Seconde 5 Correction DST n°1 25/09/2020

Exercices

Exercice 1. On veut décomposer en facteur premier 160680

1. *Effectuer la division euclidienne de 160680 par 103. Que peut-on conclure quant à 160680 et 103 ?*

   En effectuant la division euclidienne demandée, on obtient $160680 = 1560 \times 103 + 0$.
   On en conclut que 160680 est divisible par 103.

2. *Montrer que 103 est un nombre premier. (*Indication : $11^2 = 121$.*)*

$$\begin{aligned} 103 &< 121 \\ \sqrt{103} &< 11 \end{aligned}$$

   On effectue les divisions euclidiennes de 103 par 2, 3, 5 et 7.

$$\begin{aligned} 103 &= 2 \times 51 + 1 \\ 103 &= 3 \times 34 + 1 \\ 103 &= 5 \times 20 + 3 \\ 103 &= 7 \times 14 + 5 \end{aligned}$$

   Tout les restes sont non-nuls, donc 103 est premier.

3. *Donner la décomposition en facteur premier de 1560.*

$$\begin{aligned} 1560 &= 2 \times 780 \\ &= 2 \times 2 \times 390 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 195 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 39 \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 13 \\ &= 2^3 \times 3 \times 5 \times 13 \end{aligned}$$

4. *En déduire la décomposition en facteur premier de 160680.*

   D'après la question 1, on sait que : $160680 = 1560 \times 103$.
   De plus d'après la question 2, 103 est premier.
   La décomposition en facteur premier de 160680 est donc :

$$2^3 \times 3 \times 5 \times 13 \times 103$$

Exercice 2. On veut montrer que pour tout entier n, $9n(n+5)$ est divisible par 6

1. *"Pour tout entier a, 9a est impair". Vrai ou faux ?*
   Vous justifierez votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

   Faux, en effet $18 = 9 \times 2$ et 18 est pair.

2. *Montrer que pour tout entier a, si a est pair alors $9a$ est divisible par 6.*

   Soit a un entier pair, il existe k entier tel que $a = 2k$.
   Dès lors :

   $$\begin{aligned} 9a &= 9 \times 2k \\ &= 6 \times 3k \end{aligned}$$

   Donc $9a$ est divisible par 6.

3. *Soit n un entier, on pose $m = n(n+5)$, montrer par disjonction de cas que m est pair.*

   — Supposons que n est pair.
   Par définition, il existe un entier k tel que $n = 2k$.
   D'où :

   $$\begin{aligned} m &= n(n+5) \\ &= 2k(2k+5) \end{aligned}$$

   Donc m est pair.

   — Supposons maintenant que n est impair.
   Par définition, il existe un entier k tel que $n = 2k+1$.
   D'où :

   $$\begin{aligned} m &= n(n+5) \\ &= (2k+1)(2k+1+5) \\ &= (2k+1)(2k+6) \\ &= (2k+1) \times 2(k+3) \\ &= 2(2k+1)(k+3) \end{aligned}$$

   Donc m est pair.

4. *En déduire que $9m$ est divisible par 6.*

   On sait d'après la question 3 que m est pair.
   D'après la question 2, on en déduit donc que $9m$ est divisible par 6.

Exercice 3. (*Bonus*)

1. *Peut on écrire 2004 comme somme de 3 entiers consécutifs ?* On a :

$$\begin{aligned} 2004 &= 3 \times 668 \\ &= 668 + 668 + 668 \\ &= 667 + 668 + 669 \end{aligned}$$

2. Et 2005 ?
   Soit n, $n+1$, $n+2$ trois entiers consécutifs, notons S leur somme. On a :

$$\begin{aligned} S &= n + n + 1 + n + 2 \\ &= 3n + 3 \\ &= 3(n+1) \end{aligned}$$

   On en conclut que S est divisible par 3.
   Or 2005 n'est pas divisible par 3 donc il n'est pas somme de trois entiers consécutifs.

3. *Y a t-il une règle ?*
   On a montré en question 2, que la somme de trois entiers consécutifs est divisible par 3. Inversement montrons maintenant que si un entier n est divisible par 3 alors il est somme de trois entiers consécutifs.
   Soit n un entier divisible par 3.
   Par définition, il existe k entier tel que $n = 3k$.
   Dès lors :

$$\begin{aligned} n &= k + k + k \\ &= (k-1) + k + (k+1) \qquad \text{(si k est différent de 0)} \end{aligned}$$

   Ce qui montre que n est somme de trois entiers consécutifs.

   On a donc montré que n est somme de trois entiers consécutifs si et seulement si n est divisible par 3 et n est différent de 0.