Expert level

Задание 8

1 Пункт 1: Устойчивость неподвижной точки $x^* = 0$

Рассмотрим отображение:

$$f(x) = rx(1-x)(2+x), \quad r \in \left[0,\ \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}\right] \approx [0, 1.584].$$

Точка $x^* = 0$ является неподвижной, так как:

$$f(0) = r \cdot 0 \cdot (1-0)(2+0) = 0.$$

Найдём производную в точке $x = 0$:

$$f(x) = r(2x - x^2 - x^3) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = r(2 - 2x - 3x^2),$$

$$f'(0) = 2r.$$

По критерию устойчивости для точечных отображений, точка $x^* = 0$ асимптотически устойчива, если $|f'(0)| < 1$, то есть:

$$2r < 1 \iff r < \frac{1}{2}.$$

Следовательно:

- при $0 \le r < \frac{1}{2}$ — точка $x^* = 0$ **асимптотически устойчива**;
- при $\frac{1}{2} < r \le \frac{27}{2(7\sqrt{7}-10)}$ — точка **неустойчива**.

На границе $r = \frac{1}{2}$ производная равна 1 — устойчивость не гарантируется (обычно считается неустойчивой).

2 Пункт 2: Бифуркационная диаграмма и сравнение с логистическим отображением

Бифуркационная диаграмма построена численно методом итераций (Python). На рисунке 1 показана зависимость аттракторов системы от параметра r.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x, r):
    return r * x * (1 - x) * (2 + x)
```

```
r_min = 0.0
r_max = 27 / (2 * (7 * np.sqrt(7) - 10))  #     1.584
num_r = 1000
r_values = np.linspace(r_min, r_max, num_r)

num_transient = 500
num_plot = 100

x_data = []
r_data = []

for r in r_values:
    x = 0.5
    for _ in range(num_transient):
        x = f(x, r)
        if abs(x) > 10:
            break
    for _ in range(num_plot):
        x = f(x, r)
        if abs(x) > 10:
            break
        x_data.append(x)
        r_data.append(r)

plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.scatter(r_data, x_data, s=0.1, c='black', alpha=0.6)
plt.title('                          ␣                   ␣       ␣$f(x)␣=␣r␣x␣(1-x)(2+x)$')
plt.xlabel('$r$')
plt.ylabel('$x_n$')
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.axvline(x=0.5, color='red', linestyle='--', label='$r␣=␣0.5$␣(␣                         )')
plt.legend()
plt.xlim(r_min, r_max)
plt.ylim(-1, 2)
plt.savefig('bifurcation.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
plt.close()

plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.scatter(r_data, x_data, s=0.1, c='blue', alpha=0.6)
plt.title('       ␣                          ␣($r␣\in␣[0.8,␣1.5]$)')
plt.xlabel('$r$')
plt.ylabel('$x_n$')
plt.grid(True, alpha=0.3)
plt.axvline(x=0.5, color='red', linestyle='--', label='$r␣=␣0.5$')
plt.xlim(0.8, 1.5)
plt.ylim(-0.5, 1.0)
plt.legend()
plt.savefig('windows_zoom.png', dpi=300, bbox_inches='tight')
plt.close()
```

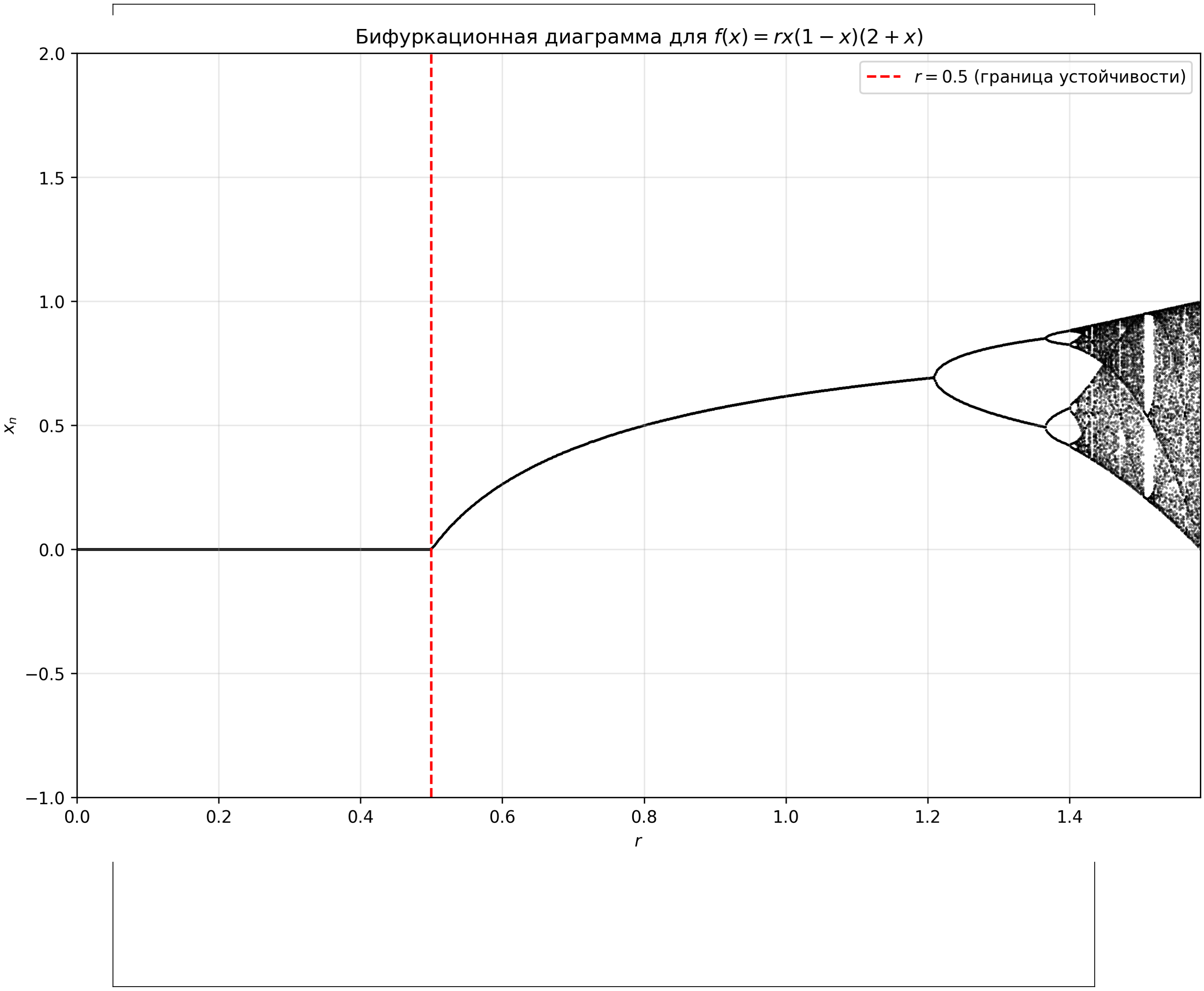

Рис. 1: Бифуркационная диаграмма для $f(x) = rx(1-x)(2+x)$. Красная пунктирная линия — граница устойчивости ($r = 0.5$).

Сходства с логистическим отображением $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$

- Наличие критической точки r_c, при которой неподвижная точка теряет устойчивость ($r_c = 0.5$ для данного отображения, $r_c = 1$ для логистического).
- Последовательность бифуркаций удвоения периода при увеличении r.
- Переход к хаосу при дальнейшем увеличении r.

Различия

- Логистическое отображение определено на $[0, 1]$ и имеет симметричную структуру; данное отображение — неограниченное и асимметричное из-за множителя $(2 + x)$.
- При $r > 0.5$ траектории могут быстро выходить в область больших $|x|$, что затрудняет наблюдение окон периодичности.

- Диапазон интересного поведения шире относительно критической точки: у логистического $r_c = 1$, здесь $r_c = 0.5$, но верхняя граница $r \approx 1.584$ — значит, система «живёт» дольше перед расходимостью.

3 Пункт 3: Окна периодичности

На бифуркационной диаграмме наблюдаются участки, где вместо хаоса возникают устойчивые циклы — *окна периодичности*. Например, в интервале $r \in [1.0, 1.5]$ можно заметить узкие горизонтальные полосы, соответствующие периодическим режимам (период 3, 6 и т.д.).

Для детального исследования увеличим масштаб в этой области (рисунок 2).

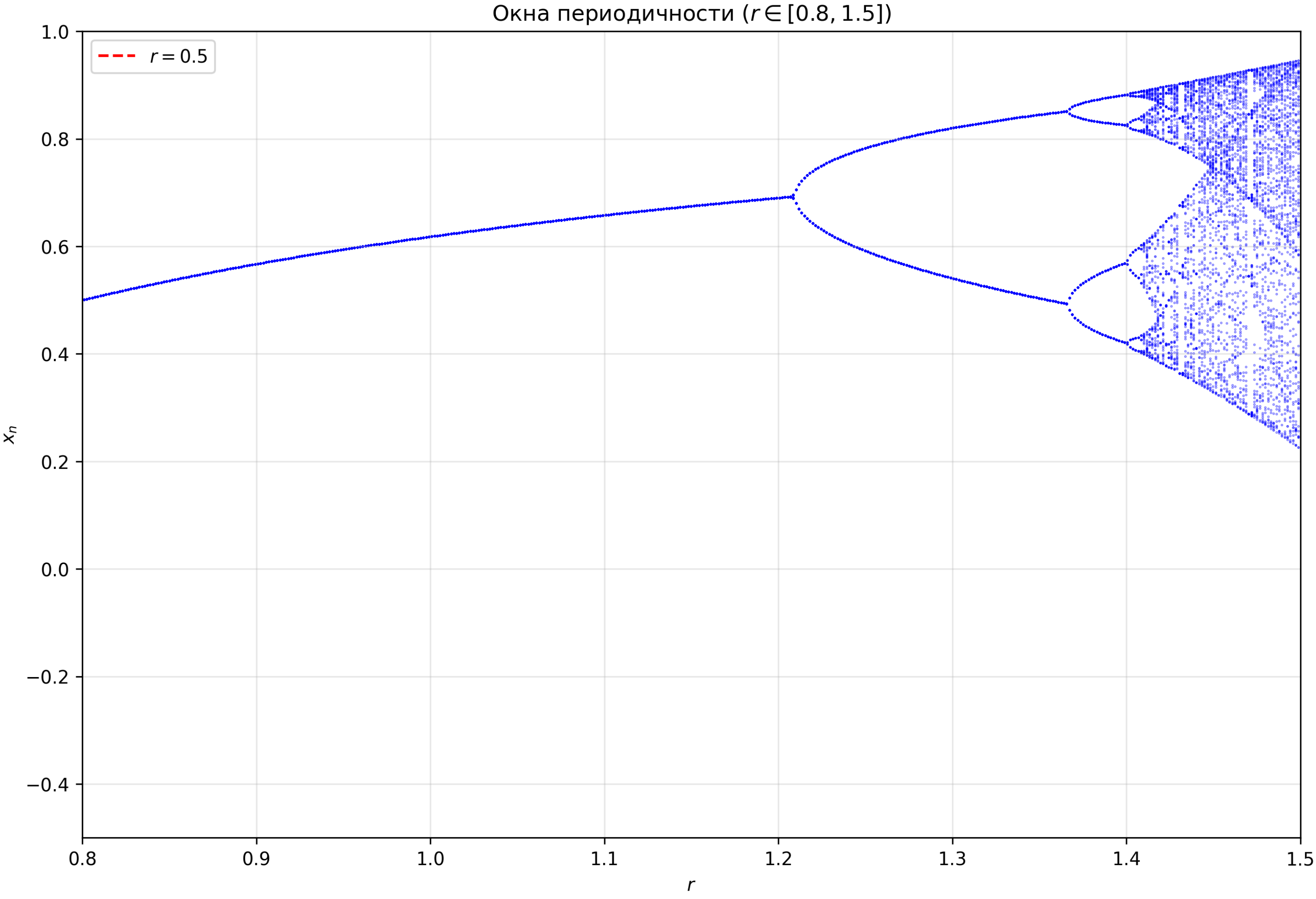

Рис. 2: Увеличенный фрагмент диаграммы ($r \in [0.8, 1.5]$) — видны окна периодичности.

Вывод

Отображение $f(x) = rx(1-x)(2+x)$ демонстрирует богатую динамику: от устойчивой неподвижной точки до хаоса с окнами периодичности. В отличие от логистического отображения, оно обладает более сложной структурой из-за нелинейности и расширения области определения. Граница устойчивости точки $x^* = 0$ находится при $r = 0.5$, что подтверждается как аналитически, так и численно.