Exercices

Exercice 1. On veut décomposer en facteur premier 115236

1. *Effectuer la division euclidienne de 115236 par 97. Que peut-on conclure quant à 115236 et 97 ?*

   En effectuant la division euclidienne demandée, on obtient $115236 = 1188 \times 97 + 0$.
   On en conclut que 115236 est un multiple de 97.

2. *Montrer que 97 est un nombre premier. (*Indication : $10^2 = 100$.*)*

$$\begin{aligned} 97 &< 100 \\ \sqrt{97} &< 10 \end{aligned}$$

   On effectue les divisions euclidiennes de 97 par 2, 3, 5 et 7.

$$\begin{aligned} 97 &= 2 \times 48 + 1 \\ 97 &= 3 \times 32 + 1 \\ 97 &= 5 \times 19 + 2 \\ 97 &= 7 \times 13 + 6 \end{aligned}$$

   Tout les restes sont non-nuls, donc 97 est premier.

3. *Donner la décomposition en facteur premier de 1188.*

$$\begin{aligned} 1188 &= 2 \times 594 \\ &= 2 \times 2 \times 297 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 99 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 33 \\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 11 \\ &= 2^2 \times 3^2 \times 11 \end{aligned}$$

4. *En déduire la décomposition en facteur premier de 115236.*

   D'après la question 1, on sait que : $115236 = 1188 \times 97$.
   De plus d'après la question 2, 97 est premier.
   La décomposition en facteur premier de 115236 est donc :

$$2^2 \times 3^2 \times 11 \times 97$$

Exercice 2. On veut montrer que pour tout entier n, $5(n+4)(n+1)$ est divisible par 10.

1. *"Pour tout entier m, $5m$ est impair". Vrai ou faux ?*
   Vous justifierez votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

   Faux, en effet $10 = 5 \times 2$ et 10 est pair.

2. *Montrer que pour tout entier m, si m est pair alors $5m$ est divisible par 10.*

   Soit m un entier pair, il existe k entier tel que $m = 2k$.
   Dès lors :

$$\begin{aligned} 5m &= 5 \times 2k \\ &= 10k \end{aligned}$$

   Donc $5m$ est un multiple de 10.

3. *Soit n un entier, on pose $m = (n+4)(n+1)$, montrer par disjonction de cas que m est pair.*

   — Supposons que n est pair.
   Par définition, il existe un entier k tel que $n = 2k$.
   D'où :

$$\begin{aligned} m &= (n+4)(n+1) \\ &= (2k+4)(2k+1) \\ &= 2(k+2)(2k+1) \end{aligned}$$

   Donc m est pair.

   — Supposons maintenant que n est impair.
   Par définition, il existe un entier k tel que $n = 2k+1$.
   D'où :

$$\begin{aligned} m &= (n+4)(n+1) \\ &= (2k+1+4)(2k+1+1) \\ &= (2k+5) \times 2(k+1) \\ &= 2(2k+5)(k+1) \end{aligned}$$

   Donc m est pair.

4. *En déduire que $5m$ est un multiple de 10.*

   On sait d'après la question 3 que m est pair.
   D'après la question 2, on en déduit donc que $5m$ est un multiple de 10.

Exercice 3. (*Bonus*) On veut montrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel. C'est à dire qu'il n'est pas le quotient de deux nombres entiers.

1. *Montrer que pour tout entier n, si n^2 est pair alors n est pair.*
   Montrons que si n est impair alors n^2 est impair.
   Soit n un entier impair alors il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.
   D'où :
   $$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 2k + 1 \\ &= 2(2k^2 + k) + 1 \end{aligned}$$
   Donc n^2 est impair.
   On peut donc conclure que : Pour tout entier n, si n est impair alors n^2 est impair. La contraposée est vraie elle aussi. C'est à dire, on a : Pour tout entier n, si n^2 est pair alors n est pair.
2. *On suppose que $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible c'est à dire qu'il existe deux nombres entiers p et q tels que $q \neq 0$, $pgcd(p, q) = 1$ et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Montrer que p est pair.*
   On a :
   $$\begin{aligned} \sqrt{2} &= \frac{p}{q} \\ 2 &= \frac{p^2}{q^2} \\ 2q^2 &= p^2 \end{aligned}$$
   D'où p^2 est pair. Par conséquent, d'après la question 1, p est pair.
3. *En déduire que q est pair.*
   p est pair, il existe donc un entier k tel que $p = 2k$.
   Dès lors :
   $$\begin{aligned} 2q^2 &= p^2 \\ 2q^2 &= (2k)^2 \\ 2q^2 &= 2^2k^2 \\ q^2 &= 2k^2 \end{aligned}$$
   D'où q^2 est pair et donc q est pair.
4. *Quelle hypothèse a-t-on contredit ? Conclure que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*
   p et q sont divisible par 2. Leur plus grand diviseur commun n'est donc pas 1. On en conclue donc que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, c'est à dire $\sqrt{2}$ est irrationnel.