  als  $(M_{(sc)}, N_{(sc)})$ -Interaktionsdiagramm eines vorgespannten Querschnitts mit  $(A_p, f_{py}, \sigma_{p0})$  aufgefasst werden, wobei die Bewehrungen der Beziehung (11.4) genügen müssen. Das  $(M, N)$ -Interaktionsdiagramm des vorgespannten (Gesamt-)querschnitts erhält man sodann ganz einfach durch eine Verschiebung der Achsen um  $P_0$  und  $P_0 e_p$  gemäss Bild 11.6 (d), mit  $P_0 = A_p \sigma_{p0}$ . Damit ist es möglich, für schlaff bewehrte Querschnitte ermittelte Interaktionsdiagramme (Tabellenwerke) auf vorgespannte Querschnitte anzuwenden.

### 11.3.2 Systemverhalten

#### Allgemeines

Anhand des in Bild 11.7 (a)-(c) dargestellten Zweifeldträgers wird im folgenden das Verhalten vorgespannter Biegeträger diskutiert, wobei nicht eine normgemäße Bemessung, sondern das Aufzeigen von Zusammenhängen im Vordergrund steht. Zudem soll der in Kapitel 11.3.1 erläuterte Unterschied zwischen am Gesamtsystem und am (Stahl-)betonträger angreifenden Schnittgrößen verdeutlicht werden.

Es sei an dieser Stelle nochmals erwähnt, dass im Rahmen der vorliegenden Publikation nicht auf Spannkraftverluste eingegangen wird. Die Vorspannkraft wird durchwegs mit  $P_0$  bezeichnet, und es bleibt dem Leser überlassen, den jeweils passenden Wert der Vorspannkraft einzusetzen.

## Wahl der Vorspannung

Die Spanngliedgeometrie, Bild 11.7 (b), wurde so festgelegt, dass das Spannglied abschnittsweise parabolisch verläuft, wobei über dem Zwischenauflager und im Feld jeweils die maximale Exzentrizität ausgenutzt wird und das Spannglied bei den Endauflagern zentrisch verankert ist. Die Vorspannkraft wurde so bestimmt, dass die Umlenkkräfte aus Vorspannung im Feld das Eigengewicht  $g$  etwa kompensieren. Durch die parabolische Spanngliedführung können die Umlenkkräfte  $u$  in jedem Parabelabschnitt sehr einfach aus der Beziehung

$$u = \frac{8P_0 f}{l^2} \quad (11.5)$$

bestimmt werden, mit  $f$  = Pfeilhöhe und  $l$  = Feldweite der betrachteten Parabel, siehe Bild 11.7 (c). Die Wahl der Vorspannung ist somit ohne besonderen Aufwand möglich.

Im vorliegenden Beispiel wird der minimale Krümmungsradius des Spanngliedes über dem Zwischenauflager nicht voll ausgenutzt, um den Einfluss der Gegenkrümmung des Spanngliedes in diesem Bereich zu verdeutlichen. In der Praxis empfiehlt es sich in der Regel, den minimalen Krümmungsradius auszunützen (Lage der Wendepunkte möglichst nahe beim Zwischenauflager), da sich dies günstig auf den Schubwiderstand auswirkt.

## Interpretation der Vorspannung als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte

Die infolge Vorspannung auf den (Stahl-)betonträger wirkenden Schnittgrößen können aus den Anker- und Umlenkkräften, Bild 11.7 (c), sehr einfach berechnet werden. Nimmt man an, dass Umlenkkräfte im Bereich der Gegenkrümmung über dem Zwischenauflager ausschließlich am Kragarm wirken, so erhält man für das Biegemoment über dem Zwischenauflager

$$M_B = \frac{u_f l^2}{8} - \frac{(u_s + u_f) a^2}{2} \quad (11.6)$$

mit  $u_f$ ,  $u_s$  = Umlenkkkräfte im Feld und über der Stütze, ermittelt gemäss (11.5), beide positiv,  $l = 36 \text{ m}$  = Spannweite, und  $a = 1.8 \text{ m}$  = Distanz Zwischenauflager-Wendepunkt. Die resultierenden Schnittgrößen  $M_p$ ,  $V_p$  und  $N_p$  sind in Bild 11.7 (d) dargestellt.

## Interpretation der Vorspannung als Eigenspannungszustand

Die an einem statisch bestimmten Grundsystem, beispielsweise mit einem Gelenk in B, infolge Eigenspannungszustand auf Querschnittsebene auf den (Stahl-)betonträger wirkenden Schnittgrößen betragen  $M_{pe} = -P_0 e_p$ ,  $V_{pe} = -P_0 \sin \alpha_p$  und  $N_{pe} = -P_0$ , wobei  $\cos \alpha_p = 1$  angenommen wurde, Bild 11.7 (d).

Diesen Schnittgrößen entsprechen im allgemeinen Krümmungen, Schiebungen und Dehnungen; setzt man linear elastisches Verhalten voraus, so betragen diese

$$\chi_0 = \frac{M_{pe}}{EI} = -\frac{P_0 e_p}{EI}, \quad \gamma_0 = \frac{V_{pe}}{GA_v} = -\frac{P_0 \sin \alpha_p}{GA_v}, \quad \varepsilon_0 = \frac{N_{pe}}{EA} = -\frac{P_0}{EA} \quad (11.7)$$

mit  $EI$ ,  $GA_v$  und  $EA$  = Biege-, Schub- und Dehnsteifigkeit des betrachteten Querschnitts. Die Schiebungen  $\gamma_0$  werden, wie in der Stabstatik üblich, meist vernachlässigt. In statisch unbestimmten Systemen sind die (11.7) entsprechenden Verformungen im allgemeinen mit der Lagerung nicht verträglich, so dass Auflagerreaktionen und Sekundärschnittgrößen entstehen, welche auf das Gesamtsystem wirken und miteinander im Gleichgewicht sind, also einen Eigenspannungszustand auf Systemebene bilden. Dieser Eigenspannungszustand kann mit der Kraftmethode oder einem Stabstatikprogramm ermittelt werden, wobei  $\chi_0$  und  $\varepsilon_0$  (sowie  $\gamma_0$ , falls nicht vernachlässigt) gemäss (11.7) als aufgezwungene Verformungen zu behandeln sind.

## Biegeträger

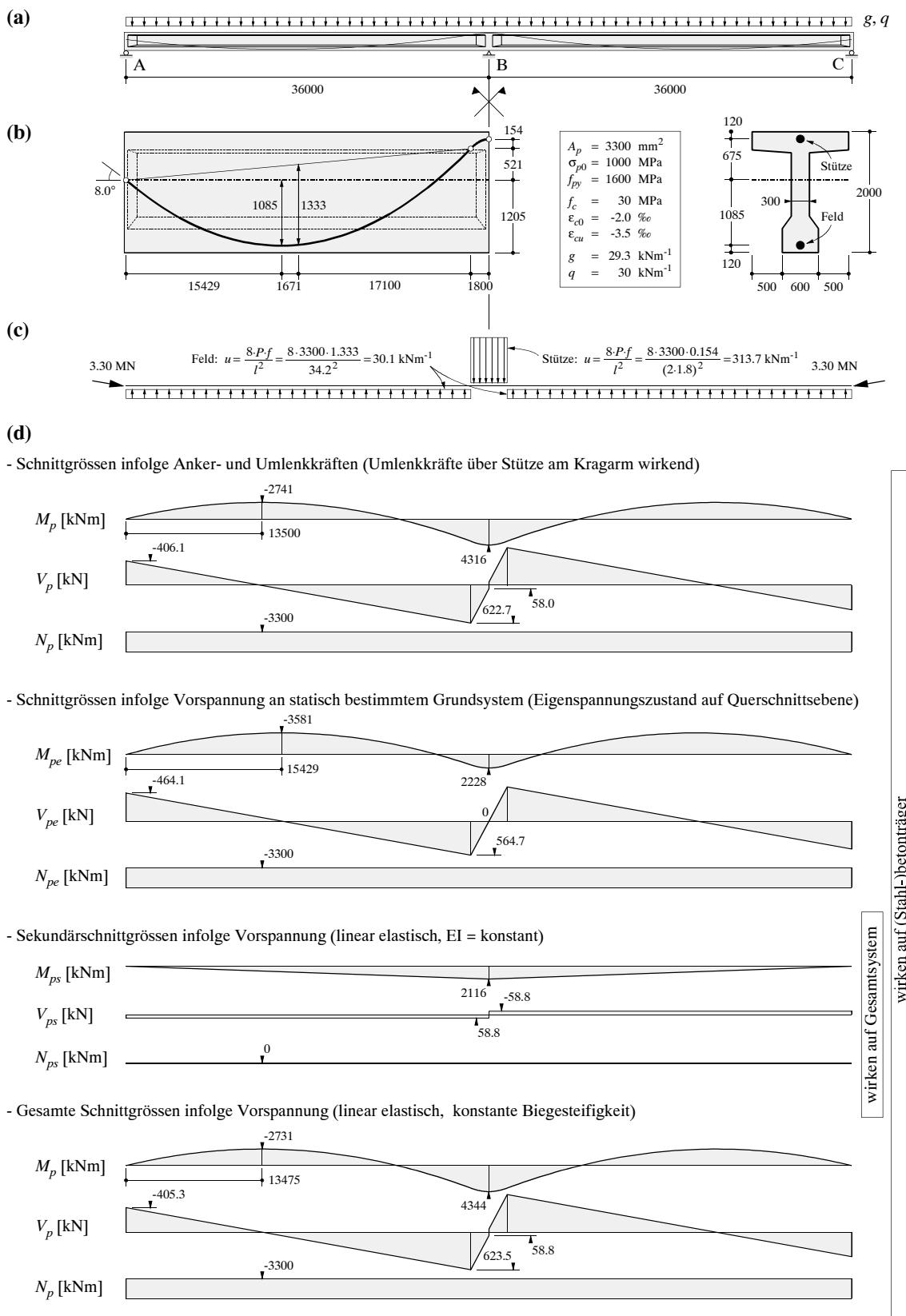


Bild 11.7 – Vorgespannter Zweifeldträger: (a) System und Belastung; (b) Kabelgeometrie und Querschnitt; (c) Anker- und Umlenkkräfte; (d) Schnittgrößen infolge Vorspannung. Abmessungen in mm.

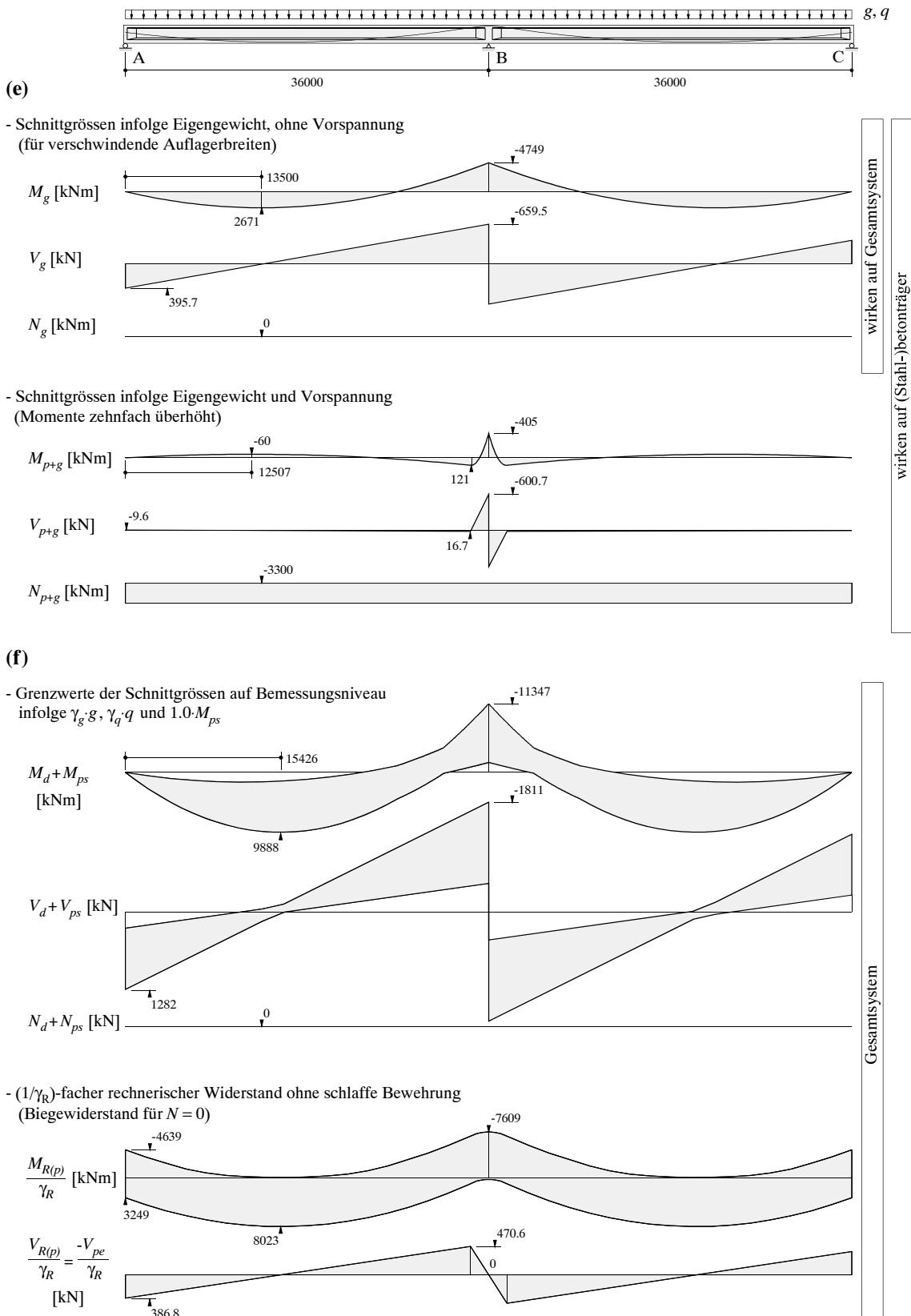


Bild 11.7 – Fortsetzung von vorhergehender Seite: (e) Schnittgrößen infolge Eigengewicht mit und ohne Vorspannung; (f) Grenzwerte der Schnittgrößen und Widerstände des vorgespannten Trägers ohne jegliche schlaffe Bewehrung. Abmessungen in mm.

Im vorliegenden Fall kann sich der Träger unbehindert verkürzen, so dass  $\epsilon_0$  keine Sekundärnormalkräfte zur Folge hat,  $N_{ps} = 0$ . Die Krümmungen  $\chi_0$  sind jedoch mit der Lagerung nicht verträglich und haben die in Bild 11.7 (d) dargestellten Sekundärmomente  $M_{ps}$  und Sekundärquerkräfte  $V_{ps}$  zur Folge; bei der Berechnung wurden ein linear elastisches Verhalten und eine konstante Biegesteifigkeit angenommen.

Auf den (Stahl-)betonquerschnitt wirkt infolge Vorspannung die Summe aus den Schnittgrößen infolge Eigenspannungszustand auf Querschnittsebene und den Sekundärschnittgrößen

$$\begin{aligned} M_p &= M_{pe} + M_{ps} = -P_0 e_p + M_{ps} \\ V_p &= V_{pe} + V_{ps} = -P_0 \sin \alpha_p + V_{ps} \\ N_p &= N_{pe} + N_{ps} = -P_0 + N_{ps} \end{aligned} \quad (11.8)$$

siehe wiederum Bild 11.7 (d). Der minime Unterschied der numerischen Werte zu den aus Anker- und Umlenkkräften ermittelten Schnittgrößen  $M_p$ ,  $V_p$  und  $N_p$  wird durch die dort getroffene vereinfachende Annahme, dass Umlenkkräfte im Bereich der Gegenkrümmung über dem Zwischenauflager ausschliesslich am Kragarm wirken, verursacht.

Für die weiteren Berechnungen werden die nach der Interpretation als Eigenspannungszustand ermittelten Schnittgrößen verwendet. Es wäre allerdings unrichtig, davon auszugehen, dass diese Schnittgrößen genauer seien als die aus Anker- und Umlenkkräften ermittelten Werte, treffen doch auch die Annahmen eines linear elastischen Verhaltens und einer konstanten Biegesteifigkeit nur näherungsweise zu.

### Gebrauchstauglichkeit

Bild 11.7 (e) vergleicht die auf den (Stahl-)betonträger wirkenden Schnittgrößen infolge Eigengewicht  $g$  ohne Vorspannung mit den entsprechenden Schnittgrößen infolge Eigengewicht  $g$  und Vorspannung (inklusive Sekundärschnittgrößen).

Unter Eigengewicht ohne Vorspannung wirken grosse Biegemomente auf den (Stahl-)betonträger, welche entsprechend grosse Durchbiegungen zur Folge hätten, insbesondere infolge des Kriechens des Betons. Durch die geschickte Wahl der Vorspannung verbleiben dagegen infolge Eigengewicht und Vorspannung nur sehr geringe Biegemomente, welche wesentlich kleinere Durchbiegungen verursachen, da einerseits die Beanspruchung viel kleiner ist und andererseits die infolge Vorspannung wirksame Druckkraft dazu führt, dass nirgends Zugspannungen auftreten, so dass die Steifigkeit des ungerissenen Querschnittes wirksam ist. Zu beachten ist allerdings, dass sich der Träger infolge der zentrischen Druckbeanspruchung verkürzt, insbesondere infolge des Kriechens des Betons (ausreichende Lagerwege vorsehen).

### Tragsicherheit

In Bild 11.7 (f) sind die Grenzwerte der auf das Gesamtsystem wirkenden Schnittgrößen infolge Eigengewicht  $g$  und feldweise wirkender Nutzlast  $q$  angegeben. Der Berechnung wurden Lastfaktoren von  $\gamma_g = 1.3$  (Eigengewicht ungünstig wirkend),  $\gamma_g = 0.8$  (Eigengewicht günstig wirkend) und  $\gamma_q = 1.5$  (Nutzlast) zugrunde gelegt. Die Sekundärschnittgrößen sind mit einem Faktor von 1.0 berücksichtigt worden. Grundsätzlich könnten diese im vorliegenden Fall, ein ausreichendes Rotationsvermögen vorausgesetzt, mit einem beliebigen Faktor in Rechnung gestellt werden. Da sie nichts anderes als Zwängungsmomente (und -querkräfte) sind, entspräche dieses Vorgehen lediglich einer plastischen Schnittgrössenumlagerung gemäss Kapitel 2.4.2.

Die Grenzwerte der auf das Gesamtsystem wirkenden Schnittgrößen sind dem Tragwiderstand des Gesamtsystems gegenüberzustellen. Als Ausgangsbasis kann dabei der Widerstand des vorgespannten Trägers ohne jegliche schlaffe Bewehrung dienen. Die entsprechenden Wider-

stände, abgemindert um einen Widerstandsfaktor  $\gamma_R = 1.2$ , sind ebenfalls in Bild 11.7 (f) angegeben. Bei der Berechnung des Biegewiderstandes  $M_{R(p)}$  wurde von  $N = 0$  und der Fliesszugkraft im Spannglied ausgegangen, während der Querkraftwiderstand  $V_{R(p)}$  in Übereinstimmung mit gängigen Normvorschriften aufgrund der Vorspannkraft ohne Spannkraftzuwachs ermittelt wurde

$$V_{R(p)} = -V_{pe} = P_0 \sin \alpha_p \quad (11.9)$$

Es zeigt sich, dass der Biegewiderstand des vorgespannten Trägers ohne schlaffe Bewehrung über weite Teile die entsprechenden Grenzwerte bereits abdeckt.

Die schlaffe Bewehrung kann aufgrund der Differenz zwischen den Grenzwerten der Schnittgrößen und den entsprechenden Widerständen des vorgespannten Trägers ohne schlaffe Bewehrung bemessen werden. Die Abmessungen der Betondruckzonen sind dabei natürlich aufgrund der gesamten Schnittgrößen zu ermitteln. Die Auflagerbreiten wurden bei der Ermittlung der Grenzwerte nicht berücksichtigt, so dass in diesen Bereichen nicht die maximalen Schnittgrößen abzudecken sind.

Augenfällig ist, dass der Querkraftwiderstand des vorgespannten Trägers ohne schlaffe Bewehrung im Vergleich zum Biegewiderstand einen wesentlich geringeren Anteil der entsprechenden Grenzwerte abdeckt. Dies führt daher, dass bei der Berechnung des Querkraftwiderstandes der Spannkraftzuwachs vernachlässigt wurde. Diese konservative Annahme ist meist gerechtfertigt, da stark geneigte Spannglieder, welche einen massgebenden Beitrag zum Schubwiderstand leisten, in der Regel in überdrückten Bereichen des Querschnitts verlaufen, so dass ein Spannkraftzuwachs erst im Augenblick eines mehr oder minder spröden Schubversagens auftritt.

## Diskussion

Aufgrund der einfachen Spanngliedgeometrie ist im vorliegenden Beispiel die Ermittlung der Schnittgrößen infolge Vorspannung aus den Anker- und Umlenkkräften mit wesentlich geringerem Aufwand möglich als bei der Behandlung der Vorspannung als Eigenspannungszustand. Beide Berechnungen führen in jedem Fall zum selben Ergebnis; Unterschiede ergeben sich lediglich aus den unterschiedlichen bei der Berechnung getroffenen Vereinfachungen.

Die Untersuchung der Gebrauchstauglichkeit erfolgt in der Regel, wie im vorliegenden Beispiel, aufgrund der auf den (Stahl-)betonträger einwirkenden Schnittgrößen, während die Tragsicherheit am Gesamtsystem überprüft wird. Der Grund dafür ist, dass Spannungsberechnungen aufgrund der auf den (Stahl-)betonquerschnitt einwirkenden Schnittgrößen, Tragwiderstands berechnungen hingegen am Gesamtquerschnitt einfacher und anschaulicher durchzuführen sind. Grundsätzlich besteht aber auch die Möglichkeit, beide Untersuchungen am Gesamtsystem oder am (Stahl-)betonträger durchzuführen, wobei die Vorspannung und Vordehnung konsequent gemäß Kapitel 11.3.1 zu berücksichtigen sind, siehe Bild 11.5.

Der Vergleich der massgebenden Grenzwerte der Schnittgrößen mit dem Widerstand des vorgespannten Trägers ohne jegliche schlaffe Bewehrung zeigt sehr anschaulich, in welchen Bereichen des Trägers eine zusätzliche schlaffe Bewehrung vorzusehen ist.

Die Sekundärschnittgrößen, welche mit einem Faktor 1.0 berücksichtigt wurden, haben im vorliegenden Beispiel zur Folge, dass die Momente über dem Zwischenauflager betragsmäßig reduziert und diejenigen im Feld entsprechend erhöht werden, was sich auf die Bewehrungsanordnung günstig auswirkt. Wie erwähnt, könnten die Sekundärschnittgrößen grundsätzlich mit einem beliebigen Faktor in Rechnung gestellt werden, was einer plastischen Schnittgrössenumlagerung gemäß Kapitel 2.4.2 gleichkäme.

## 11.4 Scheiben

### 11.4.1 Verallgemeinerte Spannungen und Verformungen

#### Bruchwiderstand

Der Bruchwiderstand von vorgespannten Scheibenelementen, welche durch Membrankräfte  $n_x$ ,  $n_z$  und  $n_{xz}$  beansprucht werden, kann auf die gleiche Weise ermittelt werden wie für schlaff bewehrte Elemente, Kapitel 3.3. Sämtliche in Kapitel 3.3 angegebenen Beziehungen gelten auch für vorgespannte Elemente, wenn in den Richtungen der Vorspannung jeweils  $a_s f_{sy}$  durch  $a_s f_{sy} + a_p f_{py}$  ersetzt wird, mit  $a_p$  = Querschnittsfläche des Spannstahls pro Längeneinheit.

#### Last-Verformungsverhalten

Das Last-Verformungsverhalten von orthogonal bewehrten, vorgespannten Scheibenelementen kann mit den in Kapitel 7 beschriebenen Druckfeldmodellen beschrieben werden. Insbesondere kann auch das Gerissene Scheibenmodell auf vorgespannte Scheibenelemente angewendet werden, wodurch eine realistische Behandlung der Verbundwirkung ermöglicht wird. Dabei ist zu beachten, dass in der Regel in der Richtung der Vorspannung auch eine schlaffe Bewehrung vorhanden ist, so dass für die maximalen Stahlspannungen am Riss in Funktion der mittleren Verzerrungen anstelle der Beziehungen (7.8) bis (7.10) entsprechend modifizierte Ausdrücke verwendet werden müssen, welche eine gemischte Bewehrung berücksichtigen (Kapitel 6.5).

Eine Vorspannung wirkt sich günstig auf das Tragverhalten von Scheibenelementen aus, wenn sie die von der Rissbildung bis zum Bruchzustand erforderliche Umlagerung der inneren Kräfte reduziert. Dies führt primär daher, dass sich grosse Umlagerungen der inneren Kräfte nachteilig auf die Betondruckfestigkeit auswirken. Bei reiner Schubbeanspruchung bezüglich der Bewehrungsrichtungen ist somit eine Vorspannung der stärkeren Bewehrung günstig, da diese zur Folge hat, dass die Hauptdruckrichtung (der Verzerrungen und der Betonspannungen) bereits bei der Rissbildung näher zur Richtung der starken, vorgespannten Bewehrung verläuft, wie dies auch im Bruchzustand der Fall ist.

Die Feststellung, dass sich eine Vorspannung der stärkeren Bewehrung günstig auf das Tragverhalten auswirkt, wird durch die in Bild 7.10 illustrierten Versuche PP1, PP2 und PP3 an orthogonal bewehrten Scheibenelementen untermauert. Die drei Versuchskörper wiesen eine identische schlaffe Bewehrung  $a_{sz} f_{syz}$  in z-Richtung auf. Die etwa dreimal stärkere x-Bewehrung,  $a_{sx} f_{syx} + a_{px} f_{pyx} \approx 3 a_{sz} f_{syz}$ , bestand im Versuch PP1 aus schlaffer Bewehrung ( $a_{px} f_{pyx} = 0$ ), war hingegen in den Versuchen PP2 ( $a_{px} f_{pyx} = 0.42 a_{sx} f_{syx}$ ) und PP3 ( $a_{px} f_{pyx} = 1.72 a_{sx} f_{syx}$ ) teilweise vorgespannt. Wie in Kapitel 7.5.1 beschrieben versagte der nicht vorgespannte Versuchskörper durch Fliessen der z-Bewehrung und Bruch des Betons, während die x-Bewehrung elastisch blieb. Die beiden in Richtung der starken x-Bewehrung teilweise vorgespannten Versuchskörper PP2 und PP3 versagten demgegenüber durch Fliessen aller Bewehrungen bei einer entsprechend höheren Belastung, siehe Bild 7.10.

#### 11.4.2 Systemverhalten

Wie in Kapitel 11.1.3 erläutert, ist die Interpretation der Vorspannung als Eigenspannungszustand für die Behandlung von scheibenförmigen Tragwerken wenig geeignet, da die Ermittlung des Eigenspannungszustandes aus Vorspannung im allgemeinen sehr aufwendig ist.

Die Interpretation der Vorspannung als Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte ermöglicht es hingegen, scheibenförmige Tragwerke mit Hilfe von Spannungsfeldern (Kapitel 3.4) auf sehr an-

schauliche Weise zu behandeln. Dabei betrachtet man die (Stahl-)betonscheibe ohne Vorspannbewehrung, führt zusätzlich zu den äusseren Lasten die von der Vorspannbewehrung auf die (Stahl-)betonscheibe wirkenden Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte ein und entwickelt dieser Belastung entsprechende Spannungsfelder. Die Einleitung der grossen Ankerkräfte verdient dabei besondere Aufmerksamkeit.

Um bei der Ermittlung des Tragwiderstandes einen Spannkraftzuwachs im Spannglied auszunützen zu können, müssen grundsätzlich die der Beanspruchung des Spannkabels im Bruchzustand entsprechenden Anker-, Umlenk- und Reibungskräfte eingeführt werden. Da dies, wie in Kapitel 11.1.3 erläutert, zu recht komplexen Spannungsfeldern führen kann und der damit verbundene Gewinn an rechnerischem Tragwiderstand bei ausreichend hoher Vorspannung gering ist, wird oft auf die Ausnutzung des Spannkraftzuwachses verzichtet.

## 11.5 Vorspannung ohne Verbund

### 11.5.1 Allgemeines

Als Vorspannung ohne Verbund wird eine Vorspannung bezeichnet, bei welcher das Spannglied innerhalb des Betonquerschnittes in einem Hüllrohr verläuft, welches im Gegensatz zu einer Vorspannung mit Verbund nach dem Vorspannen nicht ausinjiziert wird. Verbundkräfte zwischen dem Spannglied und dem umliegenden Beton treten somit lediglich infolge der Reibung zwischen Spannstahl und Hüllrohr auf und sind im Vergleich mit den bei einer Vorspannung mit Verbund aktivierbaren Verbundkräften in der Regel vernachlässigbar klein. Der wesentliche Unterschied zwischen einer Vorspannung mit Verbund und einer solchen ohne Verbund besteht somit darin, dass im ersten Fall die Dehnungen  $\varepsilon_p$  des Spanngliedes – infolge der impliziten Annahme eines starren Verbundes nach dem Vorspannen – gemäss der Beziehung (11.1) mit den Dehnungen  $\varepsilon_{cp}$  des Betons im selben Querschnitt verknüpft sind, während sie bei einer Vorspannung ohne Verbund von der Geometrie und dem Verformungszustand des gesamten Systems abhängen.

Die Vorspannung ohne Verbund wird häufig in Platten angewendet, wobei kleine Spanneinheiten zum Einsatz kommen. Sie findet jedoch in letzter Zeit auch für grosse Spannglieder vermehrtes Interesse, da eine solche Vorspannung bei geeigneter Tragwerkskonzeption im Bedarfsfall ausgewechselt werden kann. Eine Vorspannung ohne Verbund liegt zudem immer auch im Bauzustand vor dem Ausinjizieren des Hüllrohres vor.

### 11.5.2 Tragverhalten ohne Spannkraftzuwachs

Der Spannkraftzuwachs in einer Vorspannung ohne Verbund ist im Gebrauchszustand für übliche Verhältnisse gering. Wird er ganz vernachlässigt, so kann die Vorspannung als permanent auf das (Stahl-)betontragwerk eingebrachte, externe Kraft betrachtet werden. Bild 11.8 illustriert das Tragverhalten eines Betonträgers mit parabolischer Vorspannung ohne Verbund unter Vernachlässigung des Spannkraftzuwachses.

Ist die Vorspannung allein wirksam (gewichtsloser Träger,  $q = 0$ ), so ist die Vorspannkraft  $F_p = P_0$  in jedem Querschnitt mit der Resultierenden  $F_c = -P_0$  der Betondruckspannungen im Gleichgewicht. Die Druckresultierende im Beton verläuft konzentrisch mit dem Spannglied, und den Umlenkkräften aus Vorspannung wirken die Umlenkkräfte aus dem gekrümmten Verlauf der Druckresultierenden entgegen. Es resultieren grosse negative Krümmungen, und im Bereich der Feldmitte treten an der Trägeroberseite grosse Dehnungen auf, was Risse zur Folge hat.

## Vorspannung ohne Verbund

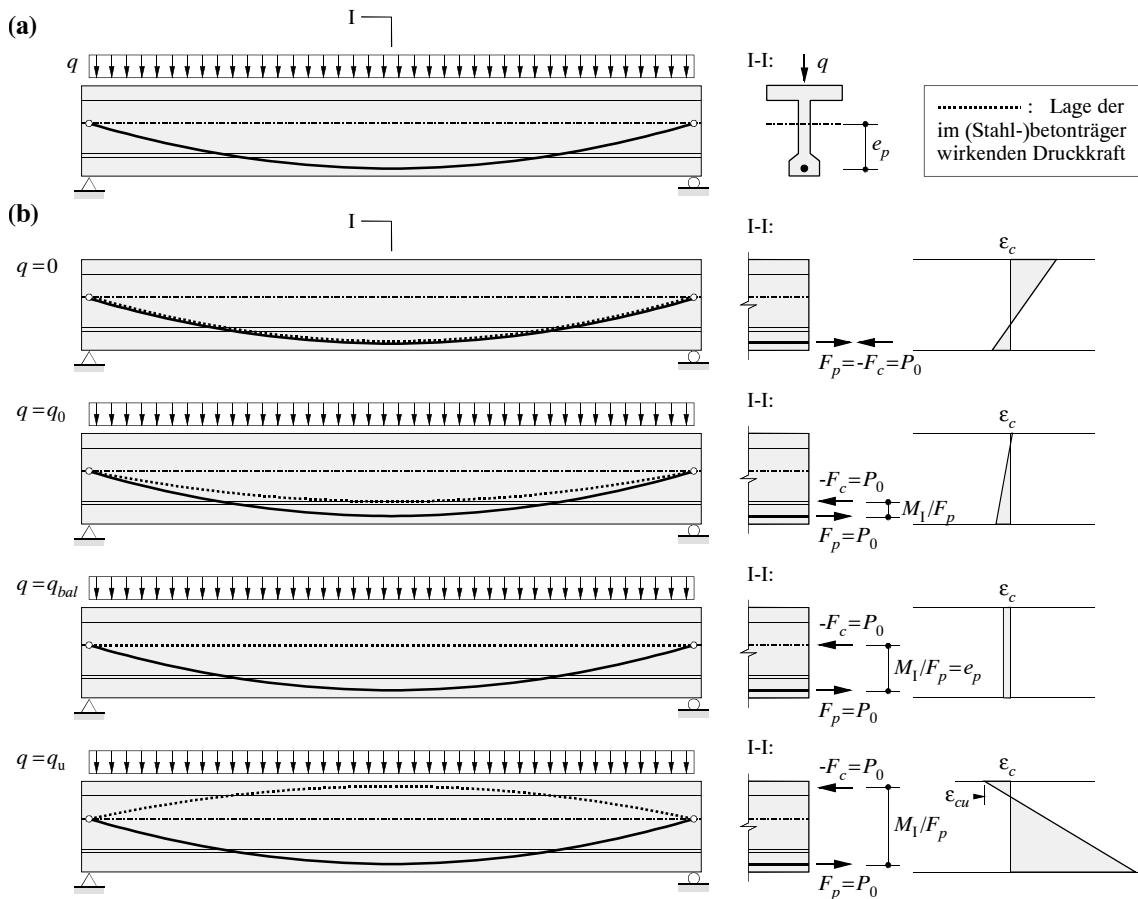


Bild 11.8 – Vorspannung ohne Verbund: (a) Bezeichnungen; (b) innere Kräfte und Dehnungen für charakteristische Beanspruchungszustände (Spannkraftzuwachs vernachlässigt).

Im Normalfall wird durch die Vorspannung zumindest ein Teil des Eigengewichtes aktiviert,  $q = q_0$ , so dass zum Zeitpunkt der Vorspannung höchstens geringe Zugspannungen resultieren und der Träger ungerissen bleibt. Die Druckresultierende im Beton verläuft etwas oberhalb des Spanngliedes, so dass die Umlenkkräfte aus dem gekrümmten Verlauf der Druckresultierenden um den Betrag  $q_0$  geringer sind als die Umlenkkräfte aus Vorspannung. Wird die Belastung erhöht, so wandert die Druckresultierende im Beton weiter nach oben. Bei einer Belastung  $q = q_{bal}$  (im Englischen “balanced load”), welche gerade von den Umlenkkräften aus Vorspannung kompensiert wird, verläuft die Druckresultierende entlang der Querschnittsachse, und im Betonträger herrscht ein zentrischer Druckspannungszustand. Wie in Kapitel 11.1.4 erwähnt, ist es günstig, wenn mit einer solchen Vorspannung die ständigen Lasten kompensiert werden, so dass auch das Kriechen des Betons lediglich eine Verkürzung des Trägers zur Folge hat.

Bei weiterer Laststeigerung wandert die Druckresultierende weiter nach oben, und die Umlenkkräfte aus dem gekrümmten Verlauf der Druckresultierenden tragen für  $q > q_{bal}$  ebenfalls zur Lastabtragung bei. Im Bruchzustand,  $q = q_u$ , greift die Druckresultierende in Feldmitte so nahe beim oberen Querschnittsrandsrand an, wie dies die Druckfestigkeit des Betons zulässt (minimale Fläche zur Aufnahme der Druckresultierenden  $F_c = -P_0$ ).

Bei fehlender Membranstützung hat eine Berücksichtigung der Durchbiegungen bei der Berechnung der Umlenkkräfte aus Vorspannung unter Vernachlässigung des Spannkraftzuwachses keinen Einfluss auf das Tragverhalten. Die Durchbiegungen haben wohl eine grössere Krüm-

mung des Spanngliedes und somit zusätzliche Umlenkkräfte zur Folge; diese werden jedoch von der infolge der Durchbiegungen resultierenden Änderung der Umlenkkräfte aus dem gekrümmten Verlauf der Druckresultierenden gerade kompensiert, siehe auch Kapitel 4.7.1.

### 11.5.3 Spannkraftzuwachs im Bruchzustand und Bruchwiderstand

Vernachlässigt man die Reibungskräfte zwischen Vorspannung und (Stahl-)betontragwerk, so ergibt sich der Spannkraftzuwachs eines Spanngliedes mit der ursprünglichen Länge  $l_0$  aus der Verlängerung  $\Delta l$  des Spanngliedes zwischen den Spanngliedverankerungen zu

$$\Delta F_p = \frac{\Delta l}{l_0} E_p A_p \leq A_p f_{py} - P_0 \quad (11.10)$$

Die Spanngliedverlängerung  $\Delta l$  hängt von den geometrischen Verhältnissen und vom Verhalten des Gesamtsystems ab.

Grundsätzlich kann die Spanngliedverlängerung aus der Integration der zwischen den Spanngliedverankerungen auftretenden Dehnungen  $\varepsilon_{cp}$  des (Stahl-)betonträgers im Schwerpunkt des Spanngliedes ermittelt werden [28]. Dabei ist im allgemeinen ein iteratives Vorgehen erforderlich, da die Dehnungen  $\varepsilon_{cp}$  des (Stahl-)betonträgers vom zunächst unbekannten Spannkraftzuwachs abhängen; das beschriebene Vorgehen ist daher recht aufwendig. Tragwerke mit Vorspannung ohne Verbund weisen zudem im Bruchzustand oftmals sehr grosse Verformungen auf, so dass neuere Normvorschriften von einem nominellen Bruchzustand ausgehen, welcher durch das Erreichen einer maximalen Durchbiegung  $w_u$  definiert wird (beispielsweise  $w_u = l/40$  gemäss [96], mit  $l$  = Spannweite). Die Annahme einer nominalen Durchbiegung im Bruchzustand ermöglicht es, die Spanngliedverlängerung  $\Delta l$  aus geometrischen Überlegungen relativ einfach zu bestimmen. So erhält man beispielsweise für eine dreiecksförmige Spanngliedführung, wenn keine Membranstützung vorliegt und Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden

$$\frac{\Delta l}{l_0} = 4 \frac{a_p w_u}{l_0^2} \quad (11.11)$$

wobei  $a_p$  die Exzentrizität des Spanngliedes in Feldmitte bezüglich der neutralen Achse bezeichnet; für übliche Bewehrungsgehalte gilt näherungsweise  $a_p \approx 0.75 d_p$ , mit  $d_p$  = statische Höhe der Vorspannbewehrung. Für eine weiterführende Betrachtung wird auf die Arbeit von Ritz [88] verwiesen, in welcher insbesondere der Einfluss einer Membranstützung eingehend diskutiert wird, siehe auch Kapitel 4.7.1 und Bild 4.24.

Der Tragsicherheitsnachweis kann bei einer Vorspannung ohne Verbund auf die gleiche Weise geführt werden wie bei einer Vorspannung mit Verbund. Dabei werden die Grenzwerte der Schnittgrößen am Gesamtsystem (welche infolge Vorspannung lediglich die Sekundärschnittgrößen beinhalten) dem Widerstand des Gesamtquerschnittes inklusive Vorspannbewehrung gegenübergestellt. Dieser kann aufgrund einer Querschnittsanalyse ermittelt werden, wobei in der Vorspannbewehrung eine konstante Kraft  $P_0 + \Delta F_p$  anzusetzen ist.

### 11.5.4 Platten mit Vorspannung ohne Verbund

Platten sind, wie einleitend erwähnt, heute die verbreitetste Anwendung der Vorspannung ohne Verbund. Dabei kommen in der Regel Einzellitzen zum Einsatz, welche in einem gefetteten Kunststoffhüllrohr verlaufen und nur wenig Platz beanspruchen. Dadurch sind vor allem in dünnen Platten wesentlich grössere Spanngliedexzentrizitäten möglich als bei der Verwendung von grösseren Kabeleinheiten.

Der Bruchwiderstand von Platten mit einer Vorspannung ohne Verbund kann grundsätzlich auf die gleiche Weise untersucht werden wie für schlaff bewehrte Platten, siehe Kapitel 4, wobei der Biegewiderstand gemäss Kapitel 11.5.3 zu ermitteln ist. Eine Membranstützung (Kapitel 4.7.1) bewirkt, dass sich bei grösseren Durchbiegungen eine Membranzugkraft aufbaut und ein grösserer Spannkraftzuwachs resultiert. Dieser wird bei der Berechnung des Bruchwiderstandes üblicherweise berücksichtigt, während die günstige Wirkung der eigentlichen Membranwirkung wie bei schlaff bewehrten Platten vernachlässigt wird. Für eine weiterführende Behandlung von Platten mit Vorspannung ohne Verbund wird auf die Literatur verwiesen [88,89].

## 11.6 Externe Vorspannung

### 11.6.1 Allgemeines

Die externe Vorspannung ist eine spezielle Ausführungsform einer Vorspannung ohne Verbund, bei welcher das Spannglied ausserhalb des Betonquerschnittes verläuft und nur an einzelnen Stellen (Verankerungen und Deviatoren) mit diesem in Kontakt ist. Eine solche Vorspannung kann gut überwacht werden und findet daher in letzter Zeit, wie die Vorspannung ohne Verbund generell, vermehrtes Interesse.

Bezüglich des Tragverhaltens ergeben sich nur geringfügige Unterschiede zu einer innerhalb des Betonquerschnittes verlaufenden Vorspannung ohne Verbund. Bei den Deviatoren werden jedoch grosse Umlenkkräfte in den (Stahl-)betonträger eingeleitet, was eine sorgfältige konstruktive Ausbildung dieser Bereiche erfordert. Die Spannkraft ist zwischen den Verankerungen, abgesehen von Reibungsverlusten bei den Deviatoren, üblicherweise konstant; sollen bei den Deviatoren Differenzkräfte in das Spannglied eingeleitet werden, so ist eine entsprechende konstruktive Ausbildung erforderlich [26]. Wird darauf verzichtet, so folgt der Spannkraftzuwachs wie in Kapitel 11.5.3 erläutert aus der Verlängerung des Spanngliedes zwischen den Verankerungen, welche aus geometrischen Überlegungen ermittelt werden kann.

### 11.6.2 Besonderheiten der Segmentbauweise

Die Segmentbauweise ist ein wichtiges Anwendungsgebiet der externen Vorspannung. Dabei werden grosse vorfabrizierte Segmente versetzt und zusammengespannt. In der Regel wird keine die Fugen überbrückende schlaffe Bewehrung angeordnet, so dass der Vorspannung die Aufgabe zukommt, Zugspannungen in der Fuge zu überdrücken. Da es unmöglich ist, schiefe Hauptzugspannungen (welche aus Querkräften resultieren) mit einer Vorspannung in Trägerlängsrichtung zu überdrücken, werden die Fugen üblicherweise mit einer (Makro-)Verzahnung ausgebildet.

Die Segmentfugen sind in solchen Tragwerken eine eindeutige Schwachstelle, und bereits unter Gebrauchslasten sind die Verformungen zu einem grossen Teil in den Fugen lokalisiert (die Rotationen in den Fugen sind grösser als das Integral der Krümmungen über die Segmentlänge). Die Rotationen der Segmentfugen bedingen lokal grosse Stauchungen der Betondruckzone, und deren konstruktive Durchbildung verdient daher besondere Beachtung.

Problematisch ist die Übertragung von Querkräften über klaffende Segmentfugen in Bereichen, in welchen grosse Biegemomente auftreten. Bei Durchlaufträgern in Segmentbauweise ist aus diesem Grund im Stützenbereich eine sehr starke Vorspannung erforderlich. Die naheliegendste Lösung dieses Problems besteht darin, solche Fälle mit der Wahl des statischen Systems (einfache Balken) zu vermeiden, wie dies in Nordamerika üblich ist.

## 12 Stahlfaserbeton

Peter Marti

### 12.1 Einleitung

In der Schweiz wird zunehmend Stahlfaserbeton angewendet, hauptsächlich in der Form von Spritzbeton für Sicherungsmassnahmen im Tief- und Untertagebau sowie für Instandsetzungsmassnahmen von Betontragwerken. Um die sachgerechte Anwendung von Stahlfaserbeton zu fördern und neue Anwendungsbereiche zu erschliessen, wurde vor kurzem die Empfehlung SIA 162/6 für Stahlfaserbeton erarbeitet [97]. Diese Empfehlung geht bezüglich Berechnung und Be-messung sowie der Bestimmung der Rechenwerte neue Wege. Sie stützt sich auf Belastungsver-suche und theoretische Überlegungen, welche zu einer Harmonisierung der Versuchsmethoden von Biegezug- und Plattenversuchen führten [66]. Im folgenden werden die wichtigsten Aspekte dieser Arbeiten zusammengefasst. Auf eine Wiedergabe der in der Empfehlung SIA 162/6 [97] enthaltenen Aussagen zu Materialtechnologie, Qualitätssicherung, Ausschreibung, Angebot, Ausführung und Abrechnung wird hier verzichtet.

### 12.2 Biegeverhalten

#### 12.2.1 Einachsiger Zug

Wir betrachten gemäss Bild 12.1 (a) eine Einheitsfläche eines Risses, der von räumlich beliebig verteilten Stahlfasern gekreuzt wird. Die Stahlfasern sollen gerade sein und einen kreisrunden Querschnitt haben. Ihre Länge wird mit  $l_f$  bezeichnet, ihr Durchmesser mit  $d_f$  und ihr auf das Volumen bezogener Gehalt im Festbeton mit  $\rho_f$ .

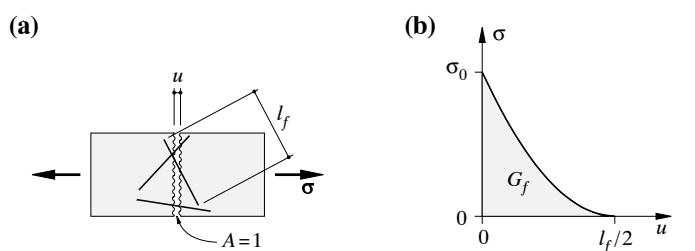


Bild 12.1 – Zugbeanspruchung: (a) Faserauszug; (b) Entfestigung.

Wegen der räumlich beliebigen Verteilung ist der wirksame Fasergehalt gleich  $\rho_f/2$ . Nimmt man an, dass unter einer monoton zunehmenden Rissbreite  $u$  alle Fasern sukzessive auf ihrer kürzeren Einbettungslänge ausgezogen werden, und setzt man eine konstante Verbundschubspannung

$$\tau_b = 2 f_{ct} = 0.6 f_c^{2/3} \quad (12.1)$$

voraus ( $f_c$  = Zylinderdruckfestigkeit und  $f_{ct}$  = Zugfestigkeit des Betons in MPa), so ergibt sich

der parabolische Spannungsabfall

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{2u}{l_f}\right)^2 \quad (12.2)$$

vom Anfangswert

$$\sigma_0 = \rho_f \left(\frac{l_f}{d_f}\right) f_{ct} \quad (12.3)$$

für  $u = 0$  auf null für  $u = l_f/2$ , siehe Bild 12.1 (b). Die Beziehung (12.2) beschreibt ein starr-entfestigend plastisches Verhalten. Das Integral

$$G_f = \int_0^{l_f/2} \sigma du = \frac{\sigma_0 l_f}{6} \quad (12.4)$$

ist gleich der spezifischen Bruchenergie.

Für übliche Fasergehalte und -geometrien übersteigt  $G_f$  den entsprechenden Wert  $G_F$  für unbewehrten Beton, der gemäss (8.11) mit  $f_{ct} d_{max}^{1/4}/80$  angenähert werden kann ( $d_{max}$  = maximaler Korndurchmesser in mm), um ein Vielfaches. Beispielsweise resultiert für  $\rho_f = 0.5\%$   $l_f = 60d_f = 30$  mm und  $d_{max} = 8$  mm ein Verhältnis von 71.

Die grosse Bruchenergie entspricht einem im Vergleich zu unbewehrtem Beton viel zäheren Verhalten des Stahlfaserbetons. Allerdings lässt sich aus verarbeitungstechnischen Gründen in der Regel keine die Rissverteilung sichernde Mindestbewehrung erreichen. In der Tat müsste dafür gemäss (12.3) das Produkt aus Fasergehalt  $\rho_f$  und Formfaktor  $l_f/d_f$  den Wert eins übersteigen, was z.B. für  $l_f = 60d_f$  einen Stahlfasergehalt  $C_f$  von  $7850/60 = 131$  kg pro m<sup>3</sup> Beton bedingte (Dichte von Stahl = 7850 kg m<sup>-3</sup>). Die in der Praxis üblichen Fasergehalte  $C_f$  liegen demgegenüber bei etwa 20 bis 100 kg m<sup>-3</sup>, mit typischen Werten um 40 kg m<sup>-3</sup>. Aus diesem Grund ist im allgemeinen nach der Rissbildung ein entfestigendes Verhalten zu erwarten. Es ergibt sich eine Lokalisierung der Verformungen auf wenige Risse, die einen Bruchmechanismus gerade ermöglichen.

Die Faserlänge  $l_f$  ist in der Regel kleiner als die sogenannte kritische Faserlänge  $d_f f_f / (2\tau_b)$ , wobei  $f_f$  die Zugfestigkeit der Fasern bezeichnet. Die Fasern werden deshalb im allgemeinen aus dem Beton herausgezogen. Ausser diesem erwünschten Verhalten kann bei langen und fest eingebetteten Fasern sowie bei hochfestem Beton auch ein Zerreissen der Fasern auftreten.

### 12.2.2 Einachsige Biegung von Rechteckquerschnitten

Vernachlässigt man gemäss Bild 12.2 (a) die kleine Dicke der Betondruckzone, so folgen mit der im Bild 12.2 (b) dargestellten Spannungsverteilung und unter Verwendung von (12.2) die Beziehungen

$$m = \frac{\sigma_0 h^2 (6 - 8\xi + 3\xi^2)}{12} \quad (12.5)$$

für  $0 \leq \xi = 2\Theta h/l_f \leq 1$  und

$$m = \frac{\sigma_0 h^2}{12\xi^2} \quad (12.6)$$

für  $\xi > 1$ , siehe Bild 12.2 (c). Für die Dissipationsarbeit pro Einheitslänge des Biegegelenkes erhält man damit unter Berücksichtigung von (12.4)

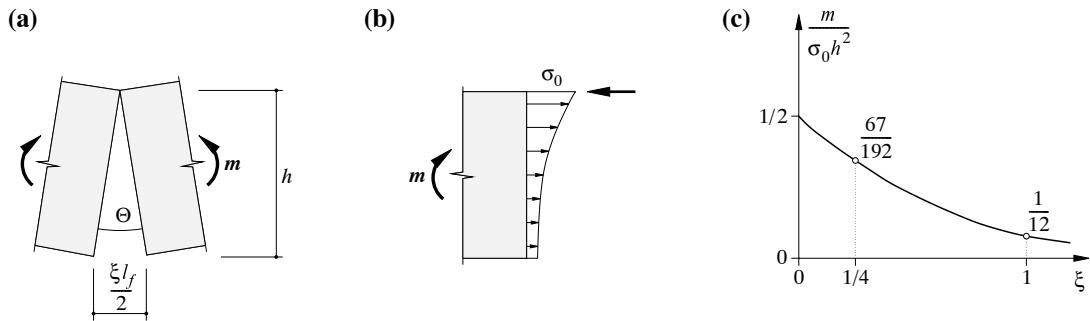


Bild 12.2 – Biegung: (a) Plastisches Gelenk; (b) Spannungsverteilung; (c) Entfestigung.

$$\int_0^\theta m d\Theta = \int_0^\xi \frac{ml_f}{2h} d\xi = \frac{G_f h(6\xi - 4\xi^2 + \xi^3)}{4} \quad (12.7)$$

für  $0 \leq \xi \leq 1$  und

$$\int_0^\theta m d\Theta = \int_0^\xi \frac{ml_f}{2h} d\xi = G_f h \left(1 - \frac{1}{4\xi}\right) \quad (12.8)$$

für  $\xi > 1$ . Für  $\xi = 1$  sind sämtliche Fasern am unteren Querschnittsrand ausgezogen, und gemäss (12.7) und (12.8) sind 75% der Bruchenergie dissipiert.

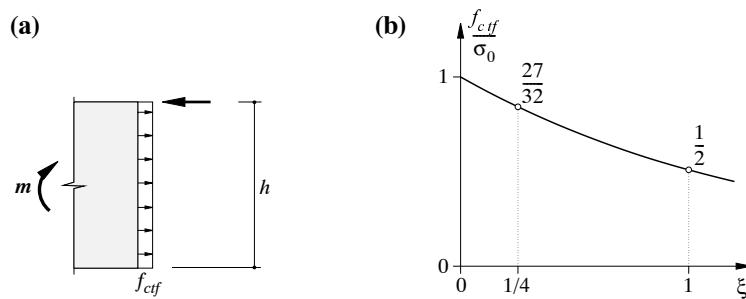
Im folgenden wird eine vereinfachte rechteckförmige Spannungsverteilung gemäss Bild 12.3 (a) betrachtet. Dabei soll die sogenannte wirksame Zugfestigkeit  $f_{ctf}$  als Mittelwert aus der bis zum jeweiligen Wert  $\xi$  dissipierten Arbeit berechnet werden, mithin

$$f_{ctf} = \frac{\sigma_0(6 - 4\xi + \xi^2)}{6} \quad (12.9)$$

für  $0 \leq \xi \leq 1$  und

$$f_{ctf} = \frac{\sigma_0(4\xi - 1)}{6\xi^2} \quad (12.10)$$

für  $\xi > 1$ , siehe Bild 12.3 (b).

Bild 12.3 – Wirksame Zugfestigkeit: (a) Spannungsverteilung; (b) Abhängigkeit von  $\xi$ .

### 12.2.3 Belastungsversuche

#### Rotationen

Bild 12.4 illustriert das Prinzip der üblichen Biegezug- und Quadratplattenversuche sowie eines neu eingeführten Kreisplattenversuchs [66]. Bild 12.5 zeigt typische Bruchbilder von Plattenversuchen.

Beim Biegezugversuch ergibt sich im allgemeinen ein Riss zwischen den Einzellasten. Ist  $y$  gleich dem Abstand dieses Risses vom näheren Auflager, so beträgt die Rotation

$$\Theta = \frac{\xi l_f}{2h} = \frac{2w_m}{y} \quad (12.11)$$

wobei  $w_m = 3yw/l$  die Durchbiegung in Balkenmitte bezeichnet ( $w$  = mittlere Durchbiegung unter den Lastangriffspunkten).

Bilden sich beim Quadratplattenversuch wie in Bild 12.4 (b) dargestellt acht Risse, so gilt

$$\Theta = \frac{2w\sqrt{2-\sqrt{2}}}{b-a\sqrt{2}} \quad (12.12)$$

und im Fall von vier diagonalen Rissen ist

$$\Theta = \frac{2w\sqrt{2}}{b-a} \quad (12.13)$$

Für den Kreisplattenversuch gemäss Bild 12.4 (c) folgt

$$\Theta = \frac{4w \sin \frac{\pi}{n}}{b \cos \left( \frac{\pi}{n} \right) - a} \quad (12.14)$$

wobei  $n$  die Anzahl radialer Risse bezeichnet.

#### Bestimmung von Rechenwerten

Ermittelt man  $f_{ctf}$  für  $\xi_1 = 1/4$ , so folgen wegen  $\Theta = l_f/(8h)$  unter Berücksichtigung von (12.11) bis (12.14) die in Tabelle 12.1 eingetragenen Durchbiegungswerte  $w_1$ . Aus den zugehörigen Arbeiten  $W_1$  erhält man

$$f_{ctf} = \frac{16W_1}{A_r l_f} \quad (12.15)$$

da  $f_{ctf} A_r (h/2) l_f / (8h) = W_1$  sein muss.  $A_r$  steht für die gesamte Rissfläche.

Da gemäss (12.7) und (12.8) für  $\xi_2 = 1$  drei Viertel der Bruchenergie dissipiert sind, lässt sich  $G_f$  aus den zu  $w_2 = 4w_1$  gehörigen Arbeiten  $W_2$  wie folgt bestimmen:

$$G_f = \frac{4W_2}{3A_r} \quad (12.16)$$

Insgesamt ergeben sich die in Tabelle 12.1 zusammengefassten Beziehungen.

Wählt man für den Biegezugversuch  $l = 9h/2$  sowie  $b = h$ , für den Quadratplattenversuch  $b = 5h$  sowie  $c = h/2$ , und für den Kreisplattenversuch  $b = 7h$  sowie  $c = h/2$ , so ergeben sich die in Tabelle 2 zusammengefassten Beziehungen, wenn noch zur Berücksichtigung von Streuungen in  $f_{ctf}$  ein Abminderungsfaktor von  $3/4$  eingeführt und der Einfluss der Rissanzahl  $n$  linear

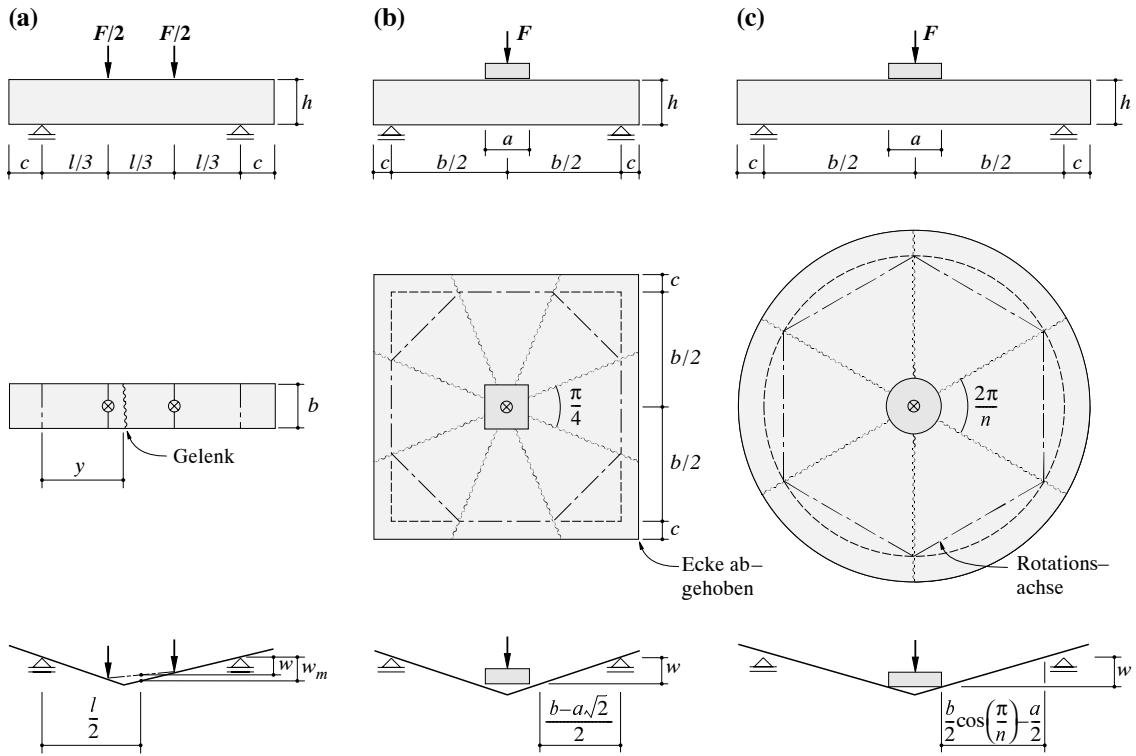


Bild 12.4 – Belastungsversuche: (a) Biegezugversuch; (b) Quadratplattenversuch; (c) Kreisplattenversuch.

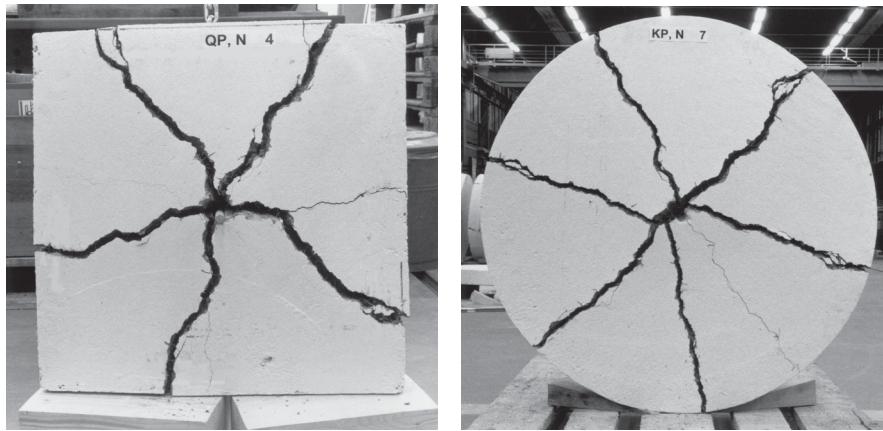


Bild 12.5 – Typische Bruchbilder: (a) Quadratplatte,  $n = 5$ ; (b) Kreisplatte,  $n = 6$ .

approximiert wird [97]. Die Beziehungen für  $W_1$ ,  $w_2$  und  $W_2$  können weiterhin der Tabelle 12.1 entnommen werden.

Die Empfehlung SIA 162/6 [97] sieht vor, dass  $f_{ctf}$  und  $G_f$  in der Regel als Mittelwerte aus mindestens 15 Biegezugversuchen bzw. mindestens drei Quadratplatten- oder Kreisplattenversuchen ermittelt werden. Die Ermittlung von  $G_f$  aus Biegezugversuchen ist nicht vorgesehen. Für die weggesteuerten Versuche wird eine Deformationsgeschwindigkeit  $d\xi/dt$  von etwa

Biegeverhalten

$1/(1000 \text{ s})$  vorgeschrieben. Für die Prüfkörperdicke wird empfohlen,  $h$  etwa gleich  $3l_f$  zu wählen (z.B.  $h = 100 \text{ mm}$  für  $20 \text{ mm} \leq l_f \leq 45 \text{ mm}$  ).

Versuch	Biegezugversuch	Quadratplattenversuch		Kreisplattenversuch
		$n = 8$	$n = 4$	
$w_1$	$\frac{l_f y}{16h}$	$\frac{(b-a\sqrt{2})l_f}{16\sqrt{2-\sqrt{2}}h}$	$\frac{(b-a)l_f}{16\sqrt{2}h}$	$\frac{[b\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)-a]l_f}{32\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)h}$
$W_1$	$\frac{l}{3y} \int_0^{w_1} F dw$	$\int_0^{w_1} F dw$	$\int_0^{w_1} F dw$	$\int_0^{w_1} F dw$
$f_{ctf}$	$\frac{16W_1}{bhl_f}$	$\frac{2\sqrt{2+\sqrt{2}}W_1}{(b+2c)hl_f}$	$\frac{4\sqrt{2}W_1}{(b+2c)hl_f}$	$\frac{32W_1}{n(b+2c)hl_f}$
$w_2$	$4w_1$	$4w_1$	$4w_1$	$4w_1$
$W_2$	$\frac{l}{3y} \int_0^{w_2} F dw$	$\int_0^{w_2} F dw$	$\int_0^{w_2} F dw$	$\int_0^{w_2} F dw$
$G_f$	$\frac{4W_2}{3bh}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}W_2}{6(b+2c)h}$	$\frac{\sqrt{2}W_2}{3(b+2c)h}$	$\frac{8W_2}{3n(b+2c)h}$

Tabelle 12.1 – Allgemeine Ermittlung von  $f_{ctf}$  und  $G_f$ .

Versuch	Biegezugversuch	Quadratplattenversuch	Kreisplattenversuch
Anzahl Versuche	$\geq 15$	$\geq 3$	$\geq 3$
$w_1$	$\frac{l_f y}{16h}$	$(0.03n + 0.06)l_f$	$(0.07n - 0.10)l_f$
$f_{ctf}$	$\frac{12W_1}{h^2 l_f}$	$(0.95 - 0.06n) \frac{W_1}{h^2 l_f}$	$\frac{3W_1}{nh^2 l_f}$
$G_f$	–	$(0.107 - 0.007n) \frac{W_2}{h^2}$	$\frac{W_2}{3nh^2}$

Tabelle 12.2 – Bestimmung der Rechenwerte nach [97]. N.B.: Für  $W_1$ ,  $w_2$  und  $W_2$  siehe Tabelle 12.1.

## 12.3 Vergleich mit Versuchsergebnissen

### 12.3.1 Versuche

In [66] wird über 20 Biegezug-, 12 Quadratplatten- und 24 Kreisplattenversuche berichtet. Die Prüfkörperabmessungen gehen aus Tabelle 12.3 hervor, und Tabelle 12.4 fasst die Eigenschaften der vier verwendeten Betonmischungen zusammen. Mit jeder Mischung wurden fünf Biegezug-(R) und sechs Kreisplattenversuche (C) durchgeführt. Mischung 1 wurde zusätzlich für 12 Quadratplattenversuche (S) verwendet. Für alle Versuche kamen die in Bild 12.6 dargestellten Stahlfasern zum Einsatz.

Versuchstyp	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>h</i>	<i>l</i>
R ... Biegezug	–	100	75	100	450
S ... Quadratplatten	100	520	40	100	–
C ... Kreisplatten	120	680	60	100	–

Tabelle 12.3 – Abmessungen der Prüfkörper in mm.

Mischung	1	2	3	4	[...]
Zuschlagstoff	natürlich und gebrochen		gebrochen	–	
<i>d</i> <sub>max</sub>	16		8	mm	
Zement	CEM I, 42.5		CEM II, 52.5	–	
Zementgehalt	420		425	kg m <sup>-3</sup>	
<i>f</i> <sub>c</sub>	35		45	MPa	
Faserdosierung	40	90	40	50	kg m <sup>-3</sup>
Klassifikation [97]	SFB		SFSB	–	

Tabelle 12.4 – Eigenschaften der Betonmischungen.

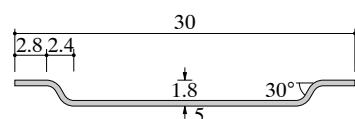


Bild 12.6 – Fasergeometrie. Abmessungen in mm.

Die Bilder 12.7 bis 12.9 fassen die Ergebnisse der verschiedenen Versuche zusammen. In den unteren Diagrammen dieser Bilder werden jeweils die Arbeiten

$$W = \int_0^w F dw \quad (12.17)$$

den Durchbiegungen *w* gegenübergestellt.

### Vergleich mit Versuchsergebnissen

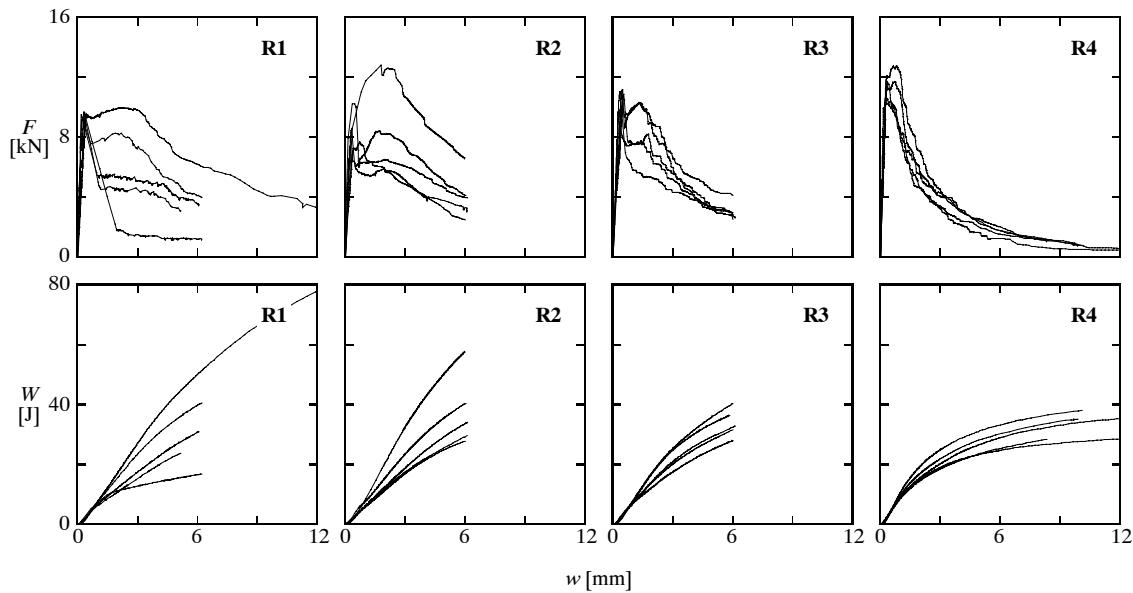


Bild 12.7 – Ergebnisse der Biegezugversuche.

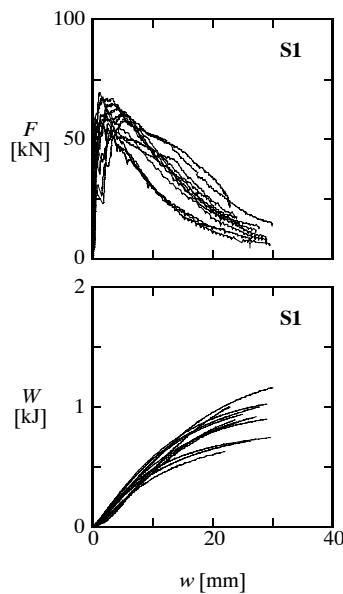


Bild 12.8 – Ergebnisse der Quadratplattenversuche.

#### 12.3.2 Vergleich mit Theorie

Bild 12.10 vergleicht theoretische Kurven gemäss Bild 12.3 (b) mit entsprechend ausgewerteten Versuchsergebnissen, d.h. die Ausdrücke für  $f_{clf}$  in Tabelle 12.1 wurden statt mit  $W_1$  und  $w_1$  mit  $W$  gemäss (12.17) für variable  $w$  angewendet. Für die Spritzbetonmischung 4 wurde für die theoretischen Kurven ein Faserverlust von 20% berücksichtigt.

Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuchen ist generell befriedigend. Allerdings zeigt das Beispiel der Mischung 2, dass für hohe Fasergehalte die Faserwirksamkeit theoretisch stark überschätzt werden kann. Deshalb sollte man sich unbedingt an die in Kapitel 12.2.3 beschriebene experimentelle Ermittlung von Rechenwerten halten.

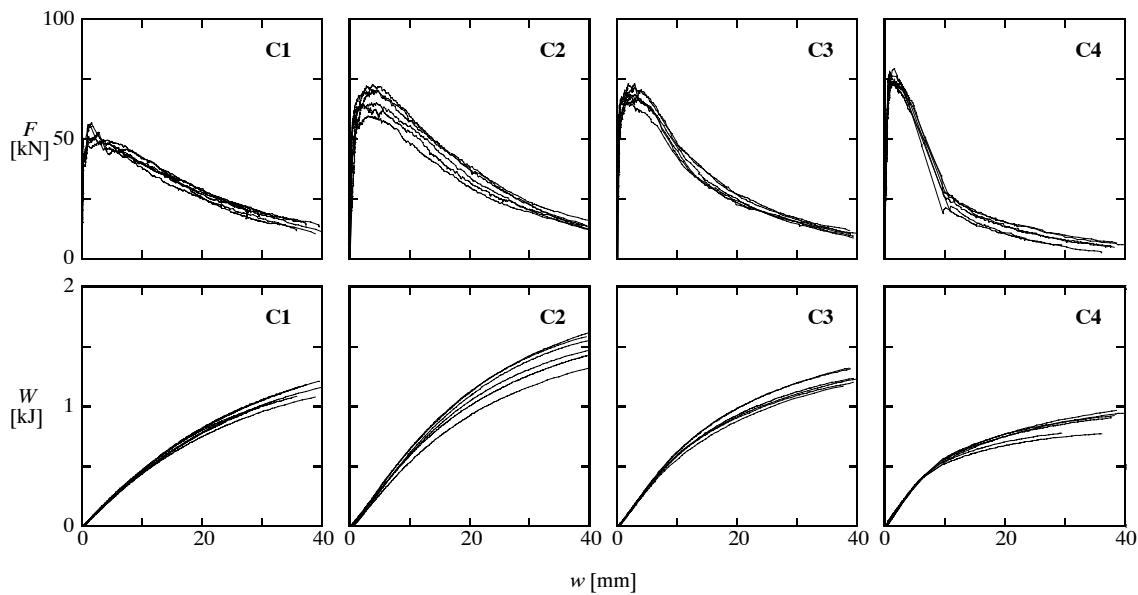
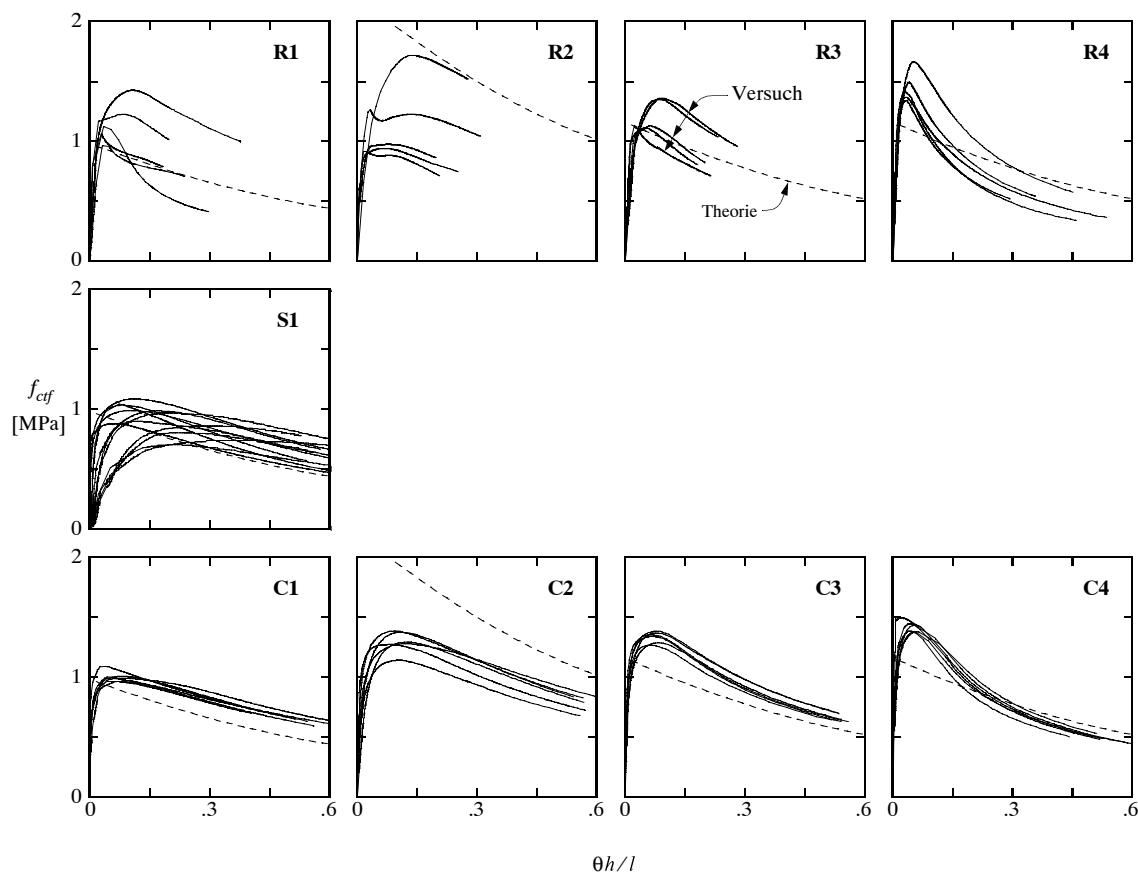


Bild 12.9 – Ergebnisse der Kreisplattenversuche.

Bild 12.10 – Vergleich von theoretisch und experimentell ermittelten Mittelwerten von  $f_{ctf}$ .

Mischung 4 zeigte eine dramatische Entfestigung. Dies ist darauf zurückzuführen, dass, wie beobachtet, Fasern teilweise zerrissen wurden. Die unten eingeführte Bedingung (12.19) schliesst solche Baustoffe von der Anwendung aus, wenn ein Nachweis der Tragfähigkeit oder der Ge-

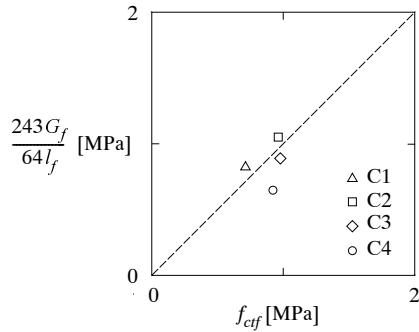


Bild 12.11 – Vergleich von Rechenwerten [97] aus Kreisplattenversuchen [66].

brauchstauglichkeit erforderlich ist.

Setzt man den aus (12.9) für  $\xi_1 = 1/4$  resultierenden Wert  $\sigma_0$  in (12.4) ein, und berücksichtigt man den nach [97] in  $f_{ctf}$  eingerechneten Abminderungsfaktor von 3/4, so folgt

$$G_f = \frac{64f_{ctf} l_f}{243} \quad (12.18)$$

$G_f$  kann demgemäß auch aus  $W_1$  bestimmt werden und umgekehrt  $f_{ctf}$  aus  $W_2$ . Bild 12.11 zeigt entsprechende Vergleiche der nach [97] bestimmten Rechenwerte mit den aus (12.17) resultierenden Werten für die in [66] beschriebenen Versuche an Kreisplatten. Ausser für die Versuchsreihe C4 mit gebrochenen Zuschlagstoffen zeigt sich eine gute Übereinstimmung. Für die erwähnte Serie ergab sich eine verhältnismässig drastische Entfestigung mit einem entsprechend kleinen Verhältnis  $W_2/W_1$ .

Wird  $G_f$  statt experimentell über (12.16) rein theoretisch über (12.1), (12.3) und (12.4) ermittelt, so kann die Wirksamkeit der Fasern für hohe Fasergehalte wesentlich überschätzt werden. Für typische Fasergehalte in der Grössenordnung von  $40 \text{ kg m}^{-3}$  resultieren dagegen vernünftige Abschätzungen [66].

## 12.4 Praktische Anwendung

### 12.4.1 Allgemeines

Im allgemeinen sind ein Nachweis der Tragfähigkeit und ein Nachweis der Gebrauchstauglichkeit zu erbringen. Auf einen oder beide Nachweise darf verzichtet werden, wenn gezeigt wird, dass die entsprechenden Anforderungen von untergeordneter Bedeutung sind oder durch konstruktive oder ausführungstechnische Massnahmen erreicht werden können.

Um Baustoffe mit einer zu drastischen Entfestigung (z.B. Mischung 4 der in Kapitel 12.3 diskutierten Versuche) auszuschliessen, soll, wenn ein Nachweis der Tragfähigkeit oder der Gebrauchstauglichkeit erforderlich ist, die Bedingung

$$2F_1 w_1 \geq W_1 \quad (12.19)$$

erfüllt sein, siehe Bild 12.12. Zudem soll in der Regel die Bedingung

$$G_f \geq 4 \text{ kNm}^{-1} \quad (12.20)$$

eingehalten werden.

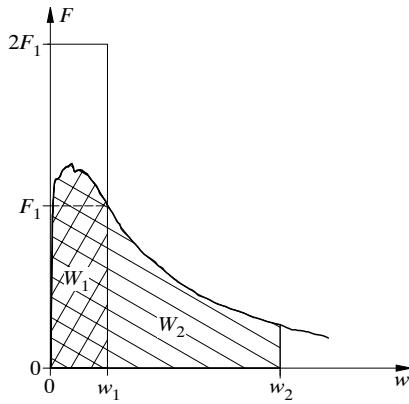


Bild 12.12 – Belastungs-Durchbiegungs-Diagramm aus Belastungsversuch.

Analog zur Bedingung (12.20) könnten mit weiteren Bedingungen verschiedene Qualitätsklassen für Stahlfaserbeton eingeführt werden. Die Empfehlung SIA 162/6 [97] hat darauf verzichtet, mit der Erweiterung des Erfahrungsschatzes ist eine solche Klassenbildung jedoch gewiss bald sinnvoll.

#### 12.4.2 Nachweis der Tragfähigkeit

Die Schnittgrößen können in Anlehnung an die Elastizitätstheorie oder aufgrund von Gleichgewichtsbetrachtungen ermittelt werden. Bei ständiger Beanspruchung und erhöhtem Gefährdungspotential ist im allgemeinen ein Verformungsnachweis durchzuführen, wobei dem entfestigenden Verhalten des Stahlfaserbetons besondere Beachtung zu schenken ist.

Die Bemessung kann grundsätzlich nach SIA 162 [96] mit einem Widerstandsbeiwert von 1.2 erfolgen. Für Biegung und Biegung mit Normalkraft darf die in Bild 12.13 dargestellte Spannungsverteilung angenommen werden, wobei hier  $f_c$  den Rechenwert der Betondruckfestigkeit gemäss SIA 162 [96] bezeichnet. Bei der Bemessung für Querkraft ist eine Erhöhung des Tragwiderstandes über den gemäss [96] sich ergebenden Wert hinaus zulässig, wenn sie durch Versuche nachgewiesen ist.

Sofern die Bauteildicke  $t$  die Prüfkörperdicke  $h$  übersteigt, sollte  $f_{ctf}$  vorderhand mit einem Faktor  $(h/t)^{1/2}$  abgemindert werden; weitere Erkenntnisse dürften zu einer Lockerung dieser konservativen, an die lineare Bruchmechanik angelehnten Regelung führen.

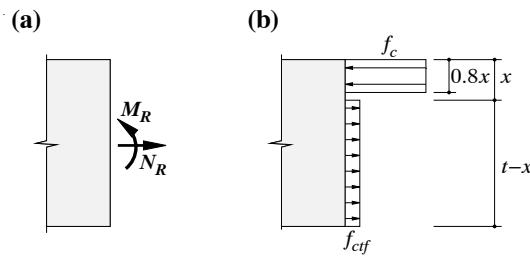


Bild 12.13 – Schnittgrößen und Spannungsverteilung für Biegung und Normalkraft (Bruchniveau).

### 12.4.3 Nachweis der Gebrauchstauglichkeit

Die Schnittgrößen können unter Annahme eines elastischen Verhaltens des Tragwerks ermittelt werden.

Sofern keine genaueren Untersuchungen angestellt werden, sollten die rechnerischen Zugspannungen im Gebrauchsstand unter zentrischer Zugbeanspruchung den Wert  $2f_{ctf}/3$  nicht überschreiten. Bei reiner Biegebeanspruchung sind Randzugspannungen von  $2f_{ctf}$  zulässig.

Die zulässige Spannung von  $2f_{ctf}/3$  entspricht unter Berücksichtigung des aus (12.9) für  $\xi_1 = 1/4$  resultierenden Faktors  $27/32$  einem Sicherheitsfaktor von  $16/9 \approx 1.8$  gegen das Erreichen des (um 25% abgeminderten) Widerstandes  $\sigma_0$ . Die zulässige Biegerandspannung von  $2f_{ctf}$  ergibt sich aus  $2f_{ctf}/3$  unter Berücksichtigung des aus dem Verhältnis der plastischen und elastischen Widerstandsmomente für Rechteckquerschnitte resultierenden Faktors 3.

## 12.5 Schlussbemerkungen

1. Aufgrund der vorgestellten Theorie wurde eine Harmonisierung der zur Charakterisierung der Festigkeits- und Zähigkeitseigenschaften von Stahlfaserbeton angewendeten Versuche herbeigeführt [97, 66].
2. Die zur Ermittlung der Rechenwerte  $f_{ctf}$  und  $G_f$  wesentlichen Beziehungen sind in Tabelle 12.2 zusammengestellt. Die Größen  $f_{ctf}$  und  $G_f$  werden aus Formänderungsarbeiten berechnet, welche in Belastungsversuchen bis zu bestimmten, nominellen Durchbiegungen auftreten.
3. Liegt nur einer der beiden Rechenwerte  $f_{ctf}$  und  $G_f$  vor, so kann der andere näherungsweise mit Hilfe der Beziehung (12.18) ermittelt werden.
4. Die Bedingung (12.19) ist recht streng und kann bei Vorliegen weiterer Forschungsresultate eventuell gelockert werden.
5. Analog zur Bedingung (12.20) könnten mit weiteren Bedingungen verschiedene Qualitätsklassen für Stahlfaserbeton eingeführt werden.
6. Eine rein theoretische Ermittlung von  $G_f$  über die Beziehungen (12.1), (12.3) und (12.4) wird nicht empfohlen. Insbesondere für hohe Fasergehalte könnte damit die Faserwirksamkeit überschätzt werden.
7. Das vorgeschlagene Bemessungsverfahren für Stahlfaserbeton fügt sich in das für Stahlbeton und Spannbeton gängige Vorgehen [96] ein.
8. Die vorliegenden Empfehlungen beruhen primär auf Erfahrungen mit Stahlfaserspritzbeton. Eine Erweiterung der Kenntnisse auf andere Anwendungsbereiche ist wünschenswert.
9. In der Kombination von Stahlbeton und Spannbeton mit Stahlfasern liegt noch ein beträchtliches Entwicklungspotential für Forschung und Praxis.



## Literatur

- [1] Alvarez, M., und Marti, P., *Versuche zum Verbundverhalten von Bewehrungsstahl bei plastischen Verformungen*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 222, Birkhäuser Verlag, Basel, Sept. 1996, 135 pp.
- [2] Alvarez, M., and Sigrist, V., contribution to CEB *Bulletin d'information*, No. 242, "Ductility of Reinforced Concrete Structures: Synthesis Report and Individual Contributions," May 1998, pp. 70-80.
- [3] Alvarez, M., *Einfluss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 236, Birkhäuser Verlag, Basel, Juli 1998, 182 pp.
- [4] Alvarez, M., Köppel, S., and Marti, P., "Rotation Capacity of Reinforced Concrete Slabs," *ACI Structural Journal*, in press.
- [5] Anderheggen, E., Despot, Z., Steffen, P., and Tabatabai, S.M., "Computer-Aided Dimensioning of Reinforced Concrete Wall and Flat Slab Structures," *Structural Engineering International*, IABSE, Vol. 4, No. 1, Feb. 1994, pp. 17-22.
- [6] Anderheggen, E., Steffen, P., und Glanzer, G., "Plastische Berechnung von Stahlbetonplatten," *Schweizer Ingenieur und Architekt*, Vol. 117, Nr. 4, 1999, pp. 58-62.
- [7] Bachmann, H., und Thürlmann, B., *Versuche über das plastische Verhalten zweifeldriger Stahlbetonbalken*, Institut für Baustatik, ETH Zürich, Berichte Nr. 6203-1 und 2, 1965, 131 pp. und 103 pp.
- [8] Bachmann, H., *Zur plastizitätstheoretischen Berechnung statisch unbestimmter Stahlbetonbalken*, Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr. 13, Juris Druck + Verlag, Zürich, Juli 1967, 188 pp.
- [9] Baumann, T., "Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken," *Bauingenieur*, Vol. 47, 1972, pp. 367-377.
- [10] Bazant, Z. P., "Instability, Ductility, and Size Effect in Strain-Softening Concrete," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 102, No. 2, April 1976, pp. 331-344.
- [11] Borrè, G., and Maier, G., "Thermodynamic Consequences of Strain Softening in Tension," Discussion, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 114, No. 12, Dec. 1988, pp. 2207-2210.
- [12] Bosco, C., and Debernardi, P.G., *Experimental Investigation on the Ultimate Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams*, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Torino, Report No. 36, July 1992, 119 pp.
- [13] Chen, W.F., *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Developments in Geotechnical Engineering, Vol. 7, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1975, 638 pp.
- [14] Chen, W. F., and Han, D. J., *Plasticity for Structural Engineers*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1988, 599 pp.
- [15] Clyde, D.H., "Nodal Forces as Real Forces," *Final Report*, IABSE Colloquium 'Plasticity in Reinforced Concrete', Copenhagen 1979, IABSE Vol. 29, 1979, pp. 159-166.
- [16] Collins, M.P., "Stress-Strain Characteristics of Diagonally Cracked Concrete," *Final Report*, IABSE Colloquium 'Plasticity in Reinforced Concrete', Copenhagen 1979, IABSE Vol. 29, 1979, pp. 27-34.
- [17] Collins, M.P., and Mitchell, D., "Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-Prestressed Concrete Beams," *PCI Journal*, Vol. 25, No. 5, Sept.-Oct. 1980, pp. 32-100.
- [18] Comité Euro-International du Béton, *CEB-FIP Model Code for Concrete Structures*, Lausanne, 1990, 437 pp.

- [19] Drucker, D.C., "On Structural Concrete and the Theorems of Limit Analysis," *Abhandlungen*, Internationale Vereinigung für Brücken- und Hochbau (IVBH), Zürich, IABSE Vol. 21, 1961, pp. 49-59.
- [20] Eligehausen, R., Popov, E.P., and Bertero, V.V., *Local Bond Stress-Slip Relationships of Deformed Bars under Generalized Excitations*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, Report No. UCB/EERC-83/23, 1983, 162 pp.
- [21] Engström, B., *Ductility of Tie Connections in Precast Structures*, Department of Structural Engineering, Division of Concrete Structures, Chalmers University of Technology, Publication No. 92:1, Oct. 1992, 368 pp.
- [22] Eurocode 2, *Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 1, Grundlagen und Anwendungsregeln für den Hochbau*, Europäische Vornorm, 1992, 173 pp.
- [23] Eurocode 2, *Planung von Stahlbeton- und Spannbetontragwerken, Teil 2, Betonbrücken*, Europäische Vornorm, 1996, 48 pp.
- [24] FIP / CEB, *High Strength Concrete*, Bulletin d'Information No. 197, SR 90/1, Fédération Internationale de la Précontrainte, London, 1990, 61 pp.
- [25] Fox, E.N., "Limit Analysis for Plates: A Simple Loading Problem Involving a Complex Exact Solution," *Philosophical Transactions of the Royal Society*, London, Vol. 272, Series A, 1972, pp. 463-492.
- [26] Fürst, A., und Marti, P., *Versuche an Trägern mit Unterspannung aus vorfabrizierten, vorgespannten Betonzuggliedern*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 243, Birkhäuser Verlag, Basel, Juni 1999, 108 pp.
- [27] Gauvreau, P., *Load Tests of Concrete Girders Prestressed with Unbonded Tendons*. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 194, Birkhäuser Verlag, Basel, Okt. 1992, 239 pp.
- [28] Gauvreau, P., *Ultimate Limit State of Concrete Girders Prestressed with Unbonded Tendons*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 198, Birkhäuser Verlag, Basel, Jan. 1993, 164 pp.
- [29] Hillerborg, A., *Strip Method of Design*, Viewpoint, London, 1975, 256 pp.
- [30] Hillerborg, A., Modeer, M., and Petersson, P. E., "Analysis of Crack Formation and Crack Growth in Concrete by Means of Fracture Mechanics and Finite Elements," *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, 1976, pp. 773-782.
- [31] Hillerborg, A., "Analysis of a Single Crack," *Fracture Mechanics of Concrete*, edited by F. H. Wittmann, Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam 1983, pp. 223-249.
- [32] Hillerborg, A., "Reliance upon Concrete Tensile Strength," *Colloquium Report*, IABSE Colloquium 'Structural Concrete', Stuttgart 1991, IABSE Vol. 62, 1991, pp. 589-604.
- [33] Hordijk, D. A., "Tensile and Tensile Fatigue Behaviour of Concrete; Experiments, Modelling and Analysis," *Heron*, Vol. 37, No. 1, Delft 1992, 79 pp.
- [34] Hsu, T.T.C., "Softened Truss Model Theory for Shear and Torsion," *ACI Structural Journal*, Vol. 85, No. 6, Nov.-Dec. 1988, pp. 624-635.
- [35] IABSE Colloquium 'Plasticity in Reinforced Concrete', Copenhagen 1979, *Introductory Report*, IABSE Vol. 28, 1978, 172 pp., and *Final Report*, IABSE Vol. 29, 1979, 360 pp.
- [36] Ingerslev, A., "The Strength of Rectangular Slabs," *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 1, No. 1, Jan. 1923, pp. 3-14.
- [37] Johansen, K.W., *Yield Line Theory*, Cement and Concrete Association, London, 1962, 181 pp.
- [38] Kaufmann, W., *Strength and Deformations of Structural Concrete Subjected to In-Plane Shear and Normal Forces*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 234, Birkhäuser Verlag, Basel, Juli 1998, 147 pp.

- [39] Kaufmann, W., and Marti, P., "Structural Concrete: Cracked Membrane Model," *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 124, No. 12, Dec. 1998, pp. 1467-1475.
- [40] Kent, D.C., and Park, R., "Flexural Members with Confined Concrete," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 97, No. 7, July 1971, pp. 1969-1990.
- [41] Kirchhoff, G. R., "Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe," *A. L. Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin, Vol. 40, No. 1, 1850, pp. 51-88.
- [42] König, G., und Fehling, E., "Grundlagen zur Rissbreitenbeschränkung im Spannbetonbau," *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 83, Nr. 12, 1988, pp. 317-323.
- [43] Köppel, S., *Versuche zum Rotationsvermögen von Stahlbetonplatten*, Diplomarbeit, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, Feb. 1996, 80 pp.
- [44] Kupfer, H., "Erweiterung der Mörsch'schen Fachwerkanalogie mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Formänderungsenergie," *CEB Bulletin d'information*, No. 40, Jan. 1964, pp. 44-57.
- [45] Kupfer, H., "Das Verhalten des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung," *Bericht*, Lehrstuhl für Massivbau, Technische Universität München, No. 78, 1969, 124 pp.
- [46] Lampert, P., *Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung*, Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr. 26, Birkhäuser Verlag, Basel, Okt. 1970, 189 pp.
- [47] Maier, J., *Tragfähigkeit von Stahlbetonscheiben*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 169, Birkhäuser Verlag, Basel, Nov. 1988, 93 pp.
- [48] Marcus, H., *Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten*, Julius Springer, Berlin, 2. Auflage, 1932, 368 pp.
- [49] Marti, P., "Plastic Analysis of Reinforced Concrete Shear Walls," *Introductory Report*, IABSE Colloquium 'Plasticity in Reinforced Concrete', Copenhagen 1979, IABSE Vol. 28, 1978, pp. 51-69.
- [50] Marti, P., *Zur plastischen Berechnung von Stahlbeton*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 104, Birkhäuser Verlag, Basel, Okt. 1980, 176 pp.
- [51] Marti, P., "Gleichgewichtslösungen für Flachdecken," *Schweizer Ingenieur und Architekt*, Vol. 99, Nr. 38, 1981, pp. 799-809.
- [52] Marti, P., "Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design," *ACI Journal*, Vol. 82, No. 1, Jan.-Feb. 1985, pp. 46-56.
- [53] Marti, P., "Truss Models in Detailing," *Concrete International*, Vol. 7, No. 12, Dec. 1985, pp. 66-73.
- [54] Marti, P., "Staggered Shear Design of Simply Supported Concrete Beams," *ACI Journal*, Vol. 83, No. 1, Jan.-Feb. 1986, pp. 36-42.
- [55] Marti, P., "Staggered Shear Design of Concrete Bridge Girders," *Proceedings*, International Conference on Short and Medium Span Bridges, Ottawa, Aug. 1986, Vol. 1, pp. 139-149.
- [56] Marti, P., "Design of Concrete Slabs for Transverse Shear," *ACI Structural Journal*, Vol. 87, No. 2, March-April 1990, pp. 180-190.
- [57] Marti, P., "Dimensioning and Detailing," *Colloquium Report*, IABSE Colloquium 'Structural Concrete', Stuttgart 1991, IABSE Vol. 62, 1991, pp. 411-443.
- [58] Marti, P., and Meyboom, J., "Response of Prestressed Concrete Elements to In-Plane Shear Forces," *ACI Structural Journal*, Vol. 89, No. 5, Sept.-Oct. 1992, pp. 503-514.
- [59] Marti, P., und Ernst, G., "Norm SIA 162 – Teilrevision," *Schweizer Ingenieur und Architekt*, Vol. 111, Nr. 22, Mai 1993, pp. 383-388.
- [60] Marti, P., "Shear Design of Variable Depth Girders with Draped Prestressing Tendons," *FIP Report 'Prestressed Concrete in Switzerland'*, 12th FIP Congress, Washington, D.C., May 1994, pp. 16-19.

- [61] Marti, P., "Verbundverhalten von Spanngliedern mit Kunststoff-Hüllrohren," *Festschrift Prof. J. Schneider zum 60. Geburtstag*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Publikation SP-001, Mai 1994, pp. 143-150.
- [62] Marti, P., Sigrist, V., und Alvarez, M., *Mindestbewehrung von Betonbauten*, Forschungsauftrag Nr. 82/95, Bundesamt für Strassenbau, Bericht Nr. 529, Juni 1997, 55 pp.
- [63] Marti, P., Alvarez, M., und Sigrist, V., "Rissbildung und Mindestbewehrung," *Schweizer Ingenieur und Architekt*, Vol. 115, Nr. 41, Okt. 1997, pp. 832-838.
- [64] Marti, P., Alvarez, M., Kaufmann, W., and Sigrist, V., "Tension Chord Model for Structural Concrete," *Structural Engineering International*, IABSE, Vol. 8, No. 4, Nov. 1998, pp. 287-298.
- [65] Marti, P., "How to Treat Shear in Structural Concrete," *ACI Structural Journal*, Vol. 96, No. 3, May-June 1999, pp. 408-414.
- [66] Marti, P., Pfyl, Th., Sigrist, V., and Ulaga, T., "Harmonized Test Procedures for Steel Fiber Reinforced Concrete," *ACI Materials Journal*, in press.
- [67] Mattock, A. H., "Rotational Capacity of Hinging Regions in Reinforced Concrete Beams," *Proceedings, International Symposium 'Flexural Mechanics of Reinforced Concrete'*, ASCE-ACI, Miami, Nov. 1964, ACI SP-12, pp 143-181.
- [68] Melan, E., "Der Spannungszustand eines Mises-Henckyschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung." Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften, Wien, Abt. IIa, 147, 1938, pp. 73-87.
- [69] Menn, C., *Stahlbetonbrücken*, Springer-Verlag, Wien, 1990, 541 pp.
- [70] Menne, B., *Zur Traglast der ausmittig gedrückten Stahlbetonstütze mit Umschnürungsbewehrung*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 285, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1977, 56 pp.
- [71] Morley, C.T., "Equilibrium Design Solutions for Torsionless Grillages or Hillerborg Slabs under Concentrated Loads," *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 81, Part 2, Sept. 1986, pp. 447-460.
- [72] Mörsch, E., *Der Eisenbetonbau – seine Theorie und Anwendung*, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgart, 3. Auflage, 1908, 376 pp., 5. Auflage, 1. Band, 1. Hälfte, 1920, 471 pp., 2. Hälfte, 1922, 460 pp.
- [73] Müller, P., *Plastische Berechnung von Stahlbetonscheiben und -balken*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 83, Birkhäuser Verlag, Basel, Juli 1978, 160 pp.
- [74] Muttoni, A., *Die Anwendbarkeit der Plastizitätstheorie in der Bemessung von Stahlbeton*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 176, Birkhäuser Verlag, Basel, Juni 1990, 158 pp.
- [75] Muttoni, A., Schwartz, J., und Thürlmann, B., *Bemessung von Betontragwerken mit Spannungsfeldern*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1996, 145 pp.
- [76] Nelissen, L.J.M., "Biaxial Testing of Normal Concrete," *Heron*, Vol. 18, No. 1, Delft University of Technology, 1972, 90 pp.
- [77] Nielsen, M.P., "Yield Conditions for Reinforced Concrete Shells in the Membrane State," *Proceedings IASS Symposium 'Non-classical Shell Problems'*, Warsaw 1963, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 1030-1040.
- [78] Nielsen, M.P., *On the Strength of Reinforced Concrete Discs*, Acta Polytechnica Scandinavica, Civil Engineering and Building Construction Series, No. 70, Copenhagen, 1971, 261 pp.
- [79] Nielsen, M.P., *Limit Analysis and Concrete Plasticity*, Prentice-Hall Series in Civil Engineering, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984, 420 pp.

- [80] Nimura, A., "Experimental Research on Failure Criteria of Ultra-High Strength Concrete under Biaxial Stress (in Japanese)," *Summaries of Technical Papers of Annual Meeting*, Architectural Institute of Japan, Structures II, Vol. C, 1991, pp. 473-474.
- [81] Noakowski, P., *Nachweisverfahren für Verankerung, Verformung, Zwangsbeanspruchung und Rissbreite*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 394, Beuth Verlag GmbH, Berlin, 1988, 75 pp.
- [82] Ottosen, N. S., "Thermodynamic Consequences of Strain Softening in Tension," *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 112, No. 11, Nov. 1986, pp. 1152-1164.
- [83] Park, R., and Gamble, W.L., *Reinforced Concrete Slabs*, John Wiley & Sons, New York, 1980, 618 pp.
- [84] Petersson, P. E., *Crack Growth and Development of Fracture Zones in Plain Concrete and Similar Materials*, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Report TVBM-1006, Lund, 1981, 174 pp.
- [85] Rehm, G., *Ueber die Grundlagen des Verbundes zwischen Stahl und Beton*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 138, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1961, 59 pp.
- [86] Richart, F. E., Brandtzaeg, A., and Brown, R. L., *A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses*, Engineering Experimental Station, University of Illinois, Urbana, Bulletin 185, Nov. 1928, 102 pp.
- [87] Ritter, W., "Die Bauweise Hennebique," *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 17, 1899, pp. 41-43, 49-52, 59-61.
- [88] Ritz, P., *Biegeverhalten von Platten mit Vorspannung ohne Verbund*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 80, Mai 1978, 131 pp.
- [89] Ritz, P., Matt, P., Tellenbach, Ch., Schlub, P., und Aeberhard, H.U., "Spannbeton im Hochbau – Vorgespannte Decken," *VSL Bericht*, Losinger AG, Bern, überarbeitete Ausgabe, Mai 1983, 41 pp.
- [90] Robinson, J.R., et Demorieux, J.-M., "Essais de traction-compression sur modèles d'âme de poutre en béton armé," Compte rendu des recherches effectuées en 1968, *Annales ITBTP*, Juin 1969, pp. 980-982, et Compte rendu des recherches effectuées en 1969, *Annales ITBTP*, Juin 1970, pp. 84-86.
- [91] Shima, H., Chou, L.-L., and Okamura, H., "Micro and Macro Models for Bond in Reinforced Concrete," *Journal of the Faculty of Engineering*, Vol. XXXIX, No. 2, University of Tokyo, 1987, pp. 133-194.
- [92] Schlaich, J., und Schäfer, K., "Konstruieren im Stahlbetonbau," *Betonkalender*, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1984, pp. 787-1005.
- [93] Schlaich, J., Schäfer, K., and Jennewein, M., "Toward a Consistent Design of Structural Concrete," *PCI Journal*, Vol. 32, No. 3, May-June 1987, pp. 74-150.
- [94] Scott, B.D., Park, R., and Priestley, M.J.N., "Stress-Strain Behaviour of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rates," *ACI Journal*, Vol. 79, No. 1, Jan.-Feb. 1982, pp. 13-27.
- [95] *SIA Norm 159/SC 0 - Ausgabe 2001: Grundlagen der Projektierung von Tragwerken*, Entwurf, Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein, Zürich, Juli 1999, 19 pp.
- [96] *SIA Norm 162 - Ausgabe 1989, Teilrevision 1993: Betonbauten*, Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein, Zürich, 1993, 86 pp.
- [97] *SIA Empfehlung 162/6 - Ausgabe 1999: Stahlfaserbeton*, Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein, Zürich, 1999, 20 pp.
- [98] Sigrist, V., *Tastversuche zum Entfestigungsverhalten von Beton unter einachsiger Druckbeanspruchung*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1992, unveröffentlicht.

- [99] Sigrist, V., und Marti, P., *Versuche zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 202, Nov. 1993, 90 pp.
- [100] Sigrist, V., Alvarez, M., and Kaufmann, W., "Shear and Flexure in Structural Concrete Beams," *CEB Bulletin d'information*, No. 223, June 1995, pp. 7-49.
- [101] Sigrist, V., *Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern*, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 210, Juli 1995, 159 pp.
- [102] Somes, N.F., "Compression Tests on Hoop-Reinforced Concrete," *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 96, No. 7, July 1970, pp. 1495-1509.
- [103] Tanigawa, Y., and Yamada, K., "Analysis of Stress-Strain Curves of Various Concretes by Endochronic Theory." *Transactions of the Japan Concrete Institute*, Vol. 3, Tokyo, 1981, pp. 179-186.
- [104] Thomson, W., and Tait, P.G., "Treatise on Natural Philosophy," Vol. I, Part II, No. 645-648, New Edition, Cambridge University Press, 1883, pp. 188-193.
- [105] Thürlimann, B., Grob, J. und Lüchinger, P., *Torsion, Biegung und Schub in Stahlbetonträgern*, Autographie zum Fortbildungskurs für Bauingenieure aus der Praxis, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1975, 170 pp.
- [106] Thürlimann, B., and Haaijer, G., *Buckling of Steel Angles in the Plastic Range*, Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania, Report No. 205E-3, Aug. 1953, 23 pp.
- [107] Thürlimann, B., Marti, P., Pralong, J., Ritz, P. und Zimmerli, B., *Anwendung der Plastizitätstheorie auf Stahlbeton*, Vorlesung zum Fortbildungskurs für Bauingenieure, Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, 1983, 252 pp.
- [108] Thürlimann, B., und Ziegler, H., *Plastische Berechnungsmethoden*, Vorlesungen anlässlich des Fortbildungskurses für Bau- und Maschinen-Ingenieure, ETH Zürich, 1963, 174 pp.
- [109] Timoshenko, S.P., and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells*, Mc Graw-Hill, International Student Edition, 1959, 580 pp.
- [110] Van Mier, J.G.M., "Fracture of Concrete under Complex Stress," *Heron*, Vol. 31, No. 3, Delft University of Technology, 1986, 90 pp.
- [111] Vecchio, F.J., and Collins, M.P., *The Response of Reinforced Concrete to In-plane Shear and Normal Stresses*, University of Toronto, Department of Civil Engineering, Publication No. 82-03, Toronto, March 1982, 332 pp.
- [112] Vecchio, F.J., and Collins, M.P., "The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear," *ACI Journal*, Vol. 83, No. 2, March-April 1986, pp. 219-231.
- [113] Vonk, R. A., "A Micromechanical Investigation of Softening of Concrete Loaded in Compression," *Heron*, Vol. 38, No. 3, Delft, 1993, 94 pp.
- [114] Wolfensberger, R., *Traglast und optimale Bemessung von Platten*, Institut für Baustatik, ETH Zürich, Bericht Nr. 2, Juni 1964, 119 pp.
- [115] Wood, R.H., *Plastic and Elastic Design of Slabs and Plates*, Thames and Hudson, London, 1961, 344 pp.
- [116] Zhu, Y., "The Flexural Strength Function for Concrete Beams: A Closed Form Solution Based on the Fictitious Crack Model," Department of Structural Mechanics and Engineering, *Bulletin* No. 157, The Royal Institute of Technology, Stockholm, 1991, pp. B2-B23.

# Bezeichnungen

## Lateinische Grossbuchstaben

<i>A</i>	Querschnittsfläche
<i>B</i>	Koeffizient
<i>C</i>	Gehalt pro Volumeneinheit
<i>D</i>	Dissipationsarbeit
<i>E</i>	Elastizitätsmodul
<i>F</i>	Kraft; Spannungsfunktion
<i>G</i>	Bruchenergie; Schubmodul
<i>I</i>	Trägheitsmoment
<i>M</i>	Biegemoment
<i>N</i>	Normalkraft
<i>P</i>	Vorspannkraft
<i>Q</i>	Last; Pol im Mohrschen Kreis
<i>R</i>	Radius
<i>U</i>	Formänderungsarbeit
<i>V</i>	Querkraft
<i>W</i>	Arbeit der äusseren Kräfte; elastisches Widerstandsmoment
<i>X</i>	überzählige Grösse
<i>Y</i>	Fliessfunktion
<i>Z</i>	plastisches Widerstandsmoment

## Lateinische Kleinbuchstaben

<i>a</i>	bezogene Querschnittsfläche; Exzentrizität; Länge; Rippenhöhe
<i>b</i>	Breite; Rippenabstand
<i>c</i>	Abstand; Betonüberdeckung; Koeffizient; Kohäsion
<i>d</i>	Dicke; (statische) Höhe; Durchmesser
<i>e</i>	Abstand; Exzentrizität
<i>f</i>	Materialfestigkeit; Pfeilhöhe
<i>g</i>	verteiltes Eigengewicht
<i>h</i>	Höhe
<i>i</i>	Anzahl
<i>j</i>	Anzahl
<i>k</i>	Kernweite; Koeffizient
<i>l</i>	Länge
<i>m</i>	Anzahl; bezogenes Moment
<i>n</i>	Anzahl; Koordinate; Membrankraft; Wertigkeit
<i>p</i>	Einheitspreis; Umfang
<i>q</i>	verteilte Last

<i>r</i>	Radius; Zylinderkoordinate
<i>s</i>	Abstand; deviatorische Spannung
<i>t</i>	Dicke; Koordinate
<i>u</i>	Umfang; Umlenkkraft pro Längeneinheit; Verschiebung in $x$ -( $n$ )-Richtung
<i>v</i>	bezogene Querkraft; Verschiebung in $y$ -( $t$ )-Richtung
<i>w</i>	Rissbreite; Verschiebung in $z$ -Richtung
<i>x</i>	Koordinate; Druckzonenhöhe
<i>y</i>	Koordinate
<i>z</i>	Koordinate

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	Koeffizient; Winkel
$\beta$	Koeffizient; Winkel
$\gamma$	Partialfaktor; Schiebung; spezifisches Gewicht
$\Delta$	Differenz; Laplace-Operator; Relativverschiebung
$\delta$	Extension; Relativverschiebung; Schlupf; Variation
$\epsilon$	Dehnung
$\zeta$	(bezogene) Koordinate; Koeffizient
$\eta$	(bezogene) Koordinate; Koeffizient
$\Theta$	Rotation; Winkel
$\theta$	Winkel
$\kappa$	Koeffizient
$\lambda$	Koeffizient
$\mu$	Koeffizient
$\nu$	Querdehnungszahl
$\xi$	(bezogene) Koordinate; Koeffizient
$\rho$	Dichte; geometrischer Bewehrungsgehalt; Hauptkrümmungsradius
$\sigma$	Normalspannung
$\tau$	Schubspannung
$\varphi$	Winkel; Winkel der inneren Reibung; Zylinderkoordinate
$\chi$	Krümmung
$\omega$	mechanischer Bewehrungsgehalt; Rotation

**Fusszeiger**

<i>D</i>	Entfestigung
<i>F</i>	Bruchprozess
<i>R</i>	Rippe; Widerstand
<i>V</i>	Querkraft
<i>a</i>	Auflager
<i>b</i>	Biegezug; Feld; Verbund
<i>c</i>	Beton; Druck; Kern; Umschnürungsbewehrung
<i>d</i>	Dekompression; Entfestigung
<i>e</i>	äusserer; Eigenspannungszustand; elastisch
<i>f</i>	Faser; Feder; Feld
<i>g</i>	Eigengewicht; Gleichmass
<i>h</i>	Verfestigung
<i>i</i>	Anzahl; innerer
<i>j</i>	Anzahl
<i>k</i>	Anzahl; kinematisch; charakteristisch
<i>l</i>	links
<i>m</i>	Mitte; Mittelwert; Mörtel
<i>n</i>	Endwert; abgeschlossenes Rissbild; Koordinate
<i>o</i>	hydrostatisch (Oktaeder)
<i>p</i>	Spannstahl; plastisch
<i>q</i>	Nutzlast
<i>r</i>	radial; rechts; Reissen; Riss; residual
<i>s</i>	Betonstahl; statisch; Störung; Stütze; versteckter Unterzug
<i>t</i>	Zug; Koordinate
<i>u</i>	Bruch
<i>v</i>	Querkraft; vertikal
<i>w</i>	Steg
<i>x</i>	Koordinate
<i>y</i>	Koordinate; Fliessen
<i>z</i>	Koordinate
<i>adm</i>	zulässig
<i>bal</i>	Ausgleichslast
<i>cr</i>	gerissen; kritisch
<i>ef</i>	effektiv
<i>hom</i>	homogen
<i>id</i>	ideell
<i>inf</i>	unten

<i>max</i>	maximal
<i>min</i>	minimal
<i>net</i>	Netto
<i>nom</i>	nominell
<i>opt</i>	optimal
<i>red</i>	reduziert
<i>req</i>	erforderlich
<i>sup</i>	oben
$\varphi$	azimutal
I	Bereich I (ungerissen); charakteristische Richtung
II	Bereich II (gerissen); charakteristische Richtung
0	Grundgrösse; initial
1,2,3	abgeleitete Grösse; Hauptrichtungen
(i)	i-te Invariante

**Kopfzeiger**

(r)	Riss
II	gerissener Zustand
-	negativ
+	positiv

**Sonderzeichen**

$\emptyset$	Stabdurchmesser
*	aplastisch; Ersatz; transformiert
,	partielle Ableitung
'	Zylinder; Druck
.	Ableitung