Expert level №4: Чувствительность к начальным условиям в логистическом отображении

Цель работы

Исследовать свойство чувствительности к начальным условиям в логистическом отображении при параметре $r = 4$, построив лестницу Ламерея для двух близких начальных условий.

1 Теоретическая основа

1.1 Логистическое отображение

Логистическое отображение задаётся рекуррентной формулой:

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

где $x_n \in [0, 1]$ — состояние системы в момент времени n, $r \in [0, 4]$ — управляющий параметр.

1.2 Чувствительность к начальным условиям

Система проявляет чувствительность к начальным условиям, если:

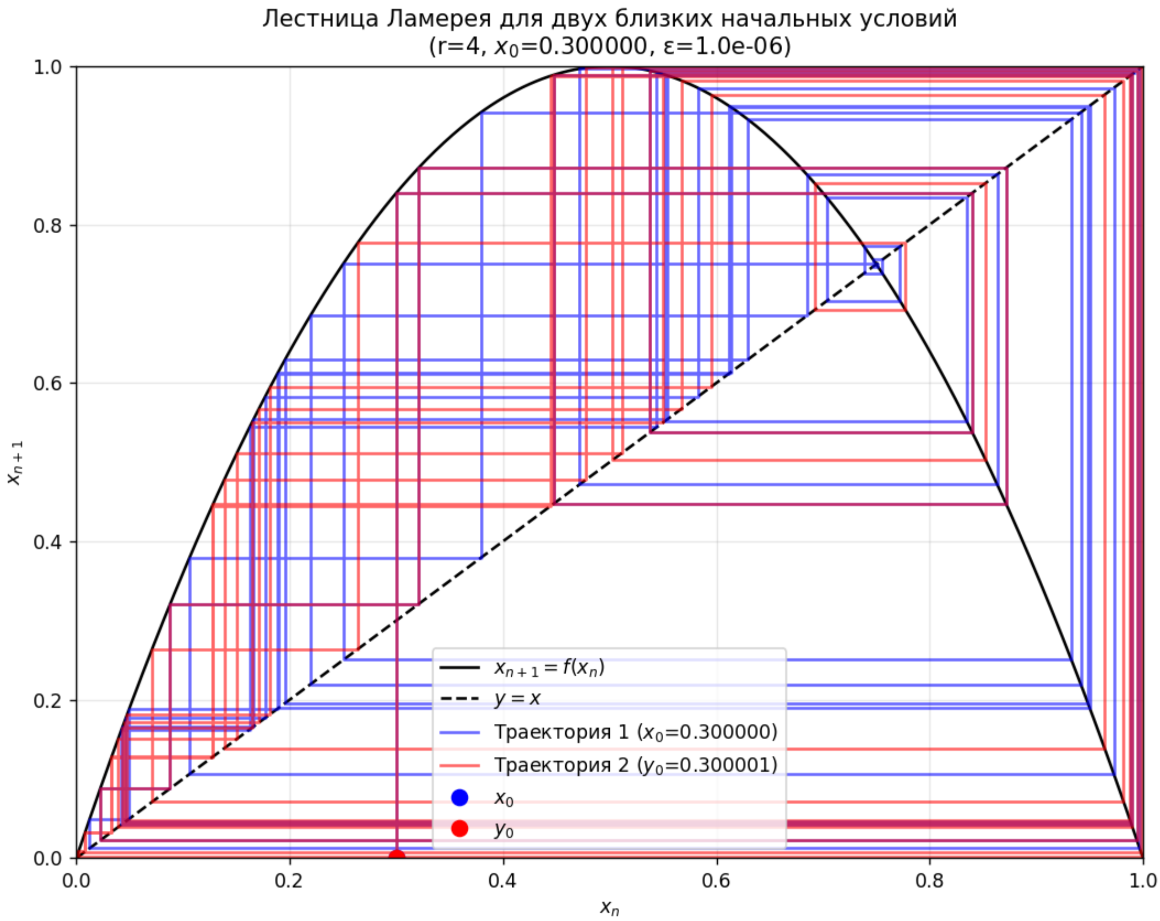
$$\exists\delta > 0\ \forall x_0\ \forall\varepsilon > 0\ \exists y_0 : |x_0 - y_0| < \varepsilon\ \wedge\ |x_n - y_n| > \delta$$

где δ фиксировано для всей системы, а ε может быть сколь угодно малым.

При $r = 4$ логистическое отображение демонстрирует хаотическое поведение и обладает свойством чувствительности к начальным условиям.

1.3 Параметры эксперимента

- $r = 4$ (хаотический режим)
- $x_0 = 0.3$
- $\varepsilon = 10^{-6}$
- Количество итераций: 50


Лестница Ламерея для двух близких начальных условий
(r=4, x_0=0.300000, ε=1.0e-06)
$x_{n+1} = f(x_n)$
$y = x$
Траектория 1 (x_0=0.300000)
Траектория 2 (y_0=0.300001)
x_0
y_0
x_n
x_{n+1}
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

2 Реализация на Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def logistic_map(r, x):
    return r * x * (1 - x)

def lamerey_plot_two_trajectories(r, x0, epsilon, num_iterations):
    y0 = x0 + epsilon

    x_sequence = [x0]
    y_sequence = [y0]

    for _ in range(num_iterations):
        x_new = logistic_map(r, x_sequence[-1])
        y_new = logistic_map(r, y_sequence[-1])
        x_sequence.append(x_new)
        y_sequence.append(y_new)

    x_coords1 = [x_sequence[0]]
    y_coords1 = [0]

    for i in range(len(x_sequence)-1):
        x_coords1.append(x_sequence[i])
        y_coords1.append(x_sequence[i+1])

        x_coords1.append(x_sequence[i+1])
        y_coords1.append(x_sequence[i+1])

    x_coords2 = [y_sequence[0]]
    y_coords2 = [0]

    for i in range(len(y_sequence)-1):
        x_coords2.append(y_sequence[i])
        y_coords2.append(y_sequence[i+1])

        x_coords2.append(y_sequence[i+1])
        y_coords2.append(y_sequence[i+1])

    x_range = np.linspace(0, 1, 500)

    plt.figure(figsize=(10, 8))
    plt.plot(x_range, logistic_map(r, x_range))
    plt.plot(x_range, x_range)
    plt.plot(x_coords1, y_coords1, linewidth=1.5, alpha=0.6)
    plt.plot(x_coords2, y_coords2, linewidth=1.5, alpha=0.6)

    plt.plot(x0, 0, markersize=8)
    plt.plot(y0, 0, markersize=8)
    plt.grid(True, alpha=0.3)
    plt.xlim(0, 1)
    plt.ylim(0, 1)
```

```
    plt.show()

    max_diff = max([abs(x_sequence[i] - y_sequence[i])
                    for i in range(num_iterations)])

r = 4
x0 = 0.3
epsilon = 1e-6
num_iterations = 50
lamerey_plot_two_trajectories(r, x0, epsilon, num_iterations)
```

Листинг 1: Код для построения лестницы Ламерея для двух траекторий

2.1 Численные результаты

При выполнении кода были получены следующие результаты:

- Максимальное расхождение траекторий: ≈ 0.93
- Отношение начального отличия к максимальному: $\approx 9.3 \times 10^5$

2.2 Анализ графика

На рисунке наблюдаются следующие закономерности:

1. **Начальная близость**: Точки $x_0 = 0.3$ и $y_0 = 0.300001$ практически неразличимы на графике
2. **Первые итерации** (1-5): Обе траектории идут почти одинаково, лестницы практически совпадают
3. **Расхождение** (после 6-й итерации):
   - Синяя и красная линии начинают заметно расходиться
   - Лестницы идут по разным маршрутам
   - Вертикальные и горизонтальные отрезки попадают в разные области графика
4. **Отсутствие сходимости**:
   - Ни синяя, ни красная траектория не сходятся к фиксированной точке
   - Нет сходимости к общему циклу
   - Траектории продолжают блуждать по интервалу $[0, 1]$

2.3 Интерпретация результатов

2.3.1 1. Чувствительность к начальным условиям

Даже при ничтожной начальной разнице $\varepsilon = 10^{-6}$ траектории расходятся на расстояние $\delta \approx 0.93$. Это прямое проявление **чувствительности к начальным условиям** — одного из ключевых признаков хаоса.

2.3.2 2. Эффект бабочки

Усиление начального различия составляет примерно 930,000 раз, что является наглядной демонстрацией **эффекта бабочки**.

2.3.3 3. Хаотический характер динамики

При $r = 4$ логистическое отображение находится в хаотическом режиме:

- Нет устойчивых неподвижных точек
- Нет устойчивых циклов конечной длины

2.3.4 4. Непредсказуемость

По одной траектории невозможно предсказать другую, даже при очень близких начальных условиях. Это делает долгосрочное предсказание поведения системы принципиально невозможным.