Seconde — Correction DM n°1 — 20/09/2020

— Rendu le jeudi 17/09/2020

Exercice 1. (Critère de divisibilité par 2) On veut montrer que : *Un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.*

1. *En remarquant que* $41234 = 4123 \times 10 + 4$ *montrer que 41234 est divisible par 2.*
   On a :
   $$\begin{aligned} 41234 &= 4123 \times 10 + 4 \\ &= 2(4123 \times 5 + 2) \end{aligned}$$
   Donc par définition, 41234 est divisible par 2
   Remarque : 41234 a pour nombre de dizaines 4123 et pour chiffre des unités 4.
2. *Soit n un entier, notons d son nombre de dizaines et x son chiffre des unités, montrer que si x est divisible par 2 alors n est divisible par 2.*
   Supposons que x est divisible par 2.
   On a alors, il existe k entier tel que $x = 2k$ On peut donc écrire :
   $$\begin{aligned} n &= d \times 10 + x \\ &= d \times 10 + 2k \\ &= 2(d \times 5 + k) \end{aligned}$$
   Ce qui permet de conclure que n est divisible par 2.
3. *Conclure.*
   Soit n un entier, notons x son chiffre des unités.
   Supposons que n se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8.
   Alors x est divisible par 2.
   D'où d'après la question 2 n est divisible par 2.

Exercice 2. (Critère de divisibilité par 5) On veut montrer que : *Un nombre est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.*

1. *En remarquant que* $874925 = 87492 \times 10 + 5$ *montrer que 874925 est divisible par 5.*
   On a :
   $$\begin{aligned} 874925 &= 87492 \times 10 + 5 \\ &= 5(87492 \times 2 + 1) \end{aligned}$$
   Donc par définition, 874925 est divisible par 5.
2. *Soit n un entier, notons d son nombre de dizaine et x son chiffre des unités, montrer que n est divisible par 5 si et seulement si x est divisible par 5.*
   Supposons que x est divisible par 5.
   On a alors : il existe k entier tel que $x = 5k$ Dès lors :
   $$\begin{aligned} n &= 10d + x \\ &= 5 \times 2d + 5k \\ &= 5(2d + k) \end{aligned}$$

D'où n est divisible par 5.
Inversement, supposons que n est divisible par 5.
Alors par définition, il existe un entier k tel que $n = 5k$.
On a dès lors :

$$\begin{aligned} n &= d \times 10 + x \\ 5k &= d \times 10 + x \\ x &= 5k - d \times 10 \\ x &= 5(k - d \times 2) \end{aligned}$$

D'où x est divisible par 5

Remarque : l'implication réciproque était plus difficile à montrer, si vous avez pu montrer le sens direct, c'est déjà très bien ! En effet dans la question 3, on utilise seulement le sens direct.

3. *Conclure.*
   Soit n un entier, notons x son chiffre des unités.
   Si n se termine par 0 ou 5.
   Alors x est divisible par 5.
   D'où d'après la question 2 n est divisible par 5 .

Exercice 3. (Critère de divisibilité par 4) On veut montrer que : *Un nombre est divisible par 4 si la somme de deux fois son chiffre des dizaines et d'une fois son chiffre des unités est divisible par 4.*

1. *En remarquant que* $7827348 = 78273 \times 100 + 48$ *montrer que 7827348 est divisible par 4* On a :

$$\begin{aligned} 7827348 &= 78273 \times 100 + 48 \\ &= 4(78273 \times 25 + 12) \end{aligned}$$

   D'où 7827348 est divisible par 4.

2. *Soit m un nombre strictement inférieur à 100, notons* a_1 *son chiffre des dizaines et* a_0 *son chiffre des unités, en utilisant le fait que* $10 = 8 + 2$ *montrer que si* $2 \times a_1 + a_0$ *est divisible par 4 alors il en est de même pour m.*
   Supposons que : $2a_1 + a_0$ est divisible par 4.
   Par définition, il existe un entier k tel que $2a_1 + a_0 = 4k$.
   On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} m &= a_1 \times 10 + a_0 \\ &= a_1 \times (8 + 2) + a_0 \\ &= 8a_1 + 2a_1 + a_0 \\ &= 8a_1 + 4k && (2a_1 + a_0 = 4k) \\ &= 4(2a_1 + k) \end{aligned}$$

   Donc par définition, m est divisible par 4.

3. *Soit n un entier, notons c son nombre de centaines, a_1 son chiffre des dizaines et a_0 son chiffre des unités, montrer que si $2 \times a_1 + a_0$ est divisible par 4 alors il en est de même pour n.*
   On a : $n = 100c + 10a_1 + a_0$
   Supposons que $2a_1 + a_0$ est divisible par 4.
   D'après la question 2, $10a_1 + a_0$ est divisible par 4.
   D'où par définition, il existe un entier k tel que $10a_1 + a_0 = 4k$
   On a donc :

$$\begin{aligned} n &= 100c + 10a_1 + a_0 \\ &= 100c + 4k \\ &= 4(25c + k) \end{aligned}$$

   Ce qui permet de conclure que n est divisible par 4.

Exercice 4. (Critère de divisibilité par 3) On a appris que : *Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.*

1. *Par un calcul, prouver que 9, 99, 999, 9999 sont divisibles par 3.*
   On a :

$$\begin{aligned} 9 &= 3 \times 3 \\ 99 &= 3 \times 33 \\ 999 &= 3 \times 333 \\ 9999 &= 3 \times 3333 \end{aligned}$$

   D'où 9, 99, 999 et 9999 sont divisibles par 3.

2. *Soit m un nombre strictement inférieur à 100, notons a_1 son chiffre des dizaines et a_0 son chiffre des unités, en utilisant le fait que $10 = 9 + 1$ montrer que si $a_1 + a_0$ est divisible par 3 alors il en est de même pour m.*
   Supposons que $a_1 + a_0$ est divisible par 3.
   On a :

$$\begin{aligned} m &= 10a_1 + a_0 \\ &= (9 + 1)a_1 + a_0 \\ &= 9a_1 + a_1 + a_0 \end{aligned}$$

   Or $9a_1$ est divisible par 3 et $a_1 + a_0$ est divisible par 3.
   D'où m est divisible par 3.
   Remarque : (Propriété du cours) La somme de deux nombres divisibles par 3 est divisible par 3. On aurait pu aussi user de la définition de divisible par 3 pour dire qu'il existe un entier k tel que $a_1 + a_0 = 3k$ et procéder comme dans les exercices précédents.

3. *Soit n un nombre strictement inférieur à 1000 s'écrivant $a_2a_1a_0$ c'est à dire a_2 est le chiffre des centaines, a_1 le chiffre des dizaines et a_0 le chiffre des unités, en vous*

inspirant de ce qui précède, montrer que si $a_2 + a_1 + a_0$ est divisible par 3 alors n est divisible par 3.

Supposons que $a_2 + a_1 + a_0$ est divisible par 3.
On a :

$$\begin{aligned} n &= 100a_2 + 10a_1 + a_0 \\ &= (99+1)a_2 + (9+1)a_1 + a_0 \\ &= 99a_2 + 9a_1 + a_2 + a_1 + a_0 \end{aligned}$$

Or $99a_2$, $9a_1$ et $a_2 + a_1 + a_0$ sont divisibles par 3.
D'où n est divisible par 3.

4. *Comment ce raisonnement pourrait-il se généraliser ?*

   Nous n'avons pas les symboles formels en seconde pour faire proprement la généralisation. Mais nous pouvons déjà en comprendre l'idée générale.

   Soit n un entier et $a_0, a_1, \dots, a_r$ ses chiffres de telle sorte que n s'écrive $a_r a_{r-1} ... a_1 a_0$.

   On a :
   $$n = 10^r a_r + 10^{r-1} a_{r-1} + \; ... \; + 10a_1 + a_0$$

   Or toute puissance de 10 est égal à 99...9 + 1, elle est donc égal à la somme d'un entier divisible par 3 et de 1. Par exemple, $10^4 = 999 + 1$.
   D'où $10^r a_r$ est la somme d'un entier divisible par 3 et de a_r.
   On peut donc en déduire que n est la somme de multiples de 3 et de $a_r + a_{r-1} + \; ... \; + a_0$.
   Ainsi si $a_r + a_{r-1} + \; ... \; + a_0$ est divisible par 3, il en est de même pour n.