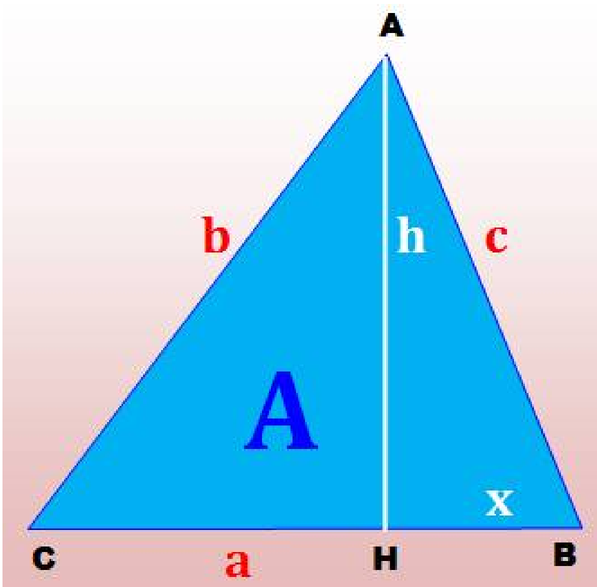
Seconde — Formule de Héron — 05/10/2020



La formule de Héron permet de calculer l'aire d'un triangle à partir des longueurs de ses trois côtés.
On considère un triangle ABC, on note a,b et c les longueurs respectives de $[CB]$,$[AC]$ et $[AB]$, H le pied de la hauteur issu de A et $h := AH$. En notant A l'aire du triangle et s son demi-périmètre (c'est à dire $s := \frac{a+b+c}{2}$). On va montrer que :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

1. Notons $x := HB$, en utilisant 2 fois le théorème de Pythagore, montrer les deux égalités suivantes :

$$h^2 = c^2 - x^2 \tag{1}$$
$$h^2 = b^2 - a^2 + 2ax - x^2 \tag{2}$$

2. En déduire que $x = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$
3. En injectant cette expression de x dans l'égalité (1), montrer que :

$$(2ah)^2 = 4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)$$

4. En factorisant à l'aide d'identité remarquable le membre de gauche de cette dernière égalité, en déduire que :

$$(2ah)^2 = (b - a + c)(b + a - c)(a + c - b)(a + b + c)$$

5. En déduire que :

$$(\frac{ah}{2})^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

6. Conclure que :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$