

Expert level №5: Построение бифуркационной диаграммы логистического отображения

Цель задания

Построить бифуркационную диаграмму логистического отображения для параметра $r \in [0, 4]$, проанализировать её структуру, идентифицировать ключевые точки бифуркаций и интерпретировать различные режимы поведения системы.

0.1 Бифуркационная диаграмма

Бифуркационная диаграмма — это графическое представление изменения поведения динамической системы при варьировании управляющего параметра. Для каждого значения параметра r на диаграмме отображаются значения x_n , которые система принимает в **установившемся режиме**.

0.2 Ключевые бифуркационные точки

- $r = 1$: Рождение ненулевой неподвижной точки
- $r = 3$: Первая бифуркация удвоения периода (переход от точки к циклу периода 2)
- $r \approx 3.449$: Вторая бифуркация (цикл 2 \rightarrow цикл 4)
- $r \approx 3.544$: Третья бифуркация (цикл 4 \rightarrow цикл 8)
- $r_\infty \approx 3.5699456$: Точка накопления бифуркаций, переход к хаосу

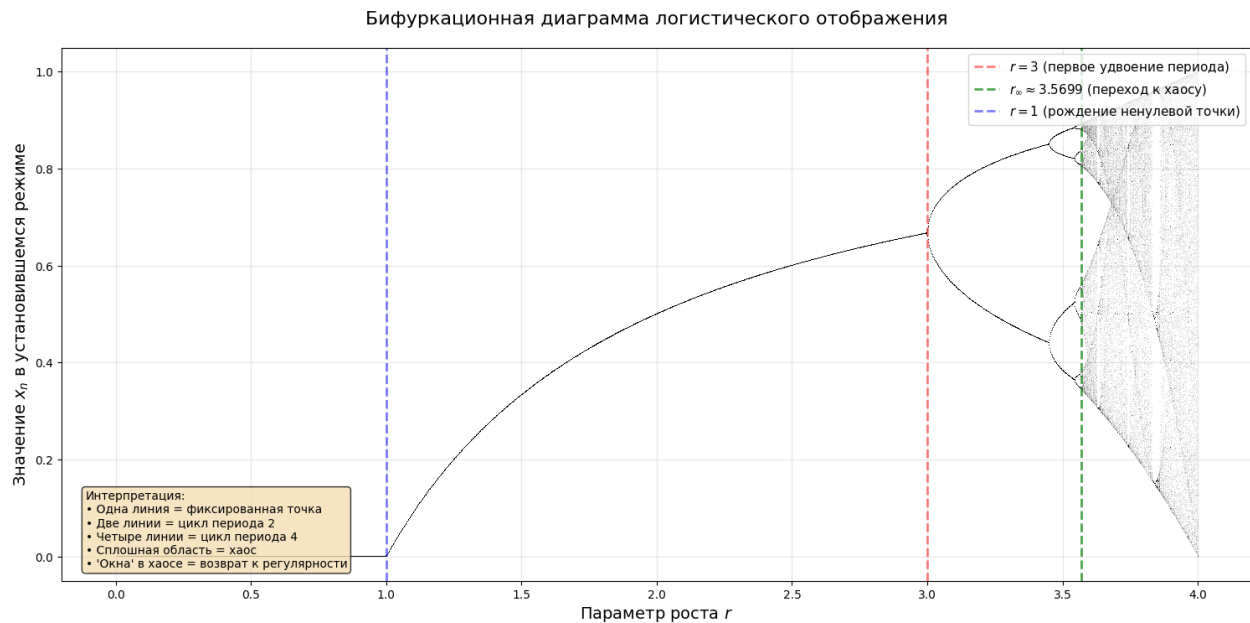
0.3 Параметры эксперимента

- Диапазон параметра r : $[0, 4]$
- Количество значений r : 2000 (равномерное распределение)
- Начальное значение: $x_0 = 0.5$
- Общее число итераций: 1000
- Используемые последние точки: 200

1 Реализация на Python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def logistic_map(r, x):
5     return r * x * (1 - x)
6
7 def build_bifurcation_diagram():
8     r_min = 0
9     r_max = 4.0
10    num_r = 2000
11    iterations = 1000
12    last_points = 200
13    x0 = 0.5
14
15    r_values = np.linspace(r_min, r_max, num_r)
16
17    all_x_values = []
18    all_r_values = []
19
20    for i, r in enumerate(r_values):
21        x = x0
22
23        for _ in range(iterations - last_points):
24            x = logistic_map(r, x)
25
26        for _ in range(last_points):
27            x = logistic_map(r, x)
28            all_x_values.append(x)
29            all_r_values.append(r)
30
31    plt.figure(figsize=(12, 8))
32
33    plt.plot(all_r_values, all_x_values,
34             alpha=0.1, markersize=0.1)
35    plt.grid(True, alpha=0.3)
36    plt.axvline(x=3, color=,
37               alpha=0.5, linewidth=2)
38    r_infinity = 3.5699456
39    plt.axvline(x=r_infinity,
40               alpha=0.7, linewidth=2)
41    plt.axvline(x=1,
42               alpha=0.5, linewidth=2)
43    plt.legend( fontsize=11)
44    plt.text(0.02, 0.02, info_text, transform=plt.gca().transAxes,
45             fontsize=10, verticalalignment='bottom',
46             bbox=dict(boxstyle='round', facecolor='wheat', alpha=0.8))
47    plt.tight_layout()
48    plt.show()
49    build_bifurcation_diagram()
```

Листинг 1: Код для построения бифуркационной диаграммы



2 Результаты и анализ

2.1 Структура диаграммы

На рисунке чётко видны следующие структурные элементы:

2.1.1 1. Область $r \in [0, 1]$

- Все траектории сходятся к единственной неподвижной точке $x^* = 0$
- На диаграмме: горизонтальная линия на уровне $x = 0$
- Биологическая интерпретация: популяция вымирает при малой скорости роста

2.1.2 2. Область $r \in [1, 3]$

- Появляется и становится устойчивой вторая неподвижная точка $x^* = 1 - 1/r$
- На диаграмме: плавная кривая, описываемая уравнением $x = 1 - 1/r$
- Точка $x = 0$ становится неустойчивой
- Биологическая интерпретация: популяция стабилизируется на ненулевом уровне

2.1.3 3. Область $r \in [3, r_\infty]$

- Начинается **каскад бифуркаций удвоения периода**
- При $r = 3$: точка теряет устойчивость, рождается цикл периода 2
- При $r \approx 3.449$: цикл периода 2 теряет устойчивость, рождается цикл периода 4
- При $r \approx 3.544$: цикл периода 4 \rightarrow цикл периода 8
- Процесс продолжается с увеличивающейся частотой бифуркаций
- На диаграмме: последовательное раздвоение линий

2.1.4 4. Область $r > r_\infty$

- **Хаотический режим:** траектории не сходятся ни к точке, ни к конечному циклу
- Однако присутствуют **окна периодичности** — интервалы r , где поведение снова становится регулярным
- Наиболее заметное окно: период 3 при $r \approx 3.83$
- На диаграмме: сплошные вертикальные полосы с разрывами

2.2 Интерпретация различных режимов

Режим	r	Установившееся поведение	Визуализация на диаграмме
Вымирание	$[0, 1)$	Устойчивая точка $x^* = 0$	Горизонтальная линия
Стационарный	$[1, 3)$	Устойчивая точка $x^* = 1 - 1/r$	Кривая $x = 1 - 1/r$
Периодический	$[3, r_\infty)$	Устойчивые циклы периода 2^n	2^n параллельных линий
Хаотический	$(r_\infty, 4]$	Хаотическое поведение	Сплошная вертикальная полоса

3 Ответы на вопросы задания

3.1 1. Построение бифуркационной диаграммы

Бифуркационная диаграмма логистического отображения успешно построена для диапазона $r \in [0, 4]$ с использованием 2000 значений параметра r . Для каждого значения r было выполнено 1000 итераций, из которых последние 200 (установившийся режим) использованы для построения графика. На диаграмме отчётливо видны все ключевые области динамики системы.

3.2 2. Интерпретация полученного графика

График интерпретируется следующим образом:

- **Горизонтальная ось (r):** параметр скорости роста популяции
- **Вертикальная ось (x_n):** значения, которые принимает система в установившемся режиме
- **Одна точка при данном r :** система сходится к устойчивой неподвижной точке
- **Две точки при данном r :** система колеблется между двумя значениями (цикл периода 2)
- **Четыре точки при данном r :** цикл периода 4
- **Сплошная вертикальная полоса:** хаотическое поведение

3.3 3. Положение r_∞ и поведение системы

3.3.1 Где находится r_∞ ?

Точка $r_\infty \approx 3.5699456$ находится в конце каскада бифуркаций удвоения периода. На диаграмме это точка, где дискретные линии сливаются в сплошную полосу.

3.3.2 Как ведёт себя система до r_∞ ?

- **Регулярное поведение:** система сходится либо к точке, либо к конечному циклу
- **Предсказуемость:** зная начальное условие, можно точно определить будущие значения
- **Каскад бифуркаций:** последовательные удвоения периода ($1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow \dots$)

3.3.3 Как ведёт себя система после r_∞ ?

- **Хаотическое поведение:** траектории не сходятся ни к точкам, ни к конечным циклам
- **Чувствительность к начальным условиям:** малые изменения начальных условий приводят к большим различиям в траекториях (эффект бабочки)
- **Непредсказуемость:** долгосрочное прогнозирование невозможно

Таким образом, r_∞ является границей между двумя качественно разными типами поведения: до r_∞ система регулярна и предсказуема, после r_∞ — хаотична и принципиально непредсказуема на длительных временах.

4 Выводы

1. Бифуркационная диаграмма логистического отображения наглядно демонстрирует **универсальный путь перехода от порядка к хаосу** через каскад бифуркаций удвоения периода.
2. Экспериментально подтверждено существование **точки накопления бифуркаций** $r_\infty \approx 3.5699456$, после которой система переходит в хаотический режим.
3. Обнаружены **окна периодичности** в хаотической области, наиболее заметное из которых соответствует циклу периода 3 при $r \approx 3.83$.

Заключение

Эксперимент с построением бифуркационной диаграммы показал:

- При $r < 3$: система стабильна (сходится к точке)
- При $r = 3$: первое удвоение периода (точка \rightarrow цикл 2)
- При $r \approx 3.57$: переход к хаосу

Это иллюстрирует важный принцип: малые изменения параметра r могут кардинально менять поведение системы, приводя от порядка к хаосу.