

**MASTER OF SCIENCE IN ENGINEERING**  
**Vertiefungsmodul II**

# **Tragverhalten von Stahlbetontragwerken**

**Modellvorstellungen zur nichtlinearen Verformungsberechnung**

Pascal Gitz

Horw, Freitag, 14. Juni 2024

Advisor: Prof. FH, Dr. Daniel Heinzmann  
Experte: Dr. Thomas Jäger

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche verwendeten Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Horw, 14. Juni 2024

Pascal Gitz

Version 1.0 - Prüfungsexemplar  
Version 0.9 - Entwurf

14. Juni 2024  
07. Juni 2024

PG  
PG

# Kurzfassung

Diese Arbeit ist Teil einer Arbeitsserie, bestehend aus dem Vertiefungsmodul I, dem Vertiefungsmodul II und der Masterthesis. Der Kern dieser Serie ist die Beschreibung von Verformungen im Stahlbetonbau basierend auf mechanischen Modellen. In der ersten Vertiefungsarbeit wurden die Hintergründe der Modelle beleuchtet und mittels Handrechnungen an Versuchen verifiziert. In dieser Arbeit, dem Vertiefungsmodul II, werden die Ansätze aus der Vorarbeit mit kommerziellen Finite-Element-Tools (FE-Tools) kombiniert. Es werden die Softwares AxisVM-X7, RFEM-6 und IDEAStructure verwendet.

Eine Modellvorstellung, das Federmodell, wird aufgezeigt. Dabei werden biege- und schubstarre Stäbe in regelmässigen Abständen durch Federn gekoppelt, in denen beliebig nichtlineare Steifigkeitsbeziehungen hinterlegt werden können. Dies ermöglicht die Bestimmung nichtlinearer Verformungen. Die Steifigkeiten werden anhand der Momenten-Krümmungs-Beziehung und anhand der Steifigkeit der Schubbewehrung ermittelt. Das Modell wird an einem Einführungsbeispiel illustriert, wobei analytische Lösungen mit den FE-Ergebnissen verglichen werden. Diese zeigen, dass die Ergebnisse nahezu deckungsgleich und zufriedenstellend sind, mit minimalen numerischen Abweichungen, die auf numerische Approximationen zurückzuführen sind.

Im Anschluss wird das Modell verifiziert. In diesem Kapitel werden die Versuche aus der Vorarbeit mit dem Federmodell nachgerechnet, um identische Ergebnisse wie bei den Handrechnungen zu erzielen. An einem Dreipunktbiegeversuch werden Schub- und Biegeverformungen basierend auf nichtlinearen Stoffgesetzen ermittelt und mit den gemessenen Versuchsresultaten verglichen. Die Ergebnisse sind zufriedenstellend. An einem Vierpunktbiegeversuch werden ebenfalls Biege- und Schubverformungen bestimmt und die Anwendung des Versatzmasses aufgezeigt. Auch hier werden die Modellresultate mit den Versuchsresultaten verglichen, wobei Abweichungen erkennbar sind, die knapp akzeptabel sind. Diese Unterschiede werden auf Unschärfen in den angewendeten Stoffgesetzen zurückgeführt. Im Vergleich mit den Handrechnungen aus der Vorarbeit zeigt das Federmodell jedoch identische Ergebnisse. Die Modellverifizierung wird abschliessend als erfolgreich betrachtet.

Im Kapitel der Modellanwendung wird das Federmodell an einem vorgespannten Träger angewendet. Das Kapitel beginnt mit einer detaillierten Versuchsbeschreibung, gefolgt von der Modellbildung. Die Interpretation der Vorspannung als Einwirkung sowie der Lastfall der Pressenkräfte und das Eigengewicht werden beschrieben. Der Hauptaspekt der Analyse ist die Ermittlung der Momenten-Krümmungs-Beziehung anhand nichtlinearer Stoffgesetze. Mittels einer Querschnittsanalysesoftware werden entlang der Stabachse 136 unterschiedliche Querschnitte analysiert. Die numerischen Ergebnisse werden erfolgreich durch Handrechnungen verifiziert. Die Resultate des Modells werden mit den Versuchsmessungen verglichen, wobei ein annähernd deckungsgleicher Verlauf festgestellt wird. Lediglich im Bereich der Traglast sind Unterschiede erkennbar. Das Kapitel endet mit einem Vergleich des Federmodells mit der Compatible Stress Field Method (CSFM). Die CSFM zeigt ähnliche Resultate wie das Federmodell.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>6</b>
<b>2. Modellvorstellung</b>	<b>7</b>
2.1. Modellbeschreibung . . . . .	7
2.2. Einführungsbeispiel . . . . .	8
<b>3. Modellverifizierung</b>	<b>18</b>
3.1. Dreipunktbiegeversuch . . . . .	18
3.2. Vierpunktbiegeversuch . . . . .	29
<b>4. Modellanwendung - vorgespannter Träger</b>	<b>42</b>
4.1. Versuchsbeschrieb . . . . .	42
4.2. Modellierung . . . . .	50
4.3. Modellergebnisse . . . . .	63
4.4. Compatible Stress Field Method . . . . .	67
<b>5. Fazit</b>	<b>73</b>
5.1. Rückblick . . . . .	73
5.2. Ausblick . . . . .	74
<b>Bezeichnungen</b>	<b>75</b>
<b>Literatur</b>	<b>77</b>
<b>Anhang</b>	<b>78</b>
<b>A. Momenten-Krümmungs-Beziehungen des vorgespannten Trägers</b>	<b>78</b>

# Abbildungsverzeichnis

2.1. Federmodell, biege- und schubsteife Stäbe gekoppelt mit Federn . . . . .	7
2.2. Federmodell, biege- und schubsteife Stäbe gekoppelt mit einem Wegfederpaar . . . . .	8
2.3. Statisches System des Kragarms, versehen mit einer Drehfeder in Trägermitte	9
2.4. Rechteckquerschnitt des Kragarms mit lokalem Koordinatensystem und Abmessungen . . . . .	10
2.5. Charakteristik der Drehfeder des Kragarms . . . . .	10
2.6. Statisches System des Kragarms ohne Drehfeder . . . . .	11
2.7. Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 2.6 für die Last $F_1$ . . . . .	11
2.8. Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 2.6 für die Last $F_2$ . . . . .	12
2.9. Statisches System des Kragarms im virtuellen Kräftezustand . . . . .	13
2.10. Schnittkräfte des virtuellen Systems aus Abbildung 2.9 . . . . .	13
2.11. Charakteristik der Drehfeder mit Bestimmung der Verdrehung anhand der Laststufen . . . . .	14
2.12. Verformungen in Z-Richtung für $F_1$ aus AxisVM-X7 mit dem Federmodell	14
2.13. Verformungen in Z-Richtung für $F_2$ aus AxisVM-X7 mit dem Federmodell	15
2.14. Kinematische Relation eines reinen Biegelements . . . . .	15
2.15. Charakteristik der Wegfeder, umgerechnet aus der Drehfedercharakteristik	16
2.16. Verformungen in Z-Richtung für $F_1$ aus AxisVM-X7 mit Wegfedermodell .	16
2.17. Verformungen in Z-Richtung für $F_2$ aus AxisVM-X7 mit Wegfedermodell .	17
3.1. Versuchsanordnung des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [2] . . . . .	19
3.2. Querschnitt des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [1] .	19
3.3. Bewehrungslayout des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [2] . . . . .	20
3.4. Verformungsverlauf des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [2] . . . . .	21
3.5. Last-Verformungs-Diagramm des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [2] . . . . .	21
3.6. Statisches System des Dreipunktbiegeversuchs . . . . .	22
3.7. Momenten-Krümmungs-Beziehung des Dreipunktbiegeversuchs, ohne ungerissenen Bereich, übernommen aus [1] . . . . .	23
3.8. Momenten-Verdrehungs-Beziehung des Dreipunktbiegeversuchs . . . . .	23
3.9. Einteilung in Spannungsfelder des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [1] . . . . .	24
3.10. Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Schubbewehrung, übernommen aus [1] . . . . .	25
3.11. Berechnete Wegfedercharakteristik der Federn in Z-Richtung des Dreipunktbiegeversuchs . . . . .	26
3.12. Last-Verformungs-Verlauf an der Stelle der Lasteinleitung aus dem Federmodell und aus den Versuchsmessungen . . . . .	27

3.13. Verdrehungsverlauf aus dem Federmodell für die Traglast . . . . .	27
3.14. Berechneter Krümmungsverlauf aus dem Verdrehungsverlauf . . . . .	28
3.15. Bewehrungslayout des Vierpunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [1] . . . . .	29
3.16. Querschnitt des Vierpunktbiegeversuchs, nachgezeichnet nach [1] . . . . .	30
3.17. Rissbild des Vierpunktbiegeversuchs nach dem Versagen der schwächeren Zone, entnommen aus [3] . . . . .	30
3.18. Last-Verformungs-Diagramm für einen Teil der Versuchsserie, Versuch SV14 rechts, entnommen aus [3] . . . . .	31
3.19. Statisches System des Vierpunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [1] . . . . .	31
3.20. Momenten-Krümmungs-Beziehung des Vierpunktbiegeversuchs, ohne ungerissenen Bereich, übernommen aus [1] . . . . .	32
3.21. Momenten-Verdrehungs-Beziehung des Vierpunktbiegeversuchs . . . . .	33
3.22. Der Vierpunktbiegeversuch in Spannungsfelder eingeteilt . . . . .	34
3.23. Schnittkörperdiagramm des zentrierten Fächers . . . . .	35
3.24. Schnittkörperdiagramm des Parallelfelds . . . . .	35
3.25. Schnittkörperdiagramm des zweiten zentrierten Fächers . . . . .	36
3.26. Gurtkraftverläufe bestimmt anhand der Spannungsfelder in Abbildung 3.22. Dargestellt ist der gesamte Gurtkraftverlauf, sowie der Anteil aus dem Biegemoment . . . . .	37
3.27. Versatzmoment dargestellt entlang der Stabachse . . . . .	37
3.28. Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Schubbewehrung, übernommen aus [1] . . . . .	38
3.29. Berechnete Wegfedercharakteristik der Federn des Vierpunktbiegeversuches	39
3.30. Last-Verformungs-Verlauf am Punkt $w_1$ aus dem Federmodell und aus den Versuchsmessungen . . . . .	39
3.31. Ermittlung der Schiebung am Fachwerk, a) Dehnung der Bügel b) Stauung der Diagonalen c) mittlere Gurtdehnung, nach [4] . . . . .	40
3.32. Verdrehungsverlauf aus dem Federmodell für die Höchstlast des Vierpunktbiegeversuchs . . . . .	40
3.33. Berechneter Krümmungsverlauf aus dem Verdrehungsverlauf für den Vierpunktbiegeversuch . . . . .	41
 4.1. Geometrie des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5] . . . . .	42
4.2. Geometrie des Querschnitts des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5] . .	43
4.3. Bewehrungslayout im Querschnitt des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5] . . . . .	43
4.4. Bewehrungslayout in Längsrichtung des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5] . . . . .	44
4.5. Vorspannungslayout des Versuchsträgers T6. Horizontaler Abstand [m] und vertikale Position [mm], gemessen von der Unterkante des Trägers, entnommen aus [5] . . . . .	45
4.6. Lagerung und Position der Pressenkräfte des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5] . . . . .	45
4.7. Spannungs-Dehnungs-Diagramm und Kraft-Verformungs-Diagramm des Spannstahls mittels Zugproben ermittelt, entnommen aus [5] . . . . .	46
4.8. Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betons, dargestellt sind diese für die Versuchskörper $T_1$ bis $T_6$ , entnommen aus [5] . . . . .	47

4.9.	Spannungs-Dehnungs-Diagramm und Kraft-Verformungs-Diagramm mittels Zugproben ermittelt für den Betonstahl, entnommen aus [5] . . . . .	48
4.10.	Verformungsverlauf des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5] . . . . .	49
4.11.	Messstellen des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5] . . . . .	49
4.12.	Last-Verformungs-Verhalten des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5] . .	50
4.13.	Statisches System des Versuchs $T_6$ . . . . .	51
4.14.	Statisches System mit Streckenlast durch Eigengewicht . . . . .	52
4.15.	Statisches System mit Anker und Umlenkkräften, die Einwirkungen sind in der entsprechenden Wirkungsrichtung dargestellt . . . . .	52
4.16.	Geometrie des Spannkabels als Funktion $z_p(x)$ . . . . .	53
4.17.	Statisches System mit der Laststellung aus den Pressen . . . . .	54
4.18.	Modelliertes Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons des Versuchsträgers T6, mit ergänzten Versuchsmessungen . . . . .	55
4.19.	Modelliertes Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betonstahls des Versuchsträgers T6, mit ergänzten Versuchsmessungen . . . . .	56
4.20.	Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Spannlitzen mit ergänzter Ausnutzung durch die Vorspannkraft . . . . .	56
4.21.	Modelliertes Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Vorspannung des Versuchsträgers T6, mit ergänzten Versuchsmessungen . . . . .	57
4.22.	Vereinfachung der Bewehrungsführung, Druckbewehrung vernachlässigt, Zugbewehrung zu einem Stab zusammengefasst . . . . .	57
4.23.	Querschnittsanalyse bei $x = 3.5$ m entlang der Stabachse, Vorspannung erreicht Fliessgrenze, Beton erreicht Druckfestigkeit . . . . .	58
4.24.	Querschnittsanalyse bei $x = 3.5$ m entlang der Stabachse, Vorspannung erreicht Zugfestigkeit, Beton erreicht Druckfestigkeit, schlaffe Bewehrung fliesst. . . . .	59
4.25.	Querschnittsanalyse bei $x = 3.5$ m entlang der Stabachse, schlaffe Bewehrung erreicht Fliessgrenze, vereinfacht erreicht äusserste Betonfaser die Druckfestigkeit . . . . .	60
4.26.	Querschnittsanalyse bei $x = 3.5$ m entlang der Stabachse, schlaffe Bewehrung überschreitet Fliessgrenze, Beton erreicht Bruchstauchung . . . . .	62
4.27.	Momenten-Krümmungs-Beziehung numerisch gelöst mittels der Querschnittsanalyse-Software, dazu aufgezeigt eine grobe Abschätzung der Grenzpunkte . . . . .	63
4.28.	Vergleich der Versuchsresultate mit den numerisch ermittelten Resultaten, dargestellt im Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle 10, Messpositionen in Abbildung 4.11 . . . . .	64
4.29.	Spannungsverteilung beim Auflager B für die Laststufe Pressenkräfte 1 . . . . .	64
4.30.	Verdrehungsverlauf aus dem Federmodell für den Lastfall Pressenkräfte 1 für den Träger T6 . . . . .	65
4.31.	Berechneter Krümmungsverlauf aus dem Verdrehungsverlauf für den Lastfall Pressenkräfte 1 . . . . .	65
4.32.	Vergleich der Versuchsresultate mit den numerisch ermittelten Resultaten, dargestellt im Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle 18 . . . . .	66
4.33.	Spannungsverteilung im Feld beim Erreichen des Biegewiderstands . . . . .	66
4.34.	Verdrehungsverlauf aus dem Federmodell für den Lastfall Pressenkräfte 2 für den Träger T6 . . . . .	67
4.35.	Berechneter Krümmungsverlauf aus dem Verdrehungsverlauf für den Lastfall Pressenkräfte 2 für den Träger T6 . . . . .	67

4.36. Modellvorstellung der Compatible Stress Field Method (CSFM), entnommen aus [7] . . . . .	68
4.37. Strukturmodell des Versuchs in IDEASTatiCa für den Lastfall <i>Pressenkräfte 1</i> . . . . .	68
4.38. Qualitatives Verhalten der modellierten Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons in IDEASTatiCa . . . . .	69
4.39. Qualitatives Verhalten der modellierten Spannungs-Dehnungs-Beziehung der schlaffen Bewehrung in IDEASTatiCa . . . . .	69
4.40. Qualitative Berücksichtigung der Zugversteifung der schlaffen Bewehrung in IDEASTatiCa . . . . .	70
4.41. Qualitatives Verhalten der modellierten Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Spannstahls in IDEASTatiCa . . . . .	70
4.42. Verformung des Kragarms für den Lastfall <i>Pressenkräfte 1</i> . . . . .	71
4.43. Vergleich der Versuchsergebnisse mit den numerisch ermittelten Resultaten aus IDEASTatiCa, sowie den Resultaten des Federmodells, dargestellt im Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle 10 . . . . .	71
4.44. Verformung des Felds für den Lastfall <i>Pressenkräfte 2</i> . . . . .	71
4.45. Vergleich der Versuchsergebnisse mit den numerisch ermittelten Resultaten aus IDEASTatiCa, sowie den Resultaten des Federmodells, dargestellt im Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle 18 . . . . .	72
4.46. Ausnutzung des Modells, lokale Überschreitung der Druckspannungen im Auflagerbereich . . . . .	72
5.1. Anordnung des Federmodells als Trägerrost, entnommen aus [1] . . . . .	74

# 1. Einleitung

Bereits 1935 wurden in der damaligen SIA 112 Anforderungen an die Durchbiegung von Stahlbetonbauteilen gestellt. Seither wurde die Gebrauchstauglichkeit, insbesondere die Verformungen von Tragwerken, zu einer zentralen Bemessungsgrösse. Trotz dieser elementaren Rolle im Bemessungsablauf werden Verformungen im Stahlbetonbau in der heutigen Baupraxis häufig nur mit groben Abschätzungen bewertet. Solche Ansätze können zu ungenauen Prognosen führen, die sowohl die Sicherheit als auch die Wirtschaftlichkeit von Bauprojekten beeinträchtigen. Detaillierte Verformungsberechnungen sind in vielen modernen Statiksoftwares implementiert und frei anwendbar. Die theoretischen Hintergründe sind jedoch selten geläufig, und die Tools werden meist als "Blackbox" behandelt.

Das Ziel dieser Arbeitsserie, bestehend aus dem Vertiefungsmodul I [1], Vertiefungsmodul II und der Masterthesis, ist es daher, dem Leser mechanische Modelle zur Bestimmung von Verformungen umfassend aufzuzeigen. In der Vorarbeit [1] wurden die mechanischen Modelle detailliert beschrieben und anhand von experimentellen Versuchen verifiziert, wobei mehrheitlich auf den Einsatz kommerzieller Finite-Elemente-Tools (FE-Tools) verzichtet wurde. Der Fokus dieser Arbeit liegt nun auf der Integration von FE-Tools mit den theoretischen Grundlagen, um praktisch anwendbare Lösungen zu entwickeln. Verwendet wird hierbei die 3D Statiksoftware AxisVM-X7 und RFEM-6, sowie die 2D Detailstatiksoftware IDEASTatiCa. Sämtliche Analysen beziehen sich auf Stabtragwerke.

Diese Arbeit lässt sich in drei Kernthemen unterteilen. Zuerst wird die Modellvorstellung zur numerischen Integration kinematischer Grössen (primär Krümmung und Schiebung) beschrieben und anhand eines Einführungsbeispiels veranschaulicht, um die theoretischen Grundlagen klar darzustellen. Anschliessend wird die Modellvorstellung an den bereits gut verstandenen Versuchen aus dem Vertiefungsmodul I verifiziert, um die Zuverlässigkeit und Genauigkeit des Modells zu bestätigen. Abschliessend wird die Anwendung an einem vorgespannten Träger demonstriert, um die praktische Relevanz und Anwendbarkeit des entwickelten Modells zu zeigen. Die Arbeit wird mit einem Fazit abgeschlossen, das eine differenzierte Betrachtung zwischen Rückblick und Ausblick bietet und damit sowohl die erreichten Ergebnisse zusammenfasst als auch Erweiterungen aufzeigt.

Durch diese strukturierte Herangehensweise soll ein tieferes Verständnis für das komplexe Tragverhalten von Stahlbetontragwerken geschaffen werden. Zudem soll eine zuverlässige Grundlage zur praktischen Anwendung im konstruktiven Ingenieurbau gelegt werden.

## 2. Modellvorstellung

Dieses einleitende Kapitel beschreibt das Modell zur numerischen Integration kinematischer Größen (Krümmung und Schiebung) und beleuchtet dessen Grundgedanken. Es wird kurz auf die Implementierung in einer FE-Software eingegangen. Ein Einführungsbispiel zeigt die konzeptionelle Anwendung. Zudem werden erste Vor- und Nachteile der Modellvorstellung aufgezeigt.

### 2.1. Modellbeschreibung

In der Vertiefungsarbeit I [1] wurde das nichtlineare Biegeverhalten verschiedener Versuche mittels numerischer Integration der Krümmungen zufriedenstellend abgebildet. Um dieses Vorgehen auf statisch unbestimmte Systeme zu erweitern und die nötige Flexibilität in der Geometrie der Systeme zu erhalten, wird ein Stabstatikmodell basierend auf diesem Berechnungsansatz erstellt. Erweitert wird der Ansatz mit der Berücksichtigung der Schiebung. Die Abbildung 2.1 zeigt die Modellierung eines einfachen Balkens, bei dem biege- und schubsteife Stäbe mit Federn gekoppelt sind. Diese Modellierung wird in den folgenden Kapiteln als Federmodell bezeichnet.

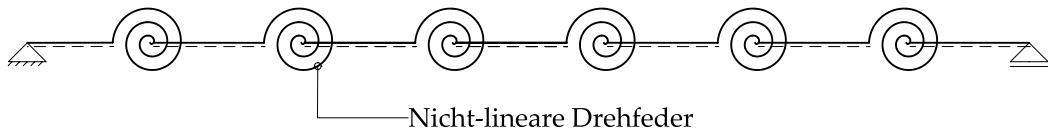


Abbildung 2.1.: Federmodell, biege- und schubsteife Stäbe gekoppelt mit Federn

In dieser Modellierung resultieren sämtliche Verformungen des Systems aus den Federverbindungen, welche in FE-Softwares als Stabendgelenke modelliert werden können. Mit der Wahl der entsprechenden Federcharakteristiken können passende Resultate erzielt werden. Dieser Ansatz ermöglicht es, der Anzahl an Freiheitsgraden in den Stabendgelenken entsprechend Steifigkeiten zuzuordnen. Den Rotationsfreiheitsgraden werden Momenten-Verdrehungs-Beziehungen und den Translationsfreiheitsgraden Kraft-Verformungs-Beziehungen zugeordnet. In den betrachteten 3D-Statiksoftwares können den Stabendgelenken Verläufe mittels eines Diagrammeditors eingegeben werden, die beliebige nichtlineare Beziehungen abbilden, sofern diese numerisch stabil, sowie stetig ansteigend sind. Grundsätzlich wird die Momenten-Verdrehungs-Beziehung (Drehfedercharakteristik) anhand der Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts hergeleitet. Schubverformungen lassen sich beispielsweise durch die

Bestimmung einer Kraft-Verformungs-Beziehung in Wirkungsrichtung der Querkraft ermitteln. Es lässt sich vorwegnehmen, dass die Wahl der Federcharakteristiken die Krux des Systems darstellt.

Alternativ zur Modellierung mittels Drehfedern lässt sich das Verhalten der Drehfeder mit einem Wegfederpaar abbilden. Dies erlaubt eine Modellierung mittels der nichtlinearen Fachwerksstäbe der Software Statik-9 der Cubus AG. Dieser Ansatz wird nur im Einführungsbeispiel berücksichtigt.

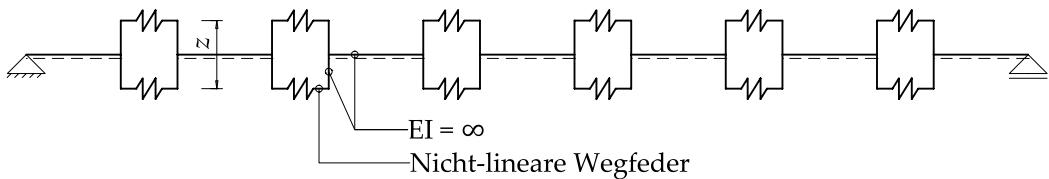


Abbildung 2.2.: Federmodell, biege- und schubsteife Stäbe gekoppelt mit einem Wegfederpaar

### 2.1.1. Modelleigenschaften

Mit der Modellierung als Federmodell lassen sich beliebig komplexe Stoffgesetze in einer praxisüblichen Statiksoftware anwenden. Speziell können Biegeverformungen zuverlässig bestimmt werden, basierend auf der Momenten-Krümmungs-Beziehung. Zudem lässt sich eine Momenten-Krümmungs-Beziehung mit einer händischen Querschnittsanalyse leicht verifizieren. Dies ermöglicht die Überprüfung der Resultate und steigert so die Zuverlässigkeit der Berechnung. Ein weiterer Kernpunkt der Modellierung ist die Berücksichtigung der Momentenumlagerung. Durch die inkrementelle Steigerung der Last beim nichtlinearen Berechnungsalgorithmus können Momente entsprechend der beanspruchungsabhängigen Steifigkeit verteilt werden. Bei einem Zweifeldträger kann beispielsweise die Last nach dem Erreichen des Biegewiderstand beim Mittelaufhänger weiter gesteigert werden, sofern ausreichend Verformungsvermögen vorhanden ist.

Ein konzeptioneller Nachteil der Modellbildung ist die Vielzahl an Diskretisierungen. Dies gilt allgemein für numerische Lösungen. In diesem Modell fließt die Wahl der Elementlänge mit ein. Die Inkrementgrösse zur Bestimmung der Momenten-Krümmungs-Beziehung, sofern diese numerisch bestimmt wurde, hat einen Einfluss. Zudem gilt es bei einer nichtlinearen Berechnung, eine Inkrementgrösse zur Steigerung der Last im Lösungsalgorithmus zu wählen. Diese Parameter haben einen Einfluss auf die Resultate und sind sorgfältig zu wählen.

## 2.2. Einführungsbeispiel

Das Einführungsbeispiel verfolgt das Ziel, das Modellverhalten nachvollziehbar darzustellen. Dazu werden die Verformungen des fiktiven Beispiels sowohl analytisch mittels der Arbeitsgleichung als auch numerisch mit der Statiksoftware AxisVM-X7 ermittelt.

Als Beispiel wurde ein Kragarm gewählt, der mit einer Drehfeder versehen ist, welche eine nichtlineare Drehfedercharakteristik aufweist. Es werden zwei Laststufen betrachtet, die so gewählt sind, dass das nichtlineare Verhalten der Drehfeder deutlich wird. Das statische System ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

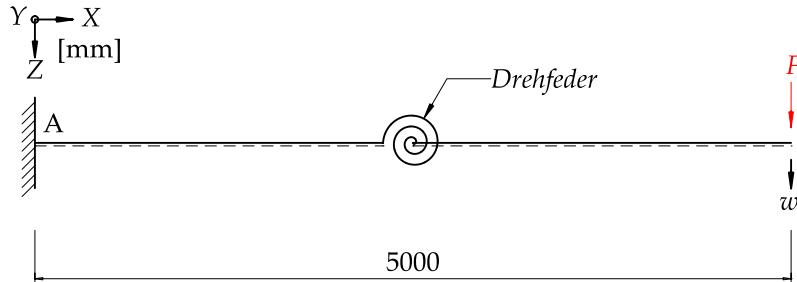


Abbildung 2.3.: Statisches System des Kragarms, versehen mit einer Drehfeder in Trägermitte

Durch den Vergleich der analytischen und numerischen Ergebnisse wird die Genauigkeit des Federmodells überprüft. Gleichzeitig bietet dieses Beispiel eine klare und anschauliche Demonstration der Modellierungsmethode, die im weiteren Verlauf der Arbeit auf komplexere statische Systeme angewendet wird.

Die folgenden Parameter fliessen in die Berechnungen ein. Beschrieben sind die Abmessungen und Materialeigenschaften, sowie die beiden Laststufen  $F_1$  und  $F_2$ , wie auch die Federsteifigkeiten  $k_{\varphi 1}$  und  $k_{\varphi 2}$ .

$$E = 10000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad F_1 = -10000.0 \text{ N} \quad F_2 = -21500.0 \text{ N}$$

$$h = 400.0 \text{ mm} \quad k_{\varphi_1} = 100000.0 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}} \quad k_{\varphi_2} = 10000.0 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

$$L = 5.0 \text{ m} \quad z = 400.0 \text{ mm} \quad b = 200.0 \text{ mm}$$

Das Beispiel wird mit einem Querschnitt versehen, der lediglich zur Bestimmung der Biegesteifigkeit und folgend den Biegeverformungen dient. Alternativ könnte der Kragarm biegestarr modelliert werden, da lediglich die Verformungen aus der Drehfeder von Belang sind. Der Rechteckquerschnitt, der für den gesamten Kragarm gilt, ist in Abbildung 2.4 dargestellt. Der Querschnitt ist mit einem durchwegs linear-elastischen Materialverhalten versehen.

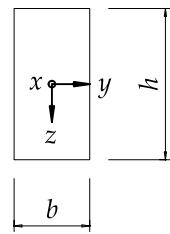


Abbildung 2.4.: Rechteckquerschnitt des Kragarms mit lokalem Koordinatensystem und Abmessungen

Die Drehfedercharakteristik in globaler  $Y$ -Richtung, bezogen auf das Koordinatensystem in Abbildung 2.3, ist in Abbildung 2.5 zu sehen. Das bilineare Verhalten gilt für positive und negative Biegemomente und zeigt, wie die Steifigkeit der Drehfeder sich ändert, wenn das Moment einen bestimmten Schwellenwert überschreitet.

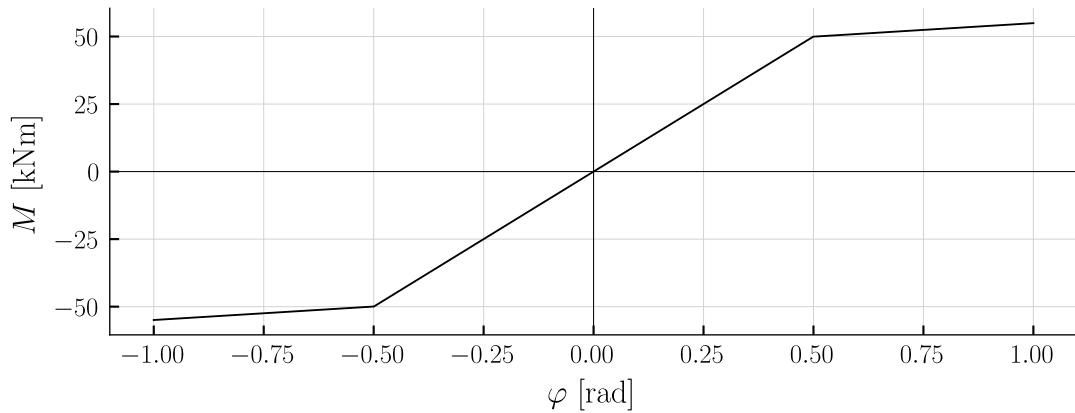


Abbildung 2.5.: Charakteristik der Drehfeder des Kragarms

### 2.2.1. Biegeverformung

Zunächst werden die Biegeverformungen mittels der Differentialgleichung für reine Biegeträger ermittelt. Dabei wird die Drehfeder vernachlässigt. Das statische System ist in Abbildung 2.6 dargestellt. Dieses Vorgehen führt zu den Zustandslinien der Schnittgrößen, die in Abbildung 2.7 aufgezeigt sind.

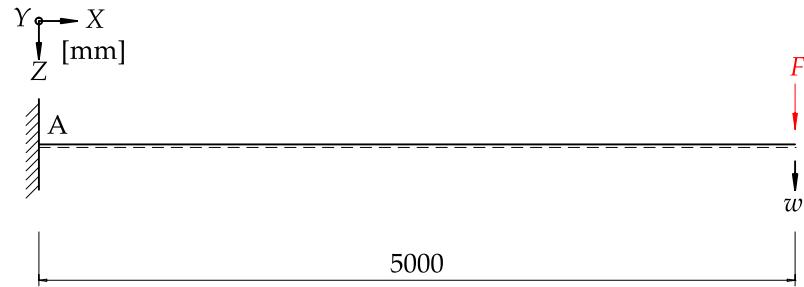


Abbildung 2.6.: Statisches System des Kragarms ohne Drehfeder

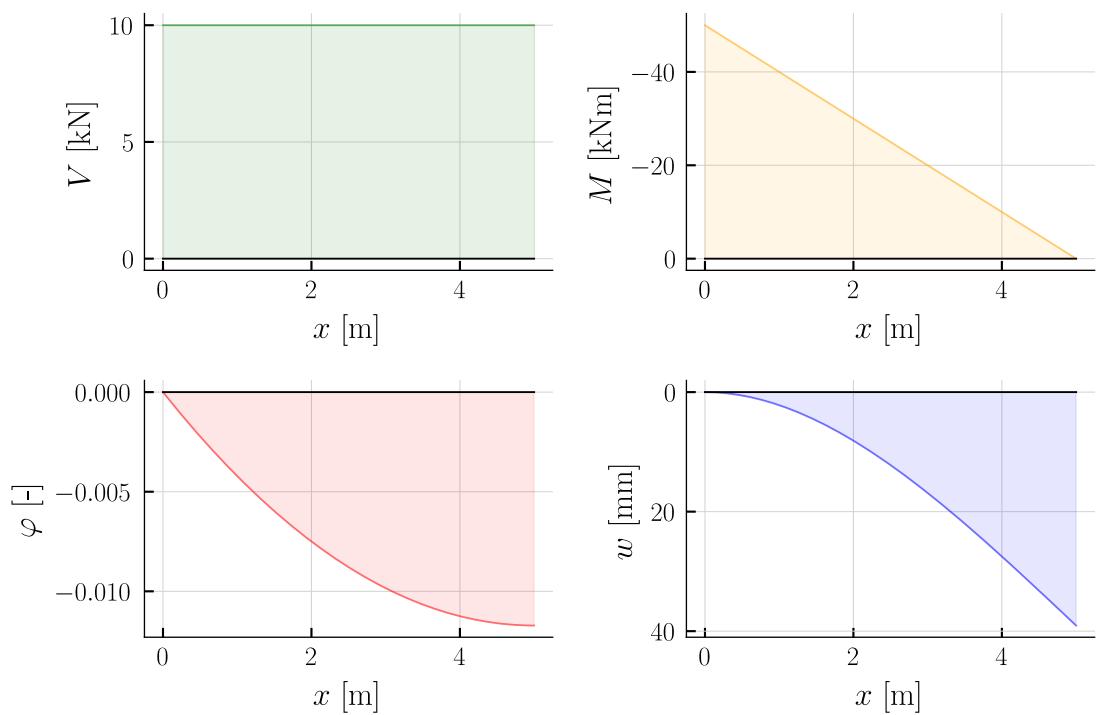


Abbildung 2.7.: Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 2.6 für die Last  $F_1$

Die maximale Verformung am Endpunkt des Kragarms ohne Drehfeder beträgt:

$$w_{EI_{F1}} = 39.1 \text{ mm}$$

Das analoge Vorgehen führt für die Laststufe  $F_2$  zu den Zustandslinien der Schnittgrößen in der Abbildung 2.8.

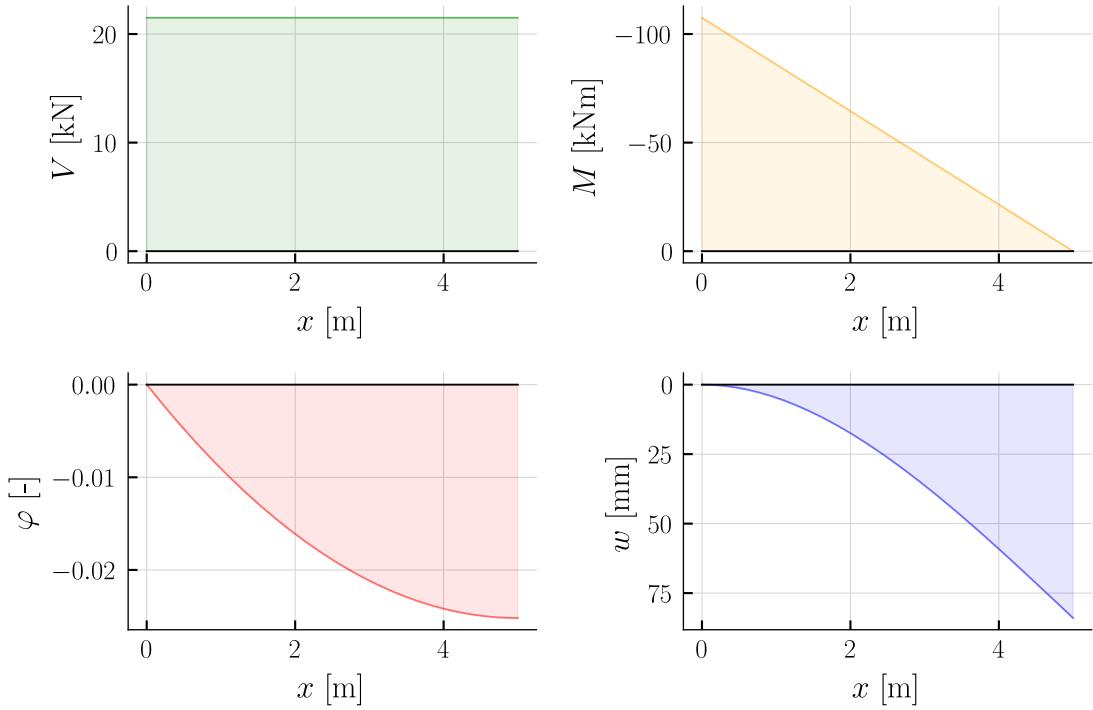


Abbildung 2.8.: Schnittkräfte des Systems aus Abbildung 2.6 für die Last  $F_2$

Diese Darstellung zeigt, wie sich die Schnittgrößen des Kragarms unter einer erhöhten Last ändern, und bietet eine Vergleichsbasis zur ersten Laststufe  $F_1$ . Da ein durchwegs linear-elastisches Biegeverhalten vorausgesetzt wird, entspricht der Faktor der Erhöhung der Verformung dem Quotienten der beiden Laststufen.

$$\frac{w_{EI_{F2}}}{w_{EI_{F1}}} = \frac{F_2}{F_1}$$

Dabei beträgt die maximale Biegeverformung am Ende des Kragarms ohne Drehfeder für die Last  $F_2$ :

$$w_{EI_{F2}} = 84.0 \text{ mm}$$

### 2.2.2. Verformung der Drehfeder

Zur Bestimmung der Verformung am Ende des Kragarms des Systems mit der Drehfeder wird die Arbeitsgleichung angewendet. Dazu wird an einem virtuellen System eine Einzellast eingeführt, an der Stelle an dem die Verformung bestimmt werden soll. Dargestellt ist dies in Abbildung 2.9.

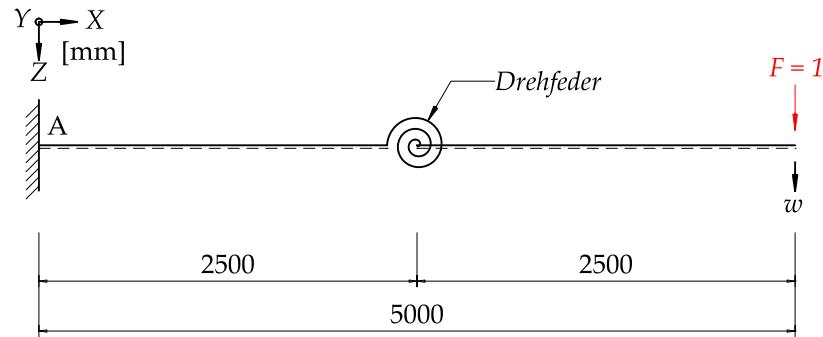


Abbildung 2.9.: Statisches System des Kragarms im virtuellen Kräftezustand

Die entsprechenden Verläufe der Querkraft und des Biegemoments zeigt die Abbildung 2.10 für das virtuelle System.

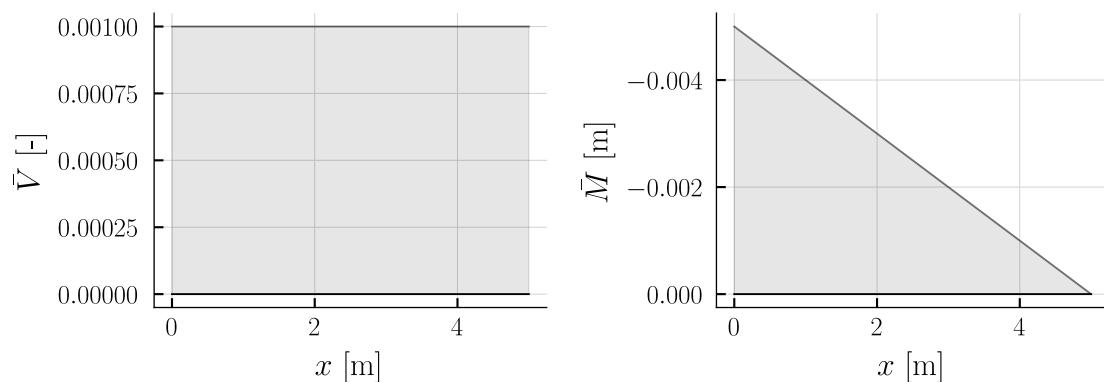


Abbildung 2.10.: Schnittkräfte des virtuellen Systems aus Abbildung 2.9

Bei der Arbeitsgleichung werden lediglich Verdrehungsterme berücksichtigt. Die Verformung der Drehfeder kann somit mit der folgenden Gleichung bestimmt werden.

$$w_\varphi = \bar{M} \frac{M}{k_\varphi} = \bar{M} \varphi$$

Die Verdrehung lässt sich aus der Federcharakteristik mit dem Biegemoment in Trägermitte bestimmen. Die Abbildung 2.11 zeigt die Position der Laststufen im Diagramm.

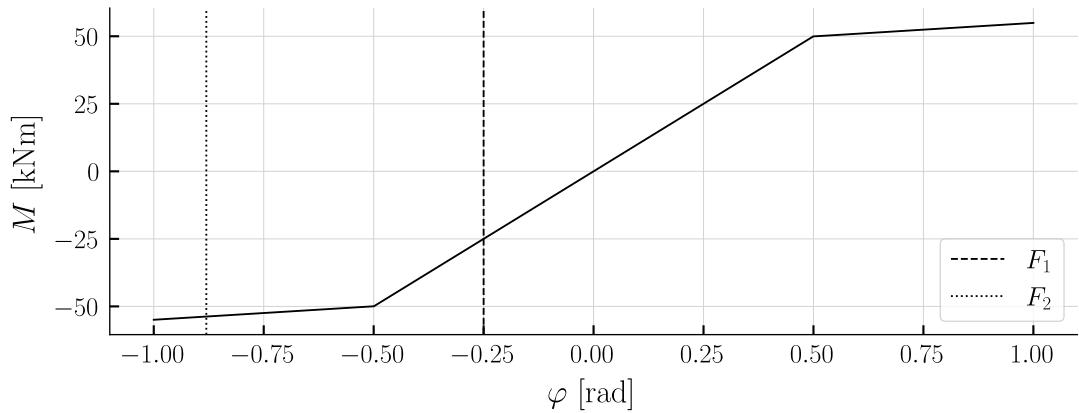


Abbildung 2.11.: Charakteristik der Drehfeder mit Bestimmung der Verdrehung anhand der Laststufen

Angewendet auf das System der Abbildung 2.3 folgen für die beiden Laststufen die Deformationen der Drehfeder zu:

$$w_{\varphi_{F1}} = 625.0 \text{ mm} \quad w_{\varphi_{F2}} = 2201.3 \text{ mm}$$

Dazu gilt es den Anteil aus der Biegeverformung zu addieren. Die totale Verformung beträgt:

$$w_{F1} = w_{\varphi_{F1}} + w_{EI_{F1}} = 625.0 \text{ mm} + 39.1 \text{ mm} = 664.1 \text{ mm}$$

$$w_{F2} = w_{\varphi_{F2}} + w_{EI_{F2}} = 2201.3 \text{ mm} + 84.0 \text{ mm} = 2285.2 \text{ mm}$$

### 2.2.3. Stabstatikmodell

Die analytisch ermittelten Verformungen werden nun mit der Lösung der Stabstatiksoftware verglichen. Das statische System, gemäss Abbildung 2.3, wird in der Statiksoftware AxisVM-X7 modelliert. Dazu wird die Drehfeder als Federelement modelliert und in der Y-Dimension mit der Federcharakteristik versehen. Die angeschlossenen Stäbe sind mit entsprechendem Querschnitt und der entsprechenden Biegesteifigkeit modelliert. Die Verformungen in Z-Richtung sind in Abbildung 2.12 und Abbildung 2.13 gezeigt.

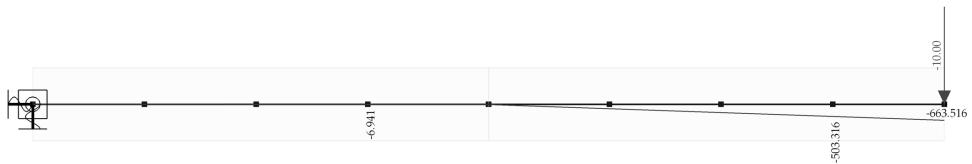


Abbildung 2.12.: Verformungen in Z-Richtung für  $F_1$  aus AxisVM-X7 mit dem Federmo dell

Das Modell liefert für die Last  $F_1$  die maximale Verformung aus der Drehfeder und dem Biegestab von:

$$w_{1,tot,F1} = 663.5\text{mm}$$

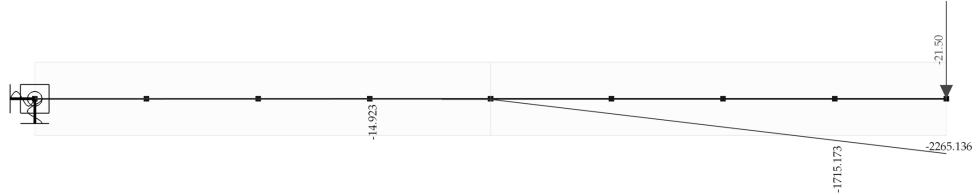


Abbildung 2.13.: Verformungen in Z-Richtung für  $F_2$  aus AxisVM-X7 mit dem Federmo dell

Für die Last  $F_2$  beträgt die maximale Gesamtverformung:

$$w_{1,tot,F2} = 2265.1\text{mm}$$

Das Modell liefert die annähernd gleichen Resultate wie die Handrechnung. Die Genauigkeit ist zufriedenstellend.

### 2.2.3.1. Modellierungsalternative Wegfeder

Wie bereits in Kapitel 2.1 erläutert, lässt sich das Verhalten der Drehfeder mit einem Wegfederpaar abbilden. Dazu wird in einem ersten Schritt die Drehfedercharakteristik in eine Wegfedercharakteristik umgerechnet. Als Grundlage dient die Modellierung gemäß Abbildung 2.14. Die Abbildung zeigt die kinematische Relation eines reinen Biegelements.

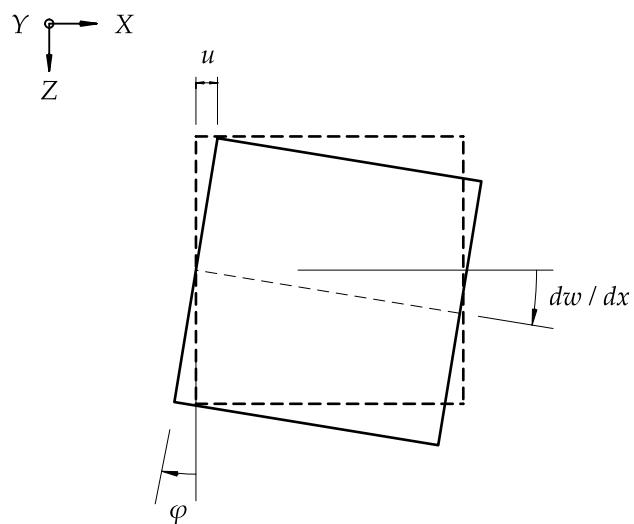


Abbildung 2.14.: Kinematische Relation eines reinen Biegeelements

Mittels den folgenden Gleichungen lässt sich so die Wegfedercharakteristik bestimmen.  
Der Abstand zwischen dem Wegfederpaar wird mit  $z$  beschrieben.

$$F = \frac{M}{z}$$

$$u = \frac{\tan(\varphi) \cdot z}{2} \simeq \frac{\varphi \cdot z}{2}$$

Durch die Berücksichtigung der trigonometrischen Funktion ist der Verlauf nicht exakt bilinear. Die umgerechnete Wegfedercharakteristik ist in Abbildung 2.15 aufgezeigt. Der Verlauf kann lediglich mit einer begrenzten Anzahl an Punkten im Diagrammeditor von AxisVM-X7 hinterlegt werden. Dies ist gleichbedeutend mit einer Diskretisierung des Verlaufs.

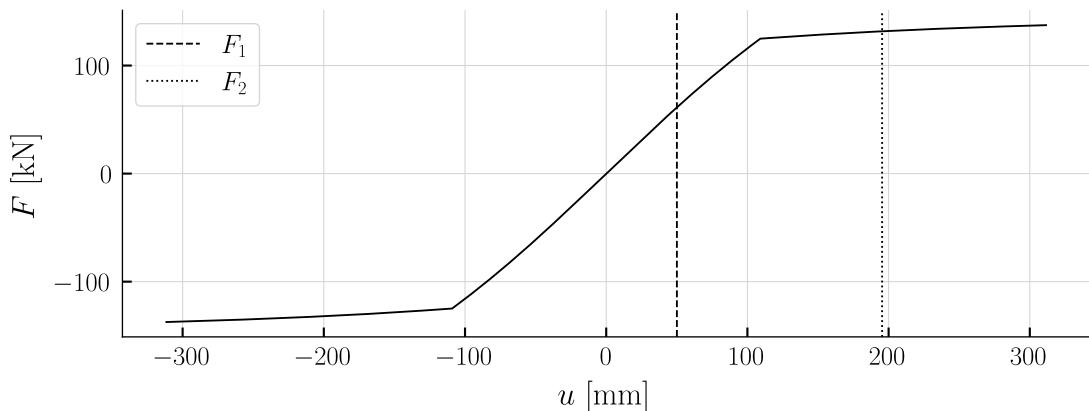


Abbildung 2.15.: Charakteristik der Wegfeder, umgerechnet aus der Drehfedercharakteristik

Die Resultate mit dem Wegfedermodell sind in der Abbildung 2.16 und Abbildung 2.17 gezeigt.

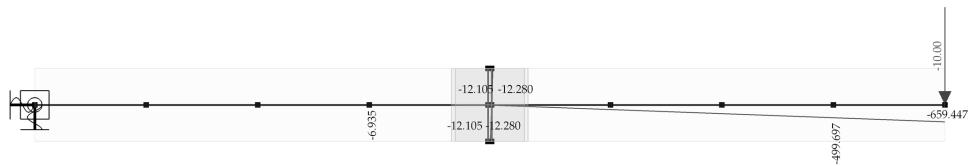


Abbildung 2.16.: Verformungen in  $Z$ -Richtung für  $F_1$  aus AxisVM-X7 mit Wegfedermodell

Die maximale Verformung in  $Z$ -Richtung für die Last  $F_1$  entspricht:

$$w_{1,tot,F1} = 659\text{mm}$$

Und für die Last  $F_2$ :

$$w_{1,tot,F2} = 2137.8\text{mm}$$

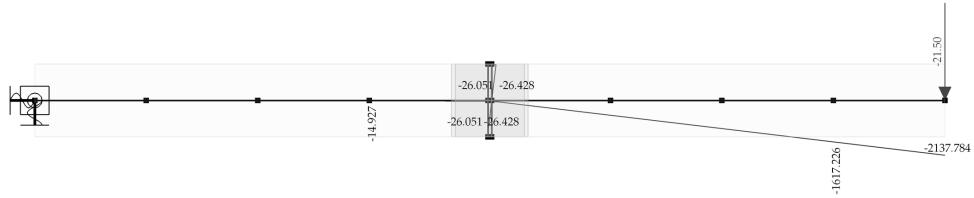


Abbildung 2.17.: Verformungen in  $Z$ -Richtung für  $F_2$  aus AxisVM-X7 mit Wegfedermodell

Die Resultate der Modellierung mittels Wegfedern zeigen Differenzen zu jenen mit der Drehfeder. Dies lässt sich auf die Diskretisierung des nichtlinearen Verlaufs der Wegfedercharakteristik zurückführen. Eine Approximation des Verlaufs führt zu beträchtlichen Abweichungen im Bereich der zweiten Laststufe. Dies ist auf die geringe Neigung, bzw. auf die Grösse von  $k_{\varphi_2}$  der Drehfedercharakteristik zurückzuführen.

Das Einführungsbeispiel zeigt wie das Biegeverhalten durch die Drehfeder beeinflusst wird. Die Verformungsgrösse ist unter Vernachlässigung der Stabverformungen direkt abhängig von der Federcharakteristik. Dies ermöglicht eine gezielte Steuerung der Verformungen. Zudem ist die Nachvollziehbarkeit durch die direkte Abhängigkeit gegeben. Das nichtlineare Verhalten ist problemlos modellierbar. Ebenfalls veranschaulicht das Beispiel, speziell die Modellierungsalternative, die Problematik der Diskretisierung, angesprochen in Kapitel 2.1.

## 3. Modellverifizierung

Das vorangegangen Kapitel beschreibt das Konzept des Federmodells und liefert anhand des Einführungsbeispiels einen nachvollziehbaren Berechnungsablauf. Um sich von der Betrachtung eines fiktiven Beispiels zu lösen, wird in diesem Kapitel die Anwendung des Federmodells auf die beiden Versuche der Vertiefungsarbeit I [1] beschrieben. Es sind die relevanten Versuchsgrundlagen aufgezeigt. Detaillierte Beschriebe sind aus [1] und der darin verwiesenen Literatur zu entnehmen.

Der Dreipunktbiegeversuch zeigt die Anwendung des Federmodells zur Bestimmung der Biegeverformungen und der Schubverformungen. Dabei wird die Ermittlung der Biege- und Schubsteifigkeit aufgezeigt. Der Vierpunktbiegeversuch greift dieselben Thematiken auf. Ergänzt wird der Versuch mit der Modellierung des Versatzmass. Das Versatzmass beschreibt den Einfluss der Längszugkraft infolge der Querkraft. Es wird erwartet, dass das Federmodell die gleichen Resultate wie die Berechnungen in der Vertiefungsarbeit I liefern.

### 3.1. Dreipunktbiegeversuch

Der Dreipunktbiegeversuch wurde aus der Versuchsserie [2] entnommen. Es handelt sich um den dritten Versuch der Versuchsserie A in der zweiten Versuchsanordnung, kurz betitelt mit A3V2. Der Versuch wurde gewählt, da vor dem Biegeversagen ein deutliches Fliessen der Längsbewehrung gemessen wurde. Zudem war die saubere Dokumentation ein ausschlaggebender Faktor.

#### 3.1.1. Versuchsbeschrieb

Der Versuchsaufbau ist in der Abbildung 3.1 gezeigt. Der Plattenstreifen ist auf einer Auflagerplatte horizontal und vertikal unverschieblich gelagert. Das zweite Lager bildet eine Presse. Die Lagerung der Presse gilt als horizontal verschieblich.

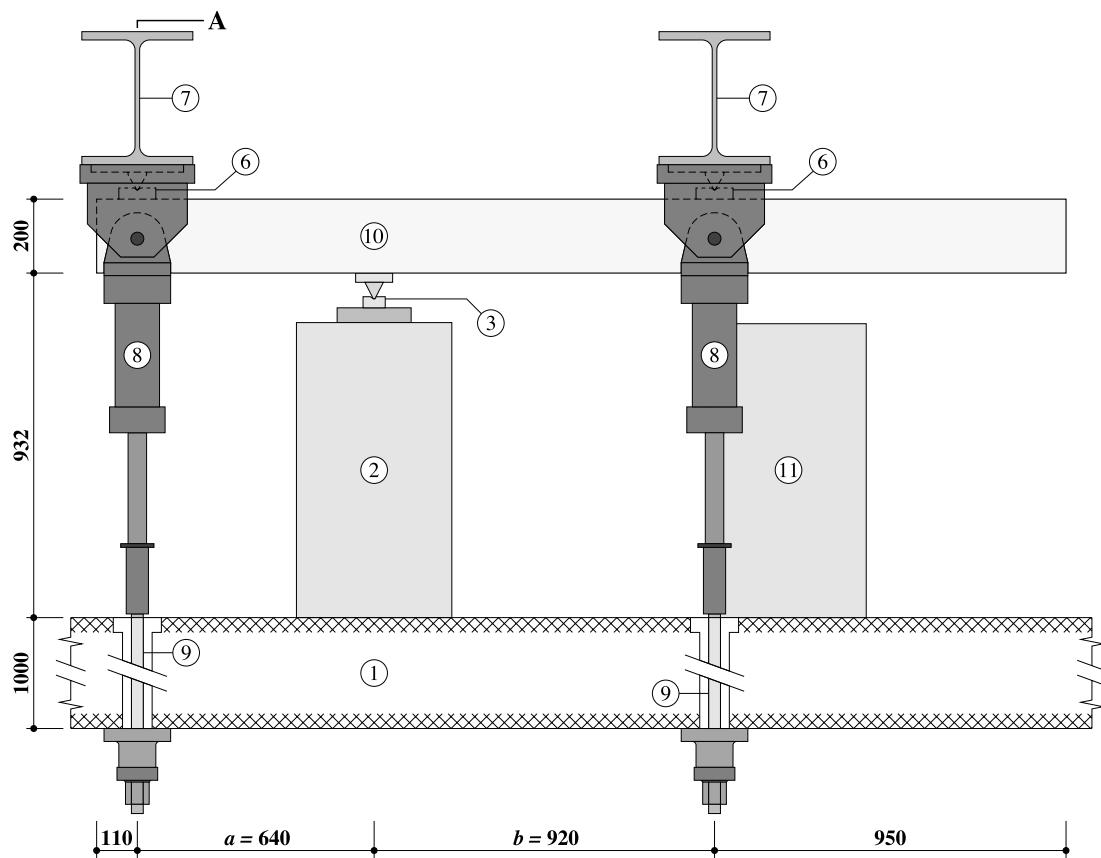


Abbildung 3.1.: Versuchsanordnung des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [2]

Der Querschnitt des Plattenstreifens ist in Abbildung 3.2 gezeigt. Das Bewehrungslayout in Querrichtung ist dargestellt. Der Querschnitt ist mit entsprechenden Abmessungen versehen.

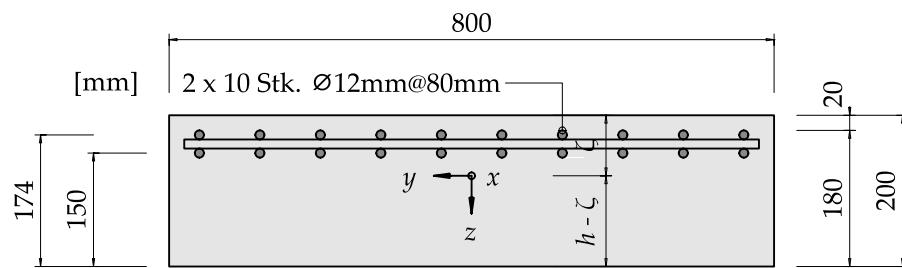


Abbildung 3.2.: Querschnitt des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [1]

Das Bewehrungslayout in Längsrichtung ist in der Abbildung 3.3 aufgezeigt. Der Plattenstreifen ist mit einer durchgehenden Längsbewehrung in der Zugzone bewehrt. Verankert ist die Längsbewehrung mit angeschweißten Platten. Die Schubdübel sind nicht durchgängig verlegt. Der letzte Bereich des Versuchskörper weist keine Schubbewehrung auf.

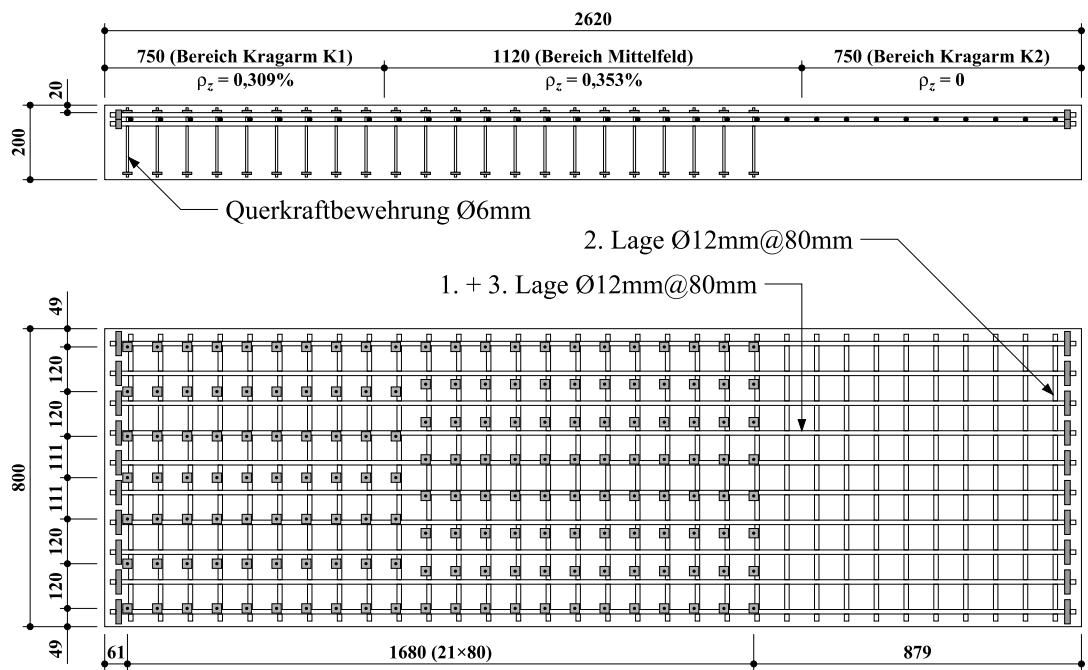


Abbildung 3.3.: Bewehrungslayout des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [2]

### 3.1.1.1. Versuchsergebnisse

Der Abschluss des Versuchsbeschriebs bilden die Versuchsergebnisse. Beschrieben werden die Messresultate, sowie der Belastungsgang. Der Plattenstreifen wurde in der ersten Versuchsanordnung bereits vorbelastet. Nach der Vorbelastung drehte man den Träger und brachte ihn in die neue Anordnung. Darauf folgte die Belastung mit der Einzellast  $F_A$ . Der Versuchskörper wurde weggesteuert bis zum Bruch gefahren. Die Aufzeichnung der Verformungen begann ab dem Belastungsbeginn der Pressen. Die Abbildung 3.4 zeigt die Verformung entlang der Stabachse für die entsprechenden Laststufen. Das Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle der Lasteinleitung ist in der Abbildung 3.5 aufgezeigt. Die Traglast des Systems lag bei circa 320 kN.

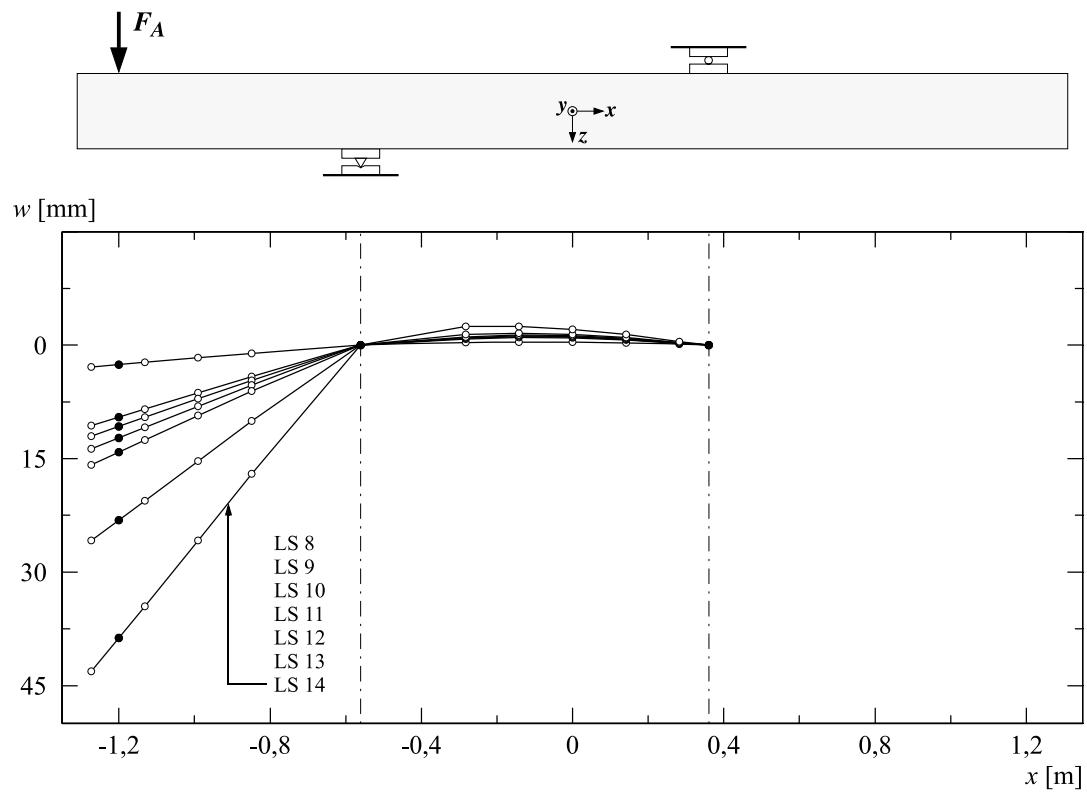


Abbildung 3.4.: Verformungsverlauf des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [2]

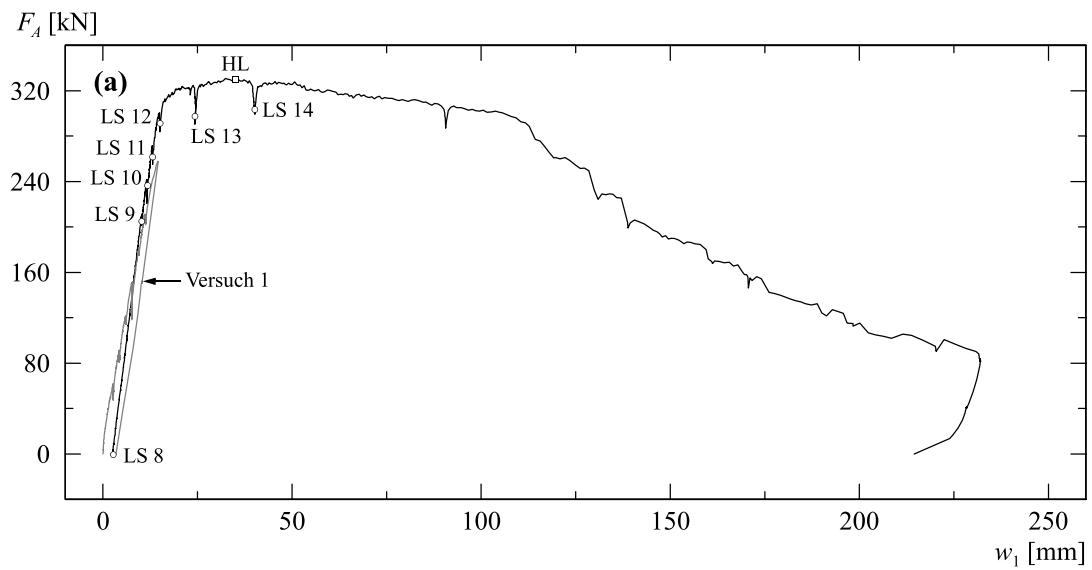


Abbildung 3.5.: Last-Verformungs-Diagramm des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [2]

### 3.1.2. Modellierung

In diesem Abschnitt wird die Modellierung des Systems aufgezeigt. Das Ziel ist es das Verhalten des Versuchskörpers mit einem simplen Modell abzubilden. Das statische System des Versuchs ist in Abbildung 3.6 dargestellt. Das Eigengewicht wird vernachlässigt, da die Verformungsmessungen nach dem Einbau des Versuchs in den Versuchsstand beginnen.

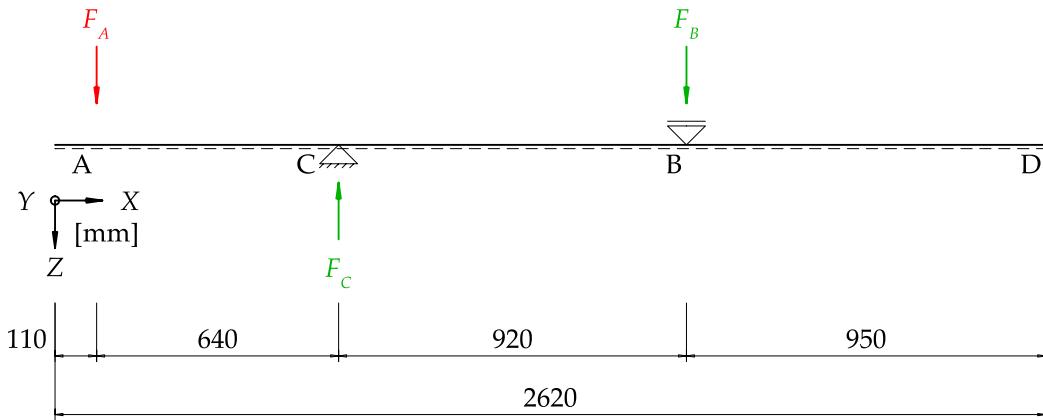


Abbildung 3.6.: Statisches System des Dreipunktbiegeversuchs

Die Auflagerbreiten werden vernachlässigt. Auf die Darstellung der Federn wird verzichtet. Diese sind in einem Abstand von 10 mm entlang der Stabachse verteilt.

$$l_E = 10.0 \text{ mm} \quad (\text{Elementlänge des biege- und schubsteifen Stabs})$$

Der Einfluss der Elementlänge wurde mittels einer Sensitivitätsanalyse ermittelt. Eine feinere Stabunterteilung resultiert zu keiner signifikanten Änderung der Resultate.

#### 3.1.2.1. Biegeverformungen

Dieser Abschnitt beschreibt die Ermittlung der Biegesteifigkeit des Systems. Zur Bestimmung der Biegeverformungen ist eine Drehfedercharakteristik zu definieren. Dazu wird anhand einer Querschnittsanalyse eine Momenten-Krümmungs-Beziehung ermittelt. Durch Multiplikation der Krümmung mit der Elementlänge resultiert eine Momenten-Verdrehungs-Beziehung, sprich eine Drehfedercharakteristik. Die Querschnittsanalyse basiert auf einem bilinearen Spannungs-Dehnungs-Verhalten für den Betonstahl. Der Beton wird mittels einem linear-elastischen ideal plastischen Werkstoffgesetz berücksichtigt. Dies resultiert zu der bilinearen Beziehung gemäß der Abbildung 3.7. Detaillierte Berechnungen sind in der Vertiefungsarbeit I [1] zu finden. In der Vertiefungsarbeit I wurde die Zugfestigkeit des Betons mitberücksichtigt. Diese wird in dieser Analyse aufgrund von Konvergenzproblemen im numerischen Modell vernachlässigt.

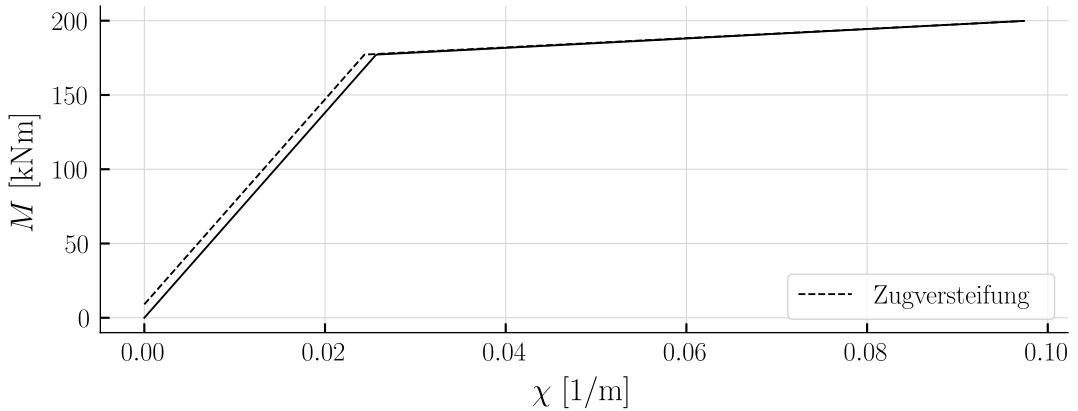


Abbildung 3.7.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Dreipunktbiegeversuchs, ohne ungerissenenen Bereich, übernommen aus [1]

Die Ableitung der Momenten-Krümmungs-Beziehung nach der Krümmung entspricht der Biegesteifigkeit. Der bilineare Verlauf zeigt eine Biegesteifigkeit für den gerissenen Querschnitt. Der zweite Bereich beschreibt die Biegesteifigkeit für den Zustand des Fließens der Bewehrung. Im gerissenen Bereich kann die Steifigkeit durch die Zugversteifung erhöht werden. Diese berücksichtigt das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen.

Die daraus resultierende Momenten-Verdrehungs-Beziehung ist in der Abbildung 3.8 aufgezeigt. Diese ist den Stabendgelenken als Drehfedercharakteristik in globaler Y-Richtung, gemäss Abbildung 3.6, zu hinterlegen.

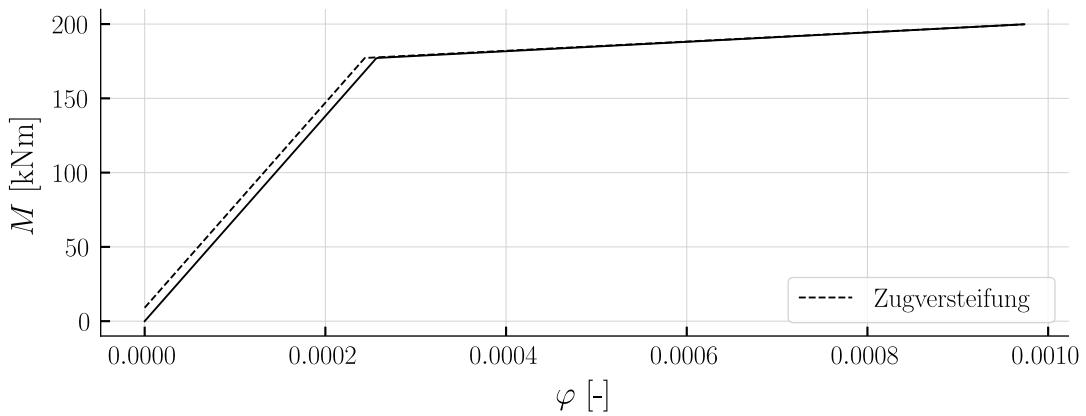


Abbildung 3.8.: Momenten-Verdrehungs-Beziehung des Dreipunktbiegeversuchs

### 3.1.2.2. Schubverformungen

Die Bestimmung der Schubsteifigkeit der einzelnen Federn wird in diesem Abschnitt aufgezeigt. Zuerst wird das Vorgehen beschrieben, danach wird die betragsmässige Ermittlung gezeigt.

Die Schubsteifigkeit wird mittels einer Wegfedercharakteristik beschrieben. Diese wird in globaler  $Z$ -Richtung, entsprechend dem Koordinatensystem aus Abbildung 3.6, be-

stimmt. Dabei wird ein Kraftfluss entsprechend den Spannungsfeldern in Abbildung 3.9 angenommen. Es wird vorausgesetzt, dass lediglich die Schubbewehrung Querkräfte aufnimmt. Ein Mitwirken des Betons wird nicht berücksichtigt. Anhand der Beanspruchung der Schubbewehrung kann deren Verformung ermittelt werden. Daraus resultiert eine Kraft-Verformungs-Beziehung.

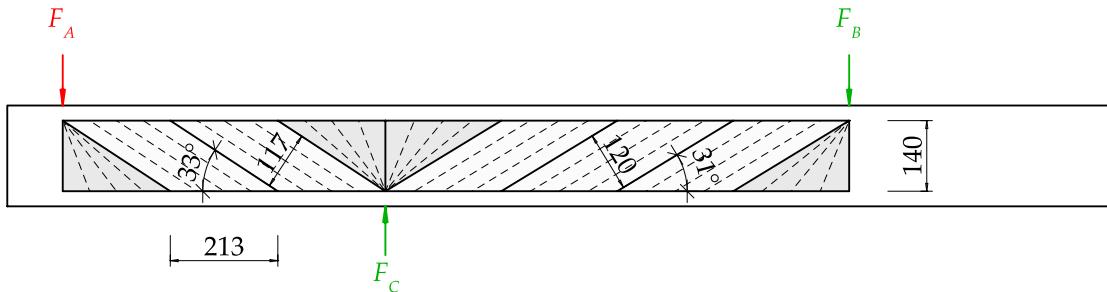


Abbildung 3.9.: Einteilung in Spannungsfelder des Dreipunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [1]

Dazu wird die Anzahl an mitwirkenden Schubdübeln pro Spannungsfeld bestimmt. Die Schubdübel weisen das Spannungs-Dehnungs-Verhalten gemäss der Abbildung 3.10 auf. Die Kraftkomponente ergibt sich aus der Querschnittsfläche der mitwirkenden Dübel multipliziert mit der Zugfestigkeit. Die Verformung wird mittels Multiplikation der Dehnungen aus der Spannungs-Dehnungs-Beziehung mit dem Hebelarm der inneren Kräfte bestimmt. Die bestimmte Wegfedercharakteristik gilt für das betrachtete Spannungsfeld. Abschliessend wird die Verformung um den Faktor gemäss folgender Gleichung reduziert.

$$\gamma_E = \frac{z \cdot \cot(\theta)}{l_E}$$

$l_E$  steht für Elementlänge

Diese erhöht die Steifigkeit jeder Feder. In der Summe bilden die Verformungen der einzelnen Federn innerhalb des Spannungsfelds die gesamte Verformung des Spannungsfelds ab.

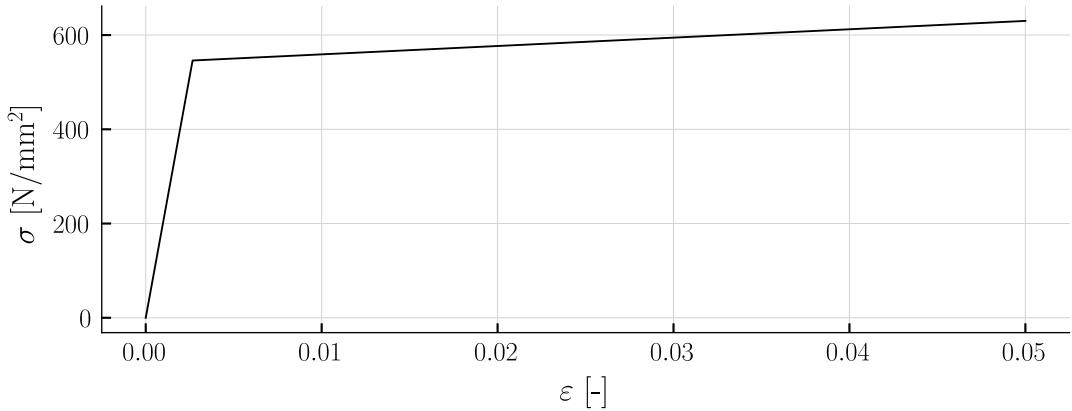


Abbildung 3.10.: Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Schubbewehrung, übernommen aus [1]

Folgend sind die Parameter zur Bestimmung der Wegfedercharakteristik gezeigt. Der gewählte Neigungswinkel der Spannungsfelder  $\theta_{c3}$  gilt für den Bruchzustand. Vereinfacht wird die daraus bestimmte Wegfedercharakteristik für sämtliche Laststufen angesetzt. Dies führt zu Abweichungen des Verformungsverhalten im Lastniveau unterhalb der Traglast.

$$\emptyset_{sw} = 6.0 \text{ mm} \quad S_{sw} = 80.0 \text{ mm} \quad b_w = 800.0 \text{ mm}$$

$$E_{sw} = 205000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad z = 140.0 \text{ mm} \quad \theta_{c3} = 34.3^\circ$$

$$f_{su} = 630.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

In einem ersten Schritt wird die Querschnittsfläche der Schubbewehrung bestimmt. Gemäss der Abbildung 3.3 ist ersichtlich, dass entlang der Plattenbreite 7 Schubdübel verlegt sind. Die Querschnittsfläche für eine Dübelreihe folgt somit zu:

$$A_{sw} = 7 \cdot \left( \frac{\emptyset_{sw}}{2} \right)^2 \cdot \pi$$

$$A_{sw} = 197.9 \text{ mm}^2$$

Wird diese nun über einen Meterstreifen verschmiert, so folgt:

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}}{S_{sw}}$$

$$a_{sw} = 2474.0 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Darauf folgt die Bestimmung des Querkraftwiderstands. Gemäss der Abbildung 3.5 ist ersichtlich, dass der Plattenstreifen bei 320 kN versagt. Der Querkraftwiderstand muss der Querkraft aus der Traglast entsprechen. Folglich ist zu kontrollieren, ob sich mittels des gewählten Neigungswinkels  $\theta_{c3}$  der geforderte Querkraftwiderstand einstellt.

$$V_R = a_{sw} \cdot z \cdot \frac{f_{su}}{\tan(\theta_{c3})}$$

$$V_R = 319.9 \text{ kN}$$

Der Querkraftwiderstand entspricht in etwa der Querkraft aus der Traglast. Die Wegfedercharakteristik lässt sich abschliessend unter Berücksichtigung des Reduktionsfaktors ermitteln. Die Berechnung des Reduktionsfaktors ist folgend gezeigt:

$$\gamma_E = z \cdot \frac{1}{\tan(\theta_{c3})} \cdot \frac{1}{l_E} = 140 \text{ mm} \cdot \frac{1}{\tan(34^\circ)} \cdot \frac{1}{10 \text{ mm}} = 21$$

Die Abbildung 3.11 zeigt das ermittelte Kraft-Verformungs-Verhalten. Das Verhalten ist analog dem bilinearen Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Dies wird den Federn in globaler Z-Richtung hinterlegt.

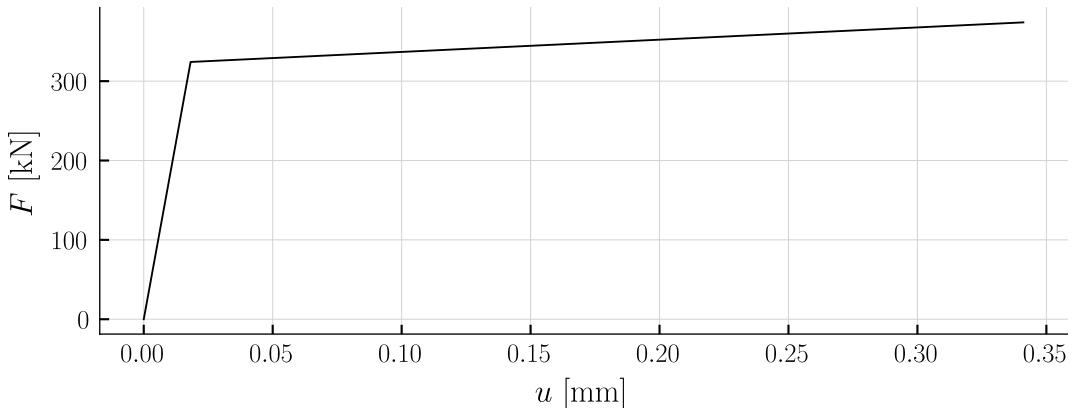


Abbildung 3.11.: Berechnete Wegfedercharakteristik der Federn in Z-Richtung des Dreipunktbiegeversuchs

### 3.1.3. Modellergebnisse

Mit den bestimmten Federcharakteristiken kann die Verformungslinie des Systems ermittelt werden. Das Modell ist in der Lage, Biege- und Schubverformungen zu beschreiben, basierend auf nichtlinearen Stoffgesetzen.

Die Abbildung 3.12 zeigt das Last-Verformungs-Diagramm des Systems bei der Lasteinleitung. Gezeigt sind die Resultate des Modells, mit und ohne Berücksichtigung der Zugversteifung, sowie die gemessenen Versuchsergebnisse aus dem Versuchsbericht.

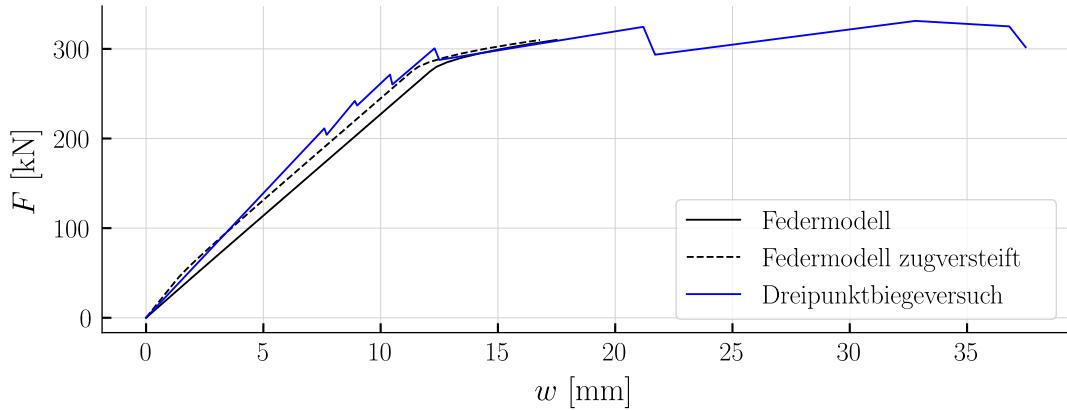


Abbildung 3.12.: Last-Verformungs-Verlauf an der Stelle der Lasteinleitung aus dem Federmodell und aus den Versuchsmessungen

Der Verdrehungsverlauf in Abbildung 3.13 lässt sich ebenfalls direkt aus dem Modell exportieren. Durch die Ableitung des Verlaufs resultiert der Krümmungsverlauf.

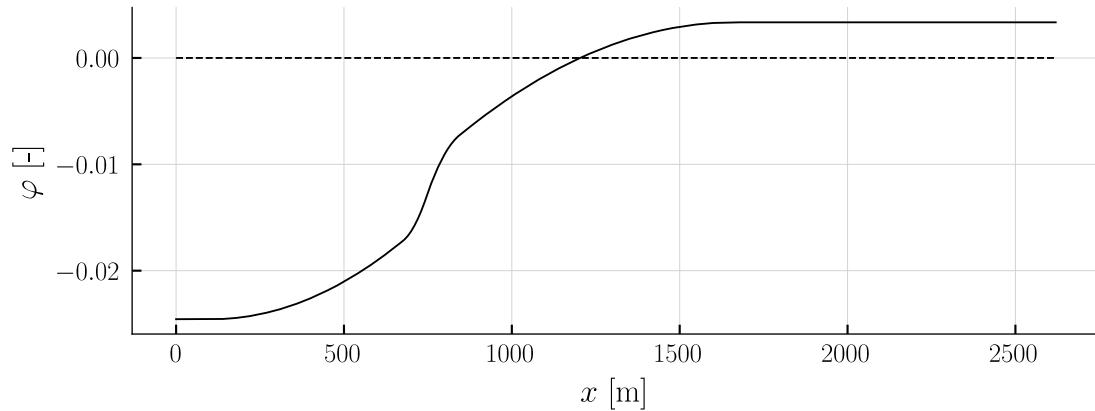


Abbildung 3.13.: Verdrehungsverlauf aus dem Federmodell für die Traglast

Der Krümmungsverlauf in der Abbildung 3.14 gibt Aufschluss über die Steifigkeit des Plattenstreifens entlang der Stabachse. Beim Auflager  $C$  fliesst die Längsbewehrung. Der dreieckige Verlauf neben dem Auflager  $C$  beschreibt den gerissenen Bereich.

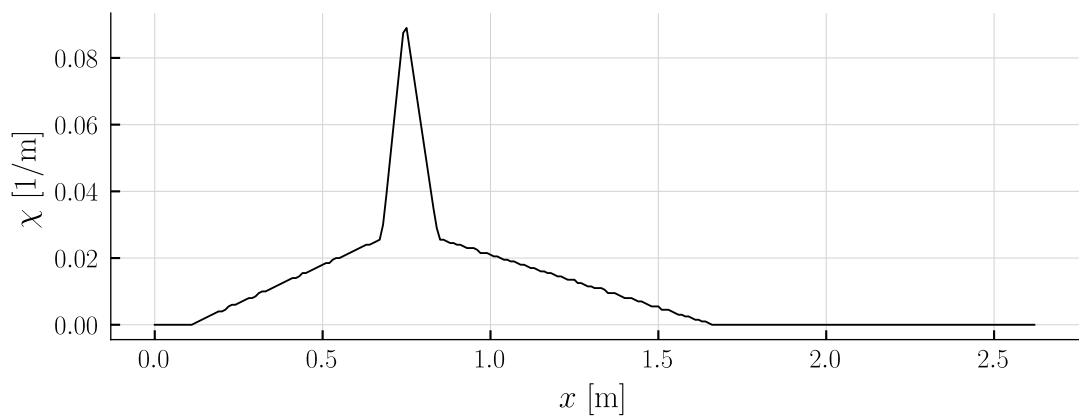


Abbildung 3.14.: Berechneter Krümmungsverlauf aus dem Verdrehungsverlauf

Das Modell beschreibt den Verformungsverlauf zufriedenstellend. Die Resultate sind deckungsgleich mit den Modellresultaten aus der Vorarbeit. Die Verifizierung des Modells am Dreipunktbiegeversuch wird als gelungen betrachtet.

## 3.2. Vierpunktbiegeversuch

Der Vierpunktbiegeversuch, kurz SV14, wurde aus der Publikation [3] entnommen. Auffallend bei diesem Versuch ist die niedrig gehaltene Schubbewehrung. Der Versuch wurde gewählt, um den Einfluss der Schubverformungen in den Vordergrund zu bringen.

### 3.2.1. Versuchsbeschrieb

Es handelt sich um einen Träger mit rechteckigem Querschnitt, gelagert als einfacher Balken. In Längsrichtung sind Stäbe mit unterschiedlicher Güte verlegt. In der Publikation sind zum Beton und den beiden Betonstählen keine umfassenden Materialprüfungen beschrieben.

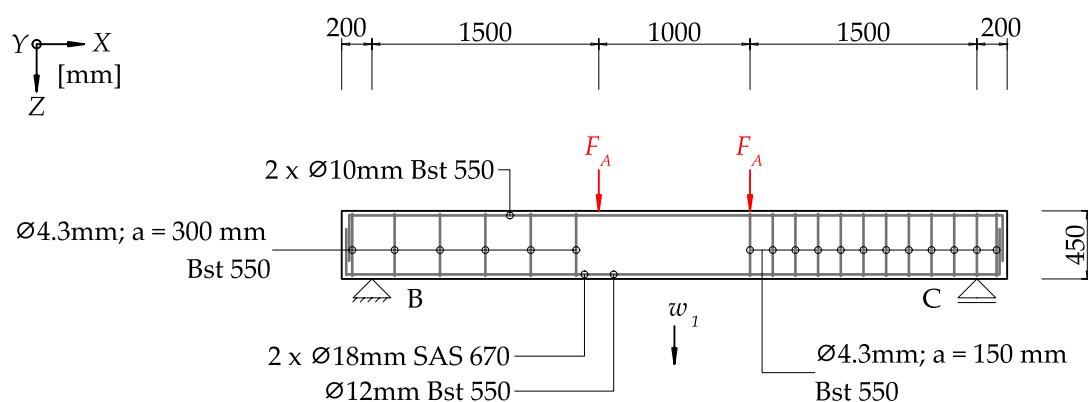


Abbildung 3.15.: Bewehrungslayout des Vierpunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [1]

Die Abbildung 3.15 zeigt die Lagerung des Trägers, sowie die Stellen der Lasteinleitung. Zusätzlich ist das Bewehrungslayout dargestellt. Die Längsbewehrung ist stossfrei verlegt. Am Ende ist diese abgebogen. Dies dient der Verankerung. Der Schubbewehrungsgehalt unterscheidet sich zwischen den Trägerhälften.

Die Abbildung 3.16 zeigt den Querschnitt mit den Hauptabmessungen. Die Position der Längsbewehrung ist vermasst. Sowie sind die Abmessungen des Betonquerschnitts dargestellt.

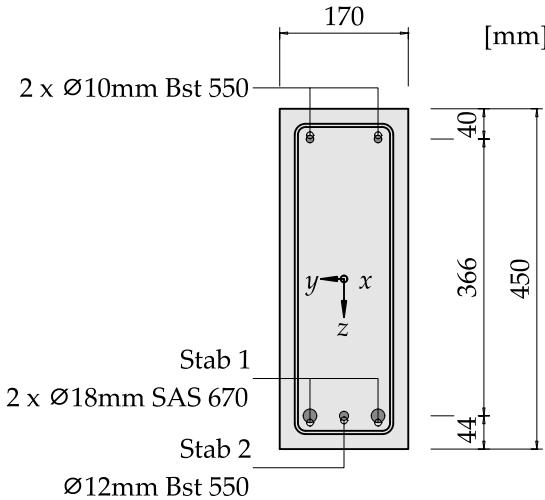


Abbildung 3.16.: Querschnitt des Vierpunktbiegeversuchs, nachgezeichnet nach [1]

### 3.2.1.1. Versuchsergebnisse

Belastet wurde der Träger an beiden Stellen  $F_A$  bis zum Versagen. Aufgrund des unterschiedlichen Schubbewehrungsgehalts erfolgte zuerst ein Schubversagen in der schwächer bewehrten Zone. Diese wurde nachträglich verstärkt. Abschliessend wurde die Last gesteigert, bis ein Biegeversagen in der Feldmitte eintrat. Gemessen wurden die Verformungen an der Stelle  $w_1$ . Die Abbildung 3.17 zeigt das Rissbild nach dem Schubversagen der schwächeren Zone.

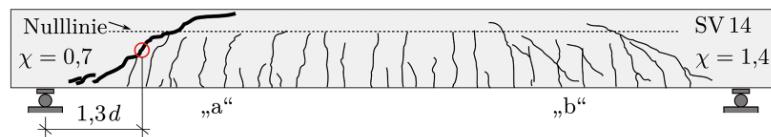


Abbildung 3.17.: Rissbild des Vierpunktbiegeversuchs nach dem Versagen der schwächeren Zone, entnommen aus [3]

Die Abbildung 3.18 zeigt einen Ausschnitt der Last-Verformungs-Diagramme der Versuche der Serie. Rechts ist der Versuch SV14 abgebildet. Die nachträgliche Verstärkung ist dargestellt, sowie die Stelle des Biegeversagens. Die Traglast beträgt circa 105 kN.

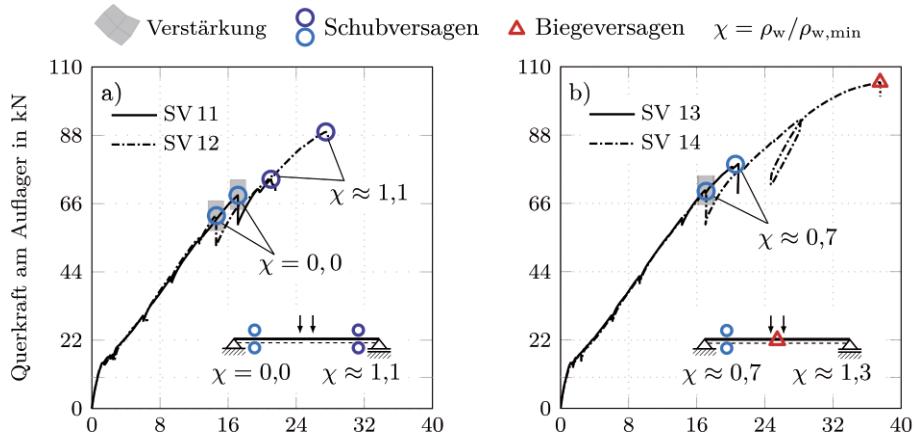


Abbildung 3.18.: Last-Verformungs-Diagramm für einen Teil der Versuchsserie, Versuch SV14 rechts, entnommen aus [3]

### 3.2.2. Modellierung

In diesem Abschnitt wird auf die Modellierung des Versuchs eingegangen. Das statische System ist in der Abbildung 3.19 gezeigt. Die Auflagerbreite wird vernachlässigt. Die Versuchsmessung der Durchbiegungen zeigt, dass die Verformung bei Lastbeginn null ist. Dies führt zur Annahme, dass der Einfluss des Eigengewichts nicht gemessen wurde. So- mit wird dieses vernachlässigt.

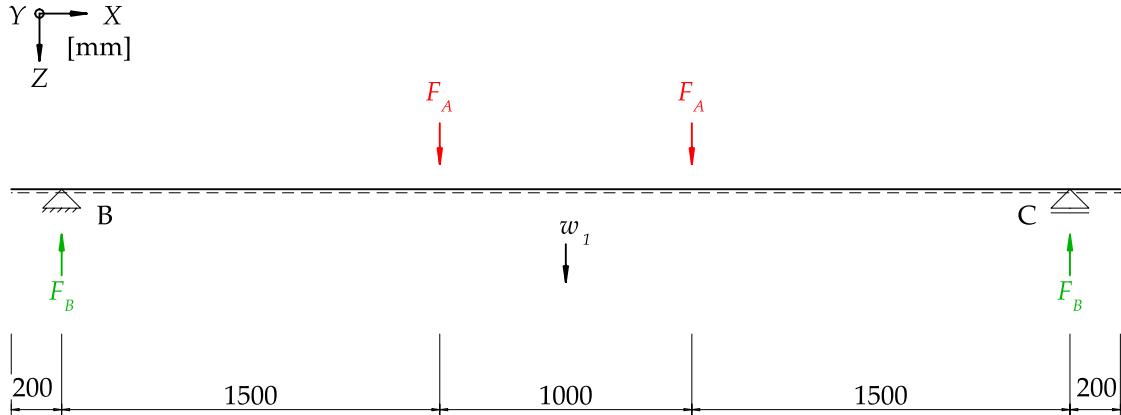


Abbildung 3.19.: Statisches System des Vierpunktbiegeversuchs, Zeichnung entnommen aus [1]

Auf die Darstellung der Federn wird verzichtet. Diese sind in einem Abstand von 10 mm entlang der Stabachse verteilt.

$$l_E = 10.0 \text{ mm} \quad (\text{Elementlänge des biege- und schubsteifen Stabs})$$

Analog zum Vorgehen beim Dreipunktbiegeversuch wurde die Elementlänge mittels einer Sensitivitätsanalyse ermittelt. Eine feinere Stabunterteilung bewirkt keine aussagekräftige Änderung der Resultate.

### 3.2.2.1. Biegeverformungen

Wie beim Dreipunktbiegeversuch wird zuerst die Biegesteifigkeit des Systems ermittelt. Dazu wird die Drehfedercharakteristik der Federn bestimmt. Die Grundlage der Drehfedercharakteristik bildet die Momenten-Krümmungs-Beziehung. Für den Querschnitt des Vierpunktbiegeversuchs gilt die Beziehung gemäss Abbildung 3.20. Für detaillierte Berechnungen ist die Vertiefungsarbeit I [1] zu konsultieren. Die Beziehung wurde basierend auf bilinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für den Betonstahl und linear-elastischen ideal-plastischen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für den Beton bestimmt. Die Zugfestigkeit des Betons wurde vernachlässigt. Detaillierte Materialkennlinien konnten der Publikation nicht entnommen werden. Das Materialverhalten wurde anhand Normgrößen modelliert.

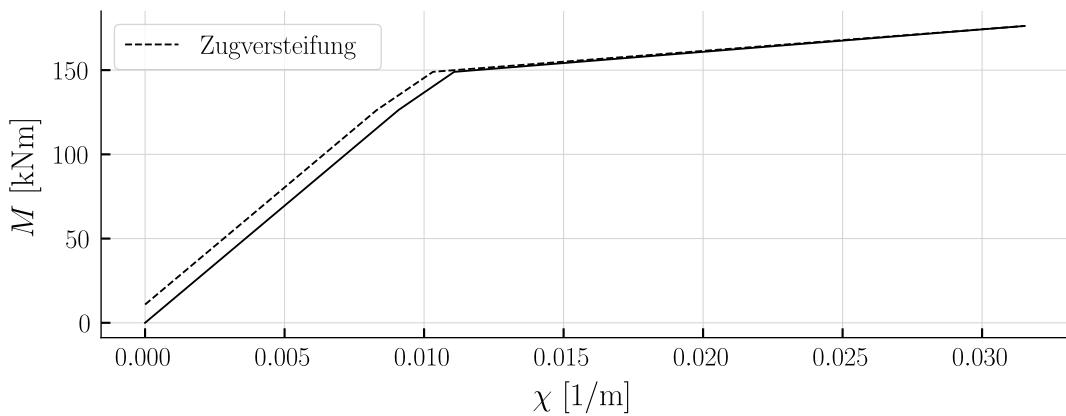


Abbildung 3.20.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Vierpunktbiegeversuchs, ohne ungerissenen Bereich, übernommen aus [1]

Die Steigung der Momenten-Krümmungs-Beziehung beschreibt die Biegesteifigkeit. Das annähernd bilineare Verhalten lässt sich der Steifigkeit des gerissenen Querschnitts und der Steifigkeit des Zustands des Fliessens der Bewehrung zuordnen. Im erstgenannten Bereich wird die Zugversteifung berücksichtigt. Damit wird eine Steifigkeitserhöhung zwischen den Rissen abgebildet. Der leicht ausgeprägte Knick in diesem Bereich ist auf das Fliessen der schwächeren Bewehrung zurückzuführen. Danach folgt das Fliessen der gesamten Bewehrung.

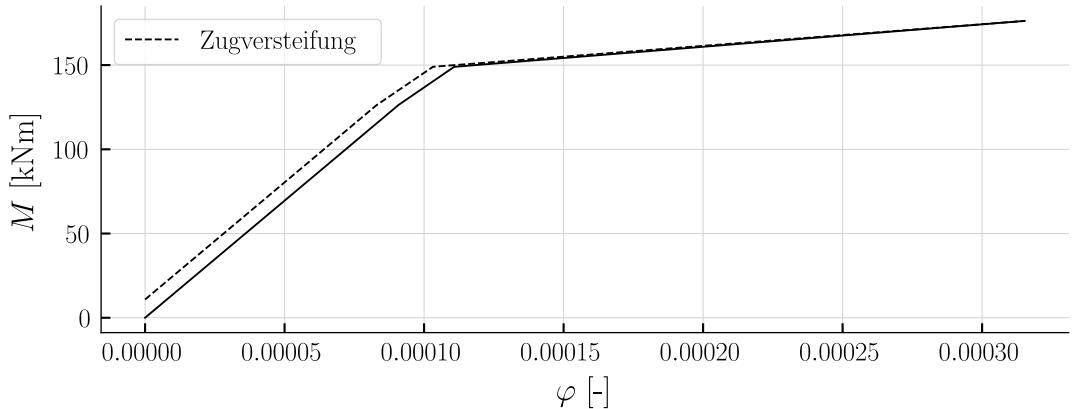


Abbildung 3.21.: Momenten-Verdrehungs-Beziehung des Vierpunktbiegeversuchs

Die Verdrehung berechnet sich mittels Multiplikation der Krümmung mit der Elementlänge. Die daraus folgende Momenten-Verdrehungs-Beziehung ist in der Abbildung 3.21 dargestellt. Diese ist den Stabendgelenken in globaler Y-Richtung, gemäss dem Koordinatensystem in der Abbildung 3.19, hinterlegt. Da die Längsbewehrung nicht abgestuft ist, bzw. der Querschnitt für den gesamten Stab gilt, ist diese Beziehung für sämtliche Elemente gültig.

### 3.2.2.2. Versatzmass

In diesem Abschnitt wird die Bestimmung des Versatzmass aufgezeigt. Beim Dreipunktbiegeversuch wurde dies vernachlässigt. Das Versatzmass beschreibt die Längszugkraft aus der Querkraft. Zur Bestimmung des Versatzmass wird der Träger in Spannungsfelder eingeteilt. Es wird ein Neigungswinkel  $\theta_{c3}$  gewählt um einen Querkraftwiderstand zu erreichen, welcher der Querkraft aus der Traglast entspricht.

Die Analyse der Schnittkörperdiagramme der Spannungsfelder ermöglicht die Bestimmung der Gurtkräfte. Durch Abzug der Längszugkraft aus der Biegebeanspruchung resultiert das Versatzmass. Die betragsmässige Ermittlung wird mit den folgenden Parametern durchgeführt:

$$z = 359.0 \text{ mm} \quad \mathcal{D}_{sw} = 4.3 \text{ mm} \quad b_w = 170.0 \text{ mm}$$

$$S_{sw} = 150.0 \text{ mm} \quad f_{su} = 715.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \theta_{c3} = 25.6^\circ$$

$$F_B = 105.0 \text{ kN}$$

Zuerst gilt es die Geometrie der Spannungsfelder zu ermitteln. Dazu wird die Querschnittsfläche der Schubbewehrung bestimmt. Für den zweischenkligen Bügel folgt diese zu:

$$A_{sw} = 2 \cdot \left( \frac{\mathcal{D}_{sw}}{2} \right)^2 \cdot \pi$$

$$A_{sw} = 29.0 \text{ mm}^2$$

Verschmiert über einen Meterstreifen resultiert:

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}}{S_{sw}}$$

$$a_{sw} = 193.6 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$$

Mit den gewählten Parametern kann der Querkraftwiderstand der Schubbewehrung bestimmt werden. Es gilt wiederum zu kontrollieren, ob der Querkraftwiderstand der Querkraft aus der Traglast entspricht.

$$V_R = a_{sw} \cdot z \cdot \frac{f_{su}}{\tan(\theta_{c3})}$$

$$V_R = 103.8 \text{ kN}$$

Die Traglast und der Querkraftwiderstand stimmen in etwa überein. Die Geometrie der Spannungsfelder ist durch den Winkel und durch den Hebelarm der inneren Kräfte definiert. Die Spannungsfeldeinteilung ist in der Abbildung 3.22 gezeigt. Diese beschreibt den Kraftfluss im System.

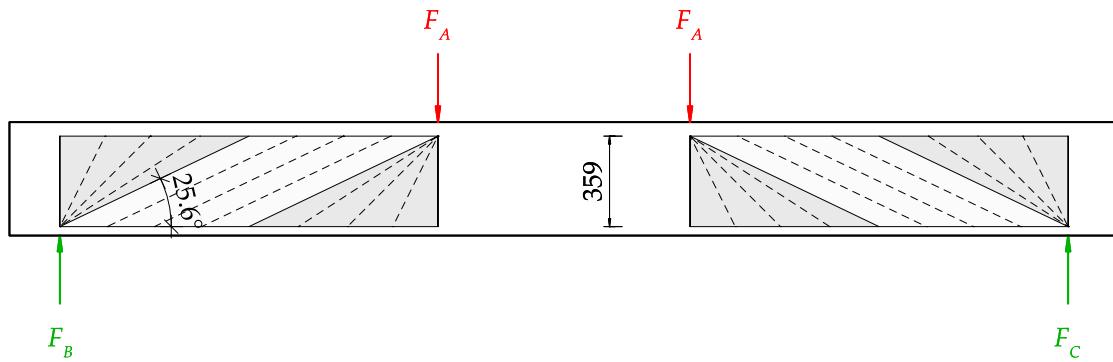


Abbildung 3.22.: Der Vierpunktbiegeversuch in Spannungsfelder eingeteilt

Wird nun Gleichgewicht an den entsprechenden Schnittkörperdiagrammen der Spannungsfelder ausgeübt, so lässt sich der Zug- und Druckkraftverlauf bestimmen. Auf die Bestimmung der Bügelkräfte  $f_{sw}$  wird nicht eingegangen. Für den zentrierten Fächer beim Auflager gilt das Schnittkörperdiagramm in der Abbildung 3.23.

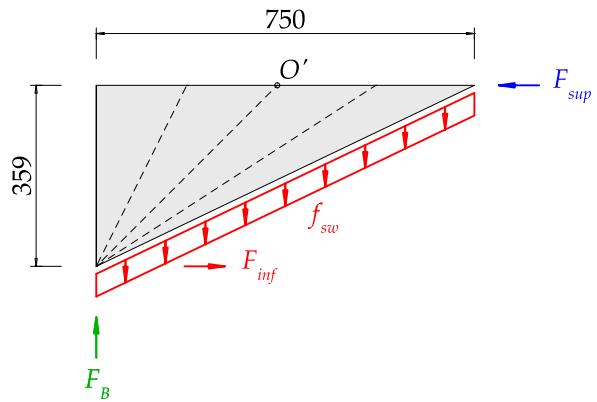


Abbildung 3.23.: Schnittkörperdiagramm des zentrierten Fächers

Die Kraft im Untergurt lässt sich durch Momentengleichgewicht um den Punkt  $O'$  bestimmen.

$$F_{inf_1} = F_B \cdot \frac{z}{\tan(\theta_{c3})} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}$$

$$F_{inf_1} = 109.7 \text{ kN}$$

Durch das Gleichgewicht der horizontalen Kräfte folgt die Obergurtkraft:

$$F_{sup_1} = F_{inf_1}$$

$$F_{sup_1} = 109.7 \text{ kN}$$

Am zentrierten Fächer schliesst das Parallelfeld an. Das entsprechende Schnittkörperdiagramm zeigt die Abbildung 3.24.

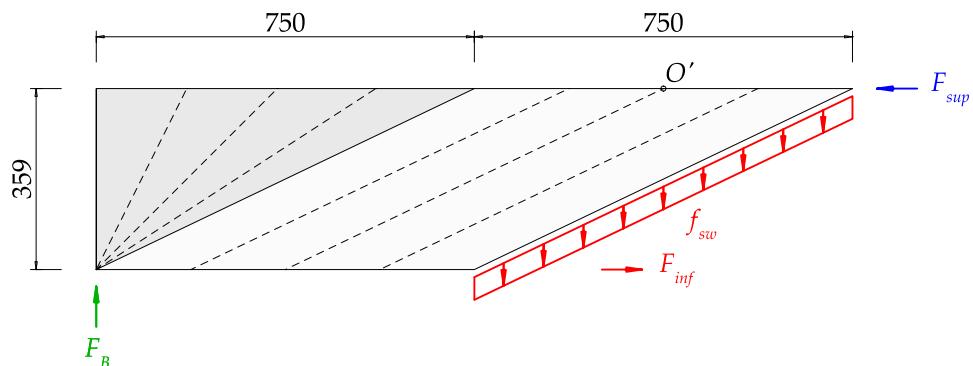


Abbildung 3.24.: Schnittkörperdiagramm des Parallelfelds

Durch Gleichgewicht der Momente um den Punkt  $O'$  folgt wiederum die Untergurtkraft:

$$F_{inf_2} = F_B \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{z}{\tan(\theta_{c3})} \cdot \frac{1}{z}$$

$$F_{inf_2} = 329.0 \text{ kN}$$

Die Obergurtkraft folgt aus dem Gleichgewicht der horizontalen Kräfte:

$$F_{sup_2} = F_{inf_2}$$

$$F_{sup_2} = 329.0 \text{ kN}$$

Das Schnittkörperdiagramm des zweiten zentriren Fächers ist in der Abbildung 3.25 gezeigt.

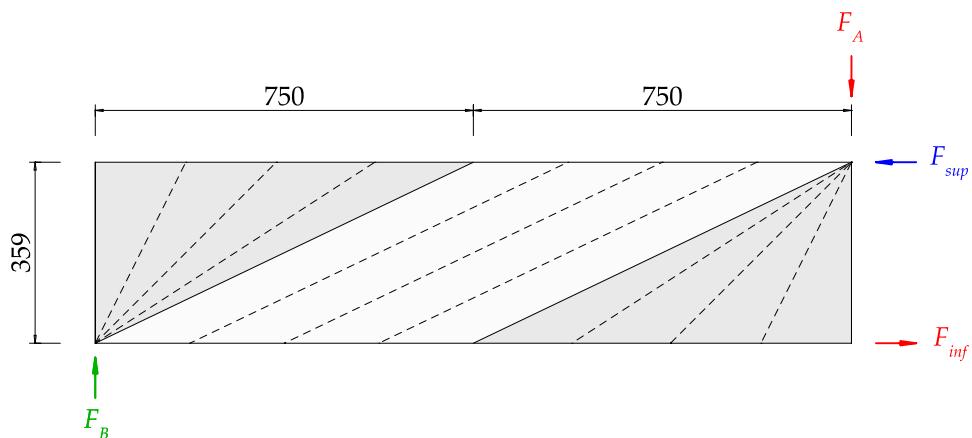


Abbildung 3.25.: Schnittkörperdiagramm des zweiten zentrierten Fächers

Die Untergurtkraft folgt zu:

$$F_{inf_3} = F_B \cdot 2 \cdot \frac{z}{\tan(\theta_{c3})} \cdot \frac{1}{z}$$

$$F_{inf_3} = 438.7 \text{ kN}$$

Die Obergurtkraft entspricht dabei:

$$F_{sup_3} = F_{inf_3}$$

$$F_{sup_3} = 438.7 \text{ kN}$$

Die Gurtkraftverläufe sind in der Abbildung 3.26 aufgezeigt. Der Zuggurtverlauf ist mit der Längszugkraft aus dem Biegemoment ergänzt. Dazu wurde der Biegemomentenverlauf durch den Hebelarm der inneren Kräfte dividiert. Die Differenz zwischen der gesamten Untergurtkraft und dem Anteil aus dem Biegemoment führt zum Versatzmass.

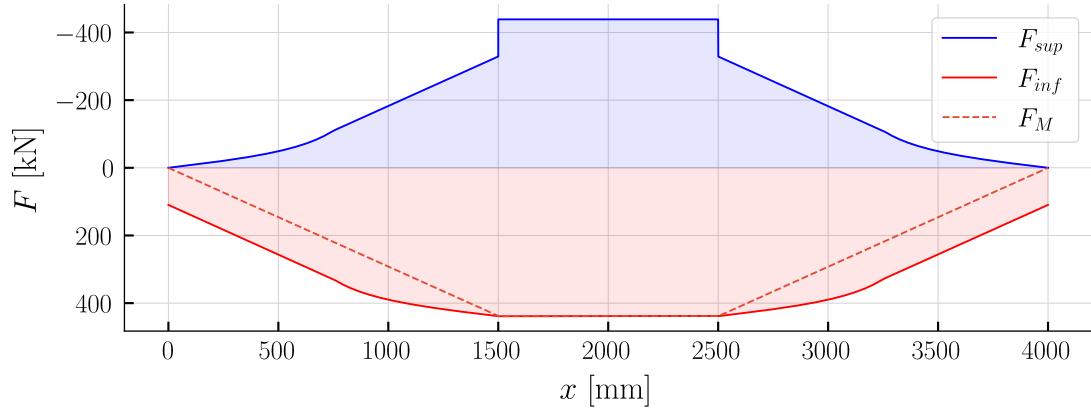


Abbildung 3.26.: Gurtkraftverläufe bestimmt anhand der Spannungsfelder in Abbildung 3.22. Dargestellt ist der gesamte Gurtkraftverlauf, sowie der Anteil aus dem Biegemoment

Wird das Versatzmass mit dem Hebelarm der inneren Kräfte multipliziert, so resultiert das Versatzmoment.

$$\Delta_F = F_{inf} - F_M$$

$$\Delta_M = \Delta_F \cdot z$$

Das Versatzmoment ist in der Abbildung 3.27 entlang der Stabachse aufgezeigt. Dieses wird dem Modell auf Seiten der Einwirkung hinterlegt. Es wird ein Lastfall definiert, welcher zu dem Biegemomentenverlauf gemäss dem Versatzmoment führt.

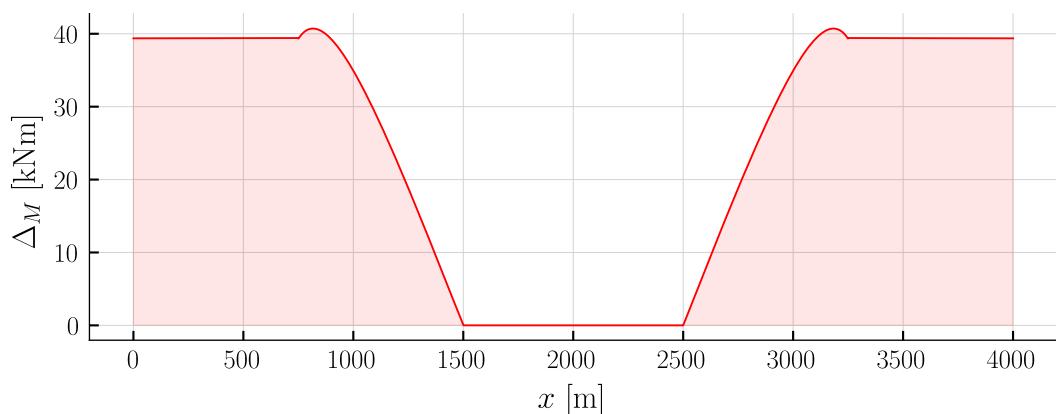


Abbildung 3.27.: Versatzmoment dargestellt entlang der Stabachse

### 3.2.2.3. Schubverformungen

In diesem Abschnitt wird die Bestimmung der Schubsteifigkeit aufgezeigt. Die Schubverformungen werden im Modell mittels einer Wegfedercharakteristik in globaler Z-Richtung, gemäss dem Koordinatensystem in der Abbildung 3.19, berücksichtigt. Die Wegfedercharakteristik basiert auf der Spannungsfeldmodellierung gemäss der Abbildung 3.22. Durch die Annahme, dass lediglich die Schubbewehrung Querkräfte aufnimmt, kann die Beanspruchung dieser ermittelt werden. Gekoppelt durch die Spannungs-Dehnungs-Beziehung kann deren Verformung bestimmt werden. Dies führt zur geforderten Kraft-Verformungs-Beziehung.

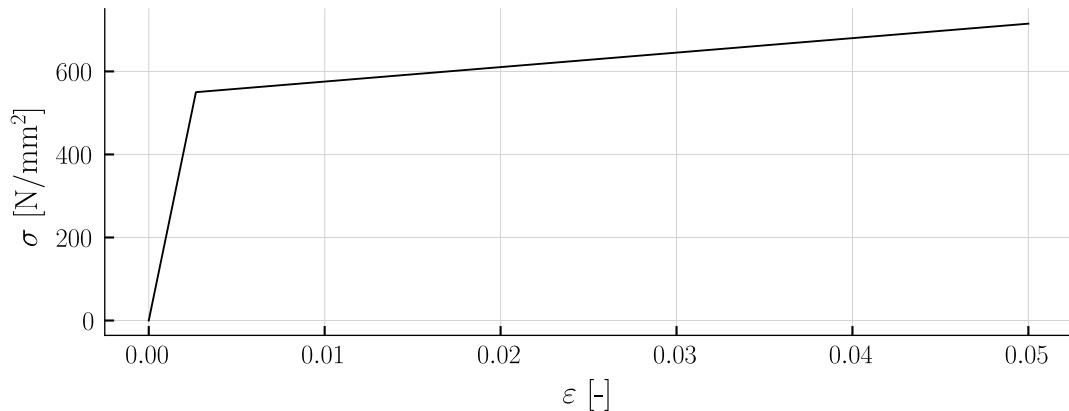


Abbildung 3.28.: Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Schubbewehrung, übernommen aus [1]

Wird das Spannungs-Dehnungs-Verhalten gemäss der Abbildung 3.28 berücksichtigt. So resultiert mit der Querschnittsfläche der Schubbewehrung pro Spannungsfeld die entsprechende Kraftkomponente der Wegfedercharakteristik. Die Verformungskomponente entspricht der Dehnung multipliziert mit dem Hebelarm der inneren Kräfte. Dies führt zum Kraft-Verformungs-Verhalten für ein Spannungsfeld. Um die Wegfedercharakteristik einer einzelnen Feder zu erhalten, ist die Verformung um die Anzahl an Stabelementen im Spannungsfeld zu reduzieren. Der Reduktionsfaktor zur Erhöhung der Steifigkeit der Feder folgt zu:

$$\gamma_E = z \cdot \frac{1}{\tan(\theta_{c3})} \cdot \frac{1}{l_E}$$

$$\gamma_E = 75$$

Die Abbildung 3.29 zeigt das Kraft-Verformungs-Verhalten für die Federn des Stabmodells in vertikaler Richtung. Das Verhalten ist analog dem des bilinearen Spannungs-Dehnungs-Diagramms.

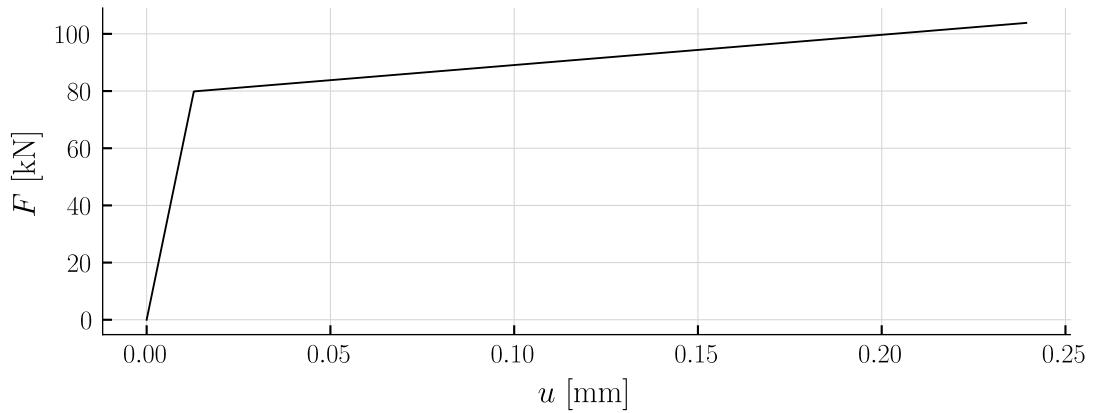


Abbildung 3.29.: Berechnete Wegfedercharakteristik der Federn des Vierpunktbiegeversuches

### 3.2.3. Modellergebnisse

Mit den oben bestimmten Federcharakteristiken kann die Verformungslinie des Systems ermittelt werden unter Berücksichtigung der Schub- und Biegeverformungen basierend auf nichtlinearen Stoffgesetzen. Die Abbildung 3.30 zeigt das Last-Verformungs-Diagramm des Systems am Punkt  $w_1$ . Der Verformungsverlauf zeigt Abweichungen zu den gemessenen Resultaten.

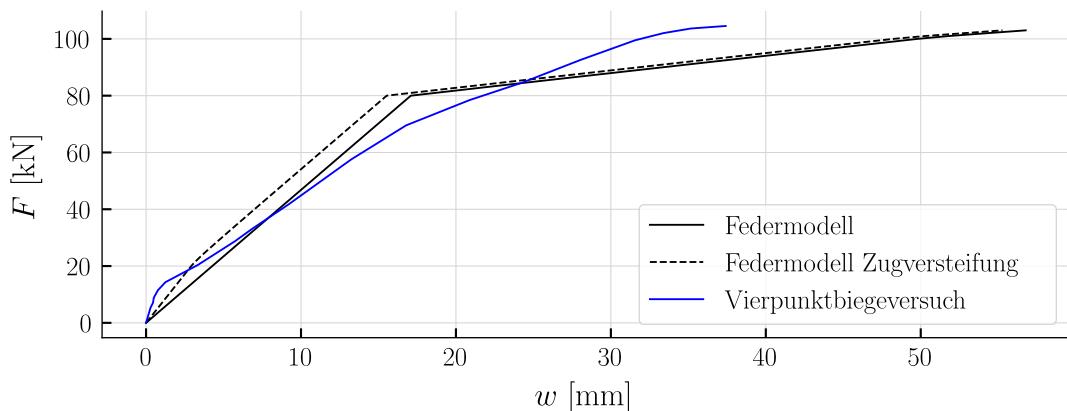


Abbildung 3.30.: Last-Verformungs-Verlauf am Punkt  $w_1$  aus dem Federmodell und aus den Versuchsmessungen

Bis zum Erreichen des ersten Knicks im Verlauf des Federmodells ist das Modell etwas zu steif. Das zu steife Verhalten lässt sich auf die Vernachlässigung der Stauchung der Druckdiagonalen und der Gurtdehnung zurückführen. In der Abbildung 3.31 ist ein Modell zur Ermittlung der Schiebung am Fachwerk gezeigt. Dies bietet einen Ansatz zur erweiterten Bestimmung der Schubsteifigkeit. Der Knick resultiert aus dem Fliessen der Schubbewehrung. Bei den Versuchsresultaten ist bei gleicher Verformung ebenfalls ein Knick zu erkennen. Jedoch ist das Lastniveau nicht deckungsgleich.

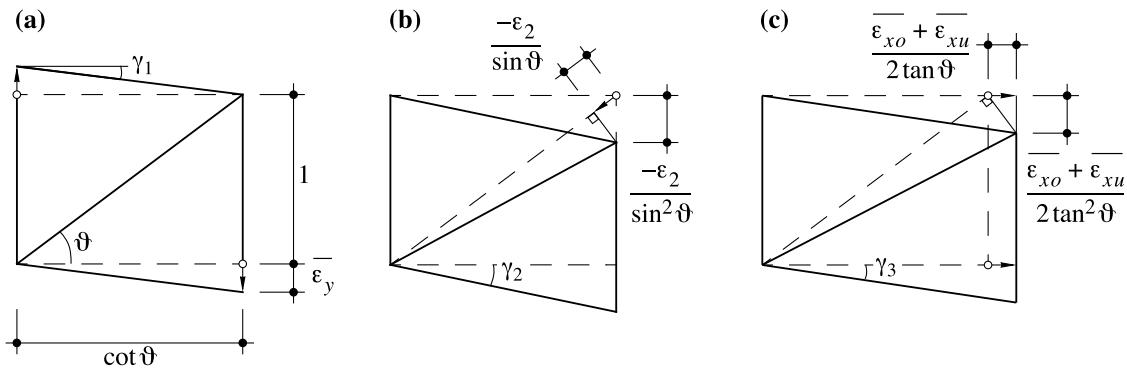


Abbildung 3.31.: Ermittlung der Schiebung am Fachwerk, a) Dehnung der Bügel b) Stauchung der Diagonalen c) mittlere Gurtdehnung, nach [4]

Das darauffolgende verfestigende Verhalten weicht deutlich vom Versuchsverhalten ab. Des Weiteren hat die Berechnung im Modell ein Schubversagen prognostiziert. Die Versuchsdaten beschreiben ein Biegeversagen im Feld. Das Modell beschreibt das Versuchsverhalten mangelhaft. Dies ist den Unschärfen der Stoffgesetze zuzuschreiben.

Abschliessend wird der aus dem Modell exportierte Verdrehungsverlauf aufgezeigt. So wie wird der daraus berechnete Krümmungsverlauf aufgezeigt.

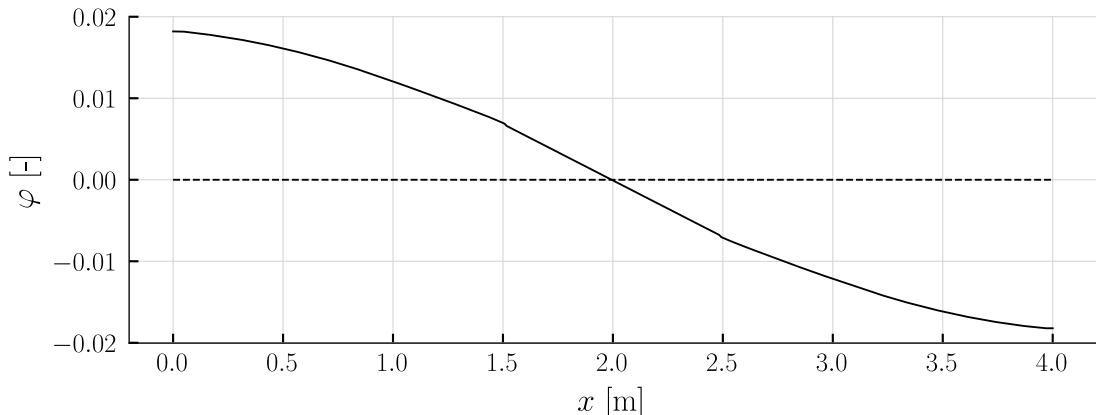


Abbildung 3.32.: Verdrehungsverlauf aus dem Federmodell für die Höchstlast des Vierpunktbiegeversuchs

Der Krümmungsverlauf gibt Aufschluss über den Biegesteifigkeitenverlauf entlang der Stabachse. Die Darstellung weist Unreinheiten auf. Der grobe Verlauf ist jedoch erkennbar. Es zeigt sich, dass die Längsbewehrung in Feldmitte zu fliessen beginnt.

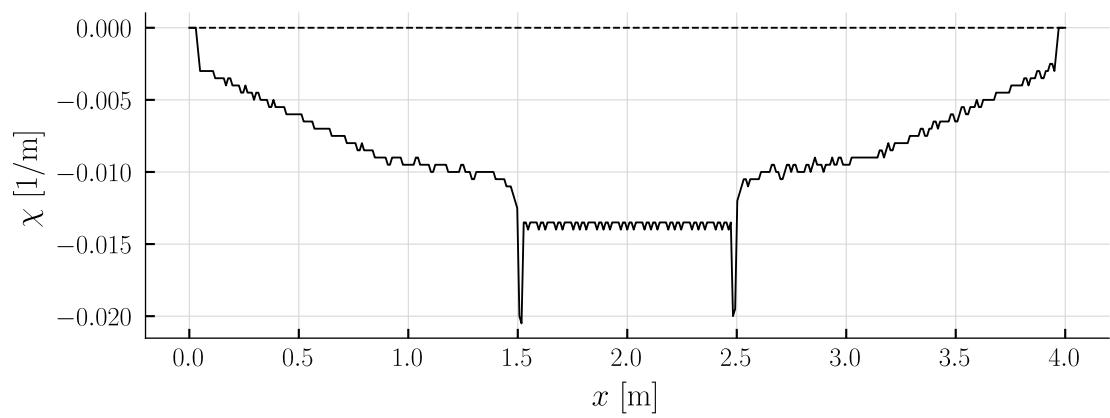


Abbildung 3.33.: Berechneter Krümmungsverlauf aus dem Verdrehungsverlauf für den Vierpunktbiegeversuch

Obwohl der Verformungsverlauf mangelhaft beschrieben wird, deckt sich das Verhalten des Federmodells mit den Berechnungen der Vorarbeit. Die Modellverifizierung wird somit als gelungen betrachtet.

## 4. Modellanwendung - vorgespannter Träger

Nachdem das Kapitel 3 die Anwendbarkeit des Modells bestätigt hat, wird in diesem Kapitel ein Versuch eines vorgespannten Trägers mittels dem Federnmodell nachgerechnet. Der Versuchsbeschrieb liefert die nötigen Grundlagen. Es wird die Bestimmung der Momenten-Krümmungs-Beziehung aufgezeigt. Auf das Versatzmass und auf die Schubverformungen wird nicht eingegangen. Abschliessend werden die Versuchsresultate mit den berechneten Größen verglichen und kommentiert. Zudem wird die Compatible Stress Field Method (CSFM) mittels der Software IDEAStatiCa angewendet und mit dem Federnmodell verglichen.

### 4.1. Versuchsbeschrieb

Der vorgespannte Träger T6 wurde aus dem Versuchsbericht [5] entnommen. Es handelt sich um einen einfachen Balken mit einer Auskragung. Die Geometrie des Versuchs in Längsrichtung ist in Abbildung 4.1 gezeigt.

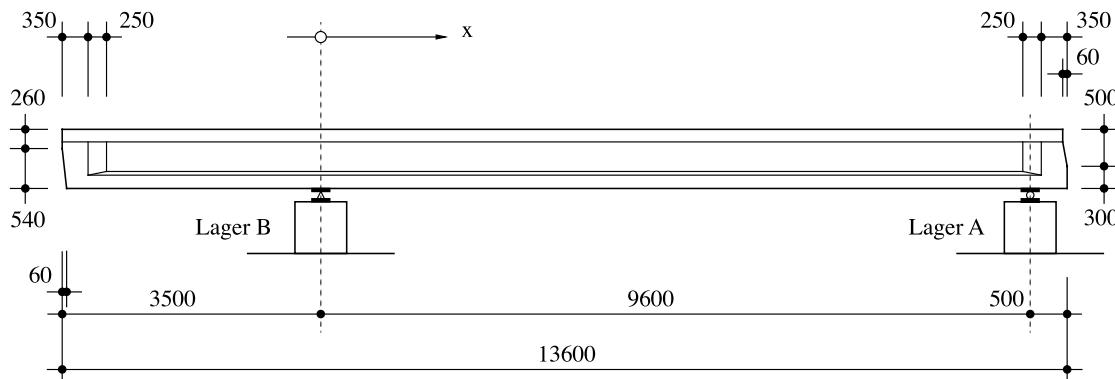


Abbildung 4.1.: Geometrie des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5]

Der Querschnitt des Trägers ist in Abbildung 4.2 gezeigt. Versehen ist das I-Profil mit den Abmessungen. Der Steg ist am Stabende und Anfang verbreitert.

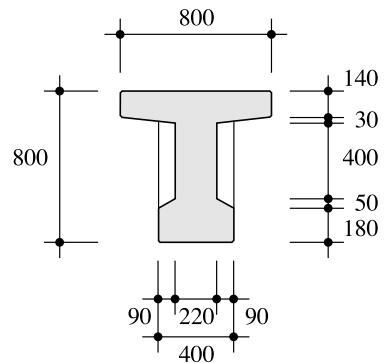
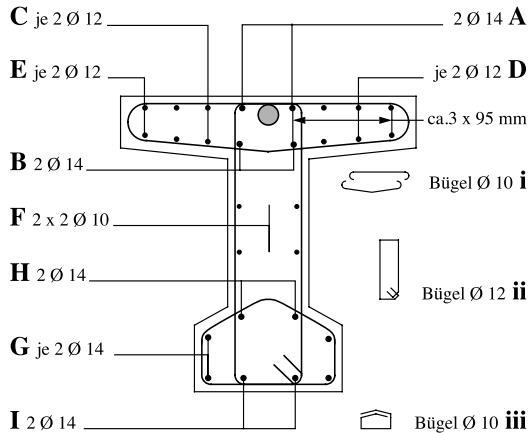


Abbildung 4.2.: Geometrie des Querschnitts des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5]

Das Bewehrungslayout im Querschnitt zeigt die Abbildung 4.3. Die Bewehrungsüberdeckung in allen Richtungen beträgt 20 mm. Mit Grossbuchstaben A bis I sind die Bewehrungslagen in Längsrichtung beschrieben. Die Schubbügel sind mit den Kleinbuchstaben i bis iii bezeichnet.

Schnitt A



Schnitt B

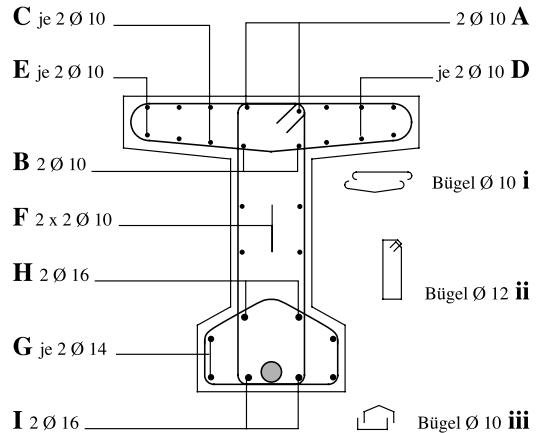
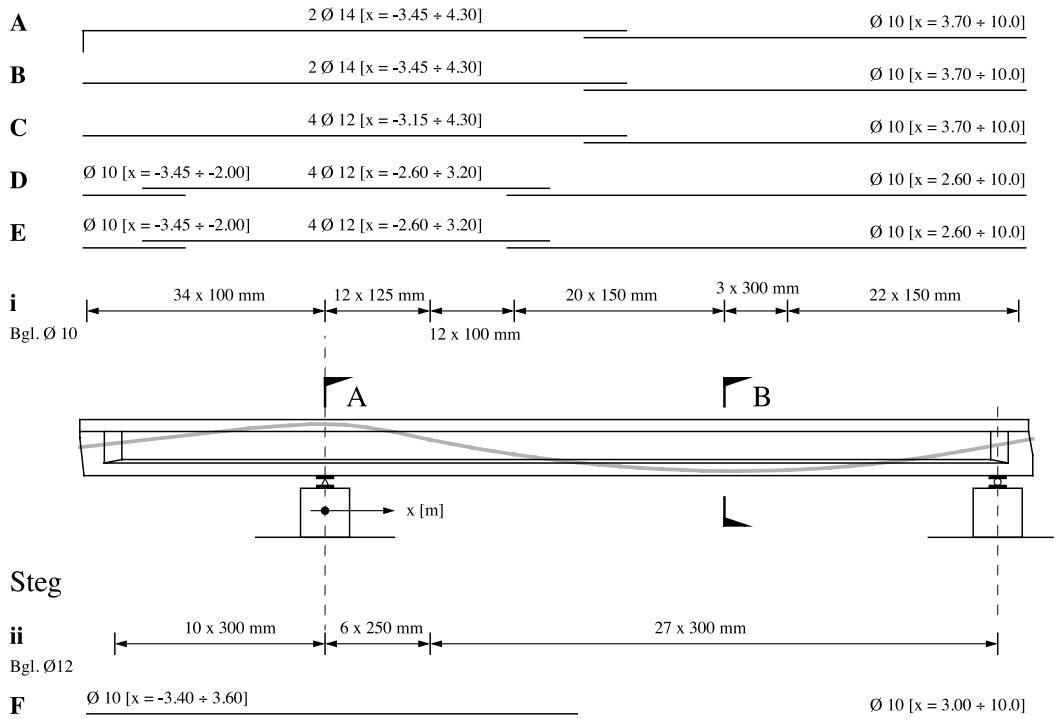


Abbildung 4.3.: Bewehrungslayout im Querschnitt des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5]

Die verlegte schlaffe Bewehrung ist in der Abbildung 4.4 gezeigt. Diese ist an mehreren Punkten abgestuft. Die Stosslänge beträgt jeweils 60 cm.

### oberer Flansch



### unterer Flansch

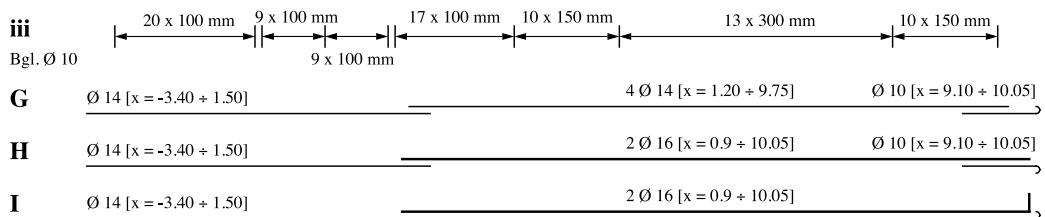


Abbildung 4.4.: Bewehrungslayout in Längsrichtung des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5]

Die Position der Vorspannung ist in der Abbildung 4.5 gezeigt. Das Kabel konnte im Mittel bis auf 730 kN vorgespannt werden. Das Spannkabel besteht aus 4 Litzen mit Durchmesser 0.6". Eingelegt sind diese in einem Stahlhüllrohr, welches nachträglich ausinjiziert wurde.

Gerade	Parabel	Parabel		Parabel	Parabel	Gerade
2.5	1.0	1.0	4.7	3.4	1.0	
404	684	740	620	60	373	525

Abbildung 4.5.: Vorspannungslayout des Versuchsträgers T6. Horizontaler Abstand [m] und vertikale Position [mm], gemessen von der Unterkante des Trägers, entnommen aus [5]

Die Lastsituation zeigt die Abbildung 4.6. Am Ende des Kragarms greift eine Einzellast  $P$  an. Mit  $Q$  wird eine Streckenlast simuliert. Der Träger ist an den Punkten  $A$  und  $B$  gelenkig gelagert. Zusätzlich ist der Träger beim Auflager  $B$  horizontal gehalten.

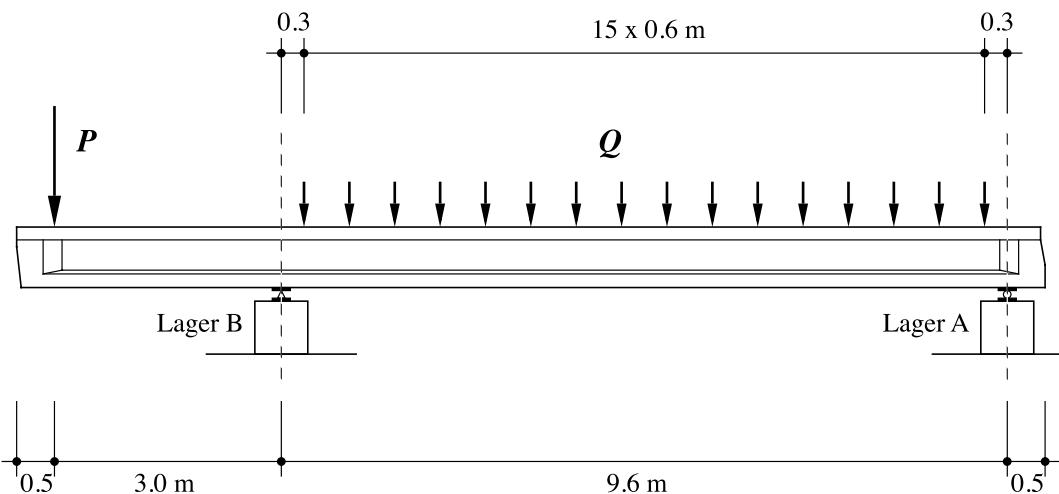


Abbildung 4.6.: Lagerung und Position der Pressenkräfte des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5]

#### 4.1.1. Berechnungsgrößen

In diesem Abschnitt werden die allgemein verwendeten Parameter aufgelistet. Gegliedert nach den einzelnen Aspekten des Versuchs. Aufgezeigt sind sämtliche Baustoffkennwerte. Dazu sind die geometrischen Größen erwähnt.

##### 4.1.1.1. Vorspannung

Der folgende Abschnitt charakterisiert die Vorspannung. Aufgezeigt ist die mittlere initiale Vorspannkraft, die Fliessgrenze der Litzen, sowie deren Zugfestigkeit und entsprechende Bruchdehnung. Ebenfalls dargestellt ist der Elastizitätsmodul, die Querschnittsfläche

des Spannglieds und der angewendete Verlustfaktor. Die aus den Proben bestimmte Materialkennlinien sind in der Abbildung 4.7 gezeigt.

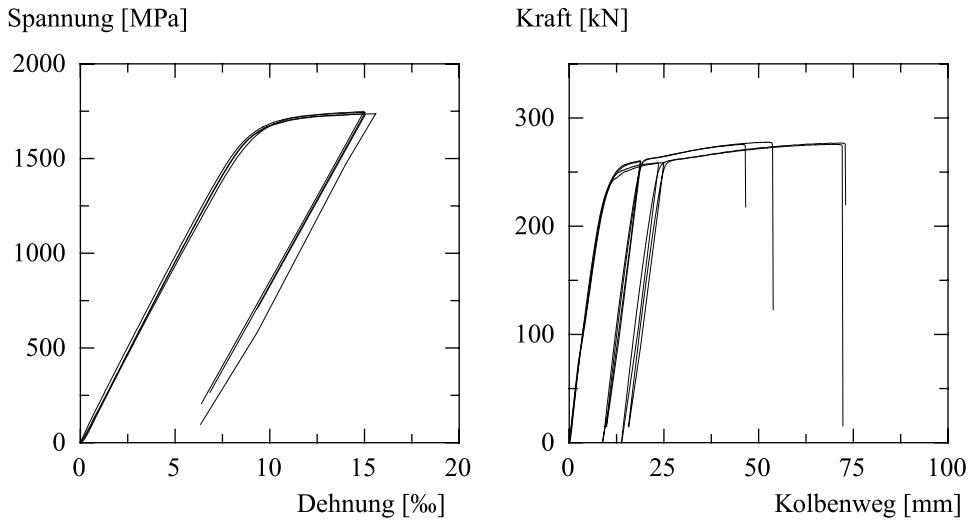


Abbildung 4.7.: Spannungs-Dehnungs-Diagramm und Kraft-Verformungs-Diagramm des Spannstahls mittels Zugproben ermittelt, entnommen aus [5]

$$f_{py} = 1706.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad f_{pu} = 1855.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad V_{om} = 730.0 \text{ kN}$$

$$A_p = 596.0 \text{ mm}^2 \quad E_p = 190000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad \varepsilon_{pu} = 1.5 \%$$

$$\eta = 0.9 \text{ (Verlustfaktor)}$$

Der Verlustfaktor wird ohne Berücksichtigung von Langzeiteffekten auf 90% geschätzt. Daraus resultiert die Vorspannkraft zu:

$$P_\infty = \eta \cdot V_{om}$$

$$P_\infty = 657.0 \text{ kN}$$

Die Spannung im Spannglied aufgrund der Vorspannung definiert sich als:

$$\sigma_{P_\infty} = \frac{P_\infty}{A_p}$$

$$\sigma_{P_\infty} = 1102.3 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

#### 4.1.1.2. Beton

Die Parameter sind Mittelwerte aus Betonwürfel- und Betonzylinerproben, entnommen aus dem Versuchsbericht [5]. In der Abbildung 4.8 ist das Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Betonproben für die gesamte Versuchsserie aufgezeigt.

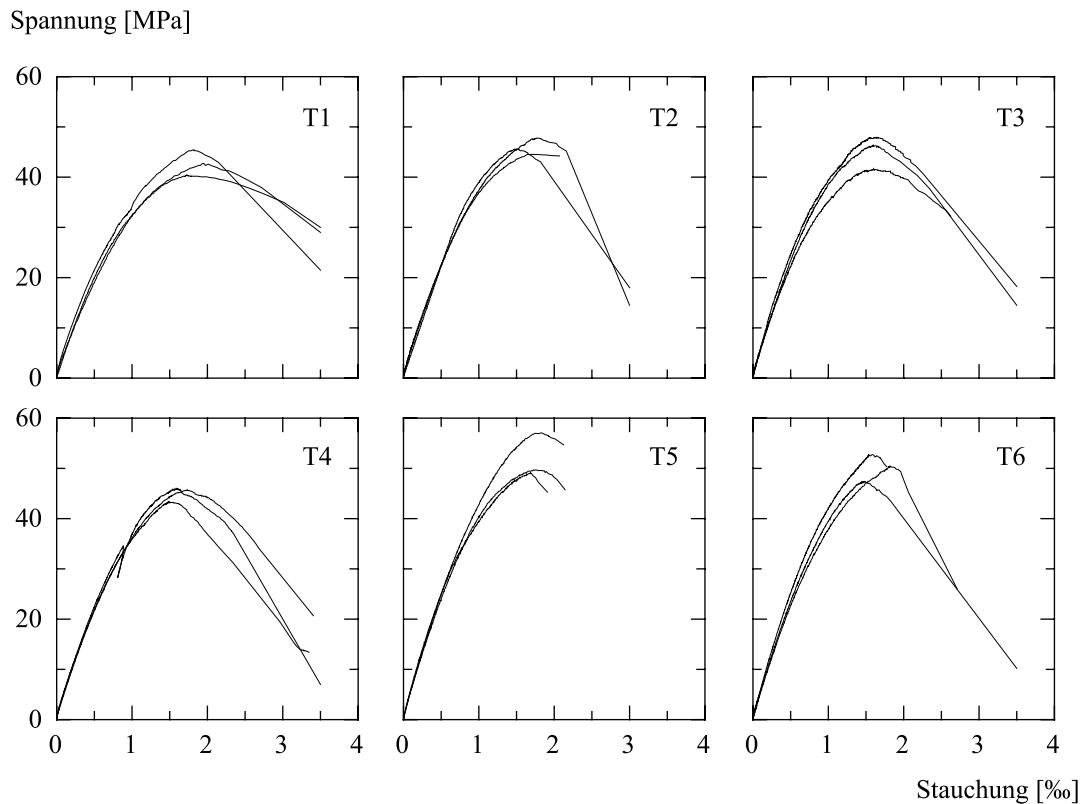


Abbildung 4.8.: Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Betons, dargestellt sind diese für die Versuchskörper  $T_1$  bis  $T_6$ , entnommen aus [5]

Dabei beschreibt  $f_c$  die maximale Druckfestigkeit. Die Zugfestigkeit wird dabei mit  $f_{ct}$  bezeichnet. Der Elasitzitätsmodul  $E_c$ , die Dichte  $\rho_c$  und die Bruchstauchung  $\varepsilon_{cu}$  schliessen den Beschrieb ab.

$$f_c = 52.10 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad f_{ct} = 4.30 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad E_c = 50200.00 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\rho_c = 2409.00 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \varepsilon_{cu} = 0.35 \%$$

#### 4.1.1.3. Betonstahl

Die dargestellten Parameter sind Mittelwerte aus den durchgeföhrten Zugproben am Betonstahl. Diese sind ebenfalls aus dem Versuchsbericht [5] entnommen worden.

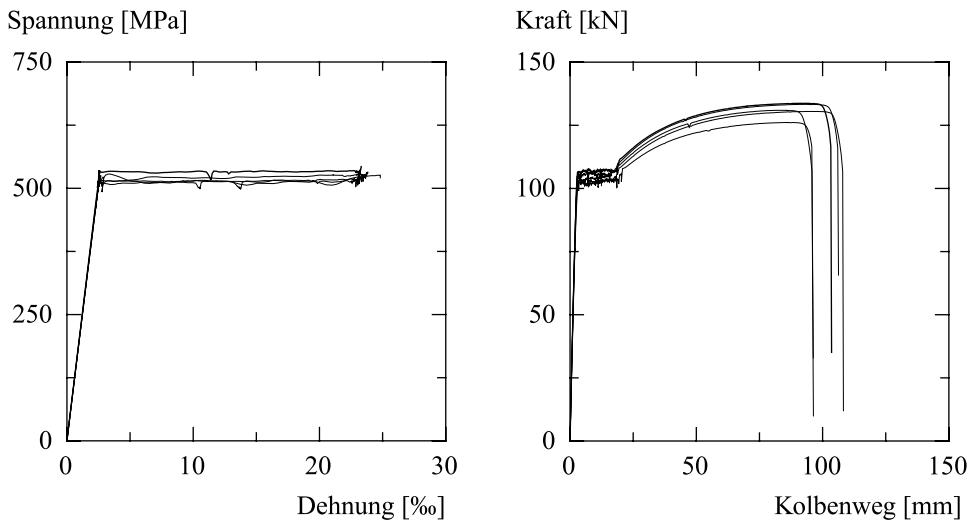


Abbildung 4.9.: Spannungs-Dehnungs-Diagramm und Kraft-Verformungs-Diagramm mittels Zugproben ermittelt für den Betonstahl, entnommen aus [5]

Die Abbildung 4.9 zeigt das Spannungs-Dehnungs-Verhalten, sowie das Kraft-Verformungs-Verhalten der Probe eines Durchmessers 16 mm Stabs. Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ist lediglich das Fließplateau dargestellt. Dabei beschreibt  $f_{sy}$  die Fließgrenze,  $f_{su}$  die Zugfestigkeit.  $\varepsilon_{su}$  bezeichnet die Bruchdehnung und  $E_s$  den Elastizitätsmodul.

$$f_{sy} = 500.0 \text{ MPa} \quad f_{su} = 630.0 \text{ MPa} \quad \varepsilon_{su} = 12.7 \%$$

$$E_s = 205000.0 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

#### 4.1.1.4. Geometrie

Die Parameter der Geometrie des Querschnitts beziehen sich auf die Abbildung 4.2. Der Schwerpunkt  $S_z$  des Querschnitts ist von der Unterkante aus gemessen.

$$h_{sup} = 140.0 \text{ mm} \quad h_{inf} = 180.0 \text{ mm} \quad h = 800.0 \text{ mm}$$

$$b_{inf} = 400.0 \text{ mm} \quad b_{sup} = 800.0 \text{ mm} \quad S_z = 459.5 \text{ mm}$$

$$L = 13600.0 \text{ mm}$$

#### 4.1.2. Versuchsergebnisse

Der Versuchsbeschrieb wird mit den gemessenen Resultaten abgeschlossen. Gemessen wurde der Einfluss der Vorspannung beim Einbringen des Trägers, sowie das Verhalten unter Belastung mittels Pressenkräften. Die Abbildung 4.10 zeigt den Verformungsverlauf für den gesamten Träger in Abhängigkeit der Laststufen.

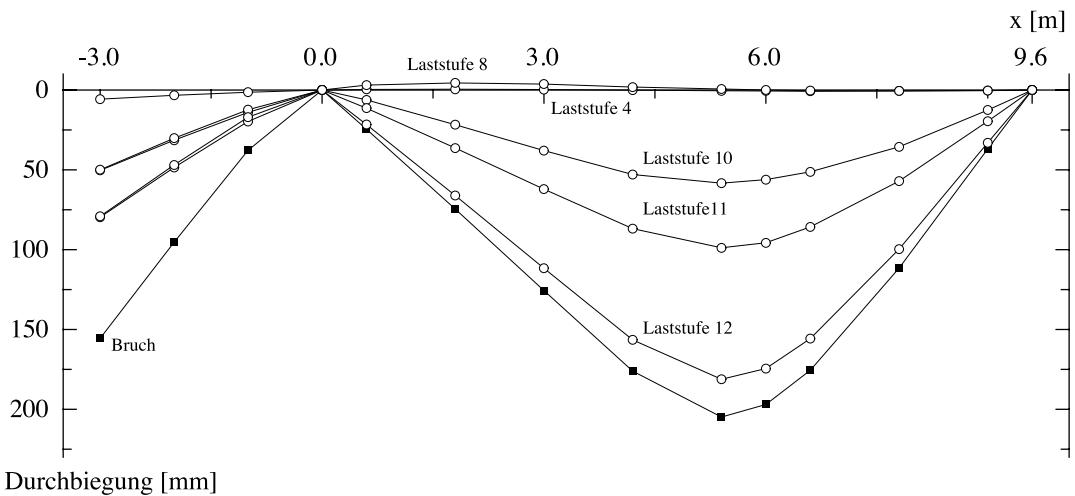


Abbildung 4.10.: Verformungsverlauf des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5]

Die Abbildung 4.12 zeigt oben links das Kraft-Verformungs-Diagramm für die Einzellast  $P$  mit der gemessenen Verformung  $w_{10}$  an der Stelle 10, gemäss der Abbildung 4.11. Oben rechts ist das Kraft-Verformungs-Diagramm für die simulierte Streckenlast  $Q$  und die Verformung  $w_{18}$  aufgezeigt.

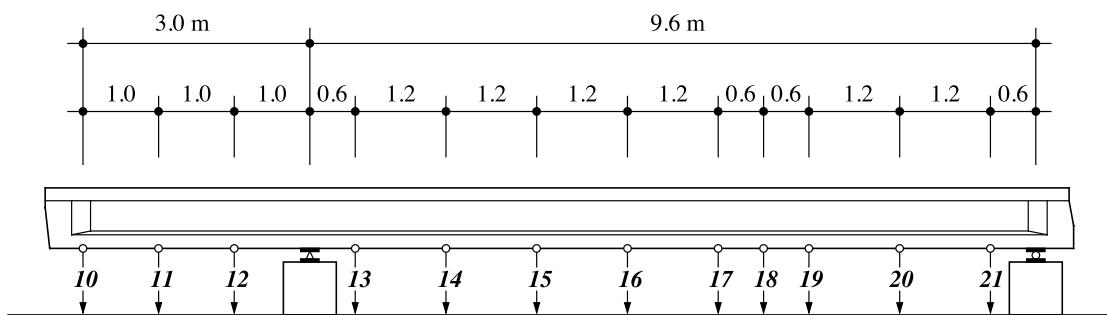


Abbildung 4.11.: Messstellen des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5]

Das Diagramm unten links gibt Aufschluss über den Belastungshergang. Zunächst wurde die Einzellast  $P$  gesteigert bis ca. 480 kN. Ab dieser Stufe verblieb die Einzellast in etwa auf diesem Niveau, die Streckenlast  $Q$  wurde abschliessend erhöht, bis der Träger versagte. Das Versagen geschah schlagartig, durch das Versagen der Vorspannlitzen links neben dem Auflager B. Der Versuch wurde weggesteuert gefahren.

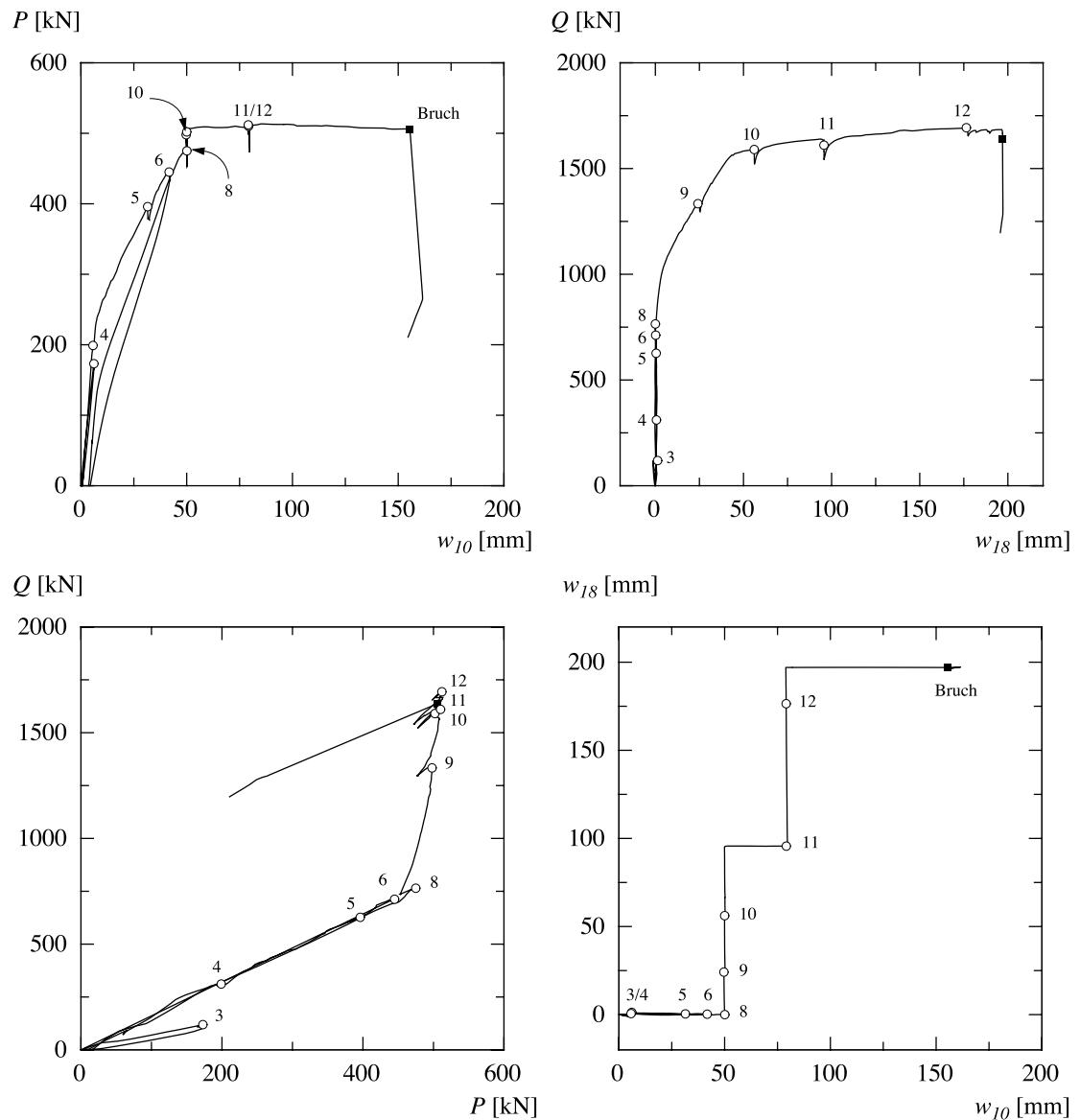


Abbildung 4.12.: Last-Verformungs-Verhalten des Versuchsträgers T6, entnommen aus [5]

## 4.2. Modellierung

Basierend auf dem Versuchsbeschrieb wird in diesem Abschnitt auf die Modellierung eingegangen. Der Versuch wird mittels dem Federmodell modelliert. Das statische System dazu ist in der Abbildung 4.13 aufgezeigt.

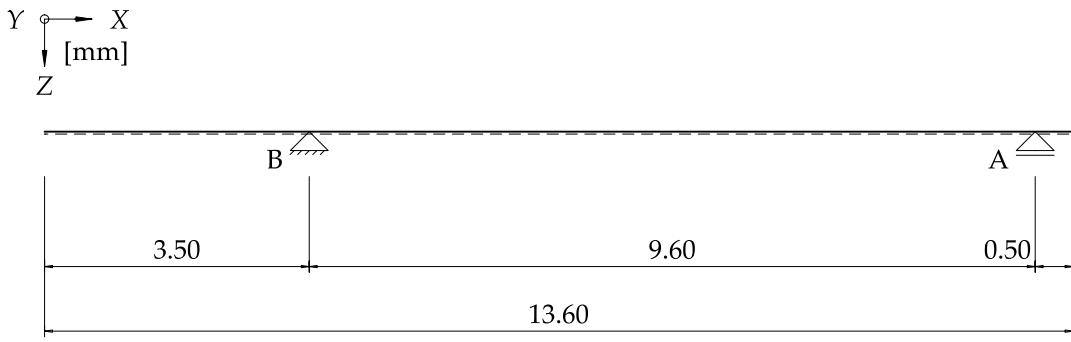


Abbildung 4.13.: Statisches System des Versuchs  $T_6$

Die Auflagerbreiten sind vernachlässigt. Auf die Darstellung der Federn wird verzichtet. Diese sind in einem Abstand von  $l_E$  angeordnet.

$$l_E = 10.0 \text{ cm} \quad (\text{Elementlänge des biege- und schubsteifen Stabs})$$

Die Elementlänge wird im Vergleich mit den Versuchen aus dem Kapitel 3 deutlich grösser gewählt. Dies ist auf die aufwändige Bestimmung der Momenten-Krümmungs-Beziehung zurückzuführen.

#### 4.2.1. Lastfälle

Den Einwirkungen ist bei diesem Versuch besondere Beachtung zu schenken. Dies ist aufgrund der erhöhten Komplexität bei der Modellierung durch die unterschiedliche Belastungsgeschwindigkeit. Sowie wird die Vorspannung als Einwirkung interpretiert. Ebenso ist aufgrund der Vorspannung das Eigengewicht zu berücksichtigen, da dies den negativ gerichteten Umlenkkräften entgegenwirkt.

Es wird zwischen den Lastfällen Eigengewicht, Vorspannung und den Pressenkräften unterschieden. Diese werden folgend beschrieben:

##### 4.2.1.1. Eigengewicht

Das Eigengewicht wird als Streckenlast auf dem gesamten statischen System angeordnet, ermittelt aus der Betonquerschnittsfläche und entsprechender Dichte.

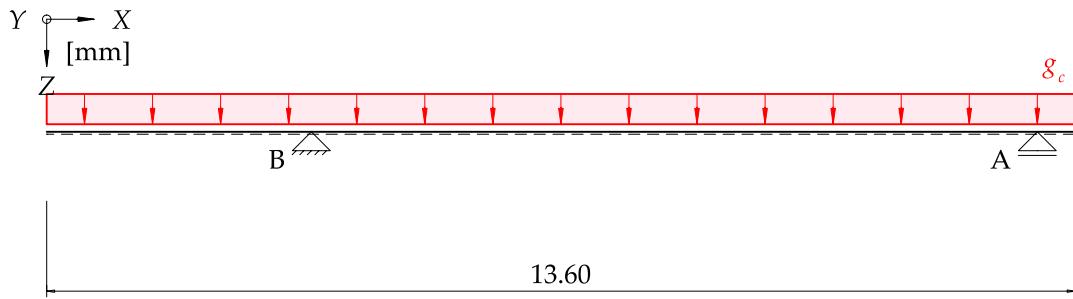


Abbildung 4.14.: Statisches System mit Streckenlast durch Eigengewicht

Dabei beträgt die Querschnittsfläche des I-Profil:

$$A_c = 302800.0 \text{ mm}^2$$

Welche zu folgendem Eigengewicht führt:

$$g_c = A_c \cdot \rho_c \cdot 10 \cdot \frac{m}{(s)^2}$$

$$g_c = 7.3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

#### 4.2.1.2. Vorspannung

Unabhängig von der Versuchslast gilt es den Einfluss der Vorspannung zu modellieren. Dazu wird die Vorspannung als Anker - Umlenk - und Reibungskräfte (AUR) interpretiert. Grundlagen dazu sind in [6] aufgezeigt. Die Interpretation nach AUR führt zu Umlenkkräften im parabolischen Bereich der Vorspannung, sowie zu Normal- und Querkräften, und einem Biegemoment bei der Verankerungsstelle. Aufgezeigt ist der Lastfall in der Abbildung 4.15.

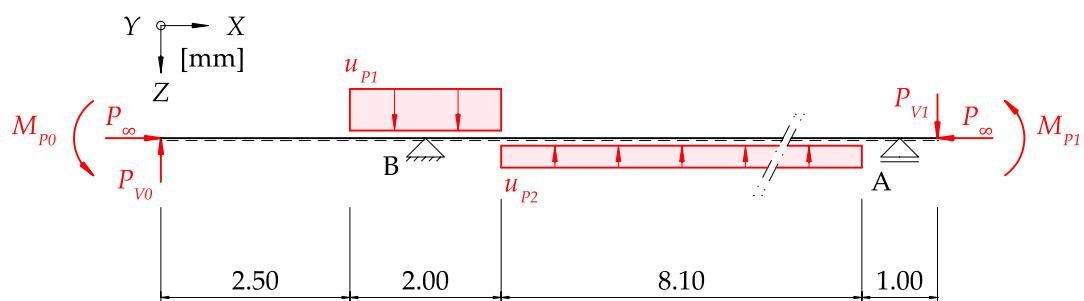


Abbildung 4.15.: Statisches System mit Anker und Umlenkkräften, die Einwirkungen sind in der entsprechenden Wirkungsrichtung dargestellt

Zur Quantifizierung der Einwirkung wird in einem ersten Schritt die Kabelgeometrie, sprich  $z_p(x)$  analytisch beschrieben. Dargestellt ist die Funktion in der Abbildung 4.16. Zusätzlich ist der Umriss des Trägers dargestellt.

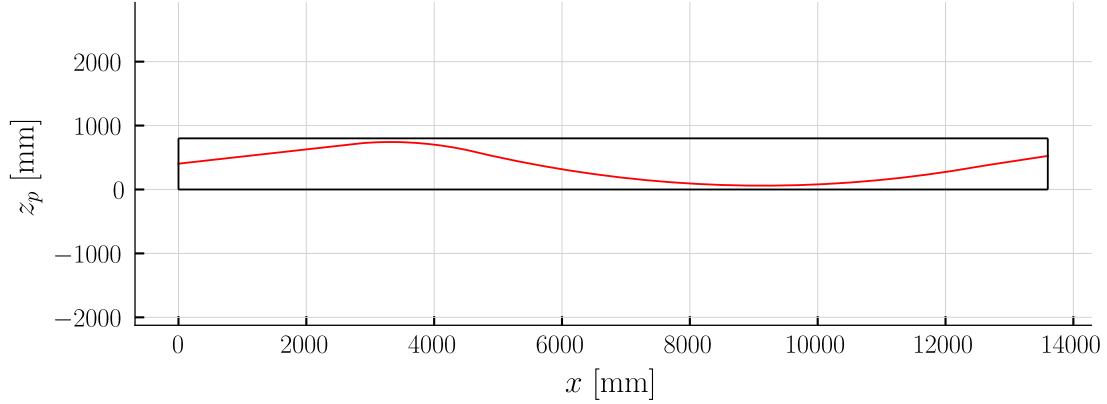


Abbildung 4.16.: Geometrie des Spannkabels als Funktion  $z_p(x)$

Unter Berücksichtigung der folgenden Gleichung können die Umlenkkräfte bestimmt werden.

$$u_p(x) \simeq z_p(x)'' \cdot P_\infty$$

Diese betragen dabei:

$$u_{P1} = 115.6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad u_{P2} = -34.3 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Darauffolgend wird die Spannstelle betrachtet. Die Exzentrizität des Spannkabels zum geometrischen Schwerpunkt des Querschnitts führt zu einem Biegemoment. Die Exzentrizität entspricht dabei:

$$e_{P0} = 55.5 \text{ mm} \quad (x = 0) \quad e_{P1} = -65.3 \text{ mm} \quad (x = L)$$

Multipliziert mit der Vorspannkraft folgt das Biegemoment bei der Spannstelle links zu:

$$M_{P0} = P_\infty \cdot e_{P0}$$

$$M_{P0} = 36.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{OK Zug})$$

Und bei der Spannstelle rechts zu:

$$M_{P1} = P_\infty \cdot e_{P1}$$

$$M_{P1} = -42.9 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (\text{UK Zug})$$

Die Vertikalkomponente der Spannkraft resultiert aus der Transformation der Normalkraft mittels der Neigung des Spannkabels bei der Spannstelle. Diese entspricht beim Trägeranfang:

$$P_{V0} = \sin(\alpha_0) \cdot P_\infty = \sin(0.1) \cdot 657.0 \text{ kN} = 73.1 \text{ kN}$$

Und beim Trägerende entspricht die vertikale Kraft:

$$P_{V1} = \sin(\alpha_1) \cdot P_\infty = \sin(0.2) \cdot 657.0 \text{ kN} = 98.7 \text{ kN}$$

#### 4.2.1.3. Pressenkräfte

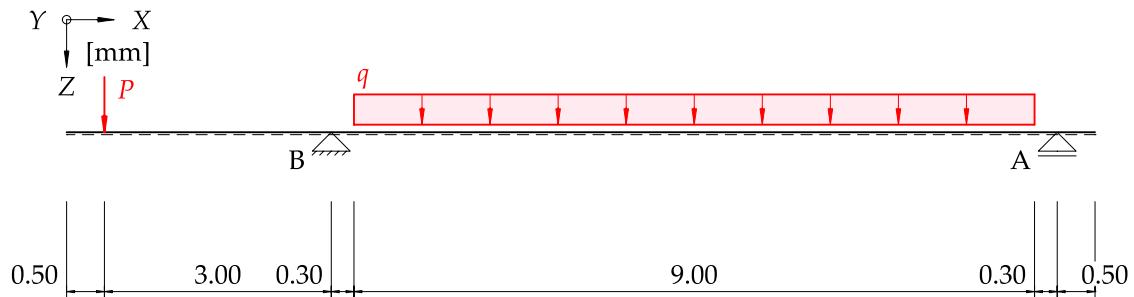


Abbildung 4.17.: Statisches System mit der Laststellung aus den Pressen

Gemäss dem Versuchsbeschrieb lässt sich der Träger bis zu den folgenden maximalen Lasten belasten:

$$Q_{max} = 1638.0 \text{ kN} \quad P_{max} = 512.0 \text{ kN} \quad L_q = 9.0 \text{ m}$$

Die mit  $Q$  simulierte Streckenlast wird als effektive Streckenlast modelliert. Dies führt zu folgender Grösse:

$$q_{Q_{max}} = \frac{Q_{max}}{L_q} = \frac{1638.0 \text{ kN}}{9.0 \text{ m}} = 182.0 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Im Stabstatikmodell werden zwei Lastfälle definiert zum Abbilden der Pressenkräfte. Zum einen wird die Einzellast  $P_1$  und die entsprechende Streckenlast  $q_1$  angesetzt. Betitelt wird diese Lastsituation mit *Pressenkräfte 1*. Betragsmässig entspricht der Lastfall *Pressenkräfte 1* in etwa der Laststufe 8 gemäss der Abbildung 4.12. Bei der Berechnung werden  $P_1$  und  $q_1$  inkrementell gesteigert. Sie liefern somit Resultate für sämtliche Laststufen unterhalb der Laststufe 8.

$$P_1 = 475.0 \text{ kN} \quad q_1 = 80.0 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad Q_1 = 720.0 \text{ kN}$$

Der zweite Lastfall beinhaltet die Einzellast  $P_1$ , sowie die Streckenlast  $q_1$  des Lastfalls *Pressenkräfte 1*. Ergänzend wird eine Einzellast  $P_\Delta$  und eine Streckenlast  $q_\Delta$  an den gleichen Positionen eingeführt. Diese werden inkrementell gesteigert, die Lasten des Lastfalls *Pressenkräfte 1* bleiben konstant. Die Lasten wurden iterativ bestimmt und entsprechen der Traglast des Modells. Der Lastfall wird mit *Pressenkräfte 2* bezeichnet.

$$P_\Delta = 11.0 \text{ kN} \quad q_\Delta = 90.0 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad P_2 = 486.0 \text{ kN}$$

$$q_2 = 169.9 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \quad Q_2 = 1529.5 \text{ kN}$$

Es zeigen sich Differenzen zwischen der gemessenen Traglast und der Traglast des Modells.

#### 4.2.2. Baustoffe

Folgend wird die Modellierung der Stoffgesetze beschrieben. Diese dienen lediglich zur Bestimmung der Momenten-Krümmungs-Beziehung. Der Beton wird mit der Parabel nach Eurocode 2 bzw. DIN 1045 zur nichtlinearen Schnittgrößenermittlung beschrieben. Dabei wird die Würzelfestigkeit als Bauteilfestigkeit angesetzt.

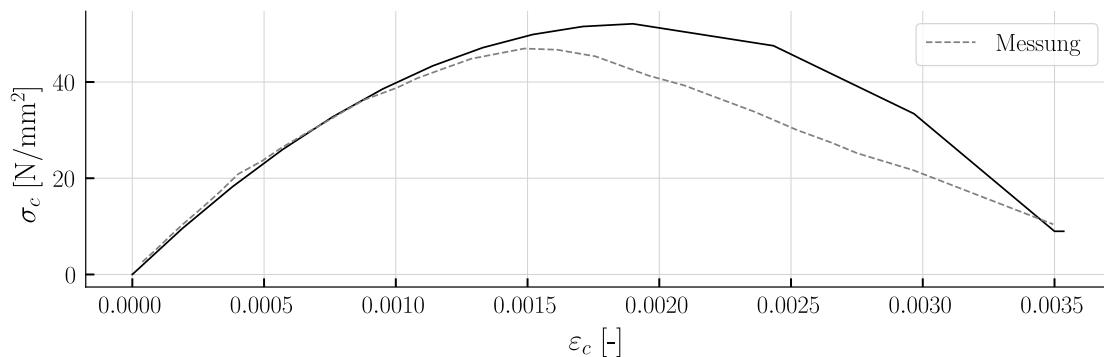


Abbildung 4.18.: Modelliertes Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betons des Versuchsträgers T6, mit ergänzten Versuchsmessungen

Das Verhalten der schlaffen Bewehrung wird mit einem bilinearen Stoffgesetz modelliert. Aufgezeigt ist das Verhalten in der Abbildung 4.19

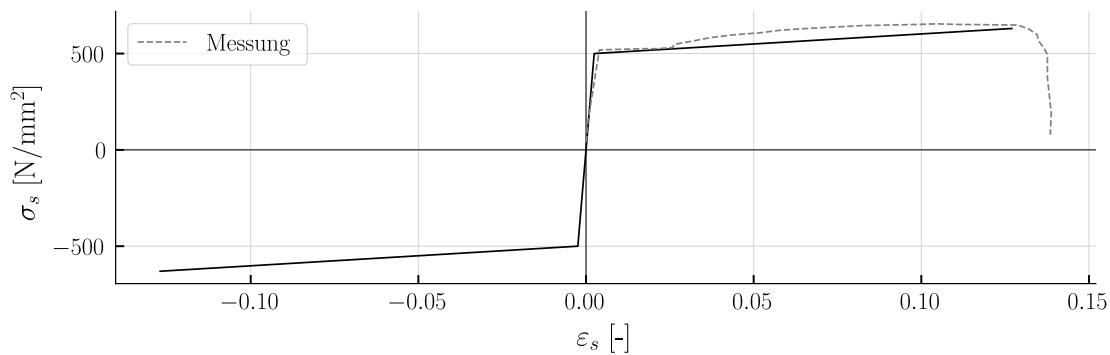


Abbildung 4.19.: Modelliertes Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Betonstahls des Versuchsträgers T6, mit ergänzten Versuchsmessungen

Abgeschlossen wird die Modellierung der Baustoffe mit der Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Vorspannlitzen. Betrachtet man das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Spannstahls, so ist ersichtlich, dass durch die Vorspannkraft die Spannlitzen noch nicht vollständig ausgeschöpft sind. Die Differenz bis zur Zugfestigkeit kann mittels Biegung aktiviert werden und wird bei der Querschnittsanalyse mitberücksichtigt. Dargestellt ist Ausnutzung der Vorspannkraft in der Abbildung 4.20.

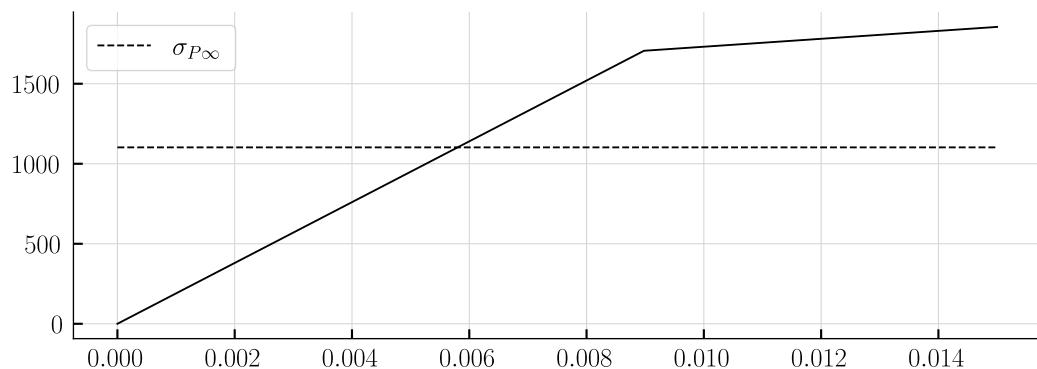


Abbildung 4.20.: Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Spannlitzen mit ergänzter Ausnutzung durch die Vorspannkraft

Dies führt zu der Spannungs-Dehnungs-Beziehung in der Abbildung 4.21. Dargestellt ist lediglich der positive Spannungsbereich. Im negativen Spannungsbereich wird ein linear-elastisches Verhalten vorausgesetzt. Dies ist jedoch nicht relevant, da die Vorspannung lediglich Zugbeanspruchungen erfährt.

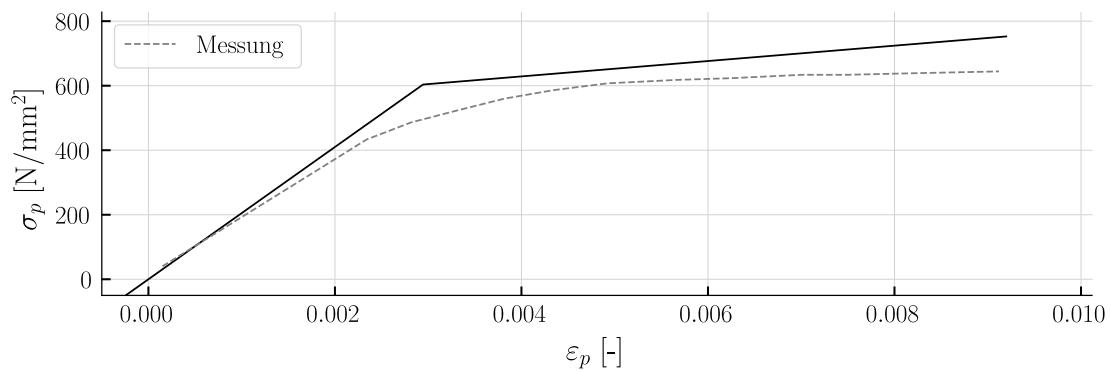


Abbildung 4.21.: Modelliertes Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Vorspannung des Versuchsträgers T6, mit ergänzten Versuchsmessungen

#### 4.2.3. Momenten-Krümmungs-Beziehung

Basierend auf den eben beschriebenen Materialgesetzen wird die Momenten-Krümmungs-Beziehung ermittelt. Die Ermittlung zeigt bei diesem Versuch eine gewisse Komplexität. Grundsätzlich gilt es für jede Abstufung der Bewehrung eine separate Momenten-Krümmungs-Beziehung herzuleiten.

Durch die Berücksichtigung der Vorspannung und deren parabolischen Geometrie gilt es die Momenten-Krümmungs-Beziehung unter Variation der Spannkabellage zu definieren, was die Komplexität der Momenten-Krümmungs-Beziehung zusätzlich erhöht. Die numerische Bestimmung wird mit einer Querschnittsanalyse-Software durchgeführt. Es werden 136 Querschnitte im Abstand der Elementlänge  $l_E$  entlang des Stabs analysiert, gezeigt sind diese im Anhang.

##### 4.2.3.1. Verifizierung

Um die Resultate der Querschnittsanalyse-Software zu verifizieren, wird hier eine Abschätzung aufgezeigt. Die Krümmung und das Biegemoment wird für den Querschnitt bei  $x = 3.5\text{m}$  abgeschätzt. Die Bewehrungsführung wird dabei vereinfacht, schematisch ist dies für negative Biegung gezeigt in der Abbildung 4.22.

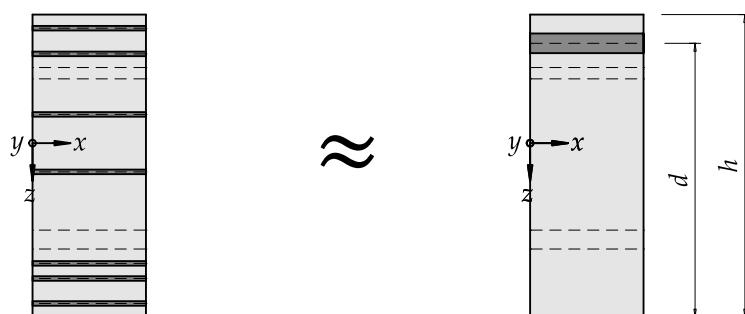


Abbildung 4.22.: Vereinfachung der Bewehrungsführung, Druckbewehrung vernachlässigt, Zugbewehrung zu einem Stab zusammengefasst

Dabei werden vier Zustände betrachtet. Das Fliessen der Vorspannung bei negativer Biegung, sowie wird der negative Biegewiderstand ermittelt. Das Fliessen der schlaffen Bewehrung bei positiver Biegung wird betrachtet, und abschliessend wird der positive Biegewiderstand berechnet.

#### 4.2.3.1.1. Fliessen der Vorspannung - Zug im Obergurt (1)

Im Zustand 1 wird vorausgesetzt, dass die Vorspannlitzen die Fliessgrenze erreichen. Die schlaffe Bewehrung hat ebenfalls die Fliessgrenze erreicht. Die Spannungsverteilung des Betons wird als Dreiecksverlauf angenommen. Der Beton erreicht die Druckfestigkeit.

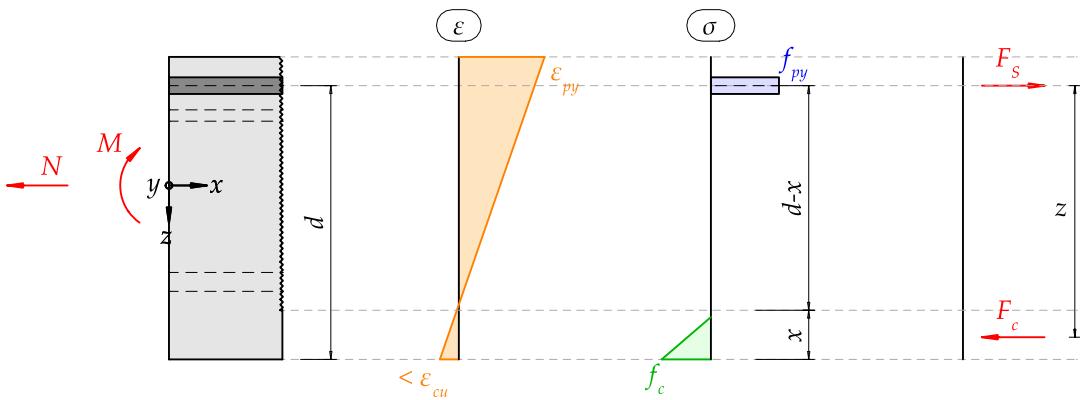


Abbildung 4.23.: Querschnittsanalyse bei  $x = 3.5$  m entlang der Stabachse, Vorspannung erreicht Fliessgrenze, Beton erreicht Druckfestigkeit

Die Querschnittsfläche der schlaffen Bewehrung beträgt dabei:

$$A_{s1} = \left( 4 \cdot \frac{(14 \cdot \text{mm})^2}{4} + 12 \cdot \frac{(12 \cdot \text{mm})^2}{4} \right) \cdot \pi$$

$$A_{s1} = 1972.9 \text{ mm}^2$$

Die statische Höhe wird abgeschätzt und beträgt:

$$d_1 = h - \frac{h_{sup}}{2}$$

$$d_1 = 730.0 \text{ mm}$$

Mittels horizontalen Gleichgewichts der Kräfte lässt sich die Druckzonenhöhe bestimmen:

$$x_1 = \frac{A_{s1} \cdot f_{sy} + A_p \cdot (f_{py} - \sigma_{P_\infty}) + P_\infty}{b_{inf} \cdot 0.5 \cdot f_c}$$

$$x_1 = 192.2 \text{ mm}$$

Mit welcher das Fliessmoment ermittelt werden kann.

$$M_{y1} = (A_{s1} \cdot f_{sy} + A_p \cdot (f_{py} - \sigma_{P_\infty})) \cdot (d_1 - S_z) + 0.5 \cdot b_{inf} \cdot f_c \cdot x_1 \cdot \left( S_z - \frac{1}{3} \cdot x_1 \right)$$

$$M_{y1} = 1156.3 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Die Krümmung wird dabei ebenfalls abgeschätzt.

$$\varepsilon_{py} = \frac{f_{py}}{E_s}$$

$$\chi_1 = \frac{\varepsilon_{py} - \frac{\sigma_{P_\infty}}{E_p}}{d_1 - x_1}$$

$$\chi_1 = 0.0047 \frac{1}{\text{m}}$$

#### 4.2.3.1.2. Biegewiderstand - Zug im Obergurt (2)

Der Zustand 2 beschreibt den Biegewiderstand für negative Biegung. Es gilt, dass die Spannungsverteilung des Betons in der Druckzone einem Dreiecksverlauf gleicht, sowie das Vorspannkabel die Zugfestigkeit erreicht. Die schlaffe Bewehrung fliesst.

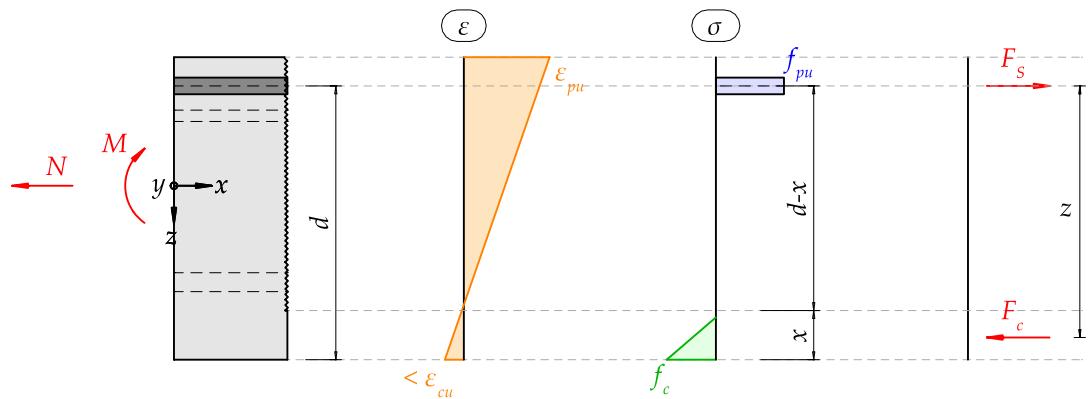


Abbildung 4.24.: Querschnittsanalyse bei  $x = 3.5 \text{ m}$  entlang der Stabachse, Vorspannung erreicht Zugfestigkeit, Beton erreicht Druckfestigkeit, schlaffe Bewehrung fliesst.

Mittels horizontalen Gleichgewichts der Kräfte lässt sich die Druckzonenhöhe bestimmen:

$$x_2 = \frac{A_{s1} \cdot f_{sy} + A_p \cdot (f_{pu} - \sigma_{P_\infty}) + P_\infty}{b_{inf} \cdot 0.5 \cdot f_c}$$

$$x_2 = 200.8 \text{ mm}$$

Die berechnete Druckzonenhöhe ist grösser als der rechteckige Bereich des Untergurts. Dies bleibt unberücksichtigt. Unter diesen Gegebenheiten bestimmt sich der Biegewiderstand zu:

$$M_{R2} = (A_{s1} \cdot f_{sy} + A_p \cdot (f_{pu} - \sigma_{P_\infty})) \cdot (d_1 - S_z) + 0.5 \cdot b_{inf} \cdot f_c \cdot x_2 \cdot \left( S_z - \frac{1}{3} \cdot x_2 \right)$$

$$M_{R2} = 1209.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Die Krümmung wird dabei ebenfalls abgeschätzt. Es wird vorausgesetzt, dass die Vorspannung zuerst versagt, da die Bruchdehnung deutlich kleiner als die der schlaffen Bewehrung ist. Ein Druckversagen des Betons wird ebenfalls ausgeschlossen:

$$\chi_2 = \frac{\varepsilon_{pu} - \frac{\sigma_{P_\infty}}{E_p}}{d_1 - x_2}$$

$$\chi_2 = 0.0174 \frac{1}{\text{m}}$$

#### 4.2.3.1.3. Fliessen der schlaffen Bewehrung - Zug im Untergurt (3)

Das gleiche Vorgehen wird für positive Biegebeanspruchung angewendet. Die schlaffe Bewehrung fliesst. Die Vorspannung ist im Untergurt nicht vorhanden. Dem Beton wird das Erreichen der Druckfestigkeit vorausgesetzt.

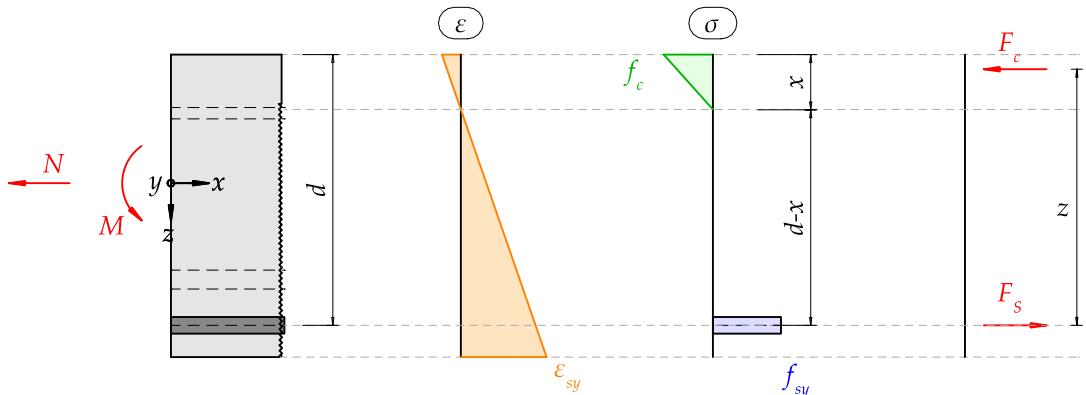


Abbildung 4.25.: Querschnittsanalyse bei  $x = 3.5 \text{ m}$  entlang der Stabachse, schlaffe Bewehrung erreicht Fliessgrenze, vereinfacht erreicht äusserste Betonfaser die Druckfestigkeit

Die Querschnittsfläche der Bewehrung beträgt dabei:

$$A_{s3} = 8 \cdot \frac{(14 \cdot \text{mm})^2}{4} \cdot \pi$$

$$A_{s3} = 1231.5 \text{ mm}^2$$

Und die abgeschätzte statische Höhe folgt zu:

$$d_3 = h - \frac{h_{inf}}{2.5}$$

$$d_3 = 728.0 \text{ mm}$$

Durch das Gleichsetzen der horizontalen Kräfte folgt die Druckzonenhöhe zu:

$$x_3 = \frac{A_{s3} \cdot f_{sy} + P_\infty}{b_{sup} \cdot 0.5 \cdot f_c}$$

$$x_3 = 61.1 \text{ mm}$$

Das daraus resultierende Fliessmoment beträgt:

$$M_{y3} = A_{s3} \cdot f_{sy} \cdot (d_3 - S_z) + 0.5 \cdot b_{sup} \cdot f_c \cdot x_3 \cdot \left( S_z - \frac{1}{3} \cdot x_3 \right)$$

$$M_{y3} = 724.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Durch die Berücksichtigung der Fliessdehnung in der schlaffen Bewehrung, folgt die Krümmung zu:

$$\chi_3 = \frac{\frac{f_{sy}}{E_s}}{d_3 - x_3}$$

$$\chi_3 = 0.0037 \frac{1}{\text{m}}$$

#### 4.2.3.1.4. Biegewiderstand - Zug im Untergurt (4)

Abschliessend wird der positive Biegewiderstand bestimmt.

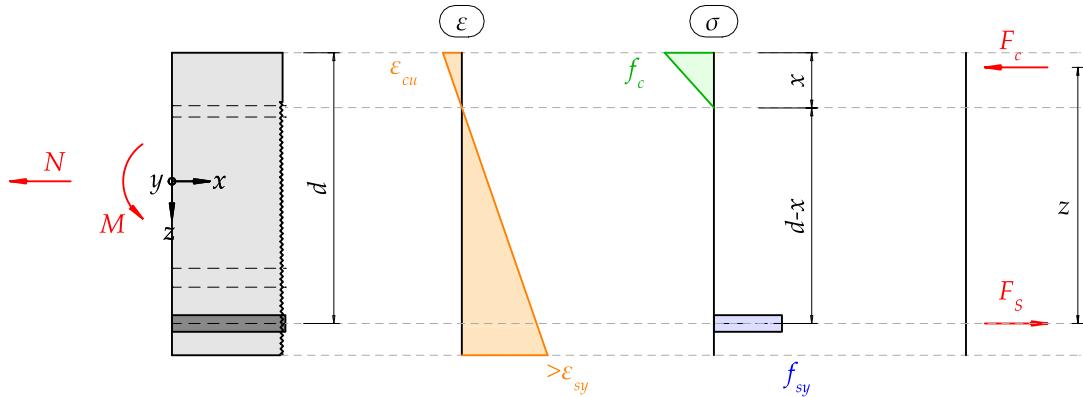


Abbildung 4.26.: Querschnittsanalyse bei  $x = 3.5$  m entlang der Stabachse, schlaffe Bewehrung überschreitet Fließgrenze, Beton erreicht Bruchstauchung

Da das verfestigende Verhalten der Bewehrung näherungsweise nicht vorhanden ist, wird ebenfalls die Fließspannung bei der schlaffen Bewehrung angesetzt. Dies führt zur gleichen Druckzonenhöhe wie die des Zustands 3.

$$x_4 = \frac{A_{s3} \cdot f_{sy} + P_\infty}{b_{sup} \cdot 0.5 \cdot f_c}$$

$$x_4 = 61.1 \text{ mm}$$

Der daraus folgende Biegewiderstand ist ebenfalls deckungsgleich.

$$M_{R4} = A_{s3} \cdot f_{sy} \cdot (d_3 - S_z) + 0.5 \cdot b_{sup} \cdot f_c \cdot x_4 \cdot \left( S_z - \frac{1}{3} \cdot x_4 \right)$$

$$M_{R4} = 724.2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Wird nun die Betonbruchdehnung vorausgesetzt, so bestimmt sich die Krümmung wie folgt. Diese weicht vom Zustand 3 deutlich ab.

$$\chi_4 = \frac{\varepsilon_{cu}}{x_4}$$

$$\chi_4 = 0.0573 \frac{1}{\text{m}}$$

Die Analyse sämtlicher Querschnitte ist zusammenfassend in der Abbildung 4.27 gezeigt. Ergänzend sind die händisch ermittelten Punkte dargestellt. Die Abschätzungen liefern annähernd identische Resultate wie die numerisch ermittelten Kurven. Die Resultate sind somit plausibel.

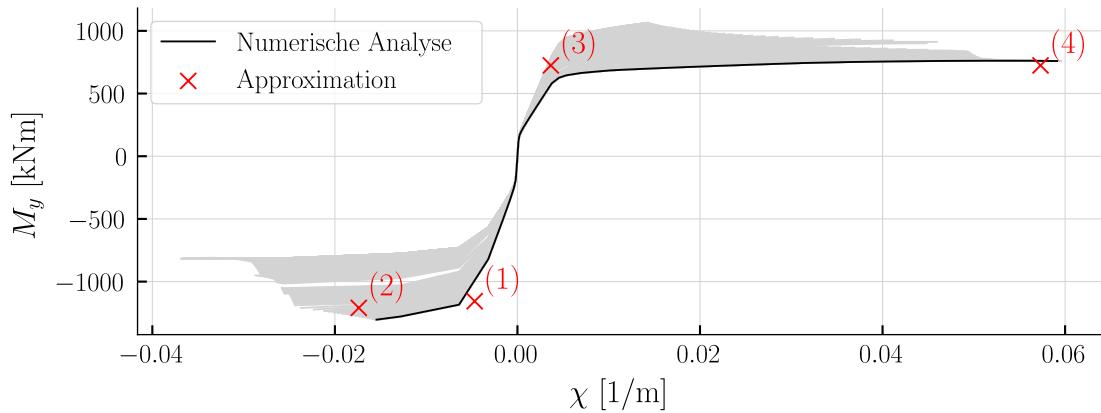


Abbildung 4.27.: Momenten-Krümmungs-Beziehung numerisch gelöst mittels der Querschnittsanalyse-Software, dazu aufgezeigt eine grobe Abschätzung der Grenzpunkte

Die Krümmung der Momenten-Krümmungs-Beziehung gilt es mit der Elementlänge zu multiplizieren, um die Momenten-Verdrehungs-Beziehung zu erhalten. Diese bestimmt die Biegesteifigkeit des Federmodells und ist den entsprechenden Federn zu hinterlegen. Sämtliche Federn weisen somit einzigartige Drehfedercharakteristiken auf.

### 4.3. Modellergebnisse

Mit der Bestimmung der Momenten-Verdrehungs-Beziehung sind die geforderten Modellbausteine ermittelt und die Resultate können verglichen werden. Dazu werden die Verformungen aus dem Federmodell mit den gemessenen Verformungen auf einem Kraft-Verformungs-Diagramm dargestellt.

In der Abbildung 4.28 ist das Verhalten des Kragarms dargestellt unter der Belastung *Pressenkräfte 1*. Die Nachrechnung ist in etwa deckungsgleich mit den Messwerten. Das Plateau im Diagramm wird mit der Nachrechnung nicht getroffen. Bzw. müsste dies mit dem Lastfall *Pressenkräfte 2* abgebildet werden. Die Modellierung mit dem zweiten Lastfall hat jedoch gezeigt, dass das Verhalten im Modell beim Auflager *B* deutlich zu steif ist. Durch die Erhöhung der Streckenlast im Lastfall *Pressenkräfte 2* drückt es den Kragarm nach oben, die Resultate sind für den Kragarm nicht brauchbar.

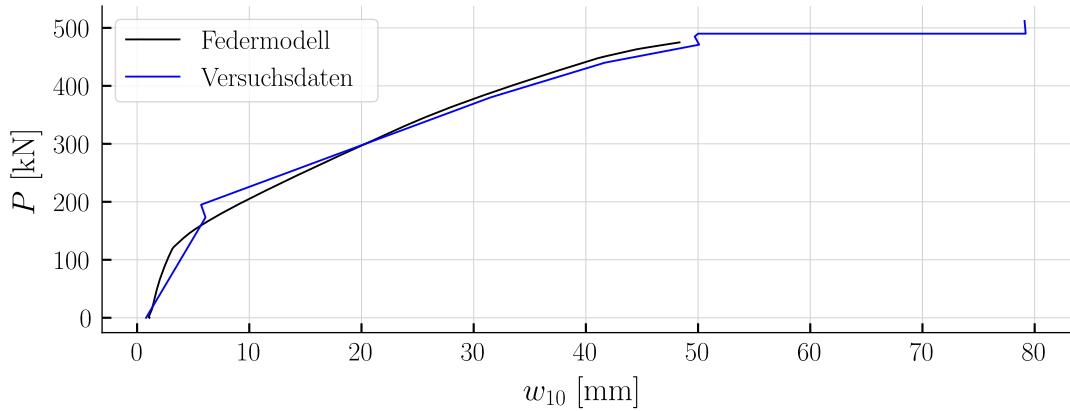


Abbildung 4.28.: Vergleich der Versuchsresultate mit den numerisch ermittelten Resultaten, dargestellt im Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle 10, Messpositionen in Abbildung 4.11

Die Spannungsverteilung beim Auflager  $B$  für den Lastfall Pressenkräfte 1 ist in der Abbildung 4.29 gezeigt. Das daraus resultierende Moment ist etwas niedriger als der Biege widerstand.

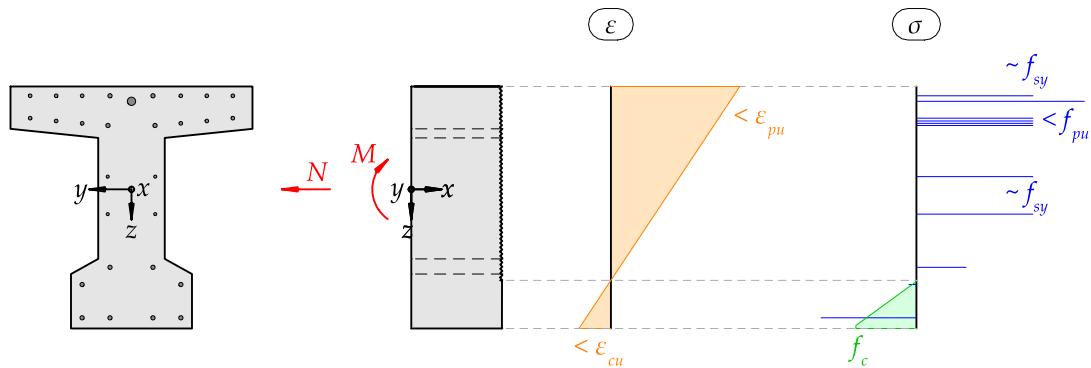


Abbildung 4.29.: Spannungsverteilung beim Auflager B für die Laststufe Pressenkräfte 1

Ebenfalls dargestellt ist der exportierte Verdrehungsverlauf und der daraus berechnete Krümmungsverlauf.

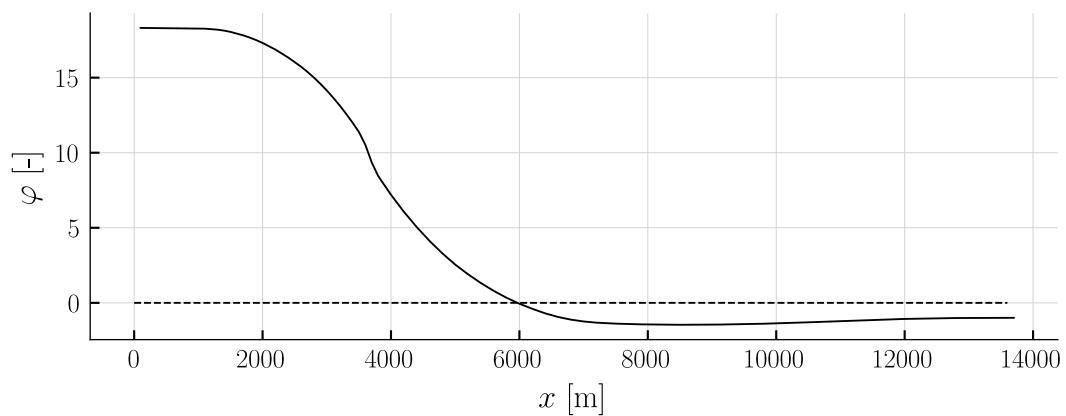


Abbildung 4.30.: Verdrehungsverlauf aus dem Federmodell für den Lastfall *Pressenkräfte 1* für den Träger T6

Der Krümmungsverlauf über dem Auflager B zeigt ein deutliches Fliessen der Vorspannlitzen und der schlaffen Bewehrung.

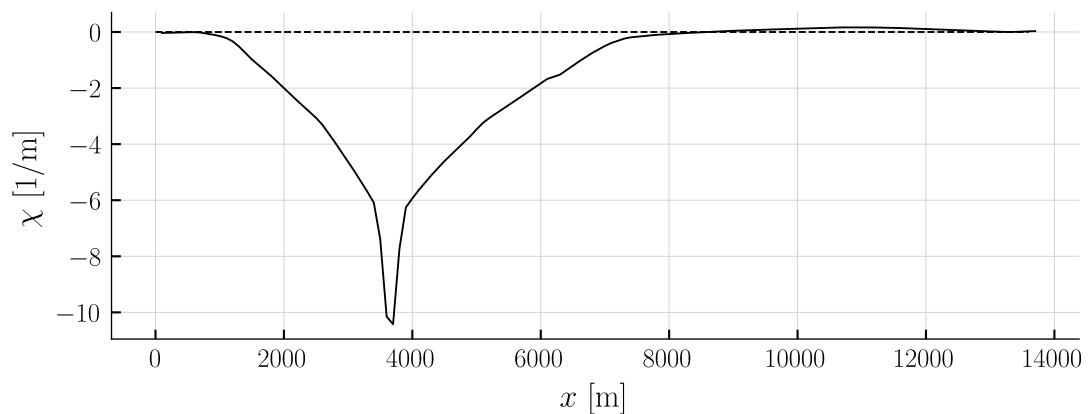


Abbildung 4.31.: Berechneter Krümmungsverlauf aus dem Verdrehungsverlauf für den Lastfall *Pressenkräfte 1*

Das Last-Verformungs-Verhalten im Feldbereich, gezeigt in der Abbildung 4.32, wurde mit dem Lastfall *Pressenkräfte 2* ermittelt. Auch hier zeigt sich ein annähernd deckungsgleicher Verlauf. Lediglich das ausgeprägte Verformungsvermögen des Trägers wird nicht getroffen.

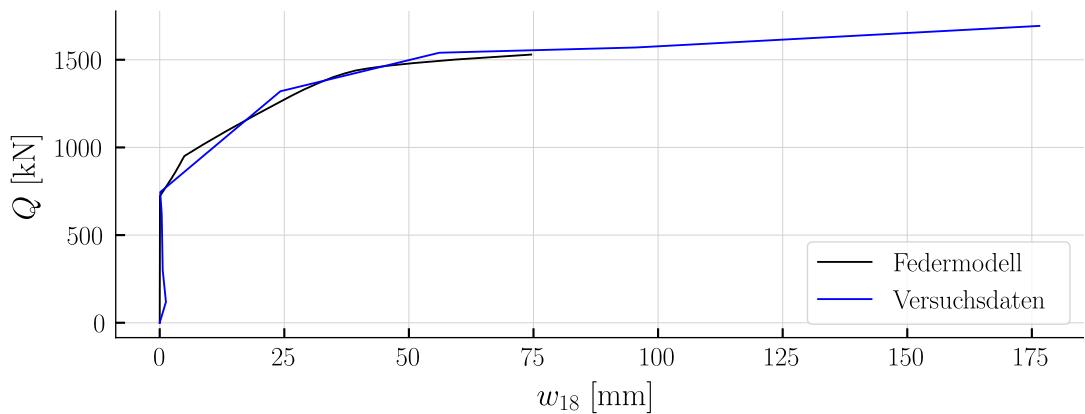


Abbildung 4.32.: Vergleich der Versuchsresultate mit den numerisch ermittelten Resultaten, dargestellt im Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle 18

In der Versuchsdurchführung ist das Vorspannkabel neben dem Auflager  $B$  gerissen. Der Querschnitt an dieser Stelle ist im Modell ebenfalls kurz vor dem Versagen. Jedoch stellt sich frühzeitig ein Biegeversagen im Feld ein. Die Spannungsverteilung beim Versagen im Feld ist in der Abbildung 4.33 gezeigt. Die Unterschiede in der Versagensart werden nicht dramatisiert, da das Modell beinahe ein Versagen beim Auflager prognostiziert.

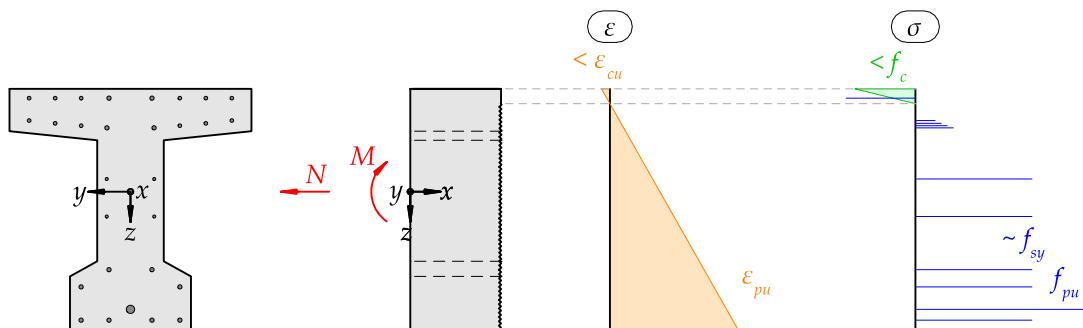


Abbildung 4.33.: Spannungsverteilung im Feld beim Erreichen des Biegewiderstands

Die Feldanalyse wird mit dem Verdrehungsverlauf und dem Krümmungsverlauf abgeschlossen.

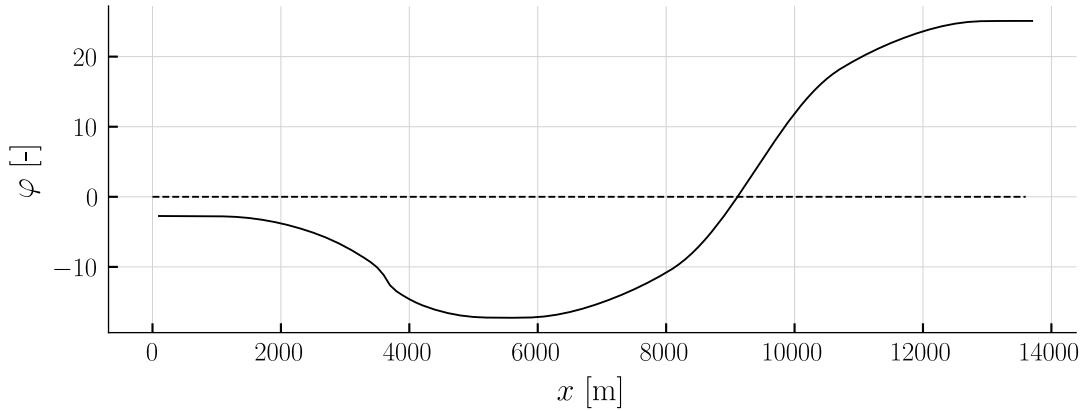


Abbildung 4.34.: Verdrehungsverlauf aus dem Federmodell für den Lastfall *Pressenkräfte 2* für den Träger T6

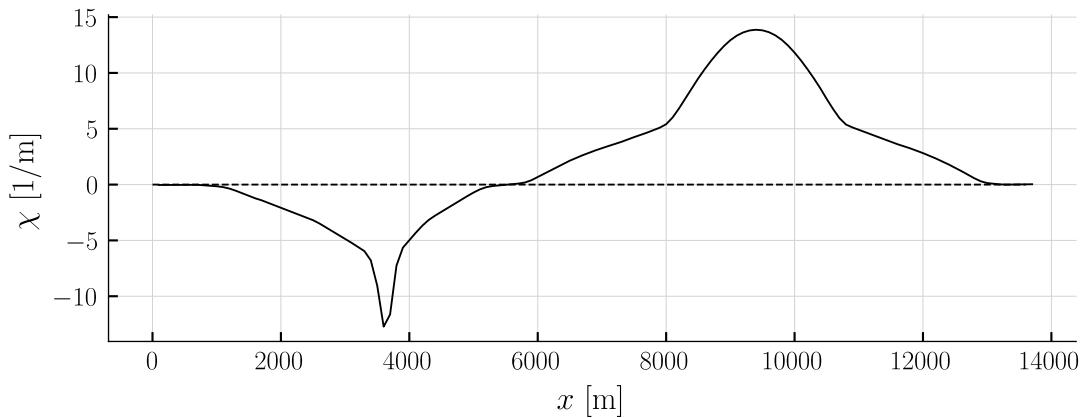


Abbildung 4.35.: Berechneter Krümmungsverlauf aus dem Verdrehungsverlauf für den Lastfall *Pressenkräfte 2* für den Träger T6

Der Krümmungsverlauf beschreibt ein Fliessen der Bewehrung und der Vorspannlitzen beim Auflager  $B$ . Im Vergleich zum Lastfall *Pressenkräfte 1* hat sich die Krümmung beim Auflager etwas gesteigert. Dies ist auf  $P_{\Delta}$  zurückzuführen. Im Feld stellt sich ein grosser Fliessbereich ein.

#### 4.4. Compatible Stress Field Method

Abschliessend werden die Verformungen mittels der kommerziellen Software IDEAStruct-Ca, speziell mit dem Tool *Detail*, nachgerechnet. Die Software basiert auf der Compatible Stress Field Method, kurz CSFM. Theoretische Grundlagen zur Methode können aus [7] entnommen werden.

#### 4.4.1. Modellvorstellung

Der Grundgedanke der Modellbildung ist in Abbildung 4.36 gezeigt. Mittels diskreten (1-dimensionalen) Elementen werden Bewehrungsstäbe abgebildet. Es werden folglich nur Kräfte in Stabrichtung berücksichtigt. Den Stäben wird eine Beziehung zur Berücksichtigung der Zugversteifung hinterlegt, basierend auf dem Zuggurtmodell. Der Beton wird in ebene (2-dimensionale) Elemente unterteilt. Verknüpft werden die Betonelemente über eine Wechselbeziehung mit der Bewehrung. Abschliessend wird mittels einer Spannungsfeldmodellierung der Kraftfluss ermittelt.

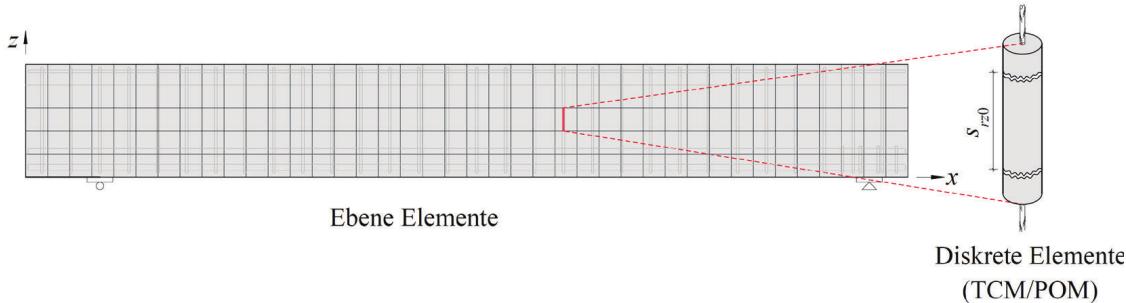


Abbildung 4.36.: Modellvorstellung der Compatible Stress Field Method (CSFM), entnommen aus [7]

#### 4.4.2. Modellierung

Das Tool ist grundsätzlich für Wände ausgelegt. Um den Träger darin zu modellieren, ist dieser in drei Wandsegmente zu unterteilen. Den Wandsegmenten sind die Breiten des Ober- und Untergurts und die des Stegs hinterlegt. Die Vouten der Flansche sind ausgemittelt und in der Wandsegmenthöhe berücksichtigt.

Die Längsbewehrung ist in entsprechender Position und mittels voller Verankerung modelliert. Die Schubbewehrung ist nicht modelliert. Die Vorspannung ist mit entsprechender Querschnittsfläche versehen und gemäss der Vorspanngeometrie modelliert.

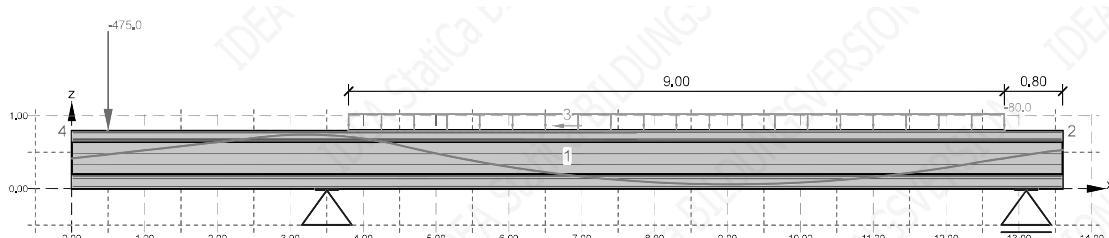


Abbildung 4.37.: Strukturmodell des Versuchs in IDEAStatiCa für den Lastfall Pressenkräfte 1

Die Abbildung 4.37 zeigt das modellierte 2-dimensionale statische System. Die Überlegungen zu den Lastfällen entsprechen denen des Federmodells. Die Stoffgesetze sind nach Möglichkeit gleich denen des Federmodells gewählt. Die qualitativen Verläufe sind

in den folgenden Abbildungen aufgezeigt. Die Abbildung 4.38 zeigt das Verhalten des Betons. Das parabolische Verhalten kann in der Software nicht modelliert werden.

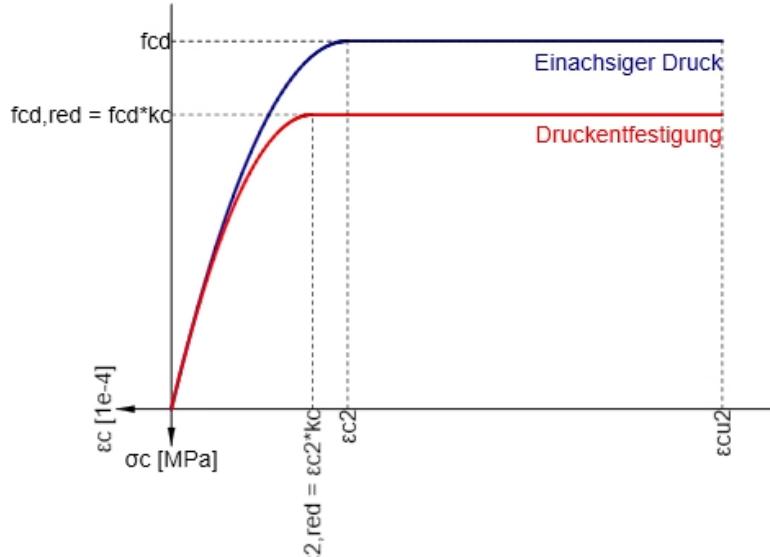


Abbildung 4.38.: Qualitatives Verhalten der modellierten Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betons in IDEAStructa

In der Abbildung 4.39 ist die Spannungs-Dehnungs-Beziehung der schlaffen Bewehrung gezeigt. Die Zugversteifung wird auf Seiten der Spannungs-Dehnungs-Beziehung berücksichtigt, dargestellt in der Abbildung 4.40.

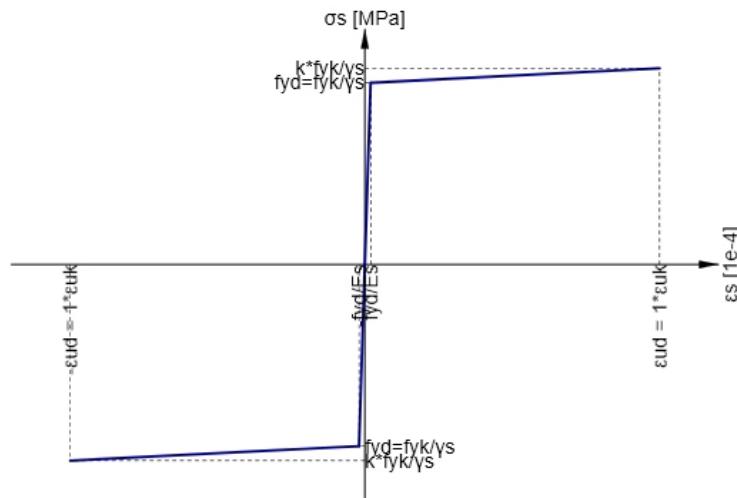


Abbildung 4.39.: Qualitatives Verhalten der modellierten Spannungs-Dehnungs-Beziehung der schlaffen Bewehrung in IDEAStructa

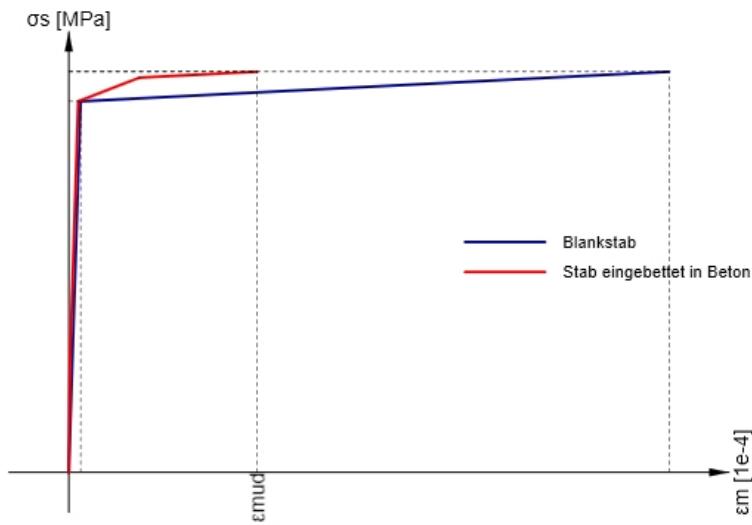


Abbildung 4.40.: Qualitative Berücksichtigung der Zugversteifung der schlaffen Bewehrung in IDEAStructa

Dem Spannstahl wird das Stoffgesetz gemäss der Abbildung 4.41 hinterlegt. Die Modellierung des Mitwirkens der Vorspannlitzen abzüglich der Vorspannkraft ist hier nicht zu berücksichtigen.

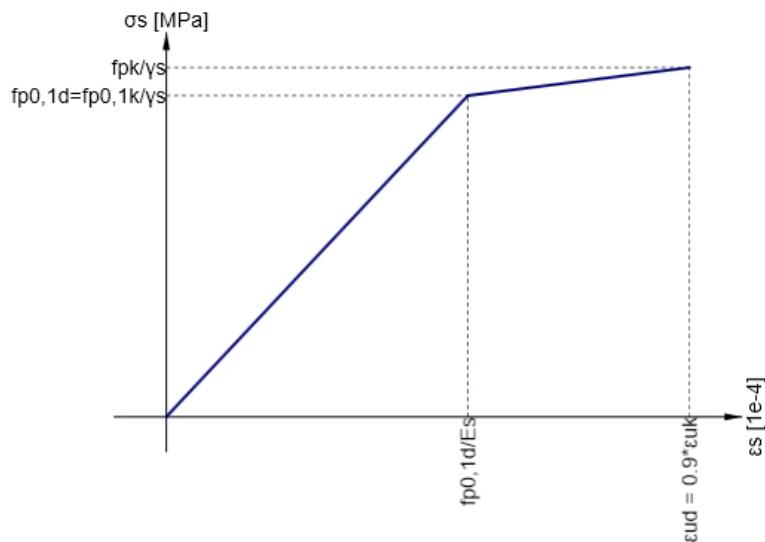


Abbildung 4.41.: Qualitatives Verhalten der modellierten Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Spannstahls in IDEAStructa

#### 4.4.3. Modellergebnisse

Abschliessend werden die Modellergebnisse aufgezeigt. In der Abbildung 4.42 ist der Verformungsverlauf für das gesamte System unter der maximalen Belastung im Lastfall *Presenkkräfte 1* aufgezeigt.



Abbildung 4.42.: Verformung des Kragarms für den Lastfall *Pressenkräfte 1*

Das Last-Verformungs-Diagramm zeigt die Abbildung 4.43. Das Verhalten ist auch hier in etwa deckungsgleich mit den Versuchsergebnissen. Das Plateau wird auch mit dieser Methode nicht abgebildet. Die Resultate sind jedoch zufriedenstellend. Als Vergleichswert ist die Kurve des Federmodells dargestellt.

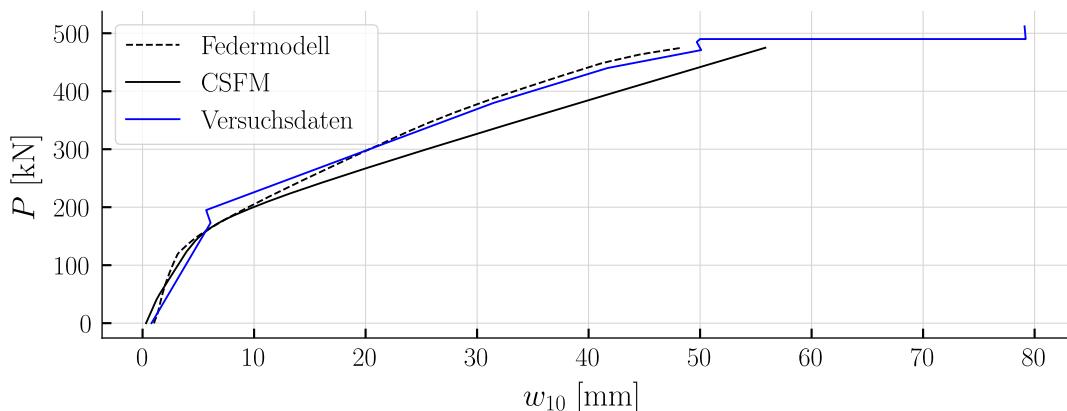


Abbildung 4.43.: Vergleich der Versuchsresultate mit den numerisch ermittelten Resultaten aus IDEASTaticA, sowie den Resultaten des Federmodells, dargestellt im Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle 10

Das Verhalten im Feld weicht leicht von den Versuchsergebnissen ab. Die Präzision ist jedoch auch hier zufriedenstellend. Die Abbildung 4.44 zeigt den Verformungsverlaufs des Trägers unter der maximalen Last des Lastfalls *Pressenkräfte 2*.

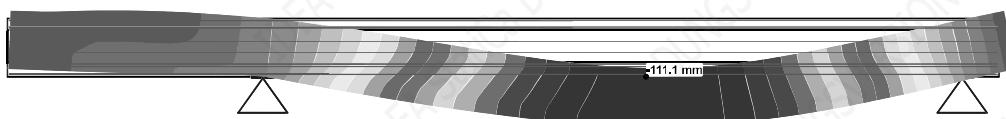


Abbildung 4.44.: Verformung des Felds für den Lastfall *Pressenkräfte 2*

Das Last-Verformungs-Diagramm in der Abbildung 4.45 zeigt auch hier eine Übereinstimmung der Versuchsergebnissen mit den Modellresultaten.

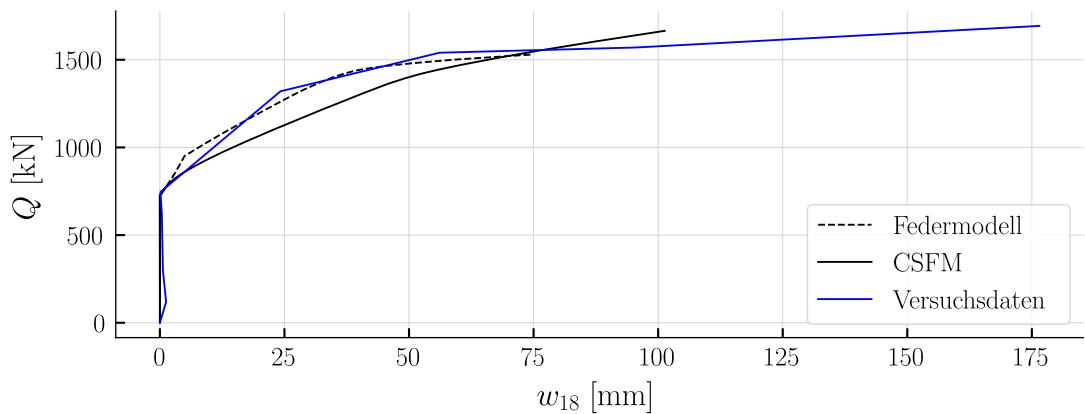


Abbildung 4.45.: Vergleich der Versuchsresultate mit den numerisch ermittelten Resultaten aus IDEAStatiCa, sowie den Resultaten des Federmodells, dargestellt im Last-Verformungs-Diagramm an der Stelle 18

Abschliessend wird auf die prognostizierte Versagensart des Modells eingegangen. Die Abbildung 4.46 zeigt die Ausnutzung innerhalb des Trägers. Es kann lediglich 80% der Lasten des Lastfalls *Pressenkräfte 2* angesetzt werden bis sich eine lokale Überschreitung der Betonspannungen beim Auflager *B* einstellt und die Berechnung abgebrochen wird. Die Spannungskonzentrationen befinden sich an den Enden der Auflagerplatten. Das Modell prognostiziert ein Versagen, sobald sich in einem definierten Bereich Spannungsüberschreitungen häufen. Ob sich durch die lokale Überschreitung der Betonspannungen ein Versagen des Systems einstellt ist zu hinterfragen.

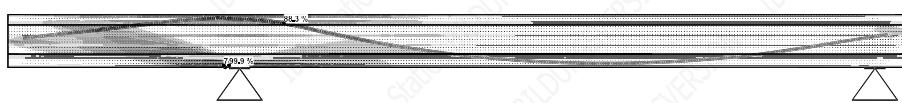


Abbildung 4.46.: Ausnutzung des Modells, lokale Überschreitung der Druckspannungen im Auflagerbereich

Die Betrachtung der Versagensart ist unabhängig von den oben gezeigten Verformungsberechnungen. Die Verformungsberechnungen sind mit der gesamten Last des Lastfalls berechnet.

# 5. Fazit

## 5.1. Rückblick

In dieser Arbeit wurde allgemein das Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken untersucht. Die geforderte Verknüpfung der mechanischen Modelle aus der Vorarbeit mit kommerziellen FE-Programmen konnte erfolgreich umgesetzt werden. Das daraus entstandene Federmodell liefert eine praxistaugliche Modellvorstellung, um nichtlineare Verformungen von Stabtragwerken zu berechnen. Das Federmodell kann nichtlineare Verformungen in Richtung der sechs Freiheitsgrade im dreidimensionalen Raum für Stabtragwerke abbilden. Die Bestimmung der entsprechenden Steifigkeiten erweist sich als Hauptaufgabe bei der Modellbildung. Zudem kann das Modell bei statisch unbestimmten Systemen Schnittgrößen umlagern.

Das Modell zeigt Schwächen bei der empfindlichen Reaktion der Resultate auf die gewählten Abstände der Federn, die Inkremente bei der numerischen Ermittlung der Federsteifigkeiten und die Grösse der Laststufen beim Lösungsalgorithmus. Dies ist eine generelle Problematik bei FE-Lösungen.

Die Modellverifizierung hat zufriedenstellende Resultate geliefert. Speziell die Biegeverformungen unter Berücksichtigung der Zugversteifung konnten für sämtliche Versuche präzise abgebildet werden. Die Schubverformungen wurden lediglich durch die Dehnung der Schubbügel berücksichtigt. Die Präzision dieser Resultate war nicht durchwegs zufriedenstellend. Um genaue Schubverformungen zu bestimmen, muss diese Modellvorstellung erweitert werden. Trotzdem zeigt dies die Möglichkeit, mittels dem Federmodell Schubverformungen zu berechnen. Das Versatzmass konnte im Federmodell auf Seiten der Einwirkung leicht implementiert werden. Zudem zeigt die Nachrechnung des Vierpunktbiegeversuchs die Notwendigkeit von exakten Baustoffkennwerten, um zutreffende Prognosen zum Verformungsverhalten zu liefern.

Die Anwendung am vorgespannten Träger zeigte, wie das Federmodell auch an komplexen Stabtragwerken angewendet werden kann. Die Abstufung der schlaffen Bewehrung und die Berücksichtigung der Vorspannung erhöhen den Berechnungsaufwand drastisch. Die Resultate des Federmodells sind deckungsgleich mit den Versuchsergebnissen. Dies ist äusserst zufriedenstellend. Ebenso liefert die CSFM treffende Ergebnisse. Abweichungen zeigen sich mit beiden Modellen bei der Prognose der Versagensart.

Die Anwendung des IDEASTatiCa-Tools ist nur oberflächlich behandelt, ein konsistentes Modellverständnis wird in der Arbeit nicht aufgezeigt. In diesem Bereich ist für eine praxistaugliche Anwendung ein vertiefteres Verständnis aufzubauen.

## 5.2. Ausblick

In der folgenden Masterarbeit wird versucht, mittels dem Federmodell das Verformungsverhalten von Plattentragwerken zu bestimmen. Dabei wird das Federmodell als Trägerrost angeordnet. Dargestellt ist der Trägerrost in der Abbildung 5.1

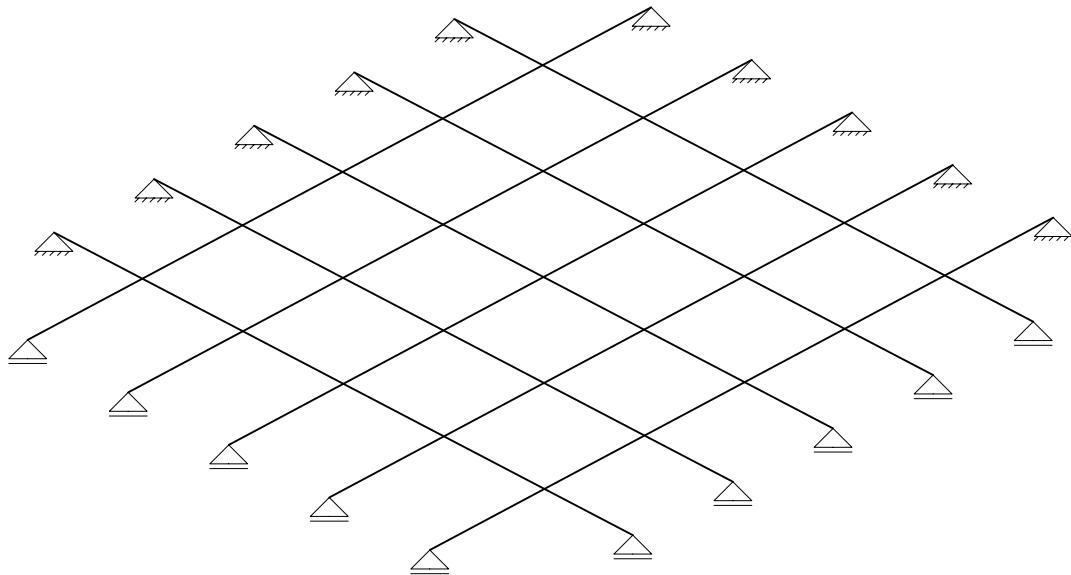


Abbildung 5.1.: Anordnung des Federmodells als Trägerrost, entnommen aus [1]

Da sich das Tool der IDEAStatica als durchaus potent erwiesen hat, gilt es sich in die Grundlagen der Software zu vertiefen. Ein wichtiger Aspekt der Arbeit wird somit der Vergleich der Resultate des Federmodells mit den Resultaten des Plattentools der IDEAStatiCa.

# Bezeichnungen

Variabel	Bezeichnung
$A_c$	Querschnittsfläche Beton
$A_s$	Querschnittsfläche schlaffe Bewehrung
$A_{sw}$	Querschnittsfläche Schubbewehrung
$A_p$	Querschnittsfläche Vorspannlitzen
$F_i$	Kraft $i$
$E_c$	Elastizitätsmodul Beton
$E_s$	Elastizitätsmodul schlaffe Bewehrung
$E_P$	Elastizitätsmodul Vorspannlitze
$E_{sw}$	Elastizitätsmodul Schubbewehrung
$L$	Länge
$M$	Biegemoment
$M_y$	Fliessmoment
$M_P$	Biegemoment durch Exzentrizität des Spannkabels
$M_R$	Biegewiderstand
$\bar{M}$	Biegemoment aus virtuellem Kräftezustand
$P, Q$	Pressenkräfte
$P_\infty$	Vorspannkraft
$P_V$	Vertikale Komponente der Vorspannkraft bei der Spannstelle
$S_{sw}$	Teilung der Schubbewehrung
$S_z$	Abstand des geometrischen Schwerpunkts
$V_R$	Querkraftwiderstand
$V_{om}$	Mittlere Vorspannkraft
$a_{sw}$	Querschnittsfläche Schubbewehrung verschmiert
$b$	Breite
$b_w$	Bauteilbreite
$d$	Statische Höhe
$e_p$	Exzentrizität des Spannkabels zum Schwerpunkt
$f_{sy}$	Fliessgrenze der schlaffen Bewehrung
$f_{su}$	Zugfestigkeit der schlaffen Bewehrung
$f_{py}$	Fliessgrenze der Vorspannlitze
$f_{pu}$	Zugfestigkeit der Vorspannlitze
$f_c$	Druckfestigkeit des Betons
$f_{ct}$	Zugfestigkeit des Betons
$g_c$	Eigengewicht als Streckenlast

Variabel	Bezeichnung
$h$	Höhe
$k_\varphi$	Steifigkeit der Drehfeder
$l_E$	Länge der steifen Elemente
$q$	Streckenlast
$u_P$	Umlenkraft
$w_1$	Verformung an der Stelle 1
$w_i$	Verformung durch $i$
$x_i$	Betondruckzonenhöhe Zustand $i$
$z$	Hebelarm der inneren Kräfte
$z_p$	Höhe des Vorspannkabels
$z_p(x)''$	Zweite Ableitung der Funktion der Spannkabelgeometrie
$\varepsilon_{py}$	Fliessdehnung der Vorspannlitze
$\varepsilon_{pu}$	Bruchdehnung der Vorspannlitze
$\varepsilon_{cu}$	Bruchdehnung des Betons
$\varepsilon_{sy}$	Fliessdehnung der schlaffen Bewehrung
$\varepsilon_{su}$	Bruchdehnung der schlaffen Bewehrung
$\eta$	Verlustfaktor
$\theta_{c3}$	Neigung Betondruckdiagonale
$\lambda_E$	Reduktionsfaktor Schubsteifigkeit
$\rho_c$	Dichte des Betons
$\sigma_{P_\infty}$	Stahlspannung aus der Vorspannkraft
$\varphi$	Verdrehung
$\chi_i$	Krümmung des Zustands $i$
$\emptyset_{sw}$	Durchmesser der Schubbewehrung
$\Delta_F$	Längszugkraft durch Querkraft
$\Delta_M$	Versatzmoment

# Literatur

1. Gitz P (2024) Ansätze zur Verformungsberechnung. HSLU Technik & Architektur
2. Jäger T, Marti P (2006) Versuche zum Querkraftwiderstand und zum Verformungsvermögen von Stahlbetonplatten. IBK Bericht 294. <https://doi.org/10.3929/ethz-a-005195576>
3. Tue NV, Ehmann R, Betschoga C, Tung ND (2019) Einfluss geringer Querkraftbewehrung auf die Querkrafttragfähigkeit von Stahlbetonbalken unterschiedlicher M/V-Kombinationen. Beton- und Stahlbetonbau 114(4):217–230. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/best.201800075>
4. Sigrist V (1995) Zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern. Birkhäuser, Basel Boston Berlin
5. Sigrist V, Marti P (1993) Versuche zum Verformungsvermögen von Stahlbetonträgern. Birkhäuser, Basel Boston Berlin
6. Thoma K (2020) Vorspannung. HSLU Technik & Architektur
7. Kaufmann W (2020) Compatible stress field design of structural concrete: principles and validation. ETH Zurich, Institute of Structural Engineering, Zurich

## A. Momenten-Krümmungs-Beziehungen des vorgespannten Trägers

Dieses Kapitel zeigt die einzelnen Querschnitte mit den entsprechenden Parametern und der resultierenden Momenten-Krümmungs-Beziehung. Der Umfang des Anhangs wurde reduziert auf Kosten der Leserlichkeit in Papierformat.

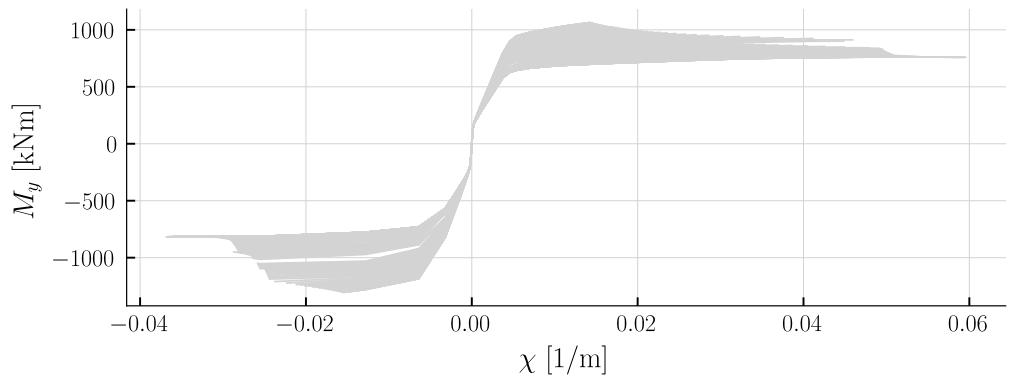


Abbildung A.1.: Überlagerung der einzelnen Momenten-Krümmungs-Beziehungen

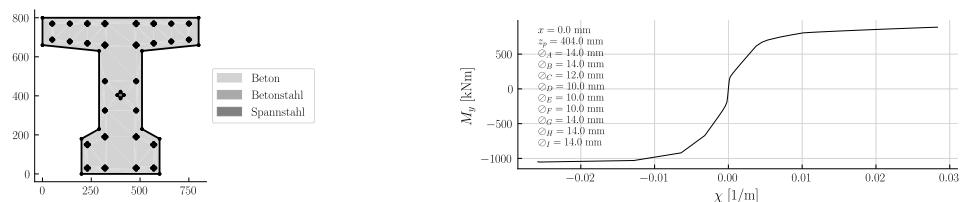


Abbildung A.2.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 0

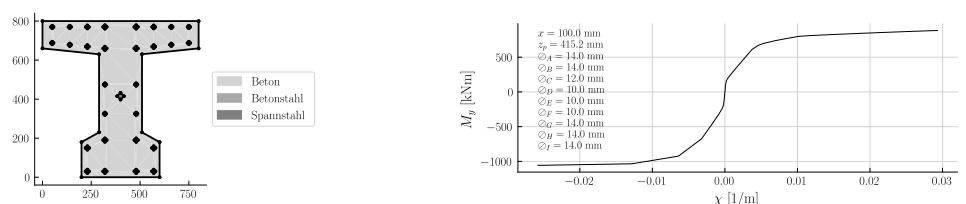


Abbildung A.3.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 1

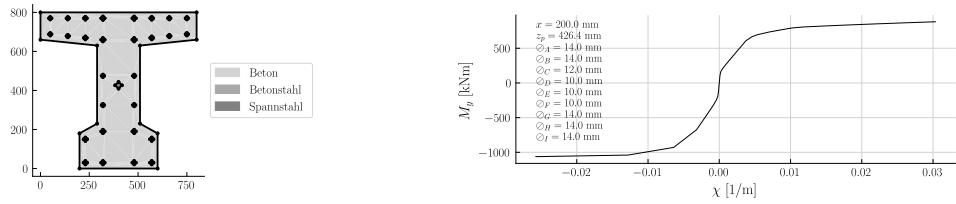


Abbildung A.4.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 2

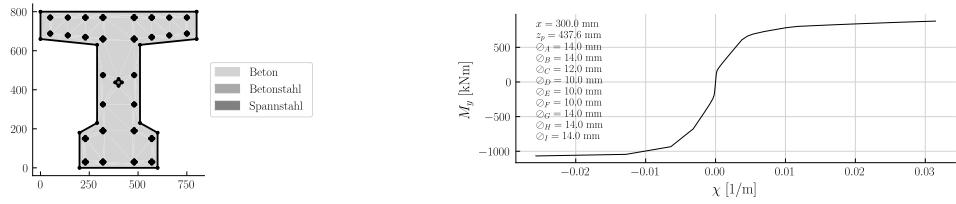


Abbildung A.5.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 3

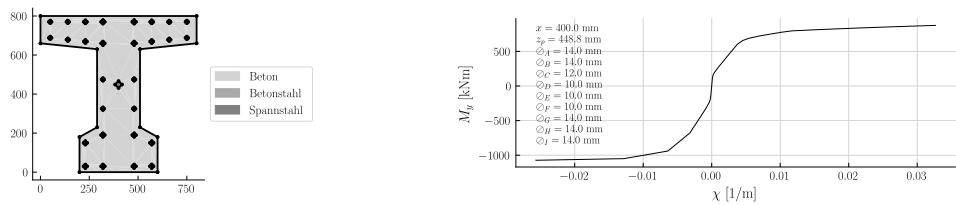


Abbildung A.6.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 4

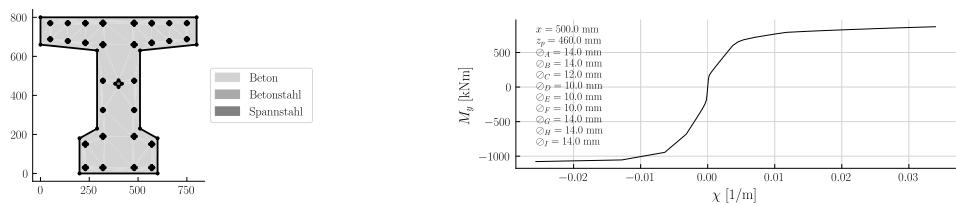


Abbildung A.7.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 5

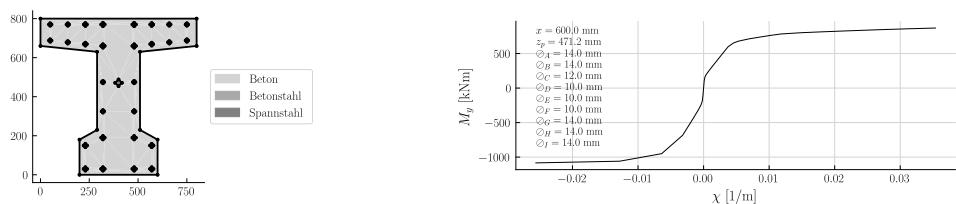


Abbildung A.8.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 6

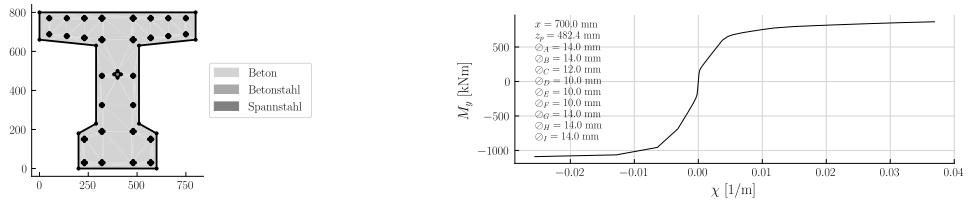


Abbildung A.9.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 7

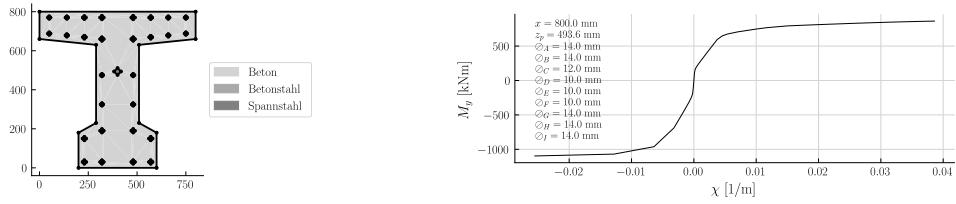


Abbildung A.10.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 8

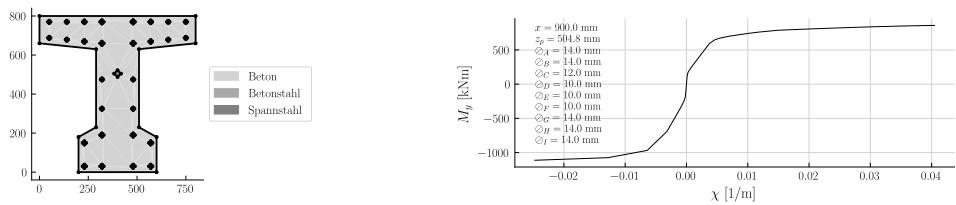


Abbildung A.11.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 9

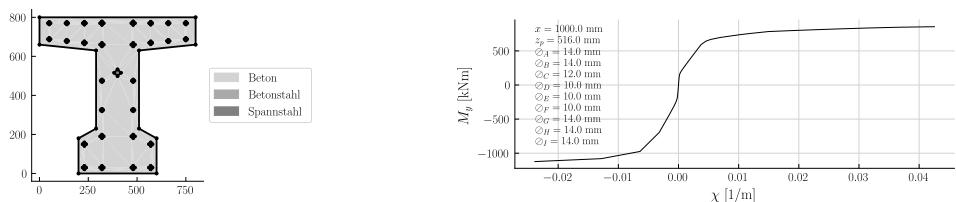


Abbildung A.12.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 10

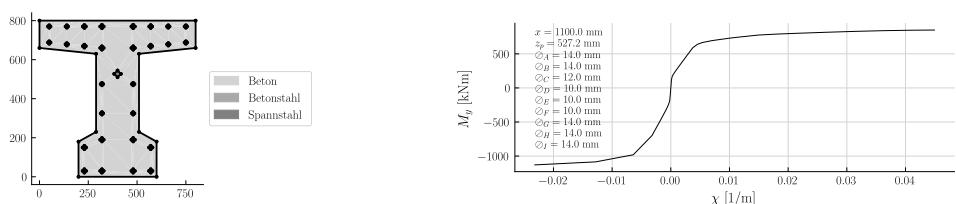


Abbildung A.13.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 11

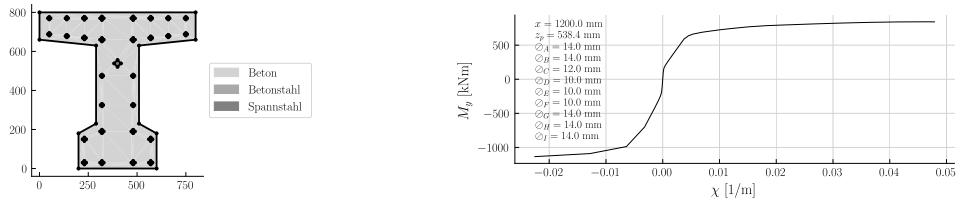


Abbildung A.14.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 12

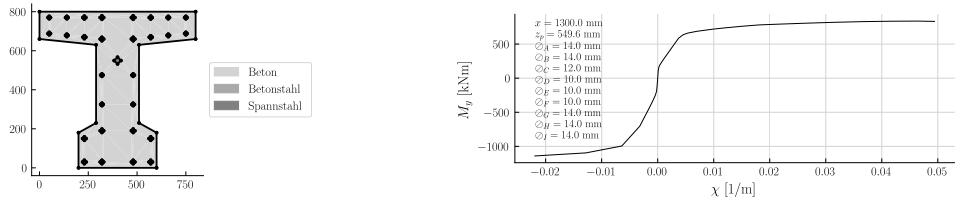


Abbildung A.15.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 13

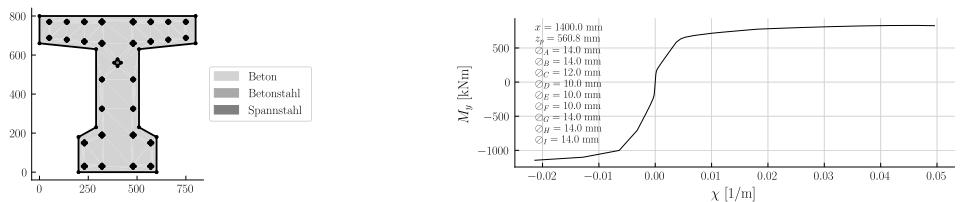


Abbildung A.16.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 14

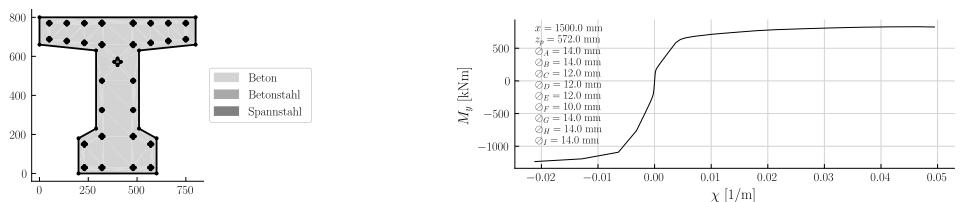


Abbildung A.17.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 15

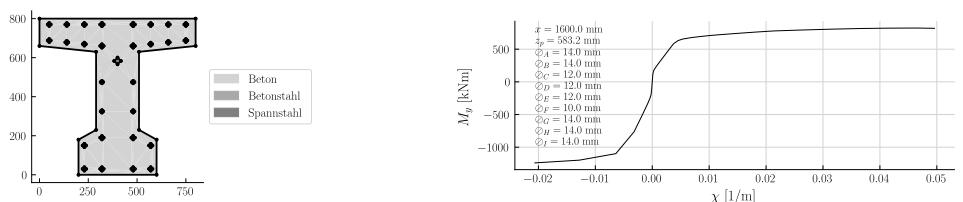


Abbildung A.18.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 16

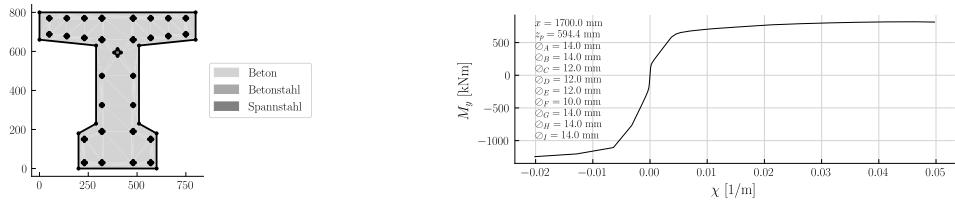


Abbildung A.19.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 17

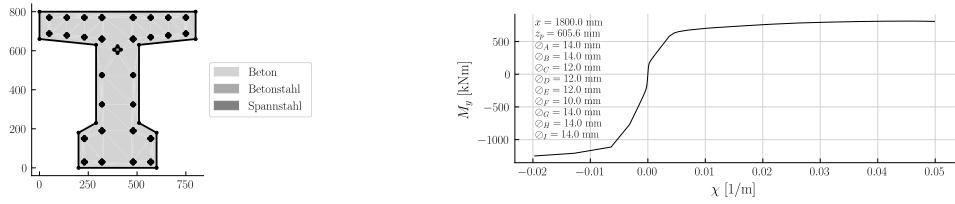


Abbildung A.20.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 18

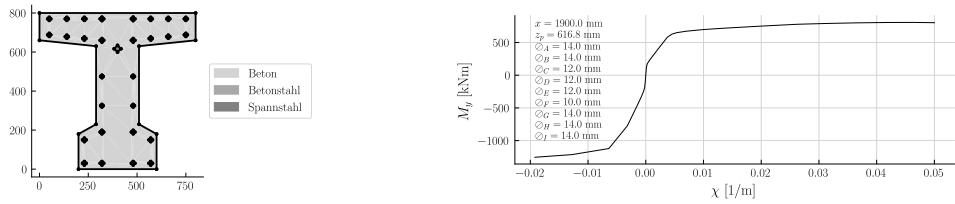


Abbildung A.21.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 19

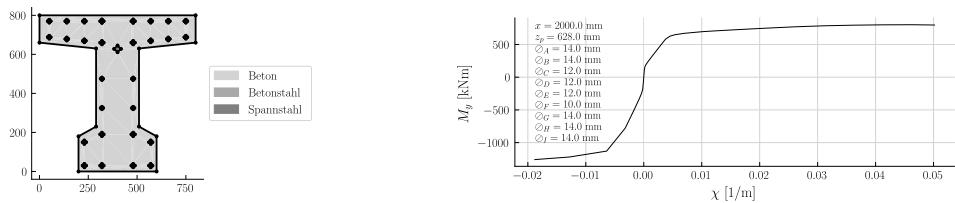


Abbildung A.22.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 20

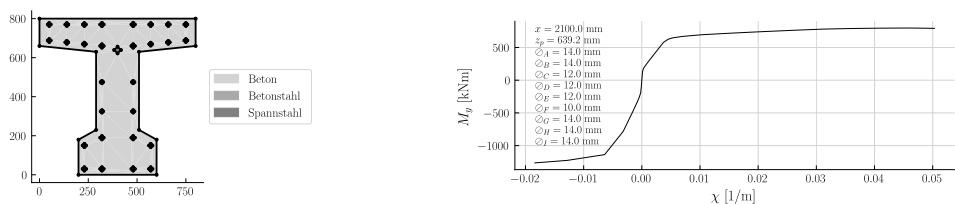


Abbildung A.23.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 21

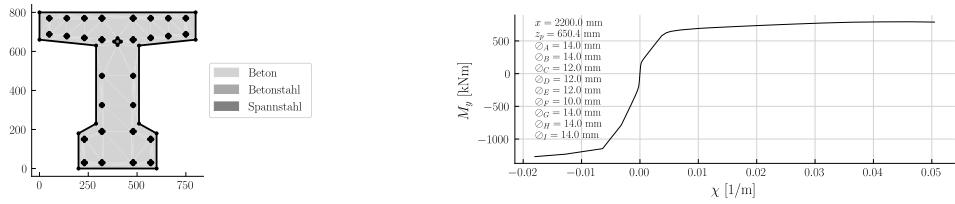


Abbildung A.24.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 22

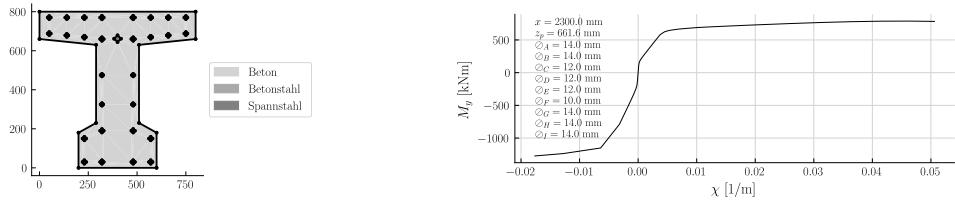


Abbildung A.25.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 23

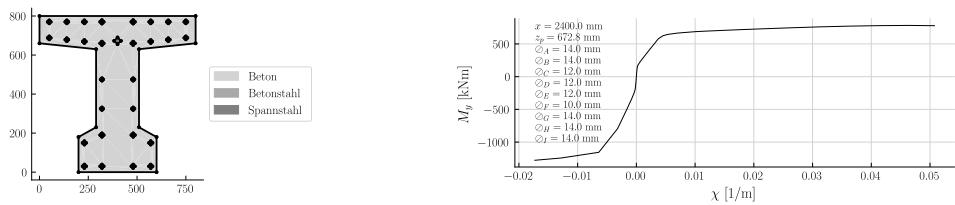


Abbildung A.26.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 24

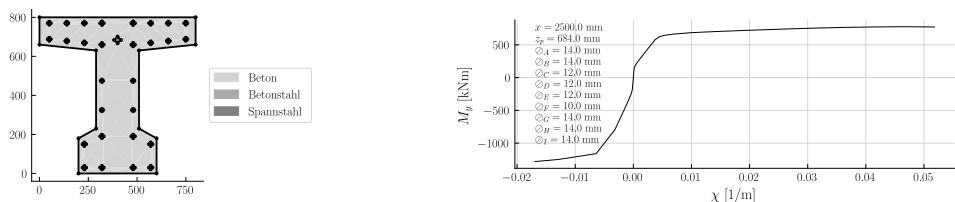


Abbildung A.27.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 25

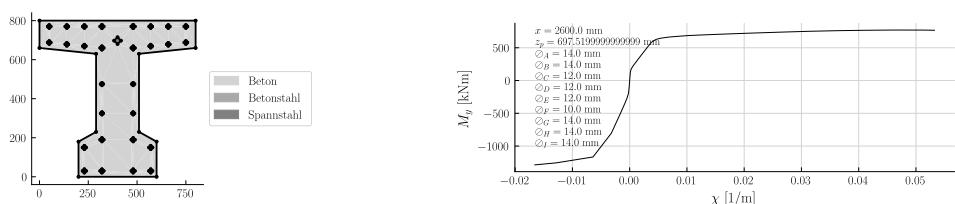


Abbildung A.28.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 26

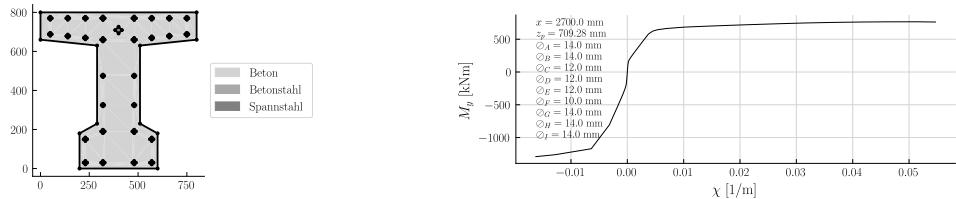


Abbildung A.29.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 27

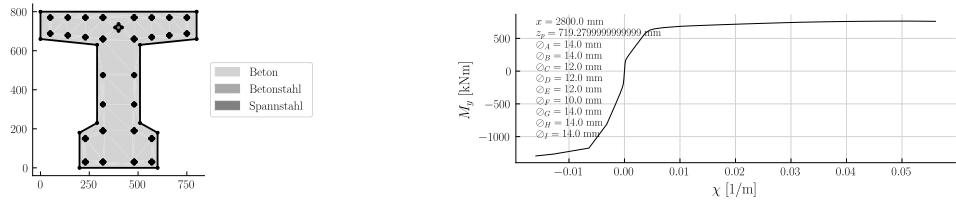


Abbildung A.30.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 28

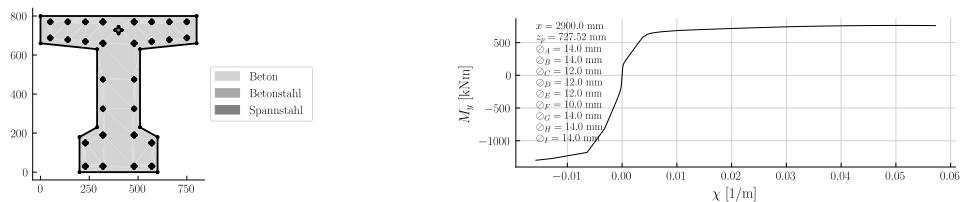


Abbildung A.31.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 29

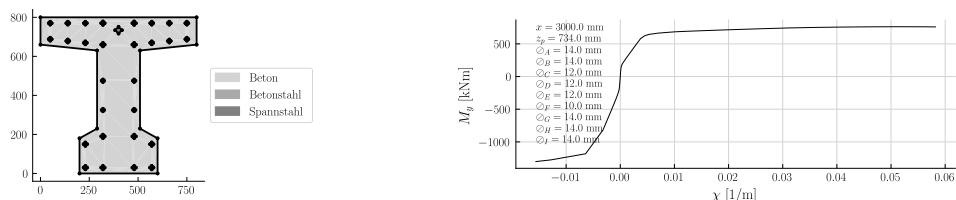


Abbildung A.32.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 30

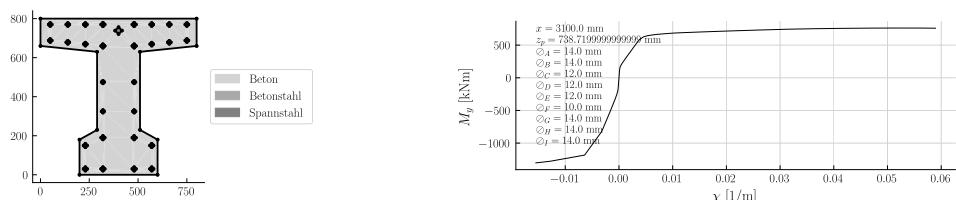


Abbildung A.33.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 31

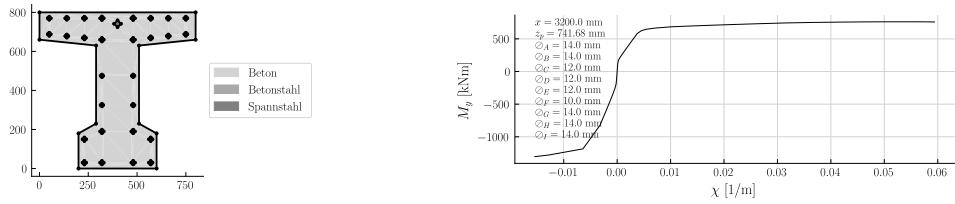


Abbildung A.34.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 32

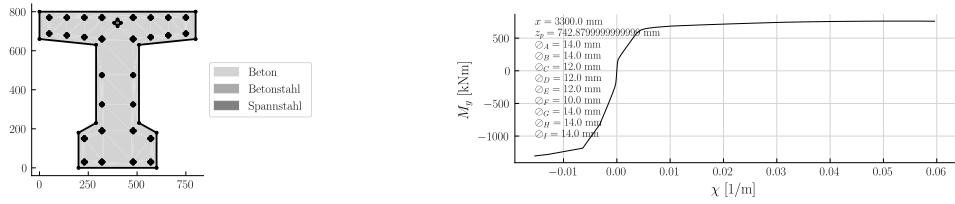


Abbildung A.35.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 33

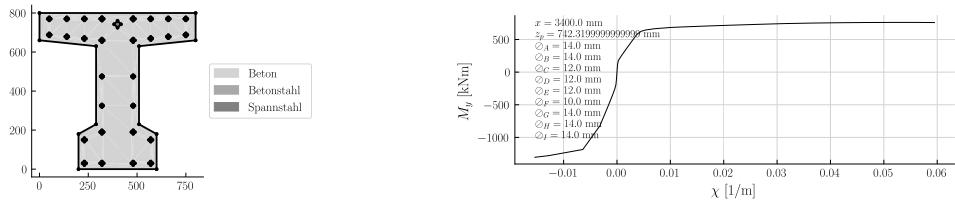


Abbildung A.36.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 34

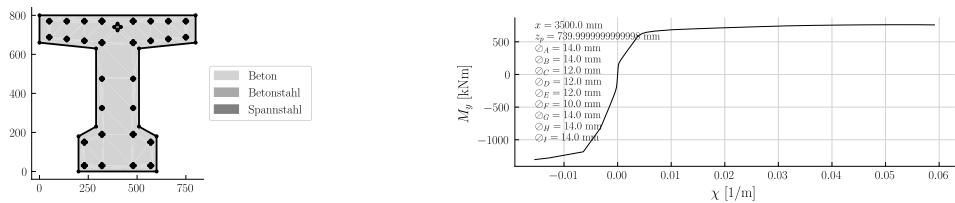


Abbildung A.37.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 35

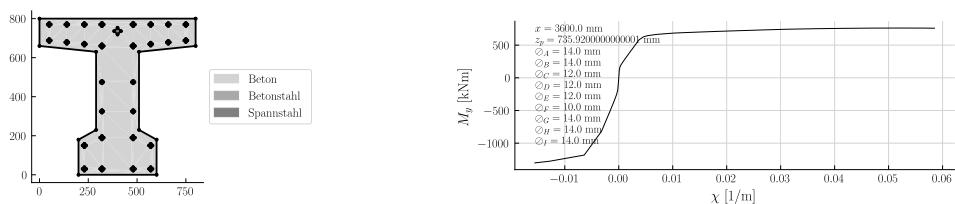


Abbildung A.38.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 36

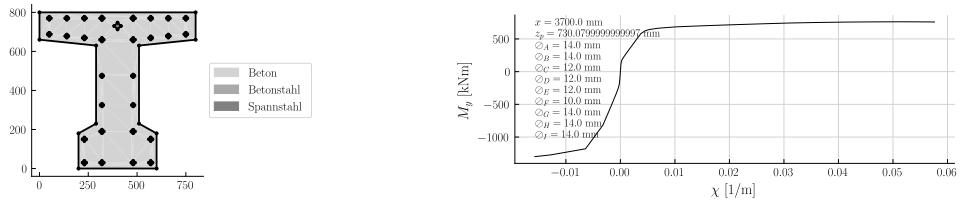


Abbildung A.39.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 37

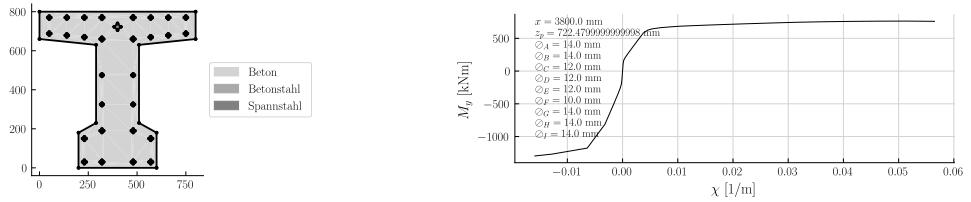


Abbildung A.40.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 38

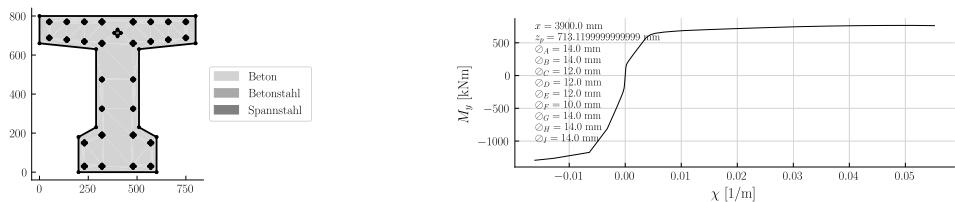


Abbildung A.41.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 39

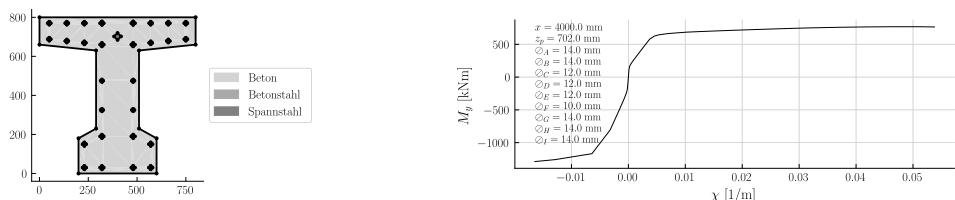


Abbildung A.42.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 40

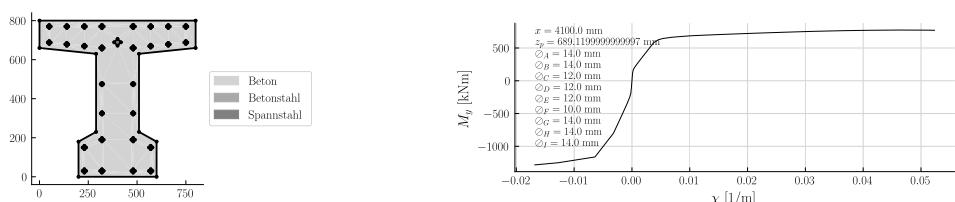


Abbildung A.43.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 41

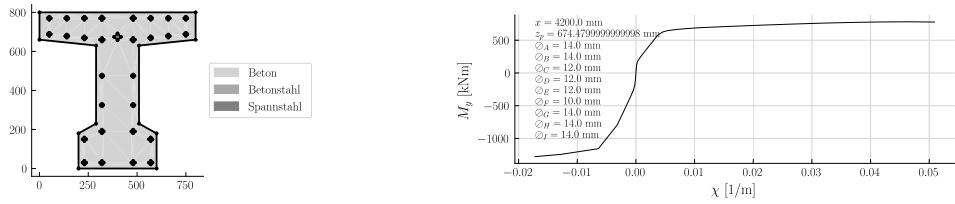


Abbildung A.44.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 42

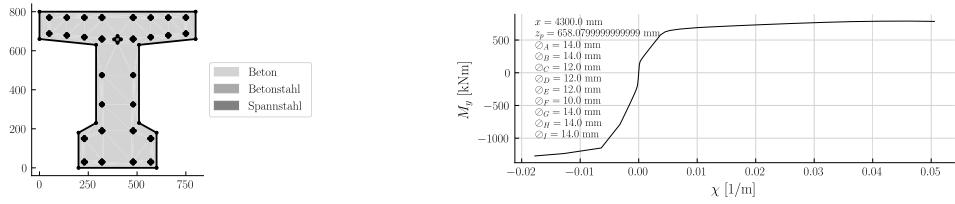


Abbildung A.45.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 43

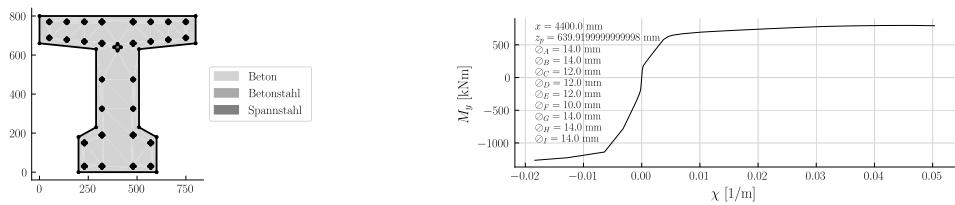


Abbildung A.46.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 44

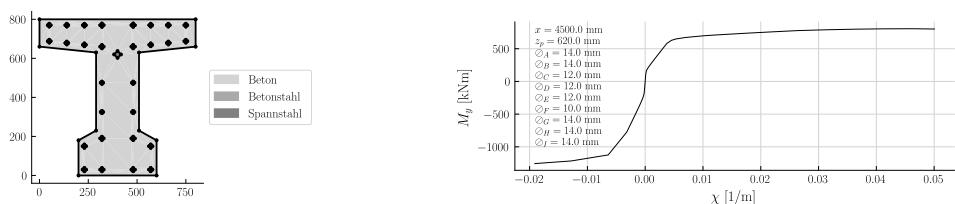


Abbildung A.47.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 45

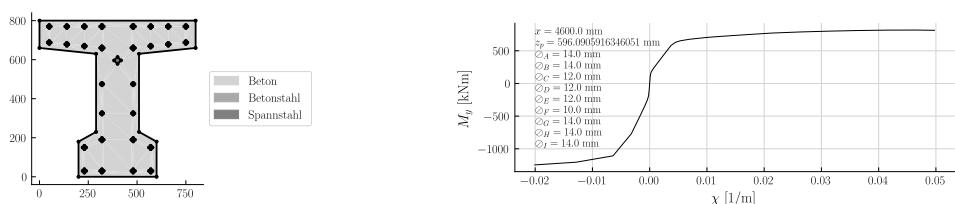


Abbildung A.48.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 46

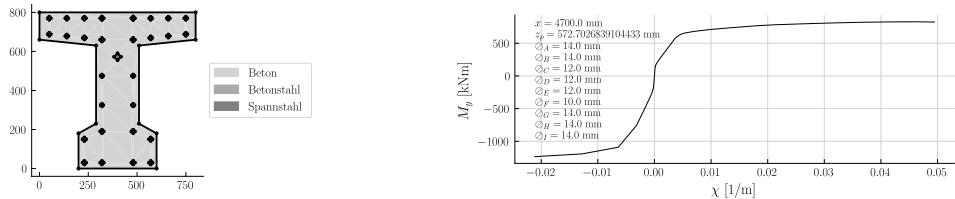


Abbildung A.49.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 47

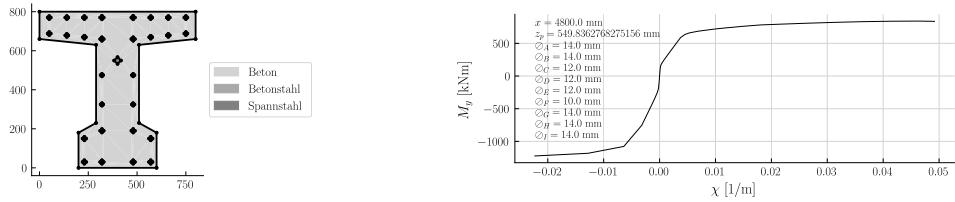


Abbildung A.50.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 48

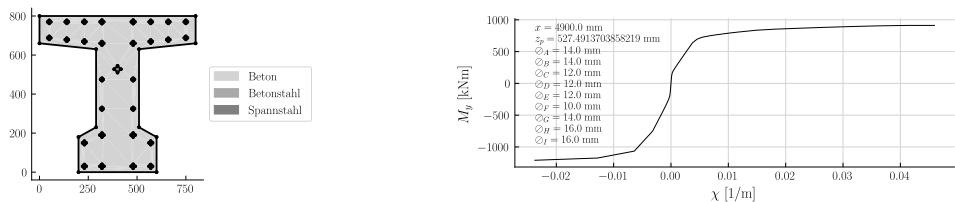


Abbildung A.51.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 49

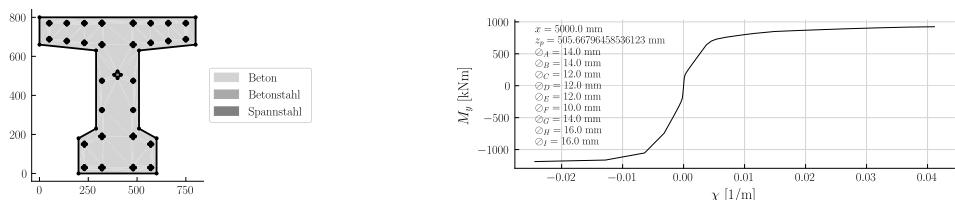


Abbildung A.52.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 50

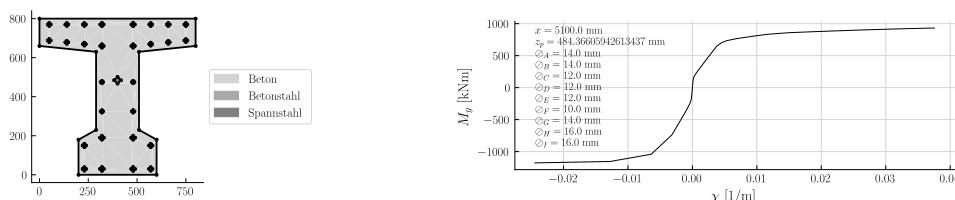


Abbildung A.53.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 51

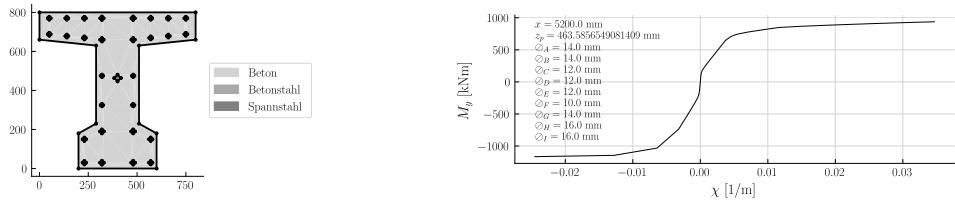


Abbildung A.54.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 52

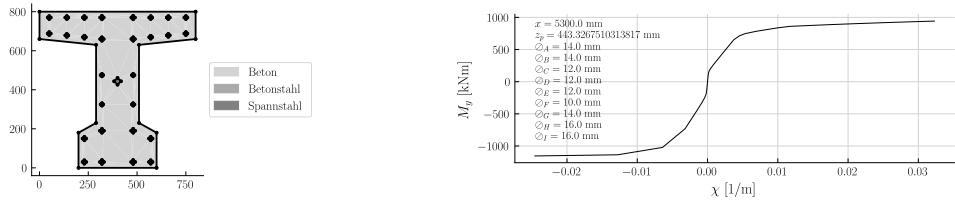


Abbildung A.55.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 53

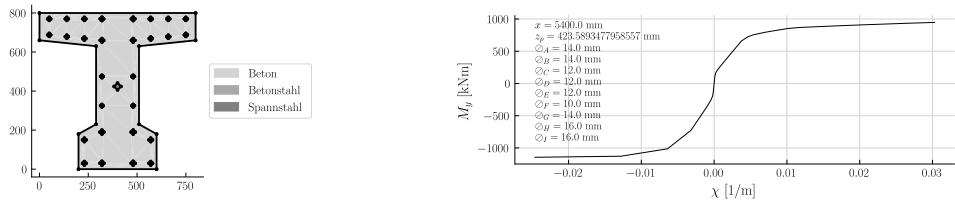


Abbildung A.56.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 54

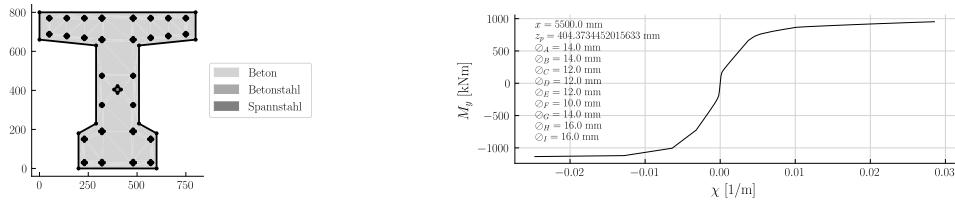


Abbildung A.57.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 55

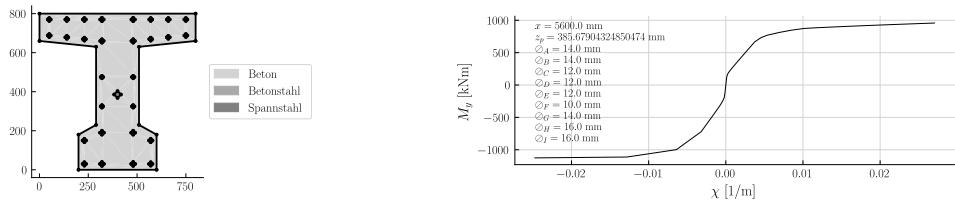


Abbildung A.58.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 56

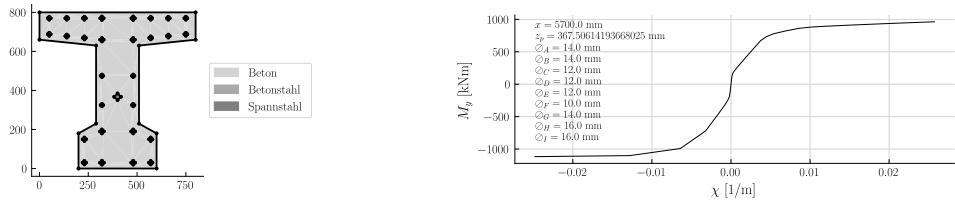


Abbildung A.59.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 57

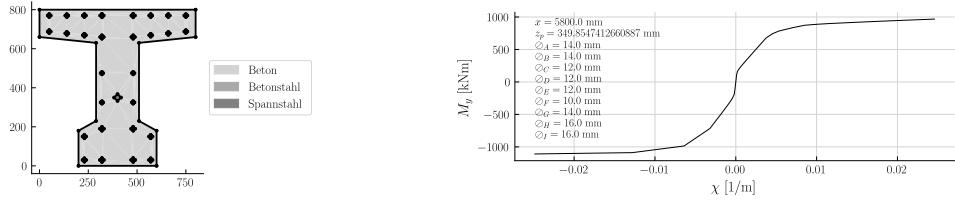


Abbildung A.60.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 58

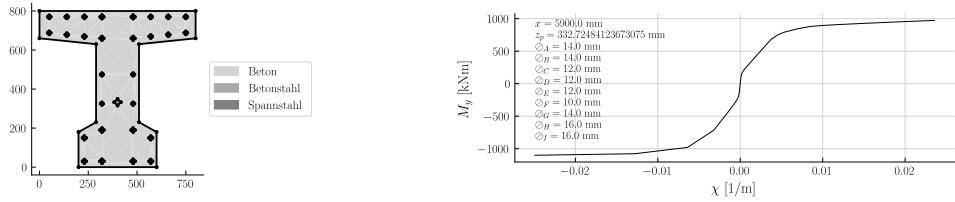


Abbildung A.61.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 59

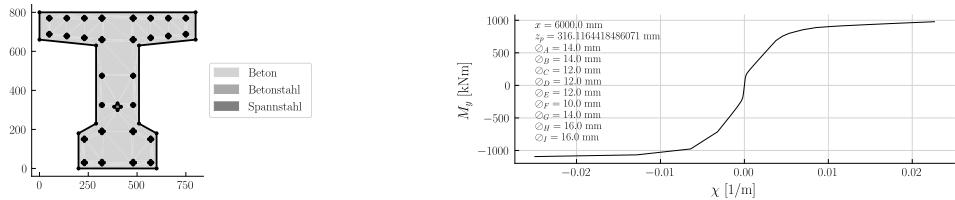


Abbildung A.62.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 60

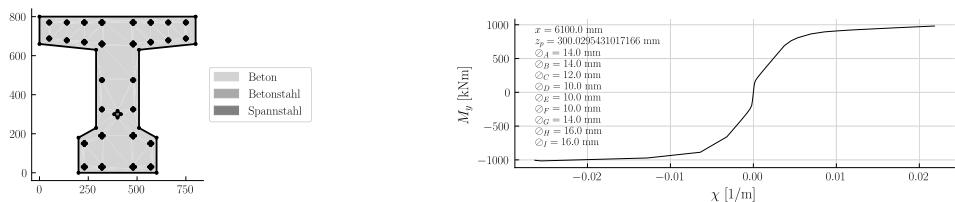


Abbildung A.63.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 61

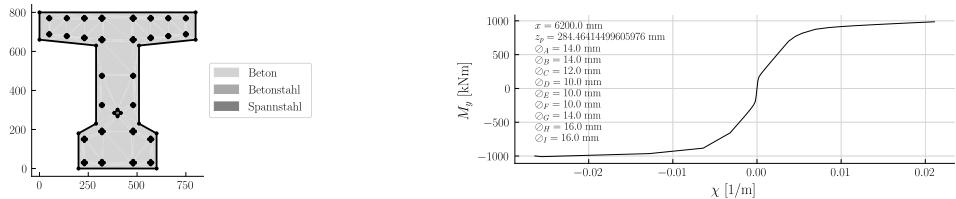


Abbildung A.64.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 62

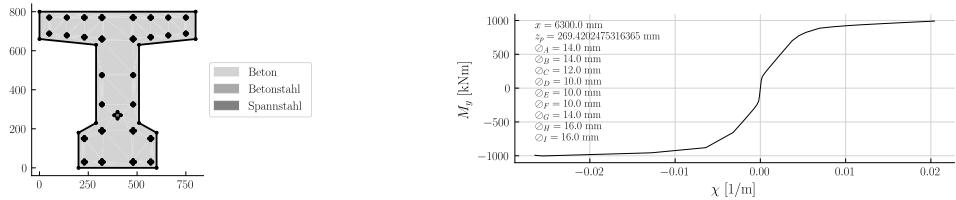


Abbildung A.65.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 63

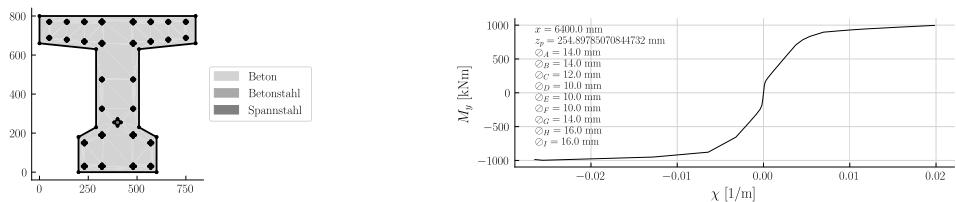


Abbildung A.66.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 64

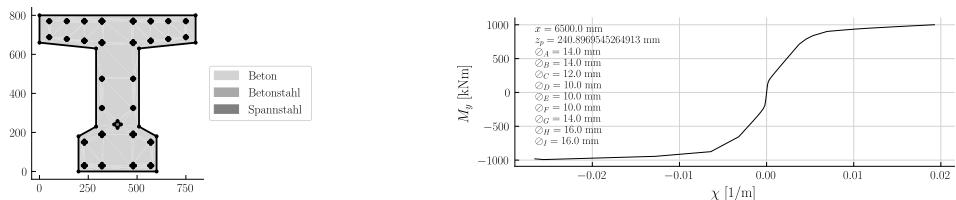


Abbildung A.67.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 65

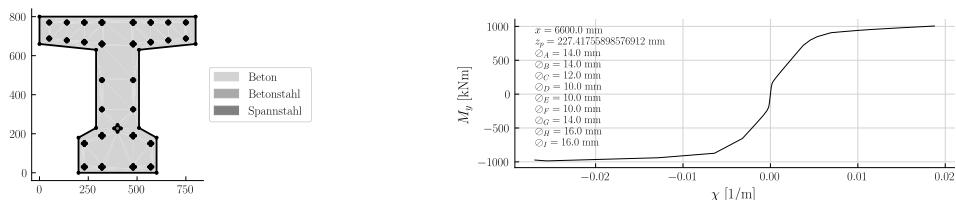


Abbildung A.68.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 66

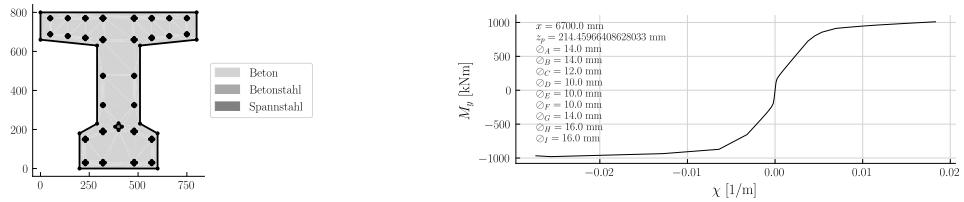


Abbildung A.69.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 67

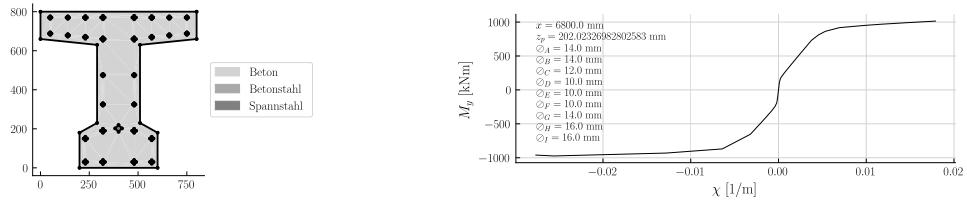


Abbildung A.70.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 68

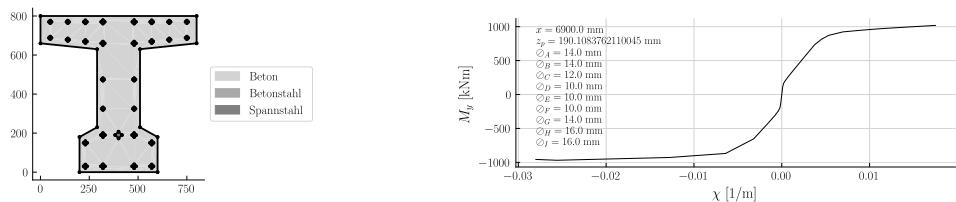


Abbildung A.71.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 69

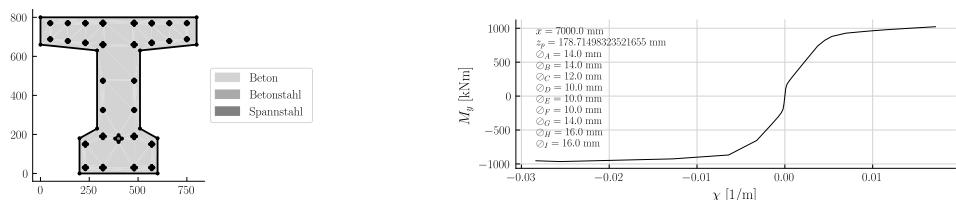


Abbildung A.72.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 70

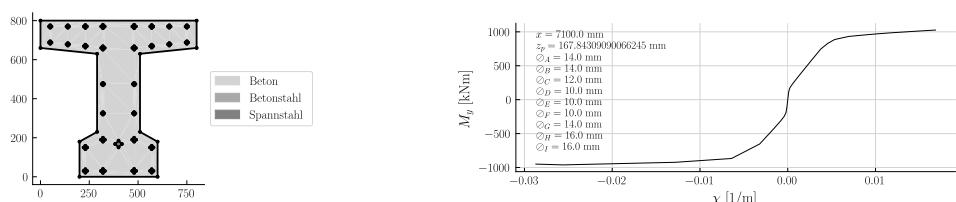


Abbildung A.73.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 71

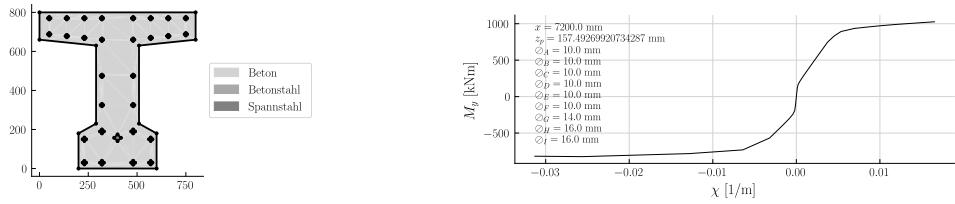


Abbildung A.74.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 72

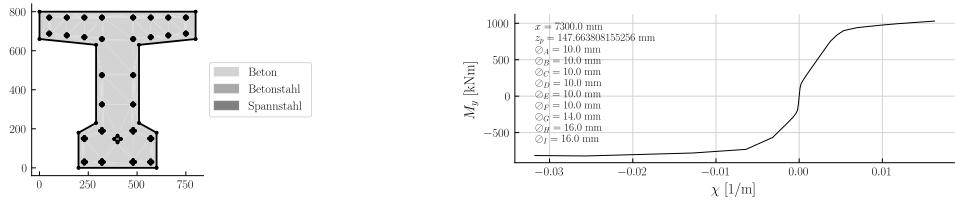


Abbildung A.75.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 73

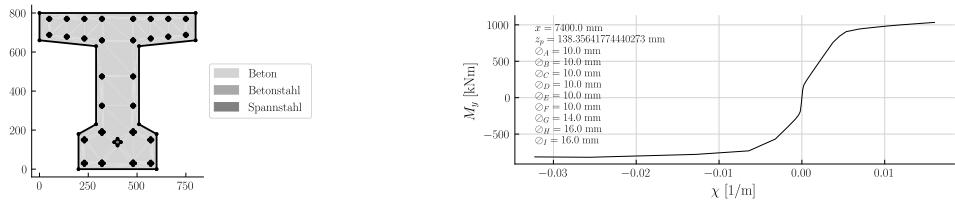


Abbildung A.76.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 74

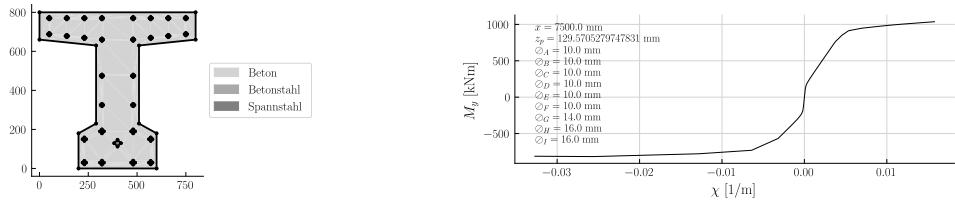
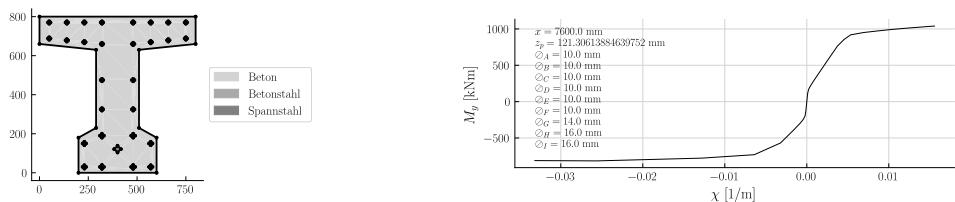


Abbildung A.77.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 75



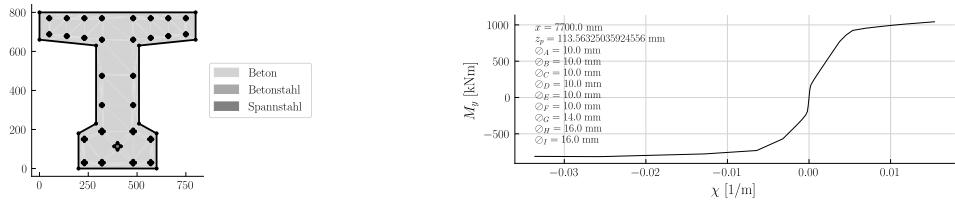


Abbildung A.79.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 77

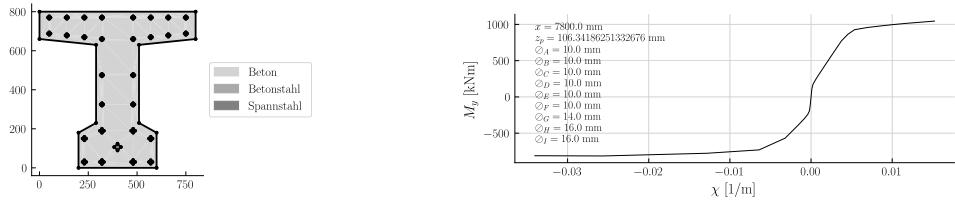


Abbildung A.80.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 78

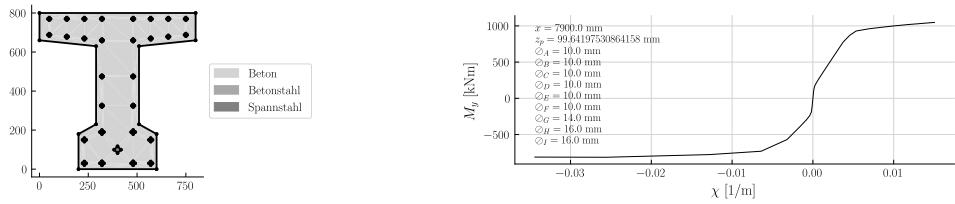


Abbildung A.81.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 79

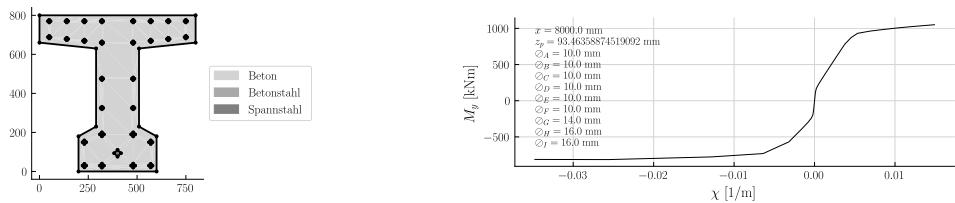


Abbildung A.82.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 80

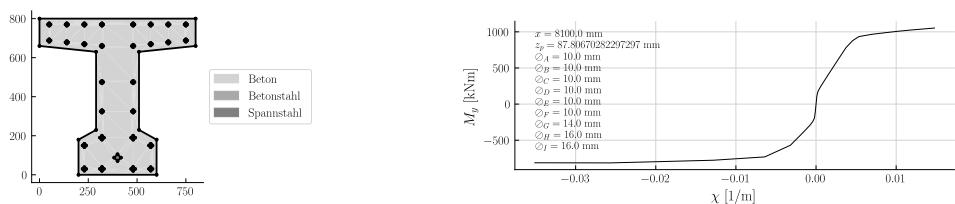


Abbildung A.83.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 81

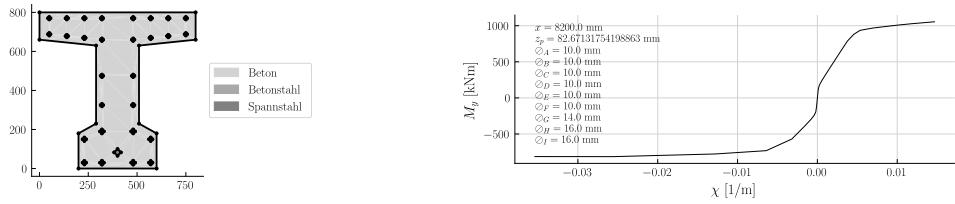


Abbildung A.84.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 82

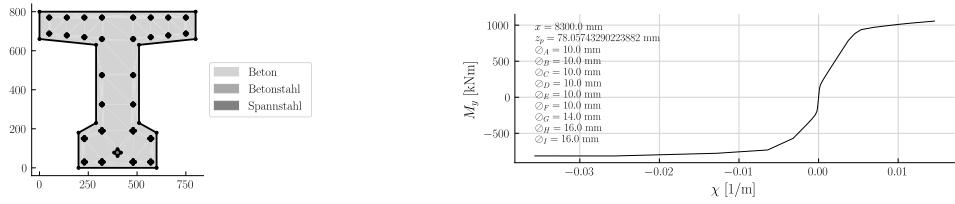


Abbildung A.85.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 83

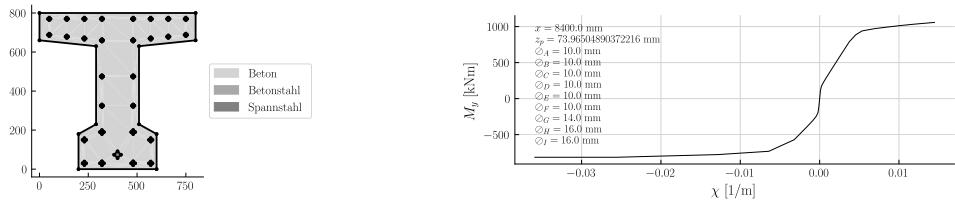


Abbildung A.86.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 84

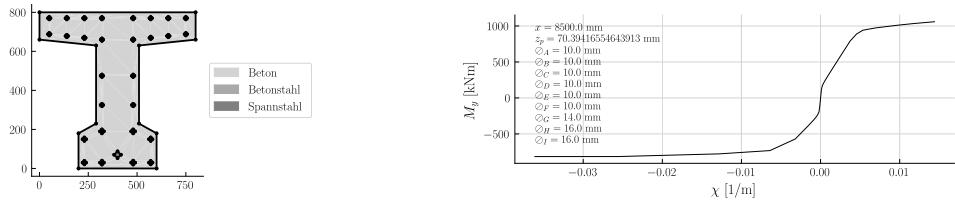


Abbildung A.87.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 85

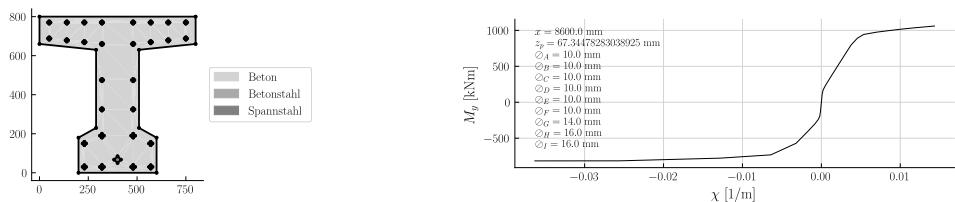


Abbildung A.88.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 86

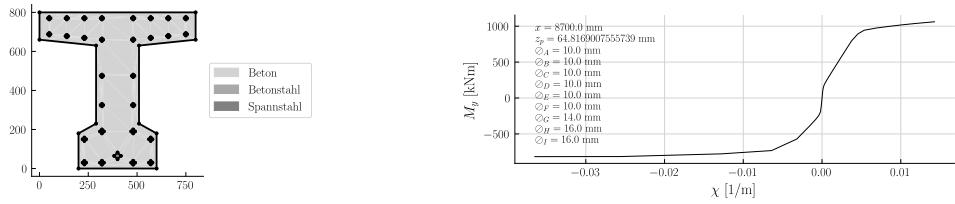


Abbildung A.89.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 87

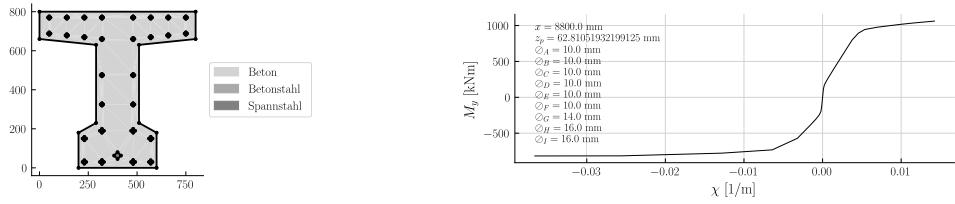


Abbildung A.90.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 88

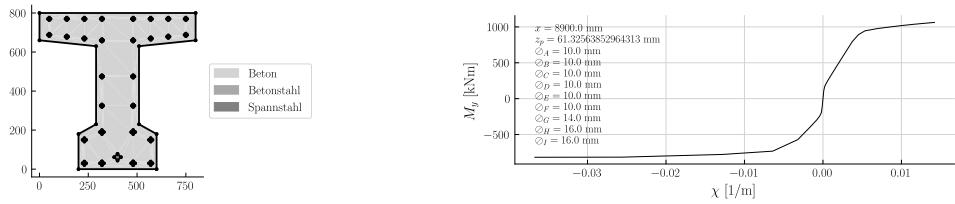


Abbildung A.91.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 89

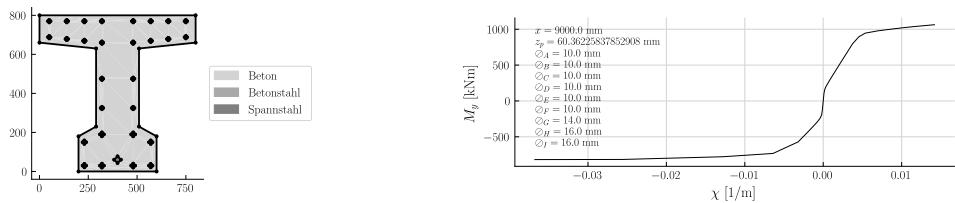


Abbildung A.92.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 90

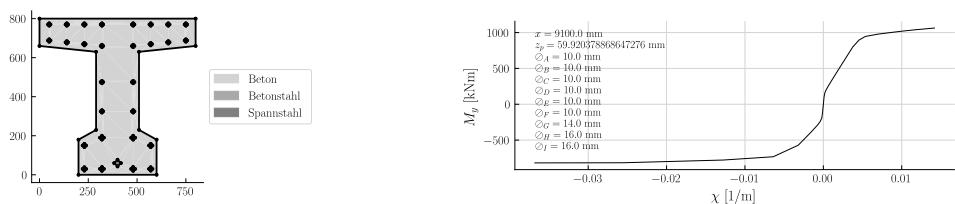


Abbildung A.93.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 91

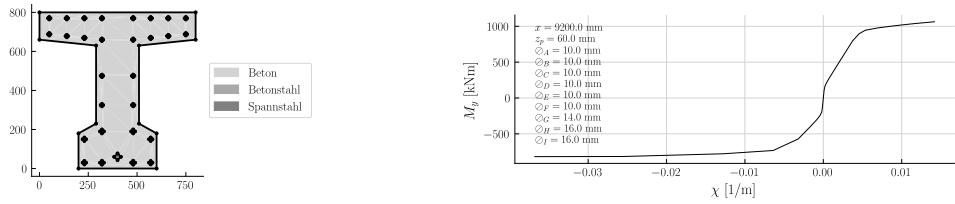


Abbildung A.94.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 92

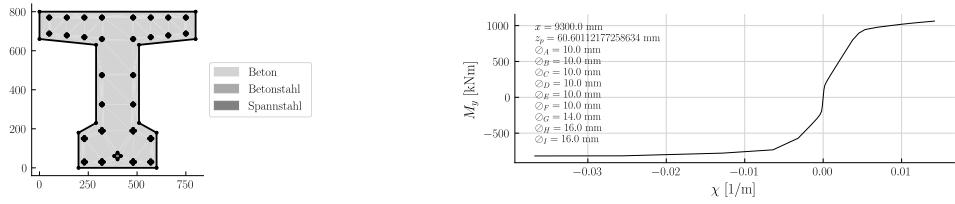


Abbildung A.95.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 93

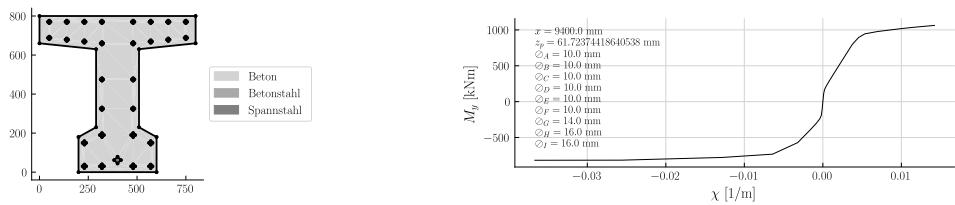


Abbildung A.96.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 94

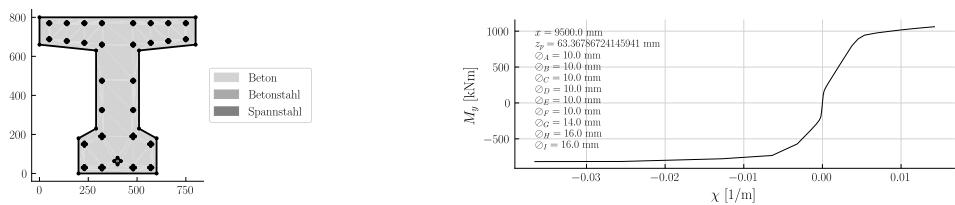


Abbildung A.97.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 95

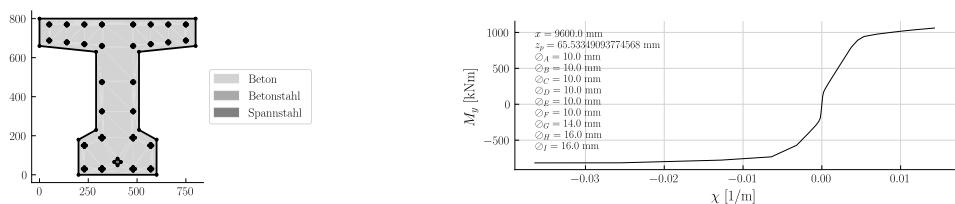


Abbildung A.98.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 96

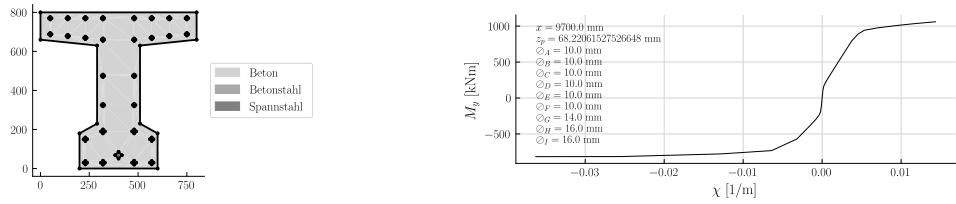


Abbildung A.99.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 97

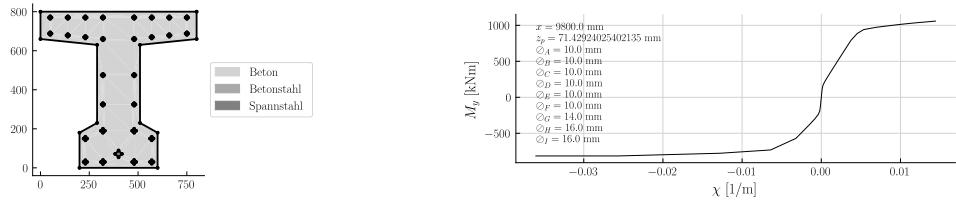


Abbildung A.100.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 98

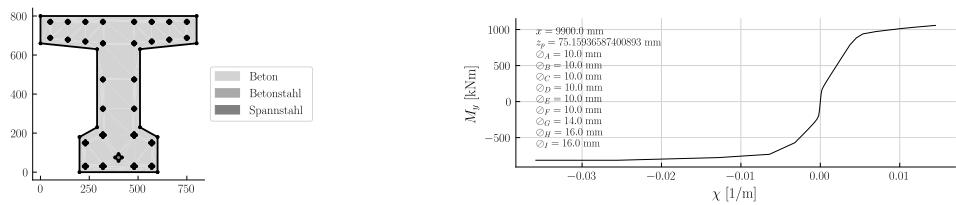


Abbildung A.101.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 99

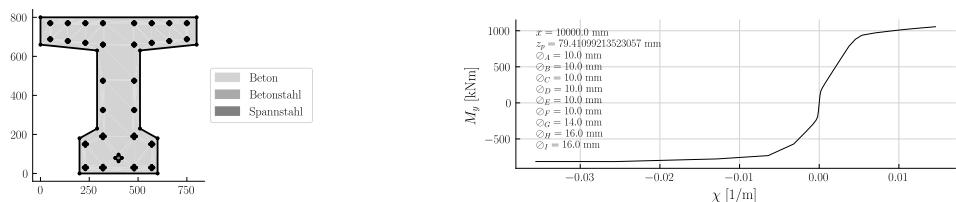


Abbildung A.102.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 100

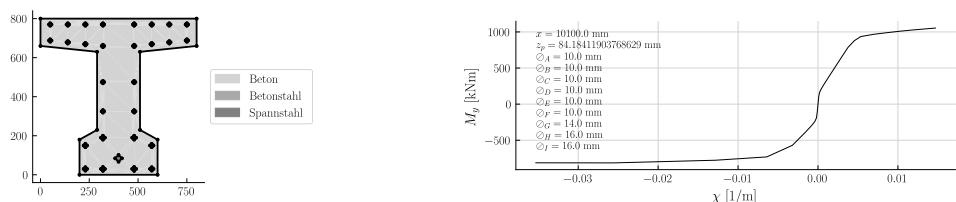
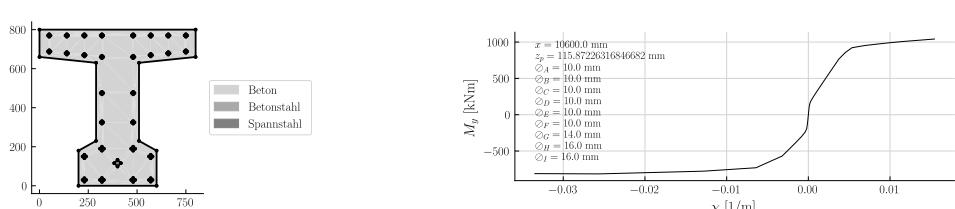
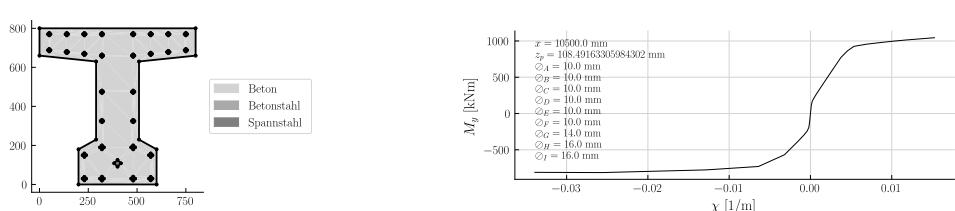
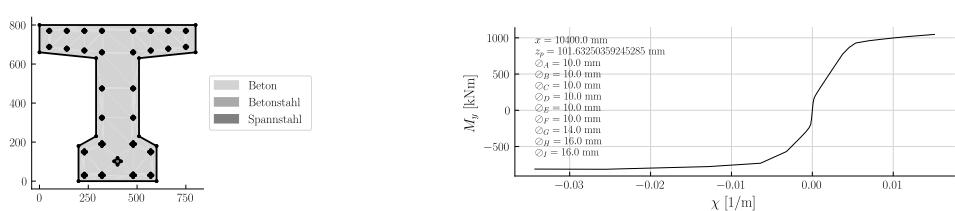
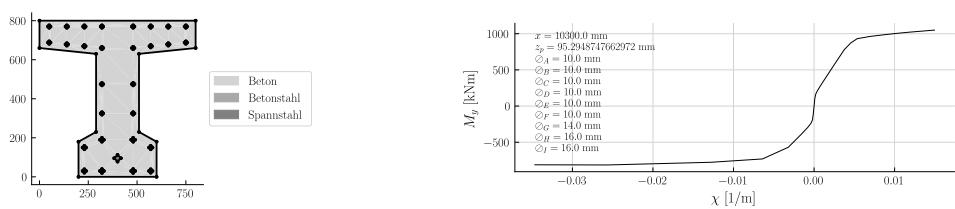
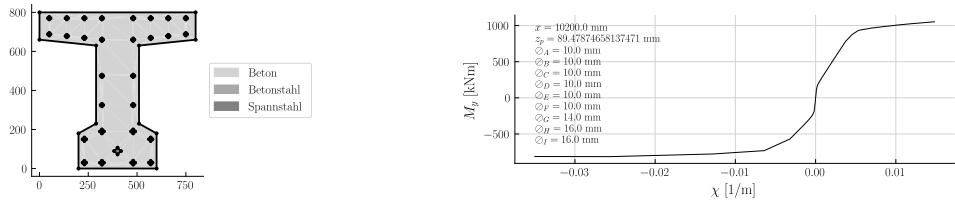


Abbildung A.103.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 101



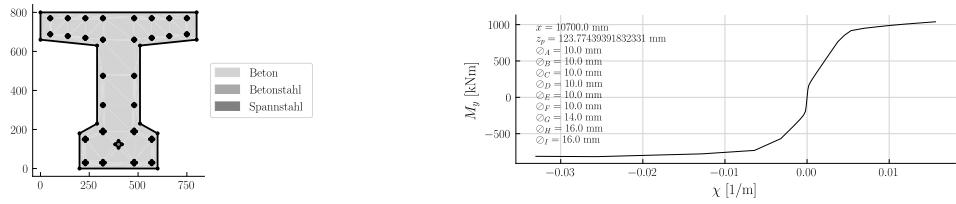


Abbildung A.109.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 107

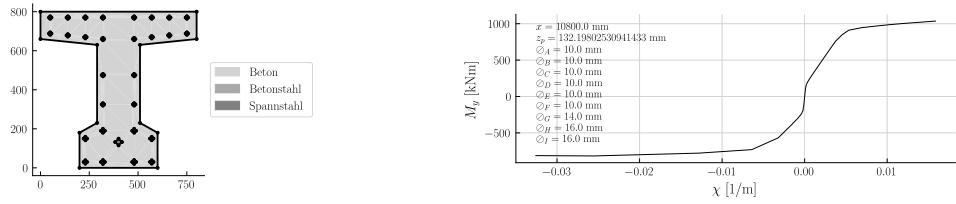


Abbildung A.110.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 108

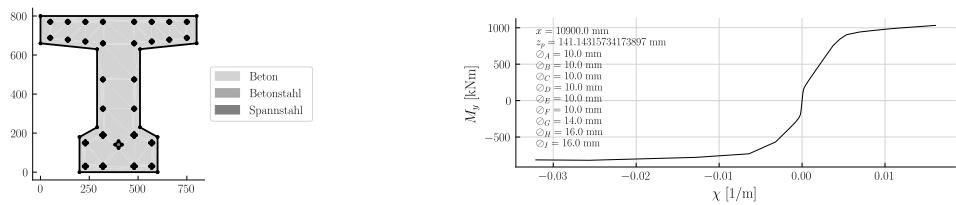


Abbildung A.111.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 109

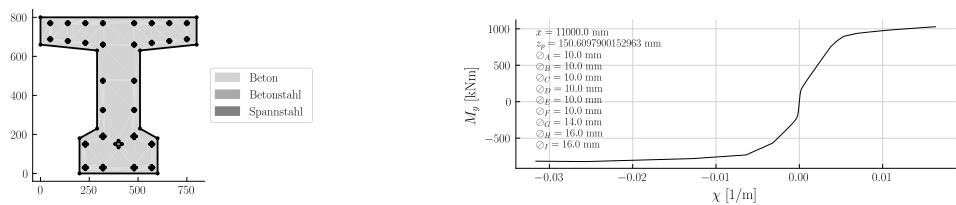


Abbildung A.112.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 110

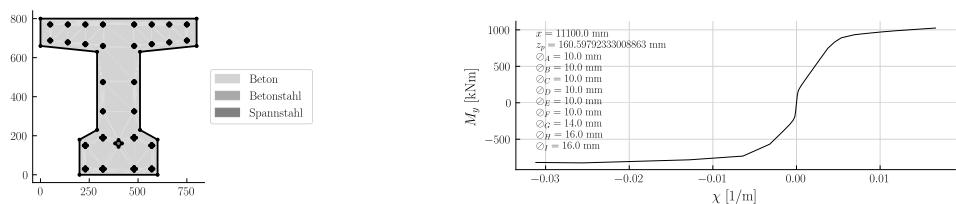


Abbildung A.113.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 111

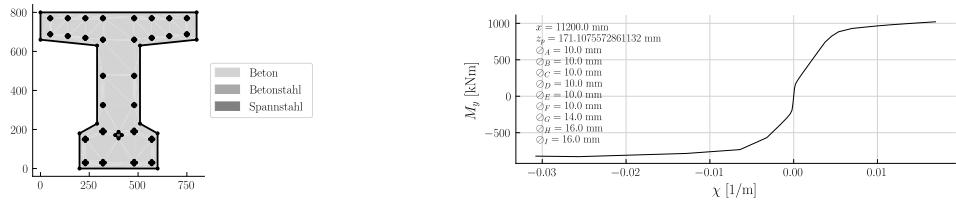


Abbildung A.114.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 112

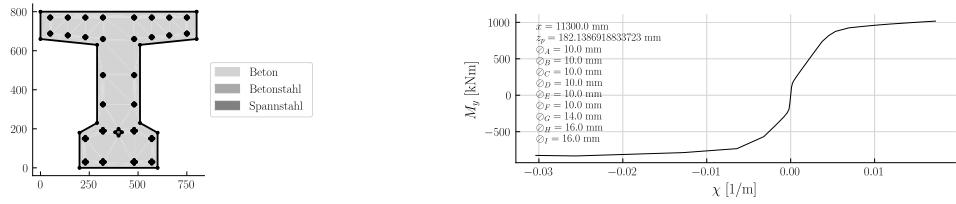


Abbildung A.115.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 113

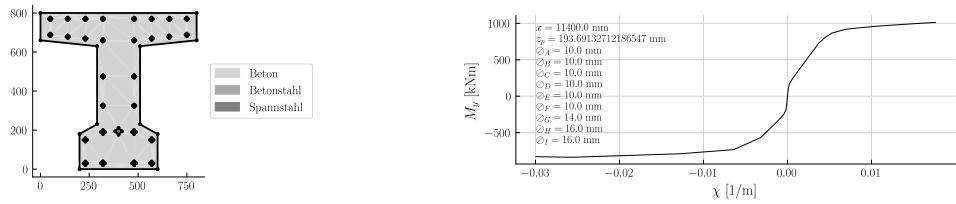


Abbildung A.116.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 114

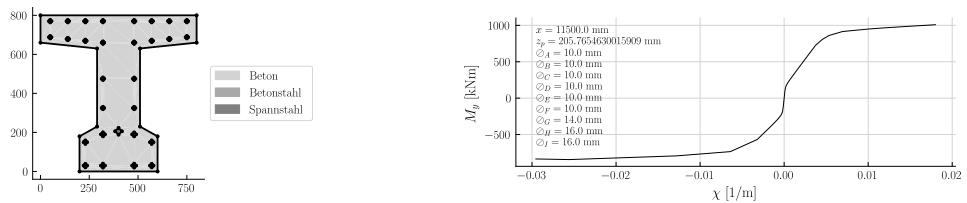


Abbildung A.117.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 115

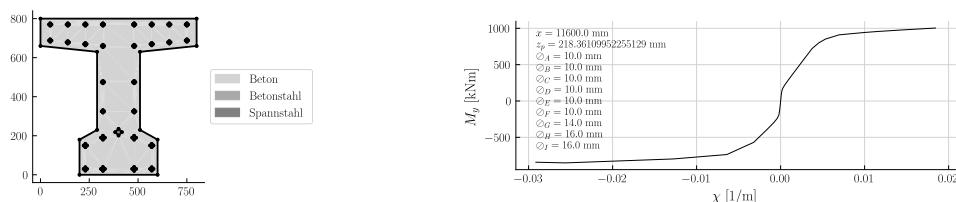


Abbildung A.118.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 116

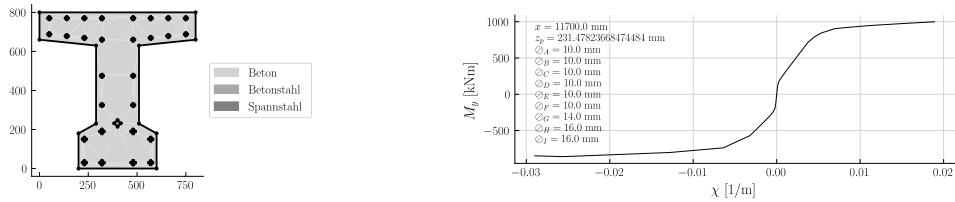


Abbildung A.119.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 117

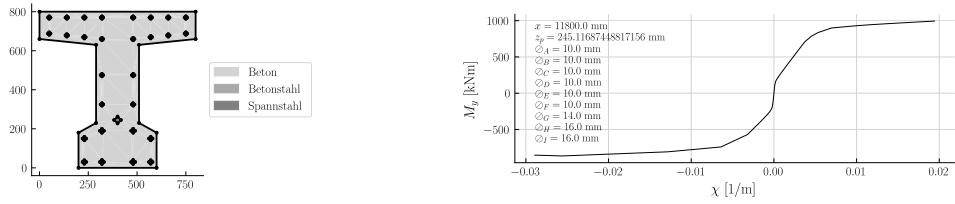


Abbildung A.120.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 118

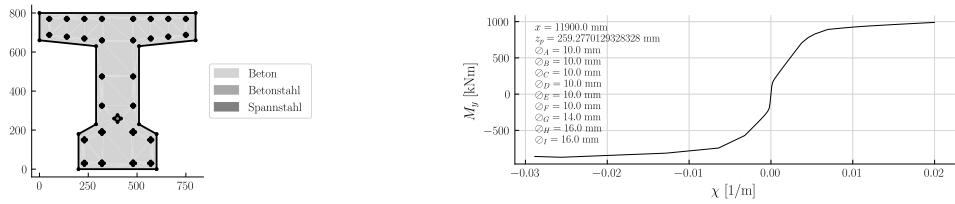


Abbildung A.121.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 119

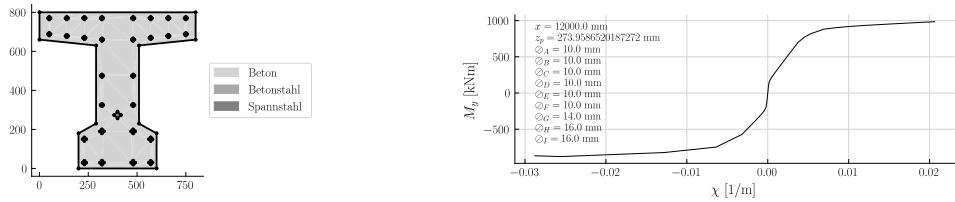


Abbildung A.122.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 120

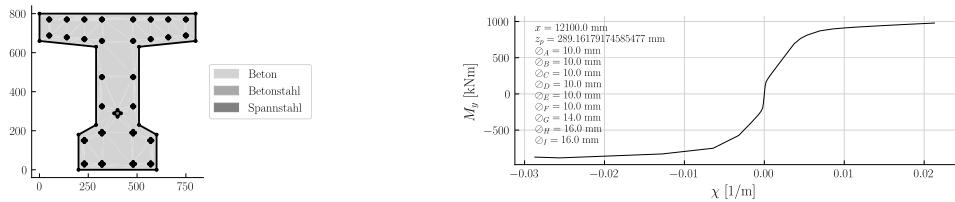


Abbildung A.123.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 121

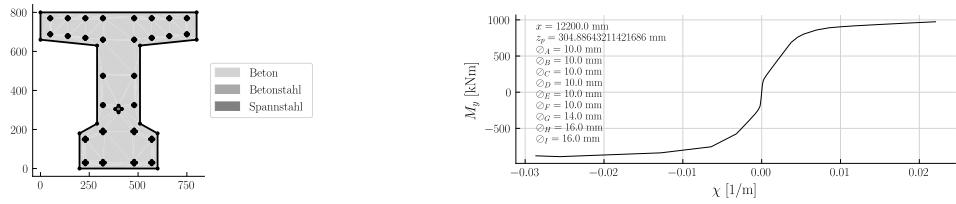


Abbildung A.124.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 122

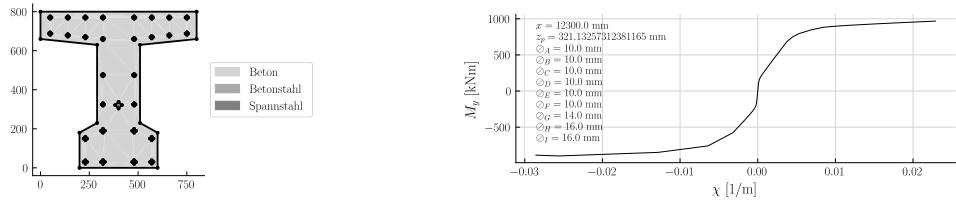


Abbildung A.125.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 123

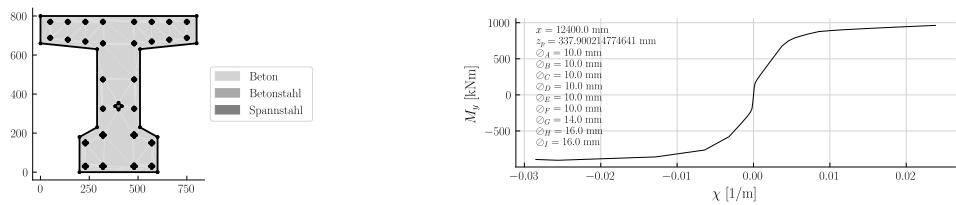


Abbildung A.126.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 124

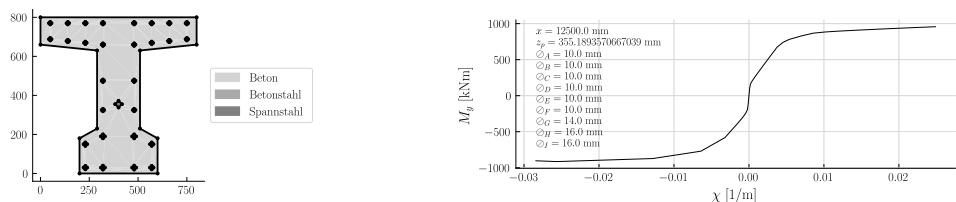


Abbildung A.127.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 125

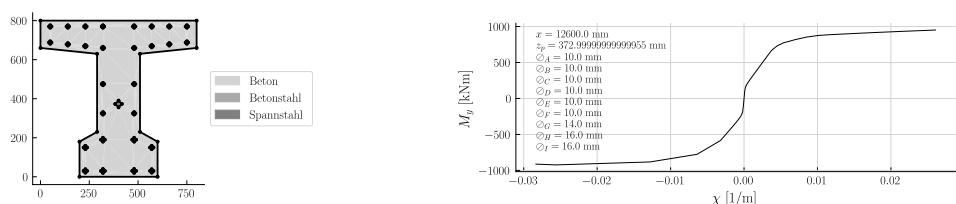


Abbildung A.128.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 126

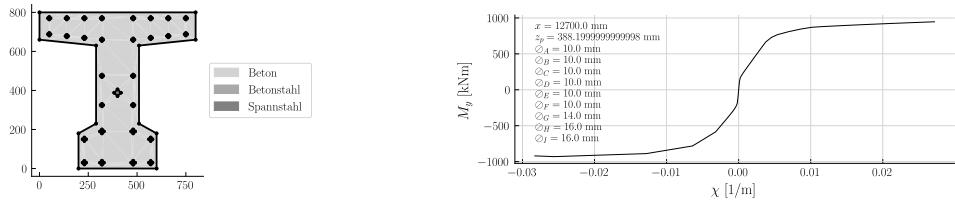


Abbildung A.129.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 127

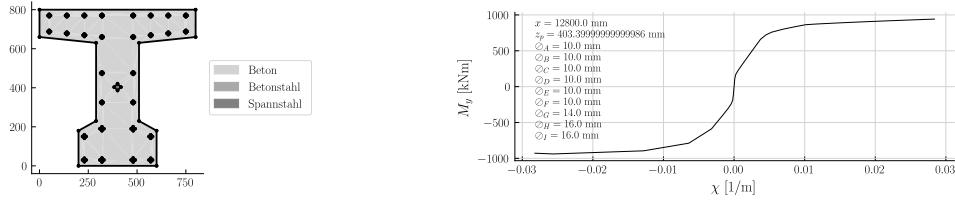


Abbildung A.130.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 128

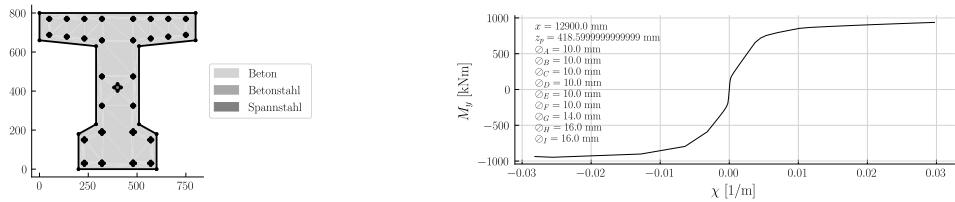


Abbildung A.131.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 129

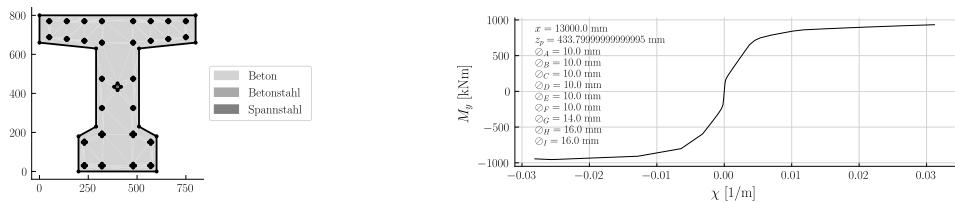


Abbildung A.132.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 130

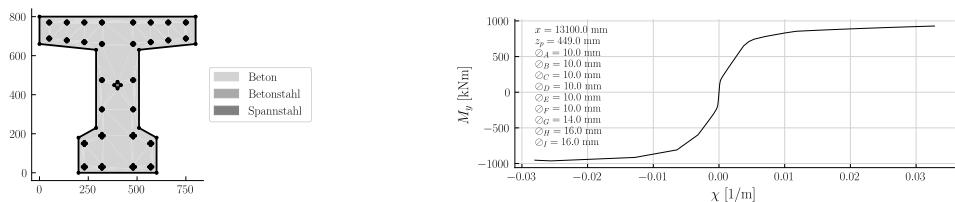


Abbildung A.133.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 131

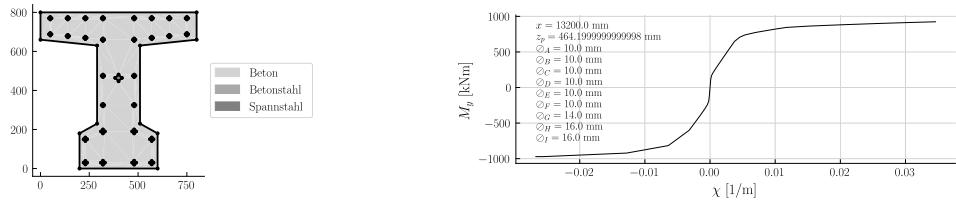


Abbildung A.134.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 132

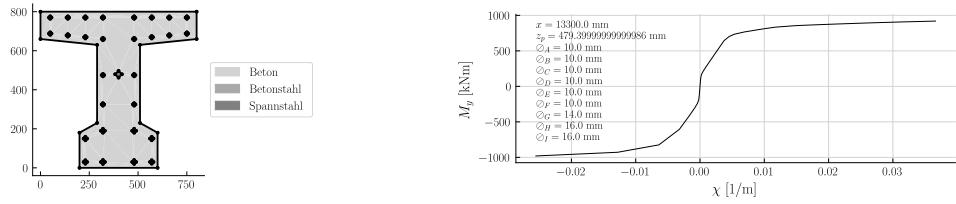


Abbildung A.135.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 133

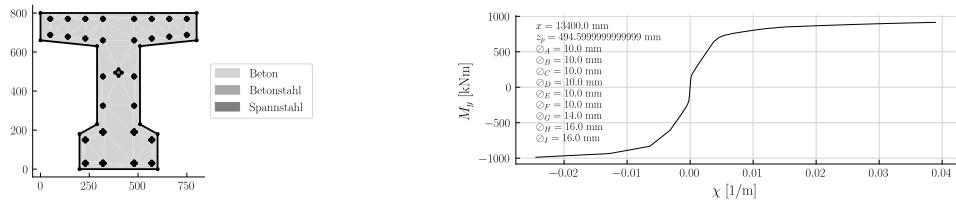


Abbildung A.136.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 134

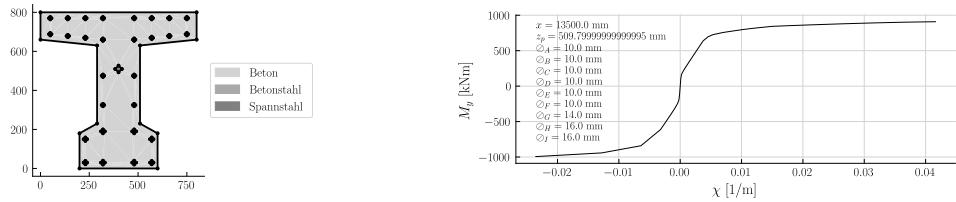


Abbildung A.137.: Momenten-Krümmungs-Beziehung des Querschnitts 135