Expert level

Задание 3

Рассмотрим логистическое отображение

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n), \quad r \in (2, 3).$$

Покажем, что неподвижная точка $x^* = 0$ неустойчива

Определение (устойчивость). Точка $x^* = 0$ устойчива, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x_0| < \delta \implies |x_n| < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Предположим, что $\exists \delta > 0$, удовлетворяющее определению. Выберем $x_0 \in \left(0, \min\left\{\delta, \dfrac{1}{2}\right\}\right)$.

Тогда

$$x_1 = rx_0(1 - x_0) > rx_0\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{r}{2}x_0.$$

Поскольку $r > 2$, то $\dfrac{r}{2} > 1$, и, следовательно, $x_1 > x_0$.

Аналогично, пока $x_n < \dfrac{1}{2}$, имеем

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) > \frac{r}{2}x_n > x_n.$$

Таким образом, последовательность x_n строго возрастает, пока $x_n < \dfrac{1}{2}$. Но тогда она либо выходит за $\dfrac{1}{2}$, либо сходится к пределу $L \leq \dfrac{1}{2}$. Если бы $x_n \to L$, то $L = rL(1 - L)$, откуда $L = 0$ или $L = 1 - \dfrac{1}{r} > \dfrac{1}{2}$ (поскольку $r > 2$). Противоречие: предел не может быть в $(0, \frac{1}{2}]$.

Следовательно, найдётся n такое, что $x_n \geq \dfrac{1}{2} = \varepsilon$, несмотря на то, что $|x_0| < \delta$.

Это противоречит определению устойчивости. Значит, точка $x^* = 0$ **неустойчива** при $r \in (2, 3)$.