

**МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ «МЕХАНІКА:
СУЧАСНІСТЬ І ПЕРСПЕКТИВИ – 2024»**

**INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE “MECHANICS:
CONTEMPORARY APPROACHES AND FUTURE DIRECTIONS – 2024”**



Механіка
СУЧАСНІСТЬ І ПЕРСПЕКТИВИ

МАТЕРІАЛИ ДОПОВІДЕЙ

Київ – 2024

Організатор конференції:

Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України

Співорганізатор конференції:

Національний комітет України з теоретичної і прикладної механіки

Співголови оргкомітету:

Академік НАН України, доктор фізико-математичних наук В.Л. Богданов,

Академік НАН України, доктор технічних наук В.М. Назаренко

Вчений секретар:

Кандидат фізико-математичних наук Ю.О. Чорноіван

Співголови напрямків конференції:

Механіка композитних та неоднорідних середовищ:

Член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук Я.Я. Рущицький,

Доктор фізико-математичних наук В.А. Декрет,

Доктор фізико-математичних наук Є.А. Сторожук

Контактна механіка:

Доктор фізико-математичних наук С.Ю. Бабич,

Доктор фізико-математичних наук В.С. Кирилюк,

Доктор фізико-математичних наук Р.М. Мартиняк

Механіка оболонкових систем:

Член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук О.Я. Григоренко,

Доктор технічних наук П.З. Луговий

Механіка зв'язних полів у матеріалах та елементах конструкцій:

Член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук Я.О. Жук,

Доктор фізико-математичних наук В.Г. Карнаухов

Механіка руйнування та втома:

Член-кореспондент НАН України, доктор фізико-математичних наук М.Ф. Селіванов,

Доктор технічних наук В.П. Голуб

Динаміка та стійкість руху механічних систем:

Академік НАН України, доктор фізико-математичних наук В.Д. Кубенко,

Академік НАН України, доктор фізико-математичних наук А.А. Мартинюк

Члени оргкомітету:

Доктор фізико-математичних наук В.А. Максимюк,

Кандидат фізико-математичних наук Л.М. Терещенко,

Кандидат технічних наук П.В. Фернаті,

Кандидат фізико-математичних наук О.О. Хотенко

Зміст

1 Механіка композитних та неоднорідних середовищ	8
1.1 Загальне	8
1.1.1 К.А. Безручко, О.В. Приходченко, М.О. Гладка, Алгоритм визначення відносних лінійних деформацій у масиві гірських порід	8
1.1.2 Беженар М.П., Романенко Я.М., Пацик А.М., Структурне конструювання надтвердих PCBN композитів BL групи	11
1.1.3 Беженар М.П., Романенко Я.М., Пацик А.М., Фазовий склад та властивості полікристалів cBN – Al в залежності від умов одержання	13
1.1.4 Беженар М.П., Романенко Я.М., Пацик А.М., Соколов О.М., Міграція кобальту в робочий шар PCBN композиту спечений на твердосплавній підкладці	15
1.1.5 Т.С. Кагадій, А.Г. Шпорта, Метод збурень у задачах механіки композитних та неоднорідних середовищ	17
1.1.6 О.Л. Кіпніс, Критичні параметри навантаження в задачі про стискання напівобмеженого тіла з покриттям вздовж міжфазної зони проковзування	19
1.1.7 А.Ю. Глухов, Хвили кручення в шаруватих композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями при проковзуванні шарів	22
1.1.8 Л.О. Григор'єва, Усталені коливання електров'язкопружного композитного циліндра	24
1.1.9 В.А. Максимюк, В.С. Ушакова, О.В. Ушаков, Про швидкість поширення ударної хвилі у циліндричному вертикальному водяному кулеуловлювачі	27
1.1.10 Н.В. Сметанкіна, Моделювання деформування багатошарового скління літаків при інтенсивних ударних навантаженнях	30
1.1.11 О.М. Хіміч, О.В. Попов, О.В. Чистяков, Т.В. Чистякова, В.А. Сидорук, П.С Єршов Інтелектуальна система для математичного моделювання в науці та інженерії	32
1.1.12 M.V. Filippov, N.A. Ivantyshyn, Torsional strength of a transversally isotropic cylinder containing a system of healed cracks	35
1.1.13 А.Б. Чорненький, М.П. Савruk, В.С. Кравець, Коєфіцієнти концентрації та інтенсивності напружень у вершинах отворів у ортотропній пластині	38
1.1.14 В.С. Кравець, Напруженій стан анізотропного тіла з криволінійним ортотропним включенням за антиплоскої деформації	41
1.1.15 В.Н. Олійник, Верифікація моделі термічної дисипації звуку в легеневій паренхімі	44
1.1.16 В.М. Бурлаценко, Т. Садовський, В.В. Веретельник, Моделювання та аналіз власних коливань балок змінного поперечного перерізу з функціонально-градієнтним армуванням вуглецевими нанотрубками	46
1.1.17 Т.М. Щербак, Ю.А. Мейш, Чисельне моделювання розсівання поверхневих гравітаційних хвиль вертикальним тонким бар'єром	49
1.1.18 М.А. Долгов, Дослідження розподілу дотичних напружень в деформованому покритті	51
1.1.19 Б.М. Калиняк, В.А. Шевчук, Термонапруженій стан циліндричних тіл з багатошаровими неоднорідними покриттями	54
1.1.20 О.М. Шикула, Н.Б. Жукова, Прогнозування деформативних властивостей волокнистих матеріалів з розорієнтованими волокнами та нелінійною матрицею	56
1.1.21 О.С. Романченко, Порівняння механічних характеристик та вибір оптимального композитного матеріалу для виготовлення захисних кейсів	59
1.1.22 В.В. Пастернак, Г.Т. Сулим, Матричний підхід побудови фундаментальних розв'язків просторових задач мікрополярної теорії пружності анізотропних тіл	62
1.1.23 В.А. Декрет, В.М. Бистров, В.С. Зеленський, Дослідження приповерхневої втрати стійкості шаруватого композитного матеріалу при стисканні на основі представницького елемента	63
1.1.24 О.О. Хотенко, І.М. Хотенко, Сучасний стан та актуальність досліджень нелінійних пружних поверхневих хвиль Релея	66
1.1.25 М.М. Ткачук, А.М. Ткачук, Негладке математичне програмування в механіці	69
1.1.26 Е.А. Сторожук, А.В. Лисенко, Вплив виду ребристого заповнювача на динамічну поведінку тришарової циліндричної оболонки еліптичного перерізу	72
1.1.27 Ю.Ю. Абросов, Ю.І. Лелюх, Розрахунок довгої циліндричної оболонки суперколоового поперечного перерізу методом скінчених елементів (МСЕ)	74
1.1.28 Е.А. Сторожук, О.В. Кудін, Моделювання нелінійного деформування довгих тришарових пластин з використанням неперервно-структурних теорій	77
1.1.29 А.Ф. Булат, О.П. Круковський, В.В. Круковська, Дослідження стійкості підземної камери порятунку і розробка способу її кріплення в різних гірничо-геологічних умовах	80
1.1.30 Я.Я. Рущицький, Гіпопружні матеріали. Лінеаризована теорія	83
1.1.31 В.М. Юрчук, Опис застосування стандартної реологічної моделі до аналізу сейсмічних хвиль	86
1.1.32 А.Ф. Булат, С.А. Курносов, С.Ю. Макеєв, О.П. Круковський, М.М. Стадничук, Обґрунтування хвильового опору композитних матеріалів для захисту підземних виробок від пружних коливань	89
1.2 Контактна механіка	91

1.2.1	С. Ю. Бабич, Н.О. Ярецька, О.А. Кравчук, Тиск двох попередньо напруженіх співвісних кільцевих циліндрів на попередньо напруженій шар	91
1.2.2	А.О. Сяський, Н.В. Шевцова, Мішана контактна задача для ортотропної пластинки з еліптичним отвором і замкненого пружного ребра	94
1.2.3	К.А. Чумак, Р.М. Мартиняк, Взаємодія пружного тіла з жорсткою текстуреною основою за дії сил адгезії .	97
1.2.4	Ю.М. Стреляєв, Р.М. Мартиняк, Термомеханічний контакт з тертям плоского штампу та пружного півпростору	100
1.2.5	М.С. Слободян, І.С. Звізло, О.В. Білаш, Напружене-деформований стан кусково-однорідної пластини з коло-вою межею поділу матеріалів та радіальною тріщиною з урахуванням смугового контакту її берегів	103
1.2.6	І.І. Прокопишин, Р.М. Мартиняк, Контакт пружних тіл, одне з яких має періодичний рельєф, а інше – покриття з нелінійним вінклерівським шаром	105
1.2.7	О.В. Приходько, С.В. Приходько, Контакт близького до плоского тіла та жорсткого півпростору за наявності тертя	107
1.2.8	В.М. Онишкевич, Г.М. Барабаш, Недосконалій контакт у фрикційній системі штамп – пружна півплоща при теплоутворенні	109
1.2.9	М.М. Кундрат, Робоча довжина тонкого включення в ортотропному тілі при циклічному навантаженні	112
1.2.10	О.П. Козачок, Р.М. Мартиняк, Аналітичний метод визначення граничної форми зношеної поверхні тіла з не-рівностями	115
1.2.11	І.Г. Ткаченко, Н.М. Антоненко, Плоска контактна задача термопружності для багатошарової основи з неіде-альним тепловим контактом між шарами	117
1.2.12	Rudenko T.M., Heat conduction problem for multilayer plates with non-ideal thermal contact between the layers . .	119
1.2.13	В.І. Острик, Контакт із відливом пружної вагомої смуги та жорсткої основи під дією напівнескінченного штампа	120
1.2.14	К.М. Дмитрів, Н.М. Д'яченко, Осесиметрична контактна задача за степеневого закону деформування покриття	123
1.2.15	В.І. Кузьменко, С.О. Плащенко, До розв'язання з'язаних задач ітераційним підходом	125
1.2.16	Н.Д. Вайсфельд, Ю.С. Процеров, А.В. Толкачов, Осесиметричне поле напруженень пружного простору зі сфе-ричною порожниною під дією динамічного навантаження	126
1.2.17	І.П. Шацький, С.М. Стецюк, А.С. Величкович, Я.В. Дорошенко, Роль поперечного обтиснення в задачі про-сування стержня у криволінійному каналі	129
1.2.18	З.Ю. Журавльова, Про напружене-деформівний стан поропружного паралелепіпеда	130
1.2.19	О.І. Левчук, Контактна взаємодія увігнутих жорстких штампів з магнітоелектропружним трансверсально-ізотропним півпростором	133
1.2.20	В.С. Кирилюк, Контактна взаємодія одновимірного квазікристалічного півпростору з п'зоэффектом з плоским еліптичним штампом під дією сили й моментів	135
1.2.21	В.С. Кирилюк, О.І. Левчук, Контактна взаємодія двох магнітоелектропружних півпросторів за наявності у одному з них приповерхневої віймки еліптичного перерізу	137
1.2.22	Р.М. Кушнір, Г.Т. Сулим, Й.З. Піскозуб, Дослідження впливу кінематики контактного тертя на деформування композитних структур з тонкими включеннями	139
1.2.23	М.А. Ткачук, А.В. Грабовський, М.М. Ткачук, Нелінійна статична реакція пружного кільця із виступами в опорах роторів	141
2	Механіка оболонкових систем	144
2.1	О.Я. Григоренко, Л.С. Рожок, Н.П. Борейко, Л.В. Харитонова, Чисельний аналіз напруженого стану нетонких оваль-них циліндричних оболонок з неперервно-неоднорідних матеріалів	144
2.2	F. Garcia-Sanchez, A. Saez, V.V. Zozulya, A high-order nonlocal theory of shells and its application to the MEMS/NEMS analysis and simulations	145
2.3	M. Iurchenko, L. Saltyte-Vaisiauske, O. Cherednikov, Vibrations of a heterogeneous rod. Inverse problem	148
2.4	E. Carrera, V.V. Zozulya, Free vibration of composite shells of revolution using equivalent single layer approach	151
2.5	Іваницький Я.Л., Максименко О.П., Штаюра С.Т., Гриненко М.В., Методологія оцінювання опірності матеріалу руй-нуванню за дії силового навантаження та водню	154
2.6	Іваницький Я.Л., Штаюра С.Т., Гриненко М.В., Максименко О.П., Оцінювання напружене-деформованого стану в оболонкових конструкціях за силового навантаження та дії водню	156
2.7	Лук'янченко О.О., Геращенко О.В., Костіна О.В., Палій О.М., Чисельне дослідження впливу недосконалостей форми на динамічні характеристики пружних оболонок	158
2.8	Охтень І.О., Застосування оболонкових скінчених елементів в дослідженнях стійкості стержнів відкритого профілю з недосконалостями	161
2.9	О.Я. Григоренко, М.Ю. Борисенко, О.В. Бойчук, Н.П. Борейко, Вільні коливання шестикутних пластин з різними варіантами закріплення країв	163
2.10	A.Ya. Grigorenko, W.H. Müller, L.V. Kharytonova, S.M. Yaremchenko, On some approaches for solving the problem of bending of a non-homogeneous rectangular plate	165
2.11	В.З. Грищак, Д.В. Грищак, Н.М. Д'яченко, В.О. Купріков, Біfurкаційний аналіз тришарових оболонкових конструкцій з циліндричних та конічних відсіків при комбінованому навантаженні	166
2.12	О.П. Кривенко, П.П. Лізунов, О.Б. Калашніков, Дослідження стійкості та власних коливань неоднорідних оболонок за моментною схемою скінчених елементів	169
2.13	Ю.В. Горський, Т.С. Краснопольська, Я.О. Жук, Хрестоподібні хвилі на поверхні рідини в частково заповненій ци-ліндричній ємності	172

2.14	Ю.А. Мейш, Н.В. Майгородіна, До дослідження деформацій підкріплених ребрами багатошарових еліпсоїдальних оболонок при дії нестационарних навантаженнях	175
2.15	П.З. Луговий, Ю.В. Скосаренко, Динаміка несиметричних циліндрических елементів ракет при комбінованих динамічних навантаженнях	177
2.16	П.З. Луговий, С.П. Орленко, Скінчено-елементне моделювання та вібраційний аналіз тришарових сферично-циліндрических комбінованих оболонок при дії плоскої ударної хвилі	179
2.17	М.В. Марчук, В.С. Пакощ, М.М. Хом'як, Схема методу скінченних елементів на основі В-сплайнів: згин податливих до трансверсальних зсуву та стиснення пластин	181
2.18	А.С. Колядюк, Коливання сферично-циліндрическої комбінованої оболонки при дії плоскої ударної хвилі	184
2.19	А.Ю. Круглий, А.Ю. Дреус, Порівняльний аналіз ефективності методів машинного навчання і нейронних мереж в задачах стійкості оболонкових конструкцій	186
2.20	Р.І. Тучапський, Розрахунок локально навантаженої шарнірно закріпленої тонкої незамкнутої сферичної оболонки .	188
2.21	В.В. Гайдайчук, К.Е. Котенко, Динаміка тришарових неоднорідних циліндрических оболонок при нестационарних навантаженнях	190
3	Механіка зв'язаних полів у матеріалах та елементах конструкцій	192
3.1	Яковенко Н.Д., Доля О.В., Чисельне моделювання ефектів термоструктурно-механічної зв'язаності за умов імпульсного опромінення півпростору	192
3.2	Я.О. Жук, І.К. Сенченков, М.М. Мельниченко, Динамічний напружене-деформований стан металевого стержня при імпульсному навантаженні торця	193
3.3	Сенченков І.К., Червінко О.П., Доля О.В., Залишкові напруження і дісторсія при наплавленні порожнистої циліндра	195
3.4	М.О. Бабешко, В.Г. Савченко, Крайові задачі термопластичності з врахуванням залежності властивостей ізотропних матеріалів від виду навантаження	197
3.5	О.Л. Деркач, Аналіз активного демпфірування нестационарних коливань багатошарових композитних пластин на основі змішаного варіанта методу скінченних елементів	199
3.6	[О.З. Галішин] , С.М. Склепус, Нелінійне деформування пологих оболонок складної форми із матеріалів з характеристиками, що залежать від виду навантаження	202
3.7	А.О. Молчанов, Про наближення потенціальних полів з розривними умовами на границі	203
3.8	О.М. Багно, Вплив скінченних початкових деформацій на квазілембові моди в гідропружному хвилеводі «нестисливий пружний шар – півпростір в'язкої стисливої рідини»	204
3.9	Р.М. Кушнір, Г.Т. Сулим, Я.М. Пастирнак, Гармонічні коливання анізотропних інтелектуальних середовищ із просторовими тріщинами	206
3.10	П.О. Стеблянко, Розв'язання задач теорії термопластичності для пластин та оболонок за допомогою двовимірних сплайнів	207
3.11	Ю.В. Токовий, М.Й. Юзв'як, Рівняння суцільноті неосесиметрических просторових задач теорії пружності та термопружності	209
3.12	В.Г. Карнаухов, І.Ф. Киричок, Л.П. Зінчук, Термомеханічна поведінка і довговічність піддатливих на зсув гнучких непружніх оболонок обертання з п'єзоелектричними сенсорами і актуаторами при резонансних коливаннях	211
3.13	Ю.Є. Поляков, О.О. Усов, С.П. Мінєєв, Визначення компонент гірського тиску по параметрах нагнітання рідини в свердловину у вугільному пласті	213
4	Механіка руйнування та втома	216
4.1	Ушакова В.С., Ушаков О.В., До задачі математичної обробки експериментальних даних за умов чистого кручення в задачах лінійної в'язкопружності	216
4.2	Кондряков Е.О., Харченко В.В., Чисельне моделювання напружене-деформованого стану патрубкової зони корпусу реактора з тріщинами з використанням розширеного методу скінченних елементів	218
4.3	Бородій М.В., Ясковець З.С., Адамчук М.П., Експериментальне дослідження ратчетингу за одновісного ступінчастого навантаження	220
4.4	Р.В. Бехтер, О.Б. Галенкова, Р.Ю. Білій, О.В. Завгородній, О.В. Овчинников, Визначення коефіцієнту запасу міцності лопаток турбіні зі сплаву на основі алюмініду титану	223
4.5	О. Онопрієнко, В. Говоруха, Аналіз тріщин в п'єзомагнітних наноматеріалах	226
4.6	Р.В. Коба, В.А. Максимюк, В.С. Ушакова, О.В. Ушаков, До проблеми ідентифікації стрілецької зброї та раціональних параметрів водяногого кулеуловлювача	227
4.7	О.П. Максименко, М.М. Гвоздюк, Я.Л. Іваницький, Оцінювання міцності механіческих з'єднань листових матеріалів оптико-цифровим методом	230
4.8	В.О. Дегтярев, Вплив залишкових напруженів в зварюваних конструкціях на граничні напруження циклу	233
4.9	В.О. Дегтярев, Оцінка граничних напруженів зварюваних з'єднань сталей різної міцності з залишковими напруженнями	236
4.10	М.Ф. Дмитриченко, І.М. Богданов, Вплив мастильних добавок, твердості та шорсткості матеріалу на розвиток мікропітінгу в контакті пари тертя кочення	239
4.11	В.П. Голуб, А.В. Плащинська, О.В. Романов, Щодо розв'язку задач розрахунку циклічної довговічності елементів конструкцій методом еквівалентних напруженів	242
4.12	V.O. Melnyk, A.V. Didukh, Antiplane deformation of an anisotropic elastic-plastic body with a filled cracks	245
4.13	В.В. Хворостяний, Визначення рівня пошкоджуваності оптичного скла в умовах краївого локального навантаження	246
4.14	Б.П. Маслов, Довготривала міцність композитних еластомерів періодичної структури	248

4.15 А.О. Камінський, Є.Є. Курчаков, Ю.О. Чорніван, Чисельне дослідження крайових ефектів в нелінійному ортотропному тілі з тріщиною	251
4.16 М.Ф. Селіванов, П.В. Фернаті, Л.М. Терещенко, Визначення траекторії розвитку тріщини з використанням адаптивної розбивки із регулярною частиною	254
4.17 В.П. Голуб, П.Ю. Кобзар, Метод чисельної ідентифікації графічних експериментальних даних	257
4.18 О.С. Богданова, М.В. Дудик, А.О. Камінський, Ю.В. Решітник, Поворот міжфазної тріщини у квазікрихкій матеріал біматеріального тіла у кутовій точці ламаної межі поділу	259
4.19 Є.В. Воробйов, Т.В. Анпілова, Міцність та низькотемпературна стрибкоподібна деформація сплавів з огляду на вид запасу потенційної енергії у системі навантаження	261
4.20 М.В. Дудик, Т.В. Поліщук, Про відгалуження міжфазної зсувиної тріщини у кутовій точці ламаної межі поділу	264
4.21 Писаренко Г.Г., Войналович О.В., Бялоно维奇 А.В., Майлло А.М., Характеристика пошкодженості конструкційної сталі за багатоциклової втоми на межі непружного деформування	265
4.22 М.О. Єфімов, В.А. Гончарук, В.В. Купрін, Н.П. Захарова, Концентраційна залежність зміцнюючого ефекту в композитах Al – AlB ₁₂	268
4.23 В.Г. Сидяченко, Дослідження впливу попереднього термомеханічного навантаження на тріщиностійкість реакторної сталі при змішаних модах деформування	271
4.24 А.В. Кравчук, Є.О. Кондряков, О.М. Масло, Н.М. Лобода, Руденко О.М., Експериментально-розрахункові дослідження з визначення межі міцності при зсуви клейових з'єднань	274
4.25 П.О. Булах, В.П. Швець, О.М. Масло, Вплив рівня розсіяння пошкоджень на фізико-механічні властивості сталей в умовах плоского напруженого стану	277
4.26 О.С. Богданова, Вплив двовісності навантаження на граничний стан ортотропної пластини з періодичною системою колінеарних тріщин	280
4.27 А.В. Кравчук, Г.В. Чижик, О.М. Полярус, Р.В. Кравчук, Ю.О. Вронська, Г.В. Приходько, Методика оцінки механічних характеристик нових сплавів на основі нітридів металів (TiN, ZrN, NbN, Cr ₂ N, AlN) та інтерметалідів, NiAl, NiTi, Ni ₃ Ti, що застосовуються для отримання метало-матричних композитів	283
4.28 В.Л. Богданов, О.І. Лесик, Коєфіцієнти інтенсивності напружень в попередньо напруженій півплощині з приповерхневою тріщиною нормального відриву	286
4.29 І.Ю. Подільчук, Ефект Баушінгера у ортотропних матеріалах з ізотропно-кінематичним зміцненням	289
4.30 Я.В. Павлюк, Визначення релаксації напружень в тонкостінних трубчастих елементах із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов розтягу та кручення	292
4.31 І.С. Скородинський, В'язкопружний шар на жорсткій основі під дією рівномірно розподіленого циклічного навантаження	295
5 Динаміка та стійкість руху механічних систем	298
5.1 Ю.М. Кононов, Про стійкість обертання у середовищі з опором вільного пружного твердого тіла з рідиною	298
5.2 P.P. Lizunov, O.S. Pogorelova, T.G. Postnikova, Efficiency and dynamics of a double-sided vibro-impact damper compared to a single-sided one	300
5.3 Я.О. Жук, О.П. Жук, О.М. Багно, SH-хвилі в пружному шарі з початковими напруженнями	303
5.4 К.О. Семенович, Прояви нелінійних ефектів при кутовому русі системи співосний резервуар-рідина	306
5.5 В.З. Грищак, Асимптотичний розв'язок проблеми коливань конструкцій при наявності локалізованого збурення	307
5.6 Н.В. Жоголева, В.Ф. Щербак, Ідентифікація параметрів зовнішньої періодичної сили	309
5.7 Д.В. Пошивач, Дослідження динамічної стійкості пружних систем при стохастичному параметричному навантаженні методом Монте-Карло	312
5.8 І.В. Янчевський, О.Х. Остос, «Резонансні» явища при збудженні сферичного сегмента в напівнескінченій циліндричній порожнині з ідеальною стисливою рідиною	314
5.9 І.В. Янчевський, Т.В. Гетьман, Розробка надбудови в ANSYS для розв'язання обернених граничних задач механіки на основі ACT	316
5.10 Ю.Г. Серьожкін, В.П. Кислий, В.А. Мороженко, Є.А. Соловйов, В.М. Настич, Л.В. Борковська, Лазерно-акустичний метод виявлення прихованих об'єктів шляхом реєстрації коливань ґрунту	318
5.11 Фесенко Г.О. Динамічна задача для пружного чверть простору	321
5.12 Ю.П. Глухов, Дві моделі захисного покриття для пружної основи з початковими напруженнями	322
5.13 М.О. Вабіщевич, І.К. Фесун, Дослідження динамічного деформування сталевих конструкцій при раптовому обваленні з урахуванням фізичної нелінійності	324
5.14 В.Д. Кубенко, Осесиметрична задача для шару стисливої рідини при нестаціонарному поверхневому збудженні	327
5.15 Ю.П. Глухов, Шаруватий півпростір з початковими напруженнями під дією рухомого навантаження	328
5.16 Б.М. Кіфоренко, Я.В. Ткаченко, Вибір опорної орбіти для розв'язання задачі оптимізації переходів між близькими еліптичними орбітами	330
5.17 Н.Є. Ткаченко, Розсіювання дрібнодисперсної суміші на шершавій поверхні	331
5.18 А.С. Хорошун, Дослідження якісних властивостей механічної моделі супутника із подвійним обертанням при врахуванні нелінійності пружних елементів	333
5.19 Є.С. Лапшин, О.І. Шевченко, Ефективність гашення коливань механічної системи з кульовим гасителем	335
5.20 М.В. Демидюк, В.М. Демидюк, Параметрична оптимізація транспортних операцій нелінійних маніпуляційних систем	338
5.21 І.Л. Іванов, Синхронізація неідентичних енергосистем при імпульсних збуреннях	341

Матеріали міжнародної наукової конференції «Механіка: сучасність і перспективи - 2024»

5.22 О.С. Мазур, Дослідження коливань нанопластин складної форми на основі нелокальної теорії та модифікованої теорії парних напружень	343
5.23 А.С. Хорошун, Ю.О. Ромасевич, Дослідження якісних властивостей механічної моделі супутника із подвійним обертанням при врахуванні нелінійності пружних елементів	345
5.24 Ю.О. Ромасевич, В.С. Ловейкін, А.С. Хорошун, Використання умов стійкості Payса-Гурвиця для побудови штрафної функції у задачах оптимального керування	347
5.25 С.В. Бабенко, Нові верхні оцінки норми матричної експоненціальної функції	349
5.26 А.А. Мартинюк, Т.О. Лук'янова, Ю.А. Мартинюк-Черніченко, Обмеженість нелінійних осциляторних систем на заданому часовому інтервалі	352

К. А. Безручко¹, О.В. Приходченко¹, М.О. Гладка¹

**АЛГОРИТМ ВИЗНАЧЕННЯ ВІДНОСНИХ ЛІНІЙНИХ ДЕФОРМАЦІЙ
У МАСИВІ ГІРСЬКИХ ПОРІД**

*¹Інститут геотехнічної механіки ім. М.С.Полякова НАНУ,
бул. Сімферопольська, 2A, 49005, Дніпро, Україна;
e-mail: gvrvg@meta.ua*

Велика кількість геологічних завдань пов'язана з прогнозом тріщинуватості та виділенням тріщинуватих зон у масивах гірських порід. З тріщинуватими зонами пов'язані резервуари нафти і газу з покращеними колекторськими властивостями, «sweet spots» на родовищах сланцевого газу, зони підвищених водоприпливів, зони малоамплітудної порушеності та скupчення будь-яких інших корисних копалин, формування яких обумовлено циркуляцією флюїдів наявними тріщинами. Утворення тріщинуватості значною мірою спричинено дією тектонічних процесів, коли напруження у гірських масивах перевищує межу міцності порід і спричиняє порушення їх суцільності.

Процес тріщиноутворення належить розглядати як один з провідних природних чинників формування колекторів в низькопористій породній товщі. Розущільнення та тріщиноутворення гірських порід внаслідок дії тектонічних процесів збільшує проникність щільних порід, сприяє перерозподілу води і газу, підвищуючи рухливість фаз у системі «вода-газ» гірського масиву, та концентрації флюїдів – вільного метану та (або) води у вигляді скupчень.

Доведено, що мінімальні деформації розтягання, які перевищили гранично допустиму для порушення суцільності межу та привели до крихких деформацій розриву, формують у низькопористих гірських породах фільтраційні властивості із абсолютною газопроникністю десятки мілідарсі, що відповідає промисловим колекторам IV класу [1]. Тому розробка методів дослідження тріщиноутворення гірських порід та прогнозування тріщинуватих зон у гірських масивах є актуальним завданням на шляху вирішення багатьох геологічних задач пов'язаних з тріщинуватістю гірських порід.

Відомо, що гранично допустимі деформації розтягання у вугленосній товщі складають для пісковиків 0,003 – 0,004, алевролітів – 0,004 – 0,006, аргілітів – 0,006 – 0,008, для вугільних пластів – 0,002 – 0,003 [1]. За значеннями величин лінійних деформацій, які є більшими за критичні значення, деформації породних шарів вважаються такими, що спричиняють порушення суцільності породного масиву та утворюють тріщинувату зону.

Деформації розтягання у товщах гірських порід зазвичай виникають під дією тектонічних процесів, здебільшого під час формування складчастості. Внаслідок чого утворюються звичайні складки (антіклінальні та синклінальні) або складки 2-го порядку, так звані «локальні складки». До такого роду структур (2-го порядку) належать складки, які ускладнюють моноклінальне залягання гірських порід та виділяються за відхиленням гіпсометрії пластів від апроксимуючої поверхні. У випадку позитивних структур вони класифікуються як структурні носи, структурні виступи, структурні тераси та флексури.

Звичайні класичні складки наявно помітні на геологічних картах і їх виділення не потребує додаткового аналізу та обґрунтuvань. Виділення локальних структур здійснюється шляхом побудови спеціальних карт із застосуванням тренд аналізу. За структурною картою або гіпсометричним планом пласта гірських порід, по координатам позначок (x,y,z), знаходиться апроксимуюча поверхня 1-го порядку – площа. За відхиленням фактичних гіпсометричних позначок вугільного пласта від відповідних позначок апроксимуючої поверхні, методом інтерполяції, будується карта локальних структур. Це вертикальні різниці між z -координатами вихідного масиву даних та відповідних значень інтерполяційної мережової функції, розрахованою по рівнянню тренду в точках з тими самими координатами x та y . На карті, в плані виділяються локальні складки та визначаються їх головні параметри – амплітуда та широта. Приклад подібної структури наведено на рис. 1. На карті нанесені точки спостережень (свердловини 3187, Щ-393 та ін.), ізолінії підошви вугільного пласта від «-70» до «+70» (менші нуля на синьому тлі, позитивні – на червоному). АС – довжина, ДЕ – широта, В – вершина структури.

Завдання виділення тріщинуватих зон полягає у визначенні ділянок у масиві гірських порід, де деформації розтягання, під дією тектонічних процесів, перевищили критичну межу для порушення суцільності порід. Визначення потребує побудови карт досліджуваної ділянки за допомогою тренд-аналізу та деяких математичних розрахунків, останнім з яких є безпосередньо отримання коефіцієнту відносної лінійної деформації.

Алгоритм як для звичайних класичних складок, так і локальних, реалізується таким чином:

1. Підготовка масиву даних за структурною картою або гіпсометричним планом пласта гірських порід у вигляді сукупності позначок – x , y , z . Де x та y – це координати точки на плані місцевості (місце розташування сведловини або точки спостережень). Z – вертикальна позначка у просторі, зазвичай це глибина підошви пласта гірських порід. Результат – масив даних з координатами x , y , z точок спостереження;

2. Побудова карті локальних структур (виконується за потреби, якщо досліджується площа з наявністю локальної складчастості). Результат – карта локальних структур;
3. Знаходження апроксимуючої поверхні, найбільш наближеної до реальної поверхні досліджуваного пласта, шляхом послідовного вибору виду рівняння поліноміальної регресії, починаючи з малих порядків і закінчуючи високими ступенями (5-й, 6-й та вище). Вибір відбувається за відомими критеріями – залишки тренду, стандартне відхилення, найменше середньоквадратичне відхилення. Як більш простий та зручний варіант – вибір поверхні 3-го порядку загального виду:

$$Z(X, Y) = A_{00} + A_{01}Y + A_{02}Y^2 + A_{03}Y^3 + A_{10}X + A_{11}XY + A_{12}XY^2 + A_{20}X^2 + A_{21}X^2Y + A_{30}X^3$$

Оскільки відомо, що після 3-го порядку значного уточнення апроксимуючої поверхні вже не відбувається (положення точок перегину структур припиняє змінюватися при збільшенні ступеня поліному вище 3-го), а оптимальною поверхнею тренда визнано кубічний вид рівняння [2]. Результат – рівняння поліноміальної регресії апроксимуючої поверхні, найбільш наближеної до реальної поверхні досліджуваного пласта;

4. Вибір обмежувальних (реперних) точок, між якими належить розрахувати коефіцієнт лінійної деформації. У разі замкнутих структур це можуть бути осі складки (довжина та ширина досліджуваної структури). Результат – точки на карті з координатами x_1y_1 та x_2y_2 ;
5. Розрахунок рівняння вертикальної січної площини, що проходить через обрані реперні точки. Ця площа є вертикальним перетином апроксимуючої поверхні у точках з координатами x_1y_1 та x_2y_2 . Результат – рівняння;
6. Шляхом розв'язання системи двох рівнянь (рівняння вертикальної січної площини (п.5) та рівняння апроксимуючої поверхні (п.3) найбільш наближеної до реальної поверхні) знаходиться рівняння кривої, яка є перетином вертикальної січної площини та апроксимуючої поверхні найбільш наближеної до реальної поверхні. Це крива, яка з'єднує обрані реперні точки в межах апроксимуючої поверхні у вертикальній площині. Результат – рівняння дуги між обраними реперними точками;
7. Знаходження довжини дуги між виділеними реперними точками шляхом інтегрування рівняння, яке було розв'язанням системи рівнянь у попередньому п.7. Межі інтегрування координати реперних точок. – Результат – довжина кривої в метрах (для надвеликих структур в км);
8. Знаходження відстані між виділеними точками по прямій. Результат – довжина відрізка між відповідними точками x_1y_1 та x_2y_2 , визначена в метрах (для надвеликих структур в км);
9. Розрахунок коефіцієнту лінійної деформації шляхом ділення визначеної довжини дуги на довжину відрізка прямої, що з'єднує обрані точки x_1y_1 та x_2y_2 . Результат – чисельне значення, що і є шуканим коефіцієнтом лінійної деформації (безрозмірна величина).

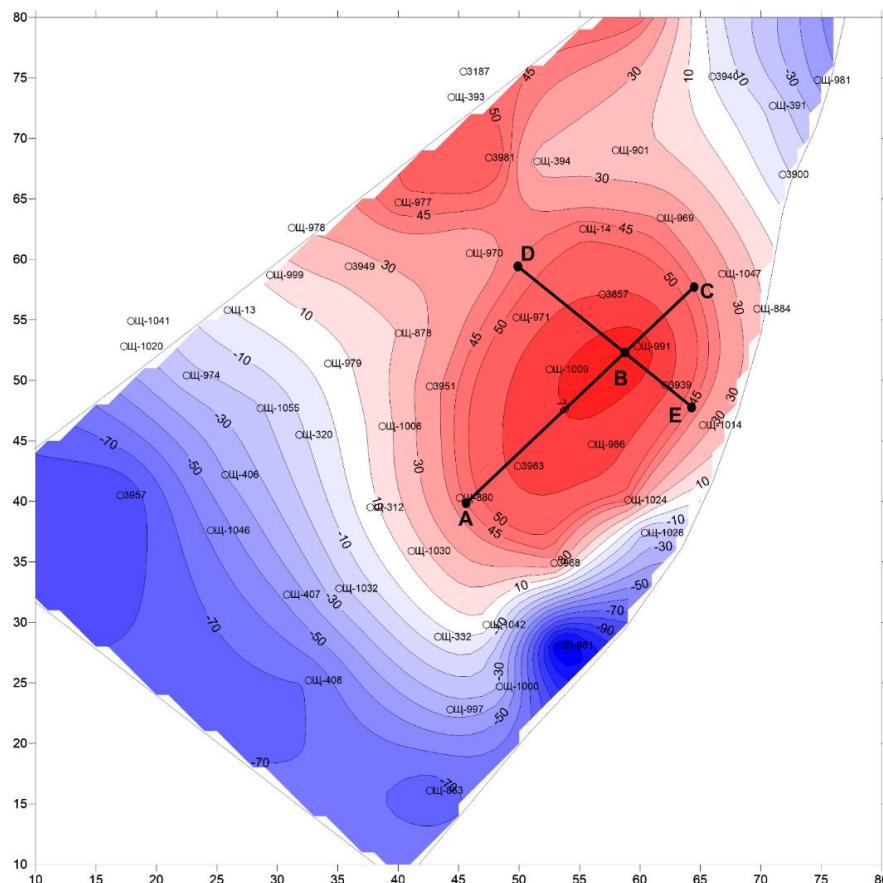


Рис. 1. Приклад карти локальної складки (структур 2-го порядку) вугільного пласта.

До прикладу, якщо в результаті отримано для пласта пісковику значення коефіцієнту відносної лінійної деформації понад 1,003, породні шари на цій ділянці належить вважати такими, що зазнали порушення суцільності і в них утворилася тріщинувата зона з покрашеними колекторськими властивостями.

Для замкненої структури, якщо визначені коефіцієнти лінійної деформації за довжиною та шириною структури, можна розрахувати коефіцієнт об'ємної деформації для всієї структури в цілому. Коефіцієнт об'ємної деформації, у даному випадку, є добутком коефіцієнтів лінійної деформації за двома осями складки.

Запропонований алгоритм може слугувати основою методики прогнозування тріщинуватих зон у масивах осадових порід, для вирішення цілої низки геологічних завдань, які безпосередньо пов'язані з дослідженням та виявленням тріщинуватості, яка була сформована під дією тектонічних сил у процесі складкоутворення.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: масив гірських порід, тектонічні процеси, складчастість, тріщинуватість, відносні деформації, алгоритм розрахунку.

1. Булат А.Ф., Лукінов В.В., Безручко К.А. Умови формування газових пасток у вугленосних відкладах. – Київ: Наукова думка, 2017. – 251 с.

2. Волкова Т.П., Алёхин В.И., Силин А.А. Выявление локальных газоносных структур методом тренд-анализа // Уголь Украины. – 2011. – №5. – С. 33 – 36.

K.A.Bezruchko¹, O.V. Prykhodchenko¹, M.O. Hladka¹

**ALGORITHM FOR DETERMINING RELATIVE LINEAR DEFORMATIONS
IN THE ROCK MASSIF**

*¹M.S. Poliakov Institute of Geotechnical Mechanics of the National Academy of Sciences,
Laboratorna Str., 2A, 49005, Dnipro, Ukraine;
e-mail: gvrvg@meta.ua)*

An algorithm for determining relative linear deformations in a rock massif is proposed. The determination involves the construction of some geological maps of the studied area and several mathematical calculations using trend analysis. The proposed algorithm can serve as the basis of the methodology for predicting fractured zones in sedimentary rock massifs, for solving many geological problems. The task of identifying fractured zones is to determine areas in the rock massifs where stretching deformations have exceeded the critical limit for the discontinuity of rocks.

СТРУКТУРНЕ КОНСТРУЮВАННЯ НАДТВЕРДИХ PCBN КОМПОЗИТИВ BL ГРУПИ

Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України, вул. Автозаводська, 2, 04074, Київ, Україна;
e-mail: bezhenar@ukr.net, jarlo1@ukr.net, pacik.andr@gmail.com

Надтверді PCBN композити BL групи – це інструментальні матеріали, в структурі яких вміст cBN 45 - 75 %, розмір зерна cBN до 3 мкм, зв'язка, як правило, на основі тугоплавких сполук титану (TiN, TiC, TiCN), основне призначення - високошвидкісна чистова і напівчистова лезова обробка жароміцніх хромонікелевих сплавів, легованих і жароміцніх сталей. Навантаження на лезо різального інструменту невелике і переважає трибохімічний знос різця.

Одержано PCBN композити BL групи спіканням за високих тисків (3 – 8 ГПа) і температур (1600 – 2300 К) в апараті високого тиску (ABT) різних типів (ковадла з заглибленими, циліндричні, кубічні і т.д.), які забезпечують приведені вище термобаричні умови спікання.

Вимоги до вихідних порошків cBN і тугоплавких сполук титану випливають з вимог до структури композиту, яка поєднує твердий компонент – cBN, який відповідає за різання, і компонент, що захищає зерна cBN від хімічної взаємодії з навколошнім середовищем (киснем) і оброблюваним матеріалом. Можливі два варіанти структури - окремі зерна cBN, оточені зв'язкою, або структура з подвійним каркасом (каркас cBN, оточений тугоплавким каркасом зв'язки).

Щоб зерна cBN працювали ефективно, вони повинні міцно утримуватися в зв'язці, чому сприяє розвинена поверхня вихідних порошків і когерентний зв'язок між фазами в композиті.

Ще одна вимога до структури пов'язана з використанням різців з композиту для фінішних операцій різання, чистота поверхні оброблюваного матеріалу залежить від розміру зерна cBN в композиті, і в багатьох випадках композити з розміром зерна cBN більше 3 мкм не відповідають вимозі щодо шорсткості поверхні.

Виходячи з вищесказаного, основні вимоги, що пред'являються до порошків cBN і тугоплавких складових композиту, наступні: а) розмір зерен cBN не більше 3 мкм, в окремих випадках (напівчистове точіння) допускається до 7 мкм; б) розмір зерен тугоплавких компонентів композиту (TiC, TiN, TiCN) в два-три рази менше розміру зерен cBN, як правило, це порошки фракції 1/0,5; в) не допускається наявність кисню в порошках тугоплавких сполук, оксикарбіди (оксинітриди) титану при взаємодії з порошками cBN в процесі спікання сприяють фазовому перетворенню кубічної модифікації нітриду бору в гексагональну і знеміцненю композиту; г) бажано, але не обов'язково, мати розвинену поверхню вихідних порошків; д) бажано, але не обов'язково, мати нестихометрію тугоплавких компонентів композиту, що підвищує їх реакційну здатність при спіканні і, як наслідок, зміцнює міжфазний зв'язок в композиті.

В ІІМ НАН України розроблено ряд нових PCBN композитів BL групи, де в якості зв'язки використовувались TiC, TiN, TiCN, TiB₂, ZrN. Для спікання використовувались ABT типу «ковадло з заглибленими», окремі експерименти проводились в кубічних ABT. Важливим було одержання гомогенної шихти для спікання, що досягалось мокрим змішуванням в органічних рідинах. В багатьох випадках виникали труднощі з нейтралізації шкідливого впливу на міцність композиту хемосорбованого в поверхневому шарі високодисперсних вихідних порошків кисню, для нейтралізації цього явища в вихідну шихту додатково додавали дисперсний порошок алюмінію. Одержані в таких системах (cBN – тугоплавка сполука з ряду TiC, TiN, TiCN, TiB₂, ZrN – алюміній) мали однорідну структуру на рівні розміру зерна cBN, прийнятні твердість (25 – 28 ГПа), тріщиностійкість (7 – 9 МПа^{1/2}, теплопровідність (50 – 80 Вт/м^{*}К).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: надтверді матеріали, PCBN композити, кубічний нітрид бору (cBN), тугоплавкі сполуки титану, високошвидкісна обробка, термобаричні умови, трибохімічний знос.

Bezhenar M.P., Romanenko Y.M., Patsyk A.M.

STRUCTURAL DESIGN OF SUPERHARD PCBN COMPOSITES OF BL GROUP

*V. Bakul Institute for Superhard materials, National Academy of Sciences of Ukraine,
Avtozavodska str. 2, 04074, Kyiv, Ukraine;
e-mail: bezhenar@ukr.net, jarlo1@ukr.net, pacik.andr@gmail.com*

PCBN composite based on cubic boron nitride (cBN) are used in tools for rough, semi-finishing, and Superhard PCBN composites of the BL group are tool materials containing 45-75% cBN with a grain size up to 3 μm , typically bonded with titanium compounds (TiN, TiC, TiCN). They are designed for high-speed finishing and semi-finishing of heat-resistant chromium-nickel alloys and steels. Requirements for initial cBN and titanium compound powders ensure effective cutting and protection against environmental interactions.

ФАЗОВИЙ СКЛАД ТА ВЛАСТИВОСТІ ПОЛІКРИСТАЛІВ сBN – Al В ЗАЛЕЖНОСТІ ВІД УМОВ ОДЕРЖАННЯ

Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України, вул. Автозаводська, 2,
04074, Київ, Україна;
e-mail: bezhenar@ukr.net, jarlo1@ukr.net, pacik.andr@gmail.com

Полікристалічні надтверді матеріали (PCBN) на основі кубічного нітриду бору (сBN) використовуються в інструменті, що працює при чорновому, напівчистовому та чистовому точінні виробів із залізовуглецевих сплавів твердістю до 63 HRC, у тому числі легованих хромом, марганцем і никелем. Одержані такі матеріали при спіканні за високого тиску порошків сBN з різними добавками, найчастіше з добавкою алюмінію [1].

При реакційному спіканні порошків кубічного нітриду бору з алюмінієм відбувається хімічна взаємодія з утворенням нітриду і боридів алюмінію [2]. Розглянемо три варіанти такої взаємодії, які реалізуються при одержанні PCBN композитів ВН класу, відомих за торговою маркою «киборит» в Інституті надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України.

Варіант 1. Використовуються сталеві апарати високого тиску «ковадло з заглибленням», тиск і температура процесу спікання: 4–4,5 ГПа і 1400–1500 °C. Хімічна взаємодія між компонентами шихти реалізується за схемою $\text{Al} + \frac{2}{3} \text{BN} \rightarrow \frac{2}{3} \text{AlN} + \frac{1}{3} \text{AlB}_2$ при умові, що розмір зерен сBN більше 7 мкм, пов'язано це з кінетикою хімічної взаємодії. Фазовий склад одержаних композитів – сBN, AlN, AlB₂. **Переваги** – високі твердість (27–29 ГПа) і тріщиностійкість (10–13 МПа^{1/2}) за рахунок утворення міцного сBN каркасу. **Недолік** – низька термостійкість через розпад AlB₂ при температурах вище 1000 °C за схемою $\text{AlB}_2 \rightarrow \frac{1}{6} \text{AlB}_{12} + \frac{5}{6} \text{Al}$.

Варіант 2. Використовуються твердосплавні апарати високого тиску «тороїд», тиск і температура процесу спікання: 6–8 ГПа і 1700–2000 °C. Хімічна взаємодія між компонентами шихти реалізується за схемою $\text{Al} + 12/13\text{BN} \rightarrow 12/13\text{AlN} + 1/13 \text{AlB}_{12}$. Фазовий склад одержаних композитів – сBN, AlN, AlB₁₂. **Переваги** – дуже високі твердість 34–40 ГПа і термостійкість (1200 °C), прийнятна тріщиностійкість (8–10 МПа^{1/2}). **Недолік** – високі тиск і температура процесу отримання, не нижче 6 ГПа та 1700 °C, використання дефіцитного твердого сплаву для апаратів високого тиску.

Варіант 3. Використовуються сталеві апарати високого тиску «ковадло з заглибленням», тиск і температура процесу спікання: 3 – 4,2 ГПа і 1400 – 1500 °C. Розмір зерен порошків сBN менше 5 мкм. Фазовий склад композиту – сBN і твердий розчин бору в кристалічній гратці нітриду алюмінію. Реакційна взаємодія при спіканні реалізується за схемою $\text{Al} + \text{BN} \rightarrow \text{AlN(B)}$, пов'язано це з кінетикою хімічної взаємодії. **Переваги** таких композитів – високі термостійкість (1200 °C), тріщиностійкість (11–13,5 МПа^{1/2}), підвищенні демпфуючі характеристики, прийнятна твердість (25–28 ГПа). **Недолік** – при спіканні порошків сBN з розміром зерен менше 3 мкм можливе утворення гексагонального нітриду бору. **Причини:** зниження тиску в апараті високого тиску через низьку початкову щільність і подальшу підвищену усадку пресовки, а також домішки на розвиненій поверхні порошків сBN.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: полікристалічні надтверді матеріали (PCBN), кубічний нітрид бору (сBN), спікання, високий тиск, термостійкість, тріщиностійкість, хімічна взаємодія.

1. Новиков, Н. В., Шульженко, А. А., Беженар, Н. П., Божко, С. А., Боримский, А. И., & Нагорный, П. А. (2001). Киборит: получение, структура, свойства, применение. Сверхтв. материалы, (2), 40-51.

2. Беженар, Н. П., Божко, С. А., Белявина, Н. Н., Марків, В. Я., & Нагорный, П. А. (2002). Фазовый состав поликристаллов, полученных при реакционном спекании кубического нитрида бора с алюминием. Сверхтв. материалы, (1), 37-48.

**PHASE COMPOSITION AND PROPERTIES OF POLYCRYSTALS
cBN - Al POLYCRYSTALS DEPENDING ON THE CONDITIONS OF
PREPARATION**

*V. Bakul Institute for Superhard materials, National Academy of Sciences of Ukraine,
Avtozavodska str. 2, 04074, Kyiv, Ukraine;
e-mail: bezhenar@ukr.net, jarlo1@ukr.net, pacik.andr@gmail.com*

PCBN composite based on cubic boron nitride (cBN) are used in tools for rough, semi-finishing, and finishing turning of iron-carbon alloys with hardness up to 63 HRC. Such materials are produced by high-pressure sintering with various additives, most often aluminum. During reactive sintering of cBN powders with aluminum, chemical interaction occurs with the formation of aluminum nitride and borides. Three variants of such interaction, realized in obtaining PCBN composites of BH class, trademark "Kiborite,".

МІГРАЦІЯ КОБАЛЬТУ В РОБОЧИЙ ШАР РСВН КОМПОЗИТУ СПЕЧЕНИЙ НА ТВЕРДОСПЛАВНІЙ ПІДКЛАДЦІ

Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля НАН України, вул. Автозаводська, 2, 04074,
Київ, Україна;
e-mail: bezhenar@ukr.net, jarlo1@ukr.net, pacik.andr@gmail.com, kybor@ism.kiev.ua

Надтверді РСВН композити - це, як правило, отримані спіканням в умовах високих тисків (3 - 8 ГПа) і температур (1600 - 2300 К) порошки кубічного нітриду бору (сBN) на підкладці з твердого сплаву системи WC-Co. Важливою властивістю двошарового композиту є міцний зв'язок на межі твердий сплав - спечений порошок сBN. У цій роботі досліджували зміну елементного складу композиту поблизу межі розділу твердий сплав - сBN. Вихідними матеріалами слугували твердий сплав ВК15 і порошок кубічного нітриду бору з розміром зерен від 5 до 7 мкм. Спікання проводили в кубічному апараті високого тиску. Умови спікання - температура 1600 К, тиск - 4,5 ГПа, тривалість процесу 20 хвилин. Були отримані двошарові пластини, після шліфування та полірування товщина твердосплавної підкладки становила 2,2 мкм, а робочого шару - надтвердого полікристалічного сBN - 1 мкм. З використанням растрового електронного мікроскопа виробництва JEOL (Японія) серії JSM-IT500 проводили дослідження мікроструктури та розподіл елементів поблизу лінії розділу твердий сплав - сBN.

У зоні контакту твердий сплав - сBN можна відзначити принаймні 4 області, що розрізняються за структурою, кольором, фазовим складом (за фазовим контрастом), розміром зерен. Перша область - твердий сплав на відстані понад 20 мкм від контактної межі - зерна WC розміром 2 - 3 мкм, між ними прожилки кобальту. Ділянка 2 - світла приконтактна зона шириною близько 20 мкм, у ній практично відсутній кобальт. Ділянка 3 - шириною близько 30 мкм - чорні зерна сBN розміром 5 - 7 мкм, між ними прожилки кобальту, кількість якого зменшується з віддаленням від лінії розділу твердий сплав - сBN. Ділянка 4 - понад 50 мкм від лінії розділу - полікристал сBN практично без включення кобальту, розмір зерен сBN 5 - 7 мкм.

Результати візуального дослідження мікроструктури підтверджують дані мікрорентгеноспектрального аналізу (визначали наявність елементів В, С, N, O, Co, W у зразку на різних відстанях від лінії контакту твердого сплаву з РСВН шаром). У ділянці 1 кількість кобальту на рівні 10 - 12 %, бор і азот відсутні. У ділянці 2 різко зменшується кількість кобальту, майже до нуля на відстанях від 10 мкм і до лінії розділу, бор і азот проявляються на відстанях до 5 мкм від лінії розділу, максимальна кількість - 12 % мас на відстані 1 мкм від лінії розділу. У ділянці 3 10 % Со біля лінії розділу, 5 % на відстані 10 мкм, 3 % на відстані 30 мкм від лінії розділу. Виявлено також вольфрам (3 % біля лінії розділу, 2 % на відстані 10 мкм і 0,5 % на відстані 50 мкм). Ділянка 4 - на відстані 500 мкм від лінії розділу переважно бор і азот (сBN), сліди Со і W (до 0,3 %, можливо, нанесені на поверхню під час приготування шліфа).

Висновки

1. Кобальт просочується з твердого сплаву в шар сBN на глибину до 50 мкм, концентрація кобальту біля границі до 10 мас. %, на відстані 50 мкм від границі ≈ 2 % мас., на відстані 500 мкм від границі кількість кобальту в межах помилки вимірювань, можливо, кобальт був нанесений на поверхню шару під час полірування.

2. З боку твердого сплаву в зоні контакту збіднена кобальтом область шириною близько 30 мкм. На відстані 25 мкм від лінії контакту кількість кобальту в твердому сплаві ≈ 12 мас. %, на відстані 2 мкм від лінії контакту кобальту в твердому сплаві менше 1 мас. %. Це може бути причиною окрихчування матеріалу в зоні контакту, утворення тріщин, відшарувань.

3. Вольфрам (карбід вольфраму), як і кобальт, частково проникає за межу розділу в шар сBN, кількість вольфраму на відстані до 10 мкм від кордону ≈ 3 мас. %, на відстані 30 мкм - ≈ 1 %, на відстані 500 мкм - у межах помилки вимірювань.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: надтверді РСВН композити, спікання, високі тиски, порошки кубічного нітриду бору (сBN), твердий сплав WC-Co

**MIGRATION OF COBALT INTO THE WORKING LAYER OF PCBN
COMPOSITE SINTERED ON CARBIDE SUBSTRATE**

*V. Bakul Institute for Superhard materials, National Academy of Sciences of Ukraine,
Avtozavodska str. 2, 04074,
Kyiv, Ukraine;
e-mail: bezhenar@ukr.net, jarlo1@ukr.net, pacik.andr@gmail.com, kybor@ism.kiev.ua*

Superhard PCBN composites are typically obtained by sintering cubic boron nitride (cBN) powders at high pressures (3 - 8 GPa) and temperatures (1600 - 2300 K) on a WC-Co hard alloy substrate. An important is the strong bond at the hard alloy - sintered cBN powder interface. This work investigates the elemental composition changes near the hard alloy - cBN interface. Sintering was performed at 1600 K and 4.5 GPa for 20 minutes. The microstructure and element distribution studied using a JEOL JSM-IT500.

Т.С. Кагадій, А.Г. Шпорта

**МЕТОД ЗБУРЕНЬ У ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ КОМПОЗИТНИХ ТА
НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ**

*Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»,
пр. Дмитра Яворницького, 19, 49005, Дніпро, Україна,
e-mail: tkagadiy@gmail.com, shportaanna@ukr.net:*

Аналітичні та чисельно-аналітичні підходи в сучасній механіці, особливо при розгляді анізотропних матеріалів, є надзвичайно важливими. В першу чергу це стосується композиційних матеріалів, таких як армований бетон і склопластики, що демонструють нелінійну поведінку під впливом різноманітних факторів, таких як складне навантаження, вплив зовнішнього середовища або екстремальні умови експлуатації. Отже, розвиток аналітичних методів є корисним для сучасних технологій проектування і будівництва. Ці методи забезпечують обґрунтовані наближені розрахунки та можуть застосовуватись для перевірки результатів комп'ютерного моделювання.

Мета цієї роботи – дослідити поведінку композиційних деталей і частин механізмів під час контактної взаємодії, а також за допомогою асимптотичного аналізу вивчити вплив анізотропних властивостей матеріалу на напружено-деформований стан об'єкта. Широкий спектр застосувань асимптотичного підходу підтверджує його ефективність у спрощенні складних задач, перетворюючи їх на послідовне розв'язання краївих задач, що базуються на теорії потенціалу.

Серед завдань контактної взаємодії особливий інтерес становлять задачі, що досліджують напружено-деформований стан пластини під впливом жорсткого штампу або системи штампів. У цьому контексті для розв'язання плоских контактних задач теорії пружності доцільно використовувати математичний апарат, який базується на теорії функцій комплексного змінного [2,3,5,6].

У нелінійній теорії пружності загальні рівняння моделюють настільки складні процеси, що їх застосування в інженерній практиці є рідкісним через необхідність обґрунтування постановки задач і верифікації результатів за допомогою чисельних методів. Тому розробка наближених чисельно-аналітичних та аналітичних підходів, які враховують специфічні характеристики поведінки різних типів конструкцій та їх елементів, має велике значення.

Доведена можливість узагальнення методу збурень для матеріалів, що вимагають врахування скінченних деформацій. Запропонований підхід дозволяє звести задачі геометрично нелінійної теорії пружності (як у плоскій, так і в просторовій постановці) до послідовного розв'язання краївих задач теорії потенціалу.

У випадку врахування фізичної нелінійності матеріалу виникла необхідність введення додаткового «вбудованого» малого параметру, що дозволило узагальнити метод і виконати його основну ідею розщеплення на більш прості, але пов'язані між собою задачі.

Сучасні матеріали, наприклад, магнітоелектричні композити, такі як BaTiO₃-CoFe₂O₄, стали ключовими для нових поколінь пристройів. Дослідження в цій галузі є складними та важливими, потребують уваги наукової спільноти. Проведення комплексного аналізу механізмів руйнування п'єзоелектричних та п'єзомагнітних матеріалів є критично важливим для розуміння і прогнозування міцності та надійності структурних компонентів. Застосування розвинутого авторами методу [4] дозволяє формулювати відповідні країові задачі для основних рівнянь та представляти початкову задачу

електропружності як суперпозицію краївих задач теорії потенціалу. При цьому механічні та електричні складові можуть бути відокремлені, зберігаючи взаємодію через країові умови.

Дослідження показують, що метод збурень, розроблений та узагальнений в роботах авторів [1], є досить зручним математичним апаратом для аналітичного розв'язання контактних задач лінійної та нелінійної теорії пружності, а також двовимірних задач електропружності. Такий підхід добре працює у випадку анізотропних матеріалів, допомагає створити адекватні математичні моделі та оцінити значущість різних гіпотез.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: контактна взаємодія, анізотропія, метод збурень, електропружність, напружене-деформований стан, асимптотичний аналіз

1. Кагадій Т. С., Шпорта А. Г., Білова О. В., Щербіна І. В. Врахування нелінійних властивостей матеріалів при математичному моделюванні // Прикладні питання математичного моделювання. – 2022. – Т. 5, № 1. – С. 27–33. <https://doi.org/10.32782/mathematical-modelling/2022-5-1-3>
2. Campbell J.E., Thompson R.P., Dean J., Clyne T.W. Experimental and computational issues for automated extraction of plasticity parameters from spherical indentation // Mechanics of Materials. – 2018. – Vol. 124. – P. 118–131. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2018.06.004>
3. Kagadiy T., Shporta A. Mathematical modeling in the calculation of reinforcing elements // Naukovi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. – 2019. – No. 5. – P. 60–64. <https://doi.org/10.29202/nvngu/2019-5/10>
4. Shporta A., Kagadiy T., Onopriienko O. Asymptotic method in two-dimensional problems of electroelasticity // Naukovi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. – 2020. – No. 1. – P. 130–134. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-1/130>
5. Shporta A. H., Kagadiy T. S., Govorukha V. B., Onopriienko O. D., Zhao Shuo. Analysis of numeric results for analogue of Galin's problem in curvilinear // Naukovi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. – 2023. – No. 1. – P. 142–148. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2023-1/142>
6. Ulitko A. F., Ostryk V. I. Frictional Contact of a Rigid Cone With Elastic Half Space // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – Vol. 198, no. 2. – P. 132–146. <https://doi.org/10.1007/s10958-014-1778-2>

T.S. Kagadiy, A.H. Shporta,

PERTURBATION METHOD IN PROBLEMS OF MECHANICS OF COMPOSITES AND HETEROGENEOUS MATERIALS

*Dnipro University of Technology
Dmytra Yavornitskoho Ave., 19, Dnipro, Ukraine
e-mail: tkagadiy@gmail.com, shportaanna@ukr.net;*

The goal of this research is to investigate how composite components and mechanism parts behave during contact interactions. Additionally, it aims to use asymptotic analysis to explore how anisotropic material properties influence the stress-strain state of these objects. The broad applicability of the asymptotic method highlights its effectiveness in simplifying complex issues by reducing them to a series of boundary value problems within potential theory.

О.Л.Кіпніс¹

**КРИТИЧНІ ПАРАМЕТРИ НАВАНТАЖЕННЯ В ЗАДАЧІ ПРО СТИСКАННЯ
НАПІВОБМЕЖЕНОГО ТІЛА З ПОКРИТТЯМ ВЗДОВЖ МІЖФАЗНОЇ ЗОНИ
ПРОКОВЗУВАННЯ**

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: a.l.kipnis@gmail.com

В рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл [7, 8] досліджено задачу плоскої деформації про стискання кусково-однорідної півплощини вздовж дефекту, що являє собою зону гладкого проковзування довжини $2a$ (зона, вздовж якої допускається розрив лише дотичного переміщення), яка розташована на прямолінійній межі поділу двох жорстко з'єднаних між собою середовищ – напівобмеженого однорідного тіла (основи) та однорідного тонкого шару покриття товщини h (рис. 1). Межа тіла $x_2 = -h$ вільна від напружень.

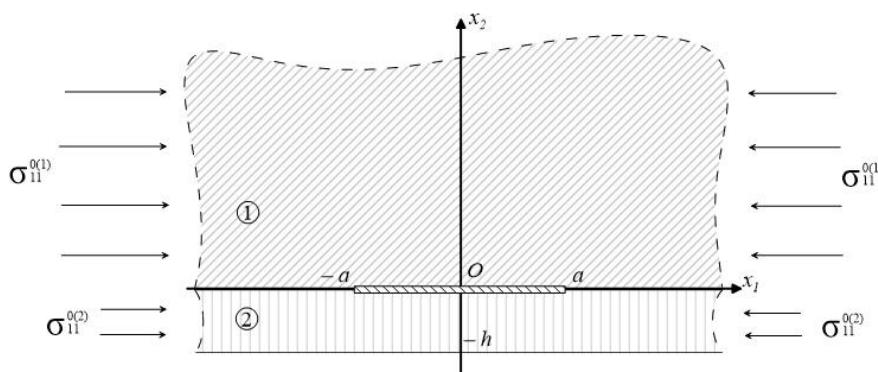


Рис. 1

Початковий етап руйнування тіла пов'язується з втратою стійкості матеріалу в локальній області біля вказаного дефекту [2]. Матеріали основи та покриття є високоеластичними матеріалами, що описуються пружним потенціалом з різними механічними характеристиками, для якого реалізується випадок рівних коренів характеристичного рівняння [6, 9]. Поставлену граничну задачу, сформульовану в термінах потенціальних гармонічних функцій, із застосуванням інтегральних перетворень Фур'є зведено до задачі на власні значення для інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, доповненого деякою додатковою умовою [5]. Указане інтегральне рівняння досліджено чисельно з використанням методу Бубнова – Гальоркіна [4]. Для стисливих матеріалів з потенціалом гармонічного типу [10] та нестисливих матеріалів з потенціалом Бартенєва – Хазановича [1] знайдені критичні значення параметрів навантаження стиску, які відповідають локальній втраті стійкості кусково-однорідної півплощини біля зони проковзування. Також виконано порівняння отриманих критичних пара-

метрів навантаження з аналогічними значеннями критичних параметрів, що відповідають приповерхневій втраті стійкості кусково-однорідної півплощини без дефекту, що стискається вздовж межі поділу середовищ, які жорстко з'єднані між собою або проковзують без тертя одне відносно одного.

На рис. 2 зображені типові залежності значення критичного відносного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ вздовж осі Ox_1 , спричиненого дією стискаючих навантажень, в задачі, що розглядається, від значення відносної (нормованої на половину довжини міжфазної зони проковзування) ширини смуги $\beta = h/a$ для випадку потенціалу гармонічного типу. Рис. 2 a побудований для значення відношення жорсткостей матеріалів $g = \mu_2/\mu_1 = 0.5$ і значення коефіцієнтів Пуассона $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ та відповідає випадку, коли матеріал покриття є менш жорстким ніж матеріал основи. Рис. 2 b побудований для значень параметрів $g = \mu_2/\mu_1 = 1.5$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ і відповідає випадку, коли матеріал покриття є більш жорстким ніж матеріал основи.

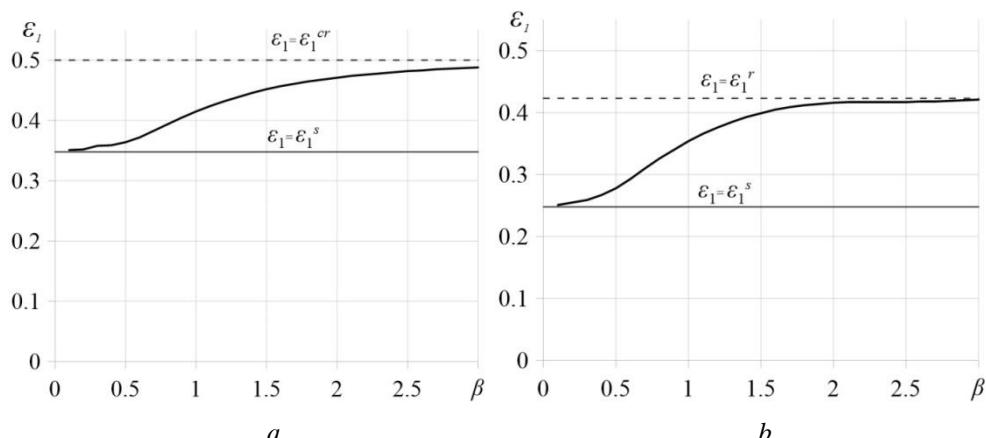


Рис. 2

Суцільні горизонтальні прямі $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^s$ на рисунках 2 a та 2 b відповідають критичним значенням параметру відносного укорочення для *приповерхневої втрати стійкості кусково-однорідної півплощини (без дефекту)*, компоненти якої проковзують [3] при відповідному значенні g . Пунктирна горизонтальна пряма $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{cr}$ на рис. 2 a відповідає значенням критичного відносного укорочення для *приповерхневої втрати стійкості однорідної півплощини (без дефекту)*, виготовленої з матеріалу з потенціалом гармонічного типу (у випадку, коли матеріал покриття є менш жорстким ніж матеріал основи явище приповерхневої втрати стійкості кусково-однорідної півплощини з жорстко з'єднаними компонентами не спостерігається). Пунктирна горизонтальна пряма $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$ на рис. 2 b відповідає значенням критичного відносного укорочення для *приповерхневої втрати стійкості кусково-однорідної півплощини (без дефекту)* з жорстко з'єднаними компонентами при відповідному значенні g .

КЛЮЧОВІ СЛОВА: матеріал з покриттям, модель кусково-однорідного тіла, міжфазна зона проковзування, локальна втрата стійкості при стиску, критичні навантаження.

1. Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н. О законе высокояэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – 2, №1. – С. 21–28.
2. Гузь А.Н. Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача // Докл. АН СССР. – 1981. – 259, №6. – С. 1315–1318.

3. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. – К.: «ЛИТЕРА», 2008. Т. 1. Разрушение в структуре материала. – 592 с. Т. 2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.
4. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965. – 383 с.
5. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. – Ленинград: Наука, 1977. – 220 с.
6. Bogdanov V., Guz A., Nazarenko V. Fracture of Materials Loaded Along Cracks: Approach and Results. In: Guz A.N., Altenbach H., Bogdanov V., Nazarenko V.M. (eds.) Advances in Mechanics. - Advanced Structured Materials, Vol. 191. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2023. – P. 51 –89.
7. Guz A.N. Establishing the Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, No 1. – P. 1–57.
8. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1999. – 555 p.
9. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Two-Dimensional Problems on the Fracture of Bodies Under Compression Along Cracks. In: Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Fracture of Materials Under Compression Along Cracks. – Advanced Structured Materials, Vol. 138. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. – P. 149 – 248.
10. John F. Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Common. Pure and Appl. Math. – 1960. – **13**, No 2. – P. 239–296.

A.L. Kipnis¹

CRITICAL LOAD PARAMETERS IN THE PROBLEM ON COMPRESSION OF A SEMI-BOUNDED BODY WITH A COATING LAYER ALONG THE INTERFACE SLIDING ZONE

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: a.l.kipnis@gmail.com

Within the framework of the three-dimensional linearized theory of stability of deformable bodies, the plane problem on compression of a piecewise-homogeneous half-plane along a defect which is a frictionless sliding zone located at the rectilinear interface between two rigidly connected media, a semi-bounded homogeneous body (base) and a homogeneous thin coating layer have been studied. The initial stage of body fracture is associated with the loss of material stability in a local area near the specified defect. The base and coating materials are considered as highly elastic materials described by an elastic potential with different mechanical characteristics. The boundary value problem, formulated in terms of potential harmonic functions, using Fourier integral transforms, is reduced to an eigenvalue problem for the Fredholm integral equation of the first kind, which is studied numerically by employing Bubnov – Galerkin method. For a compressible materials with a harmonic potential, and incompressible materials with Bartenev-Khazanovich elastic potential, critical values of the load parameters that correspond to local instability have been found. The critical load parameters obtained have also been compared with similar values of the critical parameters corresponding to the near-surface instability of a piecewise-homogeneous half-plane (without a defect) compressed along the interface between the media that are rigidly connected or slide without friction against each other.

А . Ю . Глухов

**ХВИЛІ КРУЧЕННЯ В ШАРУВАТИХ КОМПОЗИТНИХ СТИСЛИВИХ
МАТЕРІАЛАХ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПРИ ПРОКОВЗУВАННІ
ШАРІВ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: ndrew.gl@gmail.com*

Розглядається шаруватий композитний стисливий матеріал з початковими напруженнями, який складається з шарів двох типів, що чергуються. Матеріали шарів і їх початкові напружене-деформовані стани є однаковими для кожного типу шарів.

При дослідженні будемо застосовувати лагранжеві координати $y_n \equiv y^n$, які в початковому напружене-деформованому стані збігаються з декартовими координатами, і лагранжеві координати r', θ, y_3 , які в початковому напружене-деформованому стані збігаються з круговими циліндричними координатами.

Декартову систему координат (y_1, y_2, y_3) в початковому напружене-деформованому стані вибираємо таким чином, щоб вісь Oy_3 була спрямована по нормальні до площин розділу шарів.

Матеріали шарів вважатимемо гіперпружними ізотропними з довільною структурою пружних потенціалів; у разі трансверсально-ізотропних гіперпружних матеріалів шарів будемо вважати, що вісь ізотропії спрямована уздовж вісі Oy_3 .

Вважаємо початковий напруженій стан однорідним

$$u_m^0 = (\lambda_m - 1)x_m; \quad \lambda_m = \text{const}. \quad (1)$$

Також приймаємо, що для кожного з шарів мають місце наступні співвідношення

$$\begin{aligned} S_{11}^{0(j)} &= S_{22}^{0(j)} \neq S_{33}^{0(j)}; \quad \sigma_{11}^{0(j)} = \sigma_{22}^{0(j)} \neq \sigma_{33}^{0(j)}; \\ \varepsilon_{11}^{0(j)} &= \varepsilon_{22}^{0(j)}; \quad \lambda_1^{(j)} = \lambda_2^{(j)}; \quad h^{(j)} = \lambda_3^{(j)}h^{(j)}; \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

В (2) і нижче індексами в дужках ($j = 1, 2$) позначені всі величини, що відносяться до шарів різних типів. Тут $\sigma_{ii}^{0(j)}$, $S_{ii}^{0(j)}$ і $\varepsilon_{ii}^{0(j)}$ - складові тензора узагальнених напружень, тензора узагальнених напружень Лагранжа і тензора деформації Гріна відповідно, $h^{(j)}$, $h'^{(j)}$ - товщини j -го шару в природному і в початковому напружене-деформованому стані відповідно, $\lambda_i^{(j)}$ - коефіцієнти видовження уздовж відповідних віссей.

При дослідженні хвиль кручення, як і в [1], приймаємо

$$u_{r'}^{(j)} \equiv 0; \quad u_\theta^{(j)} = u_\theta^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad u_3^{(j)} \equiv 0. \quad (3)$$

Вирази (3) будуть мати місце, якщо в представленні загальних розв'язків просторових динамічних лінеаризованих задач теорії пружності прийняти

$$\Psi'^{(j)} = \Psi'^{(j)}(r', y_3, \tau); \quad X'^{(j)} \equiv 0. \quad (4)$$

У розглянутому випадку для визначення переміщень $u_{\theta}^{(j)}$ в кожному з шарів маємо наступні співвідношення [1]

$$u_{\theta}^{(j)} = -\frac{\partial}{\partial r'} \Psi'^{(j)}. \quad (5)$$

Для складових тензора напружень $Q'^{(j)}$ при $y_3 = const$ отримуємо вирази

$$Q'_{3\theta}^{(j)} = \omega'_{3113}^{(j)} \frac{\partial}{\partial y_3} u_{\theta}^{(j)}. \quad (6)$$

В співвідношеннях (5) функції $\Psi'^{(j)}$ визначаються із рівнянь

$$\left(\Delta' + \omega'_{3113}^{(j)} \omega'_{1221}^{(j)-1} \frac{\partial^2}{\partial y_3^2} - \varrho'^{(j)} \omega'_{1221}^{(j)-1} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) \Psi'^{(j)} = 0. \quad (7)$$

Тут $\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial r'^2} + \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'}$; $\varrho'^{(j)}$ – щільність матеріалів кожного з шарів в попередньо напруженому стані; τ – час. Складові тензорів $\omega'^{(j)}$ визначаються для конкретних постановок задач [1].

За умови проковзування при $y_3 = 0$ повинні виконуватися умови неперервності

$$Q'_{3\theta}^{(1)(0)}(0) = 0; \quad Q'_{3\theta}^{(2)(0)}(0) = 0; \quad (8)$$

і умови періодичності

$$Q'_{3\theta}^{(1)(0)}(h^{(1)}) = 0; \quad Q'_{3\theta}^{(2)(0)}(-h^{(2)}) = 0. \quad (9)$$

Таким чином, відповідно до вище викладеного дослідження закономірностей поширення хвиль кручення у нестисливих шаруватих композитних матеріалах з початковими напруженнями зводиться до побудови розв'язків рівняння (7) при виконанні умов неперервності в площині розділу шарів (8) і умов періодичності (9), відповідно теорії Флоке.

Розглянуто поширення хвиль кручення в радіальному напрямку вздовж шарів в композитних стисливих матеріалах з початковими напруженнями.

Для симетричних і антисиметричних хвиль кручення отримані дисперсійні рівняння та їх довгохвильові наближення.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: шаруватий композитний матеріал, початкові напруження, пружні хвилі, дисперсійне рівняння, довгохвильове наближення

1. Гузь А. Упругие волны в тела с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частично ограниченных телах. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.

A.Yu. Glukhov

TORSION WAVES IN LAYERED COMPOSITE COMPRESSIBLE MATERIALS WITH INITIAL STRESSES AT THE SLIP OF LAYERS

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: ndrew.gl@gmail.com

In the framework of the linearized theory of elasticity for bodies with initial stresses, torsional wave propagation in layered composite compressible materials with initial stresses at layer slippage is investigated. The case of wave propagation along the layers is considered. The dispersion equations for symmetric and antisymmetric waves and their long-wave approximation are obtained.

Л. О. Григор'єва

УСТАЛЕНИ КОЛИВАННЯ ЕЛЕКТРОВ'ЯЗКОПРУЖНОГО КОМПОЗИТНОГО ЦИЛІНДРА

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна
e-mail: grygorieva.lo@kntu.edu.ua

В роботі досліджуються осесиметричні усталені коливання п'єзоелектричного композитного порожнистого циліндра обмеженої довжини з врахуванням дисипативних властивостей матеріалів. Розглядається шаруватий композит, що складається з м'якої п'єзокераміки PZT-5A та п'єзополімеру PVDF. Дисипація енергії в рамках в'язкопружної моделі в моногармонічному наближенні враховується введенням комплексних матеріальних сталих у фізичні співвідношення.

Якщо макрооб'єм композитного п'єзоелектрика знаходиться в умовах однорідних макроскопічних деформацій $\langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle$ і напруженостей електричного поля $\langle E_n \rangle$, то рівняння стану будуть пов'язуватись макроскопічними параметрами

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = c_{ij\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle - e_{aj}^* \langle E_\alpha \rangle; \quad \langle D_i \rangle = e_{i\alpha\beta}^* \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle + \epsilon_{in}^* \langle E_n \rangle,$$

де $c_{ij\alpha\beta}^*$, e_{nij}^* , ϵ_{kn}^* – відповідно, тензори ефективних модулів пружності, п'єзоелектричних і діелектричних сталих, $i, j, \alpha, \beta = 1 \dots 3$. Надалі переходимо до матричних позначень $ij = n$, $\alpha\beta = m$, $n, m = 1 \dots 6$. Комплексні матеріальні характеристики вводяться у формі

$$\tilde{c}_{ij} = c_{ij}^E (1 + i \cdot c_{ij}''), \quad \tilde{e}_{kj} = e_{kj} (1 + i \cdot e_{kj}''), \quad \tilde{\epsilon}_{kk} = \epsilon_{kk}^S (1 + i \cdot \epsilon_{kk}''),$$

де c_{ij}^E , e_{kj} , ϵ_{kk}^S — дійсні частини матеріальних характеристик; c_{ij}'' , e_{ij}'' , ϵ_{ij}'' – тангенсі кутів механічних, п'єзоелектричних та діелектричних втрат.

Розглянемо кілька моделей шаруватих п'єзоелектричних композитів з повним набором ефективних характеристик c_{nm}^* , e_{in}^* , ϵ_{ii}^* . Нумерацію моделей вводимо згідно з порядком їх опублікування.

Модель 1. В монографії [3] отримано точний розв'язок задачі про визначення ефективних сталих для композитів з довільною анізотропією складових шарів. В умовах однорідного напруженого стану компоненти механічного та електричного полів макрооб'єму такого композиту задовільняють умові ергодичності, що дозволяє замінити осереднення за об'ємом осередненням за ансамблем реалізацій. З рівнянь статичної рівноваги з врахуванням залежності напружень та електричної індукції лише від однієї координати отримано диференціальні рівняння рівноваги, що легко інтегруються. Описаний підхід вирізняється чіткою структуризацією рівнянь відносно узагальнених параметрів.

Модель 2. В роботі [4] вивчається в'язкоелектропружна поведінка п'єзоелектричних волокнистих та шаруватих композитів. Підхід ґрунтуються на відповідності між квазистатичною в'язкоелектропружністю та статикою п'єзоелектрика. Використовується принцип відповідності з моделями мікромеханіки для прогнозування загальної поведінки гетерогенних п'єзоелектричних твердих тіл умови мікро-

структурних деталей разом із підходом до усереднення Морі–Танаки. Розглядаються двофазні матеріали, що складаються з п'єзоелектричної фази без втрат, вбудованої в матрицю, що має механічні та електричні втрати.

Модель 3. Запропонований в монографії [2] метод побудови рівнянь стану армованих волокнами та шаруватих композиційних матеріалів дозволяє враховувати розсіювання енергії в компонентах композита, в тому числі в язкопружких. В роботі [1] цей підхід розширене на шаруваті п'єзоелектричні композити та досліджено ефективність перетворення енергії в залежності від масової частки п'єзокераміки та напрямку армування. Розглядаються матеріали довільної анізотропної структури. Описуються фізичні залежності в просторі інтегральних перетворень Фур'є, запропоновані математичні моделі активного керування коливаннями композитних конструкцій.

На рис. 1 наведено графіки залежності ефективних пружинних модулів для шаруватих п'єзоелектрических композитів, що складаються з трансверсально-ізотропних шарів, осі симетрії яких співпадають з віссю x_3 , від об'ємної частки п'єзокераміки p_2 , обчислені за переліченими вище моделями. Розглядається комбінація п'єзополімеру PVDF (фаза 1, об'ємна частка $p_1 = 1 - p_2$) та м'якої п'єзокераміки PZT-5A (фаза 2, об'ємна частка p_2). Отримані результати дозволяють зробити висновок, що всі три розглянуті моделі при описі дійсних частин комплексних модулів дають співімірні результати.

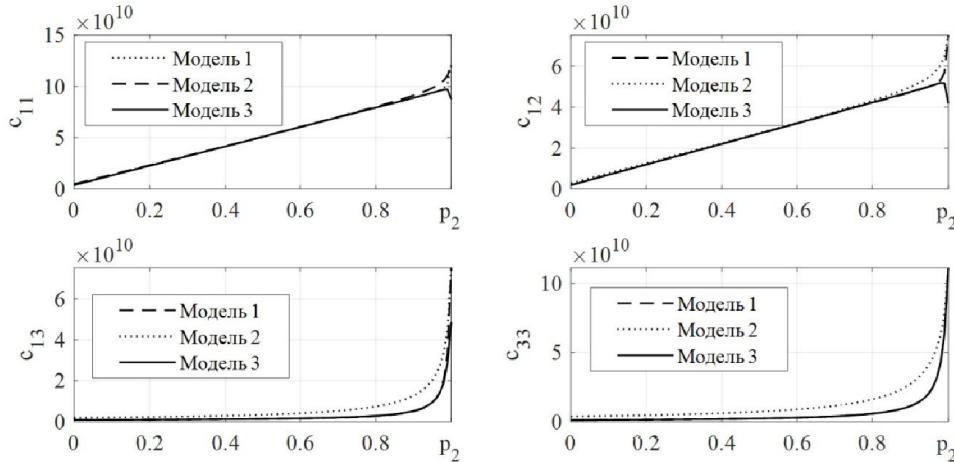
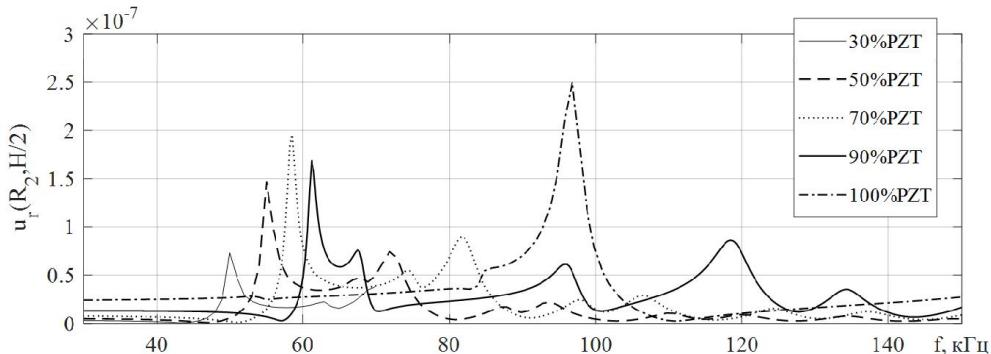


Рис. 1.

При визначенні дисипативних характеристик п'єзокомпозита потрібно враховувати, що перша модель отримана у припущення про статичність навантаження, друга — у припущення про подібність динамічного та статичного стану і не враховує втрати енергії в п'єзоелектрических шарах. Третя отримана з врахуванням енергетичних співвідношень при циклічних навантаженнях. Тому надалі будемо використовувати ефективні комплексні модулі, пораховані за третьою моделлю.

Чисельні обчислення проводилися для композитного шаруватого в напрямку осі z порожнистого циліндра з радіусами циліндричних поверхонь $R_1 = 0,6 \text{ см}$, $R_2 = 1 \text{ см}$, та висотою $H = 2R_2$. На рис. 2 наведено амплітудно-частотні залежності радіальних переміщень для точки $(R_2, H/2)$. Шари поляризовані в напрямку вісі z . Циліндричні поверхні електродовані та навантажені різницею потенціалів $V_0 \sin \omega t$, $V_0 = 100 \text{ В}$,

для торців граничні умови наступні: $u_r(r, 0) = \sigma_{zz}(r, 0) = 0$; $u_r(r, L) = \sigma_{zz}(r, L) = 0$. Розрахунок проводився методом скінченних елементів.



Ruc.2.

Зі зростанням частки PZT-5А спостерігається зростання резонансної частоти та амплітуди коливань. В дорезонансному діапазоні частот амплітуди мало змінюються. Максимальні переміщення виникають в композитному циліндрі з часткою п'єзокераміки 70% і складають 80% від переміщень в суцільному циліндрі.

Висновки. Всі три розглянуті моделі при розрахунку усталених коливань п'єзоелектричних шаруватих композитів в міжрезонансному діапазоні дають співмірні результати. В резонансній зоні врахування дисипації енергії є можливим за допомогою моделі 3. Компонування п'єзокераміки з п'єзополімером понижує резонансну частоту в 1,5-2 рази порівняно з суцільною п'єзокерамікою.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: п'єзоелектричні шаруваті композити, дисипативні властивості матеріалів, ефективні комплексні модулі, п'єзоелектричний композитний циліндр, усталені коливання

1. Деркач О. Л. Демпфірування нестационарних коливань електров'язкопружних елементів композитних конструкцій : дис. ... канд. техн. наук : 05.02.09 / Деркач О. Л. – Київ, 2019. – 278 с.
2. Савченко Е. В. Пассивное демпфирование колебаний композитных конструкций / Е. В. Савченко. – Нежин : "Вид-во "Аспект-Поліграф", 2006. – 232 с.
3. Хорошун Л. П. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов / Л. П. Хорошун, Б. П. Маслов, П. В. Лещенко. – Київ : Наук. думка, 1989. – 208 с.
4. Li J. Viscoelastic behavior of heterogeneous piezoelectric solids [Electronic resource] / Jiang Yu Li, Martin L. Dunn // Journal of Applied Physics. – 2001. – Vol. 89, no. 5. – P. 2893–2903. – Mode of access: <https://doi.org/10.1063/1.1337595> (date of access: 22.01.2024).

**L.O.Hryhorieva
STEADY ELECTROVISCOELASTIC OSCILLATIONS OF COMPOSITE CYLINDER**

*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",
Beresteyskyi Ave. 37, 03056, Kyiv, Ukraine*

The work investigates steady oscillations of piezoelectric composite cylinders taking into account the dissipative properties of the material using complex modules. Three different models of layered piezoelectric composites found in the literature are considered. The effective complex moduli of the layered piezocomposite were determined and the steady-state oscillations of the piezocomposite cylinder were investigated, taking into account the energy dissipation.

В.А. Максимюк¹, В.С. Ушакова¹, О.В. Ушаков²

**ПРО ШВИДКІСТЬ ПОШИРЕННЯ УДАРНОЇ ХВИЛІ У ЦИЛІНДРИЧНОМУ
ВЕРТИКАЛЬНОМУ ВОДЯНОМУ КУЛЕУЛОВЛЮВАЧІ**

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: desk@inmech.kyiv.ua*

²*Український науково-дослідний інститут спеціальної техніки та судових експертиз
Служби безпеки України.
вул. Миколи Василенка, 3, 03113, Київ, Україна;
e-mail: ictc@ssu.gov.ua*

Виготовлено спрощений експериментальний макет вертикального водяного кулеуловлювача [1] для відстрілу низькоенергетичні куль. На зовнішню поверхню сталевої труби висотою (l) 2 м, діаметром (d) 0,2 м і товщиною стінок (h) 5 мм наклеєно шість тензорезисторів в п'яти точках вздовж висоти. Розміщення датчиків показано в табл. 1.

Таблиця 1

Точка	Висота точки, м	Деформація	Канал
1	0,10	колоша	C1
2	0,55	колоша	C2
3	1,00	колоша	C3
3	1,00	поздовжня	C4
4	1,45	колоша	C5
5	1,90	колоша	C6

Перша точка розташована за 10 см від дна, решта через 45 см. Тому остання є за 10 см до верхівки труби. В кожній точці наклеєно по одному тензорезистору для вимірювання колових деформацій. А в точці 3 (середина труби) наклеєно додатковий тензорезистор для вимірювання поздовжніх деформацій.

Для вимірювання динамічних деформацій тензорезистори через містки Уітсона підключено до 8-канального (C1–C6, табл.1, колонка «канал») реєстратора вібраційних, акустичних і тензосигналів LMS SCADAS Mobile (Бельгія).

Вода налита до рівня за 20 см до верхівки, тобто на 10 см нижче точки 5. Маса труби з водою становила понад 100 кг. Відстрілювались кулі масою 7,45 г і початковою швидкістю 360 м/с.

Максимальні деформації спостерігаються біля дна труби (канал C1 на рис. 1). Тут вони сягають до 400 мкм/м (мікрострейн). В самій верхній точці 5 (канал C6) деформації найменші і не перевищують 150 мкм/м, оскільки навпроти точки води не було. В середній частині труби (канали C2, C5 на рис. 2) колові деформації приблизно одинакові біля 300 мкм/м. Поздовжні деформації в точці 3 (канал C4) були приблизно втричі менші від колових (канал C3), що узгоджується з коефіцієнтом поперечної деформації для сталі.

На всіх осцилограмах спостерігались по три локальні сплески максимальних деформацій півшириною біля 0,5 мс (рис. 1 і 2, час t відраховується від початку запису приладом), що свідчить про поширення ударної хвилі в трубі. Перші сплески ($t \approx 4,35$ с) відповідають моментам проходу фронту ударної хвилі. Треті ($t > 4,6$ с) – відбитій від верхньої поверхні хвилі. Другі сплески ($t > 4,4$ с) мають особливе пояснення.

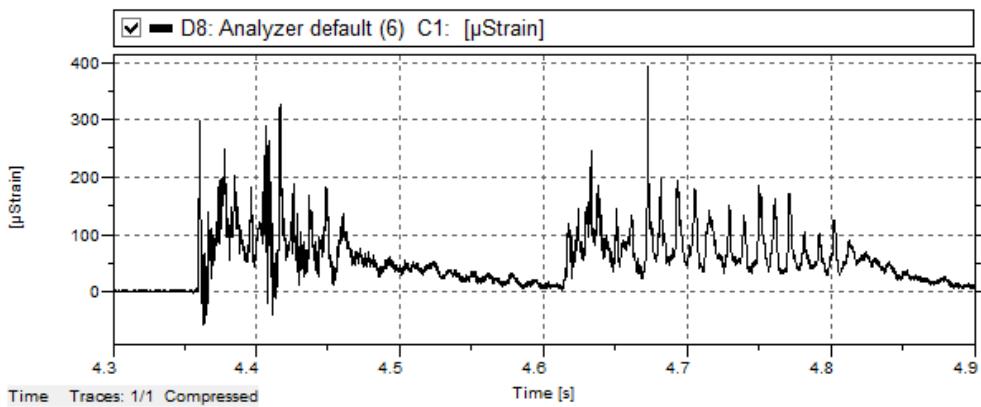


Рис.1.

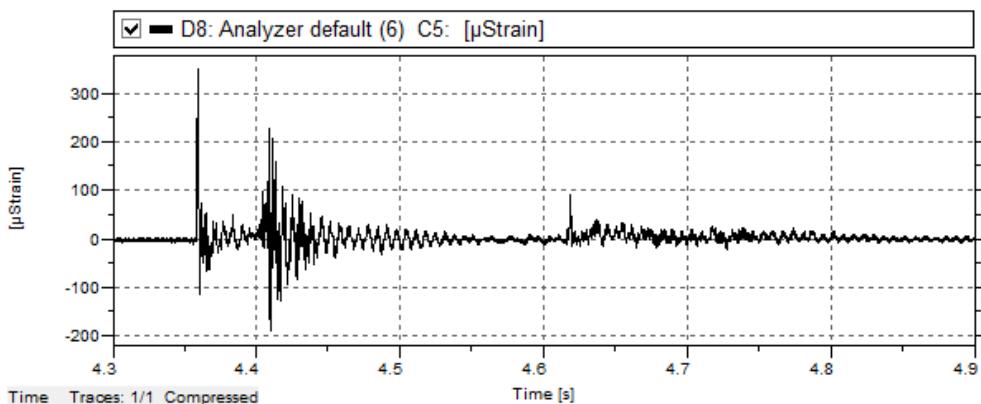


Рис.2.

Річ у тім, що кулеуловлювач, отримавши імпульс від кулі, ніби «підскакує» від підлоги (візуально на кілька сантиметрів). Після цього він вдаряється об підлогу, що викликає нову ударну, яка поширюється вверх.

На рис.3 в одному розтягнутому масштабі наведено осцилограми для ряду каналів. Видно початок ударної хвилі. Вертикальними курсорами було виміряно час, за який максимум деформації добігає від однієї точки до наступної, тобто доляє відстань 0,45 м. Цей час є практично незмінним для всіх інтервалів між сусіднimi тензодатчиками і становить 0,41 мс. Тоді швидкість поширення ударної хвилі становить 1100 м/с, що менше швидкості поширення звуку у воді.

Швидкість поширення ударної хвилі в пружному циліндрі зі рідиною розраховується за формулою Кортевега [2] (інколи її називають формулою Жуковського):

$$C = \frac{C_0}{\sqrt{1 + \frac{Kd}{Eh}}}, \quad (1)$$

де $C_0 = \sqrt{K/\rho}$ – швидкість поширення звуку в необмеженій рідині густину ρ ; K – модуль об'ємної пружності рідини; E – модуль пружності матеріалу труби.

Розрахунок за формулою (1) у даному випадку ($C_0 = 1483$ м/с; $K = 2$ ГПа; $E = 210$ ГПа) дає $C = 1262$ м/с, що на 15% більше від експериментального значення.

Такі розбіжності між теорією і експериментом можна пояснити таким чином. Формула (1) виведена для швидкості рідини в нескінченно довгій пружній трубі і враховує уявне зменшення пружності рідини за рахунок тільки поперечних рухів рідини. В даному випадку маємо скінченну трубу та її з відкритим верхом. В такій трубі

можливі не тільки поперечні, а й поздовжні деформації. А в рідині появляється можливість вертикальних рухів вгору, що ще додатково може зменшити уявну пружність рідини.

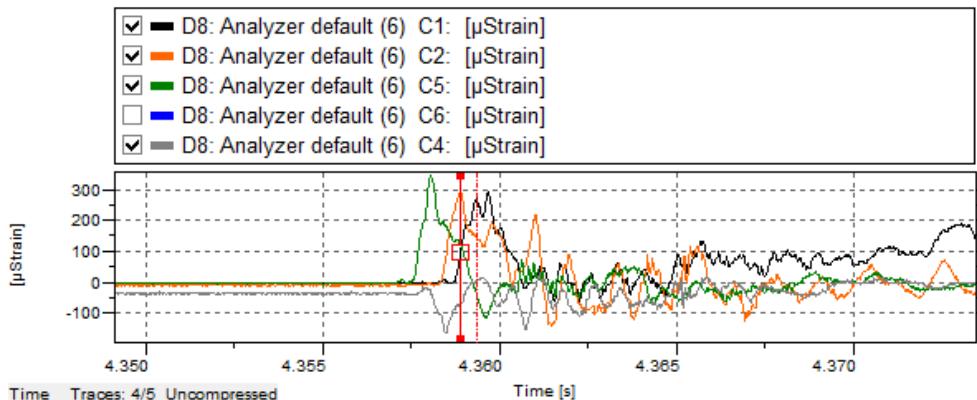


Рис.3.

Тобто тиск p викликає не тільки деформацію об'ємного стиснення e , а й додаткове уявне стиснення \tilde{e} за рахунок розширення труби та руху рідини вгору. В результаті уявний модуль об'ємної пружності рідини зменшується $\tilde{K} = K/(1 + \tilde{e}/e)$, підстановка якого в $C = \sqrt{\tilde{K}/\rho}$ дає узагальнення формули (1).

Таким чином, попереду кулі біжить ударна хвиля, яка викликає деформування, де ще кулі нема. Тобто вода на удар реагує як тверде тіло, практично миттю передаючи деформацію на всю трубу. Тому для зменшення деформації доцільно збільшувати всі геометричні розміри кулеуловлювача, включаючи його довжину.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: циліндричний водяний кулеуловлювач, швидкість ударної хвилі, макет, деформації, експеримент, реєстратор LMS SCADAS Mobile

1. Максимюк В.А., Ушакова В.С., Ушаков О.В. Про верхню оцінку напруженій і деформацій у водяному кулеуловлювачі // Тези доповідей 10-ї Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», 2024 р., м. Кам'янець-Подільський. – Кам'янець-Подільський: КПНУ, 2024. – С. 75 – 77.
2. Tijsseling A.S., Anderson A. A. Isebree Moens and D.J. Korteweg: on the speed of propagation of waves in elastic tubes. – Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2012. – 19 p. (CASA-report; Vol. 1242).

V.A. Maksymyuk¹, V.S. Ushakova¹, O.V. Ushakov²

ON THE VELOCITY OF PROPAGATION OF A SHOCK WAVE IN A CYLINDRICAL VERTICAL WATER BULLET TRAP

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: desk@inmech.kyiv.ua

² The Ukrainian scientific and research Institute of special equipment and forensic expertise,
Mykoly Vasylchenko Str., 3, 03113, Kyiv, Ukraine

A simplified experimental model of a vertical water bullet trap was made. Experimentally, the speed of propagation of the shock wave in the bullet trap was indirectly measured based on the dynamic deformations of the outer surface of the tube. The speed was lower than calculated by Korteweg's formula. Apparently the reason for the differences is the finite length and the open top of the tube.

Н. В. Сметанкіна

**МОДЕЛЮВАННЯ ДЕФОРМУВАННЯ БАГАТОШАРОВОГО СКЛІННЯ
ЛІТАКІВ ПРИ ІНТЕНСИВНИХ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

*Інститут енергетичних машин і систем ім. А. М. Підгорного НАН України,
бул. Комунальників, 2/10, 61046, Харків, Україна;
e-mail: nsmet@ipmach.kharkov.ua*

Для дослідження міцності багатошарових конструкцій при статичних навантаженнях розроблено достатньо підходів [2, 7]. Теоретичний аналіз напружено-деформованого стану багатошарового скління при ударних навантаженнях є складною задачею, яка пов'язана з математичним складнощами описання процесу пробивання, оцінюванням частини енергії, що вивільнюється при розтріскуванні, та іншими факторами [1].

Багатошарове скло відноситься до безпечного скла та широко використовується в авіабудуванні, транспортному машинобудуванні, завдяки своїм унікальним властивостям [6]. У більшості випадків проектування багатошарових елементів скління літаків здійснюється на основі експериментальних даних шляхом емпіричного підбору пакету шарів. Теоретичне обґрунтування конструкторських рішень практично відсутнє. Оскільки скло часто виконує захисні функції, тому піддається інтенсивним динамічним навантаженням. Тому розрахунок та проектування елементів скління, що відповідають зазначеним вище вимогам безпеки, є актуальною проблемою. Скло повинно задовольняти вимоги щодо ударної міцності та надійності за умови збереження своїх експлуатаційних характеристик. При цьому теоретичне обґрунтування конструкторських рішень практично відсутнє. Це пояснюється складністю розв'язання задач нестационарної динаміки композитних конструкцій при швидкоплинних навантаженнях [5, 9].

Основними методами дослідження динамічного відгуку багатошарових конструкцій є чисельні методи, які пов'язані з дискретизацією розглядуваної системи, наприклад, метод скінченних елементів [3, 5]. Саме тому важливою задачею є розробка методів, які дозволяють подати розв'язок в аналітичному вигляді з урахуванням особливостей нестационарного деформування багатошарових конструкцій, який дозволяє подати розв'язок задачі в аналітичному вигляді.

Метою роботи є розробка методу розрахунку параметрів напружено-деформованого стану елементів багатошарового авіаційного скління зі складною формою при впливі ударного навантаження, який дозволяє подати розв'язок задачі в аналітичному вигляді.

Елемент скління розглядається як багатошарова незамкнена циліндрична оболонка з ізотропних шарів сталої товщини зі складною формою у плані. Ударне навантаження здійснюється за допомогою індентора з напівсферичною кінцевою частиною, який скидається на зовнішню поверхню першого шару пластини. Динамічна поведінка скління описується на основі уточненої теорії багатошарових конструкцій [8]. Рівняння руху скління під впливом ударного навантаження отримано з варіаційного принципу, доповнено рівнянням руху індентора та умовою сумісності переміщення індентора і скління. Система рівнянь руху інтегрується методом розвинення розв'язку в ряд Тейлора.

Метод розв'язання задачі базується на методі занурення заданої складної області в область каноничної форми [4, 6]. Вихідна оболонка занурюється у допоміжну оболонку, форма і граничні умови якої обираються таким чином, щоб розв'язок задачі можна було одержати у аналітичній формі. Щоб забезпечити виконання вихідних

граничних умов, до допоміжної оболонки додаються додаткові компенсуючі навантаження. З умови задоволення вихідних граничних умов формується система інтегральних рівнянь для визначення компенсуючих навантажень. Розв'язок задачі одержуємо у вигляді розвинення у подвійні тригонометричні ряди по функціях, що задовільняють граничні умови допоміжної оболонки.

Досліджено коливання багатошарових елементів скління при ударі сталевим індентором. Порівняння чисельних результатів з експериментальними даними показало їх добру узгодженість.

Запропонована методика може бути корисна при оцінці міцності багатошарового скління літальних апаратів та спеціальної військової техніки при ударних навантаженнях.

Результати цієї роботи отримано у рамках виконання НДР за Цільовою науково-технічною програмою оборонних досліджень НАН України на 2020–2024 рр., код програмної класифікації видатків (КПКВК) 6541230 (прикладні дослідження).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: багатошарове скління, напружено-деформований стан, ударостійкість.

1. Hontarovskyi P.P., Smetankina N.V., Ugrimov S.V., Garmash N.H., Melezhyk I.I. Computational studies of the thermal stress state of multilayer glazing with electric heating // Journal of Mechanical Engineering – Problemy mashynobuduvannia. – 2022. – **25**, N 2. – P. 14–21.
2. Hontarovskyi P.P., Smetankina N.V., Ugrimov S.V., Garmash N.H., Melezhyk I.I. Numerical investigations of the crack resistance of ion-strengthened sheet glass under bending strains // Journal of Mechanical Engineering – Problemy mashynobuduvannia. – 2021. – **24**, N 3. – P. 27 – 34.
3. Jones N. Structural impact. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 320 p.
4. Smetankina N.V. Non-stationary Deformation, Thermal Elasticity and Optimisation of Laminated Plates and Cylindrical Shells. – Kharkiv: Miskdruk Publishers, 2011. – 376 p.
5. Smetankina N., Malykhina A., Merkulov D. Simulating of bird strike on aircraft laminated glazing. – MATEC Web of Conferences. – 2019. – **304**. – P. 01010–01016.
6. Smetankina, N., Misiura, S., Misiura, I., Sychova, T., Sychov, A. Simulation of thermal stresses in multiplayer plates of non-canonical shape // Advances in Design, Simulation and Manufacturing VII. DSMIE 2024. Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Springer: Cham, 2024. – P. 215–226.
7. Smetankina N., Postnyi O. Nonstationary heat conduction in multilayer glazing subjected to distributed heat sources // Informatyka, Automatyka, Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska. – 2020. – **10**, N 2 – P. 28–31.
8. Smetankina N., Semenets O., Merkulova A., Merkulov D., Misura S. Two-stage optimization of laminated composite elements with minimal mass // Smart Technologies in Urban Engineering. STUE-2022. Lecture Notes in Networks and Systems. – 2023. – **536**. – P. 456–465.
9. Ugrimov S., Smetankina N., Kobylnik V. Modeling the response of multilayer glazing to distributed and localized force loading // Nonlinear Mechanics of Complex Structures. Advanced Structured Materials. – 2021. – **157**. – P. 103–123.

N.V. Smetankina

MODELING OF DEFORMATION OF MULTILAYER AIRCRAFT GLAZING AT INTENSIVE IMPACT LOADINGS

Anatolii Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Komunalnykiv Str., 2/10, 61046, Kyiv, Ukraine;
e-mail: nsmet@ipmach.kharkov.ua

A method for calculating the parameters of the stress-strain state of elements of multilayer aircraft glazing with a complex shape under the impact load is developed. The method allows to present the solution of the problem in an analytical form. The impact load is applied by means of an indenter with a hemispherical end part. The dynamic behavior of the glazing is described on the basis of the refined theory of multilayer structures.

**О.М. Хіміч¹, О.В. Попов¹, О.В. Чистяков¹, Т.В. Чистякова¹, В.А. Сидорук¹,
П.С Єршов¹**

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНА СИСТЕМА ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕлювання В НАУЦІ ТА ІНЖЕНЕРІЇ

*¹Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова НАНУ,
проспект Академіка Глушкова, 40, 03056, Київ, Україна;
e-mail: incyb@incyb.kiev.ua*

Високопродуктивні обчислення і суперком'ютерні технології на основі паралельних обчислень на даний час є одним з основних інструментів (а інколи і єдиним) математичного моделювання в наукових і інженерних дослідженнях.

Разом із зростанням можливостей паралельних комп'ютерів зростають і проблеми їх створення та експлуатації, реалізації високопродуктивних обчислень. Вже зараз є суттєві відмінності за рахунок комунікаційних втрат між максимальною та експлуатаційною продуктивностями [6].

Основні проривні досягнення в цих напрямах: нові моделі обчислень (розподілені, паралельні, гібридні, квантові обчислення), блочно-циклічні методи розподілу та обробки інформації на розподілених обчислювальних системах, які дозволили позбутися обмеження на ефективність внаслідок ефекту Гайдна; методи структурної регуляризації для ущільнення великих розріджених даних, кеш-когерентні методи обробки даних (кешизація обчислень), динамічна адаптивна реконфігурація архітектури в процесі обчислень [1–4].

Наразі проводяться дослідження щодо майбутнього ефективного використання екзафlopсних комп'ютерів. Міжнародним комітетом IESP – International Exascale Software Project під керівництвом Дж.Донгарри розроблено «дорожню карту» екзафlopсних обчислень. Отже, існує нагальна потреба створення обчислювальних інтегрованих алгоритмічно-програмних систем з тривалим життєвим циклом, що легко адаптуються до еволюції комп'ютерних платформ та взаємодіють із зовнішніми розробками, а також звільняють користувачів від звичайних проблем розпаралелення шляхом надання дружніх інтелектуальних інтерфейсів.

Ключовою проблемою математичного моделювання процесів, систем та об'єктів незалежно від їх природи (механічних, фізичних, екологічних, економічних, медичних, соціальних тощо) є проблема достовірності отримуваних комп'ютерних результатів. Відомо, що у деяких випадках при вирішенні наукових та інженерних завдань на комп'ютерах користувачі отримують машинні результати, що не мають фізичного вмісту. Це відбувається з багатьох причин, але насамперед через похибку у вихідних даних, відмінності властивостей математичних задач та їх машинних аналогів, відмінності між звичайною та машинною арифметиками тощо. Практично всі інженерні та наукові задачі мають наближені вихідні дані.

Проблема достовірності комп'ютерних результатів залишається й надалі однією з практично важливих. Характерною особливістю математичних моделей з наближеними даними є те, що їх математичні властивості апріорі невідомі і в межах похибок даних можуть змінюватись. Більше того, у фіксованому комп'ютерному середовищі неможливо відрізнити вироджену матрицю від погано обумовленої, патологічно близькі власні значення від кратних тощо. Істотна роль покладається на математичні методи оцінювання спадкової, обчислювальної та повної похибок

комп'ютерних результатів, програмний та технічний інструментарій багаторозрядної арифметики та арифметики змішаної розрядності [2–5].

Іншою, не менш важливою проблемою практичної реалізації високопродуктивних обчислень є створення програмного забезпечення рівня кінцевого користувача – інтелектуальних програмних засобів, що забезпечують спілкування з комп'ютером мовою предметної області та автоматичну адаптацію методу, комп'ютерного алгоритму, програми та топології комп'ютера до властивостей комп'ютерної задачі у процесі отримання розв'язків. Програмний інструментарій для цього – знанняорієнтовані технології, що базуються на методах гібридного штучного інтелекту з використанням формальних методів та методів машинного навчання [1, 5].

Вирішення перерахованих проблем для основних класів задач обчислювальної математики (систем лінійних алгебраїчних рівнянь, алгебраїчної проблеми власних значень, систем звичайних диференціальних рівнянь, нелінійних рівнянь) в Інституті кібернетики розглядається в рамках розроблення інтелектуальної системи комп'ютерної математики (ІСКМ) для математичного моделювання в науці і інженерії в основі якої лежить тріада: високопродуктивні обчислення, комп'ютерна математика, штучний інтелект [1–4].

Реалізація такого підходу дозволяє, автоматизувати процес дослідження та розв'язання задач, забезпечити достовірність комп'ютерних розв'язків та істотно скоротити час математичного моделювання. Далі зупинимось на реалізації цього підходу при математичному моделюванні об'єктів, процесів та явищ різної природи, в тому числі механічної.

Протягом багатьох років ведуться дослідження щодо створення ефективних концепцій, архітектур, технологій та готових комп'ютерних систем для ефективного математичного моделювання в різних предметних областях. Є різні пропозиції щодо вирішення вказаних проблем. Пропонується створювати відкрите прикладне програмне забезпечення, орієнтоване на розв'язування одного класу задач. На сьогодні такими є, наприклад, проблемно-орієнтовані прикладні програмні комплекси (ПК) ANSYS та NASTRAN. Крім того створено вузькоспеціалізовані ПК, наприклад, ПК ЛІРА для комп'ютерних досліджень міцності будівельних конструкцій і споруд. Також для розв'язування розрахункових задач математичного моделювання створено інтегровані програмні засоби, відкриті до використання у прикладних додатах. Проте для ефективного використання цих високопродуктивних програмних засобів на нових комп'ютерних архітектурах розробникам доводиться створювати все нові їх версії. Залишається відкритими проблемами наближених даних, достовірності отримуваних результатів.

В Інституті кібернетики імені В.М. Глушкова на протязі багатьох років для математичного моделювання на багатоядерних MIMD-комп'ютерах з графічними прискорювачами реалізується підхід, який інтегрує в собі готове software для побудови розрахункових моделей прикладних задач (для прикладу міцності будівельних конструкцій та споруд, стійкості композитних матеріалів, життєвого циклу зварювальних конструкцій тощо) та програмно-алгоритмічне забезпечення інтелектуальної системи комп'ютерної математики (ІСКМ) [12] для базових задач обчислювальної математики, що реалізує автоматичне адаптивне налаштування методу, комп'ютерного алгоритму, змінного комп'ютерного середовища та топології паралельного комп'ютера на властивості комп'ютерної задачі, що задані априорі або виявлені в процесі обчислень та отримання комп'ютерних результатів з оцінками достовірності [5]. У разі отримання недостовірних результатів пропонується уточнити математичну модель, підвищити розрядність тощо. На рис. 1 представлена архітектуру пропонованої інтелектуальної системи для математичного моделювання в науці та інженерії.

Така інтелектуальна система та окремі її алгоритмічно-програмні засоби вже використовуються у практичних застосуваннях: для математичного моделювання міцності будівельних конструкцій (ПК "Ліра-Cluster"), напружено-деформованого

стану відповідальних зварних конструкцій (ПК "WeldPredictionNET") та інші. Результати проведених експериментальних досліджень свідчать про перспективність використання пропонованої інтелектуальної системи для математичного моделювання в інших галузях науки та інженерії. Система є відкритою, тобто передбачена можливість доповнення складу засобів побудови математичних моделей та обробки результатів для інших задач та нових алгоритмічно-програмних засобів для розв'язування обчислювальних задач. Також передбачена адаптація до змін комп'ютерних платформ. Гнучка конфігурація системи та новітнє адаптивне алгоритмічно-програмне забезпечення сприяють її тривалому життєвому циклу.

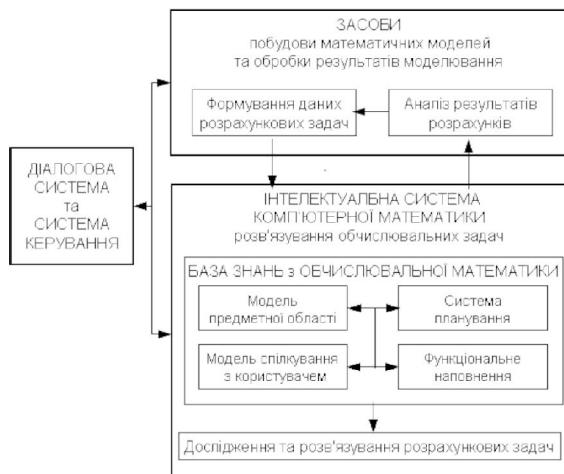


Рис.1.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: математичне моделювання, високопродуктивні обчислення, інтелектуальна система комп'ютерної математики, штучний інтелект, достовірність результатів.

1. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Мова В.И. и др. Численное программное обеспечение MIMD-компьютера Инпарком. Киев: Наук. думка, 2007. 221с.
2. Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В., Яковлев М.Ф. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. Киев: Наук. думка, 2008. – 248 с.
3. Хіміч О.М., Попов О.В., Чистяков В.А., Коханівський В.О. Математичне забезпечення для розв'язування задач на власні значення в змінному комп'ютерному середовищі суперкомп'ютерів. Кібернетика і системний аналіз, 2023, V. 62, N 3.
4. Khimich O.M., Chistyakova T.V., Sidoruk V.A., Ershov P.S. Adaptive computer technologies for solving problems of computational and applied mathematics. Cybernetics and Systems Analysis, 2021, V. 57, N 6. P. 990–997.
5. Nikolaevskaya E., Khimich A., Chistyakova T. Programming with Multiple Precision. Studies in Computational Intelligence. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, 2012.
6. www.top500.org

**O.M. Khimich¹, O.V. Popov¹, O.V. Chistyakov¹, T.V. Chistyakova¹, .A. Sydoruk¹,
P.S. Yershov¹**

INTELLIGENT SYSTEM FOR MATHEMATICAL MODELING IN SCIENCE AND ENGINEERING

¹*V.M. Glushkov Institute of cybernetics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Akademika Glushkova Ave, 40, 03056, Kyiv, Ukraine;*

An intelligent computer system for solving applied problems is proposed that implements automatic adaptive adjustment of the method, computational algorithm, variable computing environment and topology of a parallel computer for the properties of a computational problem, specified a priori or revealed in the process of calculations and obtaining computational results with reliability estimates.

M.V. Filipov, N.A. Ivantyshyn

TORSIONAL STRENGTH OF A TRANSVERSALLY ISOTROPIC CYLINDER CONTAINING A SYSTEM OF HEALED CRACKS

Karpenko Phisico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine
5, Naukova Str., Lviv, 79060 Ukraine
e-mail: maksym.filipov@gmail.com, n.ivantyshyn@gmail.com

Technologies for injecting defective zones in long-term structures as a method of restoring their bearing capacity are widely used in practice [1, 2]. To optimize such technologies and predict the service life of the restored elements of structures, calculation models and methods for assessing their performance are needed.

Below, we propose a mathematical model for calculating the effect of injection strengthening of a transversally isotropic circular cylinder containing a system of parallel cracks on the isotropy axis under torsional load.

Problem statement. Consider a body in the form of a circular cylinder of radius R containing a system of N parallel circular cracks with radii a_i , $i=1,\dots,N$, on the axis of rotation. The material of the cylinder is assumed to be transversally isotropic, with the isotropy axis parallel to the cylinder's face. We place the cylindrical coordinate system (ρ, φ, z) so that the O_z axis coincides with the isotropy axis of the elastic properties of the body. As a result of the injection hardening technology, the cracks are filled with a liquid material that can form strong adhesive bonds after hardening. Let the cylinder be subjected to a torsional loads with moment M applied to the ends. We will solve this problem assuming that the crack sizes are small compared to the diameter of the cylinder, i.e., $R \gg a_i$.

Based on the principle of superposition in the linear theory of elasticity, we will divide the problem into two: torsion by a moment M of a cylinder without cracks and a cylinder with cracks, to the surfaces of which forces are applied

$$\sigma_{z\theta}(r, z_i) = -\frac{2Mr}{\pi R^4} + \frac{[u_{\theta i}^*(r)]G}{2h_i(r)}, \quad (1)$$

$$\sigma_{zx}(r, z_i) = \sigma_{xz}(r, z_i) = 0, \quad 0 \leq r \leq a_i, \quad i=1,\dots,N.$$

Here, thin layers formed as a result of the hardening of the injected material in the cracks, modeled according to the Winkler shear model [2]; G is the shear modulus of the injected material after hardening; $u_{\theta i}^*$ is the displacement of the points of the layer surface, which is taken as the sum of $u_{\theta i}^* = u_{\theta i} + u_{\theta i}^0$; $u_{\theta i}$ is the displacement of the surfaces of the i -th mathematical section under the action of the forces specified by the boundary conditions (1); $u_{\theta i}^0(z) = 2Mrh(r)/A_{44}\pi R^4$; $2h_i(r)$ is the thickness of the i -th layer; $[u_{\theta i}^*(r)]$ means the jump of the function $u_{\theta i}^*(r)$; z_i is the coordinates of the center of the i -th crack along the Oz axis.

The solution to the first problem is trivial and not related to the crack. To solve the second problem, based on the principle of superposition, we represent the stress state in the body as a sum.

$$\sigma = \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (2)$$

Here σ_i is the stress tensor in a cylinder with one i -th crack. The boundary conditions for such cylinders with cracks are as follows:

$$\sigma_{z\theta i}(r, z_i) = -\frac{2Mr}{\pi R^4} + \frac{\left[u_{\theta i}^*(r)\right]G}{2h_i(r)} - \sum_{j=1(i)}^N \sigma_{z\theta j}(r, z_j) \quad i=1, \dots, N \quad (3)$$

Using the general solution of equilibrium equations, expressed in terms of harmonic functions, a system of integral equations is obtained:

$$\begin{aligned} \psi_i(t) = & \frac{2}{\pi} \frac{2M(1-\varepsilon)(a_i^2/3-t^2)}{\pi R^4 \sqrt{\mu\tilde{\mu}}} + \frac{2\varepsilon}{\pi} \left(-\int_0^t \frac{dr}{\sqrt{t^2-r^2}} \int_r^{a_i} \frac{\psi_i(x)x}{\sqrt{x^2-r^2}} dx + \right. \\ & \left. + \frac{1}{a_i} \int_0^{a_i} \frac{rdr}{\sqrt{a_i^2-r^2}} \int_0^r \frac{dr}{h_i(r)r} \int_0^{a_i} \frac{x\psi_i(x)dx}{\sqrt{x^2-r^2}} \right) - \\ & - \frac{2}{\pi\sqrt{n_3}} \sum_{j=1(i)}^N \int_0^{a_j} \psi_j(x) \left(\frac{(z_i-z_j)n_3^{-1/2}((z_i-z_j)^2 n_3^{-1} + t^2 + x^2)}{((z_i-z_j)^2 n_3^{-1} + (t-x)^2(z_i-z_j)^2 n_3^{-1} + (t+x)^2)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2a_i} \left(arctg \frac{(a_i-x)\sqrt{n_3}}{z_i-z_j} + arctg \frac{(a_i+x)\sqrt{n_3}}{z_i-z_j} \right) \right) dx, \quad i=1, \dots, N. \end{aligned} \quad (4)$$

If a solution to the system of integral equations (4) is obtained by one of the methods, then the asymptotic expression for the stresses in the vicinity of the crack at $r \rightarrow a_i$ is as follows:

$$\sigma_{z\theta i} = -\frac{A_{44}\psi_i(a_i)a_i}{r\sqrt{r^2-a_i^2}} + O(1) \quad (5)$$

The stress intensity coefficients calculated by the formula $K_{IIIi} = \lim_{r \rightarrow a_i} \sqrt{2\pi(r-a_i)} \sigma_{z\theta i}(r)$ are determined from the expression

$$K_{IIIi} = -\sqrt{\frac{\mu\tilde{\mu}}{\pi a_i}} \frac{2M\chi_i(a_i)}{R^4}, \quad \chi_i(a_i) = \frac{\pi R^4 \psi_i(a_i)}{2M} \quad (6)$$

The limit torsional load M_* of the cylinder with healed cracks is set on the basis of the force criterion, according to which fracture will begin in the vicinity of the crack with the highest stress intensity factor, provided that $\max(K_{IIIi}) = K_{IIIc}$.

Given the relationship (6), a cylinder with N healed cracks will be able to withstand a maximum torsion with a moment equal to

$$M_* = -\frac{K_{IIIc}\sqrt{\pi a_i R^4}}{2\sqrt{\mu\tilde{\mu}}\chi_i(a_i)}, \quad (7)$$

where the index “ i ” corresponds to the crack with the maximum stress intensity factor.

In the case of a single crack in a cylinder, the system of integral equations is reduced to a single equation, which, when $h(r) = c/a \sqrt{a^2 - r^2}$, has an exact solution

$$\psi(t) = -\frac{12M(1-\varepsilon)(t^2 - a^2/3)}{\pi R^4 \sqrt{\mu \tilde{\mu}} (3\pi + 4\varepsilon a/c)}. \quad (8)$$

The stress intensity factor in this case

$$K_{III} = \frac{8M(1-\varepsilon)a^{3/2}}{\sqrt{\pi}R^4(3\pi + 4\varepsilon a/c)}, \quad (9)$$

and, accordingly, the limiting value of the moment

$$M_* = \frac{\sqrt{\pi} K_{III} R^4 (3\pi + 4\varepsilon a/c)}{8(1-\varepsilon)a^{3/2}}. \quad (10)$$

The tangential stresses that arise at the interface, and according to the model considered, in the injected material, are as follows:

$$\sigma_{r\theta}(r) = \frac{2Mr\mu_*}{\pi R^4 \sqrt{\tilde{\mu}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}}} + \frac{4(1-\varepsilon)\beta}{\sqrt{\mu}(3\pi + 4\beta\varepsilon)} \right). \quad (11)$$

Under the intensity of external loads

$$M \geq M_*^i = \frac{\pi \tau_B R^4 \sqrt{\tilde{\mu}}}{2\mu_* a} \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}}} + \frac{4(1-\varepsilon)\beta}{\sqrt{\mu}(3\pi + 4\beta\varepsilon)} \right)^{-1} \quad (12)$$

failure of the injection material from the crack contour is possible. Here τ_B is the shear strength of the injected material. In practice, it is important to choose an injection material with a strength that would ensure that the condition $M_*^i \geq M_*$ is met, i.e., that it does not collapse before the main material. From the relations (9), (11), we obtain the required shear strength of the injected material:

$$\tau_B \geq \frac{K_{III} (3\pi + 4\beta\varepsilon) \mu_*}{4\sqrt{a} (1-\varepsilon) \sqrt{\pi \tilde{\mu}}} \left(\frac{1}{\sqrt{\tilde{\mu}}} + \frac{4(1-\varepsilon)\beta}{\sqrt{\mu}(3\pi + 4\beta\varepsilon)} \right). \quad (13)$$

KEY WORDS: transversally isotropic body, crack, crack healing, strength.

1. Czarnecki L., Emmons P. H. Naprava i ochrona konstrukcji betonowych. - Krakow: Polski Cement, 2002. – 434 s.

2. Panasyuk V. V., Marukha V. I., and Sylovanyuk V. P. Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures. – Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. – 230 p.
<https://doi.org/10.1007/978-94-007-7908-2>

The strength of a transversally isotropic cylinder with a system of healed torsional cracks is investigated in this paper. A mathematical model has been developed to evaluate the effect of cylinder strengthening using injection technologies for healing defects. The model of thin elastic inclusions and the theory of harmonic functions are applied, which allowed to reduce the problem to solving a system of integral equations. The parameters that affect the efficiency of crack healing are identified.

Дослідження проведено в рамках виконання гранту Національного фонду досліджень України № 2023.04/0132

А.Б. Чорненький, М.П. Саврук, В.С. Кравець

**КОЕФІЦІЕНТИ КОНЦЕНТРАЦІЇ ТА ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ У
ВЕРШИНАХ ОТВОРИВ У ОРТОТРОПНІЙ ПЛАСТИНІ**

*Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАНУ,
бул. Наукова, 5, 79060, Львів, Україна;
e-mail: A.B.Chornenkyi@gmail.com*

Методом сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) досліджено розподіл напружень біля гострих та закруглених вершин отворів в ортотропних пластинах за їх одновісного розтягу на нескінченості. Для знаходження коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) у гострих кутових вершинах контурів отворів використано асимптотичний підхід, коли КІН знаходять на основі коефіцієнтів концентрації напружень (ККН) у відповідних закруглених вершинах [2].

Інтегральне рівняння для ортотропної пластини з криволінійним отвором. Вважатимемо, що на замкненому гладкому контурі криволінійного отвору L задано самозрівноважені нормальні та дотичні напруження

$$N + iT = p(t), \quad t \in L.$$

Комплексні потенціали напружень візьмемо у вигляді

$$\Phi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{\phi'_1(\tau_1)}{\tau_1 - z_1} d\tau_1, \quad \Phi_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{\phi'_2(\tau_2)}{\tau_2 - z_2} d\tau_2,$$

де $z_k = x + \mu_k y$; $\mu_k = \alpha_k + i\gamma_k$, $\bar{\mu}_k = \alpha_k - i\gamma_k$ ($\gamma_k > 0$, $k = 1, 2$) – дві пари комплексно спряжених коренів характеристичного рівняння [2]. Для ортотропного матеріалу

$$\mu_{1,2} = i\gamma_{1,2} = \frac{i}{2} \left[\left(\frac{E_x}{G} - 2v_{xy} + 2\sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \right)^{1/2} \pm \left(\frac{E_x}{G} - 2v_{xy} - 2\sqrt{\frac{E_x}{E_y}} \right)^{1/2} \right]$$

Задачу зведено до розв'язування СІР

$$\frac{1}{\pi} \int_{L_1} [K_1(\tau_1, t_1)\phi'_1(\tau_1)d\tau_1 + L_1(\tau_1, t_1)\overline{\phi'_1(\tau_1)}d\bar{\tau}_1] = P_1(t_1), \quad t_1 \in L_1, \quad (1)$$

ядра $K_1(\tau_1, t_1)$, $L_1(\tau_1, t_1)$ і права частина $P_1(t_1)$ якого мають вигляд [3]

$$K_1(\tau_1, t_1) = \frac{i(\gamma_1 - \gamma_2)}{2} \left(\frac{1}{\tau_1 - t_1} \frac{dt_1}{dt} + \frac{1}{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2} \frac{d\bar{t}_2}{dt} \right),$$

$$L_1(\tau_1, t_1) = \frac{i(\gamma_1 + \gamma_2)}{2} \left(\frac{1}{\bar{\tau}_1 - \bar{t}_1} \frac{d\bar{t}_1}{dt} - \frac{1}{\bar{\tau}_2 - \bar{t}_2} \frac{d\bar{t}_2}{dt} \right),$$

$$P_1(t_1) = \frac{1}{2} \left[(1 + \gamma_2)p(t) - (1 - \gamma_2)\overline{p(t)} \frac{d\bar{t}}{dt} \right].$$

Інтегральне рівняння (1) має єдиний розв'язок лише за додаткових умов

$$\int_{L_1} P_1(t_1) dt_1 = 0, \quad \int_{L_1} \bar{t}_2 P_1(t_1) dt_1 = 0, \quad (2)$$

які відповідають умовам рівноваги [3] – рівності нулю головного вектору і головного моменту зовнішнього навантаження.

Модифікуємо інтегральне рівняння (1) таким чином, щоб отримати рівняння, яке б мало єдиний розв'язок для довільної правої частини. Скористаємося підходом, який раніше використовували в аналогічних задачах для ізотропного тіла. Додамо до лівої частини СІР (1) певні функціонали, які забезпечують єдиність розв'язку, але рівні нулю за виконання умов (2). Таке модифіковане рівняння має вигляд [2, 3]

$$\int_{L_1} [K_1(\tau_1, t_1) \phi'_1(\tau_1) d\tau_1 + L_1(\tau_1, t_1) \overline{\phi'_1(\tau_1)} d\bar{\tau}_1] - \frac{1}{2i} \frac{M}{(\bar{t}_1 - \bar{z}_1^0)^2} + \frac{a_1^0}{l} \frac{ds_1}{dt_1} = P_1(t_1), \quad t_1 \in L_1, \quad (3)$$

де z_1^0 – довільна точка в області S_1^+ у площині $z_1 = x + i\gamma_1 y$, що відповідає області S^+ , яку займає отвір у площині z ; l – параметр розмірності довжини; s_1 – дугова абсциса на контурі L_1 , що відповідає точці t_1 ;

$$a_1^0 = \int_{L_1} \phi'_1(t_1) dt_1; \quad M = i \int_{L_1} [\bar{t}_2 \phi'(t_1) dt_1 - t_2 \overline{\phi'_1(t_1)} d\bar{t}_1].$$

Аналіз результатів. Числове розв'язування СІР (3) проведено методом механічних квадратур [2]. Обчислено ККН $k_A \varepsilon^{\lambda_1}$ (рис. 1) у закруглених вершинах квадратного отвору ($\varepsilon = \rho / l$) в ортотропних (M_1 – червоний дуб ($\gamma_1 = 3.2033$; $\gamma_2 = 1.0902$), M_2 – graphite/epoxy ($\gamma_1 = 4.8240$; $\gamma_2 = 0.7642$), M_3 – S-glass/epoxy ($\gamma_1 = 2.8355$; $\gamma_2 = 0.6623$) [2]) та квазіортотропних пластинах [1] з таким самим відношенням модулів пружності E_x / E_y – для матеріалів $\tilde{M}_1 (\gamma \equiv \sqrt[4]{E_x/E_y} = 1.8687)$, $\tilde{M}_2 (\gamma = 1.9173)$, $\tilde{M}_3 (\gamma = 1.3698)$ за одновісного розтягу $\sigma_y^\infty = p$.

Для визначення узагальнених КІН $\tilde{K}_1^V = \lim_{\rho \rightarrow 0} [(2\pi\rho)^{\lambda_1} \sigma_s^*(0)] / R_1$, у вершині

гострого кутового вирізу (для I типу деформування) необхідно знати як коефіцієнт впливу закруглення вирізу R_1 [2], так і показник особливості напружень у гострих вершинах λ_1 . Для ортотропних та відповідних квазіортотропних тіл ці параметри відрізняються між собою. Для квазіортотропного матеріалу показник особливості напружень визначається за формулою [2]

$$\lambda_1 = 1,247 \cos \beta_1(\alpha) - 1,312 \cos^2 \beta_1(\alpha) + 0,8532 \cos^3 \beta_1(\alpha) - 0,2882 \cos^4 \beta_1(\alpha),$$

де $\beta_1(\alpha) = \pi + \operatorname{arctg}(\gamma_1 \tan \alpha)$, $\alpha = \pi - \beta$, а для ортотропного матеріалу його знаходять із характеристичного рівняння

$$(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \operatorname{tg} \alpha - \gamma_2 (1 + \gamma_1^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}[(2 - \lambda_1) \beta_1(\alpha)] + \\ + \gamma_1 (1 + \gamma_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}[(2 - \lambda_1) \beta_1(\alpha)] = 0.$$

Обчислено відносні КІН $\tilde{F}_1^V = \tilde{K}_1^V / (p(\pi l)^{\lambda_1})$ у вершині A від кута розхилу 2β ромбічного отвору у ортотропній (рис. 2, сущільна крива – M_1) та квазіортотропній (штрихова – \tilde{M}_1) пластинах з одинаковими співвідношеннями модулів пружності. Ортотропний матеріал вважають близьким до квазіортотропного, якщо виконується умова: $\tilde{\rho} \equiv (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) / 2\gamma_1\gamma_2 \approx 1$ [2]. Для досліджуваного матеріалу – $\tilde{\rho} = 1.63$.

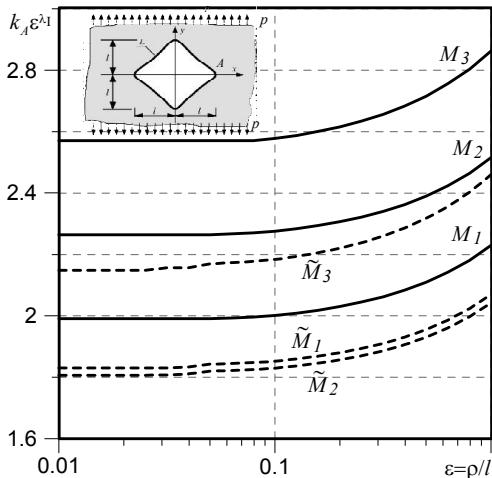


Рис. 1.

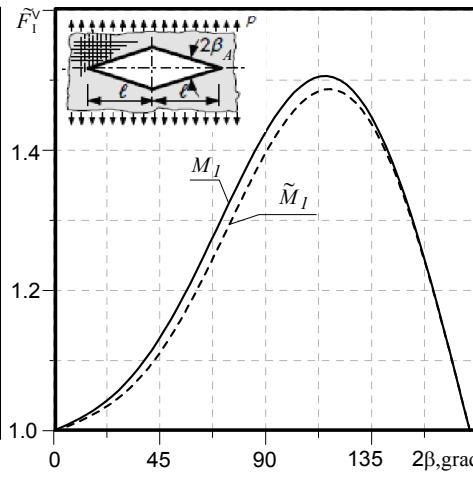


Рис. 2.

Висновки. Числові розв'язки задачі отримано за одновісного розтягу на нескінченості ортотропних пластин з криволінійними отворами різних форм на прикладах трьох конкретних ортотропних матеріалів. Обчислено ККН та КІН для ромбічного отвору із закругленими та гострими вершинами у ортотропній та квазіортотропній пластинах за різних значень кута розхилу сторін ромба. ККН для ортотропної пластини суттєво більші за відповідні ККН для квазіортотропних пластин для всіх вибраних матеріалів та значень параметра $\varepsilon = \rho/l \in [0.01; 1]$. КІН для ортотропних пластин (у всьому діапазоні кутів 2β) також більші за відповідні для квазіортотропних, однак їх відносні різниці не перевищують 10% для матеріалів M_1 і \tilde{M}_1 (червоний дуб).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ортотропна пластина, отвори, концентрація напружень, коефіцієнти інтенсивності напружень, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

1. Hasebe N., Sato M. Stress analysis of quasi-orthotropic elastic plane // Int. J. Solids Struct. – 2013. – **50**. – P. 209–216.
2. Savruk M. P. and Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-44555-7>
3. Savruk, M.P., Kazberuk, A., Kravets, V.S., Chornenkyi, A.B. Stress State of an Orthotropic Plate at the Holes with Sharp and Rounded Tips // Materials Science. – 2023. – **58**, №6. – P. 709–716. <https://doi.org/10.1007/s11003-023-00720-3>

A.B. Chornenkyi, M.P. Savruk, V.S. Kravets

STRESS CONCENTRATION AND INTENSITY FACTORS AT THE TIPS OF HOLES IN ORTHOTROPIC PLATE

Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Naukova str, 5, 79060, Lviv, Ukraine
e-mail: A.B.Chornenkyi@gmail.com

Using the method of singular integral equations, the solutions of the plane problems about stress concentration near curvilinear holes in an orthotropic plate with a smooth and piece-smooth contour are constructed. Numerical results for orthotropic plates with holes of various shapes under uniaxially symmetric loading at infinity are obtained. The stress concentration and intensity factors for an orthotropic plate with a square and rhombic hole with rounded and sharp tips are calculated.

В.С. Кравець

НАПРУЖЕНИЙ СТАН АНІЗОТРОПНОГО ТІЛА З КРИВОЛІНІЙНИМ ОРТОТРОПНИМ ВКЛЮЧЕННЯ ЗА АНТИПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ

*Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України,
бул. Наукова, 5, 79060, Львів, Україна;
e-mail: volodym1960@gmail.com*

Досліджено напруженій стан нескінченного анізотропного тіла з гладким криволінійним ортотропним включеннем за антиплоскої деформації. Двовимірну задачу теорії пружності для кусково-однорідного анізотропного тіла зведено до комплексного сингулярного інтегрального рівняння (СІР) другого роду, числовий розв'язок якого отримано методом квадратур. Визначено вплив форми та розташування ортотропного включення на напруженій стан кусково-однорідного анізотропного тіла для низки значень пружних сталіх ортотропних матеріалів матриці та включения.

Розглянемо двовимірну задачу теорії пружності за антиплоскої деформації кусково-однорідного анізотропного тіла – нескінченною анізотропною матриці S_0 з криволінійним у площині (x,y) та тунельним вздовж осі деформації Oz анізотропним включеннем S_1 . Анізотропні матеріали за поздовжнього зсуву характеризують параметри

$a_j = \sqrt{a_{44}^j a_{55}^j - a_{45}^j a_{45}^j} > 0$, $\gamma_3^j = a_j / a_{55}^j$, де $\{a_{55}^j, -a_{45}^j, a_{44}^j\} = a_j^2 \{A_{44}^j, A_{45}^j, A_{55}^j\}$ – пружні сталі анізотропних матеріалів матриці ($j=0$) та включения ($j=1$) [1, 2].

За переходу через контур включень L напруження та переміщення неперервні:

$$\tau_{nz}^+(t) - \tau_{nz}^-(t) = 0, \quad w^+(t) = w^-(t); \quad t \in L. \quad (1)$$

Тут верхні знаки відповідають граничним значенням величин зліва (+) та справа (-) за вибраного напряму обходу контуру L проти годинникової стрілки. На нескінченності матриці S_0 задано навантаження $\tau_{yz}^\infty = \tau, \tau_{xz}^\infty = 0$.

Задачу з краєвими умовами (1) розв'язано методом СІР [2, 3]. Напруженодеформований стан кусково-однорідного анізотропного тіла $S = S_0 \cup S_1$ описують комплексні потенціали (КП) $\Phi_3^j(z_3^j)$ та $\Phi_3^j(z_3^j) = d\Phi_3^j(z_3^j) / dz_3^j$, $j = 0; 1$ – як аналітичні функції комплексних аргументів $z_3^j = x + \mu_3^j y$ ($\mu_3^j = \alpha_3^j + i\gamma_3^j$, $\alpha_3^j = a_{45}^j / a_{55}^j$) [1, 2]. КП напружень для матриці та включения шукаємо у вигляді [3]

$$\Phi_3^j(z_3^j) = \Gamma_3^j + \int_{L_3^j} \frac{\phi_3'(t_3^j)}{t_3^j - z_3^j} dt_3^j, \quad z \in S_j, \quad j = 0; 1, \quad (2)$$

де сталі $\Gamma_3^j = (1 + i\alpha_3^j / \gamma_3^j)\tau$ визначають однорідні напружені стани матриці ($j=0$) та включения ($j=1$) для заданого навантаження, контури L_3^j у комплексних математичних площинах z_3^j відповідають контуру L у площині $z = x + iy$.

Користуючись формулами Сохоцького–Племеля для інтегралів типу Коші, знайдено граничні ($z \rightarrow t \in L$) значення КП (2) на контурі L зі сторони включения і мат-

риці та за їх допомогою задоволено країові умови (1). У підсумку отримано комплексне CIP 2-го роду [3]

$$\begin{aligned} \phi(s) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ [D_{31}(s, s') - D_{30}(s, s')] \phi(s') + \frac{a_1 - a_0}{a_1 + a_0} [D_{31}(s, s') - \right. \\ \left. - \overline{D_{30}(s, s')} \bar{\phi}(s')] \right\} ds' = \frac{1}{a_1 + a_0} \left\{ a_0 \frac{dt_3^0}{ds} \Gamma_3^0 - a_1 \frac{dt_3^1}{ds} \Gamma_3^1 \right\}, \quad s = s(t), t \in L, \end{aligned} \quad (3)$$

де $\phi(s) = \phi_3^{(0)}(t_3^0) dt_3^0 / ds$ – шукана комплексна функція; s, s' – дугові абсциси точок

$$t, t' \in L, D_{30}(s, s') = \frac{dt_3^0 / ds}{t_3^0 - t_3^0}; D_{31}(s, s') = \frac{dt_3^1 / ds}{t_3^1 - t_3^1}.$$

Числовий розв’язок CIP (3) отримано методом квадратур [2, 3]. Задавши гладкий контур включення L у параметричному вигляді $t = a\omega(\eta)$, $t' = a\omega(\xi)$; $\eta, \xi \in [0; 2\pi]$ (a – абсциса крайньої правої точки на контурі), з рівняння (3) отримали два дійсних безрозмірних CIP 2-го роду для визначення невідомих функцій $u_1(\xi) = \operatorname{Re}[\phi(s')] / \tau$, $u_2(\xi) = \operatorname{Im}[\phi(s')] / \tau$, $\xi \in [0; 2\pi]$. На основі визначених граничних значень КП напружень (2) за виразами [3] $\tau_{sz}(t) = \operatorname{Re} \left[\Phi_3^j(t_3^j) \{ (1 - i\mu_3^j) dt / ds - (1 + i\mu_3^j) d\bar{t} / ds \} / 2i \right]$, $\tau_{nz}(t) = -\operatorname{Re} \left[\Phi_3^j(t_3^j) dt_3^j / ds \right]$ обчислено відносні контурні напруження зі сторони включення $\tau_{sz}^+(\eta) / \tau$ та матриці $\tau_{sz}^-(\eta) / \tau$ і контактні $\tau_{nz}(\eta) / \tau = \tau_{nz}^\pm(\eta) / \tau$, $\eta \in [0; 2\pi]$.

Досліджено напруженій стан кусково-однорідного тіла для ортотропних матеріалів з головними осями їх ортотропії під кутами β_0 (для матриці) та β_1 (для включення) до осі Ox . У системі координат xOy такі тіла описують загальними рівняннями теорії пружності анізотропного тіла [1]. У цьому випадку механічні параметри матриці та включення визначають із співвідношень [3]

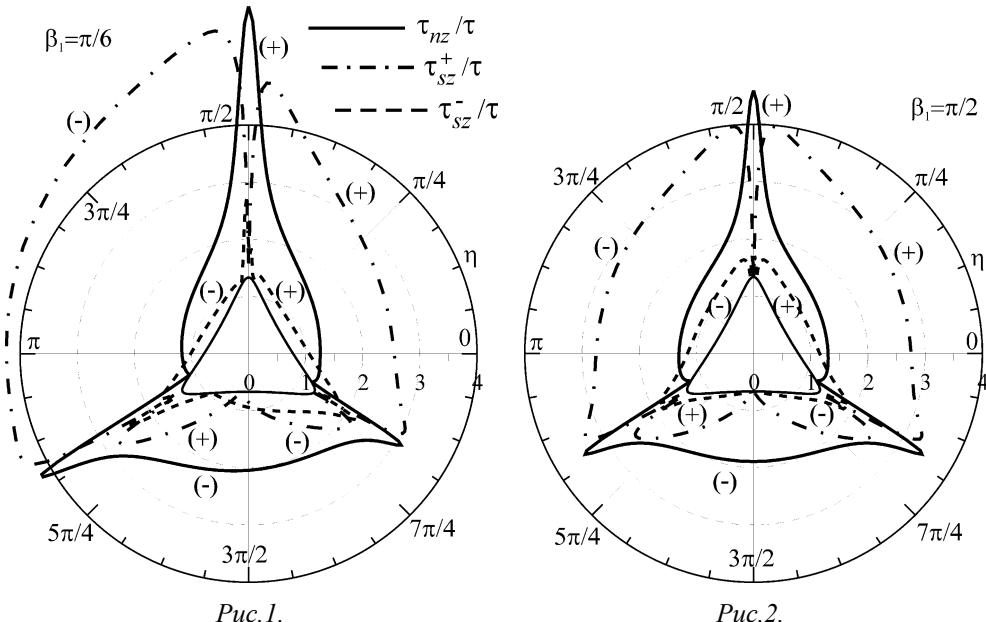
$$\alpha_3^j = \frac{((\gamma_{30}^j)^2 - 1) \sin \beta_j \cos \beta_j}{(\gamma_{30}^j)^2 \sin^2 \beta_j + \cos^2 \beta_j}, \quad \gamma_3^j = \frac{\gamma_{30}^j}{(\gamma_{30}^j)^2 \sin^2 \beta_j + \cos^2 \beta_j}, \quad \gamma_{30}^j = \sqrt{G_{13}^j / G_{23}^j},$$

$a_j = 1 / \sqrt{G_{13}^j G_{23}^j}$, де G_{13}^j, G_{23}^j – модулі зсуву по осях ортотропії матеріалів матриці ($j=0$) та включення ($j=1$).

Розподілі напружень $\tau_{nz}(\eta)$, $\tau_{sz}^+(\eta)$, $\tau_{sz}^-(\eta)$ на межі розділу матеріалів суттєво залежать як від механічних характеристик матеріалів матриці та включення (відносної жорсткості включення a_0 / a_1 , рівнів ортотропії матеріалів γ_{30}^j , кутів β_j), так і від геометричних параметрів контурів включень [3]. За заданого навантаження для еліптичних форм включень підтверджено відому однорідність їх напруженого стану ($\tau_{xz}(z), \tau_{yz}(z) = const, z \in S_1$) за довільних геометричних і механічних параметрів задачі. Для нееліптичних форм включения напруженій стан всередині включения неоднорідний – $\tau_{xz}(z), \tau_{yz}(z) \neq const$.

Для включения у формі трикутника із закругленими ($\rho/a=0,0476$) вершинами ($\omega(\eta) = i\{\exp(i\eta) + \exp(-2i\eta) / 3\}$) побудовано епюри відносних напружень поздовжнього зсуву (рис. 1, 2; τ_{nz} / τ – суцільні лінії, τ_{sz}^- / τ – штрихові, τ_{sz}^+ / τ – штрихпунктирні). Тут матриця ортотропна і податливіша ($a_0 / a_1 = 2\sqrt{6} \approx 4,9$; $\beta_0 = 0$;

$\gamma_3^0 = \sqrt{2}$) за включення з ортотропного матеріалу ($\gamma_{30}^1 = 1/\sqrt{3} \approx 0.5774$) з осями ортотропії під кутами $\beta_1 = \pi/6$ (рис. 1) і $\beta_1 = \pi/2$ (рис. 2) до осі Ox . Розглянуті тут відносно жорсткіші включення дають зміцнювальний ефект для матриці – контурні напруження з боку матриці (штрихові лінії) менші за однорідні та суттєво менші за відповідні зі сторони включень (штрихпунктирні лінії). Екстремальні контактні напруження $\tau_{nz}(\eta)$ досягаються біля відповідних закруглених вершин криволінійних трикутників (рис. 1, 2 – суцільні лінії).



КЛЮЧОВІ СЛОВА: антиплоска деформація, анізотропія, ортотропні матеріали, включення, концентрація напружень, метод сингулярних інтегральних рівнянь.

1. Lekhnitskii S.G. Anisotropic Plates, 2nd ed. – New York: Gordon and Breach, 1968. – 534 p.
2. Savruk M. P., Kazberuk A. Stress Concentration at Notches. – Cham: Springer, 2017. – 516 p.
3. Savruk M. P., Kravets V.S., Onyshko L.I., Kvasniuk O.I. Determination of the Stress State of an Anisotropic Body with Smooth Curvilinear Inclusions Under Longitudinal Shear Kvasniuk // Materials Science. – 2024. – **59**, No. 5. – P. 591–600.

V.S. Kravets

STRESSED STATE OF ANISOTROPIC BODY WITH CURVILINEAR ORTHOTROPIC INCLUSION UNDER ANTI-PLANE DEFORMATION

Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, 5, Naukova Str., 79060, Lviv, Ukraine
e-mail: volodym1960@gmail.com

The stress state of an infinite anisotropic body with a smooth curvilinear orthotropic inclusion under anti-plane deformation was studied. The two-dimensional problem of the theory of elasticity for a piecewise homogeneous anisotropic body is reduced to a singular integral equation of the second kind. The effect on the stress state of a piecewise homogeneous body of the inclusion shape, elastic constants of orthotropic materials of the matrix and the inclusion was studied.

*Дослідження проведено в рамках виконання гранту
Національного фонду досліджень України № 2023.04/0132*

В . Н . Олійник¹

**ВЕРИФІКАЦІЯ МОДЕЛІ ТЕРМІЧНОЇ ДИСИПАЦІЇ ЗВУКУ
В ЛЕГЕНЕВІЙ ПАРЕНХІМІ**

¹*Інститут гідромеханіки НАНУ,
вул. М.Капіст, 8/4, 03057, Київ, Україна;
e-mail: v_oliynik@yahoo.com*

Паренхіматозна тканина легень, яка відповідає за газообмін організму з атмосферою в процесі дихання, складається з великої кількості заповнених повітрям мікроскопічних комірок-альвеол. Ця структурна особливість обумовлює незвичайні акустичні властивості легень, наприклад, аномально низьку швидкість поширення звуку в них – порядку десятків метрів на секунду [2, 3, 6]. Також помічено, що низькочастотні акустичні хвилі суттєво дисипують у паренхімі. При цьому декремент згасання звуку прогресивно зростає зі збільшенням частоти [1 – 3, 6].

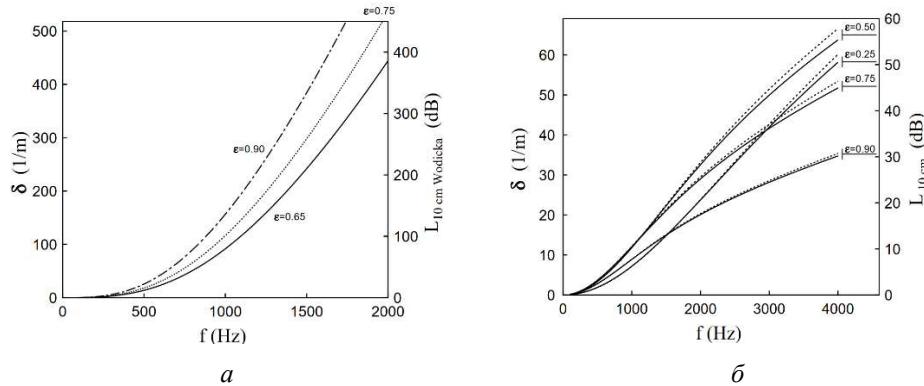
У статті Дж. Водічки та ін. [6] паренхіма моделювалась однорідною суспензією повітряних бульбашок субміліметрових розмірів у воді. Дисипативні властивості такого двофазного середовища визначались на основі моделі резонансного розсіяння звуку на великому ансамблі пульсуючих бульбашок, які розглядалися як прості осцилятори з певними еквівалентними параметрами. Такий підхід уможливлювався тим, що в розглянутому діапазоні частот –сотні герц – довжина акустичної хвилі на порядки перевищує характерний розмір зерна мікроструктури. Для визначення коефіцієнта демпфірування застосувалась модель Просперетті, яка базується на аналізі рівняння Релея для усамітненої пульсуючої бульбашки в рідині [5]. Зокрема, для пари вода-повітря при субміліметрових розмірах бульбашки втрати акустичної енергії визначаються її переходом з механічної форми в теплову на межі розподілу рідкої й газоподібної фаз.

Запропонована в [6] фізико-математична теорія поширення звуку в легенях стала вагомим етапом у розвитку респіраторної акустики. Слід однак зазначити, що прогнозоване в ній екстремально високе згасання звуку (див. Рис. 1, а), величина якого дуже чутлива до зміни розміру бульбашки, на багато порядків перевищує результати всіх відомих експериментальних спостережень [2, 3]. Тут і далі ϵ – об'ємна частка повітря в суміші.

Ця розбіжність стимулювала необхідність переглянути дисипативну модель Водічки. У ході здійснення її критичного аналізу були виявлені неточності, допущені при визначенні еквівалентних параметрів осцилятора [1]. Так, автори [6] помилково вважали приєднану масу для бульбашки, що пульсує в газонаповненій рідині, рівною половині приєдданої маси для усамітненої бульбашки. Однак насправді величина приєдданої маси визначається відносною концентрацією повітря та прямо залежить від його об'ємної частки ϵ . Значення ж дисипативного члена для широкого діапазону частот при знерозмірюванні було помилково пронормовано до резонансної кругової частоти бульбашки замість поточної кругової частоти ω [1, 6]. Внесені корективи призвели до радикальної зміни кількісного та якісного характеру частотних залежностей дисипації (див. Рис. 1, б, штрихові криві).

Задля підтвердження достовірності результатів, які дає модифікована модель резонансного розсіяння звуку на ансамблі бульбашок, було додатково розглянуто оригінальну термодинамічну теорію поширення низькочастотного звуку в емульсіях, розвинуту М. Ісаковичем та пізніше адаптовану до випадку високих концентрацій диспергованої фази [4] (див. Рис. 1, б, сукільні криві). Чудовий збіг результатів, отриманих за двома незалежними розрахунковими схемами підтверджує правильність обраної

моделі. До того ж, оновлені теоретичні оцінки декременту згасання значно краще корелюють з експериментальними даними [2, 3].



Puc. 1.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: легенева паренхіма, декремент згасання, термічна дисипація, емульсія, бульбашкове середовище

1. Олійник В.Н. Про узгодження теоретичних підходів до визначення декременту згасання звуку в легеневій паренхімі // Акуст. вісн. – 2012. – **15**, N 4. – С. 46 – 54.
2. Berger P.J., Skuza E.M., Ramsden C.A., Wilkinson M.H. Velocity and attenuation of sound in the isolated fetal lung as it is expanded with air // J. Appl. Physiol. – 2005. – **98**, N 6. – P. 2235 – 2241.
3. Leung A., Sehati S., Young J.D., McLeod C. Sound transmission between 50 and 600 Hz in excised pig lungs filled with air and helium // J. Appl. Physiol. – 1985. – **89**, N 4. – P. 2472 – 2482.
4. Oliynik V.N. Thermal dispersion and dissipation of a sound in concentrated dispersion liquid and liquid-gas media // Int. J. Fluid Mech. Res. – 2003. – **30**, N 4. – P. 443 – 461.
5. Prosperetti A. Thermal effects and damping mechanisms in the forced radial oscillations of gas bubbles in liquids // J. Acoust. Soc. Amer. – 1979. – **61**, N 1. – P. 17 – 27.
6. Wodicka G.R., Stevens K.N., Golub H.L., Cravalho E.G., Shannon D.C. A model of acoustic transmission in the respiratory system // IEEE Trans. Biomed. Eng. – 1989. – **36**, N 9. – P. 925 – 933.

V.N.Oliynik¹

VERIFYING THE THERMAL SOUND DISSIPATION MODEL IN THE LUNG PARENCHYMA

¹ Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences,
M. Kapnist Str., 8/4, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: v_oliynik@yahoo.com

Most researchers believe thermal dissipation to be the main reason for the strong attenuation of low-frequency sound in human lung tissue. To describe the relevant physical phenomena, one can approximate its complex structure by the water homogeneously saturated with air microbubbles. In such a medium, the energy loss of the propagating acoustic wave is induced by the non-equilibrium heat exchange at the liquid-gas interfaces. In the classical paper on pulmonary acoustics, Wodicka et al. describe this effect by the theory of resonance sound scattering on bubbles ensemble in a liquid. However, the obtained extremely high estimates of the acoustic attenuation decrement seem unrealistic. Therefore, two possible relevant approaches are considered in this presentation. The critical analysis of Wodicka's model reveals several misleading assumptions distorting the final results. To mitigate this problem, physically grounded corrections for the equivalent parameters of bubble resonators are proposed. To validate this modification, the alternative concept based on the Isakovich-type theory for the concentrated thermal gas-liquid emulsion is considered. The quantitative data provided by both refined models show a good correlation in the wide frequency range that is the evidence of their consistence.

В. М. Бурлаєнко¹, Т. Садовський², В.В. Веретельник¹

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ БАЛОК ЗМІННОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ З ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЕНТНИМ АРМУВАННЯМ ВУГЛЕЦЕВИМИ НАНОТРУБКАМИ

¹ Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Кирпичова, 2, 61002, Харків, Україна;
e-mail: burlayenko@yahoo.com

² Люблінський технологічний університет, вул. Надбистрижниця, 40, 20-618, Люблін, Польща

У цьому дослідженні виконано аналіз поведінки власних коливань балок змінного поперечного перерізу з функціонально-градіентним армуванням вуглецевими нанотрубками в рамках теорії балки Тимошенка. Розглядаються чотири різні типи армування балок вуглецевими нанотрубками, включаючи рівномірно розподілене армування (UD) і три типи функціонально градіентних армувань (FG-A, FG-O, FG-X), які відповідно зображені на Рис. 1. Передбачається, що властивості матеріалу балок, посилені вуглецевими нанотрубками з функціональним градуюванням вздовж товщини оцінюються за правилом суміші [1].

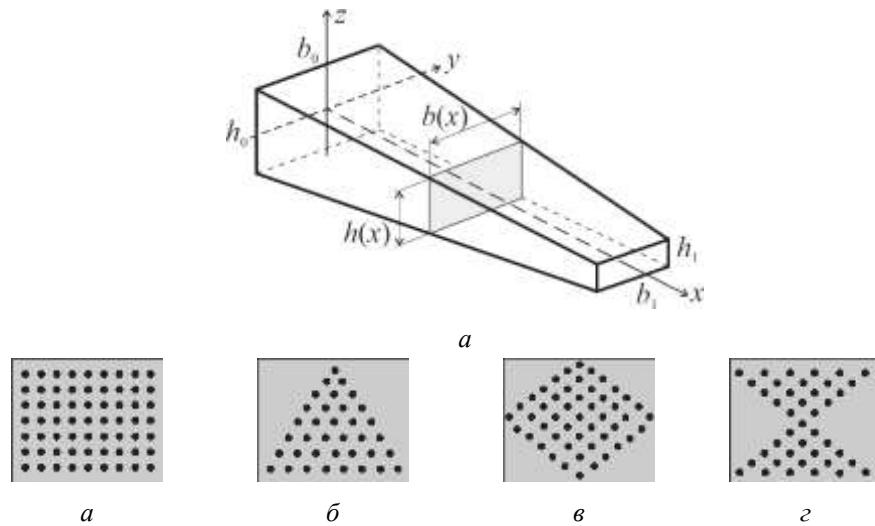


Рис.1.

На основі принципу Гамільтона виведено диференціальні рівняння руху, що описують власні коливання балки змінного поперечного перерізу з функціонально-градіентним армуванням вуглецевими нанотрубками із відповідними граничними умовами. Ці диференціальні рівняння містять змінні коефіцієнти, які відображають зміну властивостей матеріалу по товщині балки через функціонально-градіентне армування, а також враховують зміну геометрії перерізу балки вздовж її довжини:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(A_{11}(x) \frac{du}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left(B_{11}(x) \frac{d\varphi}{dx} \right) + \omega^2 I_0(x)u - \omega^2 I_1(x)\varphi = 0, \\ - \frac{d}{dx} \left(B_{11}(x) \frac{du}{dx} \right) + \frac{d}{dx} \left(D_{11}(x) \frac{d\varphi}{dx} \right) + A_{55}(x) \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) - \omega^2 I_1(x)u + \omega^2 I_2(x)\varphi = 0, \quad (1) \\ \frac{d}{dx} \left(A_{55}(x) \left(\frac{dw}{dx} - \varphi \right) \right) + \omega^2 I_0(x)u = 0, \end{aligned}$$

де u , w та φ - це осьове і поперечне переміщення та кут повороту перерізу балки відносно її осі; $A_{11}(x)$, $D_{11}(x)$, $B_{11}(x)$, $A_{55}(x)$ - це компоненти осьової, згинної, поєднаної осьово-згинної і зсувної жорсткостей, а $I_0(x)$, $I_1(x)$, $I_2(x)$ - інерційні члени.

Система диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами (1) та відповідними граничними умовами розв'язуються за допомогою методу диференціального перетворення [2,3]:

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(\sum_{p=0}^{N-2} B_u(p)(x-x_0)^{p+2} \right) W(0) + \left(\sum_{p=0}^{N-2} C_u(p)(x-x_0)^{p+2} \right) \Phi(0) + \left(\sum_{p=0}^{N-2} G_u(p)(x-x_0)^{p+2} \right) W(1) + \\ &\quad \left(\sum_{p=0}^{N-2} H_u(p)(x-x_0)^{p+2} \right) \Phi(1) + \left(1 + \sum_{p=0}^{N-2} R_u(p)(x-x_0)^{p+2} \right) U(0) + \left((x-x_0) + \sum_{p=0}^{N-2} S_u(p)(x-x_0)^{p+2} \right) U(1) \\ w(x) &= \left(1 + \sum_{p=0}^{N-2} B_w(p)(x-x_0)^{p+2} \right) W(0) + \left(\sum_{p=0}^{N-2} C_w(p)(x-x_0)^{p+2} \right) \Phi(0) + \left((x-x_0) + \sum_{p=0}^{N-2} G_w(p)(x-x_0)^{p+2} \right) W(1) + \\ &\quad \left(\sum_{p=0}^{N-2} H_w(p)(x-x_0)^{p+2} \right) \Phi(1) + \left(\sum_{p=0}^{N-2} R_w(p)(x-x_0)^{p+2} \right) U(0) + \left(\sum_{p=0}^{N-2} S_w(p)(x-x_0)^{p+2} \right) U(1) \quad (2) \\ \varphi(x) &= \left(\sum_{p=0}^{N-2} B_\varphi(p)(x-x_0)^{p+2} \right) W(0) + \left(1 + \sum_{p=0}^{N-2} C_\varphi(p)(x-x_0)^{p+2} \right) \Phi(0) + \left(\sum_{p=0}^{N-2} G_\varphi(p)(x-x_0)^{p+2} \right) W(1) + \\ &\quad \left((x-x_0) + \sum_{p=0}^{N-2} H_\varphi(p)(x-x_0)^{p+2} \right) \Phi(1) + \left(\sum_{p=0}^{N-2} R_\varphi(p)(x-x_0)^{p+2} \right) U(0) + \left(\sum_{p=0}^{N-2} S_\varphi(p)(x-x_0)^{p+2} \right) U(1) \end{aligned}$$

де B , C , G , H , R та S - це рекурентні коефіцієнти; $U(0)$, $W(0)$, $\Phi(0)$, $U(1)$, $W(1)$, $\Phi(1)$ - це невідомі початкові зображення осьового та поперечного переміщень і кута повороту, відповідно.

Запропонований підхід для обчислення власних частот балок зі змінним поперечним перерізом і функціонально-градієнтним армуванням вуглецевими нанотрубками було верифіковано шляхом порівняння отриманих результатів з наявними літературними даними. Особлива увага приділялася випадкам із змінним перерізом, для яких у літературі представлено обмежену кількість розрахунків. Порівняння підтвердило коректність запропонованого підходу та продемонструвало його високу точність у широкому діапазоні вхідних даних.

Після верифікації було проведено комплексне параметричне дослідження для аналізу впливу різних геометричних і матеріальних параметрів на вібраційну поведінку балок із функціонально-градієнтним армуванням вуглецевими нанотрубками. Зокрема, досліджувалися такі фактори, як коефіцієнт звуження перерізу, тип розподілу нанотрубок по товщині балки та об'ємне співвідношення нанотрубок до матеріалу полімерної матриці. Результати показали, що власні частоти балок суттєво залежать від цих параметрів.

На рис. 2 продемонстровано залежність фундаментальної частоти вільно спертої балки від коефіцієнта звуження, який варіюється в діапазоні від -0.9 до 1, а також від об'ємної частки нанотрубок: 0.12, 0.17 та 0.28. Аналіз показує, що зі збільшенням коефіцієнта звуження та об'ємної частки нанотрубок, незалежно від типу їх розподілу, частоти коливань збільшуються.

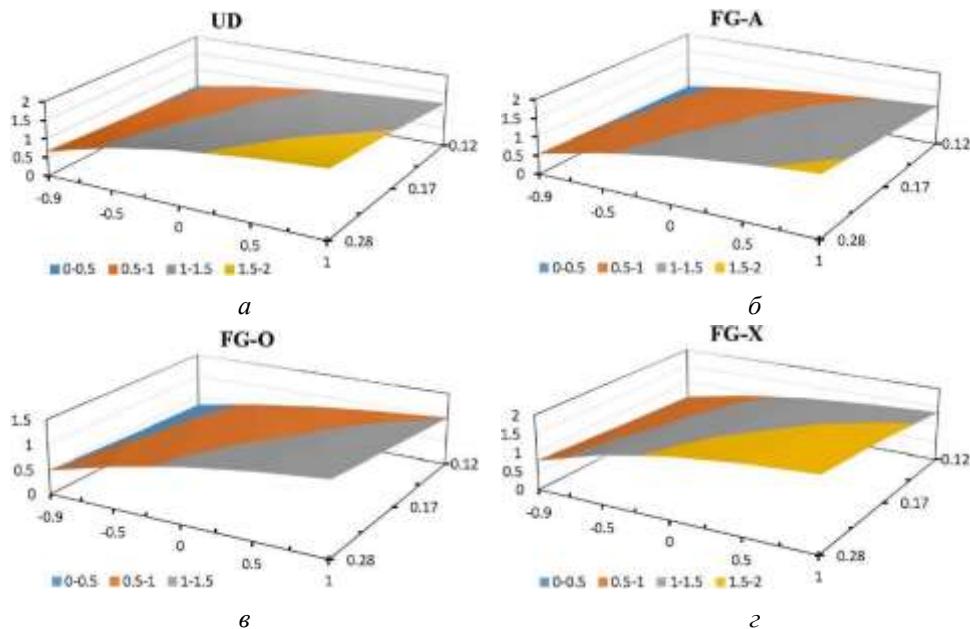


Рис.2.

Розрахунки можуть бути корисними для оптимізації проєктування балок зі змінним перерізом і нанотрубковим армуванням для досягнення потрібних вібраційних характеристик.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: власні коливання, функціонально градієнтні матеріали, композитні армовані вуглецевими нанотрубками балки, змінний переріз, метод диференціального перетворення

- Ansari R., Faghah Shojaei M., Mohammadi V., Gholami R., Sadeghi F. Nonlinear forced vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite Timoshenko beams// Compos.Struct. – 2014. – **113**. – P. 316 – 327.
- Burlayenko V.N., Altenbach H., Dimitrova S.D. Modal characteristics of functionally graded porous Timoshenko beams with variable cross-sections// Compos. Struct. – 2024. – **342**, N 118273. – P. 1 – 15.
- Pukhov G.E. Differential Transformations and Mathematical Modeling of Physical Processes. – Kiev: Naukova Dumka, 1986. – 160 p.

V.N. Burlayenko¹, T. Sadowski², V.V. Veretelnyk¹

MODELLING AND FREE VIBRATION ANALYSIS OF VARIABLE CROSS-SECTION BEAMS WITH FUNCTIONALLY GRADED CARBON NANOTUBE REINFORCEMENT

¹ National Technical University “Kharkiv Polytechnic Institute”, Kharkiv, Ukraine,
Kyrpychova Str., 2, 61002, Kharkiv, Ukraine;

e-mail: burlayenko@yahoo.com

² Lublin University of Technology,
Nadbystrzycka Str. 40, 20-618, Lublin, Poland

This study examines the free vibration behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced (FGCNT) beams with variable cross-sections. Carbon nanotubes, embedded in a polymer matrix, are graded across the beam's thickness. Various CNT distributions and cross-sectional profiles are analyzed. Using Hamilton's principle and Timoshenko beam theory, the equations of motion are derived and solved via the differential transform method (DTM). The results show that natural frequencies depend on taper parameters, nanotube distributions, and CNT volume fraction. Optimal beam shapes and nanotube distributions are proposed for improved vibration characteristics.

Т.М. Щербак¹, Ю.А. Мейш²

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗСІЮВАННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ГРАВІТАЦІЙНИХ ХВИЛЬ ВЕРТИКАЛЬНИМ ТОНКИМ БАР'ЄРОМ

¹ Національний університет біоресурсів і
природокористування України, вул. Героїв Оборони, 15,
03041, Київ, Україна;

e-mail: mirgtanya@gmail.com

²Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: juliameish@gmail.com

В роботі досліджено розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль одиночним вертикальним тонким бар'єром. Розглянуто випадок нормального падіння хвилі. Один із ефективних методів розв'язання даного класу задач - використання розкладання розв'язку в ряд за власними функціями задачі. Відомо, що розподіл швидкості потоку має кореневу особливість поблизу вершини бар'єру. В результаті розв'язання задачі зводиться до виконання умов спряження над бар'єром та рівності нулю нормальних до площини бар'єру компонент швидкості. Використання властивостей ортогональності системи власних функцій призводить до необхідності розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів розкладів. Традиційні підходи до розв'язання такої системи – це метод простої редукції. Однак, для отримання точності до другого знаку доводиться розглядати досить велику кількість рівнянь, порядку $N = 400$. Як зазначено, у роботі [4] пропонується використовувати як базисні функції поліноми Чебишева для отримання прийнятних чисельних результатів із помірно великою кількістю рівнянь. Особливо важливим стає досягнення необхідної точності обчислень в задачах розсіювання хвиль системою вертикальних бар'єрів, коли розглядаються резонансні явища, пов'язані з виникненням хвилі, що стоїть, у проміжку між бар'єрами. Для точного визначення частоти замикання під час розгляду хвиль високої частоти, необхідно використовувати понад 400 рівнянь. Це відбувається за рахунок наявності особливості розподілу швидкості поблизу вершини бар'єру. В роботі [3] наведено спірне твердження про зникнення локальної особливості за швидкостями при розгляді бар'єру кінцевої товщини. Локальна особливість за швидкостями, обумовлена існуванням точки зміни типу граничних умов, не зникає при заміні нескінченно тонкого бар'єру на бар'єр кінцевої товщини. В цьому випадку, при врахуванні скінченної товщини бар'єру, виникає степенева особливість з іншим показником степеню [2], а також залишаються труднощі обчислення нескінченної системи алгебраїчних рівнянь.

В даній роботі для розгляду класу задач розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль тонкими вертикальними бар'єрами пропонується використовувати метод виділення особливостей та подальше використання асимптотичних залежностей, які визначаються видом зазначених особливостей, для невідомих коефіцієнтів розкладання для великих значень N [1]. Це дає змогу зменшити не лише розмір системи алгебраїчних рівнянь, а й суттєво розширити область в околі точки зміни типу граничних умов, в якій покращується точність отриманого розв'язку.

На відміну від звичайного методу редукції, у роботі пропонується застосувати метод покращеної редукції, який полягає у використанні асимптотичних уявлень для

коєфіцієнтів розкладання A_n та B_n для великих значень n . Ці асимптотичні уявлення перебувають з урахуванням розгляду конкретного виду сингулярності, що у задачі. Для такого типу завдань характерно існування локальних особливостей по швидкостям. Прагнення до нескінченності швидкості частинки рідини на околиці вершини бар'єру в рамках моделі ідеальної рідини з малими амплітудами ставить питання про достовірність отриманого розв'язку. У зв'язку з цим зауважимо, що виникнення локальних особливостей слід розглядати як “розплату” за дуже грубе моделювання реального процесу. У цьому мають на увазі як моделювання властивостей середовища (ідеальна рідина), а й постановка граничної завдання загалом, йдеться про моделювання характеру кордону, що є також істотну ідеалізацію [1].

Проведено порівняння результатів, отриманих на основі запропонованого методу та методу простої редукції. Порівняльний аналіз показав, що запропонований підхід покращеної редукції є більш ефективним для розрахунку задач розсіювання поверхневих гравітаційних хвиль бар'єрами енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: поверхневі хвилі, редукція, розсіювання, власні функції, бар'єр

1. Городецкая Н.С., Миргородская Т.Н., Никишов В.И. *О рассеянии поверхностных гравитационных волн тонкими вертикальными барьераами* // Прикладная гидромеханика. 2015. Том 17, № 2. С. 9 – 19
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. О локальных особых точках в математических моделях физических полей // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1998. – Т. 41, №1. – С. 12-34.
3. Kagemoto H. Revisiting the complete wave transmission and reflection due to an array of 2-D surface-piercing truncated plates fixed in regular incident waves // Ocean Engineering. – 2011. – vol. 38. – P. 976– 982.
4. Linton C.M., P. McIver P. Handbook of Mathematical Techniques for Wave / Structure Interactions. Chapman & Hall/CRC, 2001. – 298 p.

T.M. Shcherbak¹, Yu.A. Meish²,

NUMERICAL SIMULATION OF SCATTERING OF SURFACE GRAVITY WAVES BY A VERTICAL THIN BARRIER

¹ National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine,
Heroiv Oborony Str., 15, 03041, Kyiv, Ukraine
e-mail:mirgtanya@gmail.com

² S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail:juliameish@gmail.com

The method of advanced reduction for the calculations of surface gravity wave scattering by thin submerged barriers that is based on eigenfunction expansion of solution has been presented. Asymptotic behaviors of unknown coefficients of expansion are found on basis of extraction of local singularity in respect to velocity in the tip of barrier. The analysis of closing of the equation system has been fulfilled. It is shown that the using of the method of advanced reduction allows to diminish the volume of calculations and to improve the property of obtained solution.

М.А. Долгов

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗПОДІЛУ ДОТИЧНИХ НАПРУЖЕНИЬ В ДЕФОРМОВАНОМУ ПОКРИТТІ

Інститут проблем міцності імені Г.С.Писаренка НАН України,
бул. Садово-Ботанічна, 2, 01014, Київ, Україна
e-mail: dna@ipp.kiev.ua

Захисні покриття використовуються в різних галузях промисловості. Визначення концентрації напружень в елементах конструкцій та зразках з покриттями є актуальним завданням. Концентрація напружень в колі вільного краю покриття впливає на виникнення тріщини в зоні адгезійного контакту та процес його відшарування. Отже, визначення концентрації напружень поблизу вільного краю покриття необхідне для дослідження механізмів руйнування покріттів, як під час експлуатації, так і під час випробувань. Для експериментального визначення адгезійної міцності також необхідне дослідження концентрації напружень у зразках із покріттями.

Відомі різні підходи до оцінки напруженого стану покріттів в умовах зовнішнього навантаження [2]. Напруженій стан аналізують за різними аналітичними моделями для визначення дотичних напружень в покріттях. Моделі для визначення дотичних напружень в площині адгезійного контакту основи та покриття використовують різні гіпотези стосовно їх розподілу. В роботі [4] показано, що результати визначення напруженого стану в тонкій плівці, отримані на основі мембрани підходу, слід розглядати як перше наближення до точного розв'язку задачі, а для отримання більш точних результатів слід враховувати ефекти згинання. Ціллю роботи було розробка аналітичної моделі для розрахунку напруженого стану в площині адгезійного контакту основи та покриття, яка враховує виникнення деформацій згину в покрітті, під час дії зусиль розтягу на основу.

Розглянемо покриття довжиною $2l$ та товщиною h , яке нанесене на основу товщиною $2H$, як показано на рис. 1. Припустимо, що $h \ll 2H$, а довжина покриття мала порівняно з довжиною основи. Покриття симетрично нанесене на обидві поверхні основи. Під час навантаження основи зусилля розтягу, паралельні до поверхні адгезійного контакту основи та покриття, передаються до останнього та створюють у ньому також зусилля розтягу. Навантаження в покріття передаються внаслідок зсуву вздовж поверхні адгезійного контакту. На рис. 1 показано також розрахункову схему зразка з покріттям: у будь-якому поперечному перерізі покріття та основи на них діють осьові сили, а в зоні адгезійного контакту – дотичні напруження τ . Визначимо дотичні напруження в зоні адгезійного контакту основи та покріття.

Припустимо, що дотичні напруження в зоні адгезійного контакту врівноважуються дотичними напруженнями в основі. Отже, дотичні напруження в основі затухають від максимального значення в зоні адгезійного контакту до нуля в середині основи. Розглянемо елемент розрахункової схеми (рис. 1), на якому дотичні напруження позначені як $\tau(x)$. Для зручності розрахунків вводимо проміжний тонкий адгезійний прошарок між покріттям та основою товщиною δ . Довжина елементів покріття, основи та адгезійного прошарку, обмежених двома близько розташованими поперечними перерізами, становить dx . Дотичні напруження τ в площині адгезійного контакту основи та покріття визначаються за формулою [3]:

$$\tau = S(u_c(x) - u_s(x)) \quad (1)$$

де $u_c(x)$ та $u_s(x)$ – переміщення центрів тяжіння покриття та основи, відповідно, S – деяка константа для системи основа-покриття.

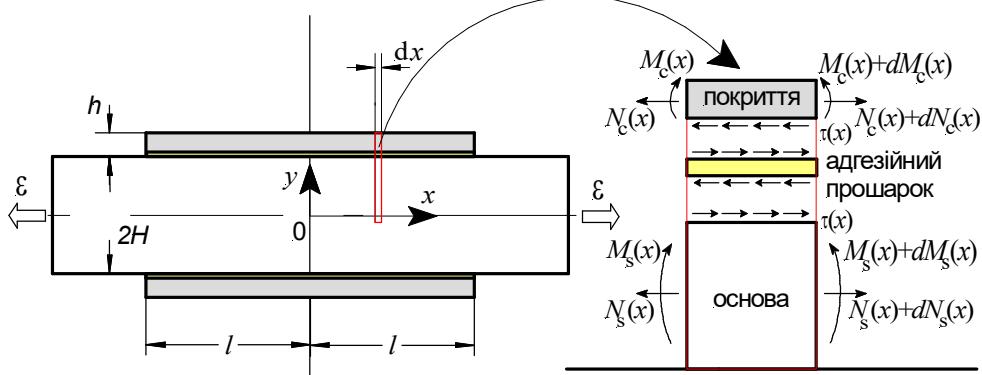


Рис. 1.

Деформації в основі $\varepsilon_s(x)$ та покритті $\varepsilon_c(x)$ складаються з деформацій вигину та розтягування:

$$\varepsilon_s(x) = \frac{du_s(x)}{dx} = \frac{y_s}{E_s J_s} M_s(x) + \frac{N_s(x)}{E_s F_s} \quad (2)$$

$$\varepsilon_c(x) = \frac{du_c(x)}{dx} = \frac{y_c}{E_c J_c} M_c(x) + \frac{N_c(x)}{E_c F_c} \quad (3)$$

де $M_s(x)$, $M_c(x)$ – згинальний момент в основі та покритті, відповідно; $N_s(x)$, $N_c(x)$ – зусилля розтягування в основі та покритті, відповідно; y_s , y_c – відстань від площини адгезійного контакту до серединної площини основи та покриття, відповідно; E_s , E_c – модулі пружності покриття та основи, відповідно; J_s , J_c – моменти інерції покриття та основи, відповідно; F_s , F_c – площини поперечного перерізу покриття та основи, відповідно.

Після диференціювання рівняння (1) та врахування рівнянь (2) та (3) отримали таке рівняння:

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} - S \cdot b \left(\frac{(y_c + y_s)(y_c + y_s + \delta)}{E_c J_c + E_s J_s} + \frac{1}{E_c F_c} + \frac{2}{E_s F_s} \right) \tau(x) = 0 \quad (4)$$

де b – ширина покриття.

Розв'язок рівняння (4) запишемо у вигляді:

$$\tau(x) = C_1 ch(kx) + C_2 sh(kx) \quad (5)$$

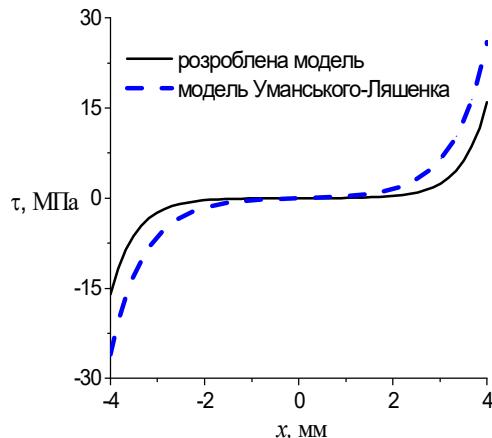
де k з урахуванням того, що товщина шару δ дуже мала, дорівнює

$$k = \sqrt{S \cdot b \left(\frac{(h/2 + H)^2}{E_c J_c + E_s J_s} + \frac{1}{E_c F_c} + \frac{2}{E_s F_s} \right)} \quad (6)$$

Константи інтегрування знайдемо згідно з граничними умовами [1].

Розв'язок рівняння (4) дозволяє визначити дотичні напруження τ . Виконали порівняння розробленої аналітичної моделі з моделлю Уманського-Ляшенка [1]. Під час розрахунків використовували модулі пружності основи та покриття, які дорівнюють 209 та 70 ГПа, відповідно. Вважали, що деформація ε дорівнює 0,048 %, ширина основи та покриття – 5 мм, довжина покриття – 8 мм, товщина основи – 2,26 мм, товщина покриття – 0,33 мм. На рис. 3 наведено розподіл дотичних напружень у площині адгезійного контакту згідно з моделлю Уманського-Ляшенка [1] та розробленою моделлю. Виявлено, що максимальні дотичні напруження у площині адгезійного контакту

ту за розробленою моделлю трохи менше. Це пов'язано з тим, що розроблена модель враховує згин покриття в околі його вільного краю.



Ruc.2.

Виконано аналіз розподілу дотичних напружень, які виникають у площині адгезійного контакту покриття та основи під час дії зусиль розтягу на останню. Особливістю розробленої моделі є врахування деформацій згину, які виникають в покритті внаслідок розтягування основи. Метод, приведений в роботі, дозволяє обчислювати розподіл дотичних напружень в покриттях під час експериментальних досліджень зразків на розтяг. Розроблена модель на відміну від відомих враховує згин покріттів в околі вільного краю покриття під час розтягнення основи. Це дозволяє більш точно визначати максимальні дотичні напруження, які викликають відшарування покріттів. Розроблений метод можна використовувати для визначення дотичних напружень, які характеризують адгезійну міцність покріття,

КЛЮЧОВІ СЛОВА: покриття, дотичні напруження, характеристики пружності, адгезійна міцність, випробування на розтяг

1. Уманский Э.С., Ляшенко Б.А. Условия адгезионной и когезионной равнопрочности жаростойких покрытий // Космические исследования на Украине. – 1975. – Вып. 6. – С. 58 – 64.
2. Dolgov N.A. Analytical methods to determine the stress state in the substrate-coating system under mechanical loads // Strength Mater. – 2016. – **48**. – P. 658 – 667.
3. Dolgov N.A., Lyashenko B.A., Rushchitskii Y.Y. et al. Effects of differences in elastic characteristics between substrate and coating on the stress and strain state in a composite. 1. Estimating tensile stresses in the coating // Strength Mater. – 1995. – **27**. – P. 525 – 530.
4. Shield T.W., Kim K.S. Beam theory models for thin film segments cohesively bonded to an elastic half space // Int. J. Solids Struct. – 1992. – **29**. – P. 1085 – 1103.

M.A. Dolgov

STUDY OF THE SHEAR STRESSES DISTRIBUTION IN A DEFORMED COATING

G.S. Pisarenko Institute for Problems of Strength of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Sadovo-Botanichna, Str., 2, 01014, Kyiv, Ukraine;
e-mail: dna@ipp.kiev.ua

A technique has been developed for estimating interface shear stresses in flat coated specimens under tensile forces. The analytical model takes into account the bending strains in the coating caused by the tensile stretching of the substrate. A conclusion was presented concerning the application of the developed technique for determining interface shear stresses to estimate the adhesion strength of coatings.

Б.М. Калиняк, В.А. Шевчук

**ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ З БАГАТОШАРОВИМИ
НЕОДНОРІДНИМИ ПОКРИТЯМИ**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАНУ,
бул. Наукова, 3б, 79060, Львів, Україна;
e-mail: b-kalynyak@litech.net, shevchuk@iapmm.lviv.ua*

Для захисту елементів конструкцій від агресивного впливу (корозійного, абразивного, теплового, механічного та ін.) зовнішнього середовища використовують спеціальні покриття. Такі покриття є складними структурами, неоднорідними за товщиною, пористими, з різними властивостями на поверхні та в області, прилеглій до підкладки. Залежно від функціонального призначення існує широкий діапазон товщин використовуваних покрить: від дуже тонких (декілька мікрон) до відносно товстих (сотні мікрон, зокрема, керамічних теплозахисних покрить).

Досліджуваний об'єкт – суцільний неоднорідний довгий циліндр радіуса R з нанесеним n -шаровим неоднорідним у кожному шарі покриттям загальної товщини $h = h_1 + h_2 + \dots + h_n$, де h_j – товщина j -го шару. За умови осесиметричної плоскої деформації та відсутності масових сил основними рівняннями, які описують термопружний стан такого багатошарового циліндра, будуть рівняння рівноваги, зв'язки між деформаціями та напруженнями, рівняння суцільності, умови на поверхні та перерізі циліндра, умови ідеального механічного та теплового контактів між шарами. Відповідна задача термопружності аналогічно, як у працях [2, 4] зведена до системи інтегральних рівнянь другого роду з інтегральними умовами, які відображають дію силових навантажень на поверхню та вздовж осі циліндра. Зведення до інтегральних рівнянь проведено безпосереднім інтегруванням рівнянь рівноваги та сумісності деформацій у напруженнях з використанням межових умов та зв'язків між деформаціями і напруженнями. Використання квадратурних формул [1] робить можливим отримати наближені аналітичні вирази для компонент тензора напружень у шарах покритья у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(j)}(\rho) &= \sigma^{(1)}(\rho_1)\gamma_{1r}^{(j)}(\rho) + e_z\gamma_{2r}^{(j)}(\rho) + \gamma_{0r}^{(j)}(\rho), \\ \sigma_\varphi^{(j)}(\rho) &= \sigma^{(1)}(\rho_1)\gamma_{1\varphi}^{(j)}(\rho) + e_z\gamma_{2\varphi}^{(j)}(\rho) + \gamma_{0\varphi}^{(j)}(\rho),\end{aligned}\quad (1)$$

де $\sigma_r^{(j)}(\rho)$, $\sigma_\varphi^{(j)}(\rho)$ – радіальні та колові компоненти тензора напружень, ρ – радіальна змінна, віднесена до радіуса підкладки R , e_z – стала у перерізі осьова деформація, $\sigma^{(j)}(\rho) = \sigma_r^{(j)}(\rho) + \sigma_\varphi^{(j)}(\rho)$, $\gamma_{kr}^{(j)}(\rho)$, $\gamma_{k\varphi}^{(j)}(\rho)$ ($k = 0, 1, 2$) – відомі функції, які виражені через фізико-механічні характеристики матеріалів, їх похідні по радіальній змінній та значення напружень у попередніх шарах. Сталі e_z та $\sigma^{(1)}(0)$ визначено з інтегральних умов. Осьову компоненту тензора напружень та компоненти тензора деформацій можна визначити зі зв'язків між компонентами тензора деформацій та напружень. Температурне поле вважали відомим, як, наприклад, розв'язок класичної задачі тепlopровідності.

Для апробації запропонованого методу розв'язано тестовий приклад. Розглянуто плоский деформований стан. Для випадку, коли коефіцієнти лінійного теплового розширення та модулі пружності у j -му шарі є функціями радіальної координати вигляду $\alpha^{(j)}(\rho) = \alpha_0^{(j)} \rho^{m_\alpha^{(j)}}$, $E^{(j)}(\rho) = E_0^{(j)} \rho^{m_E^{(j)}}$, де $\alpha_0^{(j)}$, $E_0^{(j)}$, $m_\alpha^{(j)}$, $m_E^{(j)}$ – константи, отримано точний аналітичний розв'язок відповідної задачі термопружності. Проведено порівняння чисельних результатів, отриманих на основі точного розв'язку, та запропонованих формул (1) для тришарового покриття при різних значеннях констант. Результати узгоджуються з точністю не більше 0.1% при загальній товщині покриття до 0.1 від радіуса підкладки.

Застосування цього підходу до розрахунків термонапруженого стану десятишарового покриття при величинах $m_\alpha^{(j)}$, $m_E^{(j)}$ від 0 до 10 показує, що: модель дає задовільну точність незалежно від сумарної товщини покриття; модель валідна при довільній кількості тонких шарів незалежно від їх загальної товщини; заміна товстого шару покриття на сукупність однакових тонких шарів дає можливість застосувати запропонований підхід для товстих шарів.

Проведено порівняння результатів запропонованого підходу з іншими методами розрахунку напружень у тонких покриттях, зокрема, методом узагальнених граничних умов [3]. За допомогою методу узагальнених граничних умов отримано простіші формули для обчислення напружень, які є застосовними до сумарно тонких порівняно з підкладкою покрить. Застосовність цього методу, однак, обмежена для товстих покрить, які складаються з багатьох тонких шарів.

Дослідження виконано за часткової фінансової підтримки гранту № 0124U002858 у рамках українсько-польського науково-дослідного проекту «Ідентифікація термомеханічних параметрів неоднорідних композитних матеріалів та захисних покріттів».

КЛЮЧОВІ СЛОВА: багатошарові покриття, термонапруженій стан, неоднорідний циліндр, інтегральні рівняння, термопружність.

1. Верлан А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. – К.: Наук. думка, 1986. – 543 с.
2. Popovych V.S., Kalynyak B.M. Mathematical modeling and methods for the determination of the static thermoelastic state of multilayer thermally sensitive cylinders // J. Math. Sci. – 2016. – **215**, N 2. P. 218 – 242.
3. Shevchuk V.A. Methodology of investigations of the thermal stressed state of bodies with thin multilayer coatings // J. Math. Sci. – 2024. – **278**, N 5. – P. 780-794.
4. Shevchuk V.A., Kalynyak B.M. Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings // Mater. Sci. – 2011. – **46**, N 1. – P. 747 – 756.

B.M. Kalynyak, V.A. Shevchuk

THERMAL STRESS STATE OF CYLINDRICAL BODIES WITH MULTILAYER INHOMOGENEOUS COATINGS

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
of the National Academy of Sciences,
Naukova Str., 3b, 79060, Lviv, Ukraine;
e-mail: b-kalynyak@litech.net, shevchuk@iapmm.lviv.ua*

The method for obtaining stresses and strains in cylinders with multilayered inhomogeneous coatings under given temperature distribution has been developed. The efficiency of the proposed method is illustrated by comparing the results, obtained by its application, with the results of the exact solution of the test problem for a heated solid cylinder with a three-layer coating with power law dependence of elastic moduli and thermal expansion coefficients along the radial coordinate.

О.М.Шикула^{1,2},Н.Б.Жукова¹

**ПРОГНОЗУВАННЯ ДЕФОРМАТИВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВОЛОКНИСТИХ
МАТЕРІАЛІВ З РОЗОРІЄНТОВАНИМИ ВОЛОКНАМИ
ТА НЕЛІНІЙНОЮ МАТРИЦЕЮ**

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail:ensh@ukr.netzhukova_n@ukr.net

² Державний університет інформаційно-телекомунікаційних систем,
бул. Солом'янська, 7, Київ, 03110, Київ, Україна;

Волокнисті композитні матеріали за характером орієнтації волокон можна розділити на три групи: односпрямовані, багато спрямовані в одній площині та просторово армовані. Багатоспрямованість розташування волокон дозволяє забезпечити необхідну жорсткість і міцність композиту в різних напрямках, що вигідно відрізняє ці матеріали від односпрямованих. Тому волокнисті матеріали з волокнами, розорієнтованими в площині, тобто шарувато-волокнисті матеріали, а також більш пріоритетні і менш дослідженні просторово армовані матеріали широко застосовуються в тих галузях, де потрібні легкі та міцні конструкції.

При достатньо високих навантаженнях у багатьох однорідних і композитних матеріалів характер залежностей між макронапруженнями та макродеформаціями стає нелінійним. Таке може відбуватися внаслідок фізично нелінійного деформування компонентів [2]. Такий вид нелінійності є характерним для композитів на основі пластичної металевої матриці, а також на основі полімерів при підвищених температурах. Просторово-армовані волокнисті матеріали використовуються в конструкціях, які працюють при високих силових та температурних навантаженнях. Тому прогнозування їх нелінійних властивостей є актуальним.

Метою даної роботи є побудова моделі та дослідження нелінійного деформування волокнистих матеріалів з розорієнтованими волокнами та фізично нелінійною матрицею.

Розглянемо волокнистий матеріал стохастичної структури з просторово розорієнтованими волокнами. Такий матеріал будемо розглядати як сукупність підсистем, кожна з яких є односпрямованим волокнистим матеріалом з волокнами, орієнтованими певним чином відносно загальної системи координат. Будемо вважати, що матеріал волокон - трансверсально-ізотропний з віссю симетрії уздовж волокон, матеріал матриці – ізотропний фізично нелінійний. Нехай об'ємні вмісті волокон і матриці дорівнюють відповідно c_1 і c_2 , при цьому $c_1 + c_2 = 1$.

Визначення ефективних деформативних характеристик матеріалу будемо проводити в два етапи. На першому етапі визначаються ефективні властивості підсистеми, яка є односпрямованим волокнистим матеріалом. Розв'язок задачі будується на основі моделі односпрямованого волокнистого матеріалу стохастичної структури [1, 3, 4]. В основу покладені стохастичні диференційні рівняння теорії пружності, при розв'язанні задачі використовується метод умовних моментів [1, 3, 4]. На другому етапі за обчисленними властивостями підсистем визначаються ефективні властивості матеріалу з просторово розорієнтованими волокнами. Розв'язання задачі другого етапу будується на основі схеми Фойхта шляхом осереднення результатів першого етапу по деякій щільності розподілу.

На першому етапі визначимо ефективні деформативні властивості підсистеми, що є односпрямованим волокнистим матеріалом. Позначимо пружні сталі волокон λ_{ij}^1 , а деформативні характеристики матриці, які залежать від деформації – $\lambda_2 = \lambda_2(\varepsilon)$, $\mu_2 = \mu_2(\varepsilon)$. Тоді вирази для ефективних характеристик підсистеми мають вигляд [1, 3, 4]

$$\lambda_{11}^{*(k)} + \lambda_{12}^{*(k)} = c_1^{(k)} (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}) + 2c_2^{(k)} (\lambda_2 + \mu_2) -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{c_1^{(k)} c_2^{(k)} (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)} - 2\lambda_2 - 2\mu_2)^2}{2c_1^{(k)}(\lambda_2 + \mu_2) + c_2^{(k)}(\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}) + 2m^{(k)}}, \\
 \lambda_{11}^{*(k)} - \lambda_{12}^{*(k)} &= c_1^{(k)}(\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}) + 2c_2^{(k)}\mu_2 - \frac{c_1^{(k)} c_2^{(k)} (\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)} - 2\mu_2)^2}{2c_1^{(k)}\mu_2 + c_2^{(k)}(\lambda_{11}^{(k)} - \lambda_{12}^{(k)}) + \frac{2m^{(k)}n^{(k)}}{n^{(k)} + 2m^{(k)}}}; \\
 \lambda_{13}^{*(k)} &= c_1^{(k)}\lambda_{13}^{(k)} + c_2^{(k)}\lambda_2 - \frac{c_1^{(k)} c_2^{(k)} (\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)} - 2\lambda_2 - 2\mu_2)(\lambda_{13}^{(k)} - \lambda_2)}{2c_1^{(k)}(\lambda_2 + \mu_2) + c_2^{(k)}(\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}) + 2m^{(k)}}, \\
 \lambda_{33}^{*(k)} &= c_1^{(k)}\lambda_{33}^{(k)} + c_2^{(k)}(\lambda_2 + 2\mu_2) - \frac{2c_1^{(k)} c_2^{(k)} (\lambda_{13}^{(k)} - \lambda_2)^2}{2c_1^{(k)}(\lambda_2 + \mu_2) + c_2^{(k)}(\lambda_{11}^{(k)} + \lambda_{12}^{(k)}) + 2m^{(k)}}, \\
 \lambda_{44}^{*(k)} &= c_1^{(k)}\lambda_{44}^{(k)} + c_2^{(k)}\mu_2 - \frac{c_1^{(k)} c_2^{(k)} (\lambda_{44}^{(k)} - \mu_2)^2}{c_1^{(k)}\mu_2 + c_2^{(k)}\lambda_{44}^{(k)} + s^{(k)}}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

Ефективні характеристики (1) є компонентами тензорів ефективних пружних характеристик в локальній системі координат x'_i , де вісь x'_3 паралельна волокнам підсистеми. Переїдемо до загальної системи координат згідно перетворенню

$$x_i = \alpha_{ij} x'_j; \quad x'_i = \alpha_{ji} x_j; \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_{11} &= \cos \theta \cos \varphi; \quad \alpha_{12} = -\sin \varphi; \quad \alpha_{13} = \sin \theta \cos \varphi; \quad \alpha_{21} = \cos \theta \sin \varphi; \\
 \alpha_{22} &= \cos \varphi; \quad \alpha_{23} = \sin \theta \sin \varphi; \quad \alpha_{31} = -\sin \theta; \quad \alpha_{32} = 0; \quad \alpha_{33} = \cos \theta. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Тоді тензори ефективних деформативних характеристик $\lambda_{ijlm}^{*(k)}$ в загальній системі координат виражаються через відповідні тензори $\lambda_{ijlm}^{*(k)}$ в локальній системі координат співвідношеннями

$$\lambda_{ijlm}^{**} = \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{lr} \alpha_{ms} \lambda_{pqrs}^*. \quad (4)$$

Ефективні характеристики цієї системи, що є волокнистим матеріалом з просторово розорієтованими волокнами, відповідно до схеми Фойхта на другому етапі визначаються за допомогою усереднення по деякій щільноті розподілу $f(\theta, \varphi)$ визначених на першому етапі ефективних характеристик підсистем, які є односторонніми волокнистими матеріалами

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ijlm}^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \lambda_{ijlm}^{*} f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \alpha_{lr} \alpha_{ms} \lambda_{pqrs}^* f(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (5)
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що в випадку фізичної нелінійності матриці, оскільки $\lambda_2(<\varepsilon_{ij}^2>), \mu_2(<\varepsilon_{ij}^2>)$, ефективні деформативні характеристики (5) також є функціями середніх в матриці деформацій $<\varepsilon_{ij}^2>$. Тому для визначення ефективних деформативних властивостей матеріалу потрібно встановити співвідношення між середніми деформаціями в матриці $<\varepsilon_{ij}^2>$ та макродеформаціями $<<\varepsilon_{ij}>>$, що задаються:

$$c_2 <\varepsilon_{ij}^2> = -[\lambda_{ijpq}^{1*} - \lambda_{ijpq}^2]^{-1} [\lambda_{pqlm}^{**} - \lambda_{pqlm}^{1*}] <<\varepsilon_{lm}>>. \quad (6)$$

Співвідношення (1), (5), (6) дозволяють написати ітераційний алгоритм для визначення ефективних деформативних характеристик матеріалу та його напруженодеформованого стану.

На рис.1, 2 наведено графіки залежностей відповідно осьових та зсувних макронапружень від макродеформацій при різних об'ємних концентраціях волокон в випадку волокон, розташованих паралельно координатним осям. Досліджено вплив нелінійності матриці на деформування просторово-армованих композитних матеріалів. Встановлено, що при заданих осьових та зсувних деформаціях нелінійність матриці суттєво впливає на ефективні деформативні властивості та напруженено-деформований стан матеріалу при об'ємних вмістах волокон, менших відповідно за 0,1 та 0,25.

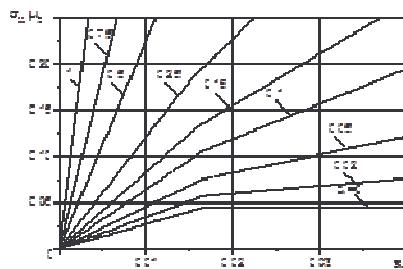


Рис. 1

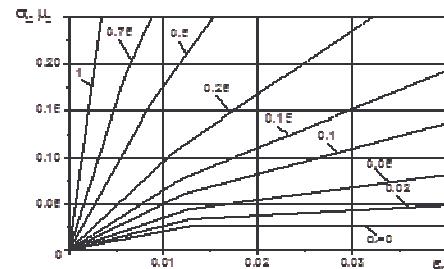


Рис. 2

Як бачимо, матеріал добре витримує як осьові, так і зсувні навантаження, і нелінійно деформується тільки при невеликому об'ємному вмісті волокон.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: волокнистий матеріал, розорієнтовані волокна, нелінійна матриця, ефективні деформативні властивості, напруженено-деформований стан, вплив нелінійності.

1. Гузь А.Н., Хорошун Л.П., Михайлова М.И., Бабич Д.В., Шикула Е.Н. Механика композитов: В 12 т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т. 12: Прикладные исследования. – К: «А.С.К.», 2003. – 398 с.
2. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М: Изд-во иностр. лит., 1961. – 778 с.
3. Хорошун Л.П., Шикула Е.Н. Деформирование физически нелинейных стохастических композитных материалов. Деформирование и кратковременная повреждаемость физически нелинейных стохастических композитных материалов / Успехи механики: В 6-ти томах / под редакцией А.Н.Гузя. / Том 6 (книга 2). – К.: Литера ЛТД, 2011. – 832 с. – С. 161-191, 436-463.
4. Khoroshun L.P., Shikula E.N.: Deformation and damage of composite materials of stochastic structures: physically nonlinear problems // International Applied Mechanics. – 2012. – V. 48, N 4. – P. 359-413.

E.N. Shikula^{1,2}, N.B. Zhukova¹

PREDICTION OF DEFORMATIVE PROPERTIES OF FIBROUS MATERIALS WITH MISORIENTED FIBERS AND NONLINEAR MATRIX

¹S.P. Timoshenko Institute of Mechanics National Academy of Science of Ukraine, Kyiv, Ukraine
e-mail: ensh@ukr.net, zhukova_n@ukr.net

² State University of Information and Telecommunication Technologies, Kyiv, Ukraine

A model of nonlinear deformation of fibrous materials with spatially disoriented fibers and a physically nonlinear matrix is constructed. To determine the effective deformative properties and stress-strain state of the material, the method of conditional moments by L.P. Khoroshun and Voigt scheme are used. The solution of nonlinear equations is built with iterative method. For each case of reinforcement, the relationship between macrostresses and macrostrains, as well as material deformation curves are constructed.

О.С.Романченко¹

ПОРІВНЯННЯ МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТА ВИБІР ОПТИМАЛЬНОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ ДЛЯ ВИГОТОВЛЕННЯ ЗАХИСНИХ КЕЙСІВ

¹Український науково-дослідний інститут спеціальної техніки
та судових експертіз Служби Безпеки України,
вул. Миколи Василенка, 3, 03113, Київ, Україна;
e-mail: iv_ictc@ssu.gov.ua

Вступ

В сучасних умовах, для транспортування обладнання, досить популярним є використання захисних кейсів (Рис.1.). Саме тому, проектування захисного кейсу вимагає ретельного вибору матеріалів, щоб забезпечити оптимальний баланс між міцністю, вагою та функціональними властивостями.

У представлений роботі було розглянуто властивості трьох типів матеріалів — стандартного пластику ABS, композиту на основі ABS з арамідним волокном та композиту на основі ABS зі скловолокном. Були проведені розрахунки щодо визначення граничних навантажень, які можуть витримувати ці матеріали.

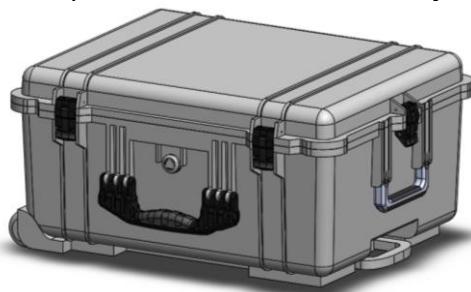


Рис.1.

1. Властивості матеріалів

1.1. Пластик ABS (Акрилонітрил-бутадіен-стирол)

Пластик ABS — це термопластичний матеріал, який поєднує в собі високу міцність та гнучкість. Він також має добру ударостійкість і може витримувати значні механічні навантаження, помірні температурні коливання, але високі температури можуть привести до деформації матеріалу, а низькі — до його крихкості.

1.2. Композит з пластика ABS з арамідним волокном

Арамідні волокна, такі як Kevlar, додають до пластика ABS додаткову міцність і зносостійкість. Композити з арамідним волокном мають ряд переваг оскільки вони мають значно вищу міцність, дуже стійкі до механічних пошкоджень і ударів. Також арамідні волокна володіють високою термостійкістю, що дозволяє композиту витримувати більші температурні коливання без втрати своїх властивостей і при цьому залишається відносно легким і гнучким, що забезпечує зручність у використанні і транспортуванні.

1.3. Композит з пластика ABS зі скловолокном

Скловолокно є ще одним популярним наповнювачем для композитів, він значно підвищує механічні властивості композиту, надаючи йому високої жорсткості і здатності витримувати великі навантаження без деформацій. Також має відмінну термостійкість і може витримувати високі температури без втрати міцності.

Граничне відношення об'єму волоконних матеріалів до основи при виготовленні композитних матеріалів може варіюватися залежно від конкретних вимог і характеристик кінцевого продукту.

Пластик ABS зі скловолокном: максимальне відношення цих композитів зазвичай варіється від 20% до 40% волокон. Це забезпечує добрий баланс між міцністю та вагою.

Пластик ABS з арамідним волокном: максимальне відношення зазвичай варіється від 10% до 30% волокон. Арамідні волокна в невеликій кількості можуть вже суттєво покращити властивості композиту.

2. Розрахунок та аналіз граничних навантажень

Для проведення точного розрахунку граничних навантажень врахуємо наступні основні параметри, такі як: **Розміри кейса:** 50.1 см x 27.9 см; **Товщина стінки кейса:** 1.5 см та **розрахункові дані Модулі пружності** які наведені нижче.

Щоб розрахувати модуль пружності композиту для кожного з випадків, використаємо формулу:

$$E_c = (E_f \times V_f) + (E_m \times (1 - V_f)) \quad (1)$$

де: E_c — модуль пружності композиту; E_f — модуль пружності волокна; E_m — модуль пружності матриці (основи); V_f — об'ємна частка волокна; V_m — об'ємна частка матриці (основи), $V_m = 1 - V_f$

2.1. Арамідне волокно:

Припустимо: Об'ємна частка арамідного волокна: $V_f = 0.25$ (25%).

Модуль пружності арамідного волокна: $E_f = 125\text{GPa}$.

Модуль пружності матриці (ABS): $E_m = 2.5\text{GPa}$.

Розрахунок:

$$E_c = (125 \text{ GPa} \times 0.25) + (2.5 \text{ GPa} \times (1 - 0.25)) = (125 \times 0.25) + (2.5 \times 0.75) \quad (2)$$

$$E_c = 31.25 \text{ GPa} + 1.875 \text{ GPa} = 33.125 \text{ GPa} \quad (3)$$

2.2. Скловолокно:

Припустимо: Об'ємна частка скловолокна: $V_f = 0.35$ (35%).

Модуль пружності скловолокна: $E_f = 70 \text{ GPa}$.

Модуль пружності матриці (ABS): $E_m = 2.5 \text{ GPa}$.

Розрахунок:

$$E_c = (70 \text{ GPa} \times 0.35) + (2.5 \text{ GPa} \times (1 - 0.35)) = (70 \times 0.35) + (2.5 \times 0.65) \quad (4)$$

$$E_c = 24.5 \text{ GPa} + 1.625 \text{ GPa} = 26.125 \text{ GPa} \quad (5)$$

Модулі пружності: ABS: 2.5 GPa; ABS і скловолокно: 26.125 GPa; ABS і арамід: 33.125 GPa

3. Розрахунок граничного навантаження на вигин

Для розрахунку граничного навантаження на вигин прямоокутної пластини можна використовувати наступну формулу:

$$\sigma_{max} = \frac{3 \cdot P_{max} \cdot L^2}{2 \cdot b \cdot t^3} \quad (6)$$

де: σ_{max} — максимальна вигинальна напруга (міцність на вигин); P_{max} — максимальне навантаження; L — довжина пластини; b — ширина пластини; t — товщина стінки.

Звідси виведемо формулу для розрахунку максимального навантаження, яка матиме вигляд:

$$P_{max} = \frac{\sigma_{max} \cdot 2 \cdot b \cdot t^3}{3 \cdot L^2} \quad (7)$$

3.1. Розрахунок для пластика ABS

Міцність на вигин (σ_{max}) — 50 MPa = 50 N/mm² = 50,000 kPa; Довжина (L) = 50.1 см = 501 мм; Ширина (b) = 27.9 см = 279 мм; Товщина стінки (t) = 1.5 см = 15 мм

Розрахунок:

$$P_{max} = \frac{50,000 \cdot 2 \cdot 279 \cdot 15^3}{3 \cdot 501^2} = \frac{50,000 \cdot 2 \cdot 279 \cdot 3,375}{3 \cdot 251,001} = \frac{50,000 \cdot 1,888,875}{753,003} \approx 125,286 N \quad (8)$$

$$P_{max} \approx 1,25 kN$$

3.2. Розрахунок для композиту ABS і скловолокна

Міцність на вигин (σ_{max}) — 200 MPa = 200 N/mm² = 200,000 kPa; Інші параметри залишаються незмінними.

Розрахунок:

$$P_{max} = \frac{200,000 \cdot 2 \cdot 279 \cdot 15^3}{3 \cdot 501^2} = \frac{200,000 \cdot 2 \cdot 279 \cdot 3,375}{3 \cdot 251,001} = \frac{200,000 \cdot 1,888,875}{753,003} \approx 500,572 N \quad (9)$$

$$P_{max} \approx 5,01 kN$$

3.3. Розрахунок для композита ABS і араміду

Міцність на вигин (σ_{max}) — 300 MPa = 300 N/mm² = 300,000 kPa; Інші параметри залишаються незмінними.

Розрахунок:

$$P_{max} = \frac{300,000 \cdot 2 \cdot 279 \cdot 15^3}{3 \cdot 501^2} = \frac{300,000 \cdot 2 \cdot 279 \cdot 3,375}{3 \cdot 251,001} = \frac{300,000 \cdot 1,888,875}{753,003} \approx 750,858 N \quad (10)$$

$$P_{max} \approx 7,51 kN$$

4. Розрахунок максимального точкового навантаження

Максимальне точкове навантаження, яке може витримати кейс, розраховується з урахуванням локальних вигинальних напруг, які виникають під дією точкового навантаження на стінку кейса.

Модулі пружності та міцність на вигин:

ABS - Міцність на вигин ~50 MPa; **ABS і скловолокно** - Міцність на вигин ~200 MPa; **ABS і арамід** -

Міцність на вигин ~300 MPa

Для розрахунку максимального точкового навантаження можна скористатися наступною формулою:

$$P_{max} = \frac{\sigma_{max} \cdot 2 \cdot b \cdot t^2}{L} \quad (11)$$

де: σ_{max} — максимальна вигинальна напруга (міцність на вигин); b — ширина пластини; t — товщина стінки; L — довжина пластини.

4.1. Розрахунок для пластика ABS

$$\sigma_{max} = 50 \text{ MPa} = 50 \text{ N/mm}^2 = 50,000 \text{ kPa}; b = 279 \text{ mm}; t = 15 \text{ mm}; L = 501 \text{ mm}.$$

Розрахунок:

$$P_{max} = \frac{50,000 \cdot 279 \cdot 15^2}{501} = \frac{50,000 \cdot 279 \cdot 225}{501} = \frac{50,000 \cdot 62,775}{501} \approx 6,250,000N \quad (12)$$

$P_{max} \approx 6,25 kN$

4.2. Розрахунок для композиту ABS і скловолокна

$\sigma_{(max)} = 200 \text{ MPa} = 200 \text{ N/mm}^2 = 200,000 \text{ kPa}$; $b = 279 \text{ mm}$; $t = 15 \text{ mm}$; $L = 501 \text{ mm}$.

Розрахунок:

$$P_{max} = \frac{200,000 \cdot 279 \cdot 15^2}{501} = \frac{200,000 \cdot 279 \cdot 225}{501} = \frac{200,000 \cdot 62,775}{501} \approx 25,000,000N \quad (13)$$

$P_{max} \approx 25 kN$

4.3. Розрахунок для композита ABS і араміду

$\sigma_{(max)} = 300 \text{ MPa} = 300 \text{ N/mm}^2 = 300,000 \text{ kPa}$; $b = 279 \text{ mm}$; $t = 15 \text{ mm}$; $L = 501 \text{ mm}$.

Розрахунок:

$$P_{max} = \frac{300,000 \cdot 279 \cdot 15^2}{501} = \frac{300,000 \cdot 279 \cdot 225}{501} = \frac{300,000 \cdot 62,775}{501} \approx 37,500,000N \quad (14)$$

$P_{max} \approx 37,5 kN$

Висновки

При виборі матеріалу для виготовлення кейсу важливо враховувати як механічні властивості, так і вагу матеріалу. В даному випадку, для кейсу з розмірами 50.1 x 27.9 x 19.3 см, та товщиною стінки 15 мм, були обрані для порівняння матеріали такі як пластик ABS, ABS з арамідним волокном та ABS зі скловолокном, що мають свої унікальні властивості, які роблять їх придатними для різних умов використання.

Пластик ABS є економічним варіантом для загальних застосувань, тоді як композити з арамідним або скловолокном забезпечують покращену міцність, термостійкість та хімічну стійкість. Також варто враховувати, що їхня вага в порівнянні зі звичайним ABS, буде вищою. Для прикладу вага такого кейсу з ABS становить приблизно 9.36 кг, з композиту ABS та скловолокна приблизно 14.40 кг, а з композиту ABS і арамідного волокна приблизно 16.20 кг. Вибір між цими матеріалами залежить від конкретних вимог до кейсів, включаючи рівень захисту, температурні умови та вплив агресивних чинників.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: матеріал, ABS, пластик, композит, арамід, волокно, скловолокно, граничне навантаження, модуль пружності, об'ємна частина, міцність, термостійкість.

Список літератури

1. Боровиков, В. В. Полімерні матеріали та їх властивості. — Харків: ХНУРЕ, 2017. — 352 с.
2. Попович, М. О. Композити на основі полімерів: теорія і застосування. — Львів: Видавництво ЛНУ, 2015. — 412
3. Campbell, F. C. Manufacturing Technology for Aerospace Structural Materials. — Elsevier, 2006. — 656 p
4. Chawla, K. K. Composite Materials: Science and Engineering. — Springer, 2013. — 568 p.

O.S.Romanchenko¹

COMPARISON OF MECHANICAL CHARACTERISTICS AND SELECTION OF THE OPTIMAL COMPOSITE MATERIAL FOR THE MANUFACTURE OF PROTECTIVE CASES

¹Ukrainian Scientific and Research Institute of Special Equipment
and Forensic Expertise of the Security Service of Ukraine,
st. Mykola Vasylenko, 3, 03113, Kyiv, Ukraine;
e-mail: iv_ictc@ssu.gov.ua

KEY WORDS: material, ABS, plastic, composite, aramid, fiber, glass fiber, ultimate load, modulus of elasticity, volumetric part, strength, heat resistance

В.В. Пастернак¹, Г.Т. Сулим²

**МАТРИЧНИЙ ПІДХІД ПОБУДОВИ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ
ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ МІКРОПОЛЯРНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ
АНІЗОТРОПНИХ ТІЛ**

¹*Волинський національний університет імені Лесі Українки,
просп. Волі, 13, 43025, Луцьк, Україна;
e-mail: pasternak.viktoriia@vnu.edu.ua*

²*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
бул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна*

Мікрополярну теорію пружності використовують для опису матеріалів зі складною мікроструктурою, зокрема, ґрунтів, полікристалів та піністих середовищ. На даний час досить добре вивчені моделі мікрополярної теорії пружності для ізотропних матеріалів, а анізотропних стосуються лише поодинокі роботи (див. напр. [1]). Для теоретичного дослідження останніх важливу роль відіграють фундаментальні розв'язки, які у досить громіздкому індексному вигляді вдалося отримати в [1].

У цій роботі для спрощення отримання та запису результатуючих математичних виразів, а також пришвидшення обчислень фундаментальних розв'язків до визначальних співвідношень задачі застосоване інтегральне перетворення Радона. У результаті вдалося отримати матрично-векторні співвідношення задачі. Розв'язуючи їх стосовно других похідних за скалярним параметром Радона та застосовуючи обернене перетворення вдалося записати фундаментальні розв'язки мікрополярної теорії пружності анізотропних тіл у вигляді добутку регулярних контурних інтегралів уздовж одниничного кола та явно записаного сингулярного множника. Використовуючи теорію узагальнених функцій вдалося отримати необхідні для розв'язування конкретних задач явні у квадратурах вирази для першої та другої похідних від фундаментального розв'язку. Для швидкозбіжного обчислення цих виразів запропоновано використовувати квадратурну формулу трапецій, що на відміну від використаної в [1] ефективнішої на перший погляд квадратури Гаусса, має у цьому конкретному випадку експоненційну збіжність.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: мікрополярна теорія пружності, анізотропний, перетворення Радона

1. Wu T.-H., Chen T., Weng C.-N. Green's functions and Eshelby tensors for an ellipsoidal inclusion in a non-centrosymmetric and anisotropic micropolar medium // Int. J. Sol. Struct. – 2015. – **64–65**. – P. 1–8.

V.V. Pasternak¹, H.T. Sulym²

**MATRIX APPROACH FOR DERIVATION OF 3D FUNDAMENTAL SOLUTION OF
ANISOTROPIC MICROPOLAR ELASTICITY**

¹ *Lesya Ukrainka Volyn National University,
Voli Avenue 13, 43025, Lutsk, Ukraine, e-mail: pasternak.viktoriia@vnu.edu.ua*

² *Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine,
Naukova Str. 3-b, 79060, Lviv, Ukraine*

This study combines matrix approach and Radon integral transform to obtain 3D fundamental solution of anisotropic micropolar elasticity.

В.А. Декрет, В.М. Бистров, В.С. Зеленський

**ДОСЛІДЖЕННЯ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ
ШАРУВАТОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ ПРИ СТИСКАННІ
НА ОСНОВІ ПРЕДСТАВНИЦЬКОГО ЕЛЕМЕНТУ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: umer@inmech.kyiv.ua*

При моделюванні процесу руйнування односпрямованих композитних матеріалів (КМ), може бути застосований підхід, названий обчислювальною мікромеханікою [8], який враховує структурні компоненти композиту шляхом побудови представницького елементу об'єму (RVE, representative volume element). Такий представницький елемент успадковує мікроструктуру КМ та утворюється обмежувальними поверхнями, паралельними обрамим координатним площинам, в яких розміщена достатня кількість компонентів (безпосередньо волокон або шарів композиту), щоб відповісти обраному критерію представлення. Обмежувальні поверхні піддаються дії заданих зовнішніх сил або переміщенням відповідно до режимів навантаження в одиночній або комбінованій формі. Локальні поля напружень в компонентах (або на межі контакту компонент) зазвичай розраховуються чисельно (методом кінцевих елементів, методом скінченних різниць тощо) та до них застосовуються певні критерії виникнення руйнування. При стисканні односпрямованого КМ вздовж напрямку розташування компонентів одним із можливих критеріїв руйнування може розглядатись втрата стійкості у структурі КМ (армуючих неперервних або коротких волокон або шарів) [2, 3, 5], що може привести до втрати несучої здатності матеріалу або ініціювати, інші механізми руйнування, зокрема такий, як “kinking” [2]. При моделюванні КМ нескінченним або напівнескінченним середовищем граничні умови на відповідних границях представницького елементу матеріалу повинні відповідати умовам періодичності [2] або умовам симетрії [5].

У даній роботі розглядається проблема вибору на основі обчислювального експерименту представницького елементу шаруватого композитного матеріалу при дослідженні втрати стійкості у структурі композитного матеріалу при стисканні поверхневим навантаженням. Приповерхнева втрата стійкості відповідає руйнуванню у вигляді змінання торців зразків та елементів конструкцій із композитних матеріалів [3, 5]. Проблема досліджується на основі тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформованих тіл (ТЛТСДТ) [6] в рамках моделі кусково-однорідного середовища із застосуванням чисельного підходу на основі методу сіток [1, 2]. При розв’язанні дискретних задач великої розмірності використовуються паралельні обчислення і суперкомп’ютерні технології [7]. Проведено порівняння із результатами, щодо визначення представницького елементу матеріалу, який надає наближений підхід [4].

Для композитного матеріалу і умов його навантаження, представлених на рис. 1, *a*, переход від напівнескінченної області до області скінченних розмірів, яка відповідає представницькому елементу (рис 1, *b*), проводиться, виходячи із умов регулярності і періодичності композитної структури, симетричності умов навантаження. Умовами вибору представницького елементу є досягнення критичними параметрами стійкості сталого значення при збільшенні кількості компонентів КМ. У даній роботі досліджено залежність форм втрати стійкості та критичних

навантажень від розмірів b_i розрахункової області вздовж ліній докладання поверхневого навантаження із зміною кількості шарів багатошарового представницького елемента КМ.

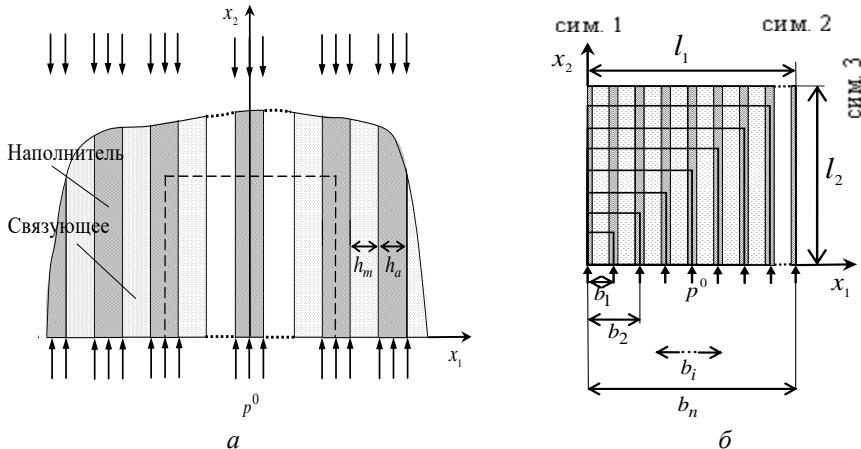


Рис.1.

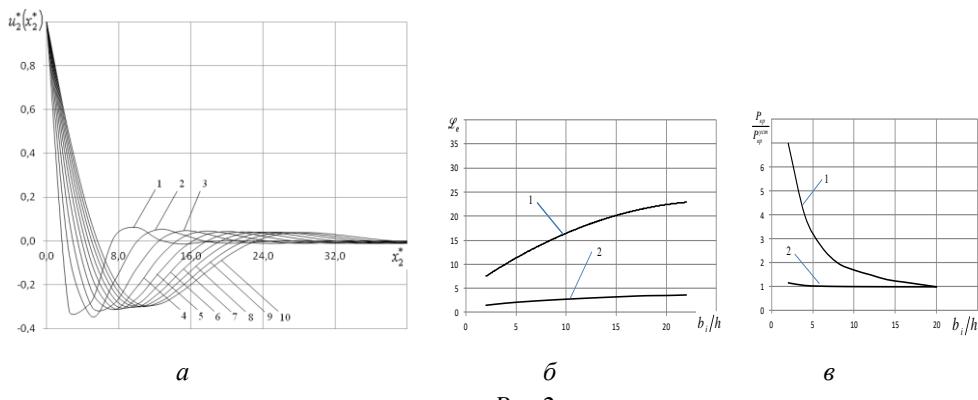


Рис.2.

Розглянуто КМ з наступними механічними та геометричними характеристиками: $E_a E_m^{-1} = 100$, $\nu_a = \nu_m = 0,3$, $c_a = h_a/h = 0,5$, $h = h_a + h_m$ (c_a – концентрація армуючих шарів). Тут E_a, E_m и ν_a, ν_m – відповідно, модулі Юнга и коефіцієнти Пуассона армуючих шарів і шарів матриці. Розрахунки проводились для розмірів $b_i = 2hi$, які відповідають значенням $i = 1 \div 10$, указаним на рис. 2, a , біля відповідних кривих.

На рис.2, a представлені форми втрати стійкості $u_2^*(x_2^*) = u_2(x_2/h)u_2^{\max}$ у перерізі $x_i = b_i/2$ середнього армуючого шару представницького елементу КМ для різних значень розміру b_i розрахункової області, де u_2^{\max} – максимальне значення збурення переміщень в указаному перерізі. На рис. 2, b показана залежність довжини хвилі \mathcal{L}_e форм втрати стійкості, а на рис. 2, c залежність критичних навантажень p_{kp}/p_{kp}^{yem} від розміру b_i , де p_{kp}^{yem} – усталене критичне навантаження для значення

$b_n = 20h$ (максимальне значення в рамках проведеного дослідження). Криві 1 відповідають результатам, отриманим у даній роботі на основі ТЛТСДТ в рамках моделі кусково-однорідного середовища, криві 2 – результатам, представленим у роботі [4], які отримані на основі осереднення нормальних та тангенціальних напружень для тришарових представницьких елементів шаруватого композитного матеріалу при рівномірному поверхневому навантаженні.

За отриманими результатами можна зробити наступні висновки. Явище зближення форм втрати стійкості при збільшенні кількості шарів у розрахунковій області та її розміру вздовж лінії поверхневого навантаження, а також той факт, що отримані залежності для довжини хвилі форм втрати стійкості та критичних навантажень мають усталений характер дозволяють визначити представницький елемент КМ для дослідження проблеми руйнування внаслідок приповерхневої втрати стійкості. При застосуванні підходу [4], який можна вважати наближенним, такої можливості немає внаслідок практичної відсутності у аналітичних оцінках для критичних параметрів стійкості їх залежності від співвідношення розмірів розрахункової області та параметрів структури КМ.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: шаруватий композитний матеріал, представницький елемент, приповерхнева втрата стійкості, тривимірна лінеаризована теорія стійкості, чисельний підхід.

1. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.В., Василенко А.Т. и др. Численные методы. Механика композитов: В 12-и т. / Под общей ред. А.Н. Гузя. Т.11. К.: «А.С.К.». 2002. 448 с
2. Гузь А.Н., Декрет В.А. Модель коротких волокон в теории устойчивости композитов. – Saarbrücken: LAP Lambert acad. publ., 2015. – 315 с.
3. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии: В 2-х т. – К.: “ЛИТЕРА”, 2008. Т.1. Разрушение в структуре материала. – 592 с.
4. Biot M.A. Edge Buckling of Laminated Medium // Int. J. Solids Structures. – 1968. – 4, N 1. – P. 125 – 137.
5. Bystrov V.M., Dekret V.A., Zelenskii V.S. Loss of Stability in a Composite Laminate Compressed by a Surface Load // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 2. – P. 156 – 163.
6. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. Berlin: Springer-Verlag Heidelberg, 1999. – 555p.
7. Khimich A.N., Dekret V.A., Popov A.V., Chistyakov A.V. Numerical Study of the Stability of Composite Materials on Computers of Hybrid Architecture // Journal of Automation and Information Sciences. – 2018. – 50, N 7. – P. 7 – 24.
8. Naya, F., Lopes, C. S., González, C., & LLorca, J. Computational micromechanics strategies for the analysis of failure in unidirectional composite. Numerical Modelling of Failure in Advanced Composite Materials. – 2015. – P. 411–433.

V.A. Dekret, V.M. Bystrov, V.S. Zelenskii

STUDY OF NEAR-SURFACE BUCKLING OF LAYERED COMPOSITE MATERIAL UNDER COMPRESSION BASED ON REPRESENTATIVE ELEMENT

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: numer@inmech.kyiv.ua

The problem of selection based on a computational experiment of a representative element of a layered composite material in the study of the near-surface buckling in the structure of the composite material is considered. The problem is investigated within the framework of the three-dimensional linearized theory of stability of deformed bodies (TLTSDT) within the framework of the model of piecewise homogeneous medium, with the use of a numerical approach based on the grid method and the use of parallel computing and supercomputer technologies for solving discrete problems.

О . О . Хотенко, І.М. Хотенко

**СУЧАСНИЙ СТАН ТА АКТУАЛЬНІСТЬ ДОСЛІДЖЕНЬ
НЕЛІНІЙНИХ ПРУЖНИХ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ РЕЛЕЯ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: h.khotenko@gmail.com*

Теоретичні дослідження хвиль Релея представлени в великою кількістю фундаментальних праць, історія яких починається в 1885 році. Інтерес до експериментальних досліджень, що не лише не спадає, а і суттєво пожвавився за останні роки, викликаний в першу чергу, широким спектром застосувань властивостей поверхневих акустичних хвиль і загальним розвитком технологій.

Корисний діапазон частот для науково-орієнтованої акустики простягається на 15 порядків амплітуди. Фізика поверхневих хвиль охоплює ряд різноманітних застосувань. Далі коротко охарактеризуємо найактуальніші з них.

Протягом останніх десятиліть інновації для радикально нових пристройів в основному були зумовлені керуванням електронами (електроніка) і фотонами (фотоніка) або магнонами (магноніка) і спіновими збудженнями (спінтроніка). Поверхневі хвилі ідеально підходять для зондування і контролю елементарних збуджень в конденсованій речовині на межі одиночних квантових збуджень.

Квантова акустика є відносно новою дослідницькою наукою, яка вивчає взаємодію між матерією та звуком, за аналогією квантової оптики, що вивчає взаємодію між матерією та світлом. З 2014 року були повторені кілька експериментів з області оптики в акустичній області, що дозволяє використовувати властивості, доведені в оптиці в масштабі 1:10⁵, через різницю швидкостей поширення світла та звуку. Це сприяє загальній мікромініатюризації пристройів.

Оптико-механічні кристали - метаматеріали, що підтримують як фотонні, так і фононні смугові структури, є універсальною платформою для керування або обмеження світла та звуку в наномасштабі. Гібридні напівпровідникові пристрой на поверхневих хвильах можуть поєднувати в собі концепції інженерії та фундаментальних досліджень шляхом об'єднання трьох збуджень в конденсованій речовині: електронів, фотонів і фононів.

Оптомеханіка резонатора – це розділ фізики, що фокусується на взаємодії між світлом та механічними об'єктивами в низькоенергетичних масштабах.

Стрейнтроніка – розділ спінтроніки, що досліджує перемагнічування речовин під дією механічних напружень. На основі магнітопружин та магніострикційних ефектів (взаємно-обернені явища) створюються функціональні вузли для різних типів магнітоелектронних пристройів, в першу чергу датчиків магнітного поля і п'єзомагнітних реєстрів схем комп'ютерної логіки тощо. За останні п'ятнадцять років ця тема помітно відродилася з набагато більшою увагою до потенційних застосувань у галузі магнітного зберігання даних, спінтроніки або магноніки. Дистанційно збуджені поверхневі хвилі можуть діяти як реле для спінових хвиль через резонансний зв'язок і локально змінювати їх амплітуду або фазу.

Пристрої на поверхневих хвильах проводять обробку електричних сигналів. Кілька десятків акустичних радіочастотних фільтрів є невід'ємними частинами майже кожного бездротового пристроя (від LTE до 5G і вище) [2]. Вже близько 40 років пристрой на поверхневих хвильах є ключовими компонентами бездротових систем передачі даних.

Мініатюрні розміри та відсутність необхідності ручного налаштування призвели до їх повсюдного використання в цифрових мобільних телефонних системах, представлених у 1990-х роках. Можна стверджувати, що бездротові системи цифрового зв'язку не отримали б такого розвитку без ПАХ-фільтрів середніх частот, радіочастотних фільтрів, дуплексорів і мультиплексорів для базових станцій і мобільних телефонів. Незважаючи на спроби стандартизації глобального зв'язку, сьогодні існує кілька несумісних систем з різними частотними діапазонами і різними схемами модуляції. Мікроакустичні пристрой є єдиною технологією, здатною забезпечити частотну селективність при досить низьких витратах і при досить малих форм-факторах. Як наслідок, на сьогодні виробники відвантажують мільйони одиниць на рік.

Сучасна техніка, що носить назву агрегації несучих (CA), тобто одночасна передача даних в декількох частотних діапазонах і через одну антенну для збільшення швидкості передачі даних, призводить до появи ще більшої кількості радіочастотних фільтрів, які мають бути об'єднані в мультиплексори від 1 до n в упаковках якомога меншого розміру. Попит на бездротову передачу даних продовжує зростати. Переход до п'ятого покоління (5G) вимагає ще більше радіочастотних фільтрів і мультиплексорів із ще більш розвиненими характеристиками.

Компаніям вдавалося постійно скорочувати розмір фільтрів на поверхневих хвильах в період з 1990 по 2010 рік. З того часу прогрес сповільнився. Необхідно розробляти нові матеріали з покращеними властивостями, тому останніми роками активно досліджується взаємодія поверхневих хвиль з 2-D, 3-D та 4-D матеріалами.

Датчики є одним з найважливіших елементів комунікації. Дуже часто це означає, що система або машина досліджує свій власний стан або умови навколошнього середовища, які потім передаються іншій, дуже часто системі прийняття рішень. Отже, датчики відіграють важливу роль у функціонуванні складних систем і набули широкого поширення. Досі датчики в основному обмежуються вимірюванням однієї або декількох властивостей навколошнього середовища, пристрою, або стану життєво важливих функцій живих істот

Історично датчики використовувалися для вимірювання величин, важливих у повсякденному житті, таких як температура, тиск і вага. Потім були розроблені датчики для розширення сенсорних можливостей людини. До них відносяться світлоочутливі пристрой в спектральних діапазонах, де ми не можемо бачити, дуже складні слухові органи, тактильні датчики і датчики, що імітують наше сприйняття смаку і запаху, та інші. Останні відіграють дуже важливу роль у виявленні хімічних речовин, як отрути, забруднювачі, хімічні та біологічні бойові та вибухові речовини. В останні роки вони також використовуються для аналізу дихання на предмет проблем, пов'язаних зі здоров'ям. Датчики набувають все більшого значення в автомобілях і зв'язку між водієм і автомобілем, а також для машин автономного водіння і, в так званих розумних будинках і цифровій індустріалізації.

Датчик зазвичай складається з активного чутливого пристроя та «перетворювача», який вловлює реакцію датчика, як-от зміну провідності, об'єму, кольору тощо, і перетворює її в (машинну) величину, таку як напруга або подібне. У багатьох випадках ПАХ-датчики відіграють важливу роль в сенсорних пристроях, оскільки вони поєднують в собі надзвичайну чутливість і потенціал для бездротового опитування.

Перше застосування поверхневих хвиль в науках про життя відбулося на початку 2000-х років і все ще є галуззю, що швидко розвивається. Використання поверхневих хвиль в науці про життя та мікрофлюїди і акустофлюїди призвело до створення так званих систем «лабораторії на чіпі» (Lab-on-Chip) або мікрототального аналізу (μ TAS). Їх застосування включає розділення, сортування, промивання, зміщування, створення візерунків, збагачення, агрегацію та 3D-культивування клітин. Типовими об'єктами, якими маніпулюють, є біологічні клітини, бактерії, мікро/нанокульки, краплі, бульбашки, везикули або саме рідке середовище.

Новою сферою застосування є використання акустофлюїди для моделювання тканин та інженерії. Нещодавно було виявлено сприятливий ефект покращення якості конструкцій хрящової тканини, отриманих за допомогою акустофлюїдної біомеханічної стимуляції. Іншим прикладом застосування акустофлюїдної технології є

рециркуляція рідкого електроліту в акумуляторах, розділення мінералів і викопного пилку в геологічних дослідженнях, а також повітряні фільтри для наночастинок і аерозолів.

Серед усіх типів сейсмічних хвиль, хвиля Релея має найнижчу швидкість, низьку частоту, малий коефіцієнт згасання, довгу тривалість існування та високу амплітуду.

Останніми роками для захисту будівель під час землетрусів використовуються, натхненні електромагнітними, пружні метаматеріали [6]. Їх ефективність при ослабленні сейсмічних хвиль підтверджена експериментами геофізичного масштабу.

Механічні метаматеріали, тобто, такі, що мають незвичайні механічні властивості, залежно від внутрішньої структури поділяються на гратчасті, стільникові, хіральні, орігами та кірігами. Цікавий приклад застосування останнього – робота групи американських вчених, що була опублікована у 2022 році в журналі *Science Robotics* [3]. Дослідники з метою створення універсальних роботів, взялися до розробки матеріалу, який міг би багаторазово змінювати свою форму, зберігати її стільки часу, скільки потрібно, а потім повернутися до початкової.

Останнім часом з'явився новий клас пружних матеріалів - сейсмічні метаматеріали для регулювання сейсмічних хвиль за рахунок заломлення, відбиття та загасання [5]. Тенденції кількості досліджень з ослаблення сейсмічної енергії шляхом введення пружних метаматеріалів показали тренд на зростання в останні роки.

Не менш важливим для науково-технічного прогресу є неруйнівний контроль. Можна привести приклад дослідження, опублікованого в 2022 році міжнародною групою вчених [4], що фокусується на оцінці спричиненої дислокацією нелінійності матеріалу в рейках, спричиненої падінням парапетів або великих каменів під час землетрусу чи зсуву ґрунтів з використанням нелінійних хвиль Релея.

Отже, виходячи з усього викладеного, можна зробити висновок, що, незважаючи на тривалу історію розвитку досліджень нелінійних пружних поверхневих хвиль Релея, їх актуальність не знижується, а навпаки, стрімко зростає з розширенням їх застосувань, появою нових винаходів та з застосуванням нових матеріалів та загальним продовженням науково-технічного прогресу в усіх сферах науки та техніки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійні пружні хвилі, поверхневі хвилі Релея, метаматеріали, сейсмо-захист, мікрофлюїдика, спінtronіка, лабораторія-на-чипі, фільтри, детектори, неруйнівний контроль.

1. Хотенко О.О. До теорії квадратично нелінійних хвиль Релея – Дис.:к.ф.-м.н.01.02.04. – Київ, 2014. – 185с.
2. Delsing P. et al. The 2019 surface acoustic waves roadmap // 2019 J. Phys. D: Appl. Phys. 52 353001.
3. Dohgyu H. et al. Shape morphing mechanical metamaterials through reversible plasticity // Sci. Robot.7 – 2022 – eabg2171.
4. Masurkar F. et al. Nondestructive testing of rails using nonlinear Rayleigh waves // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: J. of Mech. Eng. Sci. – 2022. – 236(15):8527-8541.
5. Mu D. et al. A Review of Research on Seismic Metamaterials // Adv. Eng. Mater. – 2020. - 1901148.
6. Palermo A. et al. Rayleigh wave propagation in nonlinear metasurfaces // J. of Sound and Vibration – 2022. - V 520 – 116599

O.O.Khotenko, I.M. Khotenko
THE CURRENT STATE AND RELEVANCE OF RESEARCHES
ON NONLINEAR ELASTIC SURFACE RAYLEIGH WAVES
S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: h.khotenko@gmail.com

The history of development and the current state of researches on nonlinear elastic surface Rayleigh waves are analyzed. The most important branches of studies and their implementations are highlighted. The importance of each current application for scientific and technological progress are explained. The relevance growth of the study on nonlinear Rayleigh waves is assumed on the base of their current and widening of future applications importance and proved technology development.

KEY WORDS: nonlinear elastic waves, Rayleigh surface waves, metamaterials, seismic protection, microfluidics, spintronics, lab-on-a-chip, filters, detectors, non-destructive testing.

М . М . Т к а ч у к ^{1,2}, А . М . Т к а ч у к ²

НЕГЛАДКЕ МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ В МЕХАНІЦІ

¹Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут», МОН України,
бул. Кирпичова, 2, 61002, Харків, Україна;
e-mail: m.tkachuk@tmm-sapr.org

²Карлстадський університет,
Університетгатан 2, 651 88 Карлстад, Швеція.

Ми розробили нову модель дискретної мережі [1] для нетканых матеріалів. Вона базується на таких спрощених припущеннях:

- волокна розглядаються як нерозтяжні кабелі, що утворюють центральну силову мережу; не мають пружного подовження при навантаженні волокон на розтяг; при стисненні сегменти ослаблюються і не створюють осьової сили;
- волокна ковзають одне відносно одного у вузлах поєднання, коли різниця сил на протилежних сторонах вузла перевищує межу тертя; межі текучості не змінюються в процесі деформації.

Незалежне від швидкості ковзання та квазістатичне рівноважне навантаження такої мережевої структури визначене в рамках теорії стандартних дисипативних систем. Принцип мінімуму для інкрементального потенціалу сформульовано відносно змінних типу переміщень. Він приймає форму задачі конічного програмування другого порядку (КПДП), подібно до випадку еластичних кабельних мереж [1]. Спряженій принцип додаткової енергії виводиться відносно змінних типу напружень.

Модель відтворює великі необоротні деформації нетканых матеріалів (Рис.1). Механізм пошкодження реалізований як висмикування волокон з вузлів. Ми моделюємо мережеву мікроструктуру зразка цілком замість репрезентативного об'ємного елемента.

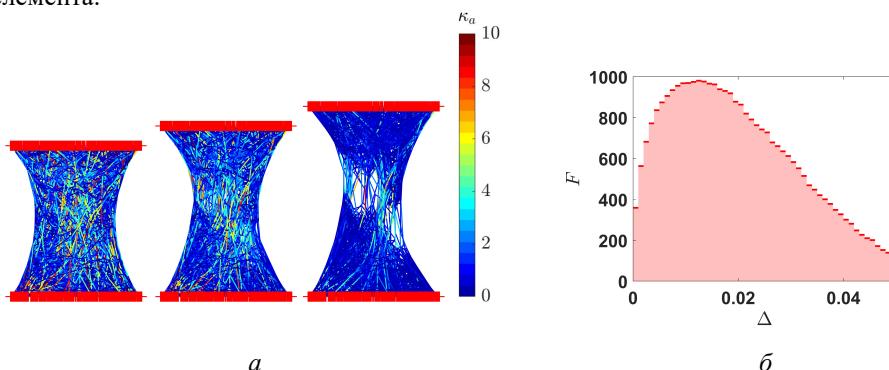


Рис.1.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: неткані матеріали, конічне програмування,

1. Tkachuk, M., & Tkachuk, A. Large deformation of cable networks with fiber sliding as a second-order cone programming // International Journal of Solids and Structures. – 2024. – **298**. – P. 112848.

M. M. Tkachuk^{1,2}, A. M. Tkachuk²

NONSMOOTH MATHEMATICAL PROGRAMMING IN MECHANICS

¹ *National Technical University “Kharkiv Polytechnical Institute”,
vul. Kyrychova, 2, 61002, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: tma@tmm-sapr.org*

² *Karlstad University,
Universitetsgatan 2, 651 88 Karlstad, Sweden*

The quasi-static loading of networks of inextensible fibers with relative sliding is constituted within the theory of standard dissipative systems. A minimum principle for incremental potential and a strictly dual complementary energy principle are derived as second-order cone programming (SOCP) problems. Both SOCP problems can be solved numerically by interior-point methods.

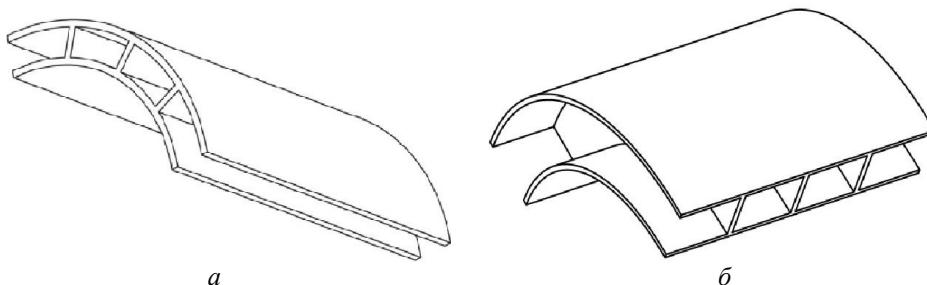
Є.А.Сторожук, А.В. Лисенко

ВПЛИВ ВИДУ РЕБРИСТОГО ЗАПОВНЮВАЧА НА ДИНАМІЧНУ ПОВЕДІНКУ ТРИШАРОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: stevan@ukr.net; aniutapavliuk@gmail.com*

В даній роботі досліджено вплив розміщення ребер жорсткості в заповнювачеві на нестационарні коливання тришарової циліндричної оболонки еліптичного поперечного перерізу.

Розглядається тришарова циліндрична оболонка еліптичного перерізу з дискретним поперечним або поздовжнім ребристим наповнювачем за дії внутрішнього рівномірно розподіленого нестационарного навантаження. Неоднорідна тришарова пружна структура складається з двох циліндрических оболонок (зовнішньої та внутрішньої обшивок), які жорстко з'єднані між собою поздовжніми (рис 1.а) або поперечними ребрами жорсткості (рис 1.б).



Ruc.1.

Коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни координатних поверхонь вихідних оболонок визначаємо наступним чином

$$A_1 = 1; k_2 = 0;$$

$$A_2 = (a_k^2 \cos^2 \alpha_2 + b_k^2 \sin^2 \alpha_2)^{1/2} \quad (1)$$

$$k_2 = a_k b_k (a_k^2 \cos^2 \alpha_2 + b_k^2 \sin^2 \alpha_2)^{-3/2}; k=1, 2,$$

де a_k і b_k – півосі поперечного перерізу (еліпса) відповідно циліндричної оболонки.

Основні співвідношення отримані з використанням теорії оболонок і стержнів типу Тимошенка [1].

Прийнято, що деформований стан внутрішньої і зовнішньої обшивок (відповідно індекси 1 і 2) може бути визначений векторами узагальнених переміщень відповідних серединних поверхонь $\bar{U}_1 = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, \varphi_1^1, \varphi_2^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_1^2, u_2^2, u_3^2, \varphi_1^2, \varphi_2^2)^T$. При розгляді елементів дискретного наповнювача покладається, що деформований стан поздовжнього i-го ребра може бути визначений вектором узагальнених переміщень

$\bar{U}_i = (u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, \varphi_{1i}, \varphi_{2i})^T$, а поперечного j -го ребра – вектором узагальнених переміщень $\bar{U}_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \varphi_{1j}, \varphi_{2j})^T$.

Для виведення рівнянь коливань тришарової пружної структури з дискретним наповнювачем використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського [1]. Після стандартних перетворень в варіаційному рівнянніз врахуванням виразів для потенціальної і кінетичної енергії для обшивок і ребер згідно [1–2], отримуємо дві групи рівнянь – для обшивок і ребристого заповнювача.

Рівняння коливань тришарової циліндричної оболонки еліптичного перерізу з врахуванням дискретності поздовжнього заповнювача записуються у вигляді:

– для внутрішньої і зовнішньої обшивок

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{11}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial S^k}{\partial s_2} &= \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial S^k}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{22}^k}{\partial s_2} + k_2 T_{23}^k &= \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial T_{13}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial T_{23}^k}{\partial s_2} - k_2 T_{22}^k + P_3^k(s_1, s_2, t) &= \rho_k h_k \frac{\partial^2 u_3^k}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{11}^k}{\partial s_1} + \frac{\partial H^k}{\partial s_2} - T_{13}^k &= \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1^k}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial H^k}{\partial s_1} + \frac{\partial M_{22}^k}{\partial s_2} - T_{23}^k &= \rho_k \frac{h_k^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2^k}{\partial t^2}; \quad k = 1, 2; \end{aligned} \quad (2)$$

– для i -го поздовжнього ребра

$$\begin{aligned} [S]_i + \frac{\partial T_{11i}}{\partial s_1} &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{1i}}{\partial t^2}; [T_{22}]_i + \frac{\partial T_{12i}}{\partial s_1} &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{2i}}{\partial t^2}; \\ [T_{23}]_i + \frac{\partial T_{13i}}{\partial s_1} &= \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_{3i}}{\partial t^2}; [H]_i + \frac{\partial M_{11i}}{\partial s_1} - T_{13i} &= \rho_i I_{1i} \frac{\partial^2 \varphi_{1i}}{\partial t^2}; \\ [M_{22}]_i + \frac{\partial M_{12i}}{\partial s_1} &= \rho_i I_{kri} \frac{\partial^2 \varphi_{2i}}{\partial t^2}; \quad i = \overline{1, I} \end{aligned} \quad (3)$$

У співвідношеннях (3) величини типу $[S]_i, [T_{22}]_i, [T_{23}]_i, [H]_i, [M_{22}]_i$ відповідають сумарним значенням зусиль- моментів зовнішньої і внутрішньої обшивок, які діють на i -й поздовжній дискретний елемент заповнювача.

Для тришарової оболонки з поперечним ребристим заповнювачем потрібно рівняння (3) замінити на рівняння коливань j -го поперечного ребра

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [T_{11}]_j &= \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j} T_{23j} + [S]_j &= \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right); \\ \frac{\partial T_{23j}}{\partial s_2} - k_{2j} T_{22j} + [T_{13}]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial M_{21j}}{\partial s_2} + h_{cj} \frac{\partial T_{21j}}{\partial s_2} + [M_{11}]_j &= \rho_j F_j \left(\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{cj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{22j}}{\partial s_2} - T_{23j} \pm h_{cj} \left(\frac{\partial T_{22j}}{\partial s_2} + k_{2j} T_{23j} \right) + [H]_j = \\ = \rho_j F_j \left(\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Чисельний алгоритм розв'язання даної задачі базується на спільному використанні інтегро-інтерполяційного методу побудови різницевих схем за просторовими координатами і явній скінченно-різницевій схемі інтегрування за часовою координатою t [1–2]. Однією з особливостей задач коливань неоднорідних оболонок з врахуванням дискретного розташування ребер є наявність розривних коефіцієнтів у вихідних рівняннях. Чисельний розв'язок задач теорії тришарових циліндрических оболонок еліптичного перетину з врахуванням ребристого наповнювача зводиться до розгляду наступних етапів: 1) знаходження розв'язку в гладкій області для оболонок – рівняння (2); 2) знаходження розв'язку на лінії розриву вздовж осі Ox для i -го ребра – рівняння (3); 3) знаходження розв'язку на лінії розриву вздовж осі Oy для j -го ребра – рівняння (4).

В роботі конкретні числові результати отримані для замкнутих тришарових циліндрических оболонок еліптичного перерізу з дискретним ребристим заповнювачем двох видів – поздовжнім і поперечним. В обох випадках вважалося, що торці оболонок жорстко защемлені. Досліджено вплив геометричних і фізико-механічних параметрів обшивок і ребер, а також виду заповнювача на числові характеристики хвильових процесів у еліптических тришарових циліндрических оболонках, які знаходяться під дією внутрішнього рівномірно розподіленого імпульсного навантаження.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тришарова циліндрична оболонка, еліптичний поперечний переріз, теорія оболонок та ребер Тимошенка, вимушенні коливання, чисельний алгоритм.

Список літератури

1. Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / под ред. акад. НАН України А.Н. Гузя. – К.: Ізд. – полиграф.центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель С.Э. Вынужденные нестационарные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с продольно поперечным дискретным ребристым наполнителем // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 2. – С. 60 – 67.
3. Павлюк А.В. Динаміка тришарової циліндричної оболонки еліптичного перерізу з поздовжньо-поперечним ребристим дискретним наповнювачем // Фізика і хімія твердого тіла. – 2017. – 18, № 2. – С. 243 – 248.

E.A.Storoguk, A.V. Lysenko

THE INFLUENCE OF THE TYPE OF RIBBED FILLER ON THE DYNAMIC BEHAVIOR OF A THREE-LAYER CYLINDRICAL SHELL OF ELLIPTICAL SECTION

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: stevan@ukr.net; aniutapavliuk@gmail.com

This paper considers the problem of forced oscillations of an elliptical three-layer cylindrical shell with discrete longitudinal and transverse ribbed filler under the action of non-stationary loads. The system of differential equations of oscillations is built on the basis of the Tymoshenko-type theory of shells and rods. The numerical algorithm for solving the given problem is described. Numerical results are obtained for a closed shell with rigidly clamped ends under the action of an impulsive surface load.

Ю.Ю. Абросов, Ю.І. Лелюх

РОЗРАХУНОК ДОВГОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ СУПЕРКОЛОВОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

Вступ. Циліндричні оболонки неколового поперечного перерізу широко застосовуються в техніці. Наприклад, в будівництві еліптичні порожністі профілі поєднують в собі переваги круглих і прямокутних профілів [2]. Перспективними є оболонки так званого супереліптичного перерізу [3], який виглядає прямокутником з заокругленими кутами.

Розрахунок напруженено-деформованого стану (НДС) таких оболонок чисельними сітковими методами ускладнюється через так зване явище мембрани замикання (locking) [4]. Явище проявляється у сповільненні, але стійкій, збіжності класичних чисельних методів внаслідок значних згинів за невеликих розтягів. Щодо оболонок колового перерізу, то в розрахунках за внутрішнього тиску мембрани замикання зазвичай не спостерігається. Проте якщо переріз матиме форму суперкола (supercircle), то мембрани замикання може проявитися.

Матеріали і методи. Розглядається тонка довга замкнута циліндрична оболонка, поперечним перерізом якої є суперколо:

$$|x|^n + |y|^n = R^n, \quad n > 2. \quad (1)$$

Зі збільшенням n в (1) суперколо буде наблизатись до квадрата з заокругленими кутами, де очікуються великі згини і може виникнути мембрани замикання.

Серединну поверхню оболонки віднесемо [4] до криволінійної системи координат (s, z, γ) , в якій координата s є довжиною дуги суперколо, що відраховується від точки $(x=0, y=R)$ за годинникою стрілкою (рис. 1).

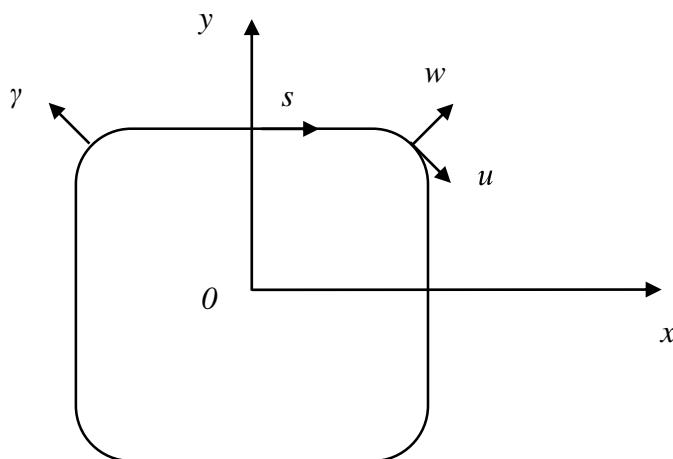


Рис. 1

Нехай під дією сталого і рівномірного внутрішнього тиску p в ізотропній однорідній пружній тонкій оболонці постійної товщини h виникають малі переміщення

в поперечному перерізі, а вздовж вісі z переміщення відсутнє. Тоді компоненти НДС залежатимуть тільки від координати s .

Розрахунок оболонки проводився методом скінчених елементів (МСЕ) за допомогою програмного комплекса “Comsol 6.0”. Використовувалась двовимірна МСЕ-модель серединної поверхні з урахуванням зсуву по товщині оболонки.

Результати. Розраховано НДС оболонки з такими геометричними та механічними параметрами: $h = 0,01$ м; $R = 1$ м; $n = 4$; $E = 210$ Гпа; $\nu = 0,3$; $p = 10$ кПа. Внаслідок симетрії задачі відносно площин $x = 0$ та $y = x$ розглядалась восьма частина області суперкола, тобто $s \in [0, s_k]$, де $s_k = 0,8777$ м становить $1/8$ периметра суперкола. Розглядалися різні варіанти дискретизації МСЕ-моделі: від 350 до 5200 елементів. В останньому випадку дискретизація відповідала одновимірній моделі, що використовувалась для розрахунку НДС на основі варіаційних принципів [1] і її результати добре узгоджуються з результатами, отриманими в даній роботі.

В таблиці 1 для характерних точок суперкола $\tilde{s} = s/s_k$ наведено угини ($\tilde{w} = w/h$), віднесені до тиску p безрозмірні напруження на зовнішній (σ_s^+), внутрішній (σ_s^-) та в серединній (σ_s^0) поверхнях оболонки. В дужках для порівняння наведено відповідні результати з [1], які незначно відрізняються.

Таблиця 1. Переміщення та напруження в характерних точках суперкола ($n = 4$)

\tilde{s}	\tilde{w}	σ_s^+	σ_s^0	σ_s^-
0	0,689	5795 (5792)	100	-5595 (-5592)
0,5	0,289	595 (592)	102	-391 (-387)
1	-0,173	-6584 (-6614)	147 (118)	6878 (6852)

Як бачимо, переміщення для обох методів (МСЕ і варіаційно-різницевого) співпадають, а незначна різниця в напруженнях обумовлена їх різними розрахунковими моделями.

Наряду з варіантом геометрії оболонки для $n = 4$, розглядалися і варіанти з $n = 6$ і $n = 8$, тобто з ще меншими радіусами з круглень кутів квадрата її перерізу. Відповідні результати розрахунків наведені в таблицях 2 і 3.

Таблиця 2. Переміщення та напруження в характерних точках суперкола ($n = 6$)

\tilde{s}	\tilde{w}	σ_s^+	σ_s^0	σ_s^-
0	1,133	7494	100	-7294
0,5	0,557	1309	100	-1108
1	-0,142	-10024	194	10411

Таблиця 3. Переміщення та напруження в характерних точках суперкола ($n = 8$)

\tilde{s}	\tilde{w}	σ_s^+	σ_s^0	σ_s^-
0	1,393	8265	100	-8065
0,5	0,724	1749	100	-1549
1	-0,106	-12010	239	12488

Висновки. Внутрішній тиск в циліндричній оболонці суперколового перерізу викликає значні і різного знаку моменти та згини за невеликих розтягів, що може стати причиною обчислюваного явища мембраниного замикання. Дані задача може доповнити ряд так званих патологічних тестів.

1. *Абросов Юрій, Максимюк Володимир.* Про деформування довгої циліндричної оболонки суперколоового поперечного перерізу // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної інтернет-конференції «Актуальні науково-методичні проблеми фізики та математики у закладах вищої освіти», присвяченій 90-річчю заснування кафедри фізики та кафедри вищої математики ім. проф. Можара В.І., 26 – 27 травня 2020 р., м. Київ, НУХТ. – К.: НУХТ, 2020. – С. 18–19.
2. *Chan T.M., Gardner L., Law K.H.* Structural design of elliptical hollow sections: a review // Proc. Inst. Civil. Engrs.: Struct. Build. – 2010. – **163**, N 6. – P. 391–402.
3. *Akgün G., Kurtaran H.* Geometrically nonlinear transient analysis of laminated composite super-elliptic shell structures with generalized differential quadrature method // Int. J. Non-Linear Mech. – 2018. – **105**. – P. 221–241.
4. *Abrosov Yu. Yu., Maksimyuk V.A., Chernyshenko I.S.* Influence of Cross-Sectional Ellipticity on the Deformation of a Long Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 529–534.

Yu.Yu.Abrosov, Yu.I. Lelyukh

CALCULATION OF LONG CYLINDRICAL SHELL OF SUPERCLEAR CROSS SECTION BY FINITE ELEMENT METHOD (FEM)

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: desc@inmech.kyiv.ua*

Abstract. The internal pressure in the cylindrical shell of the superclear cross-section causes significant moments and bends of different signs at small strains, which can cause the computational phenomenon of membrane locking. This task can supplement a number of so-called pathological tests.

Є.А. Сторожук¹, О.В. Кудін²

**МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ДОВГИХ
ТРИШАРОВИХ ПЛАСТИН З ВИКОРИСТАННЯМ
НЕПЕРЕРВНО-СТРУКТУРНИХ ТЕОРИЙ**

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: stevan@ukr.net*

²*Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, 69600, Запоріжжя, Україна;
e-mail: avk256@gmail.com*

Довгі тришарові пластини знаходять широке застосування в сучасній інженерній практиці. Вони є елементами обшивок крил і фюзеляжів літаків, корпусів кораблів і підводних човнів, резервуарів у хімічній промисловості, перекріттів інженерних споруд тощо.

На теперішній час для розрахунку шаруватих оболонкових структур застосовують два підходи. В першому підході використовуються теорії, при розробці яких кінематичні гіпотези застосовуються до кожного шару окремо, внаслідок чого порядок розв'язувальної системи залежить від кількості шарів [2, 3]. При побудові теорії другого підходу розв'язувальні рівняння отримуються із залученням гіпотез до всього пакету шарів в цілому [1–3]. Порядок системи рівнянь при цьому не залежить від кількості шарів. Згідно термінології, запропонованій автором статті [3], теоріям першого підходу дано назву дискретно-структурних, а другого – неперервно-структурних.

В роботі отримано точний розв'язок геометрично нелінійної задачі статики для довгої тришарової прямокутної пластини з використанням трьох типів неперервно-структурних теорій: викривленої нормалі, Кірхгофа–Лява і Тимошенка.

Розглянемо циліндричний згин нескінченно довгої прямокутної пластини шириною $2b$, яка складається з трьох трансверсально-ізотропних шарів зі сталою товщиною h_k ($k = 1, 2, 3$) і навантажена рівномірним тиском q . Віднесемо пластину до прямокутної декартової системи координат $Oxyz$, осі Ox, Oy якої проходять паралельно поздовжнім і поперечним краям пластини ($-b \leq y \leq b$). Границі площини k -го шару мають рівняння $z = z_k$ і $z = z_{k+1}$ та є еквідістантними площинами зведення $z = 0$, положення якої в межах товщини може бути довільним.

Визначальними при дослідженні напруженого-деформованого стану (НДС) даного класу гнуучких пластин є рівняння геометрично нелінійної теорії в квадратичному наближенні. Фізичні співвідношення записані на основі закону Гука для трансверсально-ізотропних матеріалів. Вважаємо, що фізико-механічні параметри пластини є ста-ліми величинами в межах кожного шару, тобто $\bar{G}(z) = \bar{G}_k$, $E(z) = E_k$, $\nu(z) = \nu_k$ для $z \in [z_k, z_{k+1}]$, де \bar{G}_k – модуль зсуву матеріалу k -го шару в площині поперечного перерізу; E_k, ν_k – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона цього шару в площині ізотропії.

1. Теорія викривленої нормалі. Приймається для кожного шару пластини рівність нулю поперечного нормального напруження $\sigma_{zz}^{(k)}$, квадратичний закон зміни за товщиною поперечного дотичного напруження $\sigma_{yz}^{(k)}$ і сталість нормального переміщення $w^{(k)}$ за товщиною [1]

$$\sigma_{zz}^{(k)} = 0; \quad \sigma_{yz}^{(k)} = \bar{G}_k f^{(k)}(z) \psi; \quad w^{(k)} = w; \quad z \in [z_k, z_{k+1}] \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1)$$

де ψ – шукана функція поперечного зсуву; w – нормальнє переміщення (прогин) площини зведення; $f^{(k)}$ – квадратичні функції змінної z , які вибираються так, щоб дотичне напруження $\sigma_{yz}^{(k)}$ задовільняло умовам контакту між шарами і нульовим умовам на зовнішніх площинах, та визначаються за формулами

$$f^{(k)}(z) = 0,5 \bar{G}_k^{-1} \left[\sum_{i=1}^{k-1} B_i (z_{i+1}^2 - z_i^2 - 2h_i \delta) + B_k (z^2 - 2\delta z - z_k^2 + 2\delta z_k) \right] = \\ = f_2^{(k)} z^2 + f_1^{(k)} z + f_0^{(k)}. \quad (2)$$

У формулах (2) введені такі позначення:

$$B_k = E_k / (1 - \nu_k^2); \quad \delta = \sum_{k=1}^3 B_k (z_{k+1}^2 - z_k^2) / 2 \sum_{k=1}^3 B_k h_k; \quad f_2^{(k)} = B_k / (2 \bar{G}_k); \\ f_1^{(k)} = -\frac{\delta B_k}{\bar{G}_k}; \quad f_0^{(k)} = \bar{G}_k^{-1} \left[0,5 \sum_{i=1}^{k-1} B_i (z_{i+1}^2 - z_i^2) - \delta \sum_{i=1}^{k-1} B_i (z_{i+1} - z_i) - B_k z_k (0,5 z_k - \delta) \right]. \quad (3)$$

Тут стала величина δ знайдена з умови рівності нулю поперечного дотичного напруження на зовнішній площині $z = z_4$.

Закон зміни тангенціального переміщення за товщиною пластини має вигляд

$$u^{(k)}(z) = u - \frac{dw}{dy} z + \psi g^{(k)}(z) \quad (k = 1, 2, 3), \quad (4)$$

де u – тангенціальне переміщення площини зведення; $g^{(k)}(z)$ – кубічні функції, вирази для яких наведені в роботі [2].

Розв'язувальна система у безрозмірних величинах записується так [2]

$$\frac{d^4 \tilde{w}}{d\eta^4} - \tilde{N} \frac{d^2 \tilde{w}}{d\eta^2} - \beta_3 \frac{d^3 \tilde{\psi}}{d\eta^3} - \tilde{q} = 0; \\ \beta_2 \frac{d^3 \tilde{w}}{d\eta^3} - \beta_1 \frac{d^2 \tilde{\psi}}{d\eta^2} + \tilde{\psi} = 0. \quad (5)$$

Точний розв'язок системи (5), який задовільняє умовам жорсткого закріплення поздовжніх країв пластини, має вигляд

$$\tilde{w} = (b_0 + a_1 b_1 c h \lambda_1 \eta + a_2 b_2 c h \lambda_2 \eta + 0,5 \eta^2 / \tilde{N}) \tilde{q}; \\ \tilde{\psi} = \beta_2 (b_1 \lambda_1^3 s h \lambda_1 \eta + b_2 \lambda_2^3 s h \lambda_2 \eta) \tilde{q}. \quad (6)$$

Тут λ_1, λ_2 – ненульові корені характеристичного рівняння.

Залежність між параметрами тангенціального зусилля \tilde{N} і навантаження \tilde{q} отримано з умови відсутності зближення поздовжніх країв.

2. Теорія Кірхгофа–Лява. Якщо прийняти $\bar{G}_k = \infty$, то перейдемо до рівнянь класичної теорії шаруватих пластин, в якій гіпотеза прямої нормалі застосовується до всього пакету шарів. Тоді $f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z) = 0$ і у розв'язувальній системі (5) залишається тільки одне (перше) рівняння, зменшується її порядок, кількість розв'язувальних функцій і граничних умов.

Розв'язок даної задачі, отриманий на основі теорії Кірхгофа–Лява, записується наступним чином

$$\tilde{w} = (b_0 + b_1 ch \lambda \eta + 0,5 \eta^2 / \tilde{N}) \tilde{q}, \quad (7)$$

де $\lambda^2 = \tilde{N}$; $b_0 = (2cth \lambda - \lambda) / 2\lambda \tilde{N}$; $b_1 = -1/\lambda \tilde{N} sh \lambda$.

3. Теорія Тимошенка. Якщо у наведених вище співвідношеннях теорії викривленої нормалі прийняти $f^{(k)}(z) = 1$ і $g^{(k)}(z) = z$, то отримаємо рівняння теорії Тимошенка, в якій гіпотеза прямої лінії виконується для всього пакету шарів пластини.

В даному випадку розв'язок поставленої задачі за умови жорсткого закріплення поздовжніх країв пластини має такий вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= (b_0 + b_1 ch \lambda \eta + 0,5 \eta^2 / \tilde{N}) \tilde{q}; \\ \tilde{\vartheta} &= -[\lambda(1 + \beta \tilde{N}) b_1 sh \lambda \eta + \eta / \tilde{N}] \tilde{q}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{де } \lambda^2 = \frac{\tilde{N}}{1 + \beta \tilde{N}}; \quad \beta = \frac{D_M^*}{b^2 D_Q}; \quad b_0 = \frac{2\lambda cth \lambda - \tilde{N}}{2\tilde{N}^2}; \quad b_1 = -\frac{\lambda}{\tilde{N}^2 sh \lambda}; \quad \vartheta = \psi - \frac{dw}{dy}.$$

На основі наведених вище теорій одержано числові результати для довгої тришарової пластини з симетричною товщиною структурою як для задач в геометрично нелінійній постановці, так і лінійній. Досліджено вплив геометричної нелінійності та типу теорії на НДС пластини, побудовано залежність безрозмірного прогину в початку координат $\tilde{w}(0)$ від величини параметра навантаження \tilde{q} , визначеного максимальні прогини і напруження.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: довга тришарова пластина, геометрична нелінійність, неперервно-структурні теорії, рівномірний тиск, точний розв'язок.

1. Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища школа, 1986. – 191 с.
2. Сторожук Е.А., Кудін О.В. Аналітичний розв'язок геометрично нелінійної задачі для довгої тришарової пластини // Прикл. механіка. – 2024. – **60**, № 5. – С. 42 – 54.
3. Piskunov V.G. An iterative analytical theory in the mechanics of layered composite systems // Mech. Compos. Mater. – 2003. – **39**, N 1. – P. 1 – 16.

E.A. Storozhuk¹, O.V. Kudin²

MODELING OF NONLINEAR DEFORMATION OF LONG THREE-LAYER PLATES USING CONTINUOUS-STRUCTURAL THEORIES

¹S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine; e-mail: stevan@ukr.net

²Zaporizhzhya National University,
Zhukovsky Str., 66, 69600, Zaporizhzhya, Ukraine; e-mail: avk256@gmail.com

Using three types of continuous-structure theories, an exact solution of a geometrically nonlinear problem for a long three-layer plate is constructed. Numerical results were obtained for a three-layer plate with a structure symmetrical in thickness and rigidly fixed longitudinal edges under the action of uniform pressure.

А.Ф.Булат¹, О.П.Круковський¹, В.В.Круковська¹

**ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ПІДЗЕМНОЇ КАМЕРИ ПОРЯТУНКУ І
РОЗРОБКА СПОСОBU ЇЇ КРІПЛЕННЯ В РІЗНИХ ГІРНИЧО-ГЕОЛОГІЧНИХ
УМОВАХ**

¹Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України,
бул. Сімферопольська, 2а, 49005, Дніпро, Україна; e-mail: igtm@ukr.net

Найскладнішою задачею при підземному видобутку корисних копалин є кріплення гірничих виробок і підтримання їх в безпечному експлуатаційному стані на протязі усього терміну використання. Особо важливим є вибір кріплення для камер колективного порятунку працівників шахти. Такі камери споруджуються на маршрутах виходу гірників і служать для їх захисту під час аварій [1 – 3], пов’язаних із загазованістю гірничих виробок, пожежами і вибухами метано-повітряної суміші [4]. Вони розташовані в ніші поряд із гірникою виробкою [2] і цей підземний об’єкт в цілому має складну форму поперечного перерізу. Вибір кріплення для виробок складного поперечного перерізу пов’язаний з особливими труднощами, такими, як великий відкритий проліт покрівлі, значний перерозподіл полів напружень і деформацій, додаткове навантаження на кріплення, обвалення покрівлі [5 – 9].

Тому метою роботи є дослідження стійкості гірничої виробки і розташованої поруч камери колективного порятунку для розробки способу їх кріплення в різних гірничо-геологічних умовах. Задачу розв’язано за допомогою метода скінчених елементів в пружно-пластичній постановці, із застосуванням критерію Кулона-Мора [10]. При розрахунках було розглянуто типову конструкцію камери порятунку [12], що примикає до гірничої виробки, яка проводиться по вугільному пласту. І виробка, і камера кріпляться рамами; затяжка боків і покрівлі – залізобетонна; камеру порятунку відокремлює від виробки бетонна перегородка товщиною 200 мм.

За результатами шахтних спостережень і серії чисельних розрахунків із різним складом порід і глибиною розташування гірничих виробок, розроблено класифікацію умов експлуатації камери-сховища, табл. 1, за відносною міцністю порід S_r і $S_{r\text{ бок}}$:

$$S_r = \frac{\sum_{i=1}^N \sigma_{ci} \cdot k_c \cdot k_{\text{бок}} \cdot m_i}{\gamma H \cdot \sum_{i=1}^N m_i}, \quad S_{r\text{ бок}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{\text{бок}}} \sigma_{ci} \cdot k_c \cdot k_{\text{бок}} \cdot m_i}{\gamma H \cdot \sum_{i=1}^{N_{\text{бок}}} m_i},$$

де σ_{ci} – міцністі окремих породних шарів на стиск, МПа; k_c – коефіцієнт структурного ослаблення; $k_{\text{бок}}$ – коефіцієнт зниження опору порід стиску за рахунок впливу вологи; m_i – потужності окремих породних шарів, м; N – кількість породних шарів, які містяться в досліджуваній області, шт; H – глибина ведення гірничих робіт, м; γ – середня вага розташованих вище гірських порід, Н/м³; $N_{\text{бок}}$ – кількість породних шарів, які містяться в області, обмежений висотою камери порятунку, шт.

Було розроблено схеми кріплення камери і прилеглої виробки для визначених умов експлуатації. На рис. 1 показано зони непружніх деформацій навколо виробок із базовим кріпленням (ліворуч) і закріплених згідно розробленого способу (праворуч), із посиленням за допомогою анкерного кріплення [12] в моменту часу $t = 20$ діб. У

першому випадку (рис. 1а) $H = 800$ м; $S_r = 1,68$; $S_{r \text{ бок}} = 1,1$; для умов рис. 1б $H = 800$ м; $S_r = 1,03$; $S_{r \text{ бок}} = 0,9$; для умов рис. 1в $H = 1200$ м; $S_r = 1,12$; $S_{r \text{ бок}} = 0,7$; для рис. 1г $H = 1200$ м; $S_r = 0,69$; $S_{r \text{ бок}} = 0,6$.

Табл. 1

Величина S_r	Величина $S_{r \text{ бок}}$	Категорія умов експлуатації
$S_r > 1,5$	$S_{r \text{ бок}} > 1,5$	Легкі
	$S_{r \text{ бок}} \leq 1,5$	Легкі із слабкими бічними породами
$1,0 < S_r \leq 1,5$	$S_{r \text{ бок}} > 1,5$	Середні
	$S_{r \text{ бок}} \leq 1,5$	Середні із слабкими бічними породами
$S_r \leq 1,0$	$S_{r \text{ бок}} > 1,5$	Важкі
	$S_{r \text{ бок}} \leq 1,5$	Важкі із слабкими бічними породами

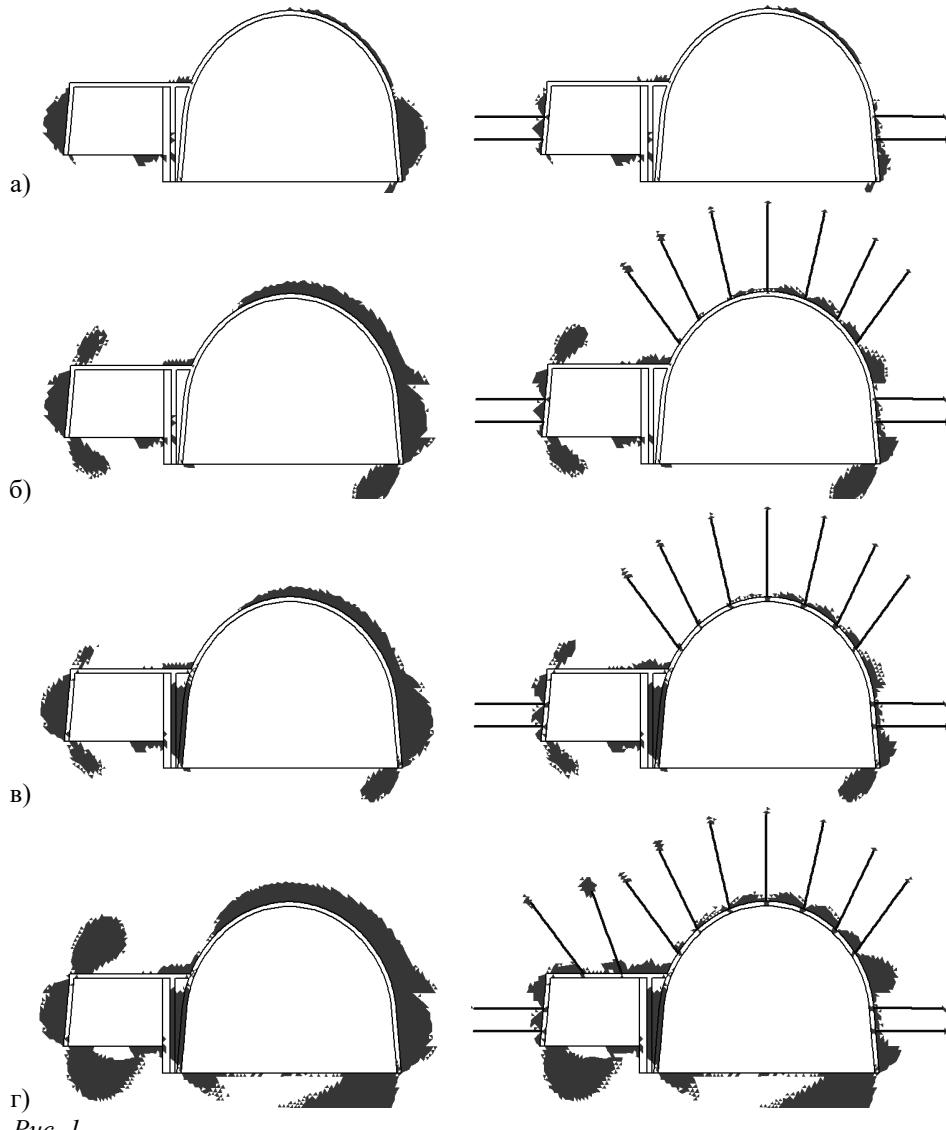


Рис. 1

Базове кріплення надійно підтримує і камеру порятунку, і виробку на відносно невеликій глибині, меншій за 800 м. Із збільшенням глибини необхідно додаткове

застосування анкерного кріплення. В заанкерованій області гірські породи знаходяться в умовах, наблизених до тривісного стиску, над виробкою і камерию формується породно-анкерне перекриття, де породи збережені в непорушеному стані.

З установкою анкерів зона непружних деформацій у всіх чотирьох випадках значно зменшується. В міцніших породах її площа скоротилася на 28-45%; в менш міцніх породах – на 28-34%. Зона непружних деформацій в боках камери і виробки у випадку (а) зменшилась в 3,7 рази, (б) – в 3,2 рази, (в) – в 2,1 рази, (г) – в 2,2 рази. Це означає, що деформування дуже великого об'єму приkontурних порід, посиленіх за допомогою анкерного кріплення, тепер відбувається в пружному режимі, а підземна споруда складної форми набуває стійкого стану.

1. СОУ 10.1.202020852.002:2006. Стационарні камери-сховища рятувальні шахтні. Загальні технічні вимоги. Видання офіційне. – Київ: Мінвуглепром України, 2007. – 16 с.
2. Krukowska V.V., Kruckovskyi O.P., Demchenko S.V. Numerical analysis of the possibility of noxious gases infiltration into a shelter located in a gas-bearing coal-rock mass // Geo-Technical Mechanics. – 2023. – **166**. – P. 95 – 108.
3. Meng L., Jiang, Zhao Y., Shan R., Song Y. Probing into Design of refuge chamber system in coal mine // Procedia Engineering. – 2011. – **26**. – P. 2334 – 2341.
4. Булат А.Ф., Мінеев С.П., Смоланов С.Н., Беликов И.Б. Пожары в горных выработках. Изоляция аварийных участков. – Харьков: В деле, 2021. – 709 с.
5. Razani M., Yazdani-Chamzini A., Yakhchali S.H. A novel fuzzy inference system for predicting roof fall rate in underground coal mines // Safety Science. – 2013. – **55**. P. 26 – 33.
6. Lia J., Wei X., Liangc W. The effects of different excavation angle on intersecting tunnel surrounding rock stability. 2nd International Conference on Modelling, Identification and Control, Dalian University, China. – Dalian, 2015. – P. 247 – 251.
7. Sinha S., Chugh Y.P. Validation of critical strain technique for assessing stability of coal mine intersections and its potential for development of roof control plans // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. – 2018. – **10**. – P. 380 – 389.
8. Paul A., Murthy V.M.S.R., Prakash A., Singh A.K. Estimation of rock load for junctions based on roof failure cases for safe mining operation // Arabian Journal of Geosciences. – 2020. – **13**. – Article number 1069.
9. Kruckovskyi A.P., Kurnosov S.A., Krukowska V.V., Averkin D.I., Zaderiy V.V. Determination of rational parameters for the rock-bolting and protective structures in the face end // Transactions of Kremenchuk Mykhailo Ostrohradskyi National University. – 2016. – **4**, N 99. – P. 54 – 60.
10. Kruckovskyi O.P., Kruckowska V.V., Bulich Yu.Yu., Demchenko S.V., Konstantynova I.B. Rock bolt and frame support of mine workings with a compound cross-section: Collective refuge chambers for mine workers // Mining of Mineral Deposits. – 2024. – **18**, N 2. – P. 28 – 37.
11. Kruckovskyi O.P., Kruckowska V.V. Supporting a mine working with a shelter in various mining and geological conditions // Inżynieria Mineralna. Journal of the Polish Mineral Engineering Society. – 2023. – **1**. – P. 45 – 52.
12. Булат А.Ф., Виноградов В.В. Опорно-анкерное крепление горных выработок угольных шахт. – Дніпропетровськ: ІГТМ НАН України, 2002. – 372 с.

A.F.Bulat¹, O.P.Kruckovskyi¹, V.V.Krukowska¹

STUDY OF UNDERGROUND SHELTERS STABILITY AND DEVELOPMENT OF THE METHOD FOR ITS SUPPORTING IN VARIOUS MINING AND GEOLOGICAL CONDITIONS

¹ M.S. Poliakov Institute of Geotechnical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Simferopolska Str., 2a, 49005, Dnipro, Ukraine; e-mail: igtm@ukr.net

Abstract. The influence of mining and geological conditions on the time-dependent stability of an underground shelter and adjacent mine working was investigated using the finite element method. Support schemes for the chamber and its adjacent mine working were elaborated. The schemes include basic support and provide for its strengthening with rock bolts located in the roof of the mine working and shelter, or in their walls. It is shown that the strengthening of supporting schemes by rock bolts reduces the area of the zone of inelastic deformations around the mine workings and shelters, which helps increase their stability under the complicated mining and geological conditions.

Key words: numerical simulation, relative rock strength, rock bolt support, stability of mine workings, support schemes, underground shelters.

Я . Я . Рущицький

ГІПОПРУЖНІ МАТЕРІАЛИ. ЛІНЕАРИЗОВАНА ТЕОРІЯ

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: rushch@inmech.kiev.ua

Доповідь стосується загальної теорії гіпопружних матеріалів в рамках концепції Труслелла. Спочатку запропоновано історичну довідку щодо вивчення гіпопружності вченими-механіками. Акцентована увага внеску К. Труслелла в цей напрямок механіки матеріалів. Згадано про дві відомі в механіці публікації К. Труслелла 1955 [6] (розлога) та 1963 [7] (лаконічна) років, які створили основи для подальшого вивчення гіпопружності як частини науки про пружне деформування матеріалів.

Саме К. Труслелл описав коротко і повно з аналізом робіт корифеїв механіки триваючу пару століть історію створення науки про гіпопружне деформування.

У даній доповіді гіпопружність розглядається стандартно як одна із форм прояву властивості пружності в матеріалах..

Принципова відмінність між гіперпружними і гіпопружними матеріалами полягає в застосуванні суттєво відмінних між собою принципів побудови конститутивних рівнянь.

В гіперпружності закладено принцип функціональної залежності напружень від деформацій, тоді як в гіпопружності - принцип функціональної залежності швидкостей напружень від швидкостей деформацій. Застосований в теорії гіперпружності принцип дає далі підстави називати теорію гіперпружною і застосований в теорії гіпопружності принцип дає далі підстави називати цю теорію гіпопружною. Як відомо, префікс гіпо- означає зменшення чого-небудь проти норми і префікс гіпер- означає збільшення чого-небудь проти норми. Тому гіпопружні матеріали повинні мати властивість пружності як би в меншій ступені, ніж пружні, і гіперпружні в більшій ступені, ніж пружні.

Означення гіпопружного матеріалу допускає наявність початкових напружень (що не властиво пружним і гіперпружним матеріалам) і зворотність малих деформацій щодо цих напружень (що властиво пружним і гіперпружним матеріалам). Ці факти разом з неможливістю в'язкого деформування гіпопружних матеріалів (внутрішнє розсіювання у гіпопружних матеріалів відсутнє), виправдовує за Прагером [4] їх назуву.

Далі коментуються деякі сучасні публікації щодо хвиль в гіпопружних матеріалах

В доповіді вводяться і коментуються необхідні в гіпопружності основні поняття континуальної механіки [3,5]. Тут увага акцентується на понятті похідної Яуманна

$$\sigma_{ik}^{\nabla} = \left(D\sigma_{ik}/Dt \right) - \sigma_{in}v_{[k,n]} - \sigma_{kn}v_{[i,n]}, \quad \vec{v} = \{v_k\} = \{(\partial x_k / \partial t)\}. \quad (1)$$

Тут $(D/Dt) = (\partial/\partial t) + v_k(\partial/\partial x_k)$ є стандартне позначення субстанціональної похідної (похідної Лягранжа) за часом і $\vec{v} = \{v_k\} = \{(\partial x_k / \partial t)\}$ є швидкість частинки тіла. Квадратні дужки в (1) позначають несиметричну частину в $v_{k,n}$ і круглі - симетричну.

Далі в описі гіпопружного деформування використовується антисиметричний тензор швидкості обертання з компонентами $W_{kn} = v_{[k,n]}$, а також симетричний тензор швидкості градієнта деформації $V_{kn} = v_{(k,n)}$.

Слід зазначити, що тензор обертань використовується як характеристика зміни напружень і швидкості деформацій відносно фіксованої системи координат і довгий час не мав нелінійного опису. Згодом П.Жермен [2] ввів у наукову практику саме такий нелінійний тензор.

Далі конкретизується модель гіпопружного тіла. Варіант моделі гіпопружного матеріалу (тіла) визначає прийнята форма конститутивних рівнянь. У загальному випадку ці рівняння зв'язують тензор швидкості напружень з тензором напружень і швидкостей деформацій

$$\sigma^{\nabla} = f(\sigma, V) \text{ або } \sigma_{ik}^{\nabla} = C_{iklm}(\sigma_{rs})V_{lm} \text{ (простіший варіант).} \quad (2)$$

Зазначимо, що гіпопружність допускає наявність початкових напружень в лінійному підході і нескінченно малі деформації гіпопружних матеріалів зворотні щодо початкових напружень. Перша особливість відсутня в пружних і гіперпружних матеріалах. Для ізотропних тіл формула (2) конкретизується

$$\begin{aligned} \sigma^{\nabla} = & \delta g_0 I + g_1 V + \delta g_2 \sigma + \delta g_3 \sigma^2 + \\ & + (1/2)g_4(V\sigma + \sigma V) + (1/2)g_8(V\sigma^2 + \sigma^2 V) + \\ & + Mg_3 I + Mg_6 \sigma + Mg_9 \sigma^2 + Ng_7 I + Ng_{10} \sigma + Ng_{11} \sigma^2, \end{aligned} \quad (3)$$

де $g_K = g_K(I, II, III)$ є аналітичними функціями трьох перших інваріантів тензора деформації.

Зберігаючи в (3) різну кількість доданків, отримують моделі різної степені. Нульова і перша моделі задаються такими формулами

$$g_0 = (\lambda/2\mu), g_1 = 1 \text{ і } g_0 = (\lambda/2\mu) + \alpha_0 I, g_1 = 1 + \alpha_1 I, g_K = \alpha_K \quad (K = 2, 3, 4). \quad (4)$$

В доповіді теж описана загальна схема лінеаризації рівняння руху. Процедура лінеаризації застосовується до рівняння руху, записаному через тензор напружень Лягранжа [14,15]

$$\left[\sigma_{in} (g_{jn} + u_{jn}) \right]_i - \rho u_{j,tt} = 0. \quad (5)$$

Лінеаризація стосується основних величин в початковому (незбуреному) і актуальному (збуреному) станах деформування:
незбурений стан

$$u_m^o(x_1, x_2, x_3, t), \varepsilon_{nm}^o(x_1, x_2, x_3, t), \sigma_{ik}^o(x_1, x_2, x_3, t), \dots, e(\varepsilon_{nm}^o), \dots \quad (6)$$

збурений стан

$$u_m^o + u_m, \varepsilon_{nm}^o + \varepsilon_{nm}, \sigma_{ik}^o + \sigma_{ik}, \dots, e(\varepsilon_{nm}^o + \varepsilon_{nm}), \dots \quad (7)$$

де $u_m, \varepsilon_{nm}, \sigma_{ik}, \dots$ є збуреннями.

Конкретна реалізація в моделі гіпопружного тіла [5,6] полягає в лінеаризації нелінійне рівняння (5) в околі незбуреного (початкового) стану, який характеризується трьома фіксованими параметрами – напруженнями σ_{ik}^o , швидкостями обертання W_{nm}^o і швидкостями зміщення v_k^o . При цьому збурений (актуальний) стан описується параметрами

$$\sigma_{ik}^o + \sigma_{ik}, W_{nm}^o + W_{nm}, v_k^o + v_k, \quad (8)$$

де введені збурення σ_{ik} , W_{nm} , v_k .

Лінеаризоване рівняння для малих збурень є таким

$$\left(\delta_{jn} + u_{j,n}^o \right) \left[\sigma_{in}^o u_{[k,nit]} + \sigma_{in,i} u_{[k,nt]}^o + \sigma_{kn}^o u_{[i,nit]} + \sigma_{kn,i} u_{[i,n]}^o + C_{iklm} u_{(l,mit)} \right] + \\ + \sigma_{in}^o u_{j,nit} - \rho u_{j,ttt} = 0. \quad (9)$$

Таким чином, лінеаризоване рівняння руху (9) лінійно пов'язує швидкості напружень збурень, які накладаються на початковий гіпопружний стан, що характеризується параметрами, позначеними нулем у верхньому індексі, з параметрами нового стану – швидкостями тензорів напружень, обертань і деформацій. Але коефіцієнти лінійного рівняння руху включають в себе постійні параметри старого (початкового) стану.

Якщо додатково припущене, що початковий стан є лінійним, (тоді можна вважати [3], що в (9)

$$\delta_{jk} + u_{j,k}^o \approx \delta_{jk}. \quad (10)$$

У випадку ізотропного матеріалу лінеаризоване рівняння (9) спрощується до вигляду (далі вказане лише перше рівняння)

$$\sigma_{i2}^o W_{1,2i} + \sigma_{i3}^o W_{1,3i} + \sigma_{12}^o W_{i,2i} + \sigma_{13}^o W_{i,3i} + \sigma_{i2,i} W_{12}^o + \sigma_{i3,i} W_{13}^o + \sigma_{12,i} W_{i,2}^o + \sigma_{13,i} W_{i,3}^o + \\ + \lambda V_{k,km} \delta_{1m} + 2\mu V_{1,mm} + \sigma_{i2}^o V_{1,2i} + \sigma_{i3}^o V_{1,3i} - \rho V_{1,tt} = 0. \quad (11)$$

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гіпопружність, базова концепція, рівняння руху, нелінійні конститутивні рівняння, лінеаризована теорія, лінеаризовані рівняння руху.

1. Fedorov F.I. Theory of Elastic Waves in Crystals.-New York: Plenum Press, 1968.-388p.
2. Germain P. Cours de mechanique des milieux continus. Tome 1. Theorie generale. -Paris Masson et Cie, Editeurs, 1973.- 300 p.
3. Guz A.N. Fundamentals of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies. - Berlin: Springer Verlag, 1999. - 555 p.
4. Prager W. Einführung in die Kontinuumsmechanik. -Basel: Birkhäuser Verlag, 1961, 2nd ed. Berlin: Springer. 2013. - 228 p.
5. Rushchitsky J.J. Foundations of Mechanics of Materials.- Copenhagen: Ventus Publishing ApS, 2021. – 270 p.
6. Truesdell C. Hypo-elasticity // J. Rat. Mech. Anal. - 1955, 4, - P.83-]33, P.1019-1020.
7. Truesdell C. Remarks on Hypo-Elasticity // J. Research Nation. Bureau Stand. -B. Mathematics and Mathematical Physics, - 1963, 67B, N3. -P. 1-3.

J.J.Rushchitsky

HYPONELASTIC MATERIALS. LINEARIZED THEORY

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: rushch@inmech.kyiv.ua

This report provides historical background on the study of hypoelasticity by mechanical scientists. hypoelasticity is considered as one of the forms of manifestation of the property of elasticity in materials. Further, the hypelastic body model is specified. A general linearization scheme of the is described. Finally, the general linearization scheme of the equation of motion and its concrete implementation in the hypoelastic body is proposed.

В. М. Юрчук

ОПИС ЗАСТОСУВАННЯ СТАНДАРТНОЇ РЕОЛОГІЧНОЇ МОДЕЛІ ДО АНАЛІЗУ СЕЙСМІЧНИХ ХВИЛЬ

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: vasil_2008@ukr.net

Доповідь стосується опису деформування ґрунтових шарів стандартною триконстантною реологічною моделлю. Доцільність застосування цієї моделі обґрунтovується можливістю теоретично аналізувати поширення хвиль в ґрунтових шарах і просто визначати параметри (константи) моделі з експерименту на повзучість конкретного ґрунтового шару [3,4].

Перевагою в застосуванні стандартної реологічної моделі до аналізу сейсмічних хвиль в ґрунтових шарах можна вважати можливість аналітично порахувати характеристики хвилі. Для кожного конкретного шару треба знати три константи моделі (миттєвий модуль, тривалий модуль, час релаксації) і параметри хвилі на вході в шар (амплітуду, кут падіння, частоту, коефіцієнт затухання) [1]. Отже, в конкретних задачах про сейсмічні хвилі необхідні конкретні знання значень реологічних параметрів моделі. Вважається, що константи стандартної моделі визначаються зі стандартних (регламентованих) дослідів на повзучість зразків при зсуви.

Застосуємо прямий підхід до аналізу поширення зсувої гармонічної хвилі в рамках стандартної моделі. Для цього підставимо лінійне представлення деформації через зміщення $\varepsilon = \partial u / \partial x$ в рівняння руху, у якому змінимо позначення, ввівши модуль зсуву μ ($\mu_0 = E$, $\mu_\infty = H$)

$$n \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma = \mu_0 n \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \mu_\infty \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1)$$

Рівняння руху, записане через зміщення, можна отримати, використавши класичне рівняння руху $\rho(\partial^2 u / \partial t^2) = \partial \sigma / \partial x$ тоді нове рівняння руху

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + n \rho \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = \mu_0 n \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + \mu_\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Рівняння (2) містить додатково два доданки з третіми похідними.

Зауважимо, що це не найпростіше хвильове рівняння, яким описується класична пружна зсувна хвиля

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu_\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

При вивченні гармонічних хвиль, які описує реологічне рівняння (2), можливі три випадки. У випадку 1 амплітуда хвилі затухає за просторовою координатою і має вигляд

$$u(x, t) = A e^{-\gamma x + i(kx - \omega t)}. \quad (3)$$

Зазначимо, що хвиля типу (3) відома в теорії хвиль як експоненціально затухаюча гармонічна хвиля, яка відповідає комплекснозначному хвильовому числу [2].

Випадок 2 стосується затухання за часом і тоді хвиля має інший вигляд

$$u(x, t) = A e^{-\alpha t + i(kx - \omega t)}. \quad (4)$$

Випадок 3 відповідає класичній гармонічній хвилі з невідомим хвильовим числом

$$u(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}. \quad (5)$$

В усіх випадках слід перевірити, чи має рівняння (2) розв'язок у вигляді хвилі (3) – (5). Слід зазначити, що коли розв'язки рівняння (2) дійсно існують, то вони описують дещо відмінні між собою хвилі.

У випадку 1 при підстановці представлення (3) у рівняння (2) з врахуванням $v_T^o = \sqrt{\mu_0/\rho}$ отримуємо рівняння зв'язку між невідомими параметрами хвилі – дійсним хвильовим числом k , дійсним коефіцієнтом затухання γ і частотою ω

$$\left[(v_T^o)^{-2} \omega^2 + (\mu_\infty/\mu_0)(\gamma^2 - k^2) - 2n\omega\gamma k \right] + i \left[n(v_T^o)^{-2} \omega^3 + n\omega(\gamma^2 - k^2) + 2(\mu_\infty/\mu_0)\gamma k \right] = 0. \quad (6)$$

Далі необхідно прирівняти дійсну та уявну частини рівняння (6) до нуля. При цьому слід ввести позначення

$$(\mu_0/\mu_\infty) = (v_T^o)^2 / (v_T^\infty)^2 = m. \quad (7)$$

В результаті отримуємо два рівняння дуже подібної структури

$$v_T^{-2} + 2nm\gamma v_T^{-1} - \frac{m}{(v_T^o)^2} - \frac{\gamma^2}{\omega^2} = 0; \quad (8)$$

$$\gamma^2 + 2\gamma \frac{v_T^{-1}}{nm} + \left[\left(v_T^o \right)^{-2} - v_T^{-2} \right] \omega^2 = 0. \quad (9)$$

Отримані рівняння не є ідентичними і містять 3 невідомі величини – актуальну швидкість хвилі $v_T = (\omega/k_T)$, коефіцієнт затухання амплітуди хвилі γ та частоту ω . Тому з цих рівнянь можна визначити перші дві величини як функції частоти.

Рівняння (8), (9) можна перетворити до більш зручного вигляду шляхом ділення рівняння (9) на ω^2 і наступного додавання отриманого рівняння і рівняння (13)

$$\gamma = Kv_T, \quad K = \frac{(m-1)}{2(v_T^o)^2 nm \left(1 + \frac{1}{(nm\omega)^2} \right)}; \quad (10)$$

$$v_T^{-4} - \omega^2 m \left(\frac{2n}{K} - \frac{1}{(v_T^o)^2 K^2} \right) v_T^{-2} - \frac{\omega^2}{K^2} = 0. \quad (11)$$

Отже, в стандартній моделі актуальна швидкість хвилі і затухання амплітуди хвилі за просторовою координатою залежать нелінійно від частоти і визначаються початковою швидкістю та відношенням миттєвого модуля до тривалого модуля.

Можливо, найбільш важливим висновком з отриманих формул щодо швидкості хвилі і її затухання для подальшого аналізу сейсмічних хвиль є те, що ці характеристики хвилі в окремо взятому шарі ґрунту є різними для різних значень часу. Це не узгоджується з загальноприйнятим в теорії сейсмічних хвиль припущенням про незалежність модуля зсуву від частоти (отже, швидкості зсуву хвилі в окремо взятому шарі ґрунту), а також залежності модуля зсуву від часу. Ця залежність взагалі суперечить концепції континуальної механіки про сталість модулів (параметрів моделі, сталих, констант).

У випадку 2 підстановка представлення (10) у рівняння (7) дає інше рівняння зв'язку між невідомими параметрами хвилі – хвильовим числом k , коефіцієнтом затухання γ і частотою ω

$$\rho(\alpha^2 - \omega^2) - 3\alpha\omega^2 n\rho + n\rho\alpha^3 + k^2(\alpha\mu_0 n + \mu_\infty)i\omega(-3\rho\alpha^2 n - 2\rho\alpha + \rho\omega^2 n + \mu_0 n k^2) = 0. \quad (12)$$

Прирівнюючи дійсну та уявну частини рівняння (12) до нуля, отримуємо два рівняння зі структурою, відмінною від структури рівнянь (9), (8)

$$(v_T^o)^{-2} \left[n\alpha^3 + \alpha^2 - 3\omega^2 n\alpha - \omega^2 \right] - v_T^{-2} \omega^2 (n\alpha + 1/m) = 0; \quad (13)$$

$$(v_T^o)^{-2} \left[2(\alpha/n\omega^2) + (3\alpha^2/\omega^2 - 1) \right] - (v_T)^{-2} = 0. \quad (14)$$

Рівняння (14) дає просту формулу зв'язку між актуальною швидкістю хвилі v_T і коефіцієнтом затухання хвилі з часом поширення хвилі α

$$v_T^2 = \frac{v_T^{o2}}{3\alpha^2/\omega^2 + 2\alpha/n\omega^2 - 1}. \quad (15)$$

Підстановка значення швидкості хвилі (15) в рівняння (13) дає кубічне алгебраїчне лінійне рівняння щодо величини α

$$\alpha^3 + \alpha^2 (3/4n)(1+1/m) + \alpha (1/2n^2 m - \omega^2) - \omega^2 (1/4n)(1+1/m) = 0. \quad (16)$$

При відомому дійсному α представлення хвилі у вигляді (10) є можливим і швидкість хвилі визначається за формулою (15). Отже, цей випадок теж описує дисперсійну хвиллю.

Випадок 3 досліджується за схемою, використаною для двох попередніх випадків.

Однак при припущеннях, що хвильове число є дійсним, рівняння типу (8), (9) та (13), (14) не узгоджуються між собою, з чого випливає, що шуканий розв'язок не існує. Коли припустити, що хвильове число є комплексним, то випадок 3 співпадає з випадком 1.

Слід зазначити, що в даній доповіді показано шлях отримання аналітичних розв'язків хвильових рівнянь поширення сейсмічної зсуви хвилі для випадку 1 та 2.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стандартна реологічна модель, швидкість сейсмічної хвилі, затухання амплітуди сейсмічної хвилі.

1. Савін Г.М., Руцицький Я.Я. Елементи механіки спадкових середовищ. – Київ: Вища школа, 1976. – 276 с. Savin G.N., Rushchitsky J.J. Elements of Mechanics of Hereditary Media. – Kyiv: Vyshcha Shkola, 1976. – 276 p.
2. Crawford F.S., Jr. Waves. Berkley Physics Course. V. 3. – Newton, MA: Education Development Center, Inc., 1968. – 642 p.
3. Lai X.L., Wang S.M., Ye W.M., Cui Y.J. Experimental investigation on the creep behavior of an unsaturated clay // Canadien Geotechnical J. – 2014. – 51, N 6. – P. 621 – 28.
4. Malkin A., Isayev A. Rheology. Concepts, Methods, and Applications. 3rd ed. – Toronto: Chemtec Publishing, 2017. – 500 p.

V.M. Yurchuk

DESCRIPTION OF THE APPLICATION OF THE STANDARD RHEOLOGICAL MODEL TO THE ANALYSIS OF SEISMIC WAVES

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: vasil_2008@ukr.net

This report briefly describes the essence of the method for obtaining analytical solutions of seismic wave propagation. The expediency of using this model is justified by the possibility of theoretically analyzing the propagation of waves in soil layers and simply recognizing the parameters of the model.

**А.Ф. Булат¹, С.А. Курносов¹, С.Ю. Макеєв¹, О.П. Круковський¹,
М.М. Стадничук¹**

**ОБГРУНТУВАННЯ ХВИЛЬОВОГО ОПОРУ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ
ДЛЯ ЗАХИСТУ ПІДЗЕМНИХ ВИРОБОК ВІД ПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ**

*¹Інститут геотехнічної механіки ім. М.С.Полякова НАНУ,
бул. Сімферопольська, 2а, 49005, Дніпро, Україна;
e-mail: igtm@ukr.net*

Під час проектування підземних виробок різного призначення – протяжних тунелів, камер великих розмірів, штолень і т.д., їх кріплення розраховують на протидію статичним навантаженням від гірського тиску. У деяких випадках, пов’язаних з призначенням виробок, виникає необхідність їх захисту від динамічного впливу, обумовленого підземними вибухами потужних зарядів [7, 8]. У цьому разі в гірському масиві розповсюджуються високоенергетичні пружні хвилі з великою амплітудою зміщень [1 - 3]. Ці хвилі представляють загрозу стійкості підземних споруд [9], перш за все, елементів бетонного кріплення, яке зазвичай використовують в підземних умовах. Критерієм стійкості бетонних конструкцій слугує їх відносна деформація, яка не повинна перевищувати $2,5 \cdot 10^{-3}$ 1/m [6].

Для зниження передачі енергії пружних хвиль від гірського масиву на кріплення споруди, нами запропоновані технічні рішення щодо формування на її контурі захисного шару з полімерних смол [4, 5]. Цей шар утворюють шляхом нагнітання рідких смол в закріпний простір збірного бетонного кріплення. За результатами лабораторних експериментів встановлені пружні і деформаційні властивості композитних матеріалів, отриманих з восьми різних типів двокомпонентних смол німецьких виробників MC і Carbo, визначені їх густина ρ , швидкості проходження повздовжньої V_p , і попеченої V_s хвиль та розраховано хвильовий опір $Z = V_p \cdot \rho$. Для дослідження характеру розповсюдження плоскої пружної хвилі на межах захисного шару прийняті композити з мінімальним, середнім і максимальним значеннями хвильового опору.

В розрахунковій моделі впливу пружної хвилі на стійкість бетонного кріплення підземної виробки розглянута ситуація, коли на контур розташованої в граніті підземної споруди, закріпленої бетонним шаром товщиною 0,6 м, приходить плоска пружна хвиля з амплітудою A_0 . У першому випадку, коли підземна споруда не захищена полімерним шаром, хвиля одразу потрапляє на межу граніт-бетон, тобто відбувається однократне відбиття-заломлення хвилі. Частина її енергії відбивається в граніт, а інша – заломлюється (проникає) в бетон. Для шару бетону товщиною 0,6 м критичною є амплітуда $A_{cr} = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м [6]. В іншому випадку між гранітом і бетоном додано полімерний шар. У цьому разі відбувається двократне відбиття-заломлення хвилі – заломлена (та, що пройшла через межу граніт-полімер) хвиля піддається повторному відбиттю-заломленню на межі полімер-бетон.

З використанням закономірностей відбиття і заломлення плоских пружних хвиль на межах розділу середовищ з різним хвильовим опором, обґрунтовані раціональні властивості матеріалу захисного шару, який утворюють шляхом нагнітання полімерних смол в закріпний простір збірного бетонного кріплення підземних споруд.

За результатами досліджень встановлено:

– Хвильове поле в прилеглому до споруди масиві складається з падаючої хвилі стиску і вторинної хвилі розтягу, що відбивається від полімерного шару і має велику амплітуду зміщень. Міцність порід на розтяг, в середньому, на порядок менша за міц-

ність на стиск. Тому при складанні паспорту кріплення підземної споруди слід враховувати ці деформації розтягу, наприклад, застосовувати анкерні системи.

– Вторинні хвилі з найбільшими значеннями амплітуд спостерігаються в полімерному шарі – заломлена з граніту та відбита від бетону. В подальшому ці хвилі замикаються в захисному шарі, багаторазово відбиваючись від середовищ із суттєво більшим хвильовим опором – граніту і бетону та швидко втрачаючи амплітуду. Полімер, завдяки еластичним властивостям, витримуватиме такі коливання без розвитку в ньому непружних деформацій.

– Завдяки ефекту відбиття і заломлення пружних хвиль на межах середовищ з різним хвильовим опором та загасанню їх амплітуди в захисному полімерному шарі, при застосуванні досліджених типів смол амплітуда хвилі, що проникає в бетон, знижується в 1,4-8 разів в залежності від їх властивостей.

– При збільшенні хвильового опору полімеру до певного значення $Z_{\text{pol max}}$ відбувається узгодження опору шарів граніт-полімер-бетон і амплітуда хвилі, що проникає в бетон A_{sec} дорівнює амплітуді падаючої хвилі A_0 . Для прийнятих в розрахунковій моделі властивостей породи і бетону $Z_{\text{pol max}} = 2 \cdot 10^6 \text{ кг}/(\text{м}^2\text{с})$. При перевищенні цього значення амплітуда хвилі, що проникає в бетон, стає більшою за амплітуду падаючої хвилі і захисний ефект полімерного шару зникає.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: композитні матеріали, хвильовий опір, відбиття і заломлення пружних хвиль, захист підземних виробок

1. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Глухов А.Ю. Осесиметричні хвилі в високоеластичному композитному матеріалі з початковими напруженнями. Довгохвильове наближення // Прикладна механіка. – 2021. – 57, №2. – С. 16 - 31.
2. Куриной В.П. Теоретические основы взрывного разрушения горных пород. – Днепр: Изд-во НГУ, 2018. – 280 с.
3. Рущицький Я.Я., Юрчук В.М. До еволюції плоскої гармонічної хвилі в неелінійно пружному композитному матеріалі, що моделюється двофазною сумішшю // Прикладна механіка. – 2021. – 57, №2. – С. 58 - 69.
4. Способ спорудження об'єкту укриття при станції метрополітену / Булат А.Ф., Возіянов В.С., Курносов С.А. та інш.: Ін-т геотехн. мех. НАН України. – Пат. України № 155922. – 17.04.2024.
5. Способ будівництва складських підземних споруд подвійного призначення / Булат А.Ф., Возіянов В.С., Курносов С.А. та інш.: Ін-т геотехн. мех. НАН України. – Пат. України № 156131. – 15.05.2024.
6. Сталезалізобетонні конструкції. Основні положення // ДБН В.2.6-160:2010. – К.: Мінрегіонбуд України, 2011. – 55 с.
7. Ishchenko O., Konoval V., Ishchenko K. Physical and simulation modelling of solid media fracturing by means of explosive charges of different cross-sectional shapes // Mining of Mineral Deposits. – 2022. – 16(4). – P. 122–131.
8. Ishchenko O., Novikov L., Ponomarenko I., Kinash R., Ishchenko K. Blast wave interaction during explosive detonation in a variable cross-sectional charge // Mining of Mineral Deposits. - 2024. - 18(2). - P. 60-70.
9. Kruckovskiy A.P., Kruckovskaya V.V. Research of the stress condition of massif around mine working with bolting at the drive working by blast-hole drilling // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. – 2012. – №1. – P. 34 – 40.

A.F. Bulat¹, S.A. Kurnosov¹, S.Yu. Makeiev¹, O.P. Kruckovsky¹, M.M. Stadnichuk¹

SUBSTANTIATION OF WAVE RESISTANCE OF COMPOSITE MATERIALS FOR PROTECTING UNDERGROUND WORKINGS AGAINST ELASTIC VIBRATIONS

¹M.S. Poliakov Institute of Geotechnical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Simferopolska Str., 2a, 49005, Dnipro, Ukraine;

e-mail: igtm@ukr.net

Rational properties of the material of the protective layer, which is formed by injecting polymer resins into the anchored area of the precast concrete support of underground structures, are substantiated based on the regularities of reflection and refraction of plane elastic waves on the interface of media with different wave resistance.

С.Ю.Бабич¹, Н.О.Ярецька^{1,2}, О.А.Кравчук²

ТИСК ДВОХ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ СПІВВІСНИХ КІЛЬЦЕВИХ ЦИЛІНДРІВ НА ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИЙ ШАР

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,

бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: LaretskaN@gmail.com

²Хмельницький національний університет,

бул. Інститутська, 11, 29016, Хмельницький, Україна

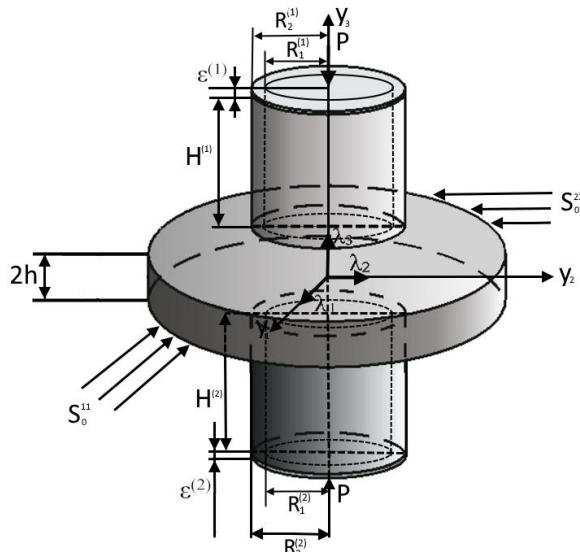
Проблема дослідження впливу початкових напружень на тіла, що перебувають у контакті, виникла в цілому ряді фундаментальних та прикладних наукових напрямків, таких як: механіка композітів, механіка матеріалів та елементів конструкцій, неруйнівних методах визначення навантажень, сейсмології, біомеханіці, механіці гірських порід, геофізиці та інших. Тому, необхідність у дослідженні впливу початкових напружень на контактну взаємодію тіл є важливим аспектом вивчення представлених проблем.

Також, врахування впливу додаткових сил (наприклад, початкових або залишкових напружень) на систему пружних тіл, що контактирують, в рази ускладнює розв'язки задач в математичному аспекті. Тому важливо розвивати цей напрямок досліджень, використовуючи апарат математичних методів.

Оглядаючи праці контактної механіки, моделі, що враховують складні фізичні та механічні властивості тіл, були досліджені у працях [3 - 5]. В загальному випадку, дія початкових напружень на контакт тіл вимагає використання при дослідженні нелінійної теорії пружності [6]. Але, якщо початкові напруження будуть достатньо великими, то можна обмежитись її лінеаризованим варіантом [1, 2, 7].

Тому дослідження даної контактної задачі виконано у загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [1, 2, 7] без врахування сил тертя.

Отже, розглянемо пружний нескінчений попередньо-напруженій шар, у який втискаються два скінченні співвісні пружні кільцеві циліндричні штампи з початковими напруженнями (рис. 1). Зробимо припущення, що пружні тіла виготовлені з різних стисливих або нестисливих ізотропних матеріалів з потенціалом довільної структури. Причому коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга для «верхнього» та «нижнього» кільцевих штампів позначимо $v^{(i)}$, $E^{(i)}$ ($i=1,2$), відповідно, а для шару - v , E . Товщину шару після виникнення в ньому початкового напруженого стану позначимо через $h = \lambda_3 h^*$, де h^* – товщина шару у природному стані; $R_1^{(i)}$ ($i=1,2$) – радіуси внутрішніх кіл пружних кільцевих штампів, $R_2^{(i)}$ ($i=1,2$) – радіуси зовнішніх кіл пружних кільцевих штампів, $H^{(i)}$ ($i=1,2$) – висоти пружних кільцевих штампів, відповідно. Вважаємо, що зовнішні віссесиметричні навантаження прикладені тільки до вільних торців пружних штампів так, що їх точки зміщуються в напрямку осі Oy_3 на сталі величини $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$ відносно площини $y_3=0$. Поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішнього навантаження. А дія сил тертя в зоні контакту відсутня.



Ruc. 1.

Дослідження виконуємо в координатах початкового деформованого стану Oy_i , ($i=1,2,3$), що пов'язані з лагранжевими координатами: $y_i = \lambda_i x_i$ ($i=1,2,3$), де λ_i є коефіцієнтами видовження, що визначають переміщення початкового стану. Також, припустимо, що початкові стани штампів та шару є однорідними та рівними.

У системі циліндричних координат (r, θ, y_3) такій постановці відповідають граничні умови:

1) на торцях пружних штампів

$$u_3^{(i)} = (-1)^i \varepsilon^{(i)}; Q_{3r}^{(i)} = 0; \quad \forall r \in [R_1^{(i)}, R_2^{(i)}], \quad y_3 = (-1)^{i+1} h + (-1)^{i+1} H^{(i)}, \quad (i=1,2) \quad (1)$$

2) на бічній поверхні пружних штампів

$$Q_{rr}^{(i)} = 0; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0; \quad \forall (-1)^{i+1} y_3 \in [0, H^{(i)}], \quad r = R_k^{(i)}, \quad (i,k=1,2) \quad (2)$$

3) на межі пружного шару в області контакту

$$U_3 = U_3^{(i)}; \quad Q_{33} = Q_{33}^{(i)}; \quad Q_{3r} = Q_{3r}^{(i)} = 0 \quad \forall r \in [R_1^{(i)}, R_2^{(i)}], \quad y_3 = (-1)^i h, \quad (i=1,2) \quad (3)$$

4) на межі пружного шару поза областю контакту

$$Q_{33} = Q_{3r} = 0, \quad \forall r \notin [R_1^{(i)}, R_2^{(i)}], \quad y_3 = (-1)^i h \quad (i=1,2) \quad (4)$$

Умови рівноваги мають вигляд:

$$\int_{R_1^{(1)}}^{R_2^{(1)}} r [Q_{33}]_{y_3=h} dr - \int_{R_1^{(2)}}^{R_2^{(2)}} r [Q_{33}]_{y_3=-h} dr = 0 \quad (5)$$

А рівнодійна зовнішніх сил визначається рівністю:

$$P = -2\pi \int_{R_1^{(1)}}^{R_2^{(1)}} r [Q_{33}]_{y_3=h} dr = -2\pi \int_{R_1^{(2)}}^{R_2^{(2)}} r [Q_{33}]_{y_3=-h} dr \quad (6)$$

Задача формулюється у вигляді розв'язку потрійних інтегральних рівнянь, що зводяться до одного інтегрального рівняння способом підстановки. Оскільки дана задача віссиметрична, то ядро інтегрального рівняння залежить від добутку трьох функцій Бесселя. Тому для розв'язку була використана формула, що представляє добуток двох функцій Бесселя у подвійну суму добутків гіпергеометричної функції на функцію Бесселя. Це дозволяє звести задачу до функціонального рівняння, що пов'язує переміщення кільцевих штампів з невідомими коефіцієнтами розподілу

контактних напружень. В свою чергу, отримане функціональне рівняння було зведене до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Дану систему розв'язуємо методом редукції (утинання). При дії навантаження на кільцеві штампи розподіл контактних напружень знаходимо у вигляді ряду добутків приєднаних функцій Лежандра з вагою, що відповідає особливостям у контактних напруженнях на межах штампів.

Також, в роботі для випадку нерівних коренів визначального рівняння [2, 7] проведено числовий розв'язок задачі для потенціалу Трелоара.

Отже, дослідивши контактну взаємодію двох пружних попередньо напружених співвісних кільцевих циліндрів з пружним шаром з початковими напруженнями, отримали впевненість, що майбутній прогрес розвитку механіки твердого деформованого тіла визначається дослідженнями досить складних класів задач, які враховують вплив складних фізичних та механічних властивостей тіл таких як: тертя, температура, початкові напруження тощо. Хоча розв'язок цих задач вимагає використання досить складних математичних розрахунків, а їх практичне застосування зумовлено, наприклад, розрахунком фундаментів (ґрутових основ) або перекріттів з підошвами кільцевої форми.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: початкові напруження, лінеаризовані теорія пружності, потенціал Трелоара, функції Бесселя.

1. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями : монография. – Германия : Saarbrücken LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
2. Гузь А.Н., Рудницкий В.Б. Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями : монография. – Хмельницький : вид. ПП Мельник, 2006. – 710 с.
3. Bagno O.M. Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer. // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 6. – P. 644 – 654.
4. Guz A.N. Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. – Cham: Springer, 2021. – 366 p.
5. Kaminsky A.O., Kurchakov E.E. Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 2. – P. 154 – 159.
6. Rushchitsky J.J. Auxetic metamaterials from the position of mechanics: linear and nonlinear models. // Dopov. Nac. akad. nauk Ukr. – 2018. – 7. – P. 46-58.
7. Yarets'ka, N. Contact Problems for Cylindrical Stamps and Elastic Bodies with Initial (Residual) Stresses. In: Guz, A.N., Altenbach, H., Bogdanov, V., Nazarenko, V.M. (eds) Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials. – Cham: Springer, vol 191, 2023. – P. 517–546.

S.Y. Babych¹, N.O. Yarets'ka^{1,2}, O. A. Kravchuk²

PRESSURE OF TWO PRE-TENSIONED CO-AXIAL RING CYLINDERS ON A PRE-TENSIONED LAYER

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;

e-mail: IaretskaN@gmail.com

² Khmelnytsky National University,
Institute Street, 11, 29016, Khmelnytsky, Ukraine

The contact problem is solved for two elastic pre-tensioned co-axial finite ring cylinders on a pre-tensioned layer without frictional forces. It is solved for the case of unequal roots of the characteristic equation. The research was carried out for the theory of great initial (ultimate) and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of linearized theory of elasticity with the elastic potential having arbitrary structure.

А.О.Сяський, Н.В.Шевцова

МІШАНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ І ЗАМКНЕНОГО ПРУЖНОГО РЕБРА

*Рівненський державний гуманітарний університет,
бул. Степана Бандери, 12, 33028, Рівне, Україна; e-mail: rectorat@rshu.edu.ua*

Розглянемо кусково-однорідну пружну систему, що містить ортотропну пластинку товщиною $2h$ з еліптичним отвором, гладкий контур якого підсилиений пружним ребром у вигляді замкненої моментної циліндричної оболонки товщиною 2η і висотою $2h_0$ ($h_0 > h$). Їх симетричне з'єднання здійснено методом зварювання.

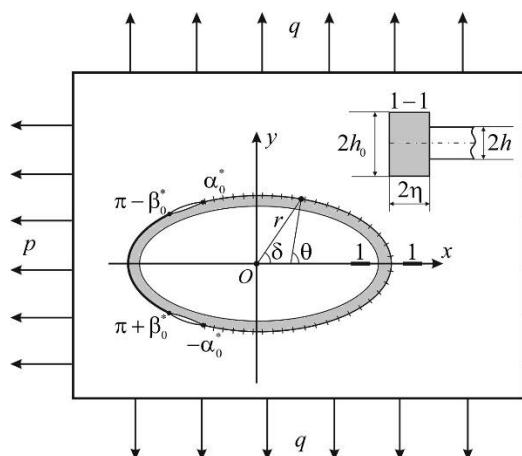


Рис.1.

Спільна серединна площа пластиинки і ребра віднесена до декартової (x, y) та полярної (r, δ) систем координат з полюсом у центрі отвору. Пластиинчаста конструкція перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного однорідним силовим навантаженням на зовнішньому контурі пластиинки (рис.1). Вважаємо, що головні напрямки ортотропії матеріалу пластиинки співпадають з напрямками координатних осей і осей еліпса.

Припустимо, що на лінії сполучення пластиинки і ребра зовні ділянки $[-\alpha_0^*; \alpha_0^*]$ виник симетричний відносно осі Ox міжфазний розріз, береги якого за дії заданого навантаження на ізольованій ділянці $[\pi - \beta_0^*; \pi + \beta_0^*]$ гладко контактують. Межі ділянок з'єднання і контактування визначаються полярними кутами $-\alpha_0^*$, α_0^* , $\pi - \beta_0^*$, $\pi + \beta_0^*$.

Розв'язання задачі передбачає визначення розмірів ділянки гладкого контактування берегів міжфазного розрізу між пластиинкою і ребром та компонент напруженого стану на межі поділу їх матеріалів.

Умовно розділяючи двокомпонентну конструкцію, зображену на рис.1, на окремі елементи (ортотропну пластиинку з еліптичним отвором та ізотропне підсилювальне ребро) і замінюючи дію одного тіла на інше невідомими контактними зусиллями, приходимо до першої основної задачі теорії пружності для пластиинки і пружного ребра.

Оскільки характерний розмір отвору значно менший від зовнішніх розмірів пластиинки, її будемо моделювати нескінченною ортотропною пластиинкою з еліптичним отвором. Лінію перетину серединної площа пластиинки з поверхнею отвору позначено через Γ , а через θ – кут, який утворює нормаль до Γ з додатним напрямком осі Ox . Вважаємо, що пластиинчаста конструкція перебуває в умовах

однорідного узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими на нескінченності зусиллями p і q , які діють вздовж координатних осей, та нормальними T_ρ і дотичними $S_{\rho\lambda}$ контактних зусиль, що передаються до контуру Γ від підсилювального ребра.

Підсилювальне ребро моделюємо замкненим криволінійним стержнем великої змінної кривизни, який перебуває в пружній рівновазі під дією контактних зусиль T_ρ і $S_{\rho\lambda}$, що передаються до нього від пластинки. Задача розрахунку внутрішніх силових факторів у замкненому стержні двічі статично невизначена. На підставі методу сил [2, 5] обираємо основну розрахункову схему стержня (статично визначену і геометрично незмінну) вилученням зайвих зв'язків та заміною їх невідомими реакціями N_0 , L_b^0 . Зображеній на рис.2 розімкнений стержень деформується так само, що й верхня частина суцільного стержня. Відповідно до прийнятої моделі, напруженій стан підсилення визначають внутрішні поздовжня N і поперечна Q сили та згинальний момент L_b , що діють у поперечних перерізах стержня і віднесені до його осі. Для їх визначення використовуємо умови рівноваги частини ребра між перерізами $\theta=0$ і $\theta=\theta$ (на рис. 3 зображена суцільною лінією).

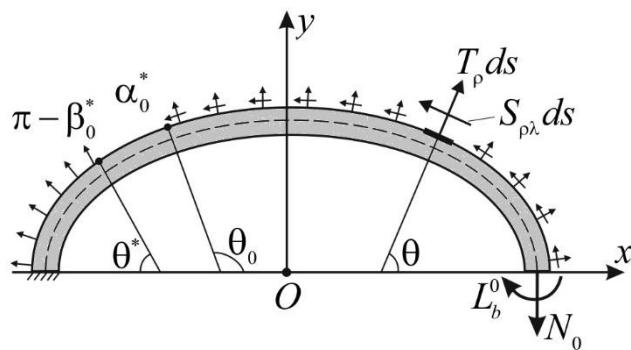


Рис.2.

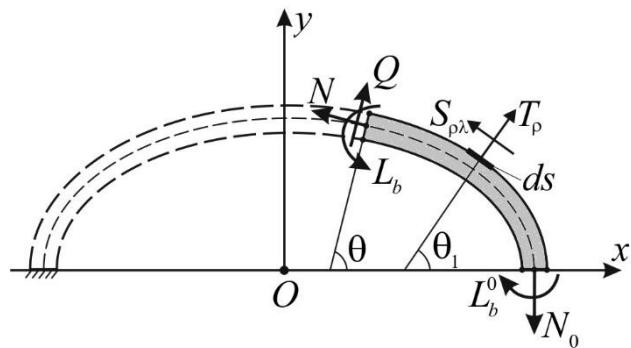


Рис.3.

Крайові умови задачі на ділянці з'єднання пластинки і підсилювального ребра формулюємо у вигляді умов ідеального механічного контакту в диференціальній формі [3], а на ділянці гладкого контактування – у вигляді рівності їх кривизн [3,4].

Компоненти тензора деформації контуру Γ в ортотропній пластинці через контактні зусилля і зовнішнє навантаження визначаються інтегральними залежностями з ядрами Гільберта [1], а внутрішні силові фактори N , Q , L_b в підсилювальному ребрі –

зі співвідношень [2]. Їх підставляння в крайові умови після певних перетворень призводить до математичної моделі задачі у вигляді системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта для визначення контактних зусиль T_ρ ,

$S_{\rho\lambda}$ на ділянці сполучення пластинки і ребра, а також на ділянці їх гладкого контактування, величина якої наперед невідома. Цю систему доповнюють умовами однозначності [2,3], які забезпечують відсутність кута повороту нормалі та вертикального зміщення в центрі ваги правого торця розімкненого стержня і слугують для визначення його початкових параметрів N_0 , L_b^0 . Якщо ексцентриситет еліпса дорівнює нулю, математична модель визначає напружений стан ортотропної пластинки з підсиливим отвором [1].

Точний розв'язок побудованої системи знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання необхідно встановити структуру шуканих функцій на кінцях ділянок з'єднання і гладкого контактування пластинки та ребра.

Оскільки розглядувана задача відноситься до мішаних контактних задач теорії пружності, то відповідно до [1, 3] контактні зусилля T_ρ , $S_{\rho\lambda}$ на кінцях $\lambda = \pm\alpha_0$ ділянки з'єднання пластинки і ребра мають кореневу особливість з локальною осциляцією. Контактні зусилля на проміжку $[\pi - \beta_0; \pi + \beta_0]$ обмежені та неперервні, тому, нехтуючи впливом осциляції, наблизений розв'язок задачі побудовано комбінованим методом механічних квадратур і колокації [3,4], яким досліджено вплив на величину ділянки гладкого контактування та напружений стан пластинки і підсилювального ребра ортотропії матеріалу пластинки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: еліптичний отвір, ортотропна пластинка, замкнене пружне ребро, контактна взаємодія, напружений стан, сингулярні інтегрально-диференціальні рівняння.

1. Сяський А.О., Сяський В.А., Шевцова Н.В. Моделювання контактної взаємодії берегів міжфазного розрізу по дузі кола між ортотропною пластинкою і замкненим пружним ребром // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник. – 2021. – Вип.72. – С. 120 – 127.
2. Сяський А., Шевцова Н. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2015. – **79**, № 3. – С. 24 – 30.
3. Сяський А.О., Шевцова Н.В. Контакт берегів міжфазного розрізу між пластинкою з отвором і замкненим пружним ребром // Прикладна механіка. 2024. – **60**, №2. – С.111–125.
4. Сяський А.О., Шевцова Н.В., Сяський В.А., Дайнека О.Ю. Міжфазні розрізи між пластинкою з отвором і ребром жорсткості //Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: Колективна монографія за заг. ред. Р.М. Мартиняка. – Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022. – С. 322-353.
5. Філин А.П., Тананайко О.Д., Чернєва И.М., Шварц М.А. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем. – Ленинград: Стройиздат, 1983. – 232 с.

A.O. Syaskyi, N.V. Shevtsova

MIXED CONTACT PROBLEM FOR ORTHOTROPIC PLATE WITH ELLIPTICAL HOLE AND CLOSED ELASTIC RIB

Rivne State University of Humanities, Stepan Bandera Str., 12, 33028, Rivne, Ukraine
e-mail: rectorat@rshu.edu.ua

The formulation and approximate method for solving the problem of smooth contact of the edges of the interphase section between an infinite orthotropic plate with an elliptical hole and a closed elastic rib are proposed. Modeling the reinforcing rib with an elastic rod of great curvature, a system of singular integral equations to determine the contact forces is constructed. Its approximate solution is established by the method of mechanical quadrature and collocation.

К.А.Чумак¹, Р.М. Мартиняк¹

ВЗАЄМОДІЯ ПРУЖНОГО ТІЛА З ЖОРСТКОЮ ТЕКСТУРОВАНОЮ ОСНОВОЮ ЗА ДІЇ СИЛ АДГЕЗІЇ

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П. Несторова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: chumakostya@gmail.com; m.rostyslav@gmail.com

В сучасній техніці широко використовують технології поверхневого текстурування елементів контактних з'єднань, які дають змогу формувати на них регулярний рельєф з контролюваними топографічними властивостями [1]. Зі зменшенням розмірів компонент приладів до мікро- та нанорівня адгезія на текстуріованому інтерфейсі між тілами відіграє істотну роль та зумовлює низку цікавих ефектів внаслідок домінуючого впливу сил міжмолекулярної взаємодії.

У цій роботі розглянуто безфрикційний контакт пружного півпростору S_1 , поверхня якого є ідеально плоскою, та жорсткої основи S_2 , текстурованою розташованими з періодом d виймками прямокутної форми сталої глибини $r(x) = -A$ та ширини a (рис.1 α). Виймки є плиткими, тобто $A \ll a$. Припускається, що тіло S_1 перебуває в умовах плоскої деформації та притискається до тіла S_2 рівномірно розподіленими на нескінченності зусиллями інтенсивності p . Внаслідок поверхневої текстури жорсткої основи відбувається неповний контакт тіл – на інтерфейсі знаходяться періодично розташовані зазори ширини a та висоти $h(x)$ (рис.1 β).

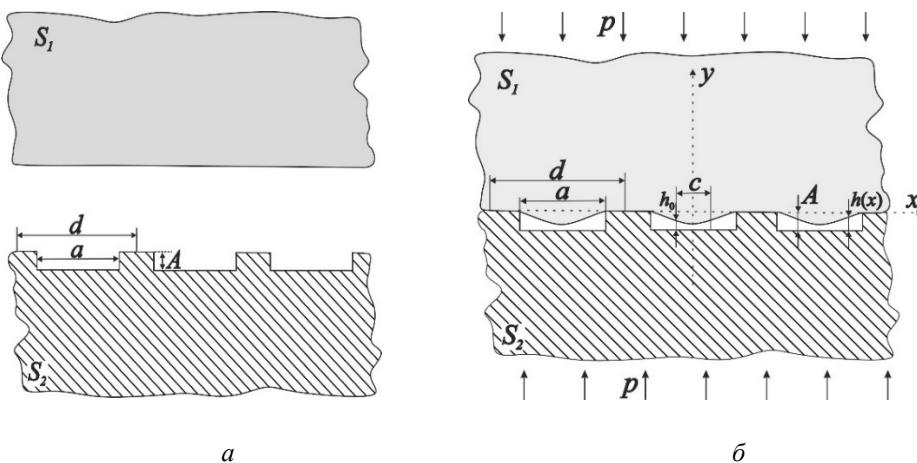


Рис.1.

Для опису сил міжмолекулярного притягання (адгезії) використаємо широковживану модель Можіса-Дагдейла [2-4], згідно з якою сталі сили адгезії інтенсивності σ_0 діють на тих ділянках інтерфейсних зазорів, де відстань між їх поверхнями не перевищує значення $h_0 \approx 0.97\epsilon$ (ϵ – рівноважна відстань між поверхнями). Зважаючи на вищесказане, крайові умови сформульованої задачі запишемо так (оскільки задача періодична, умови наведено лише для інтервалу $|x| \leq d/2$):

$$\sigma_{xy} = 0, u_y = 0, a \leq |x| \leq d/2; \quad (1)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_0, |x| \leq c, \sigma_{yy} = 0, a < |x| < c, \sigma_{xy} = 0, |x| < a; \quad (2)$$

$$\sigma_{xx} = 0, \sigma_{yy} = -p, \sigma_{xy} = 0, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут c – ширина зони адгезії, де діють сталі сили міжмолекулярного притягання σ_0 ; $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$ – компоненти тензора напруження, u_y – компонента вектора переміщень в напрямку осі y .

З використанням розробленої в праці [4] методики дослідження адгезійного контакту тіл з текстуркованими поверхнями цю задачу зведено до наступного сингулярного інтегрального рівняння відносно похідної висоти зазору $h(\xi)$:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{h'(\eta)}{\eta - \xi} d\eta = \frac{dK}{2} \frac{p + \sigma(\xi)}{\xi^2 + 1}, \quad h(\pm\alpha) = h'(\pm\alpha) = 0, \quad (4)$$

де $\sigma(\xi) = \sigma_0$, $|\xi| \leq \chi$ та $\sigma(\xi) = 0$, $\chi < |\xi| < \alpha$; $\xi = tg(\pi x/d)$, $\eta = tg(\pi t/d)$, $\alpha = tg(0.5\pi a/d)$, $\chi = tg(0.5\pi c/d)$; $K = 4(1 - v_1^2)E_1$, E_1 та v_1 – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу тіла S_1 .

Розв'язавши рівняння (4) аналітично та проінтегрувавши отриманий розв'язок з урахуванням умови $h(-\alpha) = A$, знайдемо висоту зазору між тілами:

$$h(\xi) = A + \frac{dK}{\pi} \left[\frac{p\sqrt{\alpha^2 + 1}}{2} I_1(\xi) + \sigma_0 \left(L \cdot I_1(\xi) + \frac{I_2(\xi)}{4\pi} \right) \right], \quad |\xi| \leq \alpha, \quad (5)$$

де

$$L = \sqrt{\alpha^2 + 1} \cdot \arctg \left(\frac{\chi\sqrt{\alpha^2 + 1}}{\sqrt{\alpha^2 - \chi^2}} \right) - \arctg \left(\frac{\chi}{\sqrt{\alpha^2 - \chi^2}} \right), \quad (6)$$

$$I_1(\xi) = \int_{-\alpha}^{\xi} \frac{\eta d\eta}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2} (\eta^2 + 1)}, \quad I_2(\xi) = \int_{-\alpha}^{\xi} \frac{\Psi(\eta) d\eta}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2} (\eta^2 + 1)}, \quad (7)$$

$$\Psi(\xi) = 4\xi \arcsin(\xi/\alpha) + \sqrt{\alpha^2 - \xi^2} [\Gamma(\alpha, \xi, \chi) - \Gamma(\alpha, \xi, -\chi)], \quad (8)$$

$$\Gamma(\alpha, \xi, \eta) = \ln \left(\frac{\alpha^2 - \xi\eta + \sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 - \eta^2)}}{\alpha^2 - \xi\eta - \sqrt{(\alpha^2 - \xi^2)(\alpha^2 - \eta^2)}} \right). \quad (9)$$

Для знаходження параметра ширини зони адгезії χ з умови $h(-\chi) = h_0$ отримаємо трансцендентне рівняння:

$$A - h_0 + \frac{dK}{\pi} \left[\frac{p\sqrt{\alpha^2 + 1}}{2} I_1(-\chi) + \sigma_0 \left(L \cdot I_1(-\chi) + \frac{I_2(-\chi)}{4\pi} \right) \right] = 0, \quad (10)$$

розв'язок якого знайдено числово.

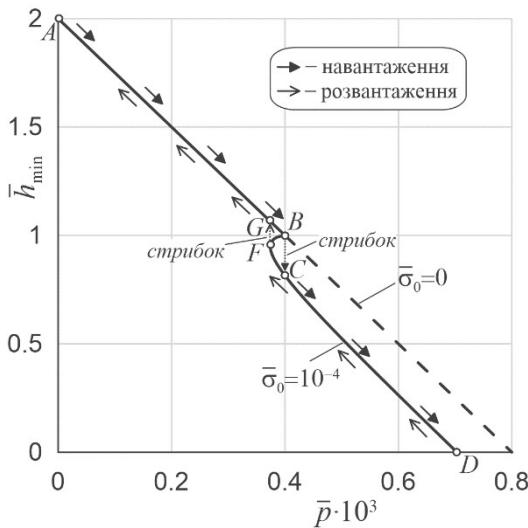


Рис.2.

зумовлює зменшення \bar{h}_{min} за нелінійним законом на частині С-Д. При $\bar{h}_{min} = 0$ відбувається торкання поверхні пружного тіла з поверхнею жорсткої основи. За розвантаження (зменшення \bar{p}) \bar{h}_{min} збільшується за нелінійним законом на частині Д-Ф, а в точці F відбувається стрибок F→G з рівноважного стану з зоною адгезії до рівноважного стану без зони адгезії. Подальше зменшення \bar{p} зумовлює збільшення \bar{h}_{min} за лінійним законом на частині Г-А.

На рис.2 чітко простежується явище адгезійного гістерезису – криві залежності мінімальної висоти зазору від прикладених зусиль не співпадають для навантаження і розвантаження.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: адгезійний контакт, поверхнева текстура, прямокутний зазор, модель Можіса-Дагдейла, адгезійний гістерезис, відрив тіл.

1. Etsion I. State of the art in laser surface texturing // ASME J. Tribol. – 2005. – **127**, No. 1. – P. 248–253.
2. Maugis D. Adhesion of spheres: The JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid Interface Sci. – 1992. – **150**, No. 1. – P. 243–269.
3. Adams G.G. Adhesion at the wavy contact interface between two elastic bodies // ASME J. Appl. Mech. – 2004. – **71**, No. 6. – P. 851–856.
4. Chumak K. Adhesive contact between solids with periodically grooved surfaces // Int. J. Solids Structures. – 2016. – **78–79**. – P. 70–76.

K.A.Chumak¹, R.M. Martynyak¹

INTERACTION BETWEEN ELASTIC BODY AND RIGID TEXTURED BASE UNDER THE ACTION OF ADHESIVE FORCES

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: chumakostya@gmail.com; m.rostyslav@gmail.com

The adhesive contact between an elastic body and a rigid base with periodic system of rectangular surface grooves of small height is investigated. The effect of adhesion is simulated by the Maugis-Dugdale model. The problem is reduced to a singular integral equation for the derivative of a gap height and a transcendental equation for a width of the adhesion zone. Jumps between equilibrium states and the adhesion hysteresis are observed with loading and unloading.

Ю. М. Стреляєв¹, Р. М. Мартиняк²

ТЕРМОМЕХАНІЧНИЙ КОНТАКТ З ТЕРТЯМ ПЛОСКОГО ШТАМПУ ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ

¹Запорізький інститут економіки та інформаційних технологій,
бул. Кияшка, 16-Б, 69041, Запоріжжя, Україна; e-mail: strelkiny@gmail.com

²Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: mrostyslav@gmail.com

Моделювання і дослідження контактної взаємодії тіл з урахуванням часткового фрикційного проковзування, зумовленого одночасною дією силових і термічних навантажень, є актуальною проблемою контактної механіки. Водночас у літературі є небагато робіт, у яких вивчається термомеханічне проковзування спряжених поверхонь пружних тіл.

В цій праці досліджено часткове проковзування з тертям між спряженими поверхнями жорсткого циліндричного штампу з плоскою основою та пружного півпростору, яке виникає в результаті спочатку нормального осідання штампу $\Delta > 0$, а потім – рівномірного нагріву тіл до температури T .

Задачу зведено до системи нелінійних інтегральних рівнянь (1), яка моделює контактну взаємодію тіл на першому та другому етапах навантаження [3].

$$\begin{aligned} p_{1,i}(s) &= h(p_{1,i}(s) - \tilde{E}v_{1,i}(s)); \\ p_{2,i}(s) &= q(p_{2,i}(s) - \tilde{E}v_{2,i}(s), p_{3,i}(s) - \tilde{E}v_{3,i}(s), \mu p_{1,i}(s)); \\ p_{3,i}(s) &= q(p_{3,i}(s) - \tilde{E}v_{3,i}(s), p_{2,i}(s) - \tilde{E}v_{2,i}(s), \mu p_{1,i}(s)), \end{aligned} \quad (1)$$

де: $i = 1$ відповідає першому (механічному) етапу навантаження, $i = 2$ – другому (термічному) етапу навантаження; $s = (x, y)$ – точка обмеженої плоскої області, яка містить ділянку контакту (декартову систему координат $Oxyz$ введено так, щоб пружний півпростір займав область $z \leq 0$, а початок координат збігався з центром основи штампу); $v_{1,i}(s)$ – функція зазору між тілами; $p_{1,i}(s)$ – контактний тиск під штампом; $p_{2,i}(s)$, $p_{3,i}(s)$ – питомі дотичні контактні зусилля під штампом; μ – коефіцієнт тертя; $v_{2,i}(s)$, $v_{3,i}(s)$ – приrostи дотичних переміщень поверхні штампа відносно поверхні півпростору, \tilde{E} – довільне додатне число. Дійсні функції h і q в системі (1) мають такий вигляд:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } x < 0; \end{cases} \quad q(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} \leq z, \\ \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{якщо } \sqrt{x^2 + y^2} > z. \end{cases}$$

На першому етапі механічного навантаження ($i = 1$) функції $v_{1,1}(s), v_{2,1}(s), v_{3,1}(s)$ визначають співвідношення:

$$v_{1,1}(s) = g_0(s) - \Delta - u_{1,1}(s); \quad (2)$$

$$v_{2,1}(s) = -u_{2,1}(s); \quad (3)$$

$$v_{3,1}(s) = -u_{3,1}(s). \quad (4)$$

За термічного навантаження ($i = 2$) у разі різних коефіцієнтів лінійного теплового розширення штампу α_1 та півпростору α_2 виникають додаткові відносні дотичні переміщення спряжених поверхонь. Функції $v_{1,2}(s), v_{2,2}(s), v_{3,2}(s)$ мають такий вигляд:

$$v_{1,2}(s) = g_0(s) - \Delta - u_{1,2}(s); \quad (5)$$

$$v_{2,2}(s) = (\alpha_1 - \alpha_2)xT - u_{2,2}(s) + u_{2,1}(s); \quad (6)$$

$$v_{3,2}(s) = (\alpha_1 - \alpha_2)yT - u_{3,2}(s) + u_{3,1}(s). \quad (7)$$

В формулах (2) – (7) $g_0(s)$ – початковий зазор між тілами, $u_{1,i}(s)$ і $u_{2,i}(s), u_{3,i}(s)$ – нормальні і дотичні пружні переміщення точок поверхні півпростору, які пов’язані з компонентами вектора питомого контактного навантаження $\vec{p}_i = (p_{1,i}(s), p_{2,i}(s), p_{3,i}(s))$ розв’язками Буссінеска і Черутті [4].

До розв’язання системи рівнянь (1) застосовано числовий метод [1, 2], який включав дискретизацію інтегральних рівнянь та використання ітераційного процесу для отримання наближених розв’язків їх дискретних аналогів.

Розрахунки виконано для коефіцієнта тертя $\mu = 0,25$, коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,3$ та безрозмірних величин:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x}{R}; \quad \bar{y} = \frac{y}{R}; \quad \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{R(1-\nu^2)p_1(s)}{2E\Delta}; \quad \bar{q}_x(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{R(1-\nu^2)p_2(s)}{2E\Delta}; \\ \bar{q}_y(\bar{x}, \bar{y}) &= \frac{R(1-\nu^2)p_3(s)}{2E\Delta}; \quad \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{R}; \quad \bar{T} = (\alpha_1 - \alpha_2)T. \end{aligned}$$

В цих формулах R – радіус основи штампа, E – модуль Юнга півпростору.

На рис. 1 зображені залежності дотичних питомих контактних зусиль $\bar{q}_x(x, 0)$ від координати \bar{x} за різних значень температури \bar{T} . Рис. 1, а відповідає випадку $\alpha_1 < \alpha_2$, рис. 1, б – випадку $\alpha_1 > \alpha_2$. Суцільні лінії $\bar{T} = 0$ на рис. 1 відповідають першому етапу механічного навантажування.

Отримані числові результати свідчать, що з появою термічного навантаження розподіли дотичних контактних зусиль змінюються. Зі збільшенням температури у разі $\alpha_1 < \alpha_2$ в центральній зоні зчеплення, що утворилася на етапі механічного навантаження, дотичні зусилля зростають (рис. 1 а). Сама зона зчеплення зменшується за площею і стягується до центру основи штампу (межі цієї зони відповідає точка зламу відповідної кривої). У випадку $\alpha_1 > \alpha_2$ термічне навантаження призводить до того, що модулі дотичних зусиль спочатку зменшуються у всій області контакту, потім, після зміни напряму цих зусиль, відбувається збільшення їх модулів до граничних значень, що визначаються законом тертя Кулона (рис. 1 б). Внаслідок цього спочатку вся

область контакту охоплюється зчепленням, потім у ній послідовно виникають дві кільцеві зони проковзування: перша – біля краю основи штампа, друга – більше до її центру.

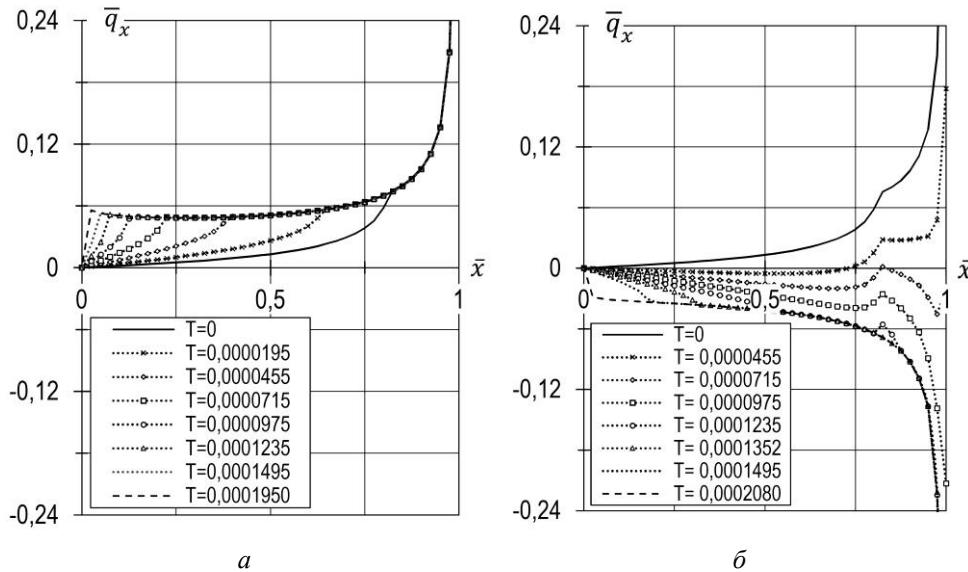


Рис. 1

При подальшому збільшенні термічного навантаження вся область контакту, крім центру, охоплюється проковзуванням.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: контактна задача, плоский штамп, теплове розширення, часткове проковзування, інтегральне рівняння, числовий розв'язок, ітераційний метод

1. Александров А.И. Метод решения пространственной контактной задачи о взаимодействии двух упругих тел при наличии трения между ними // Мат. методы та физ.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 3. – С. 29 – 42.
2. Александров А.И., Стреляев Ю.М. Метод нелинейных граничных интегральных уравнений для контактных задач теории упругости // Восточно-Европейский журн. передовых технологий. – 2014. – **7**, № 3. – С. 36 – 40.
3. Стреляев Ю.М., Мартиняк Р.М. Часткове проковзування при термомеханічному контакті плоского штампу та пружного півпростору // Прикладна механіка. – 2024. – **60**, №2. – С. 100 – 110.
4. Johnson K.L. Contact Mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 452 p.

Yu.M. Streliaiev¹, R.M. Martynyak²

THERMOMECHANICAL CONTACT WITH FRICTION OF A FLAT STAMP AND ELASTIC HALF SPACE

¹ Zaporizhzhia Institute of Economics and Information Technology, Kyiashko St., 16b,
69041, Zaporizhzhia, Ukraine
e-mail: strelkiny@gmail.com

² S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;

A numerical solution of the problem of frictional thermomechanical contact of a rigid cylindrical punch with a flat base and an elastic half-space is obtained. The dependence of the distributions of normal and tangential contact stresses and the configuration of stick and slip zones on the heating temperature is studied for two possible cases of the relationship between the coefficients of thermal expansion of bodies.

М.С. Слободян¹, І.С. Звізло¹, О.В. Білаш²

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНИ З КОЛОВОЮ МЕЖЕЮ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРИЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ СМУГОВОГО КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

¹Львівський національний університет імені Івана Франка,
бул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна;

e-mail: mykola.slobodyan@lnu.edu.ua, ivan.zvizlo@lnu.edu.ua

²Національна академія сухопутних військ імені Гетьмана Петра Сагайдачного,
бул. Героїв Майдану, 32, 79026, Львів, Україна
e-mail: oksana.orpanasovych@gmail.com

Пластинчасті елементи конструкцій знаходять широке застосування в різних галузях техніки. Вони можуть містити скінченні включення технологічного характеру і під час експлуатації в таких елементах можуть виникати тріщини, які різко знижують рівень допустимого навантаження, що може витримати конструкція. З фізичних міркувань зрозуміло, що за згину пластини береги тріщин будуть контактувати. Тому розробка методів для визначення напруженно-деформованого стану пластин з тріщинами, береги яких контактують, за згину є актуальною науково-технічною задачею механіки.

Розглянемо нескінченну кусково-однорідну ізотропну пластину завтовшки $2h$ з коловою межею поділу матеріалів радіуса R та радіальною тріщиною завдовжки $2l$, яка вільна від зовнішнього навантаження. Вважатимемо, що під дією згинальних моментів на нескінченості (Рис. 1a) береги тріщини приходять у гладкий контакт по області сталої ширини (смуговий контакт) на верхній основі пластини (Рис. 1б).

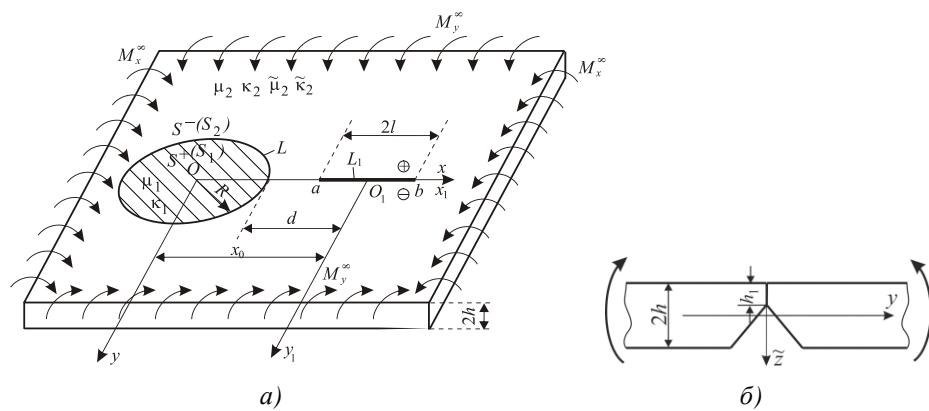


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини (рис. а)) та схема контакту берегів тріщини (рис. б))

У серединній площині пластини виберемо початок декартової системи координат $Oxy\tilde{z}$, направивши вісь $O\tilde{z}$ перпендикулярно до неї, причому початок координат O співпадає з центром кругової шайби, а тріщина знаходиться на осі Ox . Крім того, у цій площині введемо полярну систему координат r і θ з полюсом в точці O і поляр-

ною віссю Ox . Вважатимемо, центр тріщини має координату x_0 , причому $x_0 > R + l$. Пов'яжемо з тріщиною декартову систему координат $O_1x_1y_1$. Величинам, які відносяться до шайби, будемо приписувати індекс 1, а матриці – індекс 2. Точки площини Oxy , що співпадають з кінцями тріщини позначимо через a і b , область у середині кругової жорсткої шайби – через S^+ (S_1), ззовні – через S^- (S_2), лінію, де розміщена тріщина – через L_1 , а межу поділу матеріалів – через L . Розподілені згинальні моменти на нескінченності позначимо через M_x^∞ і M_y^∞ (Рис. 1a).

Через контакт берегів тріщини, розв'язок задачі будемо шукати у вигляді розв'язків двох взаємопов'язаних задач: задачі згину пластини (класична теорія згину пластин) та плоскої задачі теорії пружності при таких краївих умовах

$$\sigma_{y_1y_1}^\pm = -N/(2h), \quad \sigma_{x_1y_1}^\pm = 0, \quad P^\pm = 0, \quad x_1 \in L_1, \quad (1)$$

$$\partial_{x_1} [u_{\text{II}}] + \alpha h \cdot [\partial_{x_1y_1}^2 w] = 0, \quad M_{y_1}^\pm = \beta h N, \quad x_1 \in L_1, \quad (2)$$

$$P_{r1} = P_{r2}, \quad M_{r1} = M_{r2}, \quad u_{r1} = u_{r2}, \quad u_{\theta 1} = u_{\theta 2}, \quad w_1 = w_2, \quad \partial_r w_1 = \partial_r w_2, \quad x \in L, \quad (3)$$

$$\alpha = 0,5 \cdot (1 + (1 - \gamma)^2), \quad \beta = 1 - \gamma/3, \quad \gamma = h_1/h,$$

де N – контактне зусилля між берегами тріщини; $\sigma_{x_1y_1}$, $\sigma_{y_1y_1}$ – компоненти тензора напружень, а u_{rj} і $u_{\theta j}$, u_{II} – компоненти вектора переміщень в плоскій задачі; тут і в подальшому індекс j набуває двох значень 1 і 2; w_j – прогин пластини, M_{rj} , M_{y_1} – згинальні моменти, P_{y_1} , P_{rj} – узагальнена в сенсі Кірхгофа перерізувальна сила; $[f] = f^+ - f^-$, значками “+” і “–” позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при $y_1 \rightarrow \pm 0$, $\partial_x f = \partial f / \partial x$.

З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі та задачі згину пластини, задовільняючи країві умови (1)-(3), розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків переміщень та стрибків кутів повороту на берегах тріщин, яка розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Проведено числовий аналіз задачі та побудовані графічні залежності контактного зусилля, коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль при різних параметрах задачі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: пластина, тріщина, контакт, плоска задача, задача згину, задача лінійного спряження, сингулярні інтегральні рівняння, контактне зусилля.

M.S. Slobodian¹, I.S. Zvizlo¹, O.V. Bilash²

THE STRESS-DEFORMED STATE OF A PIECEWISE-HOMOGENEOUS PLATE WITH A CIRCULAR MATERIAL BOUNDARY AND A RADIAL CRACK, CONSIDERING THE STRIP CONTACT ALONG ITS EDGES

¹ Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska str., 1, 79000, Lviv, Ukraine,
e-mail: mykola.slobodyan@lnu.edu.ua, ivan.zvizlo@lnu.edu.ua

² Hetman Petro Sahaidachnyi National Army Academy,
Heroes of Maidan Street, 32, 79026, Lviv, Ukraine,
e-mail: oksana.opanasovych@gmail.com

The problem of bending of an infinite piecewise-homogeneous isotropic plate with a flexible circular insert and a radial through-thickness straight crack has been solved. The solution assumes that, under the action of an external load at infinity, the crack faces make smooth contact over a region of constant width on the upper surface of the plate. The problem is solved using methods from the theory of complex variables and complex potentials, and is reduced to a system of singular integral equations.

I. I. Прокопишин¹, Р. М. Мартиняк²

КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ, ОДНЕ З ЯКИХ МАЄ ПЕРІОДИЧНИЙ РЕЛЬСФ, А ІНШЕ – ПОКРИТТЯ З НЕЛІНІЙНИМ ВІНКЛЕРІВСЬКИМ ШАРОМ

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАНУ,
бул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна;

e-mail: ihor84@gmail.com

²Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАНУ,

бул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: mrostyslav@gmail.com

Розглянуто задачу про контактну взаємодію через нелінійний вінклерівський шар двох пружних тіл, одне з яких має пружне покриття. Між першим пружним тілом та покриттям другого пружного тіла (основи) відбувається односторонній контакт без тертя через нелінійний вінклерівський поверхневий прошарок, а між покриттям і його основою виконуються умови ідеального механічного контакту. Напружене-деформований стан пружних тіл і покриття описують рівняння лінійної теорії пружності за умов плоскої деформації. На основі результатів праць [1, 2] отримано слабке формульовання цієї задачі у вигляді нелінійного варіаційного рівняння зі штрафом та встановлено умови існування і єдності його розв'язку.

Для розв'язування нелінійного варіаційного рівняння, використовуючи результати робіт [1–5], розроблено ітераційний алгоритм декомпозиції області типу Робіна, який зводить це рівняння до паралельного розв'язування на кожній ітерації трьох незалежних лінійних варіаційних рівнянь плоскої теорії пружності для окремих тіл і покриття з краєвими умовами Робіна на контактних поверхнях. Доведено теорему про збіжність цього алгоритму та здійснено його програмну реалізацію зі застосуванням методу скінчених елементів.

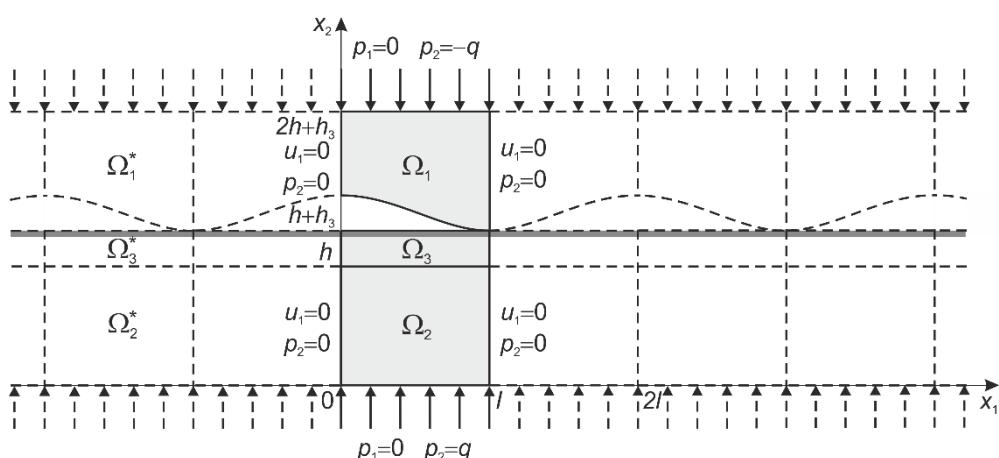


Рис. 1.

За допомогою отриманого алгоритму декомпозиції області та скінченноелементних апроксимацій досліджено контакт через нелінійний вінклерівський шар двох безмежних пружних смуг під дією рівномірно розподіленого зовнішнього навантаження, одна з яких має регулярний рельєф, що описується періодичною функцією, а інша – пружне покриття (рис. 1).

Вивчено вплив висоти і модуля Юнга пружного покриття, параметрів нелінійного поверхневого шару та інтенсивності зовнішнього навантаження на розподілі контактних і міжфазних напружень, а також на форму міжконтактних зазорів. Проаналізовано залежності об'єму, довжини і максимальної висоти міжконтактних зазорів від інтенсивності зовнішнього навантаження для різних значень параметрів вінклерівського шару та висоти і модуля Юнга пружного покриття.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: контакт пружних тіл, пружне покриття, вінклерівський шар, періодичний рельєф, нелінійне варіаційне рівняння, метод декомпозиції області, метод скінчених елементів.

1. Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A., Prokopyshyn I. I. Contact of elastic bodies with nonlinear Winkler surface layers // J. Math. Sci. – 2015. – **205**, N 4. – P. 535 – 553.
2. Prokopyshyn I. I. Domain decomposition schemes based on the penalty method for the problems of perfect contact of elastic bodies // J. Math. Sci. – 2016. – **212**, N 1. – P. 46 – 66.
3. Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M. Numerical analysis of the problems of contact of three elastic bodies by the domain decomposition methods // Mater. Sci. – 2013. – **49**, N 1. – P. 45 – 58.
4. Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2014. – **98**. – P. 739 – 748.
5. Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A. Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2013. – **91**. – P. 647 – 654.

I. I. Prokopyshyn¹, R. M. Martynyak²

**CONTACT OF THE ELASTIC BODIES ONE OF WHICH HAS A PERIODIC RELIEF AND
THE OTHER ONE IS COVERED BY AN ELASTIC COATING WITH A NONLINEAR
WINKLER LAYER**

¹ Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics, NASU,
Naukova Str., 3-b, 79060, Lviv, Ukraine;

e-mail: ihor84@gmail.com

² S. P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: mrostyslav@gmail.com

Using the domain decomposition algorithm and the finite element method we investigate the problem of contact interaction of two elastic bodies one of which has a periodic relief and the other one is covered by an elastic coating in the presence of a nonlinear Winkler surface layer. For this problem we analyze the influence of the height and Young's modulus of the coating, as well as the influence of the nonlinear Winkler layer parameters and the intensity of external loads on the distributions of contact and interfacial stresses and the form of the gaps between the body and the coating.

О . В . Приходько¹, С . В . Приходько²

КОНТАКТ БЛИЗЬКОГО ДО ПЛОСКОГО ТІЛА ТА ШОРСТКОГО ПІВПРОСТОРУ ЗА НАЯВНОСТІ ТЕРТЯ

¹*Відокремлений структурний підрозділ «Запорізький металургійний фаховий коледж Запорізького національного університету», вул. Немировича-Данченка, 71, 69091, Запоріжжя, Україна;*
e-mail: elenagrabko2013@gmail.com

²*Запорізька філія ДП «ДНІПРОСТАНДАРТМЕТРОЛОГІЯ», вул. Антенна, 10, 69005, Запоріжжя, Україна*

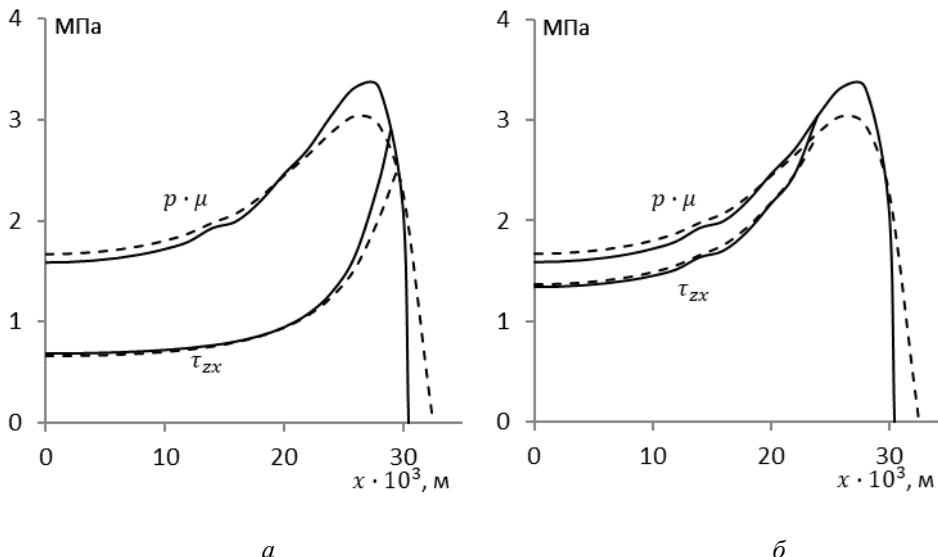
Для забезпечення контактної міцності сучасних елементів машин і конструкцій некласичної конфігурації та оптимізації їх функціональних характеристик важливого значення набувають дослідження контактних задач для тіл, форма яких описується широким спектром функцій. Зараз такі дослідження ведуться, зокрема, для тіл з текстуро-ваними поверхнями та складнопрофільними тілами. Використання нелінійних інтегральних рівнянь для моделювання контактних взаємодій пружних тіл [1-3] дозволяє розробляти ефективні ітераційні методи розв'язання контактних задач для структур складної форми і дає можливість позбавитись від основної проблеми реалізації варіаційних методів, яка полягає в необхідності розглядати достатньо складні задачі нелінійного програмування. Основні та найвідоміші з таких рівнянь є операторними рівняннями первого роду, для яких пошук ефективних ітераційних процесів отримання наближеного розв'язку є важким завданням. Нелінійні інтегральні рівняння, використані в роботах [1-3], які є операторними рівняннями другого роду, дозволяють враховувати шорсткість поверхонь взаємодіючих тіл і можуть бути використані для розробки ефективного чисельного алгоритму розв'язання контактних задач, заснованих на побудові простих для програмної реалізації збіжних ітераційних процесів.

Метою даної роботи є розробка такого алгоритму та його використання для розв'язання осесиметричної статичної задачі про контакт близького до плоского тіла з заокругленими краями і шорсткого півпростору з однаковими пружними сталими при дії стискаючої і зсувної сили за наявності тертя.

Поверхня пружного тіла задана функцією

$$z = R - \sqrt[8]{R^8 - (x^2 + y^2)^4}.$$

Поверхня контакту, зони проковзування і зчеплення заздалегідь невідомі. Деформацію шорсткості враховано за допомогою сферичної моделі виступів [2-3] з урахуванням цієї деформації в нормальному напрямку. Чисельний розв'язок задачі отримано за допомогою алгоритму, описаного в [3]. Обчислення проведено для тіл з коефіцієнтом Пуассона 0,3 і модулем Юнга 210000 МПа, коефіцієнта тертя 0,3, параметра $R=0,1$ м і стискаючої сили 25 кН. На рис. 1 зображені розподіли контактних тисків p , помножених на коефіцієнт тертя μ , та дотичних контактних напружень τ_{xz} за дії зсувної сили 4 кН (рис. 1а) і 7 кН (рис. 1б). Суцільні лінії відповідають розв'язку без урахування шорсткості, штрихові – з її урахуванням. Точка злиття двох графіків в один розмежовує зони зчеплення та проковзування. За дії зсувної сили 4 кН наявність деформації шорсткості зумовлює зниження найбільшого значення дотичних напружень на 8,5% та збільшення зони зчеплення на 3,3%.



Puc. I.

За дії сили 7 кН найбільше значення напруження знижується на 11,4%, а зона зчеплення зростає на 4,2%.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: пружне тіло, шорстка поверхня, контактна задача, чисельний розв'язок, ітераційний процес.

1. Александров А.И. Решение задач контактного взаимодействия упругих тел с использованием нелинейных операторных уравнений. – Днепропетровск: Ин-т технической механики АН УССР, 1989. – 74 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т технической механики; 89-2).
2. Мартиняк Р.М., Приходько О.В. Задача про вдавлювання близького до плоского штампу в пружний шорсткий півпростір // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2020. – Вип. 31. – С. 66 – 77.
3. Приходько О.В. Математичне моделювання фрикційного і безфрикційного контакту пружних шорстких тіл // Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: за заг. ред. Р.М. Мартиняка. – Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022. – 392 с. – С. 168 – 193.

O.V. Prykhodko¹, S.V. Prykhodko²

CONTACT OF A CLOSE TO FLAT BODY AND A ROUGH HALF-SPACE IN THE PRESENCE OF FRICTION

¹ Separate Structural Subdivision "Zaporizhzhia Metallurgical Vocational College of Zaporizhzhia National University",

Nemirovicha-Danchenko Str., 71, 69091, Zaporizhzhia, Ukraine;
e-mail: elenagrabko2013@gmail.com

² Zaporizhzhia branch of SE "DNIPIROSTANDARTMETROLOGY",
Antenna Str., 10, 69005, Zaporizhzhia, Ukraine

A numerical solution of the static problem of the contact between a near-flat body with rounded edges and a rough half-space with identical elastic constants has been obtained. Roughness in this problem was taken into account by introducing nonlinear terms characterizing the crumpling of surface micro-uniformities into the expressions of the relative elastic movements of the interacting bodies. The distribution of tangential contact stresses is analyzed.

В.М. Онишкевич¹, Г.М. Барабаш²

**НЕДОСКОНАЛИЙ КОНТАКТ У ФРИКЦІЙНІЙ СИСТЕМІ
ШТАМП – ПРУЖНА ПІВПЛОЩИНА ПРИ ТЕПЛОУТВОРЕННІ**

¹Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103, 79057, Львів, Україна;

e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

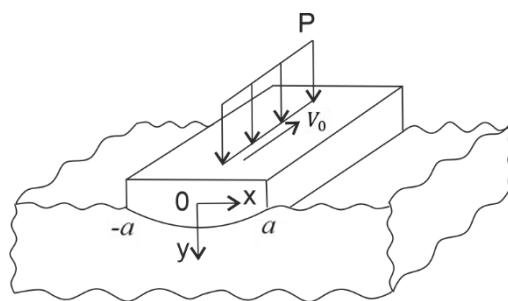
²Львівський національний університет імені Івана Франка
вул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна;

e-mail: galynabarabash71@gmail.com

Математичне моделювання процесів перерозподілу теплових полів у фрикційній парі є актуальною і складною науково-технічною проблемою. Плоска задача термопружності про тиск штампа з неповним контактом вперше була розв'язана в [6], де у випадку тепловіддачі від штампа до півплощини було виявлено втрату контакту на краях штампа і обґрунтовано необхідність урахування нелінійності задачі в зв'язку зі зміною області контакту. Аналітичному опису теплових процесів з урахуванням неоднорідностей структури контактуючих тіл присвячено ряд сучасних праць, напр. [2; 5].

Розглядається фрикційний розігрів системи штамп – пружна півплощина (рис.1). Плоский штамп висоти H втискується силою P у пружну півплощину і рухається прямолінійно уздовж твірної поверхні з деякою сталою швидкістю V_0 . Між верхньою поверхнею штампа, бічними поверхнями штампа і ненавантаженою поверхнею півплощини з одного боку та зовнішнім середовищем з іншого здійснюється теплообмін за законом Ньютона з різними коефіцієнтами теплообміну. Тепловий контакт між штампом і півплощиною неідеальний. Від дії сили тертя на ділянці контакту відбувається теплоутворення, яке пропорційне інтенсивності сили тертя. Температуру зовнішнього середовища вважаємо нульовою.

При математичному описі контакту використано модель так званого «третього тіла» – тонких приповерхневих шарів контактуючих тіл, мікрогеометрія поверхонь та фізико-механічні властивості яких у зоні контакту відрізняються від властивостей тіл контактної пари [1].



Rис.1.

Для визначення впливу вихідних параметрів на різницю температур і теплових потоків спочатку розглянуто нестационарну контактну задачу термопружності з теплоутворенням від дії сил тертя на межі двох півплощин, яка за складністю відповідає суперпозиції двох одновимірних задач термопружності. Розв'язок задачі отримано з використанням інтегрального перетворення Лапласа. Розглянуто три різні типові випадки задання напружень. Отримано аналітичні вирази для розподілу температури та теплових потоків, побудовано відповідні графіки, проаналізовано вплив параметрів контактуючих поверхонь на теплоутворення від тертя. При цьому за вихідні умови взято узагальнені умови теплового контакту, які враховують коефіцієнт тепlopроникності контакту h [3]. Отримано залежності коефіцієнта h (кВт/м² К) від тиску P (МПа) і твердості за Мейєром μ (МПа) (рис.2 а) та від чистоти обробки поверхонь Δl (мкм) і коефіцієнтів тепlopровідності контактуючих тіл (взято $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$, Вт/м К) (рис.2 б).

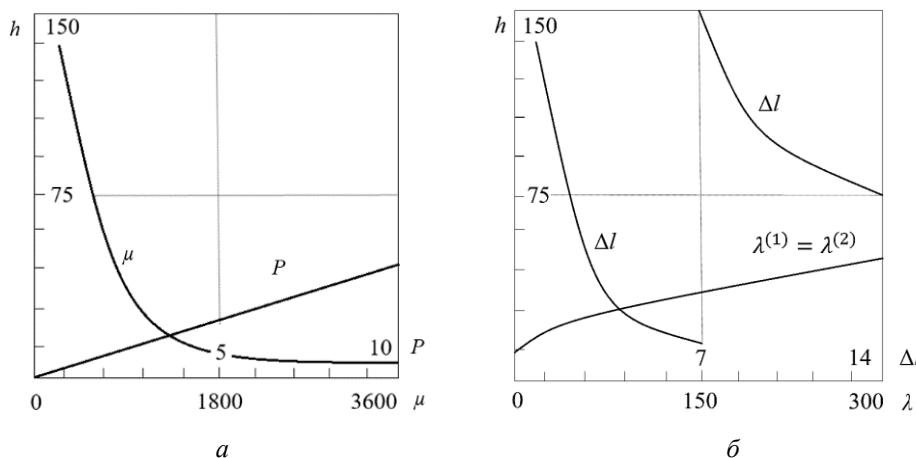


Рис.2.

Обчислене в одновимірній задачі значення коефіцієнта тепlopроникності контакту h використовуємо при розв'язуванні поставленої плоскої контактної задачі [4].

Розв'язок задачі термопружності для півплощини побудовано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Задачу тепlopровідності для штампа розв'язано методом прямих. Отримано розподіл контактних напружень, який за різних значень параметрів задачі може дати два якісно різні випадки контактної взаємодії. У першому випадку розраховані контактні напруження на всій ділянці $L_0 : x \in [-a; a]$.не є додатними. Це означає, що на всій ділянці штамп прилягає до основи, граничні умови виконані, а отримані контактні напруження та розподіл температури будуть остаточними (рис.3 а). Прикладена до штампа сила, яка спричинила задане осідання, обчислюється з умови рівноваги штампа.

У другому випадку на ділянці, яка складається з сукупності проміжків $[x_{2M-1}; x_{2M}]$, обчислені значення нормальних напружень є строго додатними. Це означає, що на цих ділянках якісь зусилля мали б притягувати штамп до півплощини, а тому отриманий розв'язок не є коректним: штамп контактує з півплощиною на ділянках L'_0 , а на ділянках $L_1 = L_0 - L'_0$ контакт відсутній (рис.3 б). Відтак треба змінити початкове формулювання граничних умов задачі і розв'язувати основну систему рівнянь ще раз вже лише на проміжку L'_0 , а на ділянці L_1 – систему рівнянь, яка забезпечує виконання нових граничних умов. Умова рівноваги штампа відповідно зміниться. Процес зміни граничних умов закінчуємо тоді, коли у двох послідовних ітераціях ділянки L'_0 виявляться однаковими.

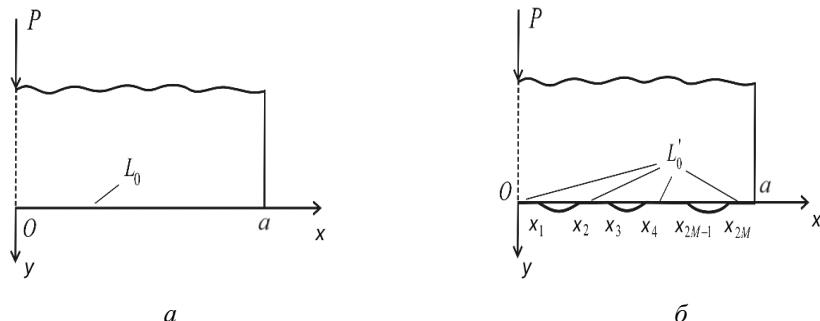


Рис.3.

Запропонований метод послідовно-дискретного розділення граничних умов з використанням рухомої лінії розділу граничних умов може бути використаний для розв'язування нестационарної контактної задачі шляхом зведення її до послідовності задач із незмінними ділянками прикладання видозмінених крайових умов.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: термопружність, контакт, тертя, теплоутворення, розігрів, теплопронікність, неоднорідність, ітераційний процес.

1. Левицький В.П., Онишкевич В.М. Дослідження впливу властивостей «третього тіла» на теплоутворення від тертя // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, №1. – С. 82 – 86.
2. Мартиняк Р.М., Маланчук Н.І. Повний контакт тіл з поверхневими виймками за локального фрикційного проковзування. *Контактна механіка. Фрикційна і адгезійна взаємодія поверхонь: колективна монографія / за заг. ред. Р.М. Мартиняка //* Львів. 2022. – С. 8 – 29. URL: <https://www.researchgate.net/publication/357335537>
3. Онишкевич В.М., Барабаш Г.М. «Третє тіло» як математична модель контактної термопружності // Computer Science and Applied Mathematics. 2022. – **1**. – С. 59 – 65. URL: <https://doi.org/10.26661/2413-6549-2022-1-07>
4. Онишкевич В.М., Сулим Г.Т. Задача про термопружний контакт півплощини з прямокутним штампом за теплоутворення від тертя // Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки, 2017. – **3**. – С. 165 – 168.
5. Ai Z.Y., Gu G.L, Wang X.M. Thermo-hydro-mechanical coupled responses of layered transversely isotropic saturated media under moving thermal and mechanical loads // Computers and Geotechnics. – 2024. – **167**, 106109. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2024.106109>
6. Comninou M., Barber J.R., Dundurs J. Heat conduction through flat punch // J. Appl. Mech. – 1981. – **48**. – P. 871 – 874.

V.M. Onyshkevych¹, G.M. Barabash²

IMPERFECT CONTACT IN THE FRICTIONAL SYSTEM PUNCH – ELASTIC HALF PLANE WITH HEATGENERATION

¹ Ukrainian National Forestry University,
General Chuprynska Str., 103, 79057, L'viv, Ukraine;
e-mail: onyshkevychl@nltu.edu.ua

² Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1, 79000, L'viv, Ukraine
e-mail: galynabarabash71@gmail.com

Friction heating of system punch – elastic half plane when sliding along creative line, is considered. Using of modified conditions of heat contact in mathematical model of contact thermoelasticity, taking into account of heat generation, is proposed. In order to obtain the unknown contact area, the iterative scheme based on a control of a sign of normal stresses in the immediate contact interaction zones is used. Method of moving line of separation of boundary conditions is proposed.

М.М. Кундрат

РОБОЧА ДОВЖИНА ТОНКОГО ВКЛЮЧЕННЯ В ОРТОТРОПНОМУ ТІЛІ ПРИ ЦИКЛІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

*Національний університет водного господарства та природокористування,
бул. Соборна 11, 33028, Рівне, Україна; e-mail: kundrat@i.ua*

Конструювання композиційних матеріалів з високою питомою міцністю та в'язкістю руйнування досягається армуванням матриці високоміцними включеннями у вигляді волокон чи стрічок. Для теоретичного з'ясування руйнування таких композитів під статичним чи змінним навантаженням необхідний аналіз полів напружень та деформацій біля включень. Аналітичні розв'язки плоскої задачі для включения з зонами передруйнування, які моделюють локалізованими прошарками пластиично деформованого матеріалу (поверхнями зсуву) отримано в [2, 4] та ін. Нижче з використанням енергетичного підходу [1] отримано аналітичний розв'язок задачі про відшарування жорсткого лінійного включения в ортотропній матриці за силового циклічного навантаження.

Розглядаємо в умовах плоскої задачі композицію з ортотропної пружнопластичної матриці та лінійного включения завдовжки $2a$ ($2a < 2a_{cr}^*$) вздовж осі симетрії, віднесену до системи координат xOy (рис.). Матеріали матриці та контактної межі матриця–включение вважаємо рівноміцними. Обмеження на довжину включения виключає можливість його руйнування розривом. Композиція навантажена циклічними напруженнями q ($0 \leq q_{\min} \leq q \leq q_{\max}$) паралельно лінії включения. Вважаємо, що частота зміни навантаження невелика й інерційні та теплотвірні ефекти неістотні.

Вважаємо, що в околах кінців включения, вздовж межі його контакту з тілом (де мають місце максимальні дотичні напруження τ_{\max} [1, 3]) при певній комбінації значень амплітуди та кількості циклів навантаження буде ковзне відшарування (втрата зв'язку), яке просуватиметься від кожного краю до центральної частини.

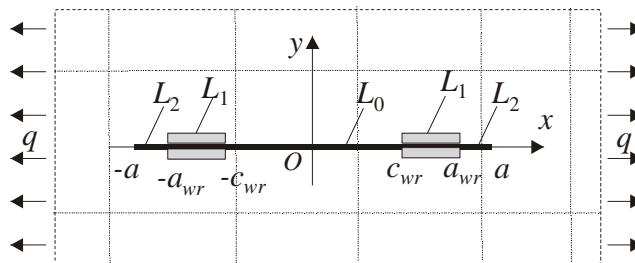


Рис.

Довжину включения без відшарованих на кінцях фрагментів позначаємо через $2a_{wr}$ і називаємо його робочою довжиною (рис.). Коефіцієнт тертя на відшарованій частині $L_2 \approx a_{wr} < |x| \leq a$ приймаємо рівним нулю. Локалізовані зони передруйнуван-

ня моделюємо додатковими розрізами $L_1 \approx c_{wr} \leq |x| \leq a_{wr}$ з дотичними напруженнями τ_{sf}^* на кромках: $\sigma_{xy} = \tau_{sf}^* \operatorname{sign}(x)$ ($x \in L_1$). З просуванням ділянки розшарування рується також і зона передруйнування. Величину τ_{sf}^* вважаємо усередненим значенням напружень у зоні передруйнування з урахуванням циклічного зміщення чи розміщення матеріалу. На ділянці $|x| \leq c_{wr}$ зберігається ідеальний контакт, тому поздовжні деформації на ній рівні нулю. Необхідно знайти аналітичні залежності зміни робочої довжини включення $a_{wr} = a_{wr}(n, q_{\max}, q_{\min}, \tau_{sf}^*, \alpha_0, \beta_0)$ від кількості циклів, мінімального q_{\min} та максимального q_{\max} навантаження за цикл, міцнісних та пружних характеристик. Отримані розрахункові формули будуть справедливими за допущення суперпозиції зовнішніх силових, температурних та інших чинників.

Параметри ортотропії $\alpha_0 = (E_1/E_2)^{1/2}$, $\beta_0 = E_1/(2G) - \nu_{12}$ визначаються співвідношеннями $s_1 \cdot s_2 = -\alpha_0$, $s_1 + s_2 = i[2(\alpha_0 + \beta_0)]^{1/2}$, де s_1 , s_2 – корені характеристично-го рівняння $s^4 + (E_1/G - 2\nu_{12})s^2 + E_1/E_2 = 0$; E_1 , E_2 – розтяговий та стисковий модулі пружності у головних напрямах Ox та Oy ; G – модуль зсуву, що характеризує зміну кута між головними напрямами Ox та Oy ; ν_{12} – Пуассонів коефіцієнт, що описує скорочення в напрямі осі Oy за розтягуванням Ox ; $s_1 = \beta_1 i$, $s_2 = \beta_2 i$, де β_1, β_2 – дійсні числа, $i^2 = -1$. Таку ортотропію, зокрема, мають боро-, вугле- та склопластики, деревина з правильними річними прошарками, фанера, тощо.

Для побудови рівняння відшарування використаємо енергетичний критерій, який передбачає існування критичного значення енергії W_f , необхідної для того, щоб робоча довжина включення зменшилася на одиницю довжини. Тоді для зменшення робочої довжини a_{wr} на малу величину Δa_{wr} дисипація енергії W повинна досягнути значення W_f : $W = W_f$, де $W_f = \eta_1 \gamma_f^* \Delta a_{wr}$; $\gamma_f^* = \tau_{sf}^* \delta_{2cf}$ – густина енергії розшарування; δ_{2cf} – критичний зсув у зоні передруйнування; η_1 – поправковий коефіцієнт.

Приймаємо, що робоча довжина a_{wr} і розмір зони передруйнування $d_f = a_{wr} - c_{wr}$ – функції від навантаження q . Тоді при збільшенні навантаження на малу величину Δq і просування області відшарування на Δa_{wr} буде справедливим співвідношення

$$W = 2 \int_{a_{wr} - \Delta a_{wr}}^{a_{wr} - d_f - \Delta a_{wr}} \sigma_{xy}(x) [u(x, a_{wr}(q + \Delta q), c_{wr}(q + \Delta q)) - u(x, a_{wr}(q), c_{wr}(q))] dx. \quad (1)$$

Звідси залежність між робочою довжиною включення, навантаженням, пружними і міцнісними характеристиками описується рівнянням

$$\frac{da_{wr}}{dq} = f_1(a_{wr}, q, \tau_{sf}^*, \delta_{2cf}, \alpha_0, \beta_0). \quad (2)$$

Приймаємо, що відшарування проходить під час кожного періоду навантаження, а при розвантаженні робоча довжина включення не змінюється. Рівняння (1), (2) описують відшарування за період одного циклу, тому, інтегруючи його від q_{\min} до q_{\max} та прийнявши параметр a_{wr} сталим протягом циклу навантаження, знайдемо зменшення робочої довжини на

$$\delta a_{wr} = \int_{q_{\min}}^{q_{\max}} f_1(a_{wr}, q, \tau_{sf}^*, \delta_{2cf}, \alpha_0, \beta_0) dq \equiv F_1(a_{wr}, q_{\min}, q_{\max}, \tau_{sf}^*, \delta_{2cf}, \alpha_0, \beta_0).$$

Звідси швидкість відшарування описується диференціальним рівнянням

$$\frac{da_{wr}}{dn} = F_1(a_{wr}, q_{\min}, q_{\max}, \tau_{sf}^*, \gamma_{sf}^*, \alpha_0, \beta_0).$$

Після інтегрування знаходимо зв'язок між числом циклів навантаження та робочою довжиною включення

$$n = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{d\lambda_{wr}}{F(H_{\max}, H_{\min}, \lambda_{wr})}, \quad (3)$$

де λ_0, λ_1 – початкове (при $n = 0$) та кінцеве (при заданому числі циклів) значення довжини параметра $\lambda_{wr} = \eta_1(\tau_{sf}^*)^2 a_{wr} / (0,4\pi E_1 \gamma_{sf}^*)$, $H_{\min} = q_{\min} / (2\tau_{sf}^*)$, $H_{\max} = q_{\max} / (2\tau_{sf}^*)$,

$$F(H_{\max}, H_{\min}, \lambda_{wr}) = \int_{H_{\min}}^{H_{\max}} \frac{dH}{f(H, \lambda_{wr})}, \quad f(H, \lambda_{wr}) = \frac{0,8\pi\lambda_{wr}^2 (H_1/\text{ch}^2(H_1) - \text{th}(H_1))}{\pi/g_4 - 1,6\lambda_{wr}(H_1\text{th}(H_1) - \ln\text{ch}(H_1))},$$

$$H_1 = \pi H / g_4, \quad H = q / (2\tau_{sf}^*), \quad g_4(\alpha_0, \beta_0) = E_1(p_1 q_2 - p_2 q_1) / i(s_1 q_2 - s_2 q_1),$$

$$p_1 = a_{11}s_1^2 + a_{12}, \quad p_2 = a_{11}s_2^2 + a_{12}, \quad q_1 = (a_{12}s_1^2 + a_{22}) / s_1, \quad q_2 = (a_{12}s_2^2 + a_{22}) / s_2,$$

$$a_{11} = 1/E_1, \quad a_{22} = 1/E_2, \quad a_{12} = -v_{12}/E_1 = -v_{21}/E_2.$$

Для визначення функцій f_1 та F_1 використано розв'язок відповідної задачі за сталого навантаження $\sigma_{xx}^\infty = q$ [2, 4]. Виконано розрахунки робочої довжини включення для окремих значень характеристик композиції та навантаження.

За результатами (3) завжди можна підібрати довжину включення таким чином, щоб його відшарування не перевищувало заданого наперед значення (чи не відбувається зовсім). Швидкість відшарування істотно залежить від початкової робочої довжини включення (для довшої вона більша). Параметри ортотропії композиції істотно впливають на процес розшарування. Орієнтування включення уздовж напряму більшої жорсткості матриці є кращим як для збереження його цілісності, так і можливості узбереження від відшарування.

Ключові слова: включення, відшарування, зона передруйнування, робоча довжина, кількість циклів.

1. Cherepanov G.P. Mechanics of Brittle Fracture. – New York: McGrawHill, 1978. – 950 p.
2. Kundrat M.M. On the Initial Development of the Slip Band Near an Inclusion in the Interface // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, № 5. – P. 578-584.
3. Kundrat M.M. Delamination of an Element of Reinforcement of the Half Plane Under Cyclic Loading // Materials Science. – 2022. – **57**, № 5. – P. 745-749.
4. Sulym H.T., Kundrat M.M. Limiting equilibrium and fracture in an orthotropic body containing a thin rigid inclusion // Materials Science. – 2006. – **42**, № 2. – P. 220-232.

M.M. Kundrat

WORKING LENGTH OF A THIN INCLUSION IN AN ORTHOTROPIC BODY UNDER CYCLIC LOADING

National University of Water and Environmental Engineering, Soborna Str., 11, 33018, Rivne,
Ukraine

The exfoliation of a rigid ribbon-like inclusion in orthotropic composition in conditions of plane problem under cyclic stress loading at infinity is investigated. Exfoliation is preceded by the development of local prefraction zones. Analytical dependences for changing the working length of the inclusion as a function of the loading amplitude, the number of cycles and the parameters of the orthotropic matrix are obtained.

О.П. Козачок¹, Р.М. Мартиняк²

АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ГРАНИЧНОЇ ФОРМИ ЗНОШЕНОЇ ПОВЕРХНІ ТІЛА З НЕРІВНОСТЯМИ

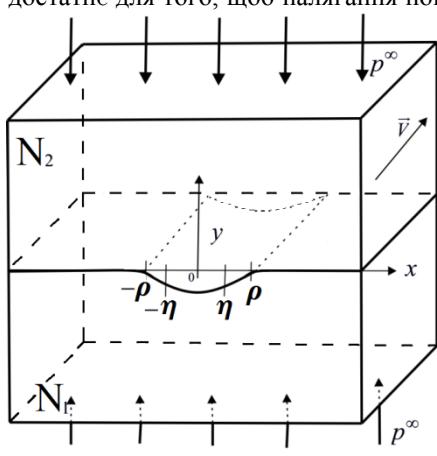
¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАНУ,
бул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна;
e-mail: OlegKozachok@ukr.net

²Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: m.rostyslav@gmail.com

Розглянуто зносо-контактні задачі про взаємодію двох півнескінченних ізотропних тіл із однакових матеріалів, поверхня одного із яких (нижнього) – плоска, а іншого (верхнього) – має нерівності у формі поодинокого виступу (випадок 1) або хвилястого рельєфу (випадок 2). Використано модель фрикційно-втомного зношування [1], згідно з якою, стирання розпочинається на тих ділянках, де питома сила тертя перевищує деяке порогове значення τ_0 . Вважаємо, що зношується лише поверхня тіла з нерівностями.

У 1-му випадку межа верхнього тіла вздовж нескінченної смуги завширшки 2ρ має циліндричний виступ, форма якого задана функцією $\varphi(x) = -\varphi_0 \left(1 - x^2/\rho^2\right)^{5/2}$, де $\varphi_0 \ll \rho$.

На нескінченності до тіл прикладено рівномірно розподілене навантаження p^∞ , достатнє для того, щоб налягання поверхонь було повним (без просвітів). Нижнє тіло



Rис. 1

поверхні $\psi(x)$, яка виникає на ділянці $t \rightarrow \infty$, можна подати у вигляді $\psi(x) = \varphi(x) - \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ – товщина зношеного матеріалу.

Модифікувавши метод функцій міжконтактних зазорів [2, 3], зносо-контактну задачу звели до сингулярного інтегрального рівняння (СІР) з ядром Коші відносно похідної від товщини зношеного матеріалу $\alpha'(x)$ та визначили його аналітичний

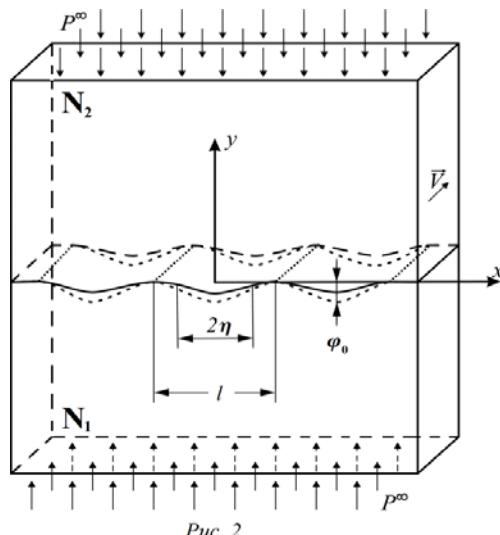


Рис. 2

Додаткова задача задана зводе на до СІР з ядром Гільберта. На основі його аналітичного розв'язку визначено граничну форму зношеної поверхні та досліджено контактні параметри такого з'єднання після зношування.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: зносо-контактна задача, зношування, поверхневі нерівності, сингулярне інтегральне рівняння.

1. Андрейків А.Е., Панасюк В.В., Чернец М.В. К теории износа материалов при сухом трении // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1981. – 17, № 2. – С. 51-57.
 2. Козачок О.П., Мартиняк Р.М. Локальне зношування пружних півпросторів із виступами // Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь: за заг. ред. Р.М. Мартиняка. – Львів: Видавець Вікторія Кундельська, 2022. – 392 с. – С. 281–302. – URL: www.researchgate.net/publication/366177313
 3. Kozachok O. P., Martynak R. M. Contact problem for wavy surfaces in the presence of an incompressible liquid and a gas in interface gaps // Mathematics and Mechanics of Solids. – 2019. – 24, № 11. – P. 3381–3393.

O.P.Kozachok¹, R.M. Martynyak²

ANALYTICAL METHOD OF DETERMINING THE LIMIT FORM OF A WORN BODY SURFACE WITH IRREGULARITIES

¹ Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences, Naukova Str., 3-b, 79060, L'viv, Ukraine;

e-mail: OlegKozachok@ukr.net
² S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: m_rrostyslav@gmail.com

The paper considers wear-contact problems for bodies, one of which has an unevenness in the form of a single protrusion or a wavy topography, based on the model of frictional fatigue wear. The ultimate shape of such a body after the completion of wear, the initial and final section of wear, the distribution of contact pressure at the beginning of interaction and after wear are analytically determined.

6

І. Г. Ткаченко¹, Н.М. Антоненко²

ПЛОСКА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ ОСНОВИ З НЕІДЕАЛЬНИМ ТЕПЛОВИМ КОНТАКТОМ МІЖ ШАРАМИ

¹Запорізький національний університет,
бул. Університетська, 66, 69600, Запоріжжя, Україна;
e-mail: tig.phd81@gmail.com

²Національний університет «Запорізька політехніка»,
бул. Жуковського, 64, 69011, Запоріжжя, Україна

Розглянемо багатошарову основу (пакет n пружних шарів, що лежить на абсолютно жорсткому півпросторі), на яку тисне нагрітий штамп. Тепловий контакт між шарами основи неідеальний. Шари основи нумеруються зверху вниз, півпростір має номер $n+1$.

Крайові умови:

$$\begin{aligned}\sigma_{z1}(x, 0) &= \begin{cases} \sigma(x), |x| < a, \\ 0, |x| \geq a, \end{cases} \int_{-a}^a \sigma(s) ds = -Q, \quad \tau_{xz1}(x, 0) = 0, \quad x \in R, \\ w_1(x, 0) &= \text{const}, \quad |x| < a, \quad T_1(x, 0) = \begin{cases} q, |x| < a, \\ 0, |x| \geq a, \end{cases} \\ w_n(x, h_n) &= 0, \quad u(x, h_n) = 0, \quad T_n(x, h_n) = 0,\end{aligned}$$

де $\sigma(x)$ – невідомі контактні напруження, q – відома константа.

Умови на спільніх межах шарів:

$$\begin{aligned}\sigma_{z_{j+1}}(x, 0) &= \sigma_{z_j}(x, h_j), \quad \tau_{xz_{j+1}}(x, 0) = \tau_{xz_j}(x, h_j), \\ w_{j+1}(x, 0) &= w_j(x, h_j), \quad u_{j+1}(x, 0) = u_j(x, h_j), \\ k_{Tj} \frac{\partial T_j}{\partial z}(x, h_j) &= \frac{1}{R_j} [T_{j+1}(x, 0) - T_j(x, h_j)], \\ k_{T_{j+1}} \frac{\partial T_{j+1}}{\partial z}(x, 0) &= k_{Tj} \frac{\partial T_j}{\partial z}(x, h_j), \quad j = \overline{1, n},\end{aligned}$$

де R_j – коефіцієнт теплового опору, k_{Tj} – коефіцієнт тепlopровідності.

Треба знайти невідомі контактні напруження $\sigma(x)$.

Задача розв'язується за допомогою методу інтегрального перетворення Фур'є та методу функцій податливості [1]. Використовуючи зв'язок між допоміжними функціями першого шару основи, крайові умови, рекурентні спiввiдношення мiж функцiями податливостi сусiднiх шарiв основи [1] та взаємозв'язок мiж трансформантами та oriгinalami функцiй $w_1(x, 0) - w_1(0, 0)$, отримано систему iнтегральних рiвнянь задачi:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2\omega_1} \int_{-1}^1 G(t) \ln \frac{1}{|t-y|} dt + \int_{-1}^1 G(t) h(at, ay) dt - \tilde{F}(y) = \tilde{C}, \\ \int_{-1}^1 G(t) dt = -Q, \end{cases} \quad (1)$$

де $G(t) = a\sigma(at)$, $\tilde{F}(y) = F(ay)$, $h(at, ay) = \int_0^\infty \hat{A}_1(p) \frac{\cos apt(\cos apy - 1)}{p} dp$,

$$F(ay) = \frac{\alpha_{T1}\mu_1 qa}{2\omega_1} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{t}{t-y} \right| dt + 2q \int_0^\infty \frac{\hat{\Omega}_1(p) \sin ap(\cos apy - 1)}{p} dp, \quad \hat{A}_1(p) = \frac{1}{2\omega_1} + A_1[1,1],$$

$\hat{\Omega}_1(p) = -\frac{\alpha_{T1}\mu_1}{2\omega_1} - B_1[1,1]$, $A_1[1,1]$, $B_1[1,1]$ – функції податливості (елементи матриць

податливості $[1,1]$), \tilde{C} – невідома константа, $\omega_1 = \frac{\lambda_1 + \mu_1}{\lambda_1 + 2\mu_1}$,

$\alpha_{T1} = \tilde{\alpha}_{T1}(3\lambda_1 + 2\mu_1)/(\lambda_1 + 2\mu_1)$, α_{T1} – коефіцієнт теплового розширення матеріалу верхнього шару основи.

Наближений розв'язок системи (1) запропоновано шукати у вигляді

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{k=0}^l m_{2k} T_{2k}(t) + M_0, \quad (2)$$

де m_{2k} , M_0 – коефіцієнти, які треба визначити; $T_{2k}(x)$ – поліноми Чебишова.

Підставляючи (2) в (1) та надаючи змінний y $l+2$ довільних значень з інтервалу $(-1,1)$ отримаємо систему $l+3$ рівнянь відносно m_{2k} , M_0 , \tilde{C} . Знайдені коефіцієнти підставляємо в (2) та повертаємося до змінної x . Шукані контактні знаходимо за формулою:

$$\sigma(x) = \frac{1}{a} G\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\sum_{k=0}^l m_{2k} T_{2k}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{M_0}{a}.$$

КЛЮЧОВІ СЛОВА: штамп, багатошарова основа, тепlopровідність, одномірне інтегральне перетворення Фур'є, метод функцій податливості, інтегральне рівняння.

- Antonenko N., Tkachenko I. Plane Thermoelastic Deformation of a Multilayer Foundation with Non-Ideal Thermal Contact between its Layers // Materials Science Forum. – 2019. – **968**. – P. 486-495.

I.H.¹Tkachenko, N.M. Antonenko²

Plane Contact Problem of Thermoelasticity for a Multilayer Base with Imperfect Thermal Contact Between its Layers

¹ Zaporizhzhia National University,
Universytetska St., 66, 69600, Zaporizhzhia, Ukraine;
e-mail: tig.phd81@gmail.com

² National University Zaporizhzhia Polytechnic,
Zhukovskoho St., 64, 69011, Zaporizhzhia, Ukraine

Using the method of integral transforms (one-dimensional Fourier integral transform) and the method of compliance functions, the contact problem of thermoelasticity for a multilayer base with imperfect thermal contact between its layers has been reduced to the solving a system of two integral equations. A numerical method for solving the obtained system has been proposed.

Rudenko T.M.

HEAT CONDUCTION PROBLEM FOR MULTILAYER PLATES WITH NON-IDEAL THERMAL CONTACT BETWEEN THE LAYERS

*Anatolii Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of NASU,
2/10 Komunalnykiv, 61046, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: borzovanasta7@gmail.com*

Elements of engineering structures are operated in conditions of a wide range of temperature changes [1]. For objects with a layered structure, problems of thermal conductivity with ideal thermal contact between layers are mainly solved [2]. The work considers a three-dimensional stationary heat conduction problem for a multilayer plate with non-ideal thermal contact between the layers, for which an exact analytical solution is constructed. Temperature distributions are given on the upper and lower surfaces of the plate. The problem is solved using a double integral Fourier transform. The temperature in the layers is represented as a linear combination of two auxiliary functions. The solution of the problem is obtained in a form convenient for numerical implementation. The obtained temperature distributions were compared with the results obtained by other methods. In the future, it is planned to apply the specified method to solving the problem of thermoelasticity for a layered plate with non-ideal thermal contact.

The results of this work were obtained during the implementation of research under the Targeted Scientific and Technical Defense Research Program of the National Academy of Sciences of Ukraine for 2020–2024, expenditure program classification code (KPKVK) 6541230 (applied research).

KEY WORDS: multilayer plate, heat conduction, analytical solution.

1. Hontarovskyi P.P., Smetankina N.V., Ugrimov S.V., Garmash N.H., Melezhyk I.I. Computational studies of the thermal stress state of multilayer glazing with electric heating // Journal of Mechanical Engineering – Problemy mashynobuduvannia. – 2022. – **25**, N 2. – P. 14–21. Malykhina A. I., Merkulov D. O., Postnyi O. V., Smetankina N. V. Stationary problem of heat conductivity for complex-shape multilayer plates. Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Series “Mathematical modeling. Information technology. Automated control system”. 2019. Vol. 41. P. 46–54.
2. Smetankina, N., Misiura, S., Misiura, I., Sychova, T., Sychov, A. Simulation of thermal stresses in multiplayer plates of non-canonical shape // Advances in Design, Simulation and Manufacturing VII. DSMIE 2024. Lecture Notes in Mechanical Engineering. – Springer: Cham, 2024. – P. 215–226.

T.M.Rudenko

HEAT CONDUCTION PROBLEM FOR MULTILAYER PLATES WITH NON-IDEAL THERMAL CONTACT BETWEEN THE LAYERS

*Anatolii Pidhornyi Institute of Power Machines and Systems of NASU,
2/10 Komunalnykiv, 61046, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: borzovanasta7@gmail.com*

The problem of thermal conductivity of a multilayer plate of homogeneous layers is considered. The temperature distribution is given on the lower and upper surfaces of the plate. The conditions of imperfect thermal contact are fulfilled at the boundary of the layers. The analytical solution is obtained.

В.І. Острік

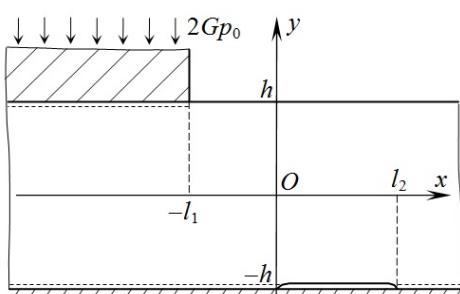
КОНТАКТ ІЗ ВІДРИВОМ ПРУЖНОЇ ВАГОМОЇ СМУГИ ТА ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ ПІД ДІЄЮ НАПІВНЕСКІНЧЕНОГО ШТАМПА

*Інститут прикладної фізики НАНУ,
бул. Петропавлівська, 58, 40000, Суми, Україна;
e-mail: v.i.ostryk@gmail.com*

У деяких контактних задачах область контакту між пружними тілами або між пружним і абсолютно жорстким тілом (штампом) після прикладання навантаження зменшується, тобто поверхні тіл, які попередньо дотикалися одна одної у деякій області, під навантаженням відходять одна від одної на частині цієї області. Такий контакт тіл носить назву контакту з відривом (з відставанням) [1]. Для необмежених пружних тіл область відриву може бути як необмеженою, коли не враховується власна вага тіла, так і обмеженою у протилежному випадку.

У роботі [4] вивчено контакт із відривом пружної вагомої смуги від жорсткої основи, коли у верхню грань смуги втискається штамп параболічного профілю. Задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано чисельно методом механічних квадратур. Розглядаємо аналогічну задачу для напівнескінченого штампа з прямолінійною основою, для якої отримуємо аналітичний розв'язок [2].

Нехай пружна вагома смуга $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$ із модулем зсуву G , коефіцієнтом



Rис. 1

Пуассона ν та питомою вагою y гладко контактує своєю нижньою гранню $y = -h$ з абсолютно жорсткою основою. У верхню грань $y = h$ смуги на проміжку $-\infty < x \leq -l_1$ під дією навантаження інтенсивності $2Gp_0$ втискається на глибину δ напівнескінчений штамп з прямолінійною основою (рис. 1). Сили тертя в області контакту штампа зі смugoю не враховуємо. Під навантаженням нижня грань смуги виходить із контакту з жорсткою основою на проміжку $0 < x < l_2$, який називаємо областю відриву. Розмір

l_2 області відриву та відстань l_1 між цією областю та проекцією підошви штампа на основу заздалегідь невідомі та підлягають визначенню.

Зауважимо, що, не зважаючи на асиметрію задачі, штамп не може повернутися проти годинникової стрілки тому, що тоді його підошва перетне жорстку основу, що неможливо. Якщо штамп повернеться за годинниковою стрілкою, то тоді область його контакту зі смugoю стане скінченною, прилеглою до краю штампа, і контактні напруження не зможуть зрівноважити зовнішнє навантаження на штамп. Тому поворот штампа не відбувається. Сприйняття асиметрії задачі можна позбутися, якщо уявити симетрично навантажений штамп скінченного розміру, зафіксувати увагу на його правому краї та спрямувати довжину підошви штампа до нескінченності. При цьому поворот штампа, як скінченного, так і напівнескінченного буде відсутнім.

Із застосуванням інтегрального перетворення Фур'є за змінною x отримуємо систему інтегральних рівнянь задачі відносно другої похідної від нормальних переміщень нижньої грані смуги в області відриву та нормальних контактних напружень

уздовж основи штампа. Система інтегральних рівнянь має різницеві ядра, трансформанти Фур'є яких є мероморфними функціями. Систему інтегральних рівнянь зводимо до системи функціональних рівнянь Вінера – Гопфа. Коефіцієнти системи функціональних рівнянь факторизуємо у нескінчених добутках за нулями та полюсами мероморфних функцій (коренями трансцендентних рівнянь $\sin s + s = 0$, $\sin s - s = 0$). Систему функціональних рівнянь зводимо до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої експоненціально спадають до нуля за номером рівняння. Така система рівнянь є регулярною, типу Пуанкарے – Коха, і допускає ефективне розв'язання методами редукції та послідовних наближень. Невідомі l_1 і l_2 визначаємо із умов однозначності переміщення точок нижньої грани смуги. Напруження в областях контакту та переміщення нижньої грани смуги в області відриву та верхньої грани поза областью контакту зі штампом знаходимо в рядах за коренями трансцендентних рівнянь. Коефіцієнти цих рядів виражаються через розв'язок нескінченної системи алгебраїчних рівнянь.

Відносні розміри $a = l_1/(2h)$, $b = l_2/(2h)$ залежно від відносної інтенсивності навантаження $p = p_0/p^*$, де $p^* = 77.890 \gamma h/(2G)$, подано у таблиці. Відрив нижньої грани смуги від жорсткої основи відбувається, якщо $p > 1$. Область відриву стає необмеженою, а права область контакту зникає ($b = \infty$) у випадку навантаження нескінченно великої інтенсивності (або у випадку невагомої смуги, коли $\gamma = 0$). Для порівняння у дужках наведено відповідні відносні розміри для аналогічної задачі про відрив смуги під дією зосередженої сили [3]. Відносний розмір області відриву b у цих двох задачах при одній і тій же відносній інтенсивності навантаження майже не відрізняється. Відносна ж відстань a від області відриву до лінії дії зосередженої сили в задачі із [3] суттєво більша, ніж відповідна відносна відстань до проекції штампа на основу у розглядуваній задачі. Зазначимо також, що у випадку $p = 4.5312$ значення $a = 1.1094$, $b = 3.1967$ із [3] майже не відрізняються від отриманих у роботі [4] значень $a = 1.1099$, $b = 3.1961$ для дії на пружну смугу параболічного штампа, радіус кривизни основи якого у вершині у 5 разів перевищує ширину смуги, а область його контакту зі смugoю є малою і складає 0.0436 від ширини смуги.

Таблиця

p	1	1.3593	2.2656	4.5312	11.328	113.28	∞
a	1.4578 (1.7705)	1.0831 (1.4198)	0.9126 (1.2280)	0.7906 (1.1094)	0.6978 (1.0210)	0.5901 (0.9217)	0.5153 (0.8568)
b	0 (0)	1.0056 (0.9814)	1.9150 (1.9118)	3.2059 (3.1967)	5.2969 (5.2768)	14.138 (14.053)	∞ (∞)

На рис. 2 і рис. 3 зображені розподіли безрозмірних нормальних напружень $\sigma_1 = (2Gp_0)^{-1}\sigma_y$ відповідно у лівій та правій областях контакту між нижньою грани смуги та жорсткою основою для відносної інтенсивності навантаження $p = 1$ (штрих-пунктирні криві), $p = 1.3593$, 2.2656 , 4.5312 (криві 1 – 3), ∞ (штрихова крива). Якщо

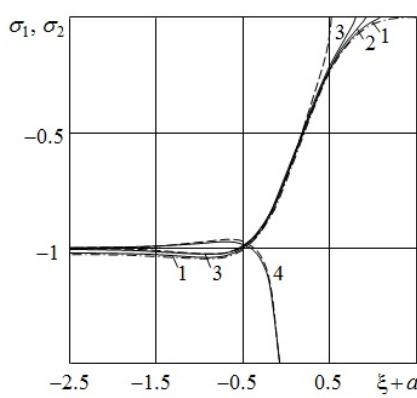


Рис. 2

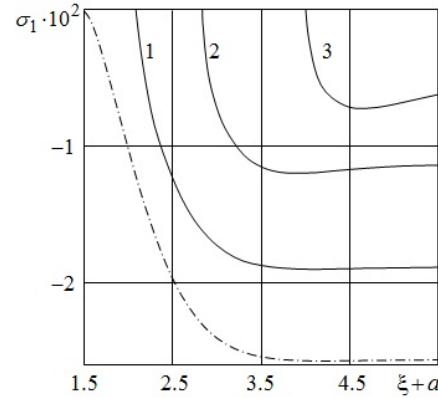


Рис. 3

$\xi + a < -0.5$ ($\xi = x/(2h)$), крива 2 займає проміжне положення між кривими 1, 3 і на рис. 2 не показана. Крім того, на рис. 2 зображені розподіли безрозмірних нормальних напружень $\sigma_2 = (2Gp_0)^{-1}\sigma_y$ в області контакту між штампом і верхньою гранню смуги (криві 4). Для значень $p = 1, 1.3593, 2.2656, 4.5312$ ці розподіли однакові та відповідають суцільній кривій, для $p = \infty$ – штриховій.

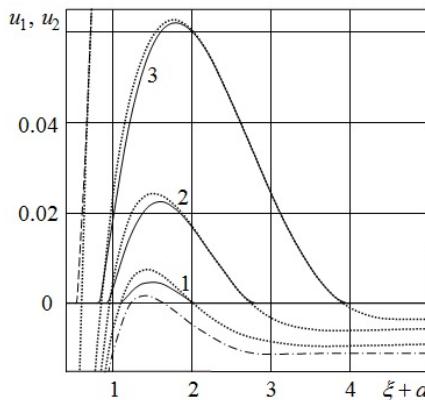


Рис. 4

На рис. 4 показано безрозмірні нормальні переміщення $u_1 = ((1 - v)p_0h)^{-1}u_y$ на нижній грани смуги (суцільні та штрихова лінії), $u_2 = ((1 - v)p_0h)^{-1}u_y$ на нижній її грани (штрих-пунктирна та точкові криві). Відповідність кривих параметру p така сама, як на рис. 2, рис. 3. Різниця ординат відповідних точок на кожній парі точкової та суцільної (або штрихової) кривих показує поперечну деформацію смуги. У більшій до прикладеного навантаження половині області відриву смуга розширене, а у дальній – поперечна деформація смуги відсутня, за виключенням малої області відриву (криві 1), де смуга розширене у всій області відриву. У лівій області контакту з основою смуга стиснута штампом, а у правій – власною вагою.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: пружна смуга, власна вага, напруження, контакт із відривом, напівнескінчений штамп.

1. Джонсон К. Механика контактного взаємодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
2. Острік В.І. Втискання напівнескінченого штампа в пружну смугу за її відриву від жорсткої основи // Прикл. механіка. – 2024. – **60**, № 3. – С. 116 – 129.
3. Острік В.І. Відрив пружної вагомої смуги від жорсткої основи під дією нормальної зосередженої сили // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2023. – **66**, № 1 – 2. – С. 141 – 157.
4. Comez I. Continuous and discontinuous contact problem of a functionally graded layer pressed by a rigid cylindrical punch // Europ. J. Mechanics A / Solids. – 2019. – **73**. – P. 437 – 448.

V.I. Ostryk

RECEDING CONTACT OF ELASTIC WEIGHT STRIP AND RIGID BASE UNDER ACTION OF SEMI-FINITE PUNCH

Institute of Applied Physics of the National Academy of Sciences,
Petropavlovsk Str., 58, 40000, Sumy, Ukraine;
e-mail: v.i.ostryk@gmail.com

The smooth contact of an elastic weight strip with a semi-infinite punch and a rigid base is considered. The own weight of the strip and the formation of the area of its separation from the base are taken into account. Using the Wiener – Hopf method, the problem is reduced to an infinite system of algebraic equations. The size and position of the separation area, contact stress distributions, and normal displacements of the strip faces were found.

К . М . Дмитрів¹, Н.М.Д'яченко¹

**ОСЕСИМЕТРИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ЗА СТЕПЕНЕВОГО ЗАКОНУ
ДЕФОРМУВАННЯ ПОКРИТТЯ**

¹Запорізький національний університет,
бул. Університетська, 66, 69600, Запоріжжя, Україна

Процес контактної взаємодії призводить до часткового руйнування тіл, тобто до їхнього зношування, в результаті чого змінюються й контактні характеристики. Для подовження терміну експлуатації машин застосовуються тонкі покриття [3]. Найчастіше в контактних задачах покриття моделюється моделлю Вінклера, в якій деформування покриття може підпорядковуватися степеневому або лінійному закону [7].

Теоретичні та експериментальні дослідження виявили залежність швидкості зміни профілю зношеної поверхні від тиску степеневого та лінійного типу [7]. Для зносоконтактної задачі в плоскій постановці в роботі [1] показано, що степенева залежність призводить до сповільнення зношування поверхні.

Більшість зносоконтактних задач, наприклад, представлених в роботах [9, 10], передбачають зворотно-поступальний рух штампа, обертальний рух в осесиметричних зносоконтактних задачах вивчено в працях [6, 7, 11].

Розглянуто [2] осесиметричну задачу взаємодії кільцевого в плані штампа з пружним півпростором, що має тонке покриття, яке зношується в результаті обертання штампа навколо своєї осі. Припускалося, що покриття деформується за степеневим законом. Вивчено конформно узгоджений контакт, що передбачає взаємну повторюваність поверхонь [4, 8] у двох випадках: перший – підошви штампа та покриття визначаються плоскими поверхнями, другий – форми неплоских поверхонь визначаються функцією квадратичного типу. В обох випадках площа kontaktu залишається незмінною. Задача розв'язується на проміжку часу, на якому покриття повністю не зношується. При розв'язання задачі використовується покроковий за часом метод, як це реалізовано в роботах [1, 5-7].

На кожному часовому кроці степеневий закон деформування покриття визначає інтегральне рівняння, яке зводиться до рівняння Гаммерштейна, для якого знайдено умови існування єдиного розв'язку. Для розв'язання системи рівнянь на кожному часовому кроці застосовується чисельне інтегрування в комбінації з методом послідовних наближень.

Проаналізовано вплив розмірів кільця, закону деформування покриття і функції конформного узгодження на характеристики контактної взаємодії на різних стадіях процесу зношування.

Виявлено закономірності зміни функції контактного тиску та форми профілю зношеної поверхні на стадії припрацювання. Продемонстровано, що на стадії усталеного зносу функції контактного тиску стають близькими за значеннями для всіх функцій конформного контакту, у той час як форма профілю зношеної поверхні покриття стабілізується і визначається кожною окремою функцією конформного контакту.

В обох випадках узгодженого контакту показник степеневого закону деформування покриття впливає на згладженість функції контактного тиску і на максимальне та мінімальне значення тиску так, що степеневому законові відповідає менший перепад між максимальним та мінімальним його значеннями.

Виявлено ефект «інверсії» впливу показника степеневого закону деформування покриття на контактний тиск та знос покриття.

Як за лінійного, так і за степеневого закону деформування покриття, досліджено поведінку контактних характеристик при наближенні до нуля внутрішнього радіусу кільца: в точках, близьких до центра, знос залишається незначним протягом часу, а тиск суттєво збільшується.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: осесиметрична зносоконтактна задача, конформно узгоджений контакт, степеневий закон деформування покриття Вінклерівського типу.

1. Дмитрів К. М., Д'яченко Н. М. Порівняльний аналіз конформних площин контактних задач про зношування за степеневим законом при фіксованій площині контакту // Computer Science and Applied Mathematics. – 2021, N 2. С. 14-24.
2. Д'яченко Н. М., Дмитрів К. М. Вплив закону деформування покриття на характеристики осесиметричної контактної задачі на різних стадіях зношування // Прикладна механіка. – 2024. – **60**, N 2. – С. 19-31.
Te same: Dyachenko N.M., Dmytriv K.M. Influence of Coating Deformation Law on Characteristics of Axisymmetric Contact Problem at Different Stages of Wear // Int Appl Mech. – 2024. – **60**, Iss. 2: Special Issue: CONTACT PROBLEMS OF MECHANICS. – P. 137–148
3. Закалов, О.В., Закалов І.О. Основи тертя і зношування в машинах. – Тернопіль: Вид-во ТНТУ ім. І.Пулюя, 2011. – 322 с.
4. Кубенко В. Д., Гавриленко В. В., Жук Я. А. Нестационарная контактная задача теории упругости (согласованные и несогласованные поверхности) // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – С. 162–178.
5. Сачук Ю.В., Максимук О.В., Саланда І.П. Аналітико-числове обчислення ітераційними методами областей контакту для задачі про зношування пружної півплощини канонічними штампами // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2019, вип. 20. – С. 70–78.
6. Dmytriv K., Dyachenko N. Study of an axisymmetric wear-contact problem with a constant contact area at different stages of wear // Scientific Collection «InterConf» (146): with the Proceedings of the 2nd Int. Scientific and Practical Conf. «Progressive Science and Achievements» (Doha, Qatar, 16-18 March 2023). – Katara, 2023. – N 146. – P. 353–357.
7. Goryacheva I.G. Contact mechanics in tribology. – Kluwer, Dordrecht, 1998. – 346 p.
8. Hu J., Gao F., Liu X., Wei Y. An elasto-plastic contact model for conformal contacts between cylinders // Proceedings of the Institution of mechanical engineers: Part J – Journal of engineering tribology. – 2020. – **234**, Iss. 12. – P. 1837-1845.
9. Lengiewicz J., Stupkiewicz S. Efficient model of evolution of wear in quasi-steady-state sliding contacts // Wear. – 2013. – **303**, Iss. 1–2. – P. 611–621.
10. Zhan W., Huang P. Numerical analysis of time-varying wear with elastic deformation in line contact // Friction. – 2019. – **7**. – P. 143–152.
11. Zhang X., Shen H., Liu J., Deng S., Li X., Cai Z., Zhu M. An efficient numerical model for predicting the torsional fretting wear considering real rough surface // Wear. – 2015. – **344-345**. – P. 32–45.

K.M. Dmytriv¹, N.M. Dyachenko¹

AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM WITH A POWER LAW OF COATING DEFORMATION

¹ *Zaporizhzhia National University
66, Universytetska Str., Zaporizhzhia, 69600 Ukraine*

An axisymmetric problem of power-law wear of a thin coating with an annular punch during its rotation around its axis is considered. A conformal contact was studied where the punch and coating surfaces are plane or defined by quadratic functions. The contact area is unchanged. The influence of annular sizes, the law of coating deformation, and the function of conformal contact on the characteristics of contact interaction at different stages of the wear process were analyzed.

В.І. Кузьменко, С.О. Плащенко

ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ ІТЕРАЦІЙНИМ ПІДХОДОМ

*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
пр. Науки 72, 49000, Дніпро, Україна
email: sergey.plashenko@gmail.com*

Розглядається клас задач, в яких навантаження на систему є заздалегідь невідомим і таким що залежить від стану самої системи. Таким чином маємо зворотній вплив системи на навантаження, що характеризує зв'язаність процесу. Приклади таких систем описуються в [1–3].

Запропоновано загальний підхід для представлення зв'язаних задач у вигляді операторних рівнянь:

$$\bar{u} = A\bar{F}, \bar{F} = B\bar{u},$$

де \bar{u} – вектор переміщень точок тіла, \bar{F} – вектор навантаження, A та B – оператори. Тоді задача зводиться до знаходження розв'язку такого операторного рівняння відносно \bar{u} :

$$\bar{u} = A(B\bar{u}) = (A \circ B)\bar{u} = C\bar{u}.$$

Для розв'язання зв'язаних задач пропонується ітераційний процес розщеплення зв'язаної задачі на послідовність класичних:

$$\bar{u}^{(k)} = C\bar{u}^{(k-1)}.$$

Розв'язано низку зв'язаних задач використовуючи описаний ітераційний підхід. Отримано як числові так і аналітичні розв'язки. Проаналізовано умови збіжності ітераційного процесу для задачі про прогин мембрани під дією налитої води.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: зв'язана задача, ітераційний процес, важкий штамп, пружний півпростір.

1. Кузьменко, В.І., Плащенко, С.О.: Зв'язана задача про тиск штампа під дією слідкуючого навантаження. Прикладна Механіка. 60(3), 101–107 (2024).
2. Кузьменко, В.І., Плащенко, С.О.: Зв'язані задачі про рух вантажу уздовж поверхні штампа. Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. 36, 69–78 (2022).
3. Kuz'menko, V.I., Plashenko, S.O.: Coupled problems of contact interaction. J. Math. Sci. 243(1), 85–100 (2019).

ON COUPLED PROBLEMS SOLVING USING ITERAATIVE APPROACH

*Oles Honchar Dnipro national university,
Nauky Ave 72, 49000, Dnipro, Ukraine
email: sergey.plashenko@gmail.com*

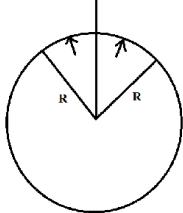
A class of coupled problems is considered. System state depends on the outer forces for such problems while the forces depend on the system state. A common definition as operator equations was proposed for the problems. Iterative approach for problems solving was suggested. Several problems were solved using analytical and numerical methods. An iterative approach convergence was researched for a problem of membrane deformation under the poured water.

Н.Д. Вайсфельд¹, Ю.С. Протеров², А.В. Толкачов²

**ОСЕСИМЕТРИЧНЕ ПОЛЕ НАПРУЖЕНЬ ПРУЖНОГО ПРОСТОРУ
ЗІ СФЕРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ ПІД ДІЄЮ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

King's College London¹, Strandbuilding, UK, e-mail:natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова², вул. Дворянська 2, Одеса, 65082, Україна
e-mail:protserov@onu.edu.ua, andr.tolkach@gmail.com



Динамічні задачі теорії пружності для областей порожнинами викликали зацікавленість багатьох вчених завдяки широкому застосуванню цих моделей на практиці [1,2]. У сферичній системі координат розглянуто пружний простір, що містить сферичну порожнину радіуса R з центром на початку координат. З боку порожнини до пружного простору прикладено динамічне осесиметричне нормальне навантаження інтенсивності $f(\theta)e^{i\omega t}$ по ділянці $r = R, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \alpha$. Залежність

від часу всіх величин буде виражатися множником $e^{i\omega t}$. Його тут опустимо і розглядаємо далі амплітуди відповідних величин. У безрозмірних координатах (ρ, θ, φ) , де $\rho = rR^{-1}$, з урахуванням осевої симетрії розглянемо переміщення $u(\rho, \theta) = u_\rho(\rho, \theta)$ та $v(r, \theta) = u_\theta(r, \theta)$. Від рівнянь Ламе, з урахуванням доданків, що залежать від часу, перейдемо до хвильових функцій $\Phi(\rho, \theta)$ і $\Psi(\rho, \theta)$, через які виражаються переміщення та напруження [1]

$$\begin{aligned} Ru(\rho, \theta) &= \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right), \quad Rv(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \\ \frac{R^2}{2G} \sigma_\rho(\rho, \theta) &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \mu \mu_0 \chi_1^2 \Phi + \rho \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \rho^3} + 3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \chi_2^2 \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \chi_2^2 \Psi \\ \frac{R^2}{2G} \tau_{\rho\theta}(\rho, \theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \Phi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \Psi + \frac{1}{2} \chi_2^2 \Psi \right] \end{aligned} \quad (1)$$

де $\chi_j^2 = R^2 \frac{\omega^2}{c_j^2}$, ($j = 1, 2$), а $c_1^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho_0}$ та $c_2^2 = \frac{G}{\rho_0}$ швидкості поздовжніх і поперечних хвиль у пружному

просторі (λ, G, ρ_0 - коефіцієнти Ламета і густина матеріалу простору).

Хвильові функції $\Phi(\rho, \theta)$ і $\Psi(\rho, \theta)$ зобов'язані задовільняти рівняння Гельмгольца

$$\Delta \Phi(\rho, \theta) + \chi_1^2 \Phi(\rho, \theta) = 0 \text{ та } \Delta \Psi(\rho, \theta) + \chi_2^2 \Psi(\rho, \theta) = 0 \quad (2)$$

де $\Delta = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ в області $1 < \rho < \infty, 0 \leq \theta \leq \pi$, а також крайовим умовам

$$\sigma_\rho \Big|_{\rho=1} = \frac{2G}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} - \mu \mu_0 \chi_1^2 \Phi + \rho \frac{\partial^3 \Psi}{\partial \rho^3} + 3 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \chi_2^2 \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} + \chi_2^2 \Psi \right]_{\rho=1} = f(\theta) \quad (3)$$

$$\tau_{\rho\theta} \Big|_{\rho=1} = \frac{2G}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \Phi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \Psi + \frac{1}{2} \chi_2^2 \Psi \right]_{\rho=1} = 0$$

і умовам випромінювання на нескінченості.

Зазначимо, що друга з крайових умов буде виконана, якщо вимагати

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \Phi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \Psi + \frac{1}{2} \chi_2^2 \Psi \right]_{\rho=1} = 0$$

До рівнянь (2) і крайових умов (3) застосуємо інтегральне перетворення Лежандра за змінною θ

$$\langle \Phi_n(\rho), \Psi_n(\rho) \rangle = \int_0^\pi \langle \Phi(\rho, \theta), \Psi(\rho, \theta) \rangle P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, n = 0, 1, 2, \dots$$

з формулою обернення

$$\langle \Phi(\rho, \theta), \Psi(\rho, \theta) \rangle = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Phi_n(\rho), \Psi_n(\rho) \rangle (2n+1) P_n(\cos \theta)$$

У результаті приходимо до рівнянь

$$(\rho^2 \Phi'_n(\rho))' + [\chi_1^2 \rho^2 - n(n+1)] \Phi_n(\rho) = 0 \text{ та } (\rho^2 \Psi'_n(\rho))' + [\chi_2^2 \rho^2 - n(n+1)] \Psi_n(\rho) = 0$$

В першому з рівнянь зроблено заміну невідомої функції $\Phi_n(\rho) = \rho^{-\frac{1}{2}} \tilde{\Phi}_n(\rho)$, що звело рівняння до рівняння Бесселя

$$\rho^2 \tilde{\Phi}''_n(\rho) + \rho \tilde{\Phi}'_n(\rho) + \left[\chi_1^2 \rho^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \tilde{\Phi}_n(\rho) = 0.$$

Його розв'язок, що дає хвилю, яка розходиться від місця прикладання навантаження, має вигляд

$$\tilde{\Phi}_n(\rho) = A_n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_1 \rho), \text{ де } H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) \text{ функція Ганкеля другого роду.}$$

Таким чином $\Phi_n(\rho) = A_n \rho^{-\frac{1}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_1 \rho)$. Аналогічно отримуємо, що $\Psi_n(\rho) = B_n \rho^{-\frac{1}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_2 \rho)$.

Тут A_n і B_n довільні сталі. У просторі трансформант крайові умови набувають вигляду

$$\Phi''_n(1) - \mu \mu_0 \chi_1^2 \Phi_n(1) + \Psi'''_n(1) + 3\Psi''_n(1) + \chi_2^2 \Psi'_n(1) + \chi_2^2 \Psi_n(1) = \frac{R^2}{2G} f_n \quad (4)$$

$$\Phi'_n(1) - \Phi_n(1) + \Psi''_n(1) + \Psi'_n(1) - \left(1 - \frac{1}{2} \chi_2^2 \right) \Psi_n(1) = 0$$

$$\text{де } f_n = \int_0^\alpha f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

Використовуючи формули диференціювання функцій Ганкеля

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)'}(\chi \rho) = \left(n + \frac{1}{2} \right) \rho^{-1} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi \rho) - \chi H_{n+\frac{3}{2}}^{(2)}(\chi \rho)$$

$$H_{n+\frac{3}{2}}^{(2)'}(\chi \rho) = - \left(n + \frac{3}{2} \right) \rho^{-1} H_{n+\frac{3}{2}}^{(2)}(\chi \rho) + \chi H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi \rho)$$

З крайових умов (4) знайдемо сталі A_n, B_n та отримаємо наступні вирази для трансформант хвильових функцій

$$\Phi_n(\rho) = \frac{R^2 f_n}{2G \Delta_n^*} b_{22} \rho^{-\frac{1}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_1 \rho), \quad \Psi_n(\rho) = - \frac{R^2 f_n}{2G \Delta_n^*} b_{21} \rho^{-\frac{1}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_2 \rho).$$

Тут $\Delta_n^* = b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21}$

$$b_{11} = \left[n(n-1) - (1 + \mu \mu_0) \chi_1^2 \right] H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_1) + 2 \chi_1 H_{n+\frac{3}{2}}^{(2)}(\chi_1)$$

$$b_{12} = (n+1)n \left[(n-1) H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_2) - \chi_2 H_{n+\frac{3}{2}}^{(2)}(\chi_2) \right]$$

$$b_{21} = (n-1) H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_1) - \chi_1 H_{n+\frac{3}{2}}^{(2)}(\chi_1), \quad b_{22} = \left(n^2 - 1 - \frac{1}{2} \chi_2^2 \right) H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_2) + \chi_2 H_{n+\frac{3}{2}}^{(2)}(\chi_2).$$

Далі, враховуючи спiввiдношення (1) i формулу обертання для перетворення Лежандра, знаходимо вирази для перемiщень у пружному просторi

$$u(\rho, \theta) = \frac{R}{4G} \rho^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n}{\Delta_n^*} (2n+1) \left\{ b_{22} \left[n H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_1 \rho) - \chi_1 \rho H_{n+\frac{3}{2}}^{(2)}(\chi_1 \rho) \right] - \right.$$

$$\left. - b_{21} n (n+1) H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_2 \rho) \right\} P_n(\cos \theta)$$

$$v(\rho, \theta) = \frac{R}{4G} \rho^{-\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\Delta_n^*} (2n+1) \left\{ b_{22} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_1 \rho) - \right.$$

$$\left. - b_{21} \left[(n+1) H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(\chi_2 \rho) - \chi_2 \rho H_{n+\frac{3}{2}}^{(2)}(\chi_2 \rho) \right] \right\} P_n^1(\cos \theta)$$

Використовуючи цi формули, отримуємо вирази для напружень

$$\sigma_\rho(\rho, \theta) = \frac{1}{2} f_0 \rho^{-3} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\Delta_n} \rho^{-n-1} \left\{ a_{22} \left[n \frac{n-1-\mu_*(n+1)}{2n-1} (\mu_* n - 4\mu \mu_0) + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & +2\mu\mu_0n(n+1)\frac{\mu_0n-2\mu_*}{2n-1}+(n+1)\frac{n+2-\mu_*n}{2n+3}(4\mu\mu_0-\mu_*(n+2))\rho^{-2}+ \\
 & +2\mu\mu_0n(n+1)\frac{\mu_0(n+2)+2\mu_*}{2n+3}\rho^{-2}\Big]+a_{21}\left[\frac{2+\mu_0(n+1)}{2n-1}(n-4\mu\mu_0\mu_*^{-1})-\right. \\
 & \left.-2\mu\mu_0n\frac{n-3-\mu_*^{-1}(n+1)}{2n-1}+\frac{2+\mu_0(n+3)}{2n+3}(4\mu\mu_0\mu_*^{-1}-n-2)\rho^{-2}+\right. \\
 & \left.+2\mu\mu_0n(n+1)\frac{1-\mu_*^{-1}}{2n+3}\rho^{-2}\right]\Bigg\}P_n(\cos\theta) \\
 \tau_{\rho\theta}(\rho,\theta)= & \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n}{\Delta_n}\rho^{-n-1}\left\{a_{22}\left[n\frac{n-1-\mu_*(n+1)}{2n-1}-(n+1)\frac{\mu_0n-2\mu_*}{2n-1}-\right.\right. \\
 & -(n+1)\frac{n+2-\mu_*n}{2n+3}\rho^{-2}-(n+3)\frac{\mu_0(n+2)+2\mu_*}{2n+3}\rho^{-2}\Big]+a_{21}\left[\mu_*^{-1}\frac{2+\mu_0(n+1)}{2n-1}+\right. \\
 & \left.\left.+\frac{n-3-\mu_*^{-1}(n+1)}{2n-1}-\mu_*^{-1}\frac{2+\mu_0(n+3)}{2n+3}\rho^{-2}-(n+3)\frac{1-\mu_*^{-1}}{2n+3}\rho^{-2}\right]\right\}P_n^1(\cos\theta)
 \end{aligned}$$

За отриманими формулами були обчислені переміщення та напруження в пружному просторі в залежності від кута θ при різних значеннях ρ та частоти ω .

Дослідження виконано за підтримки грантів “Royal Society Wolfson Fellow” та Horizon 2020 Grant 101008140 EffectFact “Effective Factorisation techniques for matrix-functions: Developing, theory, numerical methods and impactful applications”.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динамічна задача, сферична порожнина, інтегральні перетворення, точний розв'язок.

1. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракція упругих волн. К., Наукова думка, 1978. – 308 с.
2. Грінченко В.І. , Мелешко В.В. Гармонические кобелания и волны в упругих телаах, К. Наука, 1981 – 284 с.
3. Попов Г.Я. Точные решения некоторых краевых задач механики деформируемого твердого тела, Одеса , Астропринт, 2013 – 418 с.

N.D. Vaysfeld¹, Yu.S. Protserov², A.V. Tolkachov²

AXISYMETRICAL STRESS FIELD OF AN ELASTIC MEDIUM WITH THE SPHERICAL CAVITY UNDER DYNAMIC LOAD

King'sCollegeLondon¹, Strandbuilding, UK, e-mail:natalya.vaysfeld@kcl.ac.uk

I.I. Mechnikov Odesa National University, Dvoryanska str. 2, Odesa, 65082, Ukraine

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова², вул. Дворянська 2, Одеса, 65082, Україна
e-mail:protserov@onu.edu.ua, andr.tolkach@gmail.com

The paper considers the wave field of an elastic half-space weakened by a spherical cavity. It is assumed that dynamic harmonic normal stress is applied from the cavity to the surrounding material. The integral transforms method was used to solve the corresponding boundary value problem using the presentations of the displacements and stresses through wave functions. A numerical investigation of the stress field was conducted based on the exact solution derived for the problem.

I.П.Шацький¹, С.М.Стетюк², А.С.Величкович², Я.В.Дороненко²

**РОЛЬ ПОПЕРЕЧНОГО ОБТИСНЕННЯ В ЗАДАЧІ ПРОСУВАННЯ СТЕРЖНЯ
У КРИВОЛІНІЙНОМУ КАНАЛІ**

*¹Лабораторія моделювання демпфуючих систем Інституту прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН України,
вул. Микитинецька, 3, 76002, Івано-Франківськ, Україна;
e-mail: ipshatsky@gmail.com*

*²Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
вул. Карпатська, 15, 76019, Івано-Франківськ, Україна*

Для технологій очищення промислових газопроводів виснажених родовищ та мереж низького тиску актуальною є задача зменшення опору рухові очисного поршня на нерегулярних ділянках траси [1].

Розроблено одновимірну інженерну модель для аналітичного дослідження контактної взаємодії деформівного стержня зі стінкою каналу з криволінійною віссю. Ключовим елементом моделі є врахування поперечного обтиснення стержня. Цей чинник дозволяє регуляризувати контактні напруження та знайти області втрати контакту, які сприяють інтерфейсним перегінанням газу.

Встановлено, що опір просуванню стержня має дві складові: фрикційну – від тертя об стінку труби та деформаційну – від зміни кривизни осі. Досліджено вплив лобового опору, сил тертя та кривизни траекторії на величину запоршневого тиску, необхідного для руху поршня без зупинок.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: деформівний стержень, криволінійний канал, контакт, тертя, поперечне обтиснення, очищення газопроводу.

1. Stetsiuk S., Doroshenko Y., Bondarenko R., Filipchuk O., Volovetskyi V. Investigation on the dynamics of movement of cylindrical cleaning pigs through the bends of pipeline systems for fluid transportation // Scientific Journal of Silesian University of Technology. Ser. Transport. – 2024. – **123**. – P. 303–317.

I.P.Shatskyi¹, S.M.Stetsiuk², A.S.Velychkovych², Ya.V.Doroshenko²

**THE ROLE OF TRANSVERSE COMPRESSION IN THE PROBLEM OF ADVANCEMENT
OF A ROD IN A CURVILINEAR CHANNEL**

*¹Laboratory of modelling of damping systems,
Pidstryhach-Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine,
3, Mykytynetska Str., 76002, Ivano-Frankivsk, Ukraine;
e-mail: ipshatsky@gmail.com*

*²Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas,
15; Karpatska Str., 76019, Ivano-Frankivsk, Ukraine*

An one-dimensional engineering model was developed for the analytical study of the contact interaction of a deformable rod with curvilinear channel wall. A key element of the model is taking into account the transverse compression of the rod. This factor makes it possible to regularize contact stresses and find areas of contact loss that contribute to interfacial gas flows.

З. Ю. Журавльова

ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМІВНИЙ СТАН ПОРОПРУЖНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДУ

*Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
вул. Дворянська, 2, 65082, Одеса, Україна;
e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua*

Розглядається поро пружний паралелепіпед у термінах моделі Біо [2] ($0 < x < a, 0 < y < d, 0 < z < h$), грань $x = 0$ якого знаходиться під впливом зовнішнього навантаження:

$$\sigma_x|_{x=0} = -L(y, z), \tau_{xy}|_{x=0} = Y(y, z), \tau_{xz}|_{x=0} = Z(y, z), p|_{x=0} = P(y, z), \quad (1)$$

де $\sigma_x(x, y, z), \tau_{xy}(x, y, z), \tau_{xz}(x, y, z)$ - нормальне та дотичні напруження відповідно, $p(x, y, z)$ - тиск рідини, що знаходиться у порах, $L(y, z), Y(y, z), Z(y, z), P(y, z)$ - задані функції.

Грань $x = a$ знаходиться в умовах зчеплення з середовищем та є проникною[4]

$$u|_{x=a} = 0, v|_{x=a} = 0, w|_{x=a} = 0, p|_{x=a} = 0. \quad (2)$$

Тут $u(x, y, z) = u_x(x, y, z), v(x, y, z) = u_y(x, y, z), w(x, y, z) = u_z(x, y, z)$ - переміщення твердого каркасу.

Бічні грани $y = 0, y = d, z = 0, z = h$ знаходяться в умовах ідеального контакту та є непроникними [5]:

$$\begin{aligned} v|_{y=0,d} &= 0, \tau_{xy}|_{y=0,d} = 0, \tau_{yz}|_{y=0,d} = 0, \frac{\partial p}{\partial y}\Big|_{y=0,d} = 0, \\ w|_{z=0,h} &= 0, \tau_{xz}|_{z=0,h} = 0, \tau_{yz}|_{z=0,h} = 0, \frac{\partial p}{\partial z}\Big|_{z=0,h} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Потрібно знайти переміщення, напруження та тиск рідини у порах, що задовольняють країові умови (1)-(3) та систему рівнянь [3]

$$\begin{cases} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa-1} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) - \frac{\alpha}{G} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) - \frac{\alpha}{G} \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{\kappa-1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right) - \frac{\alpha}{G} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\alpha}{k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{S_p}{k} p = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де $\kappa = 3 - 4\mu$ - стала Мусхелішвілі, μ - коефіцієнт Пуассона, α - коефіцієнт Біо, G – модуль зсуву, S_p - запам'ятованість простору пор, k - коефіцієнт проникності.

Вихідну задачу (1)-(4) зведено до одновимірної шляхом застосування скінчених sin-, cos- перетворень Фур'є за змінними y та z :

$$\begin{bmatrix} u_\gamma(x, y) \\ v_\gamma(x, y) \\ w_\gamma(x, y) \\ p_\gamma(x, y) \end{bmatrix} = \int_0^h \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \\ p(x, y, z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma z \\ \cos \gamma z \\ \sin \gamma z \\ \cos \gamma z \end{bmatrix} dz, \gamma = \gamma_n = \frac{\pi n}{h}, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} u_{\gamma\beta}(x) \\ v_{\gamma\beta}(x) \\ w_{\gamma\beta}(x) \\ p_{\gamma\beta}(x) \end{bmatrix} = \int_0^d \begin{bmatrix} u_\gamma(x, y) \\ v_\gamma(x, y) \\ w_\gamma(x, y) \\ p_\gamma(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \\ \cos \beta y \\ \cos \beta y \end{bmatrix} dy, \beta = \beta_k = \frac{\pi k}{d}, k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

Отриману одновимірну крайову задачу у просторі трансформант (5)-(6) сформульовано у векторному вигляді

$$\begin{cases} L_2 \vec{y}_{\gamma\beta}(x) = 0, 0 < x < a, \\ A_{\gamma\beta} \vec{y}'_{\gamma\beta}(0) + B_{\gamma\beta} \vec{y}_{\gamma\beta}(0) = \vec{g}_{\gamma\beta}, \vec{y}_{\gamma\beta}(a) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Тут L_2 - лінійний диференціальний оператор другого порядку, що діє за схемою
 $L_2 \vec{y}_{\gamma\beta}(x) = I \vec{y}''_{\gamma\beta}(x) + Q_{\gamma\beta} \vec{y}'_{\gamma\beta}(x) + R_{\gamma\beta} \vec{y}_{\gamma\beta}(x)$, I – одинична матриця,

$$Q_{\gamma\beta}, R_{\gamma\beta}, A_{\gamma\beta}, B_{\gamma\beta} \text{ - відомі матриці, } \vec{y}_{\gamma\beta}(x) = \begin{pmatrix} u_{\gamma\beta}(x) \\ v_{\gamma\beta}(x) \\ w_{\gamma\beta}(x) \\ p_{\gamma\beta}(x) \end{pmatrix}, \vec{g}_{\gamma\beta} = \begin{pmatrix} (\kappa-1)L_{\gamma\beta}/G \\ Y_{\gamma\beta}/G \\ w_{\gamma\beta}/G \\ p_{\gamma\beta} \end{pmatrix}.$$

Для розв'язання одновимірної краївої задачі (7) використано апарат матричного диференціального числення [1]. В результаті отримано точний розв'язок вихідної краївої задачі.

Дослідження підтримано грантом Horizon 2020 Grant Agreement number 101008140 EffectFact “Effective Factorisation techniques for matrix-functions: Developing theory, numerical methods and impactful applications”, стипендією Кабінету Міністрів України для молодих вчених.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: поро пружний паралелепіпед, інтегральне перетворення Фур’є, матричне диференціальне числення, точний розв'язок.

1. Попов Г. Я. Точні розв'язки деяких краївих задач механіки деформованого твердого тіла. – Одеса: Астропрінт, 2013. – 424 с
2. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation // J. Appl. Phys. – 1941. – 12. – P. 155–164.
3. Cheng, A. H.-D. Poroelasticity // Theory and applications of transport in porous media (Springer). – 2016. – 27.
4. Kubik, J., Kachmaryk, M., Chaplyka, E. Methods for the Determination of the Characteristics of Porous Saturated Media // Materials Science. – 2001. – 37. - P. 92–102.
5. Nahirnyj, T., Tchervinka, K. Mathematical Modeling of the Coupled Processes in Nanoporous Bodies // Acta Mechanica et Automatica. – 2018. – 12(3). – P. 196-203.

Z.Yu.Zhuravlova

ON STRESS-DEFORMABLE STATE OF POREOELASTIC CUBOID

*Odesa I.I. Mechnikov National University,
Dvoryanska Str., 2, 65082, Odesa, Ukraine;
e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua*

The poroelasticity problem for a cuboid is considered in terms of Biot's model. Its exact analytical solution is constructed with the help of finite sin-, cos- Fourier transform and the apparatus of matrix differential calculation.

О.І. Левчук¹

**КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ УВІГНУТИХ ЖОРСТКИХ ШТАМПІВ
З МАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНИМ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ІЗОТРОПНИМ
ПІВПРОСТОРОМ**

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна;
e-mail: 2013levchuk@gmail.com*

При проектуванні елементів конструкцій, вимірювальних приладів іх систем, що створюються на основі електропружиних та магнітоелектропружиних матеріалів, необхідна оцінка їх міцності і надійності. Проводять таку оцінку на основі аналізу напруженого стану таких матеріалах під дією навантажень, близьких до умов експлуатації. Важливою особливістю досліджень напруженого стану у магнітоелектропружиних матеріалах є зв'язаність силових, електричних і магнітних полів.

У доповіді представлено результати досліджень просторових задач магнітоелектропружності про контактну взаємодію увігнутих жорстких штампів (сферичної, конічної та обернено степеневої форми) з магнітоелектропружним трансверсально-ізотропним півпростором, поверхня якого розміщена у площині ізотропії електропружинного матеріалу і вона є непроникною (ізольованою) стосовно електричного і магнітного полів. Увігнутий штамп під дією сили R вдавлюється умагнітоелектричний півпростір. Припускається, що має місце гладкий (без тертя) механічний контакт. При дослідженні використано представлення розв'язків зв'язаної системи рівнянь магнітоелектропружності через гармонічні функції та гармонічні потенціали спеціального виду з подальшим зведенням контактної задачі для увігнутих штампів до розгляду інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. В подальшому, при дослідженні контактної взаємодії для всіх трьох геометрій увігнутих штампів для розв'язання інтегрального рівняння використовувався розклад за малим параметром. У явному вигляді для трьох видів увігнутих штампів отримано наближені аналітичні вирази для визначення переміщення штампу та геометричних розмірів області контакту півпростору з увігнутим штампом. Проведено числові дослідження та аналіз результатів для конкретних властивостей магнітоелектропружиних матеріалів. Встановлено вплив електропружиних властивостей п'єзоелектричних матеріалів, сили притискання увігнутого штампу та його геометрії, зв'язаності силових, електричних і магнітних полів на параметри контактної взаємодії. З отриманих результатів як частинні випадки випливають параметри контактної взаємодії трьох різних за формою увігнутих штампів (сферичної, конічної та степеневої геометрії з електропружинним трансверсально-ізотропним півпростором).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: контактна взаємодія, магнітоелектропружний півпростір, увігнутий жорсткий штамп, магнітоелектропружний трансверсально-ізотропний матеріал, переміщення штампу

O.I. Levchuk¹

**CONTACT INTERACTION OF CONCAVE HARD STAMPS WITH
A MAGNETOELECTROELASTIC TRANSVERSALLY ISOTROPIC HALF-SPACE**

¹*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: 2013levchuk@gmail.com*

The contact interaction of hard stamps of three geometric shapes (spherical, conical, inverse power-shaped) with the magnetoelectroelastic half-space was studied. Approximate analytical solutions of the considered problems were obtained using the small-parameter expansion. Analytical expressions for calculating displacement concave stamps have been found. Numerical investigation and its analysis were carried out.

KEY WORDS: contact interaction, magneto-electroelastic half-space, concave rigid stamp, magneto-electroelastic transversely isotropic material, displacement of stamp

В.С. Кирилюк

**КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ОДНОВИМІРНОГО КВАЗІКРИСТАЛІЧНОГО
ПІВПРОСТОРУ З П'ЄЗОЕФЕКТОМ З ПЛОСКИМ ЕЛІПТИЧНИМ ШТАМПОМ
ПІД ДІЄЮ СИЛИ Й МОМЕНТІВ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ
бул. П. Нестерова, 3, Київ, 03057, Україна;
e-mail: kirilyuk6131@gmail.com*

Останнім часом значно зрос інтерес до досліджень поведінки квазікристалічних тіл при дії на них силових і температурних полів, про що свідчить стрімке збільшення публікацій у провідних наукових журналах на цю тему. Але розрахунок напруженого стану у таких матеріалах пов'язаний зі значними труднощами математичного характеру, оскільки у строгій постановці задачі необхідно враховувати зв'язаність силових, електричних та фазонних полів, поява останніх з яких викликана структурою квазікристала. Для опису фізичних полів у квазікристаліпотрібно розглядати повну систему зв'язаних диференціальних рівнянь у частинних похідних, що відображають взаємодію силових, електричних і фазонних полів.

У доповіді на основі строгої математичної моделі, що враховує зв'язаність силових і електричних та фазонних полів, досліджено задачу контактної взаємодії плоского жорсткого штампу еліптичної форми під дією сили й моментів з квазікристалічним п'єзоелектричним трансверсально-ізотропним півпростором. При розгляді задачі припускається, що поверхня півпростору немістить електродного покриття розміщена у площині ізотропії квазікристалічного електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу, а також, що має місце гладкий (без тертя) механічний контакт між штампом і півпростором. При розв'язанні контактної задачі використано представлення розв'язку системи рівнянь квазікристалічного електропружного тіла через гармонічні функції, а також гармонічні потенціали спеціального виду. Контактну задачу зведено до розгляду системи інтегральних рівнянь, в результаті розв'язання якої знайдено аналітичні вирази для обчислення контактних напружень та фазонного поля під жорстким штампом, переміщенням плоского еліптичного штампу у квазікристалічному електропружному півпросторі, викликані прикладенням до штампу сили й моментів. Встановлено, що для жорсткого плоского еліптичного штампу, що тисне на квазікристалічний п'єзоелектричний півпростір, переміщення штампу та його кути повороту суттєвим чином залежать від його квазікристалічних та електропружиних властивостей.

Проведені числові дослідження при різних геометричних параметрах еліптичного штампу, навантаженнях та квазікристалічних та електропружиних властивостях матеріалу півпростору та проаналізовано їх вплив на параметри контактної взаємодії квазікристалічного електропружного трансверсально-ізотропного півпростору з жорстким плоским еліптичним штампом.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: контактна взаємодія, квазікристалічний електропружинний півпростір, плоский еліптичний штамп, дія сил і моментів, зв'язаність фізичних полів, точний розв'язок

V.S. Kirilyuk

**CONTACT INTERACTION OF ONE-DIMENSIONAL QUASICRYSTALIC HALF-SPACE
WITH PIEZOEFFECT AND FLAT ELLIPTICAL STAMP UNDER THE ACTION OF FORCE
AND MOMENTS**

*¹S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: kirilyuk6131@gmail.com*

The contact interaction of a flat rigid stamp of an elliptical shape under the action of force and moments and quasicrystalline piezoelectric half-space was investigated. The solution of this contact problem was obtained in a closed form. Analytical expressions of contact stresses and displacement of the hard flat elliptical stamp were found. Numerical results were obtained, analysis of contact parameters was carried out.

В.С. Кирилюк¹, О.І.Левчук¹

**КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ ДВОХ МАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНИХ
ПІВПРОСТОРІВ ЗА НАЯВНОСТІ У ОДНОМУ З НИХ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ
ВІЙМКІ ЕЛІПТИЧНОГО ПЕРЕРІЗУ**

*¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П. Несторова, 3, Київ, 03057, Україна;
e-mail: kirilyuk6131@gmail.com, 2013levchuk@gmail.com*

Широке використання у інженерній практиці електропружиних та магнітоелектропружиних матеріалів при створенні перетворювачів енергії, елементів вимірювальних приладів та мікроелектромеханічних систем потребує при прогнозуванні їх міцності і надійності дослідження і аналізу напруженодеформованого стану у таких матеріалах поблизу концентраторів напружень типу порожнин, включень, тріщин та при контактній взаємодії зі штампами. Слід відзначити, що зв'язаність силових, електричних та магнітних полів, що має місце у магнітоелектропружиних матеріалах, суттєво ускладнює проведення дослідження і аналіз напруженого стану у таких матеріалах.

У даній доповіді на основі строгої математичної постановки, яка враховує зв'язаність силових, електричних і магнітних полів, розглянуто задачу про стискання двох різних за властивостями магнітоелектропружиних трансверсально-ізотропних півпросторів, один з яких містить похилу приповерхневу віймку еліптичного перерізу. Аналітичний розв'язок задачі знайдено на основі представлення розв'язку рівнянь статики термоелектропружності через гармонічні функції, гармонічні потенціали та зведенням граничної задачі до розгляду інтегро-диференціального рівняння з невідомою областю інтегрування. Для приповерхневої віймки, геометрична форма якої описується функцією

$$z = f_0(x, y) = h_0(1 - x^2/a_0^2 - y^2/b_0^2)^{3/2}$$

В явному вигляді маємо

$$a = a_0 \sqrt{1 - N_0}; b = b_0 \sqrt{1 - N_0}; h = r_0 [1 - N_0]^{3/2},$$

де $N_0 = 2(M_1^* + M_2^*) p b_0 \sqrt{1 - e_0^2} / (3r_0 E(e_0))$.

В отриманих виразах сталі M_1^* і M_2^* залежать від магнітоелектропружиних властивостей кожного з матеріалів півпросторів відповідно. З цих співвідношень за відомими розмірами початкової віймки (параметри a_0 , b_0 і h_0), значеннями стискаючих зусиль, властивостями двох магнітоелектропружиних трансверсально-ізотропних матеріалів півпросторів (входять через величини M_1^* і M_2^*) визначимо значення напівосей ділянки контакту a , b і максимальну висоту нової віймки. Зі знайдених аналітичних виразів як частинний випадок випливають параметри контакту

двох електропружних трансверсально-ізотропних півпросторів, один з яких містить виймку еліптичного перерізу. Проведено числові дослідження, вивчено вплив магнітоелектропружних властивостей матеріалів півпросторів, геометричних параметрів виймки та стискаючих навантажень на параметри контакту магнітоелектропружних півпросторів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: контактна взаємодія, магнітоелектропружні півпростори, приповерхнева виймка, еліптичний переріз, параметри контактної взаємодії

V.S.Kirilyuk¹, O.I. Levchuk¹

**CONTACT INTERACTION OF TWO MAGNETOELECTROELASTIC HALF-SPACES
IN THE PRESENCE OF A NEAR-SURFACE GROOVE OF ELLIPTICAL SECTION
IN ONE OF A HALF-SPACE**

¹*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: kirilyuk60@gmail.com, 2013levchuk@gmail.com, m.rostyslav@gmail.com*

The contact interaction of two magnetoelectroelastic transversally isotropic half-spaces, one of which contains the near-surface groove of an elliptical cross-section, was investigated. An analytical solution to the contact problem was obtained. Numerical studies were carried out, and the influence of the magnetoelectroelastic properties of half-spaces, the geometry of the groove, compressive forces on the contact interaction parameters of two magnetoelectroelastic half-space was established.

KEY WORDS: contact interaction, magnetoelectroelastic half-spaces, near-surface groove, elliptical section, contact interaction parameters

Р.М. Кушнір¹, Г.Т. Сулим¹, Й.З. Піскозуб^{2,3}

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ КІНЕМАТИКИ КОНТАКТНОГО ТЕРТЬЯ НА ДЕФОРМУВАННЯ КОМПОЗИТНИХ СТРУКТУР З ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, 79060 Львів, Україна

²Національний університет «Львівська політехніка»,
вул. С. Бандери, 12, 79000 Львів, Україна;

e-mail: yosyf.z.piskozub@lpnu.ua

³Cracow University of Technology,
Warszawska Str. 24, 31-155 Cracow, Poland;
e-mail: yosyf.piskozub@pk.edu.pl

Об'єкти у формі тонких включень (тріщини, оксидні плівки, сульфідні та графітові включенні в металах, заповнені газом, рідиною чи твердою субстанцією порожнини) є одними із найпоширеніших типів неоднорідної будови матеріалів, які зумовлюють або небажану високу концентрацію напружень або, навпаки, є елементами будови інтелектуальних (смарт) матеріалів. Задачі такого типу у разі нелінійності фізико-механічних властивостей таких неоднорідностей, неідеального кінематичного контакту між складовими за невизначеність області їх контакту у разі можливості її порушення вивчені недостатньо. При вивченні задач з такою складною геометричною конфігурацією та великою кількістю досліджуваних параметрів доцільно використовувати аналітично-числові методи, що зменшують розмірність задачі. Метою даного напряму досліджень є розвиток структурно-модульного методу функцій стрібка та побудова математичних моделей тонких включень-прошарків, в т.ч. багатошарових, матеріал яких має істотно нелінійні деформаційні властивості, за різного навантаження тіла при умові нелінійного фрикційного контакту між складовими елементами композиту. Для розв'язування нелінійних задач фрикційного проковзування в умовах багатокрікового навантажування-розвантажування застосовано інкрементальний підхід, розроблено ітераційний алгоритм розв'язування задач за умов априорі невідомих зон контакту матриці з лінійно, нелінійно пружним чи пружно-пластичним включенням та довільного багатокрікового процесу навантажування-розвантажування, зокрема й циклічного.

Отримані на підставі даного підходу результати розрахунків напруженодеформованого стану в околі розглянутих неоднорідностей можна застосувати із єдиних позицій як у теорії композитів в рамках мезо- чи мікромеханіки, так і в наномеханіці чи геомеханіці, мікроелектроніці, механіці руйнування, матеріалознавстві тощо. Вони дозволили зробити низку рекомендацій для оптимізації способів навантажування таких структур з метою підвищення їх міцності.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тонке включение, нелінійний закон тертя, коефіцієнти інтенсивності напружен, функції стрібка

R.M. Kushnir¹, H.T. Sulym¹, Y.Z. Piskozub^{2,3}

**STUDY OF THE INFLUENCE OF CONTACT FRICTION KINEMATICS ON
DEFORMATION OF COMPOSITE STRUCTURES WITH THIN INCLUSIONS**

¹ *Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine,
Naukova Str. 3-b, 79060, Lviv, Ukraine*

² *Lviv Polytechnic National University, Bandera St., 12, 79000 Lviv, Ukraine;
e-mail: yosyf.z.piskozub@lpnu.ua*

³ *Cracow University of Technology, Warszawska Str. 24, 31-155 Cracow, Poland;
e-mail: yosyf.piskozub@pk.edu.pl*

This study considers development of the structural-modular method of jump functions and construction of mathematical models of thin inclusions-layers, including multilayers, the material of which has significantly nonlinear deformation properties, under different body loads under the condition of nonlinear frictional contact between the constituent elements of the composite.

М.А. Ткачук¹, А.В. Грабовський¹, М.М. Ткачук¹

НЕЛІНІЙНА СТАТИЧНА РЕАКЦІЯ ПРУЖНОГО КІЛЬЦЯ ІЗ ВИСТУПАМИ В ОПОРАХ РОТОРІВ

¹ Національний технічний університет

«Харківський політехнічний інститут», МОН України,

бул. Кирпичова, 2, 61002, Харків, Україна;

e-mail: tma@tmm-sapr.org

Для відлаштування від небажаних режимів руху роторів машин застосують пружні проміжні кільця (ППК). Зокрема, застосування ППК зазвичай покликане зменшити жорсткість опор роторних частин. Цим самим можна відлаштовуватися від резонансних режимів їх руху. Конструктивне виконання цих кілець та умови їх спряження із іншими елементами конструкції ротора та підшипників опор свідчать про те, що у загальному випадку статична характеристика ППК може бути не лінійною [2].

У цій роботі розробляються моделі напруженого-деформованого стану ППК на основі варіаційного принципу типу Кальєра [1]. Розв'язок відносно сил і моментів є точним у межах моделі криволінійного стержня [3]. Натомість, визначення деформованого стану у межах моделі суцільного пружного тіла вимагає скінченно-елементної апроксимації переміщень та умов контактут.

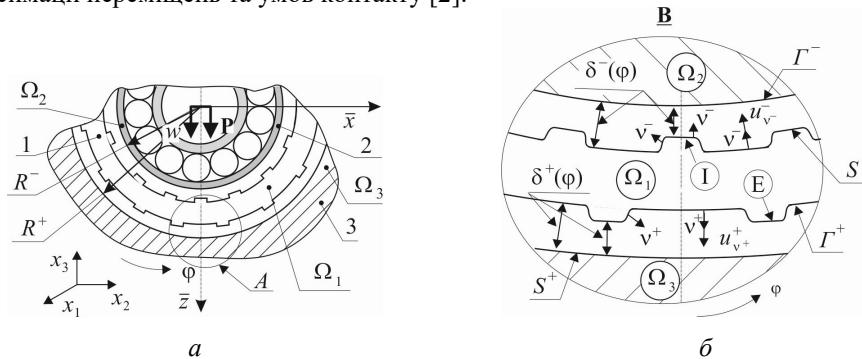


Рис.1.

Основне навантаження на підшипникову опору – радіальна сила P , яка діє у напрямку від осі вала ротора через підшипник на корпус. Між цими елементами розміщується пружне проміжне кільце. Для аналізу напруженого-деформованого стану цього ППК побудовано розрахункову схему, зображену на рис. 1. У цій схемі досліджуване кільце 1 розміщене між двома жорсткими тілами 2 (умовно – вал із підшипником) і 3 (умовно – корпус). Тіло 3 – жорстко закріплене (нерухоме). Тіло 1 розміщене між тілами 2 і 3 із зазорами δ («додатній») або натягами («від’ємний»). Внутрішній контакт (тіла 1, 2) реалізується уздовж поверхонь S^+ та Γ^- . Зовнішній контакт (тіла 1, 3) відбувається між поверхнями S^- та Γ^+ . Зазори між контактуючими тілами – δ^- (тіла 1, 2) та δ^+ (тіла 1, 3). Тертям нехтуємо. ППК має рівномірно розташовані за кутовою координатою n внутрішніх (I) та зовнішніх (E) виступів (опор). Саме ці опори (рис. 1) першою чергою вступають у контакт із тілами 2 і 3, відповідно.

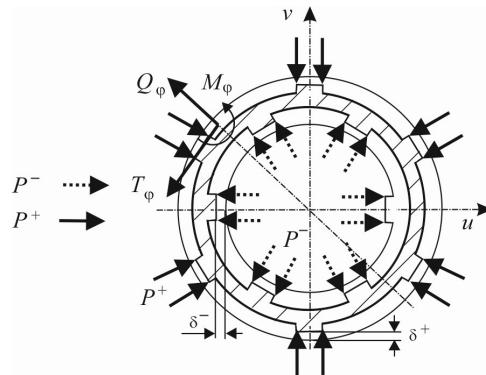


Рис.2.

Стержнева модель. Пружне кільце подається у вигляді сукупності $2n$ криволінійних стержнів. Кожен із цих сегментів є почергово внутрішнім або зовнішнім виступом збільшеної товщини, або ж тоншою гнутою ділянкою. Вважатимемо, що контакт кільця із внутрішньою та зовнішньою жорсткими перепонами відбувається виключно на краях виступів. В такому разі, спираючись на підхід, описаний у [3], можна побудувати стержневу модель ППК, наведену на рис. 2. Тут до розгляду вводяться силові фактори: згинний момент M , перерізна сила Q та сила розтягу-стиску T . Зовнішніми реакціями є невідомі невід'ємні контактні сили P з обох сторін кільця.

$$P_i^- \geq 0; \quad P_i^+ \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Зазори по виступах опор внаслідок переміщення втулки ротора складають

$$g_i^- = \delta^- - w \cos\left(\frac{2\pi}{n}(i-1)\right) \geq 0; \quad g_i^+ = \delta^+ \geq 0, \quad i=1, \dots, n. \quad (2)$$

Відповідно до робіт [1,2], для задач одностороннього контакту пружних тіл може бути сформульований варіаційний принцип Калькера. Він полягає в тому, що дійсні внутрішні зусилля в системі та контактні зусилля мінімізують функціонал повної додаткової енергії за умов статичної рівноваги:

$$\Phi = \int_0^{2\pi} R \left(\frac{T^2(\varphi)}{2EA(\varphi)} + \frac{M^2(\varphi)}{2EI_z(\varphi)} \right) d(\varphi) + \left[\sum_i P_i^+ g_i^+ - \sum_j P_j^- g_j^- \right]. \quad (1)$$

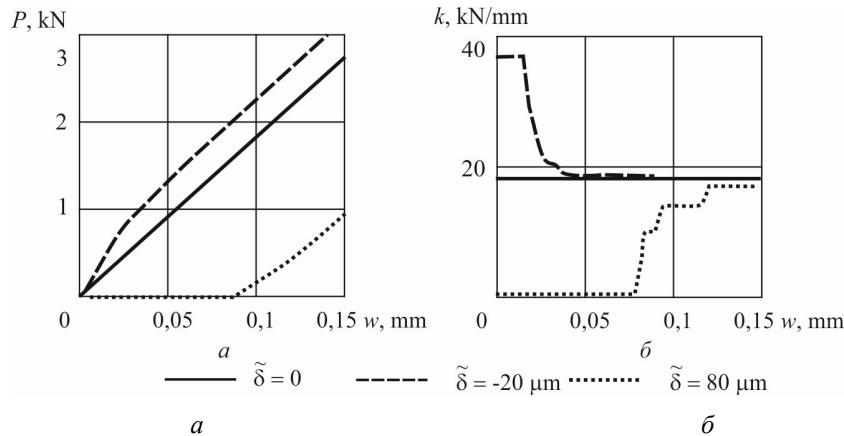


Рис.3.

На основі розробленої стержневої математичної моделі контактної взаємодії ППК із жорсткими обмеженнями побудовано статичні його характеристики. Якісний вигляд залежностей « $P - w$ » наведено на рис. 3 для різних випадків («offset» – натяг, «exact fit» – без зазору – натягу, «gap» – зазор), отримані за стержневою моделлю для

певного варіанту ППК. Тут жорсткість $k = dP / dw$. Видно, що вигляд статичної характеристики сильно змінюється при переході від зазору у контакті до натягу. Зміна у кількості виступів кільця, що перебувають у контакті з зовнішньою опорою та внутрішньою обоймою, відображається у раптовій зміні жорсткості пружної реакції, як видно на рис. 3, б. Здійснені розробки та отримані результати досліджень дають підстави для констатації таких закономірностей та висновків.

1. За відсутності зазорів та натягів статична характеристика пружного проміжного кільця складається із двох ділянок. Перша – майже лінійна частина за умов незмінної кількості виступів, що перебувають у контакті. За нею слідує більш крутого ділянка, оскільки замість вигину міжпорних секторів пружного проміжного кільця починається їх стиск по товщині.

2. За наявності натягу у спряженні пружного проміжного кільця із сусідніми тілами статична реакція відрізняється поступовою зміною жорсткості. Це відбувається внаслідок того, що зі зростанням радіального відхилення частини виступів у верхній половині кільця виходять із контакту. У результаті нахил кривої зменшується порівняно із початковим.

3. За наявності зазору у з'єднанні пружного проміжного кільця із сусідніми тілами перед згаданими вище (§ 1, 2) двома ділянками з'являється «нульова» ділянка (рис. 3). Крім того, наступні ділянки – більш пологі, ніж для інших випадків.

4. В цілому статичну характеристику « $P - w$ » можна апроксимувати у загальному випадку «трилінійною» залежністю (§ 1 – 3). При цьому, чим більший натяг, тим більша жорсткість пружного проміжного кільця на кожній ділянці. Навпаки, чим більший зазор, тим ця жорсткість менша.

5. Напружено-деформований стан пружних проміжних кілець характеризується тим, що при виборі зазору відбувається вигин міжпорних ділянок ППК. Тобто, контактний тиск спочатку локалізується на опорах (I та E). Потім за зростання навантажень починається контакт у середній частині міжпорних ділянок.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гнучкі опори роторів, принцип Калькера, контакктна механіка

1. Kalker J.J. Variational and non-variational theory of frictionless adhesive contact between elastic bodies // Wear. – 1987. – 119, N 1. – P. 63 – 76.
2. Tkachuk M.M., Grabovskiy A., Tkachuk M.A., Shut O. Computational-Experimental Evaluation of Stiffness Response in Elastic Supports of Rotor Systems. In: Nonlinear Mechanics of Complex Structures, 2021. – P. 353 – 366.
3. Tkachuk M., Grabovskiy A., Tkachuk A. Numerical and Analytical Analysis Methods for Radial Response of Flexible Ring Dampers. In: Rackov M., Mitrović R., Čavić M. (eds) Machine and Industrial Design in Mechanical Engineering. KOD 2021. Mechanisms and Machine Science. – Cham: Springer, 2022. – 109. – P. 499 – 506.

M. M. Tkachuk, A. V. Grabovskyi, M. A. Tkachuk¹

NONLINEAR STATIC REACTION OF ELASTIC RING WITH FLANGES IN ROTOR SUPPORTS

¹ National Technical University “Kharkiv Polytechnical Institute”,
vul. Kyrylychova, 2, 61002, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: tma@tmm-sapr.org

The response of a radial flexible ring with flanges in supports of machine rotors to radial deflection is studied. Two models of deformation and contact interaction of an elastic element with two rigid bodies inside and outside of the ring have been developed. These models are based on variational formulations with respect to the unknown forces and displacements, respectively. The presence of gaps or tight fit from both sides in the contact between the ring and the rigid bodies is taken into account.

**О.Я.Григоренко¹, Л.С.Рожок^{1,2}, Н.П.Борейко¹,
Л.В.Харитонова^{1,2}**

**ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ
НЕТОНКИХ ОВАЛЬНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК З НЕПЕРЕРВНО-
НЕОДНОРІДНИХ МАТЕРІАЛІВ**

¹ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. Нестерова, 3, 03057; Київ, Україна;
e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com;

² Національний транспортний університет,
бул. Омеляновича-Павленка, 1, 01010, Київ, Україна;

Некругова форма поперечного перетину оболонкових конструкцій має певні переваги, порівняно з круговою, зокрема овальна, що може бути використана, наприклад, для підводних конструкцій високого тиску [2]. Вибір матеріалів, що мають певні механічні властивості дозволяє підвищити стійкість та надійність таких конструкцій. В просторовій постановці лінійної теорії пружності на основі методу апроксимації функцій дискретними рядами Фур'є [1] розв'язано задачу про напруженій стан нетонких циліндричних оболонок різної товщини з овальним поперечним перетином, що виготовлені з неперервно-неоднорідного матеріалу при дії зовнішнього нормального навантаження. Результати розв'язання задачі отримано у вигляді графіків і таблиць розподілу характеристик напруженого стану в залежності від форми поперечного перетину, товщини та матеріалу оболонок.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: просторова теорія пружності, неперервно-неоднорідний матеріал, нетонкі овальні циліндричні оболонки, дискретні ряди Фур'є, чисельно-аналітичний підхід.

1. Grigorenko Ya.M., Grigorenko A. Ya. Rozhok L.S. Stress State of Non-Thin Nearly Circular Cylindrical Shells Made of Continuously Inhomogeneous Materials // Int. App. Mech. – 2022. – 58, № 4 – P. 381–388.
2. Zhang J., Wang W., Wang F., Tanga W., Cuib W., Wang W. Elastic buckling of externally pressurized Cassini oval shells with various shape indices // Thin-Walled Structures. – 2018122. – P. 83–89.

**O.Ya.Grygorenko¹, L.S.Rozhok^{1,2} N.P.Boreiko¹,
L.V.Kharitonova^{1,2}**

NUMERICAL ANALYSIS OF STRESS-STATE OF NONTIN OVAL CYLINDRICAL SHELLS MADE OF CONTINUOUS-HETEROGENEOUS MATERIALS

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com;

² National Transport University,
M. Omelianovycha-Pavlenka Str., 1, 01010, Kyiv, Ukraine

The problem of the stress state of the non-thin oval cylindrical shells based on the spatial model are considered. The numerical analyses based on a numerical-analytical technique was carried out. The results of the calculations of the cylindrical shells made of the continuously inhomogeneous materials are presented.

F. Garcia-Sanchez¹, A. Saez², V.V. Zozulya³

A HIGH-ORDER NONLOCAL THEORY OF SHELLS AND ITS APPLICATION TO THE MEMS/NEMS ANALYSIS AND SIMULATIONS

¹Departamento de Ingeniería Civil, de Materiales y Fabricación, Universidad de Málaga, Plaza El Ejido S/N 29013, Málaga, Spain, e-mail : fgsanchez@uma.es

²Departamento de Mecánica de Medios Continuos, Universidad de Sevilla, Camino de los Descubrimientos s/n, 41092-Sevilla, Spain, e-mail: andres@us.es

³S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences, P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine; e-mail: vzozulyas@hotmail.com

We consider an elastic shell of arbitrary geometry in a 3-D Euclidian space, which occupies the domain $V = \Omega \times [-h, h]$ with a smooth boundary ∂V . Here $2h$ is thickness, Ω is the middle surface of the shell. The boundary of the shell ∂V can be presented in the form $\partial V = S \cup \Omega^+ \cup \Omega^-$, where Ω^+ and Ω^- are the upper and lower sides and S denotes lateral sides.

According to the theory of nonlocal elasticity [1], the main equations for linear, homogeneous, isotropic, nonlocal elastic solid are given in the form of the following system of differential equations.

The equations of motion have the form

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1)$$

Here \mathbf{b} is a vector of body forces, ρ is a density of material, $\ddot{\mathbf{u}}$ is the acceleration vector.

The divergence of the stress tensor in the curvilinear orthogonal system of coordinates has the form

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\sigma_{kj}}{H_k} \Gamma_{kk}^i + \frac{\sigma_{ik}}{H_i} \Gamma_{ki}^j \right) \mathbf{e}_j \quad (2)$$

Unit orthogonal basic vectors and their derivatives with respect to space coordinates are equal to

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x_j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \quad (3)$$

where H_i are Lamé coefficients and Γ_{ij}^k are Christoffel symbols. They are calculated by the equations

Kinematic relations simplify and have the form

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (4)$$

Here \mathbf{u} is a displacements vector and $\boldsymbol{\epsilon}$ is a tensor of small deformations.

The gradient of the displacements vector in the orthogonal curvilinear system of coordinates has the form

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{u_k}{H_i} \Gamma_{ki}^j \right) \quad (5)$$

According to the nonlocal elasticity theory developed by Eringen and presented in details in [1] the stress at point \mathbf{x} in a body is functional of the strain field at every point of the body. Thus, the nonlocal stress tensor $\boldsymbol{\sigma}$ at point \mathbf{x} can be expressed by,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \int_V H(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \tau_e) \boldsymbol{\sigma}^c(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \tau_e = e_0 a / l_e, \quad \mathbf{x} \in V \\ \boldsymbol{\sigma}^c &= \lambda(tr\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}\end{aligned}\quad (6)$$

where λ and μ are Lamé constants of classical elasticity, $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}^c$ and $\boldsymbol{\epsilon}$ are non-local, classical stress, and strain tensors, respectively.

The kernel function $H(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \tau)$ is the nonlocal modulus incorporated into the constitutive equations the nonlocal effects at the reference point \mathbf{x} , produced by local strain at the source points \mathbf{x}' . The term $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ is the Euclidean distance, τ_e is the material constant that depends on internal e_0 (e.g. lattice parameter, granular size and distance between the C-C bonds, etc.), l_e and external characteristic lengths.

In differential form nonlocal constitutive relations are presented as

$$(1 - (e_0 a)^2 \nabla^2) \boldsymbol{\sigma} = \lambda(tr\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} \delta_{ij} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon} \quad (7)$$

Here e_0 is the constant of material, a is a parameter describes internal characteristic length.

The differential equations of motion in the form of displacements can be represented as the following

$$\mathbf{L}_u \cdot \mathbf{u} + (1 - (e_0 a)^2 \nabla^2)(\mathbf{b} - \rho \mathbf{I}_u \cdot \ddot{\mathbf{u}}) = 0 \quad (8)$$

where \mathbf{I}_u is the matrix operator that has on the main diagonal elements equal to one and

$$\mathbf{L}_u \cdot \mathbf{u} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\bar{\lambda} + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \quad (9)$$

where

$$\tilde{\mathbf{b}} = (1 - \tau^2 l_e^2 \nabla^2) \mathbf{b} \quad (10)$$

The Laplacian and gradient of divergence operators of the displacements vector in the orthogonal curvilinear system of coordinates have the form

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{u} &= \left(\frac{1}{H_i} \frac{\partial \nabla \cdot \mathbf{u}}{\partial x_i} \Big|_{ij} + \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{H_k} \Big|_{ij} \Gamma_{kk}^i + \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}}{H_i} \Big|_{ik} \Gamma_{ki}^j \right) \mathbf{e}_j \\ \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} &= \nabla_i \nabla_j u_j \mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{H_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \frac{u_k}{H_j} \Gamma_{kj}^j \right) \mathbf{e}_i\end{aligned}\quad (11)$$

where $\nabla \mathbf{u}$ is defined by equation (5) and $\nabla \cdot \mathbf{u}$ by the equation

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla_i u_i = \frac{1}{H_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{u_k}{H_i} \Gamma_{ki}^i \quad (12)$$

Differential operator of Hamilton and its combinations in orthogonal system of coordinates related to the middle surface of the shell are presented in [2].

In order to reduce the 3-D problem for the nonlocal theory of elastic shells to a 2-D one, we expand the physical parameters, that describe the stress-strain state of the beam into the Legendre polynomials series along the coordinate x_2 . all of the parameters that describe the stress-strain of the shell in the Legendre polynomials series along the coordinate

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}^k(\mathbf{x}_\alpha) P_k(\varpi), \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{p}^k(\mathbf{x}_\alpha) P_k(\varpi), \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\sigma}^k(\mathbf{x}_\alpha) P_k(\varpi), \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{\epsilon}^k(\mathbf{x}_\alpha) P_k(\varpi),\end{aligned}\quad (13)$$

where $\varpi = x_2 / h \in [-1, 1]$ is a normalized variable and the coefficients of expansion have the form

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^k(\mathbf{x}_\alpha) &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h \mathbf{u}(\mathbf{x}_\alpha, x_3) P_k(\varpi) dx_3, & \mathbf{p}^k(\mathbf{x}_\alpha) &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h \mathbf{p}(\mathbf{x}_\alpha, x_3) P_k(\varpi) dx_3, \\ \boldsymbol{\sigma}^k(\mathbf{x}_\alpha) &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_\alpha, x_3) P_k(\varpi) dx_3, & \boldsymbol{\varepsilon}^k(\mathbf{x}_\alpha) &= \frac{2k+1}{2h} \int_{-h}^h \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}_\alpha, x_3) P_k(\varpi) dx_3\end{aligned}\quad (14)$$

By expanding all functions contained in the equations (1)-(12) in the Legendre's polynomial series one can obtain differential equations of motion for Legendre's polynomial series coefficients of the displacements in the form (14).

Explicit expressions for differential operators in the matrix differential operators (9) for the 2-D model of beams are presented in [3].

The equations presented here can be used for modeling and stress-strain calculations of the beams by considering nonlocal effects at micro- and nanoscales.

Let us consider an elastic beam of the length l , width b and thickness $2h$, which is settled above the rigid foundation with an initial gap h_0 in the thermal field θ . There is a heat-conducting medium in the gap between the foundation and the beam. The medium does not resist the beam deformation, and heat exchange between the foundation and the beam is due to the thermal conductivity of the medium. We assume that the gap h_0 is commensurable with the beam displacements which are assumed to be small.

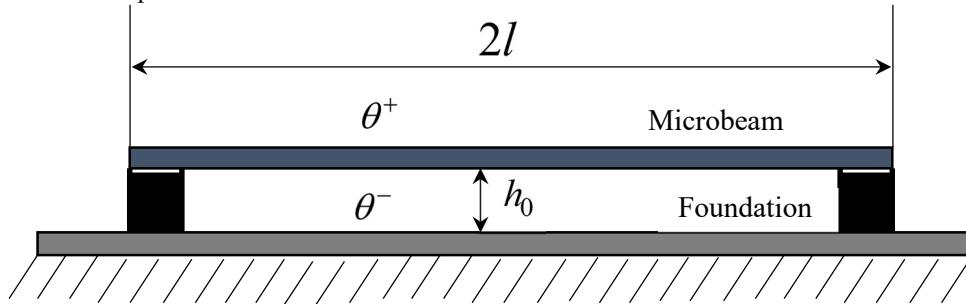


Fig. 1. Microbeam settles above the rigid foundation in the thermal field.

With considering temperature field the 1-D differential equations of thermoelasticity and head conductivity of the beam can be presented in the form

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_u \cdot \mathbf{u} + \mathbf{L}_\theta \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{f} &= 0, \\ \mathbf{L}_{\theta\theta} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{Q} + \boldsymbol{\chi} &= 0\end{aligned}\quad (15)$$

The matrix differential operator \mathbf{L}_u , $\mathbf{L}_{\theta\theta}$ and \mathbf{L}_θ and vectors \mathbf{u} and \mathbf{f} , $\boldsymbol{\theta}$, \mathbf{Q} , and $\boldsymbol{\chi}$ can be presented in the matrix forms. Explicit expressions for differential operators in (15) for the beams based on , high order, Timoshenko's and Euler-Bernoulli models are presented in [3-5].

Additional information related to theoretical aspects of the MEM/NEMS mathematical modeling and examples of numerical modeling can be found in [4,5].

KEYWORDS: nonlocal beam theory, MEMS, NEMS, actuators

- 1 Eringen A.C. *Microcontinuum Field Theories I. Foundations and Solids*, Springer, New York, 1999, 336p.
- 2 Zozulya V.V. Nonlocal theory of plates and shells based on Legendre's polynomial expansion. In: Altenbach H., et al (Eds). *Analysis of Shells, Plates, and Beams A State of the Art Report.*, Springer, New York, 2020, 441-470.
- 3 Zozulya V.V. Nonlocal theory of curved rods. 2-D, high order, Timoshenko's and Euler-Bernoulli models. *Curved and Layered Structures*, 2017, 4, 221–236.
- 4 Zozulya V.V., Saez A. A High order theory for arched Structures and its application for study of the electrostatically actuated MEMS devices. *Archive of Applied Mechanics*, 2014, **84**(7), 1037–1055,
- 5 Zozulya V.V., Saez A. A high order theory of a thermo elastic beams and its application to the MEMS/NEMS analysis and simulations. *Archive of Applied Mechanics*, 2015, **86**(7), 1255–1272.

M. Iurchenko¹, L. Saltyte-Vaisiauske², O. Cherednikov³

VIBRATIONS OF A HETEROGENEOUS ROD. INVERSE PROBLEM

¹*Klaipeda University,*

H. Manto, 84, 92294, Klaipeda, Lithuania;

e-mail: maarinaiurchenko@gmail.com

²*Klaipeda University,*

H. Manto, 84, 92294, Klaipeda, Lithuania;

³*State Scientific Research Institute of Armament and Military Equipment Testing and Certification, Ukraine*

Until recently inverse boundary problems of the theory of vibrations of thin elements with the local heterogeneity have not been the subject of systematic research in mechanics of the deformable bodies and related areas. This is largely due to the fact that the problems of this class are rather complicated, because they belong to the class of the so-called incorrect problems, for which it is not always possible to use classical methods. On the other hand more and more of the mathematical models take the agreement and reliability just due to the achievements of the theory of inverse problems. In this regard, a separate section of mechanics has emerged, with the subject being the study of the general theory of the above problems, including inverse problems of spectroscopy. Unlike direct problems, which are nowadays quite well studied, solving the inverse problems is associated with certain difficulties of analytical and computational nature, coming, in particular, from their nonlinearity and incorrectness. Following the tradition, we will define the inverse problems as, first and foremost, the problems of determining the geometry of the body with the known density and elastic properties under the condition of known (theoretically or experimentally determined) natural vibration of frequencies. If the geometry of the body is considered to be given then the spectral methods for solving of such a problem can determine the spatial distribution of its physical properties.

With careful analysis of scientific works of domestic and foreign authors we can conclude that strictly mathematically inverse problem has a solution only for the problem of small transverse vibrations of the string. In the work [1] solvability of an inverse boundary problem for the 2D equation of transverse oscillation of the rod. As noted in [2], in order to build the solution of inverse problems it is necessary to have more information about the object of study, for example, the location of heterogeneity and its approximate size. American authors [3,4] perform the attempt to find a solution to the inverse problem of fluctuations by the so-called low-frequency tomography method (approximation of functions of finite sums of Fourier series). However, the authors were unable to determine the initial coefficients of the Fourier series of odd numbers.

To consider the problem of determination of the heterogeneity of the elastic properties of the rod in case of the longitudinal vibrations as an example of the limited inverse boundary problem of vibrations theory one has to carry out numerical calculations and summarize their results in order to identify the size and location of the zones of heterogeneity.

Let us consider an elastic rod with the length l with constant cross section. We will assume that at some distance x_0 from rigidly fixed end face $x = 0$ there is a local area with the length 2δ , which modulus of elasticity is different to that of a constant value of elastic modulus E_0 outside this area (Fig.1)

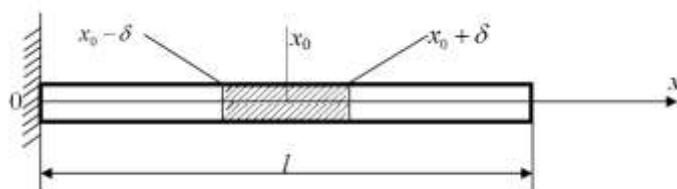


Fig 1. Rod with heterogeneity of elastic properties

We present the elastic properties of the rod as a piecewise continuous function of axial coordinates x in the following form:

$$\frac{E(x)}{E_0} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < x_0 - \delta, \\ 1 + \varepsilon, & x_0 - \delta < x < x_0 + \delta, \\ 1, & x_0 + \delta < x \leq l \end{cases} \quad (\varepsilon > 0) \quad (1)$$

while the density of the material of the rod is taken as constant throughout the volume $\rho = \text{const}$.

As it is known, the problem based on the own rod vibrations with heterogeneity is reduced to the integration of the generalized wave equation regarding the function of the shift of the rod points $u(x, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[E(x) \frac{\partial u_x}{\partial x} \right] + \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

regarding zero boundary conditions:

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x}|_{x=l} = 0 \quad (3)$$

Using this, we will give approximately lump heterogeneity of elastic properties of the rod in a segment of the Fourier series

$$\frac{E(x)}{E_0} = 1 + \varepsilon \sum_{n=0}^N a_n \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi x}{l}, \quad N = 20$$

where the coefficients of the Fourier series are given (1) as follows:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \sin[(n + \frac{1}{2}) \pi \bar{\delta}] \cos[(n + \frac{1}{2}) \pi \bar{x}_0], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Turning to the amplitude functions in the equation (2) and taking according to the terms of fixing the solution for amplitude displacements in a Fourier series $\hat{u}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{l}$, we will obtain a

homogeneous system of algebraic equations:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\lambda l}{\pi} \right)^2 - \left(m + \frac{1}{2} \right)^2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \alpha_{mn} a_n \right) \right] A_m - \\ & - \varepsilon \frac{(-1)^m}{2\pi} \left(m + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \gamma_{mn}^{(k)} a_n \right] A_k = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

where

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= \left[\frac{2}{n + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + 2m + \frac{3}{2}} - \frac{1}{n - 2m - \frac{1}{2}} \right] \\ \gamma_{mn}^{(k)} &= \left[\frac{1}{n - m + k + \frac{1}{2}} + \frac{1}{n + m - k + \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + m + k + \frac{3}{2}} - \frac{1}{n - m - k - \frac{1}{2}} \right] \\ \gamma_{mn}^{(k)} &= \alpha_{mn} \end{aligned} \quad (6)$$

Bar in the amount shows that the parts from $k = m$ have been omitted.

The roots of the determinant of the system (5) determine the natural frequencies of vibrations of homogeneous rod. Substituting the values a_n , which have been found by the formula (4) in (5) considering (6), for $N=20$, $k=0, 1, \dots, 20$, $m=0, 1, \dots, 20$, we will obtain numerical values of spectra of natural frequencies of vibrations of the heterogeneous rod. Herewith off diagonal elements of the determinant of equations system (5) can be ignored.

The problem of longitudinal vibrations of the rod with the heterogeneity while researching using the method of low-frequency tomography is reduced to the renovation of heterogeneity by comparing the frequency of

spectra of vibrations of the homogeneous rod, which have been found using the equation $\cos \lambda l = 0$ and experimental problems for the frequency of natural vibrations, which are measured on the rod with a given defect. Latest we will consider as "experimental", as they correspond to the data, which are usually obtained in the works of the nondestructive control of the objects. In this case the roots of characteristic equation are taken as the experimental data. Comparing these frequency spectra of the direct problem, we will obtain a system of algebraic equations relative to the Fourier coefficients of heterogeneity:

$$\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{n=0}^N (-1)^n \alpha_{mn} a_n = \left(\frac{\lambda m}{\pi}\right)^{2(\text{exp.})} - \left(\frac{\lambda m}{\pi}\right)^{2(\text{hom.})} \quad (7)$$

$m=0, 1, \dots, 20, N=20$.

It should be noted that the written above system of algebraic equations (7) is nondegenerate and has a unique solution.

Thus on the graph by means of the curve with the step the true dependence of heterogeneity is depicted (1), and by means of the a smooth curve - tomographic recovery of heterogeneity taking into account the restored coefficients of the Fourier series a_n , which have been found from the solution of the system of algebraic equations (7). It should be noted that the defect value which have been found by means of the reviewed method agrees with a certain heterogeneity (1).

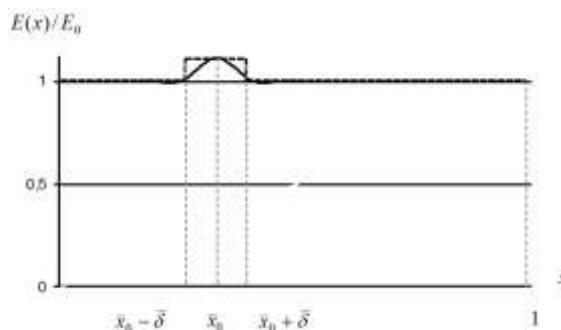


Fig. 2. Tomographic recovery of heterogeneity.

It should be noted that the chosen approach and results let us determine the nature and location of the zones of heterogeneity. For the rod with the specified conditions of fixing and heterogeneity of elastic properties, the mathematical bases of the method of low-frequency tomography are provided, which is based on the representation of the local heterogeneity segment of Fourier series. Exact and approximate solutions of the direct and inverse problems are built in case, when heterogeneity of elastic properties of the material of the rod is given in a segment of the Fourier series, but not with their own forms of the original problem, but in the full orthogonal system of union functions. Unlike the works of American authors [3,4], by means of more successful choice of their own functions, according to which there is a division of heterogeneity of elastic properties of the material rod, that are considered, it was possible to determine the initial coefficients of the Fourier series not only with even, but with odd numbers. The obtained results accurately coincided with theoretical calculations. This allows us to state that low-frequency tomography methods let us determine the location and nature of heterogeneity in case when only few first normal modes of vibrations are known.

KEYWORDS: inverse problem, low frequency tomography method, rod vibrations, heterogeneity of elastic properties.

REFERENCES

1. Huntul M. On the solvability of an inverse boundary problem for the equation of transverse oscillation of the rod. // Mathematical Methods in the Applied Sciences, - 2024, doi.org/10.1002/mma.10294
4. Nikitenko V. N., Iurchenko M. E. Opredelenie neodnorodnosti uprugikh svoistv pezokeramicheskogo sterzhnia v meste raspolozheniya dielektricheskoi otdelennoi chasti elektrodnogo pokrytiia metodom nizkochastotnoi tomografii. // Akustichnyi visnyk – 2003. - No 3. - P. 53–59.
3. Testardi L. R., Norton S. J. Acoustic dimensional resonance tomography: some examples in one-dimensional system. // J. Appl. Phys. – 1986. - No 1. - P. 55–58.
4. Testardi L. R., Norton S. J. Dimensional resonance tomography. // J. Appl. Phys.- 1984. - No 2. - P. 68–81.

E. Carrera¹, V.V. Zozulya^{1,2}

FREE VIBRATION OF COMPOSITE SHELLS OF REVOLUTION USING EQUIVALENT SINGLE LAYER APPROACH

¹ Department of Aeronautics and Aerospace Engineering, Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi, 24, 10129 Torino, Italy; e-mail : erasmo.carrera@polito.it;

²S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences, P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine; e-mail: vzozulyas@hotmail.com

Let an elastic shell of revolution occupy a region $V = \Omega \times [-h, h]$ in a 3-D Euclidian space, where Ω is the middle surface and $2h$ is the thickness of the shell. The classical theory of elasticity assumes that the body consists of interconnected points and continuously fills the occupied volume.

Following our previous publications, here we introduce vector notations and represent the above functions that determine the stress-strain state of elastic media in the vector form.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_1, u_2, u_3]^T, \quad \mathbf{p} = [p_1, p_2, p_3]^T, \quad \mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{13}]^T, \quad \boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{13}]^T \end{aligned} \quad (1)$$

These quantities are not independent, they are related by the equations of linear elasticity. Here we will show that all the equations of linear elastodynamics including boundary conditions can be obtained from the generalized variational principle (see Carrera and Zozulya [1, 2]). For this purpose, let us introduce the generalized functional, that depends on the functions $\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ defined above in the form

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_V \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{D} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}) + W(\boldsymbol{\epsilon}) - \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} + \frac{\rho}{2} \partial_t \mathbf{u} \cdot \partial_t \mathbf{u} \right) dV - \int_{\partial V_p} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dS - \int_{\partial V_u} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi}) dS \right) dt \quad (2)$$

Here \mathbf{D} is a matrix differential operator, whose form depends on chosen coordinate system (see Carrera and Zozulya [1, 2, 3] for references), ρ is a material density, $W(\boldsymbol{\epsilon})$ is a potential energy function.

Let us consider a variation of the functional (2), taking into account that all the above functions are independent.

In view of variations $\delta \mathbf{u}$, $\delta \boldsymbol{\sigma}$ and $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ are independent, all equations of elastodynamics and the corresponding boundary conditions follow from the equation (2), they have the form:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} &= \rho \ddot{\mathbf{u}}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}}, \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\psi} = 0, \quad \mathbf{u} - \boldsymbol{\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

In the case of linear orthotropic elastic media, potential energy function can be presented in the following general form

$$W(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \quad (4)$$

where \mathbf{C} is the 6×6 matrix of elasticity moduli.

In the case of isotropic material, the corresponding classical moduli of elasticity presented in (4) have the form

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu \quad (5)$$

where λ and μ are Lamé constants of classical elasticity.

For the case of a multilayer composite shell consisting of K laminas the dependence of the elastic moduli on the stiffness coordinate can be mathematically expressed as follows

$$C_{ij}(x_3) = \sum_{k=1}^K C_{ij}^k (H(x_3 - X_k - h_k) - H(x_3 - X_k + h_{k+1})) \quad (6)$$

Here C_{ij}^k is the value of the elastic moduli of the k lamina, h_k is the coordinate of the lower surface of the k lamina and $H(x)$ is the Heaviside unit step function.

Taking the derivative of the potential energy density function with respect to the strain $\boldsymbol{\epsilon}$ tensor and substituting the kinematic relations into the obtained result, the classical stress vector in the case of linear orthotropic elastic media can be presented in the following forms

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} \quad (7)$$

Substituting the equations for the matrix of material constants, and the stress vector (7), into the equations of motion (3) the differential in the form of displacements can be represented in a compact form as follows

$$\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (8)$$

In the same way, substituting the expressions for the stress vector from (7), one obtains the natural boundary conditions for the linear theory of elasticity in the form of a displacement vector

$$\mathbf{D}_n^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p} \quad (9)$$

In the case of free vibration with circular (natural) frequency ω vector of displacements can be presented in the form

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \quad (10)$$

Then substituting (10) in the equation of motion (8) we obtain the equation of free vibration in the form

$$\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{U} + \rho \omega^2 \mathbf{U} = 0 \quad (11)$$

This equation is used to model free vibration of elastic systems and analysis of the eigenvalue.

The CUF approach to the development of the theory of plates and shells of higher order consists in the following. The displacement $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ vector and its variation $\delta \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$, which are functions of curvilinear coordinates (x_1, x_2, x_3) are represented as series of functions of coordinate x_3 orthogonal to the middle surface of the shell, in the form

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{F}_{u,\tau}(x_3) \cdot \mathbf{u}_\tau(x_1, x_2), \quad \tau = 1, 2, \dots, M \quad (12)$$

Here $\mathbf{F}_{u,\tau}(x_3)$ are the basic functions of the thickness coordinates and $\mathbf{u}_\tau(x_1, x_2)$ vector of displacement. According to Einstein's notation, the repeated subscript τ indicates summation from 0 to M in the equations (12).

Substituting the displacement vector represented by series expansion (12) to the kinematic Cauchy relations (3), one can obtain the strain vector in the form

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{D}_{u,\tau} \cdot \mathbf{u}_\tau \quad (13)$$

Substituting kinematic Cauchy relations (13) into the generalized Hooke's law (7) the stress vector can be presented as

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}_{u,\tau} \cdot \mathbf{u}_\tau \quad (14)$$

Substituting the expressions for the strain vectors represented by equations (13), the stress vectors represented by equations (14) into (4), we obtain differential equations of motion for high-order elastic shells in the form of displacements. They can be represented in matrix form

$$\mathbf{L}_M^G \cdot \mathbf{u}_M^G - \mathbf{b}_M^G = \mathbf{M}_M^G \ddot{\mathbf{u}}_M^G \quad (15)$$

where the global matrix operator \mathbf{L}_n^G , the vectors of unknown functions \mathbf{u}_M^G and the right hand \mathbf{b}_M^G side have the form

$$\mathbf{L}_M^G = \begin{vmatrix} \mathbf{L}_{1,1}^{loc} & \dots & \mathbf{L}_{1,M}^{loc} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{L}_{M,1}^{loc} & \dots & \mathbf{L}_{M,M}^{loc} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{M}_M^G = \begin{vmatrix} \mathbf{M}_{1,1}^{loc} & \dots & \mathbf{M}_{1,M}^{loc} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_{M,1}^{loc} & \dots & \mathbf{M}_{M,M}^{loc} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{u}_M^G = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1^{loc} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_M^{loc} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{b}_M^G = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1^{loc} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_M^{loc} \end{vmatrix} \quad (16)$$

Matrices $\mathbf{L}_{\tau,s}^{loc}$ are the fundamental nuclei of the differential equations of equilibrium of elastic shells of higher orders.

For free vibration and eigenvalue analysis similarly to (11) from (15) we obtain

$$\mathbf{L}_M^G \cdot \mathbf{U}_M^G + \omega^2 \mathbf{M}_M^G \mathbf{U}_M^G = 0 \quad (17)$$

Here we consider as special cases of shells of revolution a laminate composite axisymmetric circular plate, cylindrical, and conical shells with three layers and angle-ply layup (0 / 90 / 0) under uniform symmetrical loading applied to the upper surface of the shell.

The layers have the same thickness $h_1 = 0.33h$, $h_2 = 0.33h$ and $h_3 = 0.33h$. The shells are fixed at the ends and the mechanical properties of the laminas are taken as in [4, 5]. The following mechanical properties of lamina are used:

$$E_1 = 25, E_2 = 1, G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.5, \nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0.25, \rho = 1 \quad (18)$$

Here E_1, E_2 are Young's moduli, G_{12}, G_{13}, G_{23} are the shear moduli, ν_{12}, ν_{13} are Poisson's ratios and ρ is a density of material.

We consider a higher-order theory for spherical, parabolic, elliptical, hyperbolic, catenoidal, toroidal and pseudospherical shells. All the mentioned above composite layered shells of revolution are solved numerically using the computer algebra program **Mathematica**. The first eight axisymmetric eigenvectors and eigenvalues are calculated numerically using the built-in functions **NDEigensystem** and **NDEigenvalues**. For all types of geometries under consideration, eigenvalues and eigenmodes are presented in the form of tables and graphs. The calculation results can also be used as reference examples in finite element analysis of higher-order elastic shells of revolution.

KEYWORDS: eigenvalues, natural frequency, multilayer shell of revolution, CUF, series expansion, higher order theory.

1. Carrera E., Zozulya V.V. Carrera Unified Formulation (CUF) for the Shells of Revolution. I. Higher Order Theory. *Acta Mechanica*, 2023, **234**, 109-136.
2. Carrera E., Zozulya V.V. Carrera Unified Formulation (CUF) for the Shells of Revolution. II. Navier close form solutions. *Acta Mechanica*, 2023, **234**, 137-161.
3. Carrera E., Zozulya V.V. Carrera Unified Formulation (CUF) for the Shells of Revolution. Numerical Evaluation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2024, **31**(7), 1597-1619.
4. Carrera E., Zozulya V.V. Carrera Unified Formulation (CUF) for the Composite Shells of Revolution. Equivalent single layer models. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2024, **31**(1), 22-44.
5. Carrera E., Zozulya V.V. Carrera Unified Formulation (CUF) for the Composite Plates and Shells of Revolution. Layer-Wise Models. *Composite Structures*, 2024, **334**, 117936, 1-39.

Я. Л. Іваницький¹, О. П. Максименко¹, С. Т. Штаюра¹, М. В. Гриненко¹

**МЕТОДОЛОГІЯ ОЦІНЮВАННЯ ОПІРНОСТІ МАТЕРІАЛУ РУЙНУВАННЮ
ЗА ДІЇ СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ ТА ВОДНЮ**

¹*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАНУ,
бул. Наукова, 5, 79060, Львів, Україна;
e-mail: ivayar@ukr.net*

Відомо що водень взаємодіючи з металами негативно впливає на зміну фізично-механічних характеристик [1]. В процесі експлуатації елементів газотранспортної системи водень дифундує у метал в атомарному стані та молізується в об'ємах, створюючи при цьому додаткові внутрішні напруження [2-4]. Існуючі силові та деформаційні підходи до оцінки впливу водню на основі класичних діаграм деформування не враховують зміну опірності матеріалу руйнуванню в локальних об'ємах. Тому для оцінки та встановлення інваріантних характеристик опірності матеріалу деформуванню та руйнуванню при дії силового навантаження і водневого середовища запропоновано здійснювати на основі енергетичного підходу.

Згідно даного підходу оцінку опірності матеріалу руйнування здійснюють на основі визначені величини питомої енергії руйнування, як інваріантної характеристики. Даний підхід передбачає побудову рівноважних діаграм $\langle S_i - e_i \rangle$ (S_i – істинні напруження, e_i – істинні деформації).

Величини істинних напружень та деформацій, які визначаються з врахуванням зміни площини поперечного перерізу та видовження в локальному об'ємі на базі 0,5 мм. Зміну величини видовження визначають з використанням методу оптико-цифрової кореляції спекл-зображеній [2]. Величину питомої енергії руйнування визначають як площину під діаграмою руйнування $\langle S_i - e_i \rangle$

$$W_c = \int_0^{e_c} S(e) de, \quad (1)$$

де e_c – критична деформація руйнування.

Експериментальні дослідження проводили на циліндричних трубчастих зразках зі сталі 45. Середня частина зразка має гладку циліндричну поверхню. Для навантаження на кінці зразка виконано різьбу М48x2.

Попереднє пружно-пластичне деформування здійснювали шляхом продавлювання сферичної кульки в середній частині зразка. При цьому реєстрували 2d переміщення на гладкій деформівній поверхні зразка за допомогою оптико-цифрового корелятора спекл-зображеній та розрахували величину істинної деформації на базі 0,5 мм з врахуванням зміни деформації у двох напрямках. За зміни розміру внутрішнього діаметру зразка отримували різну величину попередньої пружно-пластичної деформації.

Підготовлені зразки за різної попередньої деформації наводнивали в камері при температурі 400 °C за тиску водню 6 МПа за різного часу витримки. Зразки випробовували на розривній машині за осьового розтягу з використанням оптико-цифрової кореляції зображень для реєстрації 2D переміщень локальному об'ємі зразка та навантаження. За результатами досліджень побудовано діаграму «істинні напруження – істинні

деформації» та визначено питому енергію руйнування W_c . Після механічних випробувань з використанням газоаналізатора LEKO DH-603 і опційного розжарюючого модуля визначили концентрацію залишкового водню. Концентрацію поглинутого водню визначали для зруйнованих фрагментів зразків з різним ступенем пружно-пластичного пошкодження.

На основі аналізу встановлено, що для зразків наводнених без попереднього їх деформування величина граничної деформації зменшується на 12%. Величина енергії пружно-пластичного руйнування зменшується на 10%. При цьому величина істинних напружень руйнування практично не змінюється. При збільшенні часу наводнювання зразків без попередньої деформації величина питомої енергії руйнування змінюється незначно. Встановлено, що концентрація водню для зразків без попередньої деформації зменшується, тобто водень дифундує із металу. При попередньому пружно-пластичному деформуванні до величини істинної деформації 75% та наступним насиченням воднем питома енергія руйнування зменшується в 6-7 разів. Зокрема гранична локальна деформація зменшується у 8-9 разів у порівнянні з недеформованим металом.

Величина істинних напружень руйнування практично незмінна як для ненаводнених, так і для наводнених зразків. Концентрація поглинутого водню для попередньо пружно-пластично деформованих зразків у десятки разів перевищує величину концентрації у порівнянні з вихідним матеріалом без попереднього деформування. Причому величина поглинутого водню для попередньо деформованих зразків до 75% практично не змінюється після вилежування на повітрі за кімнатних умов впродовж 60 днів.

Зі збільшенням часу наводнювання зразків концентрація поглинутого водню зростає.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: питома енергія руйнування, фрагментація матеріалу, оболонкові конструкції, наводнення, пружно-пластичне деформування, окрихчення металу

Матеріали підготовлено за грантової підтримки Національного фонду досліджень України в рамках проекту № 2023.04/0105 «Розроблення технології заданої фрагментації оболонкових конструкцій за динамічного навантаження».

- 1 Панасюк В.В., Дмитрах І.М. Вплив корозійних середовищ на локальнє руйнування металів біля концентраторів напружень. Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка . 199-341с.
- 2 Evolution of the concentration of hydrogen in the process zone near the crack top / Ya. L. Ivanytskyi, O. V. Hembara, O. D. Smiyn, and M. Kowalik / Material Science – 2011 – 46 N 6 – p. 769-774 DOI: 10.1007/1103-011-9351-3.
- 3 Determination of the local strains near stress concentration by the digital image correlation technique / Ya. L. Ivanytskyi, Yu. V. Molkov, P. S. Kun', Lenkovskiy and M. Wojtowicz / Material Science – 2015 – 50 N 4 p. 488-495.
- 4 IAEA-TECDOC-1668. Assessment and Management of Ageing of Major Nuclear Power Plant Components Important to Safety Stream Generators – Vienna: IAEA- 2011- 274p.

Ya. L. Ivanytskyi¹, O. P. Maksymenko¹, S. T. Shtayura¹, M. V. Hrynenko¹

**METHODOLOGY FOR ASSESSING MATERIAL RESISTANCE TO FRACTURE
UNDER MECHANICAL LOAD AND HYDROGEN EXPOSURE**

¹G.V. Karpenko Physico-Mechanical Institute NASU, Naukova St., 5, 79060, Lviv, Ukraine;
e-mail: ivayar@ukr.net

A methodology for assessing the resistance of a material to destruction under a force load and a hydrogen medium based on an energy approach has been developed. Changes of specific energy of destruction depending on value of preliminary elastic-plastic deformation under different concentration of absorbed hydrogen are established.

Я. Л. Іваницький¹, С. Т. Штаюра¹, М. В. Гриненко¹, О. П. Максименко¹

ОЦІНЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ В ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЯХ ЗА СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ ТА ДІЇ ВОДНЮ

¹*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАНУ,
бул. Наукова, 5, 79060, Львів, Україна;
e-mail: ivayar@ukr.net*

Розроблено алгоритм моделювання методом скінчених елементів, який дозволяє аналізувати напружене-деформований стан і процес нагромадження пошкоджень у циліндричній оболонці, який реалізовано за допомогою програмного забезпечення Ansys.

Для досягнення високої точності та адекватності отриманих результатів у розрахунках застосовано енергетичний критерій, який дозволяє врахувати складні взаємодії та процеси, що відбуваються в матеріалі під час навантаження [1, 2]. Критерій руйнування локального об'єму елемента залежить від зовнішнього навантаження, зокрема врахування зміни істинних напружень та деформацій в локальному об'ємі, температури та концентрації водню. Повні деформації рівні сумі деформацій за напруженням, температурою та концентрацією водню. Цей підхід дозволив отримати більш точну і реалістичну картину поведінки матеріалу під дією різних навантажень.

Встановлено, що осьове напруження, яке виникає внаслідок дії внутрішнього тиску, розподіляється рівномірно по всій товщині стінки оболонкових конструкцій. Це явище пояснюється тим, що осьове напруження в тонкостінних конструкціях визначається лише рівнем внутрішнього тиску та геометрією оболонки, але не залежить від координати в межах товщини стінки. Таким чином, для всіх точок стінки циліндра значення осьового напруження залишається постійним, що є характерною рисою для оболонкових конструкцій.

Подібно до осьового, оболонкове (або обгорткове) напруження також розподіляється рівномірно по всій товщині стінки. Це напруження виникає внаслідок дії внутрішнього тиску на оболонку і спрямоване в тангенціальному напрямку вздовж кола циліндра. Рівномірний розподіл напруження пояснюється тим, що в тонкостінних оболонках деформації є однорідними по товщині, що призводить до однакових значень напружень у будь-якій точці стінки.

Обчислення показали, що наводнювання попередньо деформованих зразків суттєво впливає на їхні істинні діаграми деформування. Цей вплив проявляється найбільш помітно у значному зменшенні деформації руйнування. Зі збільшенням часу наводнювання цей ефект посилюється, що свідчить про важливість контролю за вмістом водню в матеріалі для забезпечення його довговічності та надійності.

Встановлено, що для зразків наводнених протягом 48 годин, напруження руйнування у вихідному стані практично не змінюється в порівнянні з ненаводненими зразками. При цьому величина критичної деформації зменшується на 18%. В пружній ділянці деформування вплив водню не спостерігається, що вказує на те, що наводнювання в першу чергу впливає на пластичність матеріалу.

Попереднє деформування зразків також суттєво впливає на їхню міцність та пластичність. Зокрема, збільшення величини попереднього деформування до 10% призводить до зростання величини критичної напруження на 6%, однак, одночасно з цим, величина критичної деформації зменшується на 64%. Це свідчить про те, що попереднє

деформування сприяє підвищенню опору матеріалу до деформацій, але знижує його пластичність.

При збільшенні попереднього деформування до 50% спостерігається зменшення напруження руйнування та деформації на 16%. Це свідчить про те, що значне попереднє деформування може привести до зниження загальної міцності матеріалу, зменшуєчи його опірність витримувати великі навантаження без руйнування.

Проведено експериментальні дослідження з визначення напружено-деформованого стану в стінці циліндричної оболонки зі сталі 45 при її пружному та пружно-пластичному деформуванні шляхом продавлювання сферичної кулі у внутрішній діаметр. Для цього виготовляли зразки циліндричної форми зовнішнім діаметром 30 мм та висотою 60 мм. Внутрішній діаметр зразків становив: 21, 22 та 22.5 мм. Вдавлюючи сферичну кулю діаметром 22 мм у внутрішній діаметр отримували у стінці циліндричного зразка різний пружно-пластичний стан матеріалу.

Для визначення величини напруження та деформацій при вдавлюванні сферичної кулі використовували оптико-цифровий корелятор. В процесі вдавлювання сферичної кулі на основі циліндричної поверхні зразка реєстрували переміщення у двох координатах для визначення величини локальної деформації на базі 0.5 мм.

Величину істинних напружень S_i для сталі 45 визначали при випробуванні циліндричних зразків і реєстрували зміни поперечного перерізу та величини видовження на базі 0.5 мм з використанням оптико-цифрового корелятора. За результатами досліджень будували істинні діаграми руйнування та визначали питому енергію руйнування сталі 45. За величиною деформації визначеною на поверхні при вдавлюванні сферичної кулі у трубчастий зразок із істинною діаграмою руйнування зразків сталі 45 визначали величину істинних напружень у стінці. Таким чином встановлювали залежність зміни енергії деформування циліндричної оболонки при вдавлюванні сферичної кулі.

Проведено порівняння отриманих результатів розрахунку за допомогою методу скінченних елементів та експериментальних досліджень.

КЛЮЧОВІ СЛОВА : оболонкові конструкції, наводнення, пружно-пластичне деформування, окрихчення металу, метод оптико-цифрової кореляції

Матеріали підготовлено за грантової підтримки Національного фонду досліджень України в рамках проекту № 2023.04/0105 «Розроблення технології заданої фрагментації оболонкових конструкцій за динамічного навантаження».

1. Maciej Dutkiewicz, Oksana Hembara, Olha Chepil, Mykhailo Hrynenko, Taras Hembara. A New Energy Approach to Predicting Fracture Resistance in Metals // Materials 2023, 16(4), 1566; <https://doi.org/10.3390/ma16041566>.
2. Maciej Dutkiewicz, Oksana Hembara, Yaroslav Ivanytskyi , Mykola Hvozdiuk, Olha Chepil, Mykhailo Hrynenko, Nazar Hembara. Influence of hydrogen on the fracture resistance of pre-strained steam generator steel 22K // Materials 2022, 15(19), 6596; <https://doi.org/10.3390/ma15196596>.

Ya.L. Ivanytskyi¹, S.T. Shtayura¹, M.V. Hrynenko¹, O.P. Maksymenko¹

EVALUATION OF THE STRESS-STRAIN STATE IN SHELL STRUCTURES UNDER MECHANICAL LOADING AND HYDROGEN EXPOSURE

¹G.V. Karpenko Physico-Mechanical Institute NASU, Naukova St., 5, 79060, Lviv, Ukraine;
e-mail: ivayar@ukr.net

The finite element modeling algorithm developed in this study analyzes the stress-strain state and damage accumulation in cylindrical shells using Ansys. The model accurately replicates experimental conditions, including pre-deformation and hydrogenation. Results revealed uniform stress distribution across the shell thickness and highlighted the significant impact of hydrogenation and pre-deformation on material strength and ductility, validating the model's predictive effectiveness.

О.О. Лук'янченко¹, О.В. Геращенко¹, О.В. Костіна¹, О.М. Палій¹

**ЧИСЕЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ НЕДОСКОНАЛОСТЕЙ ФОРМИ
НА ДИНАМІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК**

*¹Київський національний університет будівництва і архітектури,
просп. Повітряних сил, 31, 03037, Київ, Україна;
[email: lukianchenko.oo@knuba.edu.ua](mailto:lukianchenko.oo@knuba.edu.ua)*

Реальні оболонкові конструкції мають неминучі відхилення від ідеальної форми, викликані дефектами виготовлення, транспортування і монтажу. Початкова недосконалість оболонок в процесі експлуатації змінюється і кількісно збільшується, що може привести до аварійних ситуацій. Важливо забезпечити надійність оболонок ще на стадії проектування з урахуванням змодельованих геометричних недосконалостей, щоб на стадії експлуатації оцінити вплив реальних недосконалостей на несучу здатність оболонок. Актуальним залишається питання дослідження впливу недосконалостей форми на динамічну поведінку оболонок [1-7].

Розроблена чисельна методика дослідження впливу геометричних недосконалостей на динамічні характеристики пружних оболонок, яка базується на методі скінчених елементів, обчислювальних процедурах програмного комплексу NASTRAN та комп'ютерному моделюванні недосконалостей різної амплітуди у вигляді форм власних коливань, втрати стійкості, деформування в граничному стані або при дії експлуатаційних навантажень за допомогою спеціально створеної програми. У випадку моделювання реальних недосконалостей застосовуються сплайн-криві і сплайні поверхні програмного комплексу. Чисельна методика апробована в дослідженнях власних і вимушених, в тому числі параметричних, коливань оболонок з різними недосконалостями форми.

Досліджено вплив змодельованих геометричних недосконалостей на частоти і форми власних коливань півсферичної пружної оболонки. Стінка півсфери представлена у вигляді сукупності плоских чотирьохкутних та трикутних оболонкових скінченннях елементів з шістьма ступенями вільності у вузлі. Недосконалість подана у вигляді нижчої форми втрати стійкості півсфери з ідеальною поверхнею від статичної дії поверхневого тиску, яка отримана при розв'язанні задачі стійкості (Buckling). Амплітуда недосконалостей моделювалась пропорційно до товщини стінки півсфери. Розглянуто два види кріплення вузлів кромки півсфери: жорстке і шарнірне. Модальний аналіз оболонки виконано за допомогою розв'язання задачі на власні значення методом Ланцюша (Normal Modes). Спостерігався значний вплив амплітуди недосконалості на частоти і форми власних коливань півсфери, що свідчило про ефективність такої моделі.

Досліджені власні і вимушенні коливання оболонки нафтоналивного резервуару з реальними і змодельованими недосконалостями форми. Реальні недосконалості стінки отримано в результаті теодолітної зйомки фактичних радіальних та кутових відхилень точок перетину твірних із горизонтальними границями поясів резервуару. Моделювання циліндричної оболонки зі змінною по висоті товщиною виконано за допомогою чотирьохкутних оболонкових елементів з шістьма ступенями вільності у вузлі. Накладено обмеження на радіальні та тангенціальні переміщення вузлів верхньої кромки оболонки, вузли нижньої кромки жорстко закріплені.

На першому етапі досліджені динамічні характеристики оболонки з реальними недосконалостями. Виконано модальний аналіз оболонки за допомогою розв'язання

задачі на власні значення методом Ланцоша (Normal Modes), досліджено переходний процес періодичних коливань оболонки при дії поверхневого тиску за допомогою методу прямого інтегрування Рунге-Кутти четвертого порядку (Direct Transient), виконано прямий частотний аналіз (Direct Frequency) усталеного відгуку оболонки на періодичне збурення з урахуванням перших десяти форм і частот власних коливань оболонки. Дослідження показали, що форми власних коливань оболонки з реальними недосконалостями мали локальні нерегулярні деформації в місцях максимальних радіальних відхилень від вертикаль на відміну від регулярних деформацій для всіх форм коливань оболонки з ідеальною поверхнею. Реальні недосконалості зменшили і розщепили частоти власних коливань досконалої оболонки, при цьому не вплинули на їх щільний розподіл. Тривалість переходного процесу та коефіцієнт динамічності збільшились за рахунок наявності недосконалостей в стінці резервуара. При дослідженні усталеного руху реальні недосконалості збільшили амплітуду максимальних радіальних вузлових переміщень оболонки та зменшили відповідну частоту збурення.

На другому етапі досліджено динамічні характеристики оболонки резервуара зі змодельованими недосконалостями різної амплітуди у вигляді нижчої форми втрати статичної стійкості ідеальної оболонки від дії поверхневого тиску (Buckling). Виконано модальний аналіз оболонки методом Ланцоша (Normal Modes) і нелінійний динамічний аналіз оболонки методом Н'юмарка (Nonlinear Direct Transient) при дії поверхневого тиску, залежного від часу його дії. Дослідження показали, що вплив амплітуди недосконалості на власну частоту оболонки незначний, при цьому відповідні форми власних коливань мали однакову кількість півхвиль в коловому напрямку з незначно зменшеними амплітудами. Однак, спостерігався значний вплив недосконалостей на вимушені коливання оболонки та її напружено-деформований стан.

Виконано модальний аналіз оболонки паливного резервуару з реальними і змодельованими недосконалостями форми при дії сталої складової осьового навантаження, яке є параметричним. Циліндрична оболонка сталої товщини змодельована у вигляді сукупності плоских чотирьохкутних оболонкових скінчених елементів з шістьма ступенями вільності у вузлі. За модель геометричних недосконалостей прийнята перша форма власних коливань ідеальної оболонки (Normal Modes), яка співпала з нижчою формою втрати стійкості оболонки з ідеальною поверхнею від статичної дії поверхневого тиску (Buckling). Обмеження накладені на радіальні та тангенціальні переміщення вузлів верхньої кромки оболонки, вузли нижньої кромки жорстко закріплені. Осьове навантаження подано у вигляді зосереджених сил, прикладених до вузлів верхньої кромки оболонки. Розв'язані нелінійна задача статики оболонки без і з недосконалостями форми при дії осьового навантаження методом Ньютона-Рафсона (Nonlinear Static), задача на власні коливання без і з урахуванням попередньо напруженого стану оболонки методом Ланцоша (Normal Modes і Param Normal Modes). Оцінено вплив реальних і змодельованих недосконалостей на частоти і форми власних коливань оболонки, значення критичного осьового навантаження та відповідні форми втрати динамічної стійкості оболонки.

Досліджено динамічні характеристики власних коливань довгої гнучкої циліндричної оболонки з різними моделями геометричних недосконалостей при динамічній дії пар сил. Стінка оболонки змодельована сукупністю плоских прямокутних скінчених елементів з шістьма ступенями вільності у вузлі в циліндричній системі координат. Дія пар сил представлена у вигляді зосереджених сил, які розподілені у вузлах торців оболонки за законом косинуса згідно представленню А.С. Вольміра. Для створення скінченноелементної моделі оболонки розв'язані задача стійкості оболонки з ідеальною поверхнею в лінійній постановці методом Ланцоша (Buckling), нелінійна задача статики за допомогою методу Ньютона-Рафсона (Nonlinear Static) і задача на власні коливання методом Ланцоша (Normal Modes). Отримано біfurкаційні форми втрати стійкості оболонки з ідеальною поверхнею, форма деформування в граничному стані у вигляді довгих півхвиль в стиснутої зони стінки і частоти власних коливань. За першу модель недосконалості прийнята форма деформування оболонки в граничному стані у вигляді довгих півхвиль. За другу модель геометричних недосконалостей прийнята перша форма власних коливань оболонки.

Амплітуда недосконалостей для двох моделей задавалась пропорційно до товщини оболонки. Дослідження власних коливань довгої гнутої оболонки з різними моделями геометричних недосконалостей методом Ланцюша (Normal Modes) виявили одинаковий вплив недосконалостей на частоти і форми власних коливань. В подальшому важливо дослідити вимушені коливання та динамічну стійкість довгої гнутої циліндричної оболонки при дії пар сил, щоб оцінити яка модель недосконалостей є більш небезпечною.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: метод скінчених елементів, пружні оболонки, недосконалість форми, динамічні характеристики

1. Гавриленко Г.Д. Несущая способность несовершенных оболочек. Моногр. инст. механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, 2007. – 294с.
2. Григорюк Е.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 359 с.
3. Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей. – К.: Академпериодика, 2006. – 472 с.
4. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Дехтярюк Е.С., Лизунов П.П. Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах. Львів, Вища школа, 1983. – 287 с.
5. Луговой П.З. Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Динаміка конструктивно-неоднорідних оболонкових структур: монографія. – К.: Ліра-К, 2022. – 326 с.
6. Лук'янченко О.О., Геращенко О.В., Палій О.М. Нелінійний динамічний аналіз оболонки резервуара зі змодельованими недосконалостями форми // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 109.. – Р. 360-368.
7. Lukianchenko O.O., Geraschenko O.V., Kostina O.V., Paliy O.M. Choice the shape imperfections model in dynamics problems of a long flexible cylindrical shell subjected to force couples // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue. 111. – P. 65-73.

O.O. Lukianchenko¹, O.V. Geraschenko¹, O.V. Kostina¹, O.M. Paliy¹

**NUMERICAL INVESTIGATIONS OF THE INFLUENCE OF SHAPE IMPERFECTIONS
ON THE DYNAMIC CHARACTERISTICS OF ELASTIC SHELLS**

¹Kyiv National University of Construction and Architecture
Air Forces Ave., 31, 03037, Kyiv, Ukraine;
e-mail: lukianchenko.oo@knuba.edu.ua

The influence of real and modelled shape imperfections on natural and forced vibrations of elastic shells was researched. The numerical approach was based on the finite element method, calculable procedures of the NASTRAN software and the specially created program of computer design of shape imperfections with different amplitude and forms.

I. O . Охтень¹

ЗАСТОСУВАННЯ ОБОЛОНКОВИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В ДОСЛІДЖЕННЯХ СТІЙКОСТІ СТЕРЖНІВ ВІДКРИТОГО ПРОФІЛЮ З НЕДОСКОНАЛОСТЯМИ

*¹Науково-дослідний інститут будівельної механіки
Київського національного університету будівництва і архітектури,
просп. Повітряних Сил, 31, 03037, Київ, Україна
e-mail: iokhten@gmail.com*

У сучасному будівництві широке застосування знайшли тонкостінні холодногнуті стержні відкритого профілю, які використовуються як елементи несучих та самонесучих конструкцій. Вони поєднують у собі економічно ефективні вагові характеристики, високі механічні властивості та мають переваги у виготовленні, монтажі та експлуатації.

Розрахунки тонкостінних стержнів відкритого профілю базуються на таких основних теоріях: безсувна теорія В.З. Власова, напівзсува теорія В.І. Слівкера, зсува теорія.

Через складність аналітичного розв'язку задачі стійкості тонкостінних стержневих конструкцій все частіше застосовуються чисельні методи. Метод скінченних елементів є одним з більш поширених методів будівельної механіки, який реалізовано в багатьох програмних комплексах SCAD, LIRA, ANSYS, NASTRAN та інших. На даний час застосовують такі скінченно-елементні моделі стержня [5]:

- Бістержнева модель А.В. Перельмутера, А.І. Слівкера. Така модель побудована для стержневого елементу з шістьма ступенями вільності у вузлах на основі ряду енергетичних міркувань. Енергія деформації в бістержневій моделі є сумою енергій в основному і фіктивному стержнях, розглянутих окремо.
- Модель з використанням плоских оболонкових скінченних елементів з шістьма ступенями вільності у вузлі;
- Модель з використанням плоских скінченних елементів з додатково введеним зв'язком.

З практики відомо, що геометричні недосконалості форми, які виникають при виготовленні, транспортуванні і експлуатації тонкостінних стержнів, значно знижують їх несучу здатність.

Основи розрахунку стійкості тонкостінних стержнів з урахуванням недосконалостей закладено в роботі 1951 року L. Donnell i C. Wan [1]. Дослідження несучої здатності тонкостінних стержнів з геометричними недосконалостями виконано в роботах S.Y. Lu, W. Nash, L.H.N. Lee, W. Koiter, J.W. Hutchinson, G. Simitses, Г.Д. Гавриленка, N. Tsouvalis, М.Д. Корчака, В.А. Баженова, Є.О. Гоцуляка, Ю.М. Муляра, В.О. Рибаков, О.О. Лук'янченко та ін. Історію розвитку та сучасні методики до врахування початкових недосконалостей форми у тонкостінних стержнях відкритого профілю викладено у статті [6].

Актуальною проблемою будівельної механіки є забезпечення міцності, жорсткості і стійкості стержневих конструкцій з холодногнутих профілів з урахуванням недосконалостей їх форми. Роботи [2-4] присвячені дослідженню стійкості тонкостінних пружних стержнів відкритого профілю з недосконалостями форми. На основі методу скінченних елементів і обчислювальних процедур програмного комплексу NASTRAN створена нова чисельна методика дослідження стійкості стержнів відкритого профілю

з геометричними недосконалостями різної амплітуди і форми. Розроблено алгоритм комп'ютерного скінченно-елементного моделювання тонкостінних стержнів відкритого профілю у вигляді сукупності плоских оболонкових елементів. Створено програмне забезпечення, яке адаптоване до обчислювального комплексу NASTRAN, для моделювання геометричних недосконалостей різної амплітуди у вигляді місцевих і загальних форм втрати стійкості стержнів з урахуванням депланації їх поперечного перерізу. Ефективність моделювання стержнів відкритого профілю у вигляді сукупності оболонкових скінчених елементів підтверджена розв'язанням тестової задачі стійкості багатопрольотних прогонів покриття торговельного комплексу в м. Миколаєві з різними варіантами розкріплення від дії вертикального навантаження. Дослідженю стійкості стержня відкритого профілю з недосконалістю форми в нелінійній постановці методом Ньютона-Рафсона присвячена друга тестова задача. Підтверджена співпадіння отриманих результатів з результатами інших авторів і експериментами. Досліджена стійкість тонкостінних стержнів відкритого профілю різного виду з недосконалостями форми при поздовжньому навантаженні в лінійній постановці методом Ланцоща, в геометрично нелінійній постановці – методом Ньютона-Рафсона. Досліджено сумісний вплив амплітуди геометричних недосконалостей та ексцентриситету прикладання поздовжньої сили на нелінійне деформування і стійкість тонкостінних стержнів відкритого профілю реальної конструкції. Представлено залежності критичних значень навантажень та форм втрати стійкості від амплітуди недосконалостей стержнів та ексцентриситету прикладання поздовжніх сил. Підтверджено вплив моделі і амплітуди геометричних недосконалостей на стійкість тонкостінних стержнів відкритого профілю. Протягом розгляду вивчено відхилення у діючих державних нормативних документах.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тонкостінні пружні стержні відкритого профілю, недосконалість форми, статична стійкість, метод скінчених елементів.

1. Доннелл Л.Г., Ван К. Влияние неправильностей в форме на устойчивость стержней и тонкостенных цилиндров при осевом сжатии // Механика. Сб. перев. и обз. иностр. период. лит-ры. – 1951, №408, С.91 – 107.
2. Лук'янченко О.О., Охтень І.О. Комп'ютерне моделювання в задачах стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю з недосконалостями форми // Зб. Управління розвитком складних систем. К.: КНУБА. – 2021. – Вип. 47. – С. 95-101. (Index Copernicus).
3. Охтень І.О., Лук'янченко О.О., Козак А.А. Аналіз втрати стійкості тонкостінних стержнів відкритого профілю з урахуванням недосконалостей форми // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех.збірн. – К.: КНУБА, 2022. – Вип. 108. – С. 360-368. (Web of Science).
4. Охтень І.О. Стійкість тонкостінних стержнів відкритого профілю з недосконалостями форми. Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. Київ – 2023.
5. Юрченко В.В., Перельмутер А.В. Несуча здатність стержневих елементів конструкцій із холодногнутих профілів – К.: Каравела, 2020 – 310 с.
6. Farzani S., Louhghalam A., Schafer B. W., Tootkaboni M. Geometric imperfection models for CFS structural members, Part I: Comparative review of current models // Thin-Walled Structures. – 2023. – №186.

I.O. Okhten

APPLICATION OF SHELL FINITE ELEMENTS IN STUDIES OF THE STABILITY OF OPEN-PROFILE BEAMS WITH IMPERFECTIONS

*Research Institute of Structural Mechanics,
Kyiv National University of Construction and Architecture
Povitryanykh Syl Ave., 31, 03037, Kyiv, Ukraine;
e-mail: iokhten@gmail.com*

A numerical methodology for researching the stability of bars with geometric imperfections of various amplitudes and forms has been developed based on the finite element method and computational procedures of the NASTRAN software complex. The influence of the amplitude, model of imperfections and the eccentricity of the forces on the critical values of the loads, the nonlinear behavior and the form of the loss of stability of the bars was evaluated.

**О.Я.Григоренко¹, М.Ю.Борисенко¹, О.В.Бойчук²,
Н.П.Борейко¹**

**ВІЛЬНІ КОЛІВАННЯ ШЕСТИКУТНИХ ПЛАСТИН
З РІЗНИМИ ВАРІАНТАМИ ЗАКРІПЛЕННЯ КРАЇВ**

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАНУ,*

бул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com; mechanics530@gmail.com;

nataliya.petrivna@ukr.net;

²*Миколаївський національний аграрний університет,*

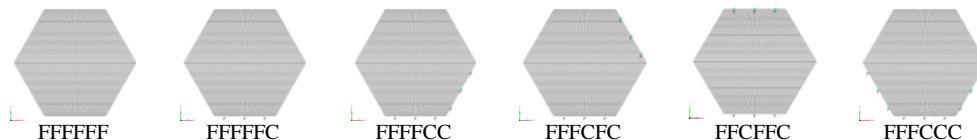
бул. Георгія Гонгадзе, 9, 54020, Миколаїв, Україна;

e-mail: boychuklena27@gmail.com

Багатокутні пластини є поширеними елементами різних тонкостінних конструкцій, будівель, корпусів машин та інженерних споруд, які піддаються статичним та динамічним навантаженням, тому при їх проектуванні необхідно проводити попередні розрахунки на стійкість та міцність, а в реальних умовах експлуатації потрібно уникати резонансних режимів, що спричиняє руйнування. При конструюванні таких складних споруд використовують комбінації пластини різної форми з різними граничними умовами. Постає актуальна проблема механіки та прикладної математики про поширення аналітичних, чисельних та експериментальних методів до розв'язання задач динаміки пластин різної форми. В сучасній науці для розв'язування даної задачі широко застосовують різноманітні комп'ютерні програмні комплекси автоматизованого проектування, які основані на різних чисельних методах, наприклад, на методі скінчених елементів (МСЕ). Одним з таких комплексів є FEMAP з розв'язувачем NX Nastran [1]. Запропонований програмний комплекс апробовано на багатьох задачах динаміки пластин з отвором та без з різними варіантами закріплення [2, 3]. В [2] розглянуті вільні коливання ізотропних шестикутних пластин різної товщини з вільними краями на основі двох різних підходів, а отримані результати розрахунків підтверджуються експериментально [4].

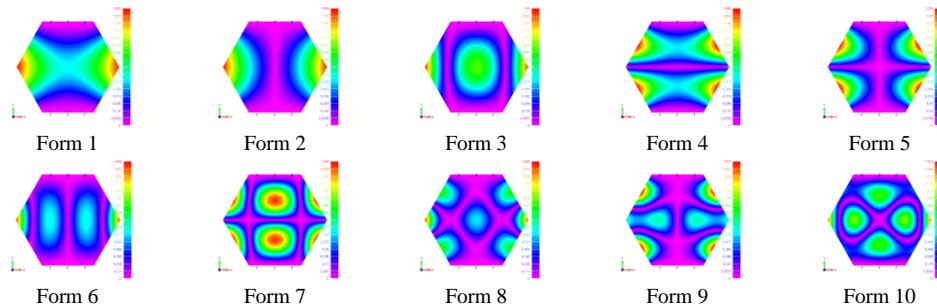
Метою даного повідомлення є розрахунок методом скінчених елементів частот та форм вільних коливань ізотропних тонких шестикутних пластин при різних варіантах жорстко закріплених та вільних країв.

За допомогою FEMAP побудовано геометрію шестикутної пластини правильної форми зі стороною $a=240 \text{ мм}$, товщина пластини $h=4 \text{ мм}$ ($h/a=1/60$). Матеріалом пластини задавався алюміній: модуль Юнга $E=71 \text{ ГПа}$, коефіцієнт Пуассона $\nu=0,33$, густина $\rho=2710 \text{ кг}/\text{м}^3$. Пластина досліджувалась при різних варіантах жорстко (C) закріплених країв і вільних (F) країв (рис. 1). Скінченно-елементна розбивка проводилась plate-елементами розміром сторони h .



Rис. 1.

В результаті розрахунків отримано частоти вільних коливань шестикутної пластиини з різними варіантами закріплення. Для встановлення залежності частоти від накладених граничних умов були введені коефіцієнти граничних умов, отримані в результаті ділення відповідної частоти закріпленої пластинки на відповідну частоту пластиини з вільними краями. Як приклад на рис. 2 представлена перші десять форм вільних коливань шестикутної пластиини з варіантом закріплення (FFCFFC).



Ruc. 2.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: частоти і форми, вільні коливання, шестикутна пластина, метод скінченних елементів, жорстке закріплення.

1. Рудаков К.Н. FEMAP 10.2.0. Геометрическое и конечно-элементное моделирование конструкций. – К. НТУУ «КПИ», 2011. – 317с.
2. Grigorenko A., Borysenko M., Boychuk O., Boreiko N. Numerical Analysis of Free Vibration Frequencies of Hexagonal Plate // Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods. Advanced Structured Materials. – 2024. – **204** – P. 201 – 220.
3. Grigorenko O.Y., Borysenko M.Y., Boichuk O.V., Vasileva L.Y. Free Vibrations of Triangular Plates with a Hole // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 5. – P. 534 – 542.
4. Waller M.D. Vibrations of free plates: line symmetry; corresponding modes // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1952. – **1105**, N 211. – P. 265 – 276.

O.Ya. Grigorenko¹, M.Yu. Borysenko¹, O.V. Boichuk², N.P. Boreiko¹

FREE VIBRATIONS OF HEXAGON PLATES WITH DIFFERENT VARIATIONS OF FASTENING AT THE EDGES

¹S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;

e-mail: ayagrigorenko1991@gmail.com; mechanics530@gmail.com; nataliya.petrivna@ukr.net;
²Mykolayiv National Agrarian University, Georgy Gongadze Str., 9, 54030, Mykolayiv, Ukraine;
e-mail: boychuklena27@gmail.com

Free vibrations of isotropic hexagonal plates with different variants of rigid fastening at the edges are considered using the finite element method. The results obtained were compared. The dependences of the frequency of free vibrations on the method of fastening have been established. The approaches implemented in the work make it possible to study the dynamic characteristics of plates of other configurations.

**A.Ya. Grigorenko¹, W.H. Müller², L.V. Kharytonova¹,
S.M. Yaremchenko¹**

**ON SOME APPROACHES FOR SOLVING THE PROBLEM OF BENDING OF A
NON-HOMOGENEOUS RECTANGULAR PLATE**

¹ *S.P. Timoshenko Institute of mechanics NASU, 3, P. Nesterov str. 03057, Kyiv, Ukraine; e-mail:
ayagrigorenko1991@gmail.com*

² *Institut für Mechanik, Technische Universität Berlin, 135, 17 June str. 10623, Berlin, Germany; e-mail:
wolfgang.h.mueller@tu-berlin.de*

This study explores various approaches to solving the three-dimensional problem of bending a rectangular plate under a distributed normal load with hinged edge supports. By expanding the applied load in a Fourier series, the problem can be simplified to a sequence of one-dimensional boundary problems.

Further simplification is achieved by assuming the load takes the form of a single Fourier series harmonic, rendering the problem entirely one-dimensional. Solutions for this simplified scenario exist for both homogeneous plates [6] and functionally graded materials with varying shear modulus [5]. We aim to compare the results of different numerical approaches against these exact solutions.

Two primary solution approaches are investigated. The first employs displacements as unknowns, leading to a one-dimensional boundary problem for a system of three second-order ordinary differential equations derived from elasticity theory. The second approach utilizes a mixed formulation where both displacements and stresses act as governing functions, resulting in a boundary problem for a system of six sixth-order ordinary differential equations.

In both cases, the one-dimensional boundary problems are solved via the discrete orthogonalization method [1]. The mixed formulation problem is additionally solved using the built-in boundary value problem solver from Python's `scipy` module [4].

A further approach reduces the three-dimensional problem to a one-dimensional one using two-dimensional splines, subsequently solved using the discrete orthogonalization method [2]. The finite element method is also employed, drawing parallels to its application in solving similar problems for cylinders [3].

Comparisons of displacement results across the different solution methods are provided, considering six distinct scenarios. Additionally, solutions are obtained for uniformly distributed loads, where the problem is reduced to a series of boundary problems. Comparisons of results from various methods are again presented.

KEY WORDS: nonhomogeneous rectangular plate, stress strain state, hinged ends, Fourier series, splines, FEM

1. Bellman R., Kalaba R. Quasi-linearization and Nonlinear Boundary Value Problems, American Elsevier Publishing Co, N.Y. 1965
2. Grigorenko A.Ya., Bergulev A.S., Yaremchenko S.N. Numerical solution of bending problems for rectangular plates // Int. Appl. Mech.– 2013 – 49, N 1, 81 – 94
3. Grigorenko A.Ya., Yaremchenko S.N. Three-dimensional analysis of the stress-strain state of inhomogeneous hollow cylinders using various approaches.// Int. Appl. Mech.–2019 – 55, N 5 – P. 487-494
4. https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_bvp.html
5. Kashtalyan M. Three-dimensional elasticity solution for bending of functionally graded rectangular plates // European Journal of Mechanics - 2004 - A/Solids, 23 N 5. – P. 853–864.
6. Vlasov B.F. On one case of bending of rectangular thick plate // Vestnik Moskov. Univ. Ser. Mat. Mekh. Astronom. Fiz. Khim. – 1957, 2. – P. 25–34.

В . З . Грищак¹, Д.В. Грищак², Н.М. Д'яченко³, В.О. Купріков³

**БІФУРКАЦІЙНИЙ АНАЛІЗ ТРИШАРОВИХ ОБОЛОНКОВИХ
КОНСТРУКЦІЙ З ЦИЛІНДРИЧНИХ ТА КОНІЧНИХ ВІДСІКІВ
ПРИ КОМБІНОВАНОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

*¹Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»,
пр. Дмитра Яворницького, 19, 49005, Дніпро, Україна;
e-mail: HRYSHCHAK.V.Z@tpu.one*

*²Міністерство з питань стратегічних галузей промисловості України,
бул. Івана Франка, 21-23, 01054, Київ, Україна,*

*³Запорізький національний університет,
бул. Університетська, 66, 69600, Запоріжжя, Україна*

Тонкостінні оболонки використовуються як силові елементи конструкцій в багатьох галузях: будівельній, хімічній, ракето-будівній, авіаційній [2]. Такі конструкції знаходяться під дією комбінованих навантажень – зовнішнього тиску, осьового зусилля, крутіння, – здатному викликати локальний і загальний біфуркаційний стан. Дослідженням стійкості оболонкових конструкцій присвячено, зокрема, роботи [1 – 6], серед яких праця [6] – оглядова. Для збільшення стійкості використовують підкріплюючі шпангоути [2, 4 – 6], а також тришарові матеріали, які складається з двох зовнішніх жорстких шарів і внутрішнього шара-наповнювача незначної жорсткості і щільності [1, 3, 4].

Ряд досліджень стійкості оболонкових конструкцій супроводжується комп’ютерною візуалізацією форм втрати стійкості [2, 4, 5]. Аналіз поведінки оболонок через візуалізацію закритичного хвилеутворення дозволяє провести дешевий комп’ютерний експеримент з пошуку рациональних жорсткістних характеристик шпангоутів та місця розміщення проміжного шпангоута, що було розпочато в роботі [4] для конічних оболонок та конструкцій типу «конус-циліндр», секції якої стикаються з більшої основи зрізаного конуса.

В роботі обговорюються задачі стійкості тришарових оболонкових конструкцій типу «циліндр-конус» та «циліндр-конус-циліндр», перша з яких утворюється із секцій, що стикаються з меншої основи конуса, а друга – з обома його основами. Конструкції знаходяться під дією зовнішнього тиску, осьового зусилля та крутіння. В роботі досліджується характер хвилеутворення втрати стійкості зазначених конструкцій, зокрема, під впливом підкріплюючих шпангоутів, з метою рационального проектування і зниження маси конструкції.

В монографії [1] надано повні системи диференціальних рівнянь в частинних похідних для дослідження стійкості циліндричної та конічної оболонок, на основі яких в роботах [3, 4] виведено розв’язувальні рівняння, які являють собою звичайні диференціальні рівняння шостого порядку відносно функцій прогинів відповідних оболонок. Для урахування спряження оболонок через шпангоут використовуються диференціальні співвідношення [4]. Крайові умови передбачають, що торці тришарової складеної оболонкової конструкції вільно оперті, а також є діафрагма нескінченної жорсткості, що перешкоджає відносному зсуву несучих шарів уздовж краю оболонки [1].

Утворені системи диференціальних рівнянь розв’язуються методом скінчених різниць відповідно до різницевих відношень, виписаних в [3, 4].

Для конструкції «циліндр-конус» проведено розрахунки, які дозволяються реалізувати наближений граничний переход від тришарової оболонки до одношарової. Для останньої, алгоритм розрахунку викладено в роботі [2]. Результати узгоджуються.

Для тришарових стінок оболонок дотримуємося позначень з [1]: h_j , ν_j та E_j – товщини, коефіцієнти Пуассона та модулі пружності зовнішнього шару ($j=1$), внутрішнього ($j=2$) та заповнювача ($j=3$), h_0 – товщина стінки оболонки. В [1] вводяться зведений коефіцієнт Пуассона та модуль пружності тришарового матеріалу. Використаємо позначення: α – кут при основі конуса, l_0 і l_1 – відстані вздовж твірної до меншої та більшої основ зізаного конуса, L_i і R_i – довжини твірних та радіуси циліндрів ($i=1, 2$), q, T, M – безрозмірні параметри зовнішнього тиску, осьової сили та крутного моменту, γ – кут нахилу гребня хвилі до твірної, n – число хвиль в кільцевому напрямку [4].

Наведемо деякі результати розрахунків при $\alpha = 75^\circ$, $l_1 = 1.82 \text{ м}$, $l_0 = 0.65 l_1$, $L_1/R_1 = L_2/R_2 = 2.5$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = \nu = 0.3$, $E_1 = E_2 = 1.04 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, $E_3/E_1 = 0.01$, $h_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $h_3/h_1 = 0.6$.

В роботі побудовано граничні поверхні, що відокремлюють область стійкості непідкріпленої конструкції «циліндр-конус» та підкріпленої «циліндр-конус-циліндр». Для цих конструкцій граничні поверхні опуклі, і збільшення осьового стискання та крутного моменту призводить до зниження критичного зовнішнього тиску.

В табл. 1 наведено параметри стійкості та форми закритичного хвилеутворення конструкції «циліндр-конус» непідкріпленої та підкріпленої шпангоутами за обома спряженнями з параметрами жорсткості в площині початкової кривизни $G = 5000$ та з цієї площини $H = 10$.

Табл. 1

	$G = 0, H = 0$		$G = 5000, H = 10$		
M	0	5	10	10	5
T	0	2	-3	0	2
n	4	4	7	5	6
q	4.402812	2.69176	10.75653	6.161440	5.130847
γ	0	0.219	0.097	0.256	0.169

У випадку непідкріпленої конструкції «циліндр-конус» під дією зовнішнього тиску та осьового зусилля гребінь закритичної хвилі розміщується в межах стикування секцій. Додатковий вплив крутіння призводить до пересування гребня в бік циліндричної секції. Під впливом підкріплюючих шпангоутів обраної жорсткості хвilia зазнає перегину в місці стикування секцій; за певної комбінації значень крутного моменту та осьового зусилля, при $T \geq 0$ хвильове число n може зменшитися, а максимум хвилі пересунутися на циліндричну секцію, при $T < 0$ число n може збільшитися, а максимум хвилі залишитися на конічній секції.

В табл. 2 розглянуто конструкції «циліндр-конус-циліндр», підкріплені шпангоутами за обома спряженнями при $G = 5000, H = 10$. Перша з них визначає параметри стійкості конструкції без проміжного шпангоута. Дослідження показали, що комбіноване навантаження призводить до утворення хвилі з максимумом, що розміщується над циліндричним відсіком більшого радіусу. Тому саме на цьому відсіку розміщуємо проміжний шпангоут. Важливо відслідковувати поведінку хвилі, щоб уникнути перепадів амплітуд, які можуть викликати руйнівні процеси конструкції. В табл. 2 також наведено конструкції (друга – четверта) з різними жорсткостями проміжного шпангоута і такими значенням коефіцієнта k поділу твірної циліндричної оболонки більшого радіусу, для яких хвilia має однакові амплітуди справа та зліва від шпангоута. Слід зазначити, що саме такій поведінці хвилі відповідає найбільший критичний тиск за фіксованих значень жорсткостей шпангоутів. П'ята візуалізація табл. 2 показує, що стискаюча сила може привести до зміни в поведінці хвилі та її перегину при переході через шпангоут.

Табл. 2

	Без пром. шпангоута	Жорсткості проміжного шпангоута			
		0.1G, 0.1H	0.2G, 0.2H	0.25G, 0.25H	0.2G, 0.2H
T	5	0	0	0	3
k	-	0.55	0.545	0.54	0.55
					
n	5	7	7	7	7
q	3.968583	6.021317	6.871317	7.201648	4.258257

Дослідження втрати стійкості з використанням комп’ютерної візуалізації форм втрати стійкості є дешевим інструментом відслідковування поведінки закритичної хвилі та вибору раціональних жорсткостей шпангоутів. Збільшення жорсткості не завжди призводить до значного підвищення критичного тиску, проте може викликати руйнівну хвиллю. Віддаючи перевагу безпечній поведінці хвилеутворення при втраті стійкості, можна знайти такі сполучення жорсткостей шпангоутів, які можуть, крім іншого, зменшити загальну масу конструкції.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стійкість оболонкової конструкції типу «циліндр-конус» та «циліндр-конус-циліндр», шпангоути, комп’ютерна візуалізація закритичного хвилеутворення.

- Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – Москва: Машиностроение, 1973. – 172 с.
- Дегтярьов О. В., Грищак В. З., Акімов Д. В. та ін. Математичні моделі та прогнозування руйнівних навантажень в ракетно-космічних системах : колективна монографія / за ред. О. В. Дегтярьова, В. З. Грищака, В. М. Сіренка. – Запоріжжя: Видавничий дім «Гельветика», 2020. – 260 с.
- Congying Zhong C., Reimerdes H.-G. Stability Behavior of Cylindrical and Conical Sandwich Shells with Flexible Core // Journal of Sandwich Structures and Materials. – 2007. – 9, N 2, March 2007. – P. 143-166.
- Gristchak V. Z., Hryshchak D. V., Dyachenko N. M., Sanin A. F., Sukhyi K. M. Bifurcation state and rational design of three-layer reinforced compound cone-cylinder shell structure under combined loading // Space Science and Technology. – 2023. – 29, N 6 (145). P. – 26—41.
- Ismail M. S., Ifayefunmi O., Mazli A. H. Combined stability of cone-cylinder transition subjected to axial compression and external pressure // Thin-Walled Structures. – 2020. – 157, December 2020. –Id: 107102.
- Schmidt H. Two decades of research on the stability of steel shell structures at the University of Essen (1985–2005): Experiments, evaluations, and impact on design standards // Advances in Structural Engineering. – 2018. – 21, N 16. – P. 2364–2392.

V.Z. Gristchak¹, D.V. Hryshchak², N.M. Dyachenko³, V.O. Kuprikov³

BIFURCATION ANALYSIS OF THREE-LAYER SHELL STRUCTURES FROM CYLINDRICAL AND CONICAL COMPARTMENTS UNDER COMBINED LOADING

¹ Dnipro University of Technology
19, Dmytra Yavornyskoho Ave., Dnipro, 49005 Ukraine

² The Ministry of Strategic Industries
21-23, Ivan Franko Str., Kyiv, 01054 Ukraine

³ Zaporizhzhia National University
66, Universytetska Str., Zaporizhzhia, 69600 Ukraine

The stability problem of three-layer shell structures of the "cylinder-cone" and "cylinder-cone-cylinder" types under the influence of a combined load (external pressure, axial force, and rotation) is considered. The study was conducted using computer visualization of buckling forms, which allows for the analysis of safe wave formation patterns and the selection of rational ring stiffness and the optimal location of the intermediate ring.

О.П. Кривенко, П.П. Лізунов, О.Б. Калашніков

**ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ ТА ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ НЕОДНОРІДНИХ
ОБОЛОНОК ЗА МОМЕНТНОЮ СХЕМОЮ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

*Київський національний університет будівництва і архітектури,
просп. Повітряних Сил, 31, 03037, Київ, Україна;
e-mail: olkakop@ukr.net*

Розглядається метод комплексного аналізу поведінки тонкостінних конструкцій, елементами яких є пружні багатошарові оболонки, які мають складну форму та геометричні особливості за товщиною і знаходяться під дією статичного термомеханічного навантаження [1 – 4, 6 – 8]. Метод дослідження ґрунтуються на ефективному підході, за яким тонкі оболонки розглядаються як тривимірні тіла, а їхня поведінка описується співвідношеннями геометрично нелінійної тривимірної теорії термопружності. Прийнятий уніфікований підхід надає можливість досліджувати у рамках єдиної методології нелінійне деформування, стійкість, закритичну поведінку та власні коливання пружних тонких оболонок різних класів: сталої та змінної товщини, з ребрами, накладками, отворами, виїмками, каналами, зламами серединної поверхні, багатошаровою структурою матеріалу тощо. Вивчається поведінка пружних оболонкових систем, що можуть знаходитися під дією механічного, температурного та складного (комбінованого) термомеханічного навантаження.

Дискретизація оболонки виконується методом скінченних елементів. За товщиною оболонка моделюється одним універсальним тривимірним скінченним елементом (СЕ) [2]. Універсальний СЕ побудовано на базі класичного тривимірного вісімивузлового СЕ з полілінійними функціями форми. Створений СЕ призначений для апроксимації як ділянок обшивки оболонки, так і ділянок оболонки ступінчасто-змінної товщини. Під обшивкою оболонки розуміється її тіло без геометричних особливостей за товщиною. СЕ, який застосовується на ділянках обшивки оболонки (СЕ обшивки – СЕО), може перетворюватися, за необхідності, у СЕ модифікований (СЕМ) для моделювання ділянок оболонки ступінчасто-змінної товщини (з ребрами, каналами), тобто СЕ є дійсно універсальним. Його універсальність досягається за рахунок наявності додаткових змінних параметрів, призначення та опис яких надано в [1, 2]. Додаткові геометричні змінні параметри використовуються для збільшення (або зменшення) розмірів СЕ у напрямку товщини та зсуву його серединної поверхні за товщиною. Такі трансформації СЕ реалізуються за допомогою застосування лінійного перетворення координат вузлів тривимірного СЕО у відповідні вузлові координати СЕМ в напрямку товщини оболонки [2, 4]. Таким чином, універсальний СЕ є єдиним СЕ, який використовується на всіх ділянках оболонки ступінчасто-змінної товщини.

Уточнена розрахункова модель неоднорідної оболонки побудована на базі застосування двох некласичних гіпотез. Кінематична гіпотеза деформівної прямої: пряма до деформування залишається прямою і після деформування, скорочуючись або подовжуючись при цьому. Ця пряма необов'язково є нормальню до серединної поверхні обшивки. Такий підхід дає змогу природно моделювати злами серединної поверхні оболонки та реалізовувати стикування елементів на різних ділянках оболонкової системи ступінчасто-змінної товщини. Застосування статичної гіпотези про сталість напруженъ обтиснення за товщиною шару оболонки не позбавляє універсальний СЕ тривимірних властивостей. Побудова розв'язувальних рівнянь виконується із залу-

чанням моментної схеми скінченних елементів. Моментну схему скінченних елементів, яка було розроблена в працях О.С. Сахарова [5], поширено на задачі термопружного нелінійного деформування оболонок ступінчасто-змінної товщини, що мають багатошарову структуру матеріалу [2, 3].

Для дослідження процесів стійкості та власних коливань неоднорідних оболонок, що знаходяться під дією статичних термомеханічних навантажень, розроблено комплексний підхід (рис. 1). Він побудований як двохетапний алгоритм, який реалізується на кожному кроці навантаження [1, 4, 6, 8].

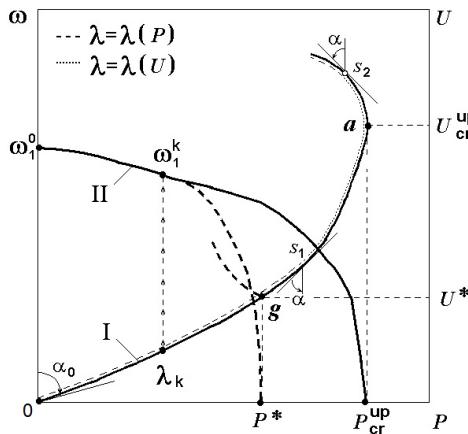


Рис. 1

Загалом, вплив на оболонку різних статичних механічних Q і теплових T полів в алгоритмі подається як спільний процес навантаження, який визначається загальним параметром навантаження $P = P(Q, T)$. Дія термомеханічного навантаження на оболонку задається як функція, що дає змогу вивчати вплив на поведінку оболонки різних режимів термомеханічного навантаження.

На першому етапі головного комплексного алгоритму кроковим методом розв'язується задача нелінійного деформування, стійкості та закритичної поведінки оболонки при дії термомеханічного навантаження. Ця проблема реалізується як комбінований алгоритм, в якому використовується кроковий метод продовження розв'язку за параметром λ у поєднанні з ітераційною процедурою модифікованого метода Ньютона-Канторовича на кроці навантаження [2, 7]. Розв'язок задачі, зазвичай, подається як діаграма “навантаження P – прогин U ” характерної точки оболонки (І на рис. 1). Параметром продовження розв'язку на ділянках діаграм “ $P-U$ ” може бути або навантаження $\lambda = \lambda(P)$ – пунктирна лінія $(0-s_1, s_2)$, або переміщення $\lambda = \lambda(U)$ характерного вузла скінченноелементної моделі оболонки – точки (s_1-s_2) . Зміна параметра продовження розв'язку надає можливість проходити всю криву “ $P-U$ ”, незалежно від її складності [2]. На цьому етапі алгоритму при відповідному прирості навантаження, яке характеризується параметром $\lambda_k = \lambda_k(P, U)$, визначаються деформована форма оболонки (нові координати) та приrostи полів переміщень і напружень.

На другому етапі для кожного моменту приросту навантаження (на кроці навантаження k) виконується модальний аналіз оболонки з урахуванням переднапруженого та деформованого станів [1, 4, 6, 8]. Модальний аналіз виконується до появи нульового (чи від'ємного) значення власної частоти ω_l , що відповідає моменту втрати стійкості оболонки за динамічним критерієм. Відповідне значення навантаження P^*

(при наявності точки розгалуження “ g ”) або P_{cr}^{up} (точка максимуму “ a ” діаграми “ $P-U$ ”) приймається за критичне. На наступних кроках навантаження, модальний аналіз оболонки не проводиться, досліджується лише її закритична поведінка. Розв’язок задачі цього етапу подається як діаграма “навантаження P – нижча частота ω_l ” (ІІ на рис. 1). Результатом розрахунку є заданий спектр частот і відповідних форм власних коливань. Розроблений підхід дає змогу одночасно визначати момент втрати стійкості оболонки за статичним і динамічним критеріями.

Виконано чисельне обґрунтування точності та достовірності розв’язків, що отримуються. Для різних класів неоднорідних оболонок [1, 3, 4, 6, 8, 9] досліджено вплив параметрів термомеханічного навантаження та параметрів елементів оболонкових конструкцій на їх стійкість, закритичну поведінку та власні коливання.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: оболонка, ступінчасто-змінна товщина, термомеханічне навантаження, деформування, стійкість, власні коливання, універсальний тривимірний скінчений елемент

1. Баженов В.А., Кривенко О.П. Стійкість і коливання пружних неоднорідних оболонок при термо-силових навантаженнях. – Київ: Каравела, 2020. – 187 с.
2. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О. Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – Київ: Віпол, 2010. – 316 с.
3. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., Калашников О.Б. Використання моментної схеми скінчених елементів при дослідженні тонких пружних оболонок // Управління розвитком складних систем. – 2023. – N 53. P. 52-62.
4. Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., Калашников О.Б. Моделювання процесів нелінійного деформування, втрати стійкості та коливань пружних оболонок неоднорідної структури // Прикл. механіка. – 2024. – 60, N 4. – С. 91-107.
5. Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В. и др. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев: Вища шк. Головное изд-во, 1982. – 480 с.
6. Bazhenov V., Krivenko O. Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. – Saarbruken, Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2018. – 97 p.
7. Bazhenov V.A., Solovei N.A. Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads // Int. Appl. Mech., 2009. – 45, N 9. – P. 923-953.
8. Krivenko O.P., Lizunov P.P., Vorona Yu.V. Kalashnikov, O.B. A Method for Analysis of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibrations of Thin Elastic Shells with an Inhomogeneous Structure. // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2023. – N 110. – P. 131-149.
9. Krivenko O.P., Lizunov P.P., Vorona Yu.V., Kalashnikov O.B. Comparative analysis of the stability and natural vibrations of shallow panels under the action of thermomechanical loads // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2023. – N 111. – P. 49-64.

O.P. Krivenko, P.P. Lizunov, O.B. Kalashnikov

RESEARCH OF THE BUCKLING AND NATURAL VIBRATIONS OF INHOMOGENEOUS SHELLS USING THE FINITE ELEMENT MOMENT SCHEME

*Kyiv National University of Construction and Architecture,
Air Force Ave., 31, 03037, Kyiv, Ukraine;
e-mail: olakop@ukr.net*

The method of complex analysis of the behavior of thin-walled structures, the elements of which are elastic multilayer shells, which have a complex shape and geometric features in thickness and are under the action of static thermomechanical load, is considered. The finite element research method is based on the use of the relations of the three-dimensional geometrically nonlinear theory of thermoelasticity and the moment finite element scheme.

Ю.В.Горский^{1,3}, Т.С.Краснопольська¹, Я.О.Жук^{2,3}

**ХРЕСТОПОДІБНІ ХВИЛІ НА ПОВЕРХНІ РІДИНИ В ЧАСТКОВО
ЗАПОВНЕНОЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ЄМНОСТІ**

¹ Інститут гідромеханіки НАНУ,
бул. М. Каніст, 8/4, 03057, Київ, Україна; e-mail: yuragv@ukr.net
[e-mail: krasnopolkskaya1005@gmail.com](mailto:krasnopolkskaya1005@gmail.com)

² Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
просп. Глущкова, 4е, 01033, Київ, Україна; e-mail: yaroslavzhuk@knu.ua

³ Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна

Моделювання ефектів взаємодії частково заповненої ємності із рідиною, яку вона містить, є складною багатофакторною проблемою [5 - 6]. Розв'язання такої задачі є необхідним елементом дослідження поведінки резервуарів для транспортування нафтопродуктів, паливних баків авіа- і автомобільного транспорту, елементів ракет на рідкому паливі тощо. При цьому внаслідок вібрації стінки контейнера (ємності), частково заповненого рідиною, на вільній поверхні рідини генеруються хвилі різного типу, зокрема, так звані хрестоподібні хвилі [1, 5 - 6]. Таке явище може спостерігатись, зокрема, у великих пружніх ємностях промислового значення, досягати значних рівнів і бути основою для розробки певних технологій транспортування і зберігання рідин.

Напевно першим, хто залишив доволі детальне дослідження хрестоподібних хвиль, був Фарадей [1]. Ці хвилі, як писав Фарадей, є результатом роботи хвилепродуктора, який збуджує коливання циліндричної поверхні.

Якщо ж таку ємність (контейнер) частково заповнити рідиною, яка змінює частоту згенерованого звуку, то можна спостерігати ще одну дивовижну особливість: складний візерунок хвиль на вільній поверхні рідини. При достатньому освітленні можна спостерігати хвилі, безпосередньо зумовлені вібрацією стінки ємності в режимі з чотирма вузлами, що рухаються в окружному напрямку з тією ж швидкістю, що й рухомий збуджувач-хвилепродуктор (палець в класичній задачі з бокалом, наприклад, [2, 6]). Ці короткі стоячі хвилі були описані ще Фарадеєм [1].

Гарретт [1] був першим, хто описав, як передається енергія від хвилепродуктора до хрестоподібної хвилі за допомогою моделі, яка ґрунтується на використанні вертикального середнього руху вільної поверхні. Нелінійна теорія для пояснення хрестоподібних хвиль була розроблена в дослідженнях Махоні [9], Джонса [4], Ліхтера і Андерхілла [8], Майлза [10]. Проте всі вони використовували відоме рішення Хейвелока [3], отримане для хвиль в напівнескінченному басейні.

Ми застосовуємо метод суперпозиції, який дає чіткіше уявлення про зв'язок між вібрацією стінки циліндра і хвильовим рухом рідини на вільній поверхні. Вперше цей метод був застосований Ляме [5 - 6] для розв'язання задач теорії пружності.

Для того, щоб проаналізувати хвилі на вільній поверхні рідини в «співаючому бокалі» зробимо деякі спрощувальні припущення щодо геометрії області течії: чашоподібну ємність замінимо циліндром з круглим перерізом радіуса R і плоским горизонтальним дном. Хоча ця базова геометрія є віссесиметричною, стінка циліндра здійснює коливання по другій моді в окружному напрямку, тобто з $\cos 2\theta$ залежністю від азимутальної координати θ [8].

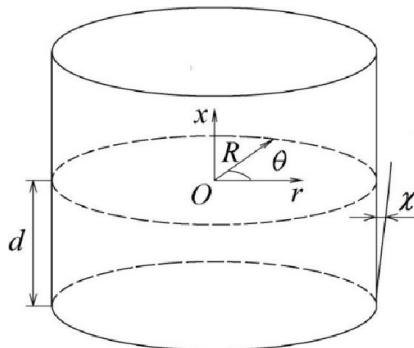


Рис.1.

Стінка циліндра здійснює гармонічні коливання з частотою ω таким чином, що її радіус змінюється як $R^*(x, \theta, t) = R + \chi(\theta, x, t)$, де χ має такий вигляд:

$$\chi = a \cos 2\theta \cos [\pi x / (2d)] \cos \omega t, \quad (1.1)$$

де $\cos 2\theta$ означає другу моду стінки циліндра в осьовому напрямку, a - амплітуда коливань циліндра. Вважаємо, що рідина є нев'язкою і нестисливою. Крім того, припускаючи, що індуктований рух рідини не є обертальним, поле швидкості \mathbf{v} можна записати в термінах потенціалу швидкості $\varphi(r, \theta, x, t)$ як $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ [3]. Визначальне рівняння для φ має вигляд:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad \text{на } (0 \leq r \leq R + \chi(\theta, x, t), 0 \leq \theta \leq 2\pi, -d \leq x \leq \zeta), \quad (1.2)$$

де $\zeta(\theta, x, t)$ - переміщення вільної поверхні.

Додатково припускаємо, що вплив поверхневого натягу не є незначним. Тоді динамічні та кінематичні граничні умови для вільної поверхні можна записати у вигляді:

$$\varphi_t + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + g\zeta = \frac{T}{\rho} \left\{ \nabla^2 \zeta - \frac{\nabla \zeta}{2} \cdot \left[(\nabla \zeta)^2 \nabla \zeta \right] \right\} + F(t) \quad \text{при } x = \zeta(r, \theta, t); \quad (1.3)$$

$$\varphi_x = \nabla \varphi \cdot \nabla \zeta + \zeta_t \quad \text{при } x = \zeta(r, \theta, t), \quad (1.4)$$

де g - гравітаційне прискорення, T - поверхневий тиск повітря-рідина, ρ - густина рідини, а $F(t)$ - функція часу [12]. Підрядкові індекси вказують на частинну похідну по відповідній змінній.

Швидкість нормальної течії дорівнює нулю на дні резервуара:

$$\varphi_x = 0 \quad \text{при } x = -d, \quad (1.5)$$

тоді як кінематична умова на стінці циліндра, що коливається, формулюється так:

$$\varphi_r = \chi_t + \nabla \varphi \cdot \nabla \chi \quad \text{при } r = R + \chi(\theta, x, t). \quad (1.6)$$

Менісковий та капілярний вплив на лінії контакту поверхні рідини зі стінкою циліндра виключено. Крім того, припускається, що швидкість рідини залишається обмеженою по всій області, зокрема:

$$\varphi_r < \infty \text{ при } r = 0. \quad (1.7)$$

Вібруюча стінка циліндра генерує хвильову картину в рідині. Припускаючи, що ця картина може бути описана в термінах нормальних мод з характерними власними частотами, розвинемо потенціал $\varphi(r, \theta, x, t)$ і переміщення вільної поверхні $\zeta(r, \theta, t)$ в ряд по повному набору власних функцій. За загальною процедурою представлення рядів Фур'є для похідних неоднорідна гранична умова при $r = R$ приведе до появи в правій частині рівняння (1.2) доданку, пропорційного φ_{xx} . Розв'язання набору неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь по x для коефіцієнтів розвинення з неоднорідними граничними умовами в x можна легко знайти аналітичними методами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: хрестоподібні хвилі; частково заповнена циліндрична ємність; метод суперпозиції; вимушенні коливання.

1. Faraday M. On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces // Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 1831. – 121. – P. 299–340.
2. Garrett C.J.R. Cross waves // J. Fluid Mech. 1970. 41. – P. 837–849.
3. Havelock T.H. Forced surface waves on water // Phil. Mag. (Ser. 7). - 1929. - 8. – P. 569–576.
4. Jones A.F. The generation of cross-waves in a long deep channel by parametric resonance // J. Fluid Mech. – 1984. – 138. - P. 53–74.
5. Krasnopol'skaya T.S., van Heijst G.J.F. Wave pattern formation in a fluid annulus with a vibrating inner shell // J. Fluid Mech. – 1996. – 328. - P. 229–252.
6. Krasnopol'skaya T.S., van Heijst G.J.F. Fluid surface waves in a partially filled 'singing wine glass' // EJM/B Fluids. – 2018. – 67. . – P. 116–124. DOI: 10.1016/j.euromechflu.2017.08.011
7. Lamé G. Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. – Paris: Bachelier. - 1852. - 384 p.
8. Licher S., Underhill W.B. Mode-number shifting of nonlinear cross-waves // Phys. Rev. A. – 1987. - 35. – P. 5282–5284.
9. Mahony J.J. Cross-waves. Part 1, Theory // J. Fluid Mech. – 1972. - 55 – P. 22
10. Miles J.W. Parametrically excited, standing cross-waves // J. Fluid Mech. - 1988. - 186 P. 119–127

Y.V.Gorskiy^{1,3}, T.S.Krasnopol'skaya¹, Y.A.Zhuk^{2,3}

CROSS-WAVES ON THE SURFACE OF FLUID IN PARTLY FILLED CYLINDRICAL BASIN

¹ Institute of Hydromechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
Mariya Kapnist Str., 8/4, 03057, Kyiv, Ukraine;

e-mail: krasnopol'skaya1005@gmail.com; yuragy@ukr.net

² Taras Shevchenko National University of Kyiv
Academician Glushkov Ave., 4e, 01033, Kyiv, Ukraine;

e-mail: yaroslavzhuk@knu.ua

³ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine

The mechanism of forced generation and structure of the cross-waves on the free surface of a liquid contained in a partially filled cylindrical container are explained using the superposition method. For the mathematical description of the cross-waves, a single-mode and a three-mode nonlinear models were developed. The first model simulates generation of the cross-waves due to the emergence of a single resonant mode when the vibration frequency of the cylindrical surface of the tank coincides with its natural frequency. According to the second model, a cross-wave arises as the superposition of three natural modes of vibration that approximate the experimentally observed pattern on the free surface of liquid. The graphical representation of the free surface profile with three eigenmodes demonstrates the main features of the wave patterns observed in the wall vicinity of the partially filled cylindrical container with a vibrating surface.

Ю.А. Мейш¹, Н.В. Майбородіна²

**ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕФОРМАЦІЙ ПІДКРІПЛЕНИХ
РЕБРАМИ БАГАТОШАРОВИХ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ
ОБОЛОНОК ПРИ ДІЇ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕНЬ**

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,

бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: juliameish@gmail.com

² Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут»,

бул. Шевченка, 10, 16600, Ніжин, Україна;

e-mail: natashamai2311@gmail.com

Мета роботи полягає у дослідженні деформацій підкріплених поздовжніми ребрами багатошарових еліпсоїdalьних оболонок при нестационарних навантаженнях з врахуванням дискретного розміщення ребер. Досягнення мети здійснюється постановкою і розв'язуванням наступних основних задач:

- постановка задачі дослідження деформацій дискретно підкріплених поздовжніми ребрами багатошарових еліпсоїdalьних оболонок на основі геометрично лінійної теорії оболонок і стержнів типу С. П. Тимошенка;

- вивчення рівнянь коливань підкріплених поздовжніми ребрами багатошарових еліпсоїdalьних оболонок та природних граничних умов;

- застосування чисельного методу розв'язування задач нестационарних коливань підкріплених поздовжніми ребрами багатошарових еліпсоїdalьних оболонок з врахуванням дискретного розміщення ребер;

- аналіз деформацій в підкріплених поздовжніми ребрами багатошарових еліпсоїdalьних оболонках при нестационарному навантаженні, які обумовлені дискретністю розміщення ребер.

Для побудови математичної моделі процесів вимушених коливань підкріпленої поздовжніми ребрами тришарової еліпсоїdalьної оболонки, розглядається гіперболічна система нелінійних диференціальних рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка [2]. Покладається, що закон зміни переміщень по товщині еліпсоїdalьної оболонки в системі координат s_1, s_2, z має вигляд [1]. Тришарова підкріплена еліпсоїdalьна оболонка розглядалася в рамках теорії кінематичних та статистичних гіпотез для пакету шарів. Покладалося, що оболонка та дискретні підкріплюючі ребра жорстко з'єднані між собою. Геометрія серединної поверхні еліпсоїdalьної оболонки задана співвідношеннями [2]

$$x = R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2; \quad y = R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2; \quad z = kR \cos \alpha_1, \quad (1)$$

де α_1, α_2 – гаусові криволінійні координати на поверхні оболонки, α_1 відповідають меридіальному напрямку, а α_2 – окружному напрямку; $k = b/a$ – параметр еліптичності; a, b – півосі еліпса. Відношення для компонент метрики і форми серединної поверхні оболонки мають вигляд

$$a_{11} = R^2 (\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1); \quad a_{22} = R^2 \sin^2 \alpha_1; \quad (2)$$

$$b_{11} = kR(\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{-1/2}; \quad b_{22} = kR \sin^2 \alpha_1 (\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{-1/2}.$$

Згідно формул (2) коефіцієнти першої квадратичної форми і кривизни серединної поверхні еліпсоїdalьної оболонки мають наступний вигляд:

$$A_1 = a(\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{1/2}, \quad A_2 = a \sin \alpha_1; \\ k_1 = -\frac{b}{a^2}(\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{-3/2}; \quad k_2 = -\frac{b}{a^2}(\cos^2 \alpha_1 + k^2 \sin^2 \alpha_1)^{-1/2}.$$

Варіаційні рівняння коливань дискретно підкріплених поздовжніми ребрами багатошарових еліпсоїдальних оболонок отримані на основі принципу Гамільтона-Остроградського.

Чисельний метод розв'язання задач базується на застосуванні інтегро-інтерполяційного методу побудови скінчено-різницевих схем за просторовими координатами та явної скінченно-різницевої схеми типу “хрест” за часовою координатою.

В даній роботі досліджено динамічне деформування підкріпленої поздовжніми ребрами тришарової еліпсоїдальної оболонки з жорстко затисненими краями при дії розподіленого нормальногонавантаження. Задача розв'язувалася для випадку параметра $k = \frac{a}{b} = 1,5$. Поздовжньо підкріплюючі елементи розміщались вздовж координати α_1 .

Було проведено аналіз величин деформацій для гладкої і підкріпленої повздовжніми ребрами тришарових еліпсоїдальних оболонок, який показує, що величина деформації ε_{11} для гладкої еліпсоїдальної оболонки більша від величини деформації ε_{11} у випадку підкріпленої поздовжніми ребрами еліпсоїдальної оболонки на всьому часовому проміжку, що розглядався.

Розроблений метод дослідження нестационарних коливань тришарових еліпсоїдальних оболонок може бути застосований до розрахунку оболонок з різними граничними умовами при широкому діапазоні зміни фізико-механічних властивостей шарів. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні оболонкових елементів енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: теорія оболонок типу Тимошенка, підкріплюючі ребра, еліпсоїдальна оболонка, деформації, вимушені коливання, нестационарне навантаження

1. Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / под ред. Акад. НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
2. Meish V.F., Maiborodina N.V. Nonaxisymmetric vibrations of ellipsoidal shells under nonstationary distributed loads // International Applied Mechanics. – 2008. – 44(9). P. 1015 – 1024.
3. Meish V.F., Meish Yu.A., Maiborodina N.V., Storozhuk Ye.A. Deformation of Stiffened by Longitudinal Ribs Three-Layer Ellipsoidal Shells under action of Nonstationary Load // International Applied Mechanics. – 2023. – 59, № 3. – P. 292 – 303.

Yu.A. Meish¹, N.V. Maiborodina²

TO INVESTIGATION OF THE DEFORMATIONS OF REINFORSED BY RIBS OF MULTILAYERED ELLIPSOIDALS SHELLS UNDER NON-STATIONARY LOADS

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: juliaimeish@gmail.com

² Separated Subdivision of National University of Lifeand Environmental Sciences
of Ukraine «Nizhin Agrotechnical Institute», Shevchenko Str., 10, 16600, Nizhn, Ukraine
e-mail: natashamai2311@gmail.com

The work deals with the problems of dynamic behavior of multilayer reinforced ellipsoidal shells under the action of non-stationary load. The equations of shell oscillations are presented, taking into account the appropriate boundary and initial conditions. To solve this problem, a numerical algorithm was developed, which is based on the finite-difference approximation of the original equations depending on the spatial and temporal coordinates. The obtained results can be used in the design of shell elements of energy, transport and construction structures.

П . З . Луговий, Ю.В. Скосаренко

**ДИНАМІКА НЕСИМЕТРИЧНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ РАКЕТ ПРИ
КОМБІНОВАНИХ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: plugovyy@ukr.net*

Циліндричні оболонкові елементи широко застосовуються в якості конструктивних складових машин, космічних та літальних апаратів, різних споруд і інших агрегатів. На сьогоднішній день досягнуто значних успіхів в області дослідження динамічних процесів в елементах конструкцій канонічної форми (циліндричні, сферичні та конічні оболонки). Шаруваті оболонкові конструкції мають ряд суттєвих переваг у порівнянні з однорідними, що вимагає детального дослідження їх динамічної поведінки при експлуатаційних навантаженнях. Останнім часом, створення прогресивних технологій, об'єктів спеціального призначення і т.д. часто призводить до необхідності розробки конструктивних несиметричних тришарових оболонкових елементів із заповнювачем ускладненої геометричної структури. При цьому зазначені елементи піддаються динамічним навантаженням різного виду, в тому числі нестационарним навантаженням. Для таких оболонок проблеми динамічної поведінки вивчені недостатньо.

Для випадку коли зовнішня несуча оболонка виготовлена із сталі, а внутрішня несуча оболонка виготовлена зі сплаву АМГ6 доцільно застосовувати теорії тришарових несиметричних оболонок при незалежних гіпотезах для кожного з шарів. В результаті використання легкого заповнювача утворюється спеціальна тришарова структура з досить великою жорсткістю на згин при вигідному співвідношенні міцності і ваги. У даній роботі розглядається модельний відповідальний елемент у вигляді тришарової циліндричної оболонки несиметричної структури з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при комбінованих експлуатаційних нестационарних навантаженнях. Властивості матеріалів суміжних шарів досить різні, тому для розрахунків таких оболонкових структур доцільно застосовувати метод скінчених елементів. Дослідження динамічних процесів в таких модельних складних несиметричних тришарових структурах при значному діапазоні їх геометричних і фізичних параметрів представляє значний інтерес для конструкторських розробок.

Тришаровий несиметричний циліндричний елемент з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішньої і зовнішньої несучих оболонок, легкого заповнювача і набору дискретних ребер, жорстко з'єднаних з зазначеними несучими оболонками. Елемент має постійну загальну товщину h з гладкою серединною поверхнею в ортогональній системі координат x, z . Координатна лінія x на серединній поверхні оболонки при $z = 0$ збігається з осьовою лінією; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединної поверхні. Будемо вважати величину z додатною якщо точка знаходиться з боку опукlostі серединної поверхні.

Вважається, що несиметрична тришарова циліндрична оболонка навантажена на вільному торці $x = 0$ вздовж твірної змінно-періодичною силою $T_{11}(0, t)$.

Перший випадок. На вільний край оболонки діє віссиметричне повздовжнє змінно-періодичне навантаження від дії двигуна у вигляді:

$$T_{11}^i(0, t) = \begin{cases} A \sin \left[\vartheta \frac{t^2}{t_c} \left(1 - \frac{t}{3t_c} \right) \right] & 0 \leq t \leq 3t_c \\ A \sin \vartheta & t > 3t_c \end{cases}, \quad A = 10^6 \text{ Па}, \quad t_c = \frac{L}{c} = 8 \cdot 10^{-5} \text{ с}, \quad (1)$$

c – швидкість пружних хвиль в матеріалі несучих шарів; ϑ - перша власна частота тришарової оболонки $T_{22}^i(0, t) = 0$; $\phi_1^i(0, t) = 0$. При $x = L$; $u_1^i = u_3^i = \phi_1^i = 0$, ($i=1,2$) жорстке защемлення, початкові умови нульові для несучих шарів прит = 0;

$$u_1^i = u_3^i = \phi_1^i = 0, \quad \frac{\partial u_1^i}{\partial t} = \frac{\partial u_3^i}{\partial t} = \frac{\partial \phi_1^i}{\partial t} = 0; \quad (i = 1, 2). \quad (2)$$

Другий випадок. Розв'язано задачу динамічного деформування тришарового несиметричного циліндричного елементу з неоднорідним заповнювачем при комбінованому нестационарному навантаженні (1) і (3), де (3) дія внутрішнього імпульсу тиску

$$P_1 = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)], \quad (3)$$

де A – амплітуда навантаження; T – тривалість імпульсу навантаження; $T=R/c$ (c – швидкість звуку в металі несучих оболонок); $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

Відповідна початково-крайова задача розв'язується за допомогою скінченно-елементного методу.

Проведено числові розрахунки динаміки несиметричних тришарових циліндричних оболонок, виготовлених з різних матеріалів, методом скінченно-елементів показали, що комбінація динамічних навантажень значно впливає на кількісні і якісні характеристики динаміки зазначених оболонкових структур. З числових експериментів слідує, що одночасна дія навантажень від дії двигуна і внутрішнього імпульсного навантаження на два порядки збільшує нормальні переміщення і напруження несиметричної тришарової оболонки. Характер залежностей максимальних деформацій та напружень в серединних поверхнях несучих шарів з пінопластом відповідної якості говорить про більш інтенсивний взаємозв'язок власних частот між собою, що викликає ефект конструкційного демпфування. Таким чином, можна стверджувати, що підбором матеріалів конструкційних елементів несиметричних тришарових циліндричних структур можна створити конструкцію з прогнозованою динамічною поведінкою при нестационарному комбінованому навантаженні.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: динаміка, несиметричний циліндричний ракетний елемент, комбіноване динамічне навантаження, скінченно-елементний метод

P.Z.Lugovyy, Yu.V. Skosarenko

DYNAMICS OF ASYMMETRIC CYLINDRICAL ROCKET ELEMENTS UNDER COMBINED DYNAMIC LOADS

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: plugovyy@immech.kiev.ua*

From the numerical experiments, it follows that the simultaneous action of loads from the action of the engine and internal impulse load increases the normal displacements and stresses of an asymmetric three-layer shell by two orders of magnitude. The nature of the dependences of the maximum deformations and stresses in the middle surfaces of the bearing layers with foam of the appropriate quality indicates a more intensive relationship of natural frequencies among themselves, which causes the effect of structural damping, since the maximum of the parameters of the stress-strain state in them occurs much earlier.

П . З . Луговий, С.П. Орленко

**СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВІБРАЦІЙНИЙ АНАЛІЗ
ТРИШАРОВИХ СФЕРИЧНО-ЦИЛІНДРИЧНИХ КОМБІНОВАНИХ ОБОЛО-
НОК ПРИ ДІЇ ПЛОСКОЇ УДАРНОЇ ХВИЛІ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: plugovyy@ukr.net*

Тришарові оболонки все ширше використовуються в аерокосмічній, підводних апаратах та інших галузях техніки. Дослідження сферичних і циліндричних оболонок, особливо для комбінованих сферично-циліндричних тришарових оболонок, останнім часом стали центром досліджень. Крім того, проблеми з коливаннями неминуче виникають при дії на такі комбіновані оболонкові конструкції експлуатаційних навантажень. Таким чином, аналіз динаміки тришарових комбінованих сферично-циліндричних оболонок є дуже важливим.

З проведеного огляду літератури слідує, що нестационарний динамічний аналіз тришарових сферично-циліндричних комбінованих оболонок (СЦКО) з дискретно неоднорідним заповнювачем практично не проведений. Така ситуація стимулює проведення дослідження динамічних характеристик тришарових СЦКО уніфікованих по товщині при дії на них нестационарних навантажень. При значній відмінності фізико-механічних параметрів шарів доцільно застосовувати теорії оболонок з використанням незалежних гіпотез для кожного з шарів. В результаті використання легкого заповнювача утворюється спеціальна тришарова структура з досить великою жорсткістю на згин при вигідному співвідношенні міцності і ваги. У даній роботі розглядається тришарова СЦКО симетричної структури з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем при падінні на вершину її сферичної частини плоскої ударної хвилі. В основу розв'язування задачі покладена теорія оболонок і стержнів, заснована на зсуvinній моделі Тимошенка. В даному випадку задача розв'язувалася на інтервалі $[-\pi/2, \pi/2]$. В силу симетрії відносно вершини сфери при $\alpha = 0$ розглядався інтервал $[0, \pi/2]$. У вершині сфери граничні умови при $\alpha = 0$ запишемо у наступному вигляді:

$$2 \frac{\partial T_{13}^i}{\partial s} - P_2(s_0, t)\delta_{2i} = \rho h \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}, \quad u_1^i = \varphi_1^i = 0,$$

а граничні умови на торці циліндра - жорстке защемлення:

$$u_1^i = u_3^i = \varphi_1^i = 0.$$

Властивості матеріалів суміжних шарів достатньо різні, тому для розрахунків таких оболонкових структур доцільно застосовувати метод скінченних елементів. Дослідження динамічних процесів в таких складних тришарових структурах при значній зміні їх геометричних і фізичних параметрів представляє значний інтерес для конструкторських розробок.

Теоретична модель тришарової СЦКО для аналізу динамічних властивостей за довільних граничних умов віднесена до глобальних систем координат $0-\alpha, z; 0-x, z$ в середній площині конструкції. Тришаровий елемент СЦКО з легким заповнювачем, армованим дискретними ребрами, являє собою пружну структуру, яка складається з внутрішньої, зовнішньої несучих оболонок, легкого заповнювача і набору дискретних

ребер жорстко з'єднаних з зазначеними несучими оболонками. Елемент має постійну загальну товщину h з гладкою серединною поверхнею в системі координат $x,z; \alpha,z$. Координатні лінії x та α на серединній поверхні оболонки при $z=0$ збігається з серединною лінією; координатна лінія z є прямою, ортогональною до серединної поверхні. Будемо вважати величину z додатною, якщо точка знаходиться з боку опукlosti серединної поверхні. Водночас, щоб підвищити точність розрахунків, для дослідження вібраційних характеристик досліджуваної СЦКО використовується метод розділення конструкції на сферичну і циліндричну компоненти оболонки.

Оскільки пакет тришарової СЦКО з неоднорідним заповнювачем складається з матеріалів з різними фізико-механічними властивостями, то для дослідження її динамічної поведінки використаємо скінченно-елементний метод. Згідно конкретних даних створена скінченно-елементна модель тришарової комбінованої сферично-циліндричної структури з дискретно-симетричним легким, армованим ребрами заповнювачем. Скінченно-елементна модель налічувала 43800 об'ємних скінченних Загальна кількість вузлів становить 52566.

Процес формування навантаження на поверхню деформованого об'єкту при падінні плоскої ударної хвили можна визначити, використовуючи геометрично подібну модель і вимірюючи при цьому дифракційний тиск [1].

Отримані результати розрахунку максимальних окружніх деформацій ϵ_{22} по меридіану сферичної частини СЦКО при наявності заповнювача в момент часу $t = 39,5T$, а також наведені результати розрахунку максимальних окружніх деформацій ϵ_{22} вздовж твірної циліндричної частини СЦКО при наявності заповнювача в момент часу $t = 39,5T$. Перші п'ять власних частот тришарової структури становлять: 1- 667,3926 Гц; 2- 667,3991 Гц; 3- 668,5645 Гц; 4- 668,5645 Гц; 5- 883,6591 Гц. Аналіз результатів розрахунків показує, що найбільш небезпечною точкою до руйнування сферичної частини СЦКО є її вершина, а для циліндричної частини точка руйнування розташована на 1/3 її довжини від торця оболонки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: скінченно-елементне моделювання, сферично-циліндрична комбінована тришарова оболонка, плоска ударна хвilia, вібраційний аналіз.

1. Anik'ev I.I., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A. Dynamic Loading of Cylindrical and Spherical Bodies Interacting with a Shock Wave // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, N12 – P. 1405-1410.

P.Z.Lugovyy, S.P. Orlenko

FINITE ELEMENT MODELING AND VIBRATION ANALYSIS OF THREE-LAYER SPHERICAL-CYLINDRICAL COMBINED SHELLS UNDER THE ACTION OF A PLANE SHOCK WAVE

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: plugovyy@ukr.net*

The finite-element modeling and vibration analysis of three-layer spherical-cylindrical combined shells (SCKO) under the action of a plane shock wave was carried out. The results of the calculation of the maximum circumferential deformations along the meridian of the spherical part and along the cylindrical part of the SCKO were obtained. The first five natural frequencies of the three-layer structure are determined. The analysis of the calculation results shows that the most dangerous point for the destruction of the spherical part of the SCKO is its top, and for the cylindrical part, the point of destruction is located 1/3 of its length from the end of the shell

М.В. Марчук, В.С. Пакош, М.М. Хом'як

**СХЕМА МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ОСНОВІ В-СПЛАЙНІВ:
ЗГИН ПОДАТЛИВИХ ДО ТРАНСВЕРСАЛЬНИХ ЗСУВУ ТА СТИСНЕННЯ
ПЛАСТИН**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ,
бул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна;
e-mail: khomnick98@gmail.com*

Метод скінченних елементів (МСЕ) широко використовується в дослідженнях напруженого-деформованого стану (НДС) неоднорідних тіл складної геометрії, зокрема, і шаруватих композитів. Поряд з його перевагами (універсальність, доступність як комерційних, так і вільних пакетів програм) стандартні схеми методу в переміщеннях не завжди забезпечують необхідну точність обчислень на стиках елементів, а для композиційних структур – тривимірний характер НДС, наприклад, по товщині пластини, та задоволення краївих умов для навантаження на лицьових поверхнях. Це зумовлює, з одного боку, розвиток уточнених теорій пластин і оболонок, а з іншого –яву нових схем МСЕ, що орієнтуються на багатошаровість, урахування поперечних деформацій зсуву й стиснення [1] та мають переваги над стандартними апроксимаціями поліномами Лагранжа [2, 3].

Мета цієї праці – побудувати схему МСЕ з використанням квадратичних В-сплайнів [2], як базисних функцій, та апробувати її на модельній задачі циліндричного згину композитної пластини-смуги. Дослідження НДС видовжених пластин-смуг у межах теорії пружності, класичної чи багатьох варіантів уточнених теорій пластин широко висвітлено в літературі, зокрема в [4, 5].

Розглядаємо шарнірно закріплена на видовжених торцях композитну пластину-смугу постійної товщини $2h$ і довжини $2l$, що перебуває в умовах циліндричного згину під дією навантажень на лицьових поверхнях. Вводимо прямокутну систему координат (x, y, z) з початком у центрі пластини, причому вісь z направлена по товщині: $x \in [-l, l]$, $y \in [-\infty, +\infty]$, $z \in [-h, h]$. Припускаємо, що наявна симетрія геометричних параметрів, механічних властивостей, навантаження та краївих умов щодо площини $x=0$. За випадку постійного за координатами x та y навантаження можливо отримати аналітичний розв'язок для проведення тестування запропонованої схеми МСЕ. Крайові умови на видовжених бічних гранях мають вигляд:

$$M(\pm l) = 0, \quad w(\pm l) = 0, \quad u(\pm l) = 0, \quad w_1(\pm l) = 0.$$

Якщо властивості матеріалу, крайові умови і навантаження не змінюються по y , то за умов плоскої деформації всі характеристики НДС будуть функціями тільки двох координат x та z . Тоді загальні двовимірні рівняння уточненої теорії пластин мінімального порядку, що враховують деформації трансверсального зсуву та стиснення [1] можна звести до одновимірної системи звичайних диференціальних рівнянь [1]. Компоненти вектора переміщень подаємо у вигляді:

$$u_x(x, z) = u(x) + \gamma(x)z, \quad u_z(x, z) = w(x) + w_1(x)z/h, \quad (1)$$

а для апроксимації напружень рядами за поліномами Лежандра $P_k(z)$ маємо:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^0(x) + \sigma_{xx}^1(x)P_k(z), \sigma_{xz} = \sum_{k=0.4} \sigma_{xz}^k(x)P_k(z), \sigma_{zz} = \sum_{k=0..3} \sigma_{zz}^k(x)P_k(z). \quad (2)$$

Еквівалентне варіаційне рівняння Лагранжа в матричній формі для описаної вище задачі в диференціальній формі має вигляд:

$$\begin{aligned} & \delta \int \{ [\mathbf{A}]_B \tilde{\mathbf{u}}_B + ([\mathbf{V}]_B^+ - [\mathbf{F}]_B^+) \boldsymbol{\sigma}_+ + ([\mathbf{V}]_B^- - [\mathbf{F}]_B^-) \boldsymbol{\sigma}_- \}^T \delta \tilde{\mathbf{u}}_B dx + \\ & + \int \{ [\mathbf{A}]_M \tilde{\mathbf{u}}_M + ([\mathbf{V}]_M^+ - [\mathbf{F}]_M^+) \boldsymbol{\sigma}_+ + ([\mathbf{V}]_M^- - [\mathbf{F}]_M^-) \boldsymbol{\sigma}_- \}^T \delta \tilde{\mathbf{u}}_M dx = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]_B &= \begin{bmatrix} \Lambda & 0 & 0 & \Lambda \\ 0 & \bar{D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Lambda & 0 & 0 & \Lambda \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}]_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B} & 2c_1\lambda\bar{E}_3 & 0 \\ 0 & 2c_1\lambda\bar{E}_3 & 2c_1\bar{E}_3/h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda/4 \end{bmatrix}, \\ [\mathbf{V}]_B^\pm &= \begin{bmatrix} 0 & h/15 \\ \pm\lambda h^2/10 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & h/15 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{V}]_M^\pm = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda h/6 & 0 \\ 1/6 & 0 \\ 0 & \pm h/10 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{F}]_B^\pm = \begin{bmatrix} 0 & h \\ 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{F}]_M^\pm = \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{u}}_B &= (\gamma, \gamma', w, w')^T, \quad \tilde{\mathbf{u}}_M = (u, u', w_l, w_l')^T, \quad \boldsymbol{\sigma}_\pm = (\sigma_{zz}(\pm h), \sigma_{xz}(\pm h))^T. \end{aligned}$$

Відмітимо, що матриці $[\mathbf{V}]_B^\pm$ і $[\mathbf{V}]_M^\pm$ є специфічними для розглядуваного варіанту уточненої теорії. Вони породжені наявністю в співвідношеннях пружності нормальних напружень $\boldsymbol{\sigma}_\pm$. Вище в (3) використані такі позначення:

$$\bar{B} = 2h\bar{E}_1(1+c_1\alpha), \quad \bar{D} = Bh^2(1+c_2\alpha)/3, \quad \Lambda = 2hk'G_{13}, \quad \lambda = (\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})(\bar{E}_1/E_3),$$

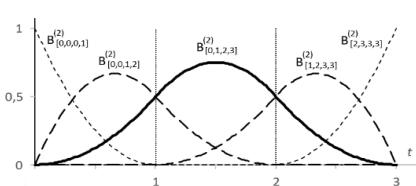
$$\bar{E}_1 = E_1/\Delta_2, \quad \bar{E}_3 = E_3\Delta_2/\Delta_3, \quad \Delta_2 = 1-\nu_{12}\nu_{21}, \quad \Delta_3 = 1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{13}\nu_{31}-\nu_{23}\nu_{32}-2\nu_{21}\nu_{13}\nu_{32},$$

$$k' = 14/15, \quad c_1 = 5/6, \quad c_2 = 7/10, \quad \alpha = \lambda^2\bar{E}_3/E_1,$$

E_i – модулі Юнга, G_{ij} – модулі зсуву, ν_{ij} – коефіцієнти Пуассона ортотропного матеріалу, $E_i/\nu_{ij} = E_j/\nu_{ji}$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Коефіцієнт α враховує ефект стиснення ($e_{33} \neq 0$), який має другий порядок щодо коефіцієнта Пуассона ν_{31} .

Розв’язок варіаційної задачі (3) представимо лінійною комбінацією глобальних базисних функцій $B_i(x)$, які є поліномами степеню $n=2$:

$$(u(x), \gamma(x), w(x), w_l(x))^T = \left\{ \mathbf{u}_j(x) \right\}_{j=1..4} = \sum_{i=1..N} c_i^j B_i(x), \quad B_i(x) \in P_n \cap H_0^1. \quad (4)$$



Ruc. 1.

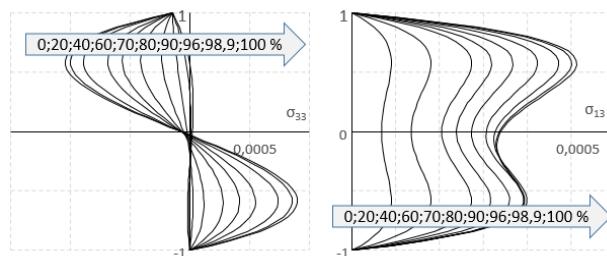
Для одновимірної області L , рівномірно розбитої на $NEL = L/d$ елементів-інтервалів з кроком d , систему з $N = NEL + n$ базисних В-сплайнів у представленні (4) можна отримати зі стандартного набору для $\text{supp } B_i = [0, n+1]$, використовуючи трансляцію (зміщення аргументу). Причому два перші (ліворуч) і два останні (праворуч) сплайні замінюють їхніми відповідниками зі стандартного набору (рис. 1):

$$B_i(x) = B_{[0,1,2,3]}^{(2)}(x/d - i), \quad x = x_i + dt, \quad t \in [0, n+1], \quad x_i = id.$$

В якості прикладу розглянемо пластину-смугу з ортотропного однонаправлено армованого матеріалу з наступними фізико-механічними характеристиками:

$E_1 = 25/145$ ГПа, $E_1/E_2 = 25$, $E_2/G_{12} = 2$, $E_2/G_{23} = 5$, $\nu_{12} = \nu_{23} = 1/4$. Навантаження на верхній лицьовій поверхні: $\sigma_+(x) = -p < 0$, $\sigma_- = 0$, $\tau_+ = 0$, $\tau_- = 0$, $p/E_2 = 0,000145$. Геометричні характеристики пластини-смуги: $l = 0,125$ м – півдовжина, $h/l = 1/5$. Числові результати отримано для кроків розбиття: $d = h$; $h/2$; $h/4$.

Згідно з апроксимаціями (2) можна прогнозувати об'ємний напруженний стан пластини. Бачимо, що дотичні σ_{13} і нормальні σ_{33} трансверсальні напруження мають одинаковий порядок (рис. 2, де вертикальна вісь відповідає z/h , напруження в МПа). Відмітимо явище крайового ефекту, що проявляється в зміні симетричного характеру розподілу σ_{33} відносно серединної поверхні і появі додатних напруженень у центральній частині на краю пластини-смуги, що за деяких умов може привести до появи розшарувань.



Ruc.2.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: уточнена теорія пластин, метод скінченних елементів, В-сплайні, циліндричний згин, деформації поперечного зсуву та стиснення

- Харченко В. М., Марчук М. В., Пакош В. С. Варіант уточненої теорії мінімального порядку податливих до зсуву та стиснення пластин // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. – С. 107–112.
- Grigorenko A., Müller W. H., Wille R., Yaremchenko S. Numerical Solution of Stress-Strain State in Hollow Cylinder by means of Spline Approximation // J. Math. Sci. – 2012. – 180, N 2. – P. 135 – 145.
- Höllig K. Finite Element Methods with B-Splines. – Frontiers in Applied Mathematics 26, Philadelphia: SIAM, 2003. – 146 p.
- Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells: 2nd edn. – New York: McGraw-Hill, 1959 (Reissued 1987). – 580 p.
- Reddy J. N. Theory and analysis of elastic plates and shells: 2nd edn. – Boca Raton, FL: Taylor & Francis Group, CRC Press, 2007. – 548 p.

M.V. Marchuk, V.S. Pakosh, M.M. Khomyak

SCHEME OF THE FINITE ELEMENT METHOD BASED ON B-SPLINES: BENDING OF PLATES SUBJECT TO TRANSVERSAL SHEAR AND COMPRESSION

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NASU
3-b, Naukova Str., 79060, Lviv, Ukraine;
E-mail: mv_marchuk@ukr.net*

Using the refined plate theory of minimum order of differential equations that explicitly accounts for transverse shear and compression strains, the finite element method (FEM) based on quadratic B-splines are constructed. The numerical solution for a simply supported plate strip under uniform transverse load is obtained and stresses distributions across plate thickness is analyzed.

A.C. Колядюк

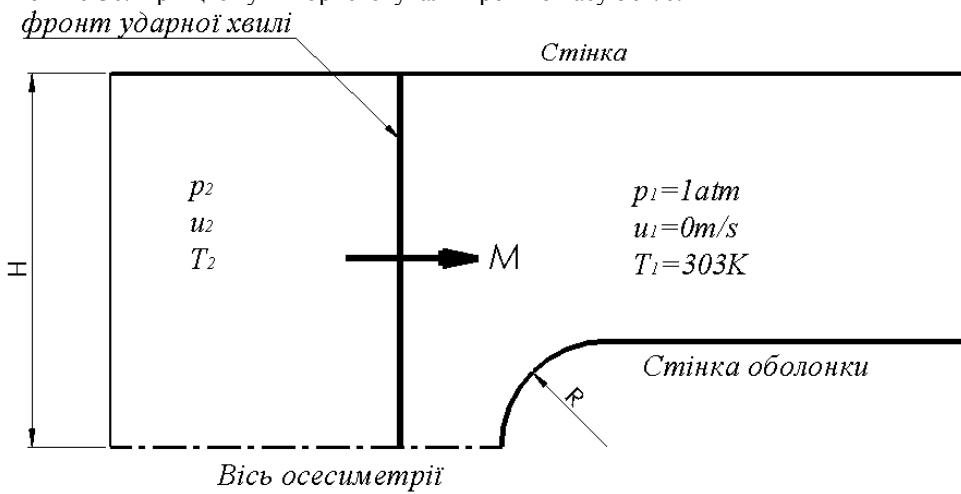
КОЛИВАННЯ СФЕРИЧНО – ЦИЛІНДРИЧНОЇ КОМБІНОВАНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ ДІЇ ПЛОСКОЇ УДАРНОЇ ХВИЛІ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: duk86@outlook.com*

Розв'язувалася задача набігання ступінчастої ударної хвилі з крутим фронтом та стрибком тиску $\Delta P = 1 \times 10^6$ Па на модель типу циліндр-півсфера, що повторює геометрію обтічника (радіус циліндричної і сферичної частин становив 324 мм).

Середовище моделювалося як ідеальний газ, в даному випадку повітря, без врахування в'язкості. Поведінка середовища при розповсюджені хвилі моделювалася за допомогою рівнянь Навье-Стокса усереднених по Рейнольдсу, які в даному випадку спрощуються до рівнянь Ейлера[1]. При цьому поведінка газу моделювалася як суцільна ламінарна течія (без врахування ефектів турбулентності та кавітації), яка для випадку двовимірної осесиметричної задачі описується рівняннями збереження маси, збереження імпульсу та збереження енергії. Динамічна поведінка оболонки товщиною 2мм розглядалася як розв'язок задачі вимушених коливань в явній постановці. При цьому не враховувалося демпфування системи. Деформований стан циліндричної оболонки описується за допомогою рівнянь Кірхгофа-Лява[2].

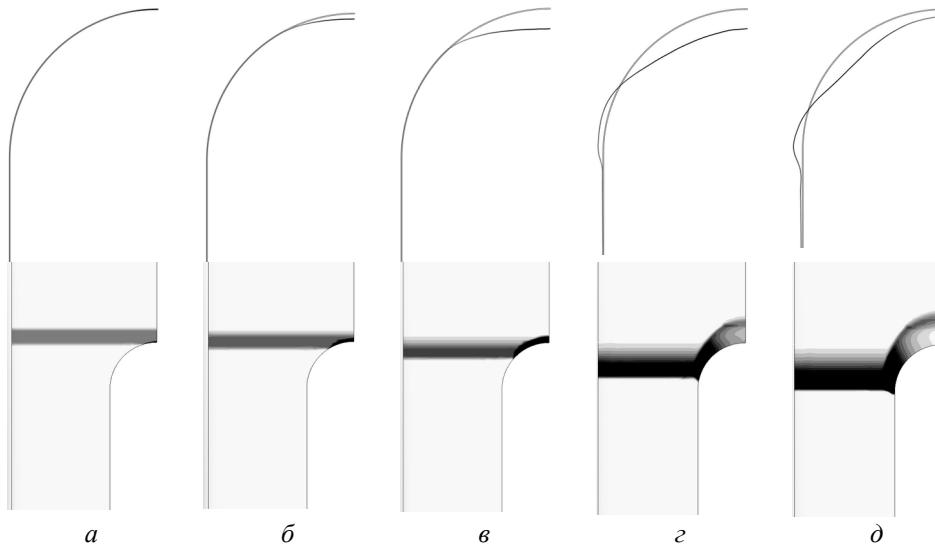
Для розв'язання сумісної задачі використовувався послідовний підхід. На першому етапі вирішувалася задача гідро-газодинаміки. Отримані розподілення дифракційного тиску передавалися в задачу динаміки оболонки на модель типу циліндр-півсфера. Моделювалася поведінка оболонки в в'язкому середовищі протягом 1e-3с. При цьому використовували крок по часу 5e-7с.



Rис. 1.

На рис. 1. представлена розрахункова область сферично – циліндричної комбінованої оболонки та навколошнього середовища. Для моделювання нормальної ударної хвилі для початкового часу ($t=0$) в лівій частині розрахункової моделі (рис.1) задавалися швидкість, тиск та температура повітря отримані з рівнянь термодинамічного стану ударної хвилі[3]. В правій частині розрахункової моделі (рис.1) задавалися швидкість, тиск та температура повітря для нормальних умов. Основними граничними умовами для сумісної задачі являються умови непроникнення на стінках обтічника.

На рис. 2. в верхній частині представлені деформації оболонки а нижній - розподіл тиску ступінчастої ударної хвилі з крутим фронтом для різних моментів часу: а - 0 с; б - 3,31E-05 с; в - 8,63E-05 с; г - 1,99E-04 с; д - 2,67E-04 с.



Rис. 2.

Проведено дослідження взаємодії ступінчастої ударної хвилі з крутим фронтом з сферично-циліндричною комбінованою оболонкою. Визначені параметри навантаження (у вигляді дифракційного тиску) при набіганні ударної хвилі на оболонці. Проведений аналіз коливальних процесів оболонки складної формі при динамічному навантаженні.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гідро-газодинаміка, механіка твердого тіла, оболонка, Навье-Стокса, сумісна задача, в'язке середовище, Рейнольдс.

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978, 736 с
2. Timoshenko S.P., Gere J.M. Mechanics of Materials. – New York: Van Nostrand Reinhold Company, 1972. – 670 с.
3. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит. 1963, 632 с.

A.S. Koliadiuk

OSCILLATIONS OF A SPHERICAL-CYLINDRICAL COMBINED SHELL UNDER THE ACTION OF A PLANE SHOCK WAVE

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: duk86@outlook.com*

The interaction of a stepped shock wave with a steep front with a spherical-cylindrical combined shell was studied. The parameters of the load (in the form of diffraction pressure) during the impact of the shock wave on the shell are determined. The behavior of the medium during wave propagation was modeled using the Reynolds-averaged Navier-Stokes equations. The deformed state of the cylindrical shell is described using the Kirchhoff-Love equations.

А.Ю. Круглий, А.Ю. Дреус¹

**ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ МЕТОДІВ МАШИННОГО
НАВЧАННЯ І НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ В ЗАДАЧАХ СТІЙКОСТІ
ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ**

*¹Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара,
пр. Гагаріна, 72, Дніпро, 49010, Україна, e-mail: dreus@mmf.dnu.edu.ua*

Дослідження поведінки пошкоджених оболонок є актуальною і практично значущої задачею в сучасній інженерній практиці, оскільки такі елементи широко розповсюджені як конструкційні елементи в техніці. Однією з проблем, що обмежує ефективність як теоретичних, так і експериментальних підходів до прогнозування стійкості оболонкових конструкцій з пошкодженнями є велика кількість факторів, що впливають на поведінку конструкцій. До таких факторів належать форма та розмір пошкоджень, їхнє розташування, вид і напрямок зовнішнього навантаження тощо. Слід зазначити, що в реальних задачах такі фактори часто мають стохастичний характер, що ще більш ускладнює задачу.

Наразі в багатьох галузях, у тому числі в механічній інженерії, набувають широкого застосування методи штучного інтелекту, зокрема методи машинного навчання або нейронні мережі. Наприклад, дослідження [1, 4] показало ефективність глибоких нейронних мереж для прогнозування механічних характеристик та стійкості структур з тріщинами, використовуючи великі обсяги даних для навчання моделей. Analogічно, у роботі [3] було продемонстровано, що рекурентні нейронні мережі можуть успішно моделювати динамічну поведінку пошкоджених конструкцій, забезпечуючи високу точність прогнозів. Інші дослідження, такі як робота [2], підтверджують можливість використання нейронних мереж для оцінки впливу різних типів пошкоджень на міцність оболонкових конструкцій, що дозволяє отримати корисні знання для практичних застосувань. Ці результати підтверджують потенціал машинного навчання як потужного інструменту для аналізу та прогнозування поведінки конструкцій з пошкодженнями, що відкриває нові можливості для підвищення точності і ефективності інженерних досліджень.

У представлений роботі проведено порівняння точності моделей, отриманих за допомогою машинного навчання, зокрема, моделлю “неглибокого” навчання, з моделлю, отриману за допомогою навчання нейронної мережі. Для навчання моделей було використано дані 869 експериментів з дослідження впливу отворів і тріщин на стійкість тонкостінних оболонкових конструкцій. Порівняння проводилось у три серії: перша включала 33% даних, друга - 66%, третя - всі дані. В кожній серії дані були випадковим чином поділені так, що 20% використовувались для перевірки точності моделей, а решта даних застосовувалась для навчання.

Результати аналізу показують, що нейронні мережі мають більшу похибку на невеликих вибірках даних, проте з наближенням до 100% використаних даних точність їхнього прогнозування значно зростає, досягаючи кращих результатів порівняно з моделлю, яка навчалась на алгоритмі Random Forest. Наприклад, при використанні 33% даних для нейронної мережі похибка становила 0.2610, що значно більше ніж у випадку

Random Forest, де похибка становила лише 0.0516. Однак при навченні на 100% даних нейронна мережа досягла меншої похибки (0.0267) порівняно з Random Forest (0.03).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: машинне навчання, глибоке навчання, тонкостінні оболонки, стійкість, похибка, аналіз даних

1. Cha Y.J., Choi W., Büyüköztürk O. Deep Learning-Based Crack Damage Detection Using Convolutional Neural Networks // Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering, – 2017. – 32, N 5. – P. 361 – 378.
2. Dung C.V., Anh L.D. Autonomous Concrete Crack Detection Using Deep Fully Convolutional Neural Network // Automation in Construction, – 2019. – 99, P. 52 – 58.
3. Jahanshahi M.R., Masri S.F. Adaptive Vision-Based Crack Detection Using 3D Scene Reconstruction for Condition Assessment of Structures // Automation in Construction. – 2013. – 22. – P. 567 – 576.
4. Щербак Р.О., Шевельова А.Є., Ходанен, Т.В. Використання методів машинного навчання для прогнозування довговічності елементів конструкцій // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій, – 2022. – 35. – P. 84-94.

A.Yu. Kuhlyi, A.Yu. Dreus¹

A COMPARATIVE ANALYSIS OF THE EFFICIENCY OF MACHINE LEARNING METHODS AND NEURAL NETWORKS IN SHELL STRUCTURE STABILITY PROBLEMS

¹Oles Honchar Dnipro National University,
Nauky Ave, 72, Dnipro, 49010, Ukraine, e-mail: dreus@mmf.dnu.edu.ua

This research explores predicting damaged shell structure stability. Machine learning, especially neural networks, offers a solution. By training models on extensive data, we compare neural networks to a traditional model. Results show neural networks, while initially less accurate, improve significantly with more data, outperforming the traditional model. This study highlights machine learning's potential for accurately predicting damaged structure behavior, providing valuable insights for engineering.

Р. І. Тучапський¹

РОЗРАХУНОК ЛОКАЛЬНО НАВАНТАЖЕНОЇ ШАРНІРНО ЗАКРІПЛЕНОЇ ТОНКОЇ НЕЗАМКНУТОЇ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
бул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна;
e-mail: roman.tuch@gmail.com

Побудовано алгоритм чисельно-аналітичного розв'язування задач про напружене-деформований стан локально навантажених тонких ортотропних незамкнутих сферичних оболонок на основі теорії методу $\{m, n\}$ -апроксимації [1, 6, 7, 12], Кірхгофа – Лява та типу Тимошенка.

З вихідних систем рівнянь цих теорій отримано еквівалентні їм системи рівнянь, розв'язаннях відносно перших похідних від узагальнених переміщень і деяких узагальнених напружень відносно координати по меридіану [7].

Ці системи рівнянь записано в спеціальній формі і, подібно до того, як це було зроблено в роботах [2, 4, 5, 8 – 11], за допомогою розвинені у тригонометричні ряди Фур'є по кільцевій координаті всіх величин, що характеризують напружене-деформований стан оболонки, і всіх величин, що характеризують зовнішнє навантаження, зведені до послідовностей незв'язаних нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь.

На основі методу ортогональної прогонки С. К. Годунова [3] побудовано алгоритм послідовностей розв'язувань краївих задач для цих нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь.

У якості прикладу використання цього алгоритму розглянуто задачі про напружене-деформований стан локально навантаженої шарнірно закріпленої по краях тонкої ізотропної незамкнutoї сферичної оболонки. При цьому для моделювання локальних навантажень було використано дельтоподібні функції і їх тригонометричні розвинення [1] по кільцевій координаті.

Проведено порівняння результатів для переміщень і напружень, отриманих з використанням теорії Кірхгофа – Лява й типу Тимошенка й теорії методу $\{m, n\}$ -апроксимації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: сферична оболонка, теорія оболонок Кірхгофа – Лява, метод $\{m, n\}$ -апроксимації, тригонометричний ряд Фур'є, метод ортогональної прогонки С. К. Годунова

1. Бурак Я. Й., Рудавський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: “Інтелект-Захід”, 2007. – 240 с.
2. Василенко А. Т., Григоренко Я. М., Судавтсова Г. К. Решение задач о напряженном состоянии тонких оболочек вращения при локальных нагрузках // Прикладная механика. – 2000. – **36**, № 4. – С. 106 – 113.
те саме: Vasilenko A. T., Grigorenko Y. M., Sudavtsova G. K. Solving problems on the stress state of thin shells of revolution under local loads // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**. – P. 518 – 525.
3. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – Т. **XVI**, вып. 3 (99). – С. 171 – 174.

4. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках // Прикладная механика. – 1996. – **32**, № 6. – С.3 – 39.
те саме: Grigorenko Y. M. Approaches to the numerical solution of linear and nonlinear problems in shell theory in classical and refined formulations // Int. Appl. Mech. – 1996. – **32**. – P. 409 – 442.
5. Мяченков В. И., Григорьев И. В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. – М.: Машиностроение, 1981. – 216 с. ил.
6. Пелех Б. Л., Лазько В. А. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.
7. Тучапський Р. І. Рівняння тонких анізотропних пружних оболонок обертання методу {m, n}-апроксимації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 3. – С. 43 – 56.
те саме: Tuchapskyy R. I. Equations of thin anisotropic elastic shells of revolution in the {m, n}-approximation method // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. – Vol. **226**, No. 1. – P. 52 – 68.
8. Emelyanov I. G., Kuznetsov A. V. The Stressed State of Shell Structures under Local Loads // J. Mach. Manuf. Reliab. – 2014. – Vol. **43**, No. 1. – P. 42 – 47.
9. Grigorenko Alexander Ya., Müller Wolfgang H., Grigorenko Yaroslav M., Vlaikov Georgii G. Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory: general theory and applications of classical theory – Volume 1. – Singapore: Springer Singapore, 2016. – 116 p.
10. Grigorenko Ya. M., Bespalova E. I., Urusova G. P. Solving stationary problems of shell theory with allowance for transverse reduction. In: Pietraszkiewicz W., Kreja I. (Eds.). Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 2: Proceedings of the 9th SSTA Conference, Gdańsk – Jurata, Poland, 14 – 16 October 2009 (1st ed.). – CRC Press, 2009. – P. 245 – 248.
11. Grigorenko Y. M., Bespalova E. I., Urusova G. P. Stationary deformation of compound shell structures under arbitrary loadings. In: Pietraszkiewicz W., Górski J. (Eds.). Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 3: Proceedings of the 10th SSTA Conference, Gdańsk, Poland, 16 – 18 October 2013. – Taylor & Francis Group, London, 2014. – P. 93 – 96.
12. Marchuk M., Tuchapskyy R., Nespliak D. Numerical use of {m, n}-approximation method thermoelastic anisotropic thin shell theory equations represented in a special form // Computers & Mathematics with Applications. – 2019. – Vol. **77**, Issue 10. – P. 2740 – 2763.

R. I. Tuchapskyy¹

CALCULATION OF A LOCALLY LOADED HINGED THIN OPEN SPHERICAL SHELL

¹Ya. S. Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences,
Naukova Str., 3-b, 79060, Lviv, Ukraine;
e-mail: roman.tuch@gmail.com

The problems of calculating the stress-strain state of locally loaded thin orthotropic open spherical shells based on the Kirchhoff – Love theory and some refined theories are considered.

В . В . Гайдайчук¹, К.Е. Котенко²

**ДИНАМІКА ТРИШАРОВИХ НЕОДНОРІДНИХ ЦІЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК
ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ**

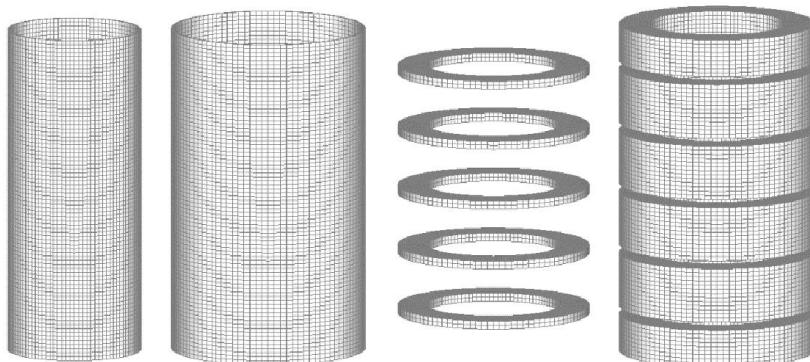
¹Київський національний університет будівництва і архітектури, 31, 03680, Київ,
Україна; e-mail:viktor_gaydaychuk@bigmir.net

²Інститут механіки ім. С.П. Тимошенко НАНУ, вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ,
Україна; e-mail:box9691@bigmir.net

Збільшення об'ємів і розширення специфіки використання оболонкових шаруватих структур, що спостерігається останнім часом, стали позитивним результатом значного ряду теоретичних досліджень [1-3]. В цій ситуації доцільним представляється накопичення досвіду чисельних розрахунків з врахуванням конструкційних особливостей шаруватих оболонкових структур.

На прикладі тришарової симетричної та несиметричної циліндричної оболонкової структури з полімерним дискретно-симетричним армованим ребрами заповнювачем розглянуто вплив пружності заповнювача на її коливальний процес при внутрішньому нестационарному навантаженні. Досліджувались переходні динамічні процеси вимушених коливань структури при різних співвідношеннях пружності її тришарового пакету.

Задачі динамічного аналізу структури розв'язувалися скінченно-елементним методом. Для виконання чисельних розрахунків була створена скінченно-елементна модель структури у програмно-розрахунковому середовищі *Nastran*, приведена на рис. 1.



Rис.1.

Скінченно-елементна модель створювалася з використанням тривимірного об'ємного скінченого елементу *Solid*, який по критеріям якості: звуженню і викривленню, внутрішнім кутам та інших показниках, відповідав вимогам забезпечення розрахункової сітки на скінченно-елементному рівні [4]. Модель тришарової циліндричної структури налічувала у внутрішній несучій оболонці 16000 елементів, у зовнішній – 16000, а в армуючих ребрах – 18000. Кількість скінченних елементів легкого заповнювача дорівнювала 126000. Загальна кількість скінченних елементів у моделі складала 176000 елементів і 186300 вузлів.

На рис. 2 наведені графіки чисельних результатів дослідження максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 8,5T$ для несиметричної оболонки. В цьому варіанті співвідношення модулів пружності складає $E_1/E_t = 500$.

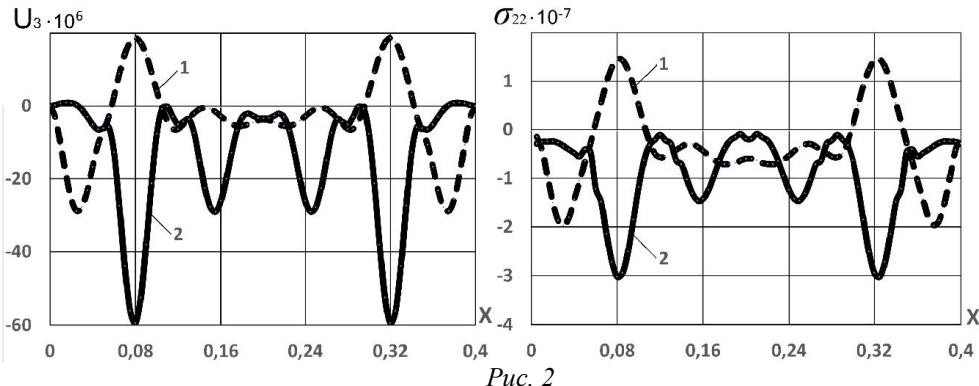


Рис. 2

На рис. 3 наведені результати максимальних величин параметрів характеристики-напруженого-деформованого стану в момент часу $t = 4,5\text{T}$ при $E_{1,2}/E_t = 50$.

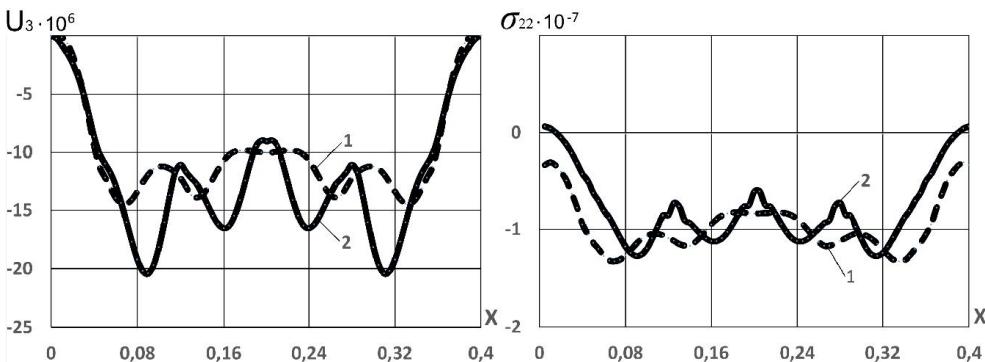


Рис. 3

Отримані результати дослідження динамічних процесів в розглянутих тришарових структурах при різних геометричних і фізико-механічних параметрах можуть представляти значних інтерес для конструкторських розробок.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тришарова циліндрична оболонка, скінченно-елементна модель, полімерний заповнювач, нестационарне навантаження, несучий шар.

1. Головко К.Г., Луговой П.З., Мейши В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках (под ред. акад. НАН Украины А.Н. Гузя). – Киев: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
2. Луговий П.З., Мейши В.Ф., Мейши Ю.А. Динаміка конструктивно-неоднорідних оболонкових структур: монографія – К.: Ліра-К, 2022. – 336 с.
3. Lugovoi P. Z., Gaidaichuk V.V., Skosarenko Yu.V., Kotenko K.E. Stress–Strain State of Three-Layer Cylindrical Shells with Reinforced Light Core Under Nonstationary Loading "International Applied Mechanics", 2021, 57(4), P. 395–404.
4. Рычков С. П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. – М.: ДМК Пресс, 2016. – 784 с.

V.V.Haydaychuk¹, K.E. Kotenko¹

¹ Kyiv National University of Construction and Architecture, Povitryanyh Syl ave. 31, 03680, Kyiv, Ukraine;

² S. P. Timoshenko Institute of the National Academy of Science, P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine

DYNAMICS OF THREE-LAYER INHOMOGENEOUS SHEELS UNDER NON-STATIONERY LOADS

Dynamic transient processes are studied and the results of the assessment of the influence of geometrical and physical-mechanical parameters of bearing layers and polymer aggregate on the behavior of a three-layer cylindrical shell structure under non-stationary loading are given.

Н.Д. Яковенко¹, О.В. Доля²

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕФЕКТІВ ТЕРМОСТРУКТУРНО-МЕХАНІЧНОЇ ЗВ’ЯЗАНОСТІ ЗА УМОВ ОПРОМІНЕННЯ ПІВПРОСТОРУ

*¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: term@inmech.kiev.ua*

*²Київський національний університет будівництва та архітектури,
проспект Повітряних Сил, 31, Київ, Україна;
e-mail: dolia.ov@knuba.edu.ua*

Розглядається напружено-деформований стан при імпульсному тепловому навантаженні півпростору та проводиться аналіз ефектів термоструктурно-механічної зв’язаності. Постановка динамічної осесиметричної зв’язаної задачі включає класичні балансові та кінематичні рівняння. Термомеханічна поведінка матеріалу описується за допомогою моделі течії Боднера-Партома, узагальненої на випадок врахування залежності параметрів моделі від фазового складу матеріалу [1]. Задача розв’язується чисельно за допомогою ітераційного методу на кожному часовому кроці та МСЕ.

Для порівняння вкладу механізмів зв’язаності розглядаються наступні випадки: 1) термоструктурно-механічна зв’язаність відсутня; 2) має місце лише термопружний механізм зв’язаності; 3) діє лише ефект внутрішньої дисипації; 4) має місце лише ефект прихованої теплоти за мікроструктурних перетворень; 5) діють всі механізми зв’язаності. Встановлено, що термоструктурно-механічна зв’язаність впливає на розподіл залишкових напружень та непружних деформацій.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: імпульсне теплове опромінення, мікроструктурні перетворення, модель Боднера-Партома, термоструктурно-механічна зв’язаність

1. Senchenkov I. K., Oksenchuk N. D. Modeling of a nonisothermal flow with regard for the dependence of plastic properties on the microstructure of a material // J. Math. Sci. – 2013. – V. 190, N 6. – P. 796-803. – <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1289-6>

N.D. Yakovenko¹, O.V. Dolia²

NUMERICAL SIMULATION OF EFFECTS OF THERMOSTRUCTURAL MECHANICAL COUPLING UNDER PULSE IRRADIATION OF HALF-SPACE

*¹S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: email@inmech.kiev.ua*

*²Kyiv National University of Construction and Architecture,
Povitrianykh Syl Avenue, 31, Kyiv, Ukraine;
e-mail: dolia.ov@knuba.edu.ua*

The dynamic problem of the thermal pulse loading of half-space is considered. A flow model is used to describe of inelastic material behavior. The problem is solved numerically by the time step integration method, iterative method and FEM. A quantitative estimations of temperature effects of thermostructural mechanical coupling is given.

Я.О. Жук^{1,2}, І.К. Сенченков², М.М. Мельниченко¹

**ДИНАМІЧНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН МЕТАЛЕВОГО
СТЕРЖНЯ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ ТОРЦЯ**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
просп. Глорії, 4е, 01033, Київ, Україна;

e-mail: yaroslavzhuk@knu.ua, realcrystallab@univ.kiev.ua

²Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,

бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: term@inmech.kiev.ua

Динамічне навантаження поверхонь металічних деталей як силовими імпульсами, так і короткими імпульсами лазерного опромінення або електронними пучками є сучасним технологічним засобом зміщення і підвищення стійкості до зношування та втомної довговічності елементів конструкцій і основою для розробки систем лазерних систем для мікро- і нанообробки [1,2]. Для вивчення таких процесів використовується постановка зв'язаної задачі термомеханіки, розвинута із застосуванням уточненої моделі поведінки фізично нелінійних матеріалів, придатної для описання складної реакції матеріалу на динамічне навантаження в широкому інтервалі температур [3,4].

Розглядається круговий циліндр радіусу R , довжина якого дорівнює L . На торці $z=0$ діє короткосрочний тепловий імпульс, який моделюється тепловим потоком через границю

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} = \begin{cases} q_0 \sin(\pi t/t_p), & 0 \leq t \leq t_p, \\ 0, & t > t_p, \end{cases} \quad z=0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = 0, \quad z=L, \quad r=R.$$

Тут θ – температура, t – час, k – коефіцієнт теплопровідності, q_0 – параметр теплового потоку; t_p – тривалість імпульсу. Вся поверхня стержня разом з торцями є теплоізольованою і вільною від навантажень.

Для спрощення постановки задачі і виділення основних суттєвих закономірностей досліджується модельна задача для випадку $R \ll L$. Задача є суттєво нелінійною і розв'язується чисельно за допомогою методики, розвинутої у [3,5] для випадків осесиметричних і плоских задач про зв'язану термомеханічну поведінку тіл з фізично нелінійних матеріалів.

Вважається, що циліндр виготовлено із сталі 35ХМА. Розрахунки проводились для наступних геометричних параметрів циліндра $R = 5 \cdot 10^{-6}$ м, $L = 2 \cdot 10^{-3}$ м. Тривалість теплового імпульсу $t_p = 10^{-7}$ с. Параметр теплового потоку q_0 змінювався в межах $10^7 - 5 \cdot 10^7$ кВт/м². Початкова температура диску θ_0 дорівнювала 20 °C.

На рис. 1 показані результати, які ілюструють розповсюдження і відбивання імпульсу напруження, що виникає при дії теплового імпульсу з параметрами $q_0 = 5 \cdot 10^7$ кВт/м² і $t_p = 0,1$ мкс. Моменти часу, для яких побудовані розподіли напруження вздовж осі стержня, вказані числами. Для вибраних параметрів задачі максимальна величина стискаючого напруження σ_{zz} в імпульсі не перевищує 0,02 МПа.

Збільшення значень напружень і динамічних змін температури в імпульсі вдається досягти при зміні граничних умов на опроміненому торці [6].

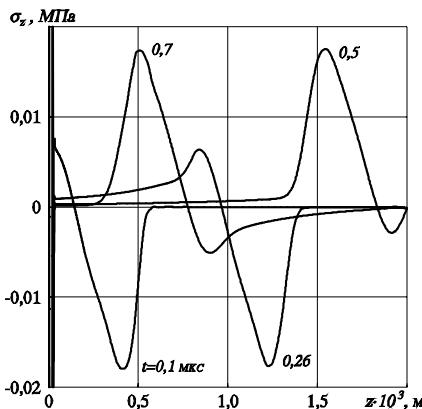


Рис. 1.

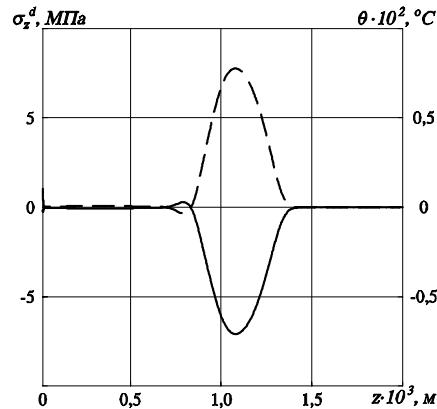


Рис. 2.

Типові результати розрахунків для випадку гладкого закріплення представлена на рис. 2. Тут суцільною і штриховою лініями показані розподіли напружень σ_{zz} і температури відповідно вздовж осі циліндра в момент часу $t = 0,26$ мкс. Відзначимо характерну для термопружних хвиль синфазність змін напруження і температури. Залежність величини стискаючого напруження від параметра теплового імпульсу є лінійною для дослідженого інтервалу геометричних і фізичних параметрів задачі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: імпульсне навантаження, металічний стержень, зв'язана задача термомеханіки, теплове опромінення

1. Qin Y., Zou J., Dong C. et al. Temperature-stress fields and related phenomena induced by a high current pulsed electron beam // Nuclear Instrum. & Meth. In Phys. Research. Part B. - 2004. - V. 225. - P. 544-554.
2. Backus S., Durfee C.G., Murnane M.M., and Kapteyn H.C. High Power Ultrafast Lasers // Review of Scientific Instruments. - 1998. - vol. 69, no. 3. - P. 1207-1223.
3. Сенченков И.К., Жук Я.А. Термомеханический анализ одной модели термовязко-пластического деформирования материалов // Прикл. механика. - 1997. - 33, № 2. - С. 41-48.
4. M.I.A. Othman and Marin M. Effect of thermal loading due to laser pulse on thermoelastic porous medium under G-N theory // Results in Physics. - 2017. - vol. 7. - P. 3863-3872.
5. Zhuk Ya.A., Senchenkov I.K., Kozlov V.I., and Tabieva G.A. Axisymmetric dynamic problem of coupled thermoviscoplasticity // International Applied Mechanics. - 2001. - vol. 37, no. 10. - P. 1311-1317.
6. Zhuk Y.A., Senchenkov I.K., and Boichuk O.V. Dynamic processes in a thin cylinder subject to thermal irradiation at one end // Dopovidi NAN України. - 2007. - no. 2. - P. 45-51.

Y.A. Zhuk^{1,2}, I.K. Senchenkov², M.M. Melnichenko¹

DYNAMIC STRESS-STRAIN STATE OF METAL ROD UNDER PULSE LOADING OF ITS FACE

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv
Academician Glushkov Ave., 4e, 01033, Kyiv, Ukraine;
e-mail: yaroslavzhuk@knu.ua, realcrystallab@univ.kiev.ua

² S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: term@inmech.kiev.ua

Dynamic stress-strain state and temperature variation caused by the thermal impact at the face of metal rod are investigated. The statement of the dynamic coupled problem of thermomechanics is used along with the refined thermodynamically consistent theory of inelastic material behavior. It is solved numerically by the finite element method. Main properties of the stress pulse propagation accompanied with temperature variation are studied.

І. К. Сенченков¹, О.П. Червінко¹, О.В. Доля²

ЗАЛИШКОВІ НАПРУЖЕННЯ І ДИСТОРСІЯ ПРИ НАПЛАВЛЕННІ ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: term@inmech.kyiv.ua

²Київський національний університет будівництва і архітектури,
проспект Повітряних Сил, 3, 03037, Київ, Україна
e-mail: elena_367@ukr.net

Наплавлення є найбільш розповсюдженю технологією виготовлення і реновації елементів конструкцій в різноманітних галузях промисловості [1]. Розробка метода математичного моделювання термомеханічних процесів при наплавленні є актуальною проблемою з точки зору економічності і подовження ресурсу деталей. В даній роботі представлені результати чисельного моделювання процесу наплавлення елементів техніки типу «вал», що моделюються порожнистим циліндром.

Схема наплавки кільцевими валиками наведена на рис.1. Матеріал циліндура і шару наплавки – сталь 35ХМА. Процес моделюється послідовним накладанням кільцевих валиків з інтервалом 98 сек.

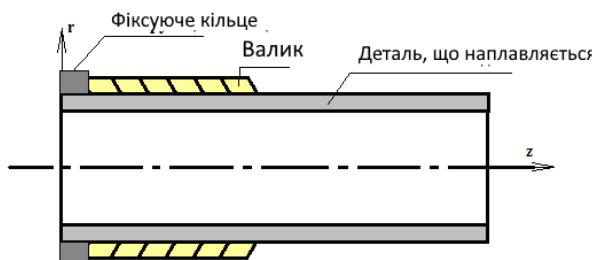


Рис. 1

Модель процесу базується на теорії в'язкопластичних тіл, що ростуть, уніфікованої моделі течії Боднера-Партома, термокінетичних діаграмах для визначення поточних фазових перетворень в матеріалі. Використовуються експериментально визначені залежності фізико-механічних властивостях матеріалу від температури і фазового складу. Розрахунок проводиться методом скінчених елементів.

На рис. 2 наведені розподіли залишкової інтенсивності напружень s_i (рис. 2 а), інтенсивності пластичних деформацій e_i^P (рис. 2 б) і осьового розподілу залишкового внутрішнього радіусу r (рис. 2 в), що зменшується внаслідок стискаючої дії наплавленого шару металу при остиганні. Відмітимо, що поверхневий шар основного металу і метал наплавки на ~80% набуває фазу бейніту. Пластиично деформується лише метал наплавленого шару.

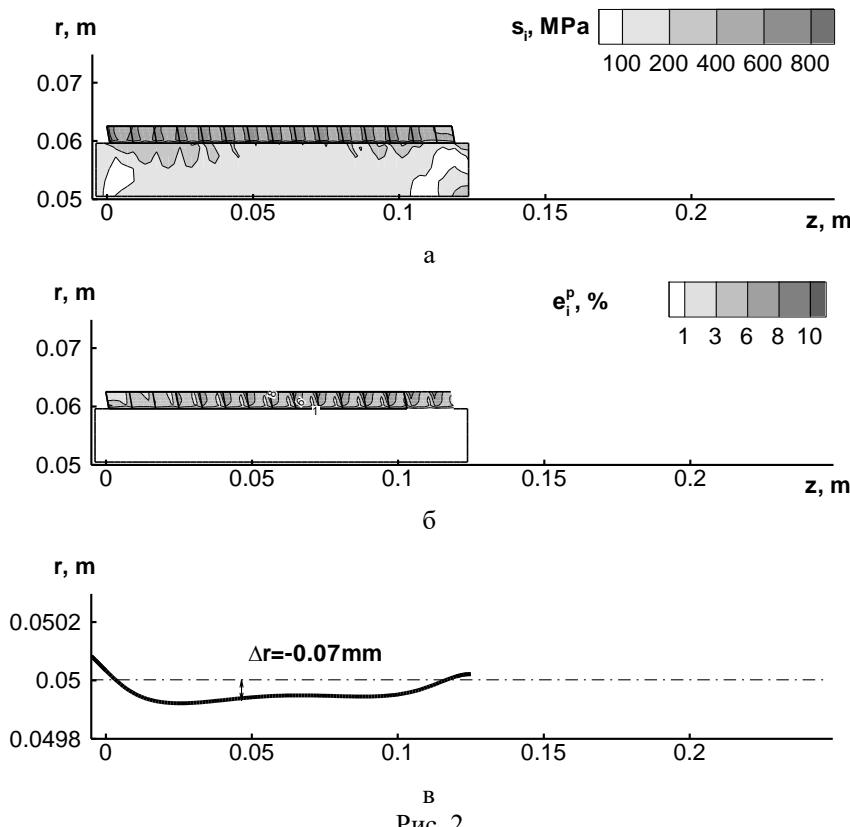


Рис. 2

Видно, що за виключенням краївих зон, має місце зменшення діаметру внутрішньої порожнини, що може бути використано для реновації зношеної внутрішньої поверхні елемента.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: циліндр, наплавлення, залишкові напруження, дисторсія.

- Рябцев И.А., Сенченков И.К., Турый Э.В. Наплавка. Материалы, технологии, математическое моделирование // Гливице. Изд-во Силезского политех. инст-та. – 2015. – 590 с.

I.K.Senchenkov¹, O.P. Chervinko¹, O.V. Dolia²

RESIDUAL STRESSES AND DISTORTION UNDER SURFACING OF HOLLOW CYLINDER

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine.

e-mail: term@inmech.kiev.ua

² Kyiv National University of Construction and Architecture,
Povitrijnolotsky Ave. 31, 03056, Kyiv, Ukraine
e-mail: elena_367@ukr.net

Surfacing residual stresses and distortion for hollow cylinder are numerically investigated. Microstructural transformations and temperature dependance of material properties are taken into account. Reduction of inner diameter of cylinder is evaluated.

Key words: cylinder, surfacing, residual stresses, distortion.

М.О.Бабешко¹, В.Г.Савченко²

**КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ З ВРАХУВАННЯМ
ЗАЛЕЖНОСТІ ВЛАСТИВОСТЕЙ ІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ ВІД ВИДУ
НАВАНТАЖЕННЯ**

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,

бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна,

¹e-mail: bab41@ukr.net

²e-mail: savchenko_vitalij@ukr.net

На основі узагальненої теорії термопружнопластичного деформування ізотропних матеріалів вздовж траекторій малої кривизни розроблено алгоритми розв'язування відповідних краївих задач для осесиметричних просторових тіл та тонких оболонок. Узагальнення теорії термопластичності полягає в формулуванні визначальних рівнянь [1,4], які описують деформування матеріалів в процесах неізотермічного навантаження з врахуванням залежності властивостей матеріалів від температури, історії навантаження, виду напруженого стану та пластичного розпушення. На відміну від класичної теорії пластичності припускається нелінійність зміни об'ємної деформації за межею пружності матеріалу, а також залежність діаграм деформування від виду напруженого стану. Рівняння містять дві функціональні залежності, одна з яких пов'язує перші інваріанти тензорів напружень і деформацій при певних значеннях параметра виду напруженого стану, а інша – другі інваріанти відповідних девіаторів. За параметр виду напруженого стану прийнято кут подібності девіаторів. Функціональні залежності конкретизуються з використанням базових експериментів на трубчастих зразках в процесах пропорційного навантаження на розтяг, стиск і кручення або ж на розтяг і комбінацію розтягу і внутрішнього тиску при кількох конкретних значеннях температури. Розроблено методики конкретизації цих залежностей і з їх використанням виконано експериментальне обґрунтuvання визначальних рівнянь [4]. Визначальні рівняння лінеаризовано методом додаткових деформацій, тобто записано у вигляді закону Гука з додатковими членами, до складу яких входять теплові і пластичні складові деформації, а також середня пластична деформація (пластичне розпушення).

Визначальні рівняння разом з рівняннями рівноваги та співвідношеннями Коші використовуються для розв'язування задачі термопластичності. Для врахування історії навантаження процес деформування необхідно розділити на ряд етапів. Дослідження напруженого-деформованого стану тіла в процесах неізотермічного пружнопластичного деформування зводиться до послідовного розв'язування задачі нестационарної тепlopровідності по визначеню температури і задачі термопластичності по визначеню переміщень, деформацій і напружень в тілі для фікованих моментів часу. Розроблено методики розв'язування задачі тепlopровідності для тіл та оболонок.

При визначенні напруженого-деформованого стану тіла використовується поетапний метод послідовних наближень, у відповідності з яким на кожному етапі навантаження розв'язок задачі термопластичності знаходиться методом послідовних лінійних наближень, тобто в кожному наближенні розв'язання нелінійної задачі зводиться до рішення лінійної задачі теорії пружності з деякими додатковими членами. Ці додаткові члени визначаються за результатами розв'язання задачі в попередньому наближенні при використанні вищезгаданих функціональних залежностей.

Розв'язання краївих задач по визначеню температури та напруженого-деформованого стану в тілі, яке розглядається, відбувається з використанням напіваналітичного методу, згідно з яким відповідні величини представляються у вигляді тригонометричних рядів у коловому напрямку, а розв'язок будеться у меридіональному перерізі.

Для визначення термопружнопластичного стану осесиметричних просторових тіл та оболонок тіла сформульовано розв'язувальні системи та розроблено методи розв'язання відповідних краївих задач.

Для просторових тіл обертання використовується варіаційне рівняння Лагранжа та метод скінчених елементів. Задача зводиться до розв'язання в кожному наближенні на кожному етапі навантаження систем алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти і праві частини яких обчислюються за результатами попереднього наближення. При розв'язанні систем алгебраїчних рівнянь використовується метод Гауса.

Для оболонок обертання при використанні гіпотез Кірхгофа - Лява задача зводиться до розв'язання в кожному наближенні на кожному етапі навантаження систем звичайних диференційних рівнянь, коефіцієнти та вільні члени яких обчислюються за результатами попереднього наближення. При розв'язанні систем диференційних рівнянь використовується метод Рунге-Кутта з дискретною ортогоналізацією та нормалізацією [2].

З використанням розроблених алгоритмів досліджено напружене-деформований стан деяких елементів конструкцій, виготовлених із матеріалів, механічні характеристики яких залежать від виду напруженого стану та пластичного розпушення матеріалу вже при малих деформаціях [2,3].

Як приклад наведемо результати дослідження нестационарного температурного поля і стану гірського масиву, в який вбудована схованка для зберігання при низькій температурі високотехнологічного устаткування і приладів. Масив постійно знаходиться під дією зовнішнього середовища високої температури. Для забезпечення потрібного рівня температури масив обладнаний системою внутрішнього охолодження у вигляді циліндричних трубок, по яких циркулює низькотемпературна рідина. Проведена оцінка стану системи охолодження поблизу окремо виділеної області біля трубки. Для цього виділена область моделюється порожнистим двошаровим циліндром. Внутрішній шар ($0,1 \leq r \leq 0,15\text{m}$) виготовлено з чавуну марки СЧ00, а зовнішній ($0,15 \leq r \leq 0,5\text{m}$) має властивості близькі до бетону. В початковий момент часу циліндр знаходиться при постійній температурі. Потім з середини циліндр охолоджується рідиною температури -50°C , а ззовні нагрівається середовищем температури $\theta = 500(1 + 0,1\cos\varphi)^{\circ}\text{C}$, яка моделює дію оточуючого матеріалу на виділений фрагмент. Розрахунки температури та напружене-деформованого стану виконано до 200 хвилин нагрівання з кроком 2 хвилини, тобто за 100 етапів. Встановлено, що в розрахунку з врахуванням залежності властивостей матеріалу від виду напруженого стану величина накопиченої пластичної деформації в околі зовнішнього циліндра в районі найвищої температури по коловій координаті приблизно в 4 рази перевищує відповідні значення, одержані в розрахунку по традиційній теорії пластичності малої кривизни.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: термопластичність, процеси деформування ізотропних матеріалів, вид напруженого стану, пластичне розпушення матеріалу

1. Babeshko M., Galishin A., Savchenko V., and Tormakhov M. Thermoviscoplasticity Equations of Isotropic Material with Stress Mode Dependence // Advances in Mechanics. Current Research Results of the NAS of Ukraine (2023). Editors: Aleksander N. Guz-Holm Altenbach-Viacheslav Bogdanov-Vladimir M. Nazarenko / ISSN 1869-8433 ISSN 1869-8441 (electronic) Advanced Structured Materials P 21-38. ISBN 978-3-031-37312-1 ISBN 978-3-031-37313-8 (eBook) <https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8>
2. Babeshko, M.E., Savchenko, V.G.: Allowing for the Third Deviatoric Stress Invariant in Analyzing the Deformation of Thin Shells// Int. Appl. Mech. - 2018. - **54**, N 2. - P. 163–171.
3. Savchenko V.G. A Method to Study the Nonaxisymmetric Plastic Deformation of Solids of Revolution with Allowance for the Stress Mode // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, N 9. -P.975– 981.
4. Shevchenko, Yu.N., Terekhov, R.G., Tormakhov, N.N.: Constitutive Equations for Describing the Elastoplastic Deformation of Elements of a Body along Small-Curvature Paths in View of the Stress Mode //Int. Appl. Mech.-2006. - **42**, N4. - P. 421 – 430.

M.O.Babeshko¹, V.G.Savchenko²

S.P.Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P.Nesterov Str.,3, 03057, Kyiv, Ukraine;

¹e-mail: bab41@ukr.net,

²e-mail: savchenko_vitalij@ukr.net

BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THERMOPLASTICITY TAKING INTO ACCOUNT THE DEPENDENCE OF THE PROPERTIES OF ISOTROPIC MATERIALS ON THE TYPE OF LOAD

On the basis of the generalized theory of thermoplasticity of isotropic materials, algorithms for solving the corresponding boundary value problems for axisymmetric spatial bodies and thin shells have been developed. Constitutive equations are used that describe the deformation of materials in non-isothermal loading processes, taking into account the dependence of material properties on temperature, load history, stress mode, and plastic softening. Numerical results are presented.

О .Л .Деркач

**АНАЛІЗ АКТИВНОГО ДЕМПФІРУВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ
БАГАТОШАРОВИХ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ ЗМИШАНОГО
ВАРИАНТУ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

*Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України,
бул. Садово-Ботанічна, 2, 01014, Київ, Україна;
e-mail: derkach@ipp.kiev.ua*

Впровадження сучасних композитних матеріалів у практику проектування та виготовлення нових зразків техніки енергетичного та авіаційного машинобудування дозволяє досягти їх високої конкурентоспроможності. Водночас умови експлуатації такої техніки часто пов'язані з дією інтенсивних нестационарних навантажень, що потребує розробки ефективних методів забезпечення їх вібраційної надійності. Так, в останні десятиліття отримали розвитку прикладні дослідження у галузі механіки звязаних полів в елементах конструкцій щодо активного та активно-пасивного (гібридного) демпфірування коливань за допомогою п'єзоелектричних перетворювачів. До переваг таких методів слід віднести можливість забезпечення високої демпфірувальної здатності конструктивних елементів у широкому діапазоні частот їх коливань та можливість забезпечення суттєвого зменшення амплітуд коливань у початкові моменти часу [1]. Необхідність застосування адаптивних методів контролю за умов активного демпфірування коливань обумовлює особливу актуальність розробки математичних моделей композитних конструкцій із в'язкопружними та п'єзоелектричними шарами матеріалу, що мають електров'язкопружні властивості. Так, зокрема, для побудови розрахункових рівнянь динаміки в'язкопружних та електров'язкопружних конструкцій в [1] було використано варіаційні рівняння Лагранжа у згортках. При цьому вважалося, що для шарів на поверхнях контакту виконуються умови нерозривності відповідних переміщень. Для уточнення розрахункової моделі пластин та оболонок, які складаються з N шарів матеріалу, доцільним є застосування математичних моделей, що враховують нерозривність напружень. Так, для додаткового визначення напружень на поверхнях розділу шарів у даній роботі застосовано функціонал Хелінгера-Рейсснера з умовою, яка встановлює незалежність напружень, що діють між шарами, від переміщень та електричного потенціалу. Таким чином, метою представлена роботи є розробка уточнених моделей пластин з пасивними в'язкопружними і активними п'єзоелектричними шарами на основі даного змішаного варіаційного принципу.

У доповіді розглядаються алгоритми застосування варіаційного рівняння Хелінгера-Рейсснера у згортках, а також його слабка варіаційна постановка змішаної задачі електров'язкопружності безпосередньо у частотному просторі Фур'є. Розглянуто варіаційне рівняння з використанням півторалінійних форм, які представлені відносно частотних зображень Фур'є переміщень та електричного потенціалу:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \left\{ - \int_{V^{(k)}} \left[\omega^2 \hat{\mathbf{u}}^{(k)}(\omega) + \mathbf{u}^{(k)}(0) + i\omega \mathbf{u}^{(k)}(0) \right] \cdot \overline{\hat{\mathbf{v}}^{(k)}} dV + \right. \\ & \left. + \int_{V^{(k)}} \hat{\sigma}_{kl}^{(k)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\phi}; \omega) \cdot \overline{\hat{\epsilon}_{ij}^{(k)}(\hat{\mathbf{v}})} dV - \int_{S_\sigma} \hat{\mathbf{p}}^{(k)}(\omega) \cdot \overline{\hat{\mathbf{v}}^{(k)}} dS \right\} d\omega = 0; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^N \left\{ \int_{V^{(k)}} \hat{D}_l^{(k)}(\hat{\phi}, \hat{\mathbf{u}}) \cdot \overline{\hat{E}_i^{(k)}(\hat{\psi})} dV - \int_{S_q} \hat{q}^{(k)}(\omega) \cdot \overline{\hat{\psi}^{(k)}} dS \right\} d\omega = 0,$$

де $\hat{\mathbf{p}}(\omega)$ – зображення Фур'є вектора зовнішніх сил, прикладених до поверхні S_σ , і $\hat{q}^{(k)}(\omega)$ – заряд на поверхні S_q ; $\mathbf{u}(0)$, $\dot{\mathbf{u}}(0)$ – вектор початкових переміщень та швидкостей, відповідно; $\hat{\sigma}_{kl}$ і $\hat{\varepsilon}_{ij}$ – зображення Фур'є тензорів напружень та деформацій розрахункового шару матеріалу; \hat{D}_l і \hat{E}_i – зображення Фур'є електричної індукції та напруженості електричного поля; $\rho^{(k)}$ – густина матеріалу.

Варіаційні рівняння (1) дають змогу безпосередньо врахувати частотно-залежні комплексні модулі матеріалу. Тому фізичні залежності для п'єзоелектричного матеріалу представимо у частотних зображеннях Фур'є:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ij}^{(k)}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\phi}; \omega) &= \hat{C}_{ijkl}^{E(k)}(\omega) \hat{\varepsilon}_{kl}^{(k)}(\hat{\mathbf{u}}) - \hat{e}_{kij}^{(k)}(\omega) \hat{E}_k^{(k)}(\hat{\phi}); \\ \hat{D}_i(\hat{\phi}, \hat{\mathbf{u}}) &= \hat{e}_{ikl}^{(k)}(\omega) \hat{\varepsilon}_{kl}^{(k)}(\hat{\mathbf{u}}) + \hat{\kappa}_{ik}^{\varepsilon(k)}(\omega) \hat{E}_k^{(k)}(\hat{\phi}),\end{aligned}\quad (2)$$

де \hat{C}_{ijkl}^E , $\hat{\kappa}_{ik}^\varepsilon$ – тензор комплексних частотно-залежніх модулів пружності, діелектричних сталих матеріалу, визначених при постійній напруженості електричного поля (E) та деформації (ε) відповідно; \hat{e}_{kij} – тензор п'єзоелектричних модулів.

Отже для побудови розрахункових рівнянь коливань багатошарових пластин було застосовано дискретно-структурний підхід. Так, тривимірну задачу було зведенено до двовимірної, а неоднорідність пластини по товщині враховано шляхом її розділення на розрахункові шари. Для врахування ефекту електромеханічної зв'язаності в кожному розрахунковому шарі матеріалу для механічних та електричних змінних було прийнято кубічну апроксимацію по товщині кожного шару.

Розрахункові рівняння для шарнірно закріпленої по краям прямокутної пластини одержано у просторі зображень Фур'є переміщень, напружень та електричного потенціалу. Це дозволяє проводити аналіз нестационарних, багаточастотних та випадкових коливань з урахуванням залежності пружних та дисипативних властивостей від частоти, характерної для в'язкопружних матеріалів.

Для підтвердження достовірності отриманої моделі проведено аналіз збіжності розв'язків, а результати тестових розрахунків співставлено з точними результатами, які відомі з літератури. Для демонстрації ефективності запропонованої методики приведено результати розрахункових досліджень з визначення розподілу переміщень, електричного потенціалу, а також напружень, що діють між шарами матеріалу по товщині анізотропних багатошарових пластин із різною конфігурацією шарів.

1. Derkach O.L., Zinkovskyi A.P., Savchenko O.V. Active Damping of Nonstationary Vibrations of a Three-Layer Electro-Viscoelastic Composite Plate//Strength Mater. – 2020. – **52**, N 6. – P. 65–78.

O.L. Derkach

ANALYSIS OF ACTIVE DAMPING OF NON-STATIONARY VIBRATIONS OF MULTILAYER COMPOSITE PLATES BASED ON THE MIXED FINITE ELEMENT METHOD

G.S. Pisarenko Institute for Problems of Strength of the National Academy of Sciences,
Sadovo-Botanichna Str., 2, 01014, Kyiv, Ukraine;
e-mail: derkach@ipp.kiev.ua

The algorithms for applying the Hellinger-Reissner variational principle in convolutions, as well as its weak variational formulation of the mixed electroviscoelasticity problem directly in the Fourier frequency space, were considered. The results of computational studies on the determination of the

stress distribution for anisotropic multilayer plates with different configurations of the layers are presented.

O. Z. Галішин, С.М. Склепус

НЕЛІНІЙНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК СКЛАДНОЇ ФОРМИ ІЗ МАТЕРІАЛІВ З ХАРАКТЕРИСТИКАМИ, ЩО ЗАЛЕЖАТЬ ВІД ВИДУ НАВАНТАЖЕННЯ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: snskepus@ukr.net*

Розроблено новий чисельно-аналітичний метод розв'язання задач нелінійно пружного деформування тонких пологих оболонок складної форми в плані із матеріалів з характеристиками, що залежать від виду навантаження. Для постановки та лінеаризації задачі нелінійного деформування оболонки використовується метод безперервного продовження за параметром, який пов'язаний із зовнішнім навантаженням. Для лінеаризованої задачі побудовано функціонал у формі Лагранжа, що базується на принципі можливих переміщень. Основні невідомі задачі (переміщення, деформації, напруження) знаходяться із розв'язку початкової задачі за параметром для системи звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язується методом Рунге-Кутта-Мерсона з автоматичним вибором кроку. Праві частини диференціальних рівнянь при фіксованих значеннях параметра навантаження, що відповідають схемі Рунге-Кутта-Мерсона, знаходяться із розв'язку варіаційної задачі для функціоналу у формі Лагранжа. Варіаційні задачі розв'язуються методом Рітца в поєднанні з методом R-функцій, що дозволяє подати наближений розв'язок у вигляді формули – структури розв'язку, яка точно задовільняє граничним умовам і є інваріантною щодо форми області, де відшукуються наближений розв'язок. Розв'язано задачу нелінійно пружного деформування пологої оболонки складної форми із сірого чавуна СЧ 15-32 з комбінованими умовами закріплення. Діаграми деформування даного матеріалу за розтягу і стиску суттєво відрізняються. Досліджено вплив напрямку зовнішнього навантаження, геометричної форми, та умов закріплення на напруженено-деформований стан.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: полога оболонка, складна форма, нелінійна пружність, метод R-функцій

O.Z.Galishin, S.M. Sklepus

NONLINEAR DEFORMATION OF COMPLEX SHAPE SHALLOW SHELLS FROM MATERIALS WITH CHARACTERISTICS DEPENDENT ON THE TYPE OF LOADING

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: snskepus@ukr.net*

A new numerical-analytical method for solving physically nonlinear elastic deformation problems of complex shape shallow shells from materials with characteristics dependent on the type of loading is developed. The method is based on the combined application of the R-functions, Ritz and Runge-Kutta-Merson methods. The nonlinear deformation problem of the shallow shell of complex shape with combined fixation conditions is solved.

А.О.Молчанов

**ПРО НАБЛИЖЕННЯ ПОТЕНЦІАЛЬНИХ ПОЛІВ З РОЗРИВНИМИ УМОВАМИ
НА ГРАНИЦІ**

Дніпровський національний університет ім. О. Гончара ,пр. Гагаріна, 72, 49010,
Дніпро, Україна
e-mail: evandr73@gmail.com

Розглядається спосіб відновлення потенціальних фізичних полів, який у світовій англомовній літературі називається method of fundamental solutions (MFS). Цей метод у загальному вигляді був описаний математиками М.А.Алексідзе та В.Д.Купрадзе в середині 60-х років минулого століття [1]. Основна ідея методу полягає в тому, що гармонічна функція, яка описує потенціальне поле, апроксимується комбінацією лінійно незалежних розв'язків рівняння Лапласа:

$$\tilde{u}(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Phi_i(x), \quad (1)$$

де $\Phi_i(x) = \Phi(x - y_i)$, з точками сингулярності y_i , обрамими навколо тої області, в якій потрібно відновити поле. Для 2D випадку $\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi} \ln|x|$. Для визначення невідомих коефіцієнтів $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ у рівняння (1) підставляємо n відомих значень поля, що визначені (вимірюні) в граничних вузлах $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Отриману систему $n \times (m+1)$ лінійних рівнянь розв'язуємо в сенсі мінімізації суми квадратів відхилень. Така система є некоректною за Адамаром й для отримання адекватного розв'язку вимагає певного методу регуляризації.

У випадку, коли маємо задачу з розривними умовами на границі:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x \in \Omega \\ u = g_0(x), x \in \Gamma_0, \\ u = g_1(x), x \in \Gamma_1 \end{cases}, \quad (2)$$

де $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ - границя області Ω , й на кінцях цих сегментів маємо розриви, вищезгаданий метод не є підходящим, оскільки в (1) всі функції $\Phi_i(x)$ є аналітичними (в заданій області) й погано пристосовані для задач з неаналітичними граничними умовами. Для подолання вказаних труднощів пропонується [2] лінійну комбінацію (1) доповнити функціями спеціального виду:

$$\tilde{u}(x) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \Phi_i(x) + \sum_{r=0}^p \beta_r \Psi_r(x), \quad (3)$$

де остання сума – лінійна комбінація функцій, кожна з яких є потенціалом подвійного шару (double layer potential):

$$\Psi_r(x) = \int_{\Gamma_1} \partial_{v_y} \Phi(x - y) y^r ds_y, \quad (4)$$

v_y - одиничний вектор нормалі в точках $y \in \Gamma$, що вказує назовні області Ω . Такі функції є гармонічними й аналітичними всередині Ω й їх слід (trace) на ділянці границі Γ_1 є поліноміальними функціями x^r , $r = 0, 1, 2, \dots$. Дано доповідь присвячена дослідженню цього методу й аналізу чисельного моделювання.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: задача Діріхле, відновлення фізико-механічних полів, розривні граничні умови, потенціал подвійного шару.

1. V. D. Kupradze and M. A. Alekseev, Comput. Math. Math. Phys. 4, 82–126 (1964).
2. Carlos J.S. Alves, Svilen S. Valtchev, Applied Mathematics and Computation 320(3):61-74 (2018).

О.М. Багно

**ВПЛИВ СКІНЧЕННИХ ПОЧАТКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ НА КВАЗІЛЕМБОВІ
МОДИ В ГІДРОПРУЖНОМУ ХВИЛЕВОДІ «НЕСТИСЛИВИЙ ПРУЖНИЙ
ШАР – ПІВПРОСТІР В’ЯЗКОЇ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ»**

*'Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: desc@inmech.kiev.ua*

Акустичні хвилі широко використовуються в сейсмології, сейсморозвідці, акустоелектроніці, гідроакустичі, дефектоскопії [1, 2, 4], а також при розробці ультразвукових неруйнівних методів вимірювання та контролю напружень у матеріалах та елементах конструкцій [2]. У зв’язку з цим виникає необхідність проведення досліджень закономірностей поширення таких хвиль із застосуванням математичних моделей, які найбільш повно враховують властивості реальних пружних та рідких середовищ. Модель, основана на тривимірній лінеаризованій теорії гідропружності [2, 3], відноситься до їх числа. Вона дозволяє врахувати властиві реальним середовищам такі фактори, як початкові напруження в пружному тілі так і в’язкість рідини. Зазначена модель застосовується також до високоеластичних матеріалів, які допускають великі (скінченні) початкові деформації і мають знижену зсувну жорсткість, на поведінку яких в’язка стислива рідина може також впливати. Проведення досліджень у рамках такого підходу необхідне у зв’язку з наявністю в елементах різних реальних конструкцій початкових напруження, які взаємодіючи з динамічними напруженнями, істотно впливають на міцність, надійність та ресурс конструкцій.

У роботі для аналізу впливу великих (скінченних) початкових деформацій на кінематичні характеристики узагальнених мод Лемба в пружно-рідинній системі використовуються тривимірні лінеаризовані рівняння Навье-Стокса для в’язкої стисливої рідини та тривимірні лінеаризовані рівняння теорії пружності скінченних деформацій для нестисливого високоеластичного твердого тіла [2, 3].

Далі досліджувалися гармонічні хвильові процеси малої амплітуди. При цьому приймалося, що пружне тіло перебуває у початковому напруженено-деформованому стані.

Розрахунки проводилися для гідропружної системи, яка складається з реальних пружного тіла та рідини. Для пружного шару вибиралася високоеластична гума, пружні властивості якої описуються пружним потенціалом Трелоара, а для рідини – вода.

Як показано в роботі [1], в пружному стисливому шарі, що не взаємодіє з рідиною, початкові напруження викликають зміну частот зародження мод і зміщення їх дисперсійних кривих. Це призводить до того, що в околі критичних частот величини фазових швидкостей мод Лемба в попередньо деформованому шарі можуть бути як менші, так і більші величин фазових швидкостей відповідних мод у тілі без початкових напруженень. Цим обумовлена поява в спектрі пружного хвилеводу частот, при яких початкові напруження не впливають на величини фазових швидкостей ряду нормальніх мод Лемба.

Проведені розрахунки показали, що для гідропружної системи з нестисливим пружним шаром (податливий матеріал), початковий стиск викликає зміну частот зародження узагальнених мод Лемба і зміщення їх дисперсійних кривих. При цьому відбувається зсув критичних частот, дисперсійних кривих і кривих залежностей коефіцієнтів згасання мод від товщини шару в короткохвильову частину спектра. Аналіз графіків показав, що для ряду мод існують пружні шари певних товщин, у яких фазові швидкості не залежать від початкового стиску. Очевидно, ця закономірність, яка вперше була виявлена для стисливих тіл і описана у роботі [1], носить більш загальний характер і властива частотним спектрам пружних хвилеводів як з різних матеріалів (стисливі й нестисливі), так і для гідропружних хвилеводів. З аналізу отриманих числових результатів випливає, що для мод 1 – 5 існують товщини пружного шару, при яких величини коефіцієнтів згасання цих мод не залежать від початкового стиску. Встановлено, що у цій пружно-рідинній системі нижчі моди проникають у тверде тіло і так само, як і моди високого порядку, поширяються в пружному шарі. Цим пояснюється вплив початкових деформацій на величини фазових швидкостей і коефіцієнтів згасання цих мод. Аналіз отриманих числових результатів показав, що попередній стиск призводить до зменшення глибини проникнення квазіповерхневої моди в рідину. Важливою особливістю впливу скінченних початкових деформацій пружного шару на кінематичні характеристики хвильового процесу в системі, що розглядалася, є залежність від номера моди величини інтервалу зміщення її критичної частоти та дисперсійної кривої. Чим вищий номер моди, тим більша величина інтервалу їх зміщення.

Як уже вказувалося, в пружно-рідинній системі «гума – вода» у високочастотній частині спектру нижча мода проникає в пружне тіло і так само, як і моди високого порядку, поширяється в пружному шарі. При цьому пружний шар стає визначальним у формуванні хвильового поля і основним хвилеводом, по якому поширяються хвильові збурення і здійснюється перенесення більшої частини енергії хвиль.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: узагальнені моди Лемба, скінченні початкові деформації, нестисливий пружний шар, півпростір в'язкої стисливої рідини.

1. Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. Волны в слое с начальными напряжениями. – К.: Наук. думка, 1976. – 104 с.
2. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях.– Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – Ч. 1 – 501 с., Ч. 2 – 505 с.
3. Гузь А.Н. Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
4. Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M. Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.

O.M. Bagno

EFFECT OF FINITE INITIAL DEFORMATIONS ON QUASI-LAMB MODES IN A HYDROELASTIC WAVEGUIDE «INCOMPRESSIBLE ELASTIC LAYER – HALF-SPACE OF VISCOUS COMPRESSIBLE FLUID»

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: desc@inmech.kiev.ua

A problem on propagation of quasi-Lamb waves in an pre-deformed incompressible elastic layer interacting with a half-space of an viscous compressible fluid is stated and solved. The study is conducted on the basis of the three-dimensional linearized equations of elasticity theory finite deformations for the incompressible elastic layer and on the basis of the three-dimensional linearized Navier-Stokes equations for half-space viscous compressible fluid. The effect of the finite initial deformations in an elastic layer on the phase velocities and attenuation coefficients of quasi-Lamb modes are analyzed.

Р.М. Кушнір¹, Г.Т. Сулим¹, Я.М. Пастернак²

**ГАРМОНІЧНІ КОЛІВАННЯ АНІЗОТРОПНИХ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИХ
СЕРЕДОВИЩ ІЗ ПРОСТОРОВИМИ ТРІЩИНAMI**

¹*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
бул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна*

²*Волинський національний університет імені Лесі Українки,
просп. Волі, 13, 43025, Луцьк, Україна;
e-mail: iaroslav.pasternak@vnu.edu.ua*

На даний час активно розвиваються аналітично-числові методи аналізу інтелектуальних (смарт) матеріалів, зокрема, їх тих, що містять тріщиноподібні дефекти. Особливу увагу при вивчені взаємодії фізико-механічних полів у таких тілах слід звертати на динамічні ефекти, адже саме вони визначають ключові особливості їхньої поведінки. При вивчені задач із складною геометричною конфігурацією та великою кількістю досліджуваних параметрів доцільно використовувати аналітично-числові методи, що зменшують розмірність задачі. Зокрема, до таких підходів належать методи, що використовують інтегральні рівняння задачі. Так, в [1] отримано фундаментальні розв'язки динамічних задач магнітоелектропружності інтелектуальних матеріалів та теорії пружності квазікристалічних тіл і поряд із їхнім використанням побудовано інтегральні рівняння відповідних задач. У цьому досліджені для розв'язування цих інтегральних рівнянь запропоновано використовувати модифікований метод граничних елементів, ключовими особливостями якого є спеціальні елементи, що моделюють особливість фізико-механічних полів на фронтальній лінії просторових тріщин, модифіковані квадратурні формули Кутта для обчислення особливих інтегралів та спеціальні формули для обчислення динамічних коефіцієнтів інтенсивності напруження у довільній точці фронтальної лінії тріщини в анізотропному інтелектуальному матеріалі. Розв'язування тестових прикладів засвідчило швидку збіжність та високу точність запропонованого підходу. Також вивчено низку нових задач.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тріщина, гармонічні коливання, анізотропний, динамічні коефіцієнти інтенсивності напруження

1. Pasternak V., Sulym H., Pasternak Ia.M. Frequency domain Green's function and boundary integral equations for multifield materials and quasicrystals // International Journal of Solids and Structures. – 2024. – **286–287.** – 112562. – P.1–12.

R.M. Kushnir¹, H.T. Sulym¹, Ia.M. Pasternak²

TIME-HARMONIC VIBRATIONS OF ANISOTROPIC SMART MEDIA WITH 3D CRACKS

¹*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine,
Naukova Str. 3-b, 79060, L'viv, Ukraine*

²*Lesya Ukrainka Volyn National University,
Voli Avenue 13, 43025, Lutsk, Ukraine, e-mail: iaroslav.pasternak@vnu.edu.ua*

This study considers development of boundary element method for analysis of 3D time-harmonic elastodynamics problems for cracked solids.

П.О. Стеблянко

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТІ ДЛЯ ПЛАСТИН ТА
ОБОЛОНОК ЗА ДОПОМОГОЮ ДВОВИМІРНИХ СПЛАЙНІВ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: caf-vmi@ukr.net*

Основним завданням нестационарної теорії термопластичності є визначення зміщень серединної поверхні (швидкостей зміщень) і питомих зусиль та моментів, деформації серединної поверхні, зсувів, кутів поворотів, кривизн, крученння, що виникають в оболонці (пластині) в процесі термосилового навантаження, коли деякі елементи тіла працюють за межею пружності матеріалу.

Повна система містить рівняння руху в проекціях на недеформовані осі оболонки, фізичні співвідношення та геометричні рівняння [1] Всі невідомі величини подаються у вигляді двовимірних сплайн-функційна певний момент часу. В цьому розділі при розв'язання задач термопластичності застосовуються як кубічні В-сплайні, так і напружені сплайні [2, 3].

У ході виконання роботи отримано такі результати:

Розроблено новий варіант методу для розрахунків нестационарного термопластичного напруженого-деформованого стану просторових тіл та оболонок при неізотермічних процесах навантаження по траекторіях малої кривизни, який відрізняється від існуючих методів вищою точністю та дає третій порядок точності методу за просторовими координатами. Запропонований алгоритм враховує як вид напруженого стану так і можливе розпушення матеріалу в процесі роботи конструкції.

Отримано вирази для двовимірного В-сплайну третього порядку та двовимірного напруженого сплайну, які можуть застосовуватися як для апроксимації диференціальних операторів повної системи рівнянь у частинних похідних, так і використовуватися для отримання інтерполяційних значень функцій з четвертим і відповідно п'ятим порядком точності по координатах між вузлами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: двовимірні сплайні, метод підвищеної точності, теорія пластичності малої кривизни.

1. Steblyanko P.A., Shevchenko Yu.N. Computational Methods in Stationary and Nonstationary Thermal Plasticity Problems. In.: "Encyclopedia of thermal Stresses. In. 11 volumes (Ed. R.B.Hetnarski). – New York, Dordrecht: Springer, 2014. Vol. 2, C-D, P. 507-1084". – P. 623-630.
2. Steblyanko P.A. The schemes of abnormally high accuracy solution of nonstationary problems of theory of thermo-elastic-plasticity for plates and shells// The Fifth International Congress on Thermal Stresses and Related Topics. Vol.1 - Virginia Polytechnic Institute and State University Blacksburg, Virginia, USA. - June 8-11,2003.-P. 231 -234.
3. Steblyanko P. Phenomenological Model of Pseudo-Elastic-Plastic Material Under Nonstationary Combining Loading / P.Steblyanko, Y.Chernyakov, A.Petrov, V.Loboda // Structural Integrity, Vol. 8, Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, SpringerVerlag, 2019.- P. 205-208.

P.O. Steblyanko

SOLVING PROBLEMS OF THE THERMOPLASTICITY THEORY FOR PLATES AND SHELLS USING TWO-DIMENSIONAL SPLINES

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: caf-vmi@ukr.net*

A new version of the method for calculating the non-stationary thermoplastic stress-strain state of spatial bodies and shells during non-isothermal loading processes along trajectories of small curvature has been developed, which differs from existing methods in higher accuracy and gives the third order of accuracy of the method in spatial coordinates. The proposed algorithm takes into account both the type of stressed state and the possible loosening of the material during the construction process.

Ю.В. Токовий¹, М.Й. Юзв'як²

**РІВНЯННЯ СУЦІЛЬНОСТІ НЕОСЕСИМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ
ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАНУ,
бул. Наукова, 3Б, 79060, Львів, Україна;
e-mail: ¹tokovyy@iapmm.lviv.ua, ²yuzvyaky@ukr.net*

Розв'язування просторових задач теорії пружності та термопружності при постановці їх в напруженнях завжди пов'язане з проблемою вибору основної системи визначальних рівнянь. Оскільки в загальному випадку для знаходження шести компонент тензора напружень маємо систему визначальних рівнянь, як є перевизначенуою, бо складається з дев'яти диференціальних рівнянь в частинних похідних (а саме: трьох рівнянь рівноваги першого порядку та шести рівнянь суцільності або рівнянь Бельтрамі-Мітчелла другого порядку з відповідними межовими умовами для розглядуваних конкретних тіл [1]), існує багато підходів та припущення щодо вибору основної визначальної системи рівнянь. Зокрема в роботі [2] показано, що для необмежених тіл можемо вибирати певну комбінацію трьох рівнянь суцільності та трьох рівнянь рівноваги. Для тіл обмежених циліндричними чи плоскими поверхнями питання вибору відповідної системи залишається відкритим.

Проведені дослідження неосесиметричних просторових задач теорії пружності та термопружності в циліндричній системі координат (ρ, φ, z) показали, що для знаходження невідомих компонент тензора напружень в цьому випадку отримується визначальна система, яка складається із відповідної їм кількості диференціальних рівнянь і певних межових умов. Коли температурне поле чи силові навантаження на межі розглядуваних тіл можна розвинути в ряди Фур'є за кутовою координатою, наприклад

$$T(\rho, \varphi, z) = T^0(\rho, z) + \sum_{n=1}^{\infty} (T^{c_n}(\rho, z) \cos n\varphi + T^{s_n}(\rho, z) \sin n\varphi) \quad (1)$$

то і шукані компоненти тензора напружень, відповідно і компоненти тензора деформацій та вектора переміщень теж подаються в такому вигляді. В результаті вихідні задачі пружності чи термопружності зводяться до двох окремих задач: 1) задачі по знаходженню напруженого-деформованого стану, зумовленого температурною складовою з верхнім індексом “0” та 2) задачі для коефіцієнтів розвинень в рядах (1).

Знайдені вихідні співвідношення задачі термопружності та пружності для коефіцієнтів Фур'є з індексом “0” і вони складаються із двох рівнянь рівноваги та двох рівнянь суцільності для знаходження чотирьох складових компонент тензора напружень. Показано, що вони співпадають із вихідними співвідношеннями для відповідної осесиметричної задачі термопружності та пружності [3].

Для знаходження невідомих коефіцієнтів розвинень шести компонент тензора напружень з індексами “ c_r ” чи “ s_r ” знайдено три рівняння суцільності, які разом із трьома рівняннями рівноваги і складатимуть замкнену визначальну систему. Для цього проведено аналіз співвідношень Коші записаних в термінах коефіцієнтів розвинень для компонент тензора деформацій і вектора переміщень, а саме

$$\rho \epsilon_{\varphi\varphi}^n = n u_\varphi^n + u_r^n, \quad 2\rho \epsilon_{r\varphi}^n = -n u_r^n - u_\varphi^n + \rho \frac{\partial u_\varphi^n}{\partial \rho}, \quad 2\rho \epsilon_{\varphi z}^n = -n u_z^n + \rho \frac{\partial u_\varphi^n}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\varepsilon_{rr}^n = \frac{\partial u_{rr}^n}{\partial \rho}, \quad \varepsilon_{zz}^n = \frac{\partial u_z^n}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{rz}^n = \frac{\partial u_r^n}{\partial z} + \frac{\partial u_z^n}{\partial \rho}. \quad (3)$$

Показано, що при такому розвиненні (1) складові вектора переміщень можна однозначно (без додаткового інтегрування) визначити із перших трьох співвідношень Коші (2), а співвідношення (3) приводять до трьох рівнянь суцільності для визначення компонент тензора деформацій. Два отриманих рівнянь співпадають із вже відомими рівняннями суцільності, а одне є лінійною комбінацією інших двох.

Знайдені рівняння суцільності записані в термінах напружень разом із трьома рівняннями рівноваги утворюють визначальну систему для знаходження коефіцієнтів розвинені шести компонент тензора напружень. Кількість межових може бути різна і залежить для яких конкретно тіл розглядаються відповідні задачі. Ці співвідношення будуть справедливі і для порожнистого чи суцільного циліндра скінченої довжини чи нескінченного; для простору, півпростору чи необмежного шару.

Дослідження виконано за часткової фінансової підтримки гранту № 0124U002858 у рамках українсько-польського науково-дослідного проекту "Ідентифікація термомеханічних параметрів неоднорідних композитних матеріалів та захисних покриттів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тернопружність, пружність, рівняння рівноваги, рівняння Коші, рівняння суцільності

1. Божидарник В. В., Сулим Г. Т. Елементи теорії пружності. Львів: Світ, 1994.
2. Vihak V. M. Continuity equations for a deformable solid // J. Math.Sci. – 2000. – 99, No. 5. – P. 1655–1661
3. M. Yuzvyak, Y. Tokovyy, A.Yasinsky, Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length // J. Thermal Stresses. . – 2020. – **44**, N 3. – P. 359 – 376.

Y.V.Tokovyy¹, M.Y.Yuzvyak²

COMPATIBILITY EQUATION OF NONAXISYMMETRIC SPATIAL PROBLEMS OF ELASTICITY AND THERMAL ELASTICITY

*PidstryhachInstituteforAppliedProblemsMechanicsandMathematicsNationalAcademy
ofSciencesofUkraine, 3-b, NaukovaStr., 79060, Lviv, Ukraine, Ukraine
e-mail: ¹takovyy@iapmm.lviv.ua, ²yuzvyaky@ukr.net*

Non-axisymmetric spatial problems of the elasticity and thermoelasticity theory in terms of stresses are considered in the case when the temperature field or force loads can be developed into a Fourier series. On the basis of Cauchy relations, new dependences of the coefficients of the displacement vector components on the strain tensor components are obtained. Three new compatibility equations were found and they form a key system of equations with the corresponding boundary conditions

В.Г.Карнаухов, І.Ф.Киричок, Л.П.Зінчук

**ТЕРМОМЕХАНІЧНА ПОВЕДІНКА І ДОВГОВІЧНІСТЬ ПІДДАТЛИВИХ
НА ЗСУВ ГНУЧКИХ НЕПРУЖНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З
П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ СЕНСОРАМИ І АКТУАТОРАМИ ПРИ
РЕЗОНАНСНИХ КОЛІВАННЯХ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: term@inmech.kyiv.ua*

Тонкостінні елементи типу балок, пластинок та різного роду конфігурації оболонок обертання знаходять широке застосування як складові конструкцій авіаційної, космічної техніки, енергетичного устаткування, робототехніки та ін. В багатьох випадках вони виготовлені із непружніх як пасивних (без п'єзоэффекту), так і п'єзоактивних матеріалів. У процесі експлуатації такі конструкції перебувають під дією високого рівня нестационарних, зокрема, гармонічних за часом навантажень та працюють в околі резонансних частот. При таких режимах роботи амплітуди прогинів можуть досягти товщини елемента. Через гістерезисні втрати в непружніх матеріалах виникає дисипативний розігрів. Коливання з великими амплітудами, як правило, супроводжуються високим рівнем механічних напружень та дисипативного розігріву, що може привести до втрати працездатності тонкостінного елемента [1]. Ці обставини при розрахунках напруженого-деформованого стану і температури дисипативного розігріву вимагають розробки методів контролю коливальним режимом та прогнозування довговічності елемента з врахуванням геометричної нелінійності і піддатливості матеріалів до деформацій поперечного зсуву. Одним із методів управління вимушеними коливаннями тонкостінних елементів є застосування п'єзоелектричних накладок, одні із яких виконують роль збуджувачів або гасителів (актуаторів), а другі дають інформацію про термодинамічний стан об'єкта (виступають у ролі сенсорів) [2, 3].

У даній праці представлено методологію розв'язування задачі про електротермомеханічну поведінку і прогнозування довговічності піддатливих на зсув гнучких непружніх оболонок обертання з п'єзоелектричними актуаторами і сенсорами при вимушених осесиметричних навантаженнях з близькими до резонансних частотами. Оболонка виготовлена із пасивного (без п'єзоэффекту) трансверсально-ізотропного шару та скріпленими жорстко з його поверхнями поляризованими вздовж товщини в протилежних напрямках п'єзокерамічних шарів з однаковими електромеханічними властивостями. Поверхні п'єзошарів електродовані. Розглядаються варіанти, коли обидва п'єзошари виконують роль актуатора або сенсора, а також коли один п'єзошар є актуатором, а другий сенсором. Матеріали шарів вважаються в'язкопружними, а їх термомеханічна поведінка описується концепцією комплексних модулів [2 – 4].

Оболонка навантажена поверхневим тиском $q = p \cos \omega t$, який гармонічно змінюється за часом t з близькою до резонансної круговою частотою ω і постійною амплітудою p , або з такою ж частотою, підведеною до електродів актуатора різницею електричних потенціалів V_a . Якщо п'єзошари є сенсорами, тоді на розімкнутих їх електродах виникає різниця потенціалів амплітуди V_s , яка знаходиться із електричної графичної умови на основі розв'язку задачі електромеханіки. Край оболонки шарнірно

закріплені. На поверхнях і торцях оболонки реалізуються умови конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем.

Для моделювання термоелектромеханічної поведінки розглядуваних оболонок обертання відносно механічних величин приймається гіпотези типу С.П.Тимошенка. Відносно електричних змінних вважається, що складовими вектора електричної індукції, які перпендикулярні до осі поляризації, можна знектувати, а складова в напрямку поляризації не залежить від товщини координати [2, 3]. Геометрична нелінійність враховується утриманням у співвідношеннях Коші квадратів кутів повороту. Рівняння руху є також нелінійними. Температура дисипативного розігріву приймається постійною по товщині пакету шарів.

Наблизений розв'язок рівнянь вимушених коливань будуємо шляхом розкладу розв'язувальних функцій в гармонічні ряди за часом при утриманні першої гармоніки для змінних прогину і до другої гармоніки включно – для величин плоского деформованого стану оболонки. Отримані нелінійні диференціальні рівняння відносно амплітудних величин розв'язувальних функцій лініаризуються методом Ньютона. Лініаризована система інтегрується чисельно з використанням типової програми для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь. На основі отриманого розв'язку обчислюється дисипативна функція, а нестационарне рівняння теплопровідності розв'язується методом кінцевих різниць.

Як приклад таким підходом чисельно розв'язано задачі про термомеханічну поведінку і довговічність круглих пластинок і циліндричних оболонок з п'єзосенсорами при механічному гармонічному навантаженні. Досліджено вплив геометричної нелінійності, деформації поперечного зсуву, коефіцієнта теплообміну на амплітудно-і температурно-частотні характеристики та електричні показники сенсора в околі першого резонансу згинальної моди коливань розглядуваних об'єктів. На основі критерію оцінки їх довговічності за допустимими значеннями максимальної температури вібророзігріву досліджено залежність терміну працездатності від амплітуди поверхневого тиску і параметрів теплообміну.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: геометрична нелінійність, дисипативний розігрів, довговічність, п'єзодієлектричний сенсор і актуатор, резонансні коливання.

1. Булат А.Ф., Дырда В.И., Звягильский Е.Л., Маркелов А.Е. Прочность и разрушение резиновых деталей технологических машин. – К.: Наук. думка. – 2010. – 440с.
2. Карнаухов В.Г., Михайленко В.В. Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир. ЖГТУ. – 2005. – 428 с.
3. Karnaughov V. G., Kirichok I. F., Kozlov V. I. Thermomechanics of inelastic thin-walled structural members with piezoelectric sensors and actuators under harmonic loading (Review) // Int. Appl. Mech. – 2017. – **54**, N 1. – P. 6–58.
4. Kirichok I.F., Zhuk Y.A., Kruts S.Y. Accounting for Shear Deformation in the Problem of Vibrations and Dissipative Heating of Flexible Viscoelastic Structural Element with Piezoelectric Sensor and Actuator // In: Sadovnichiy V.A., Zgurovsky M.Z. (eds) Contemporary Approaches and Methods in Fundamental Mathematics and Mechanics. Understanding Complex Systems (book series). – Springer, 2021. – P. 51 – 69.

V.G. Karnaughov, I.F. Kyrychok, L.P. Zinchuk

THERMOMECHANICAL BEHAVIOR AND DURABILITY OF SHEAR-COMPLIANT FLEXIBLE INELASTIC SHELLS OF ROTATION WITH PIEZOELECTRIC SENSORS AND ACTUATORS UNDER RESONANT VIBRATIONS

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine; e-mail: term@inmech.kyiv.ua*

This work presents the methodology for solving the problem of thermomechanical behavior and predicting the durability of shear-compliant flexible inelastic shells of rotation with piezoelectric actuators and sensors under forced axisymmetric loads with frequencies close to resonance.

Ю.Є.Поляков¹, О.О.Усов¹, С.П.Мінєєв¹

ВИЗНАЧЕННЯ КОМПОНЕНТ ГІРСЬКОГО ТИСКУ ПО ПАРАМЕТРАХ НАГНІТАННЯ РІДИНИ В СВЕРДЛОВИНУ У ВУГІЛЬНОМУ ПЛАСТІ

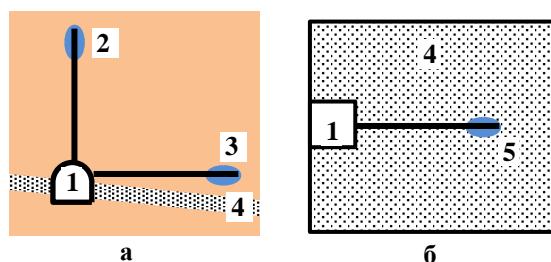
¹Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАНУ,
бул. Сімферопольська, 2а, 49005, Дніпро, Україна;
e-mail: office.igtm@nas.gov.ua

Розрахунок параметрів кріплення підземних пластових виробок для видобутку вугіля потребує адекватної оцінки природного співвідношення компонентів напружень в гірському масиві. Тож проблема визначення цих компонент в конкретних гірничо-геологічних умовах є актуальною задачею, від якої залежить рівень вагомих витрат на підтримування підземних виробок в робочому стані.

На сьогоднішній день існують дві розповсюджені усталені точки зору на природне співвідношення компонент напруженого стану – геомеханічна та геологічна. Геомеханічна точка зору базується на моделі плоскої деформації масиву і дає співвідношення λ компонентів напружень в площині пласта до напруження, яке перпендикулярно цій площині на рівні 2/3. Точна цифра залежить від коефіцієнтів Пуассона в ортогональних напрямках в площині пласта. Геологічна ж модель постулює гідростатичний напруженій стан, тобто $\lambda = 1$. При цьому вона зовсім не враховує широко відомий факт, що тріщин гідравлічного розриву пласти через вертикальні свердловини завжди орієнтується в напрямку максимальної компоненти напруження в площині пласта.

Крім того, обидві ці моделі не містять випадку, коли «горизонтальні» напруження перевищують «вертикальні». Про можливість такого стану свідчать спостереження за деформаціями виробок, зокрема в Павлоградському вугільному басейні.

Тож на практиці співвідношення компонент напружень визначаються натурними експериментами в гірничих виробках. Зокрема ІГТМ НАН України використовує гідророзрив породи через дві ортогональні свердловини [1] (рис. 1а).



а) – перпендикулярний переріз виробки в місті розташування свердловин гідророзриву вміщаючих порід; б) – повздовжній переріз виробки в площині вугільного пласта з запропонованою свердловиною його гідророзриву

Rис. 1. Схема розташування свердловин гідророзриву: 1 – виробка; 2,3,5 – свердловини; 4 – пласт

Визначальним для розрахунку «вертикальної» P_{θ} та «горизонтальної» P_{ϕ} компонент напружень є формула [1]

$$P_{kp} = \frac{3P_e - P_e + P^* - mP_0}{(1 + \sigma_p / \sigma_{cjs})} - \eta K_1 P_{kp} \quad (1)$$

де: P_{kp} – тиск гідророзриву; P^* - межа спротиву гідророзриву (для вугілля ≈ 0); m – пористість; P_0 – поровий тиск; σ_p – межа міцності породи на розтягнення (для вугілля ≈ 0); σ_{cjs} – межа міцності породи на стискання; η – коефіцієнт передавання тиску через клапан герметизатора в свердловину; K_1 – коефіцієнт передавання тиску з порожнини герметизатора на стінки свердловини.

Параметри засобів герметизації свердловин та нагітання співпадають з вимогами для обладнання гідророзриву вугільних пластів з метою запобігання раптовим викидам [3] і їх використання не є проблемою для значної частини шахто пластів. Але в ряді випадків потужності цього обладнання не вистачає для здійснення гідророзриву вміщаючих порід.

В цих випадках пропонується проводити гідророзрив не вміщаючих порід, а самого вугільного пласта, як показано на рис.1б.

В цьому випадку формула (1) значно спрощується за рахунок того, що вугілля майже не опирається розтягненню, тому знаменник (1) дорівнює 1, а спротив гідророзриву P^* дорівнює 0. Крім того, добутком mP_0 також можна знехтувати без надмірної похибки. Але це корисне спрощення виразу (1) не може компенсувати відсутність корисної інформації по гідророзриву другої свердловини по вугіллю в напрямку нормалі к площині пласта.

Для визначення співвідношення компонентів напружень λ потрібно додати ще одну умову. В якості такої умови для не порушеніх ділянок гірського масиву можна додати загально відомий зв'язок між вертикальною компонентою напруження P_e , питомою вагою порід γ і глибиною залягання пласта

$$P_e = \gamma H \quad (2)$$

Для зон геологічних порушень [4] додаткове рівняння отримується із тої умови, що якщо в свердловину вдалося вставити герметизатор, значить, її контур не зазнав помітних непружніх деформацій. Тобто, різниця максимальної і мінімальної компонент напружень на її контурі не перевищує межі міцності вугілля при одновісному стиску σ_{cjs} . Формалізація цієї умови стандартними методами механіки [5] дає, у сукупності з (1), підсумкове рівняння для визначення мінімального значення параметру λ

$$\lambda \geq \frac{3C_e P_{kp} + \sigma_{cjs}}{C_e P_{kp} + 3\sigma_{cjs}} \quad (3)$$

де: C_e – технологічний коефіцієнт, який для герметизаторів з товщиною оболонки ≈ 10 мм при діаметре свердловини ≈ 45 мм з клапаном, налаштованим на тиск 6МПа, лінійно знижується з підвищенням тиску в свердловині, і складає 1,29 для $P_{kp} = 10$ МПа і 1,16 для $P_{kp} = 24$ МПа.

В цьому випадку (зон геологічних порушень) достовірність кількісної оцінки параметра λ буде нижчою, ніж для непорушеніх ділянок, адже в (3) фігурує знак нерівності, але ця формула дозволяє виявити аномальні випадки перевищення горизонтальної компоненти напружень над вертикальною, які з найбільшою імовірністю спостерігаються в геологічних порушеннях.

Таким чином, гідророзрив вугільного пласта через одну свердловину дає змогу оцінити найбільш значиме для розрахунку параметрів кріплення співвідношення λ природної компоненти напруження в перпендикулярному до осі виробки напрямку до природної вертикальної компоненти.

Розглянута розрахункова схема горизонтального пласта з вертикальними та горизонтальними компонентами гірського тиску може бути без проблем поширена на випадок помірно похилого пласта шляхом повороту ортогональних осей головних напружень відомими співвідношеннями механіки деформованого твердого тіла [5].

Окрім визначення співвідношення компонент гірського тиску λ поза зоною впливу виробки, яке потребує буріння свердловини на глибину 20÷30м пропонований метод дозволяє оцінити це співвідношення і для довкілля виробки на відстані від її контуру 5÷7м. Для такої оцінки замість формули (3) потрібно застосовувати чисельні алгоритми розрахунку на базі методу кінцевих елементів [2].

КЛЮЧОВІ СЛОВА: механічні напруження, гідророзрив, тиск, вугілля, гірська порода, герметизатор.

1. Кулиніч В.С., Кулиніч С.В. Закономерності розрушения горних пород гидравлическим разрывом Геотехническая механика. Межвед. сб. науч. Трудов. – Дн-вск: - 2001. - №9. – С. 107-113.
2. А.П. Круковский, В.В. Круковская, О.А. Усов. Влияние обработки угля водой и антиприогенами на формирование поля напряжений вокруг горной выработки. Геотехническая механика: Межвед. сб. науч. тр./ ИГТМ НАН Украины. – Днепр, 2020. – № 150. – С. 116-126.
3. С.П. Минеев, О.А. Усов, Ю.Е. Поляков. Напорная фильтрация в углепородном массиве: моногр. – Днепр: Издатель Белая Е.А., 2021. – 260 с.
4. Минеев С.П. Горные работы в сложных условиях на выбросоопасных угольных пластах: моногр.// С.П. Минеев, А.А. Рубинский, О.В. Витушко, А.Г. Радченко. – Донецк: Східний видавничий дім, 2010. – 604 с.
5. Писаренко, Г.С. Сопротивление материалов //Писаренко Г.С., Агарев В.А., Квитка А.Л., Попков В.Г., Уманский Э.С., Киев. Головное издательство издательского объединения “Вища школа” – 1986 – С.775.

Yu.E. Poliakov¹, O.A Usov.¹, S.P. Mineev¹

**DETERMINATION OF THE MOUNTAIN PRESSURE COMPONENT BY PARAMETERS
FLUID INJECTION INTO THE WELL IN THE COAL LAYER**

¹ Institute of Geotechnical Mechanics named after M.S. Polyakov of the NAS of Ukraine, 2a Simferopolska Street, 49005, Dnipro, Ukraine;
e-mail: office.igtm@nas.gov.ua

Abstract. A method for assessing the components of natural mechanical stresses in a rock mass is proposed. The method is based on the experimental determination of the pressure at which cracks begin to form when liquid is injected into a well drilled along the strike of a coal seam from a mine working. The components of mechanical stresses are calculated based on the value of the crack formation pressure and the strength of coal under uniaxial compression.

В.С.Ушакова¹, О.В.Ушаков²

ДО ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ОБРОБКИ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ
ДАНИХ ЗА УМОВ ЧИСТОГО КРУЧЕННЯ В ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОЇ
В'ЯЗКОПРУЖНОСТІ

¹ Інститут механіки С.П. Тимошенка НАН України, вул. Нестерова, 3, 03057,
Київ;

e-mail creep@inmech.kiev.ua

² Інститут спеціальної техніки та судових експертіз Служби безпеки України,
вул. Василенка, 3, 03113, м. Київ; e-mail nddkr_ictc@ssu.gov.ua

Задача знаходження функцій повзучості та визначення невідомих констант, що містяться в них є одним з найважливіших питань при побудові будь-якої теорії і є предметом багатьох досліджень [1, 2]. В лінійній і нелінійній теорії спадкової в'язкопружності матеріальні константи визначаються, як правило, за допомогою обробки експериментальних на повзучість зразків матеріалу за умов розтягу і чистого кручення. Точність визначення даних констант суттєво залежить від точності апроксимації первинних експериментальних даних, що задані дискретно.

Виходячи з вище сказаного, метою дослідження є розробка методики обробки експериментальних даних кривих повзучості за умов чистого кручення з урахуванням всіх характерних стадій процесу.

Одним з найрозвинюваніших методів апроксимації експериментальних даних є метод найменших квадратів, який ґрунтуються на знаходженні мінімуму квадратичного відхилення експериментальних даних від розрахункових. Шукана функція повинна мати нескладну структуру і в той же час адекватно відображати залежність. Розглянемо метод більш детально. Нехай $y = f(x)$ – функція, що наближує експериментальні дані $A_1(x_1; y_1); A_2(x_2; y_2), \dots, A_n(x_n; y_n)$. Щоб оцінити точність наближення знайдемо $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ і різниці $e_1 = y_1 - f(x_1), e_2 = y_2 - f(x_2), \dots, e_n = y_n - f(x_n)$ між експериментальними і функціональними значеннями. Знайшовши суму квадратів різниць отримаємо вираз:

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2. \quad (1)$$

Функція $y = f(x)$ підбирається таким чином, щоб сума квадратів відхилень приймала найменше значення. Кубічні сплайні є ефективним методом апроксимації експериментальних даних кривих повзучості за умов кручення. Особливістю даного методу є те, що крива повзучості апроксимується кубічною параболою на ревному відрізку. Апроксимація може містити таку кількість кривих, якої достатньо для ефективного наближення даних експериментальною кривою. Точки зміни однієї кривої іншою називають вузлами. Метод передбачає, що апроксимуюча функція повинна проходити через всі експериментальні точки. При великій кількості вузлів L апроксимуюча функція буде мати точки, де похідна змінює знак. В цьому випадку функція повзучості $\varepsilon^c(t)$, що апроксимує експериментальні дані має вигляд

$$\varepsilon^c(t) = \varepsilon_i + \left[\frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}(2k_i + k_{i+1}) \right] (t - t_i) + \frac{k_i}{2}(t - t_i)^2 + \frac{k_{i+1} - k_i}{6h_i}(t - t_i)^3;$$

$$t \in [t_i; t_{i+1}], h_i = t_{i+1} - t_i, i = \overline{1, L-1}, \quad (2)$$

де k_i – коефіцієнти сплайна, що визначаються з умови неперервності першої похідної в точках t_i , ($i = 2, L-1$) і деяких краєвих умов на кінцях відрізку, що задає апроксимуючу функцію $\varepsilon^c(t)$; ε_i – табличні значення апроксимуючої функції в точках t_i .

Незважаючи на те, що кубічні сплайні задовільно описують процес повзучості, вони часто змінюють характер опукlosti, щоб отримати найменшу похибку, через що вигляд функції не відповідає реальним процесам. В зв'язку з цим

існує необхідність зменшити вплив експериментальних даних, що спотворюють загальну картину процесу.

Згладжуючі кубічні сплайні дозволяють ліквідувати той недолік, що пов'язаний з апроксимацією даних, які не відповідають реальним процесам. Методика побудови згладжуючих кубічних сплайнів ґрунтуються на припущення, що функція не обов'язково проходить через всі табличні точки. Вплив точок зменшується за рахунок введення вагових функцій $p_i \geq 0$.

Розглянемо кубічний сплайн виду

$$J[\tilde{\varepsilon}^c(t)] = \int_{t_1}^L |\tilde{\varepsilon}^c(t)''|^2 dt + \sum_{i=1}^L \frac{[\tilde{\varepsilon}^c(t_i) - \varepsilon_i]^2}{p_i}. \quad (3)$$

В формулі (3) передбачено, що чим менше значення p_i тим більше $\tilde{\varepsilon}^c(t_i)$ до табличних ε_i , а для $p_i = 0$ доданок матиме символічний характер, а $\tilde{\varepsilon}^c(t_i) = \varepsilon_i$.

Ключові слова: Чисте кручення, лінійна в'язкопружність, метод найменших квадратів, експериментальні дані, сплайн апроксимація.

1. Findley W.N., Lai J.S., and Onaran K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials. – Amsterdam : North-Holland Publishing Company, 1976. – 367 p.

2. Голуб В.П., Погребняк А.Д., Романенко И.Б. О применении сглаживающих сплайн-апроксимаций в задачах идентификации параметров ползучести. // Прикл. механика. – 1997. – Том 33, №6. – С. 52-61.

Є.О. Кондряков¹, В.В. Харченко

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ
ПАТРУБКОВОЇ ЗОНИ КОРПУСУ РЕАКТОРА З ТРИЩИНАМИ З
ВИКОРИСТАННЯМ РОЗШИРЕНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

*¹Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України,
бул. Садово-Ботанічна, 2, 01014, Київ, Україна;
e-mail: kondryakov@ipp.kiev.ua*

Для розрахунків на опір крихкому руйнуванню зазвичай використовується метод скінчених елементів (МСЕ), використання якого потребує побудову скінченноелементної (СЕ) моделі елементу конструкції з вбудованою тріщиною. Патрубкова зона (ПЗ) є достатньо складним вузлом корпусу реактора (КР), тому побудова таких моделей є досить трудомістким завданням. Такі параметри, як розмір, розташування та орієнтація тріщини в ПЗ, яка є найбільш небезпечною з точки зору розрахунку на опір крихкому руйнуванню, залишаються відкритим питанням і не регламентується нормативними документами [3,5]. Тому для визначення таких параметрів необхідне проведення достатньо великої серії розрахунків, що потребує передбову скінченноелементної сітки для кожної тріщини. Це завдання ускладнюється наявністю наплавлення, яке також може впливати на напружений стан у ПЗ при аварійних режимах термошоку.

Для скорочення часу та зменшення кількості розрахунків використовують альтернативні методи, такі як методика сабмоделінгу [1] та розширеній метод скінчених елементів (XFEM) [2,4]. Поєднання цих методів дозволяє проводити експрес-оцінку опору крихкому руйнуванню та дає можливість проводити розрахунки з варіюванням форми, розміру та місця розташування тріщини, що дозволить ефективно визначати її критичний розмір та найбільш небезпечне місце в елементі конструкції.

В даній роботі приведено результати чисельного моделювання напружено-деформованого стану патрубкової зони корпусу реактора методами класичного МСЕ та XFEM із використанням методики «сабмоделінгу».

Представлено результати чисельного моделювання класичним МСЕ для режиму гідравлічних випробувань патрубкової зони корпусу реактора з трьома типами тріщин: поверхневої, піднаплавної та піднаплавної з проникненням на 1 мм у наплавлення.

Для 12 типів напівеліптических тріщин, для яких варіювались співвідношення головних осей а/c, співвідношення глибини тріщини та товщини стінки КР а/t, а також напрямок розташування тріщини – осьова та колова проведено розрахунки на опір крихкому руйнуванню методом XFEM для одного з характерних режимів термошоку. При цьому осьові тріщини розташовувались у вхідних патрубках таким чином, щоб площа тріщини утворювалася віссю патрубка і віссю КР, а головна вісь напівеліпса утворювала кут 45° з горизонтальною віссю (віссю патрубка). Колові тріщини повернуті на 90° відносно осьових. Для всіх розглянутих тріщин було розраховано значення КІН у глибокій точці. Результати розрахунків показали, що для осьового напрямку більш небезпечними є тріщини зі співвідношенням осей а/c = 0.3, тоді як для колового напрямку більш небезпечними є тріщини зі співвідношенням осей а/c = 0.7.

На рис. 1 приведено порівняння температурних залежностей КІН для тріщин зі співвідношенням осей а/c = 0,3 (рис. 1,а) та а/c = 0,7 (рис. 1,б) у патрубковій зоні КР для характерного режиму термошоку. Видно, що при одинакових розмірах осьові тріщини є більш небезпечними ніж колові. При цьому тріщини зі співвідношенням осей

$a/c = 0.3$ є більш чутливими до напрямку розташування, ніж тріщини зі співвідношенням осей $a/c = 0.7$.

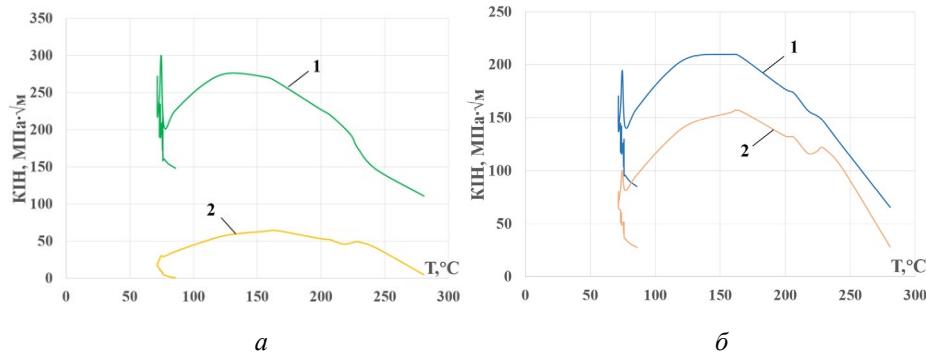


Рис. 1. Температурні залежності коефіцієнту інтенсивності напруження для тріщин зі співвідношенням осей $a/c = 0,3$ (а) та $a/c = 0,7$ (б) у патрубковій зоні КР для характерного режиму термошоку, де 1 – осьові тріщини, 2 – колові тріщини.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: розширеній метод скінчених елементів, коефіцієнт інтенсивності напруження, тріщина, напружено-деформований стан, опір крихкому руйнуванню, патрубкова зона, корпус реактора.

1. Kondryakov E.O. Application of Modern Approaches to the Numerical Modeling of the Stress-Strain State for the Strength Assessment of Complex Units of the NPP Primary Circuit Equipment. Part 1. Submodeling Methodology // Strength Mater. – 2022. – **54**, N 6. – P. 1057-1063. <https://doi.org/10.1007/s11223-023-00481-z>
2. Kondryakov E.O. Application of Modern Approaches to the Numerical Modeling of the Stress-Strain State for the Strength Assessment of Complex Units of the NPP Primary Circuit Equipment. Part 2. Extended Finite Element Method // Strength Mater. – 2023. – **55**, N 5. – P. 888-897. <https://doi.org/10.1007/s11223-023-00579-4>
3. Li Y., Jin T., Wang Z., Wang D. Engineering critical assessment of RPV with nozzle corner cracks under pressurized thermal shocks // Nuclear Engineering and Technology. – 2020. – **52**, N 11. – P. 2638-2651.
4. Mora D. F., et al. Modelling of reactor pressure vessel subjected to pressurized thermal shock using 3D-XFEM // Nuclear Engineering and Design. – 2019. – **353**, 110237.
5. Murtaza U. T., Hyder M. J. Fracture analysis of the set-in nozzle of a PWR reactor pressure vessel – Part 1: Determination of critical crack // Engineering Fracture Mechanics. – 2018. – **192**, N 1. – P. 343-361.

E.O. Kondryakov, V.V. Kharchenko

NUMERICAL MODELING OF THE STRESS-STRAIN STATE OF THE REACTOR PRESSURE VESSEL NOZZLE ZONE WITH CRACKS USING THE EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD

G.S. Pisarenko Institute for Problems of Strength of the National Academy of Sciences of Ukraine;
2 Sadovo-Botanichna str., Kyiv-014, 01014, Ukraine;
e-mail: kondryakov@ipp.kiev.ua

A comparison of numerical modeling results for the reactor pressure vessel nozzle zone using classical and extended (XFEM) finite element methods with the submodeling technique was conducted. The obtained results showed that using the XFEM method allows to carry out of express assessment of resistance to brittle fracture with the ability to vary the shape, size, and location of the crack, which enables effective determination of its critical size and the most dangerous location in the structural element.

М.В. Бородій, З.С. Ясковець, М.П. Адамчук

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РАТЧЕТИНГУ ЗА ОДНОВІСНОГО СТУПІНЧАСТОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України,
бул. Садово-Ботанічна, 2, 01014, Київ, Україна;
e-mail: mborodii@gmail.com

Вступ.

Явище ратчетингу проявляється у вигляді постійного накопичення пластичних деформацій під час циклічного асиметричного навантаження з контролем за напруженнями. Якщо навантаження елемента конструкції супроводжується ефектом ратчетингу то накопичення пластичних деформацій суттєво прискорює процес пошкодження матеріалу і скороочує його втомну довговічність.

У попередніх роботах були отримані експериментальні криві ратчетингу за дводвісного ступінчастого навантаження циклічним внутрішнім тиском трубних елементів із сталі 20 [1, 2]. В цих роботах досліджувався вплив зміни амплітудного та середнього напруження циклу на деформації ратчетингу в коловому і осьовому напрямках. Метою даної роботи є експериментальне дослідження ефекту ратчетингу на суцільних зразках, вирізаних з матеріалу трубних елементів, за аналогічних (з огляду на рівень асиметрії і значень максимальних напружень) програм ступінчастого циклічного навантаження.

1. Зразки, матеріал, обладнання та програма випробувань.

Експерименти на одновісний ратчетинг виконані на стандартних п'ятикратних циліндричних зразках діаметром робочої частини 5 мм. Матеріал – конструкційна вуглецева якісна сталь 20.

Експериментальна програма навантаження осьовою силою складалась з чотирьох схем навантаження зразків. Перша – це монотонне навантаження ML (*monotonic loading*), яке виконано для отримання типової діаграми деформування та визначення механічних характеристик сталі 20. Програма асиметричного циклічного навантаження з контролем за напруженнями SAL (*step amplitude loading*) відтворювала (за максимальним напруженням у коловому напрямку та коефіцієнтом асиметрії) програму трьохступінчастого випробування трубного елемента циклічним внутрішнім тиском при ступінчастій зміні амплітудного напруження за сталого значення середнього напруження циклу [1]. Програма навантаження SML (*step mean loading*) відтворювала програму трьохступінчастого випробування трубного елемента при зміні середнього напруження за сталого значення амплітудного напруження циклу [2]. Остання програма випробувань CML (*constant maximum loading*) представляла собою п'ятиступінчасте навантаження за сталого значення максимальних напружень при зміні амплітудних і середніх напружень циклу. Для програм випробувань SAL і SML кількість циклів на перших двох етапах становила 100, на третьому 30 циклів. Для програми CML 100 циклів навантаження було застосовано лише на першому етапі на всіх інших по 30 циклів.

2. Результати випробувань на ратчетинг.

Експериментальні криві одновісного деформування в координатах напруження–деформація для різних програм асиметричного навантаження з контролем за напруженнями представлені на рис. 1. а) - SAL, б) - SML, в) - CML. Результати

випробувань показали загальну тенденцію, що накопичення пластичних деформацій в них відбувається особливо інтенсивно на перших 10 циклах з різким зниженням швидкості ратчetingу та виходом на стабілізований режим з дуже низьким приростом деформацій після 15 циклу.

Як видно з рис. 1 найбільша деформація ратчetingу досягнута для програми ступічастого навантаження SAL. Загальні деформації ратчetingу для програми SML виявились дещо меншими. Найнижчий рівень деформацій ратчetingу отримано для програми CML.

За меншого рівня амплітудних напружень циклу на ступені I програми SAL (рис. 1, а) спостерігається менший рівень деформацій ратчetingу у порівнянні з деформаціями на ступені I програми SML, яка характеризується більшою амплітудою напружень (рис. 1, б). Деформації ратчetingу на II ступені навантаження цих двох програм підтверджують загальну тенденцію – деформації ратчetingу більші там, де амплітудні напруження циклу більші (програма SAL).

Тенденція

зберігається навіть попри те, що в програмі SML максимальні напруження (330 МПа) перевищують напруження програми SAL на 5 МПа. Це невелике перевищення і його можна було б не враховувати пославши на розкид даних. Проте невисокий рівень накопичення пластичних деформацій в програмі CML, для якої максимальні напруження були найвищими серед всіх програм (340 МПа) свідчить, що амплітуда напружень превалює над іншими факторами – середнім напруженням або максимальним напруженням циклу, під час ратчetingу за коефіцієнта асиметрії $R > 0$.

На рис. 2 представлена кінетика накопичення деформацій ратчetingу для досліджених програм асиметричного навантаження. Переход на ступінь з навантаженням меншим ніж був досягнутий на попередньому етапі (програми SAL і SML) зупиняє процес ратчetingу. На рис. 2 для порівняння представлені діаграми ратчetingу за ступічастими програмами SAL-pipe і SML-pipe, які отримані на трубних елементах (чорні пунктирні лінії). За характером вони подібні, проте майже за одинакових параметрів циклу навантаження рівень максимальних деформацій ратчetingу в них в декілька разів нижчий. Це можна пояснити більшою жорсткістю трубного елементу, що знаходиться під дією внутрішнього тиску за двовісного розтягу, у порівняння з жорсткістю суцільного циліндричного зразка за розтягу.

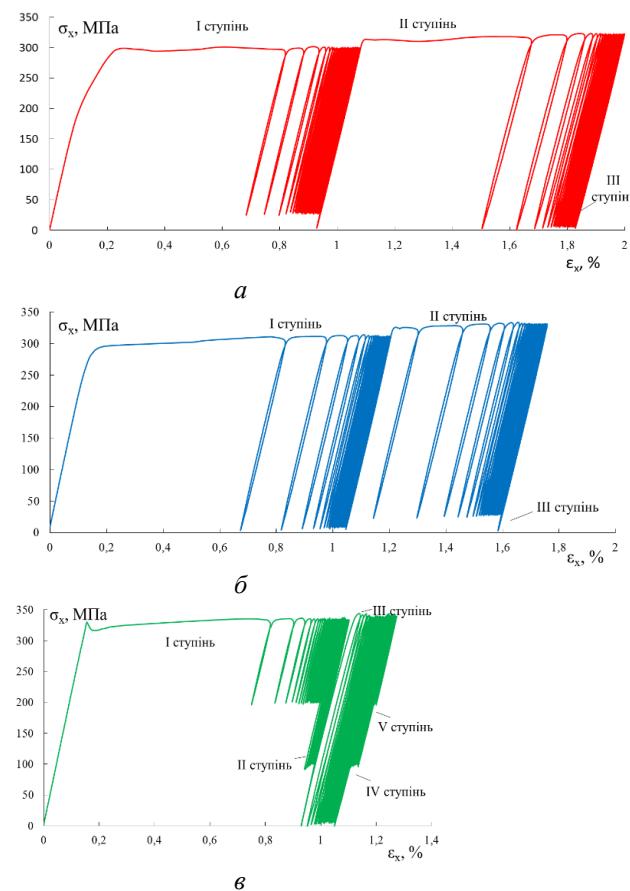
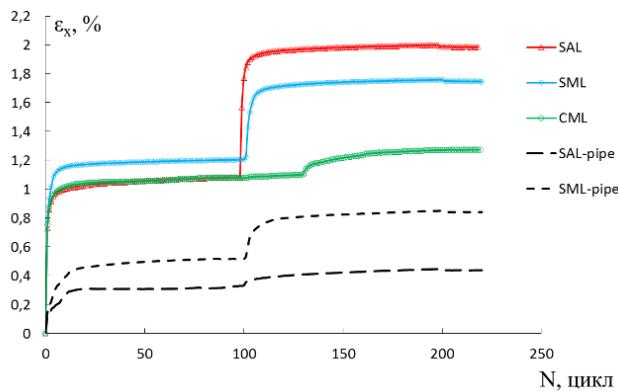


Рис. 1.



Ruc. 2.

Висновки. Виконано експериментальне дослідження деформування сталі 20 за ступінчастого одновісного циклічного навантаження розтягом з різною асиметрією циклу $R > 0$. Програма випробувань складалась з трьох режимів асиметричного навантаження з контролем за напруженнями. Кожен режим представляє собою ступінчасте циклічне навантаження з варіацією певного параметру циклу – амплітудного напруження за сталої значення середнього, середнього напруження за сталої значення амплітудного та одночасно амплітудного і середнього напружень за сталої значення максимального напруження циклу. Рівень навантажень відповідав області малоциклової втоми з вираженим пружно-пластичним деформуванням матеріалу. Показано, що характер деформування зразків за ступінчастого навантаження подібний деформуванню трубних елементів. Проте значення деформацій ратчетингу зразків в декілька разів вищі за деформації ратчетингу трубних елементів за майже однакових програм навантаження, що може бути пояснене більшою жорсткістю останніх за двовісного навантаження внутрішнім тиском та відсутністю площини текучості на першому півциклі. Порівняння кінетики накопичення деформацій ратчетингу за різних програм навантаження свідчить про найбільший вплив на процес ратчетингу амплітудних напружень циклу у порівнянні зі середніми або максимальними напруженнями циклу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: експериментальне дослідження, одновісний ратчетинг, сталь 20, ступінчасте навантаження.

- Adamchuk M.P., Borodii M.V., Stryzhalo V.O., Yaskovets Z.S., Skakun S.A. Cyclic creep of pipes under block-type loading by internal pressure // Materials Science. – 2022. – **58**, N2. – P. 237–244.
- Adamchuk M.P., Borodii M.V., Yaskovets Z.S. Cyclic mean stress variation effect on pipe ratcheting // Strength of Materials. – 2023. – **55**, N 5, – P. 898–907.

M.V.Borodii, Z.S.Yaskovets, M.P. Adamchuk,

EXPERIMENTAL STUDY OF UNIAXIAL RATCHETING UNDER STEP LOADING

*G.S.Pisarenko Institute for Problems of Strength National Academy of Sciences of Ukraine,
2, Sadovo-Botanic Str, 01014, Kyiv, Ukraine
e-mail: mborodii@gmail.com*

An experimental study of the deformation of steel 20 under stepped uniaxial cyclic tensile loading with different cycle asymmetry was carried out. It is shown that the staged process of deformation of cylindrical specimens and pipe elements has a similar appearance, but the values of ratcheting strain obtained on samples under uniaxial loading are significantly higher.

**Р.В.Бехтер¹, О.Б.Галєнкова¹, Р.Ю Білій², О.В.Завгородній³,
О.В.Овчинников⁴**

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЕНТУ ЗАПАСУ МІЦНОСТІ ЛОПАТОК ТУРБІНИ ЗІ СПЛАВУ НА ОСНОВІ АЛЮМІНІДУ ТИТАНУ

¹ДП "Івченко-Прогрес",

69068, м. Запоріжжя, вул. Іванова, 2, Україна.

²ДВНЗ Український державний хіміко-технологічний університет,

49005, м.Дніпро, просп.Науки, 8, e-mail:udhtu@udhtu.edu.ua.

³ТОВ «Мультіфлекс», 69063, м.Запоріжжя, просп.Соборний, 24,

e-mail:info@powdermet.com.ua

⁴АТ «Інститут титану»,

69035, м. Запоріжжя, пр. Соборний, 180, Україна,

e-mail: common@timag.org

КЛЮЧОВІ СЛОВА: алюмінід титану, лопатка турбіни, коефіцієнт запасу міцності, скінченноелементна модель, еквівалентні напруження.

В роботі проведено розрахунок коефіцієнту запасу міцності лопаток турбіни з дослідного сплаву на основі алюмініду титану в порівнянні з серійним сплавом на нікелевій основі.

Удосконалення турбіни ГТД, найбільш навантаженим елементом якої є робочі лопатки, можливо за рахунок застосування жаростійких сплавів з меншою питомою вагою, до числа яких відносяться перспективні сплави на основі алюмініду титану. Але використання нового сплаву для авіаційного виробу вимагає проведення додаткових розрахунків коефіцієнту запасу міцності матеріалу.

Метою роботи є визначення можливості застосування сплаву на основі алюмініду системи Ti-28Al-7Nb-2Mo-0,3 (Y, Re, В) замість сплаву ВЖЛ12Э-ВИ для робочої лопатки 2 ступеня вільної турбіни.

Для перевірки умов міцності виконані розрахунки напруженого стану лопаток і приведено розподіл еквівалентних напружень при використанні вихідного та експериментального сплавів. Для розрахунків із застосуванням програм UnigraphicsNX та Ansys побудовані тривимірна та скінченноелементна моделі лопатки, що відображають особливості її геометрії.

Показано, що максимальні напруження діють в кореневому пе-ретині пера лопатки і при використанні експериментального сплаву

з алюмініду титану еквівалентні напруження зменшуються на 35% порівняно із вихідними значеннями.

Результати розрахунків запасу міцності наведено у відносних величинах (таблиця 1).

Враховуючи температуру пера лопатки в найбільш напруженій її частині, що відповідає 436°C, розрахунки проводили з використанням даних довготривалої міцності сплавів, що розглядаються.

Таблиця 6. Результати розрахунку запасу міцності лопатки

Матеріал лопатки	Перетин лопатки	Температура, °C	Еквівалентні напруження, МПа	Відносний запас міцності, к	
				100 год	25000 год
ВЖЛ12Э-ВИ	кореневий	436	716	1,0	0,991
			460	1,02	0,993

За базове значення «1,0» прийнято коефіцієнт запасу міцності матеріалу ВЖЛ12Э-ВИ за 100год. Розрахункові значення для сплаву з алюмініду титану показали, що запас міцності матеріалу при 100год не менше запасу міцності вихідного сплаву і складає 1,02 відносно базового значення. Шляхом інтерполяції кривої довготривалої міцності визначені коефіцієнти запасу міцності для ресурсу лопатки 25000 год. При розрахунках отримано незначне зниження коефіцієнту відносно базового значення для обох сплавів.

Згідно проведеного аналізу розрахункових даних лопатки з алюмініду титану задовольняють умовам міцності, а їх ресурсні показники не гірші за вихідний матеріал. Таким чином, проведений комплекс розрахунків дозволяє зробити висновок про можливість використання дослідного сплаву на основі алюмініду титану в якості матеріалу для виготовлення лопатки 2 ступеню вільної турбіни.

*Ruslan Bekhter¹, Olha Halienkova¹, Roman Bilyi², Alexander Zavhorodnii³,
Alexander Ovchinnikov⁴*

¹SE Ivchenko-Progress, 69068, Zaporizhzhia, Ivanova str. 2, Ukraine

²Ukrainian State University of Chemical Technology, 49005, Dnipro, Nauki ave., 8. e-mail:udhtu@udhtu.edu.ua

³Multiflex Company, 69063, Zaporizhzhia, Sobornii ave., 24,
e-mail:info@powdermet.com.ua

*⁴SRI of Titan, 69035, Zaporizhzhia, Sobornii ave., 24, e-mail:
common@timag.org*

**DETERMINATION OF THE COEFFICIENT OF SAFETY OF TURBINE
BLADES FROM AN ALLOY BASED ON TITANIUM ALUMINIDE**

This paper investigates the possibilities of manufacturing the working blade of the 2nd stage of the free turbine from an experimental alloy based on titanium aluminide of the Ti-28Al-7Nb-2Mo-0.3 (Y, Re, B) system/

О. Онопрієнко, В. Говоруха

АНАЛІЗ ТРІЩИН В П'ЄЗОМАГНІТНИХ НАНОМАТЕРІАЛАХ

Дніпровський державний аграрно-економічний університет,
бул. Сергія Єфремова, 25, 49600, Дніпро, Україна
e-mail: onopriienko.oleg@gmail.com, govorukhavb@yahoo.com

Протягом останніх десятиріч п'єзомагнітні наноматеріали є об'єктом інтенсивних досліджень через їх здатність до взаємоперетворення механічної та магнітної енергії на нанорівні. Їхні унікальні властивості знаходять застосування у розробці високочутливих сенсорів, наноактуаторів та систем для збору енергії. Проте, зменшення розмірів матеріалів до наномасштабів супроводжується новими викликами, пов'язаними з утворенням та розвитком тріщин, що впливають на механічну міцність та надійність цих матеріалів.

Основною метою даного дослідження є аналіз механізмів утворення та розвитку тріщин у п'єзомагнітних наноматеріалах, а також вивчення впливу нанорозмірів і квантових ефектів на ці процеси. Особлива увага приділяється взаємодії тріщин з наноструктурними дефектами та магнітоелектричними доменами.

Для дослідження поведінки тріщин у п'єзомагнітних наноматеріалах використано методи молекулярної динаміки та квантовомеханічного моделювання. Метод молекулярної динаміки базується на симуляції руху атомів і молекул під впливом внутрішніх та зовнішніх сил, дозволяючи отримати детальну картину міжатомних взаємодій. Квантовомеханічне моделювання враховує квантові ефекти, такі як тунелювання електронів і взаємодія хвильових функцій, що є критичними на наномасштабах. Використання цих методів дало можливість забезпечити глибоке розуміння механізмів утворення і розвитку тріщин на атомарному рівні. Ці методи також дозволили враховувати міжатомні взаємодії та квантові ефекти, що є особливо важливими при аналізі наноматеріалів. Міжатомні взаємодії включають різні типи сил, такі як ковалентні, іонні, ван-дер-ваальсові та водневі зв'язки, які визначають механічні властивості матеріалу. Квантові ефекти, які проявляються на нанорівні, можуть значно впливати на поведінку тріщин, наприклад, шляхом зміни енергетичних бар'єрів для розповсюдження тріщин або виникнення нових дефектів. Врахування цих факторів дозволило створити більш точні та надійні моделі для передбачення поведінки матеріалів. Додатково застосовано аналітичні методи для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напруження та динамічних коефіцієнтів інтенсивності напруження у вершинах тріщин. Ці коефіцієнти є важливими параметрами, що характеризують концентрацію напруження у місцях дефектів та тріщин. Вони дозволяють кількісно оцінити, наскільки напруження навколо тріщини може привести до її розповсюдження. Аналітичні методи включали також розв'язання диференціальних рівнянь та використання числових алгоритмів, що дозволило доповнити результати молекулярної динаміки та квантовомеханічного моделювання. Таким чином, поєднання цих підходів забезпечило комплексне розуміння механізмів руйнування в п'єзомагнітних наноматеріалах.

Результати дослідження показали, що зменшення розмірів матеріалу до наномасштабів значно змінює розподіл напружень навколо тріщин, що впливає на їх розвиток та стабільність. Виявлено, що квантові ефекти, такі як тунелювання та квантове зчеплення, можуть суттєво змінювати механізми утворення та розповсюдження тріщин у п'єзомагнітних наноматеріалах. Встановлено, що наноструктурні дефекти, такі як пори та включення, мають значний вплив на розвиток тріщин, часто виступаючи як місця їх зародження. Аналіз результатів показав, що магнітоелектричні домени можуть змінювати траекторію росту тріщин, що відкриває можливості для контролю над їх розвитком за допомогою зовнішніх магнітних та електрических полів. Подальше дослідження можуть бути спрямовані на вивчення взаємодії тріщин з іншими типами нанодефектів та розробку методів активного керування тріщинами за допомогою зовнішніх впливів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: П'єзомагнітні наноматеріали, Розрахункові моделі, Коефіцієнти інтенсивності напружень, Розвиток тріщини

О. Onopriienko, V. Govorukha

ANALYSIS OF CRACKS IN PIEZOMAGNETIC NANOMATERIALS

Dnipro State Agrarian and Economic University,
Serhii Efremov Str., 25, 49600, Dnipro, Ukraine
e-mail: onopriienko.oleg@gmail.com, govorukhavb@yahoo.com

Piezomagnetic nanomaterials have been intensely studied for their ability to convert mechanical and magnetic energy at the nanoscale, making them ideal for high-sensitivity sensors and energy harvesting systems. However, their nanoscale dimensions introduce challenges related to crack formation and propagation, affecting mechanical strength and reliability. This study analyzes these mechanisms, focusing on the influence of nanoscale dimensions, quantum effects, and interactions with nanostructural defects and magnetoelectric domains. By using molecular dynamics and quantum mechanical modeling, the research reveals significant effects of stress distribution and quantum phenomena on crack behavior. These findings provide insights into controlling crack propagation through external fields.

Keywords: Piezomagnetic nanomaterials, Computational models, Stress intensity factors, Crack propagation.

Р.В. Коба¹, В.А. Максимюк¹, В.С. Ушакова¹, О.В. Ушаков²

**ДО ПРОБЛЕМИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СТРІЛЕЦЬКОЇ ЗБРОЇ ТА РАЦІОНАЛЬНИХ
ПАРАМЕТРІВ ВОДЯНОГО КУЛЕУЛОВЛЮВАЧА**

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: desk@inmech.kyiv.ua*

²*Український науково-дослідний інститут спеціальної техніки та судових експертіз
Служби безпеки України.
бул. Миколи Василенка, 3, 03113, Київ, Україна;
e-mail: ictc@ssu.gov.ua*

З погляду експертізи та ідентифікації стрілецької зброї наведено вимоги до кулеуловлювачів за умов масового використання. З огляду наявних в різних установах конструкцій кулеуловлювачів нададо перевагу водяному. Експериментально встановлено, яка товща води сповільнює кулю до прийнятної швидкості. Дано верхня оцінка максимальних напружень і деформацій залишити від геометричних і механічних параметрів кулеуловлювача та кінетичної енергії кулі. Виготовлено спрощений макет кулеуловлювача з орієнтацією на низькоенергетичні кулі.

Кулеуловлювачі застосовують для експертізи та ідентифікації зброї за слідами на кулях. Кожна зброя залишає унікальний слід кулі, що сприяє розкриттю злочинів. За кулею можна встановити власника зброї. Для контролю за обігом зброї необхідна експертна стрільба. Метою експертної стрільби є:

- з'ясувати, які сліди в момент пострілу зброї може залишити на кулях;
- одержати найбільш достовірні зразки кулі, що стріляні з досліджуваної зброї;
- встановити, як відображаються ознаки каналу ствола в слідах на відстріляних кулях;
- визначити можливу причину розходжень у слідах на різних кулях, стріляних із однієї досліджуваної зброї.

У зв'язку з розширенням імпорту й обігу вогнепальної зброї та введенням КМ України «Єдиного реєстру зброї» потреба в якісних кулеуловлювачах зростає. А оскільки вартість імпортних заводських кулеуловлювачів є досить високою, то доцільно розробити власний, який надалі можна запустити в серійне виробництво.

Одними з кращих є водяні кулеуловлювачі [1,3], які власне є металевими трубами, заповненими водою. Вони дозволяють сповільнити кулю зі збереженням слідів відстрілу та без пошкодження й деформування. Після пострілу кінетична енергія сповільнюваної кулі переходить переважно в потенціальну енергію деформації труби й нагрівання води. Ця деформація має бути в межах пружності матеріалу. Для цього необхідно вибрати належні геометричні (довжина, діаметр, товщина стінки) параметри труби.

Теоретичні розрахунки таких параметрів є вкрай складними, а їх достовірність важко оцінити. Більшість публікацій в цій галузі стосується патентознавства, в яких механічні явища в кулеуловлювачах не розглядаються. Тому було запропоновано експериментальний шлях пошуку оптимальних параметрів кулеуловлювача з вивченням супутніх динамічних механічних процесів.

Для визначення товщини води, яка сповільнює кулю до прийнятної швидкості, було використано наявний в Інституті механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України вертикальний бак висотою 3 м і діаметром 3,2 м з прозорим вікном на середині висоти для спостереження. Відстрілювались кулі калібром 9 мм та 7,62 мм. Фільмуванням, візуа-

льними спостереженнями за швидкістю кулі через вікно та оглядом витягнутої кулі було встановлено, що на глибині 2 м куля сповільнюється до прийнятної швидкості, що узгоджується з результатами [1].

Для виготовлення надійного макета кулеуловлювача необхідно дати верхню оцінку максимальних напружень і деформацій залежно від геометричних і механічних параметрів та кінетичної енергії кулі.

Вважатимемо, що після пострілу кінетична енергія сповільнюваної кулі переходить переважно в потенціальну енергію деформації труби, а тиск на її стінки не змінюється з висотою. Трубу будемо розглядати як пружну тонку циліндричну оболонку.

Тоді прирівнявши кінетичну енергію кулі до потенціальної енергії деформації циліндричної оболонки (рис. 1), матимемо:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{Spw}{2}, \quad (1)$$

де m і v – маса і швидкість кулі; $S = 2\pi Rl$ – площа бічної поверхні циліндра; l , R і h – його висота, радіус і товщина стінок;; p – тиск на внутрішні стінки кулеуловлювача, w – прогин.

Під дією тиску p в оболонці з модулем пружності E виникнуть колові напруження $\sigma = pR/h$ і деформації $\varepsilon = \sigma/E$. Підставивши прогин $w = \varepsilon R = \sigma R/E = pR^2/Eh$ і площину S в (1), матимемо:

$$mv^2 = \frac{2\pi l p^2 R^3}{Eh}. \quad (2)$$

З рівняння (2) послідовно отримуємо формули для тиску

$$p = \frac{v}{R} \sqrt{\frac{m Eh}{2\pi l R}}, \quad (3)$$

ковових напружень

$$\sigma = \frac{pR}{h} = v \sqrt{\frac{m E}{2\pi l R h}}, \quad (4)$$

і колових деформацій

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = v \sqrt{\frac{m}{2\pi E l R h}}. \quad (5)$$

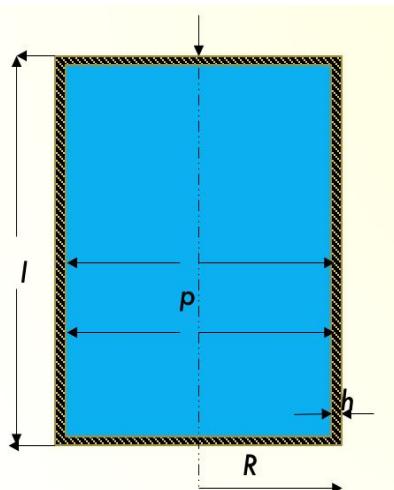


Рис. 1.

З формул (4) і (5) випливає, що напруження і деформації пропорційні швидкості кулі і обернено пропорційні кореню з геометричних розмірів кулеуловлювача.

Для визначення раціональної з погляду запасу міцності товщини стінки циліндричного гідрокулеуловлювача було виконано додаткові експерименти на базі Інституту механіки за допомогою тензодатчиків деформації та з використанням 8-канального реєстратора (рис. 2) вібраційних, акустичних і тензосигналів LMS SCADAS Mobile (Бельгія) [2].

З підсобних матеріалів було виготовлено спрощений експериментальний макет вертикального кулеуловлювача з орієнтацією на низькоенергетичні кулі. На зовнішню поверхню сталевої труби ($E=210$ ГПа) розмірами $l=2$ м, $R=0,1$ м і $h=5$ мм наkleено ряд тензорезисторів вздовж висоти для вимірювання колових деформацій ε . Маса труби з водою становила понад 100 кг. Відстрілювались кулі масою 7,45 г і початковою швидкістю 360 м/с.



Puc.2.

Максимальні колові деформації практично не залежать від місця розташування датчиків за висотою, що обґрунтуете відповідне припущення для виведення формул (3)-(5). Деформації сягали від 300 до 400 мкм/м (мікрострейн). А за розрахунками за формулою (5) колові деформації мали б набути майже втрічі більших значень $\varepsilon=900$ мкм/м. Очевидно, значна частина кінетичної енергії кулі (483 Дж) йде на нагрівання води та розсіювання за практично непружного удару об нижню опору.

Крім того, такі експерименти дозволяють не тільки встановити розподіл динамічних деформацій вздовж труби, а й оцінити рівень динамічного тиску в рідині в середині труби за формулою в (3). Такі пробні експерименти з низькоенергетичними кулями дозволяють оптимізувати пошуки параметрів макета для високоенергетичних кул.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: циліндричний водяний кулеуловлювач, макет, деформації, напруження, експеримент, реєстратор LMS SCADAS Mobile

1. Ганзюк А.Л., Кравчук О.В., Гордєєв А.І. Особливості будови, розрахунку та експлуатації гідрокулеуловлювачів // Криміналістичний вісник.–2023.–40(2).–С. 7–15.
2. Максимюк В.А., Ушакова В.С., Ушаков О.В. Про верхню оцінку напружень і деформацій у водяному кулеуловлювачі // Тези доповідей 10-ї Міжнародної наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації», 2024 р., м. Кам'янець-Подільський. – Кам'янець-Подільський: КПНУ, 2024. – С. 75 – 77.
3. D. Werner, D. Rhumorbarbe, P. Kronseder, A. Gallusser. Comparison of three bullet recovery systems // Forensic science international.–2018.– 290.–P.251–257.

R.V. Koba¹, V.A. Maksymuk¹, V.S. Ushakova¹, O.V. Ushakov²

TO THE PROBLEM OF THE IDENTIFICATION OF SMALL WEAPONS AND THE RATIONAL PARAMETERS OF THE WATER BULLET TRAP

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: desk@inmech.kyiv.ua

² The Ukrainian scientific and research Institute of special equipment and forensic expertise,
Mykoly Vasylchenko Str., 3, 03113, Kyiv, Ukraine

From the point of view of examination and identification of small arms, the requirements for bullet traps under the conditions of mass use are given. It was experimentally determined which layer of water slows down the bullet to an acceptable speed. An upper estimate of the maximum stresses and deformations depending on the geometric and mechanical parameters of the bullet trap and the kinetic energy of the bullet was given. A simplified model of a bullet trap with a focus on low-energy bullets has been made.

О.П. Максименко¹, М.М. Гвоздюк^{1,2}, Я.Л. Іваницький¹

ОЦІНЮВАННЯ МІЦНОСТІ МЕХАНІЧНИХ З’ЄДНАНЬ ЛИСТОВИХ МАТЕРІАЛІВ ОПТИКО-ЦИФРОВИМ МЕТОДОМ

¹Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАНУ,
бул. Наукова, 5, 79060, Львів, Україна;
e-mail: olmaksi@gmail.com

²Національний університет «Львівська політехніка»,
бул. С. Бандери, 12, 79013, Львів, Україна

Механічні з’єднання листових дюралюмінієвих і полімерних композиційних матеріалів (ПКМ) широко використовують у літакобудуванні і на них припадає найбільша кількість випадків руйнування корпусу літальних апаратів за силового і корозійного впливу. Відомі методи розрахунку на основі кінцевих елементів (КЕ) та спрощені інженерні підходи оцінювання міцності багаторядних з’єднань, які використовуються під час розроблення, дають досить суперечливі результати і потребують експериментальної верифікації [1-3]. У зв’язку з чим запровадження нових розрахунково-експериментальних підходів та технічних засобів визначення допустимих напружень змінання у багаторядних болтових і заклепкових з’єднаннях за використання сучасних методів спекл-метрології [6] є актуальним.

В цій роботі на основі методу цифрової кореляції зображень (ЦКЗ) запропоновано розрахунково-експериментальну методику визначення розподілу деформацій і напружень між точковими елементами з’єднання і наведено експериментальні результати її застосування для заклепкових і болтових багаторядних з’єднань.

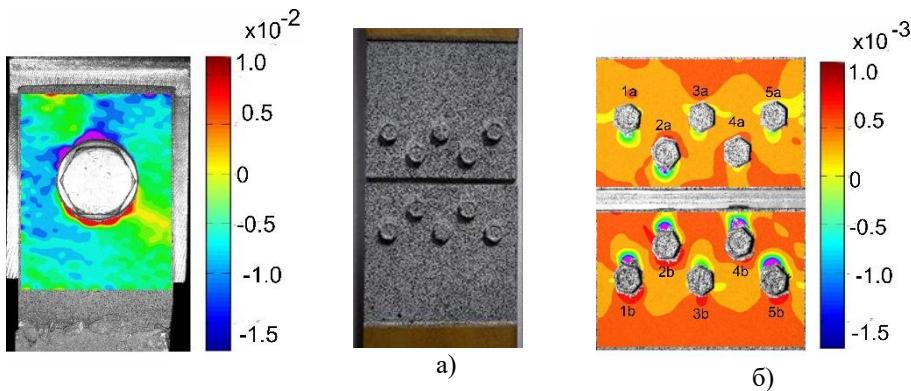
В основу методу покладено припущення, що за достатньої віддаленості один від одного точкових елементів кріплення у багаторядному з’єднанні, розподіл напружень можна визначати попередньо дослідивши зміну деформацій під час змінання зразка з одиночним (ізольованим) отвором, що навантажується через контактний елемент (болт або заклепку). Приклад розподілу деформацій який можна отримати методом ЦКЗ показано на рис. 1. Під час експерименту пластина з ПКМ була навантажена зусиллям 400 Н через тіло болта який проходить скрізь отвір. Випробування одиночного елемента є базовими для оцінювання міцності багаторядного з’єднання [4].

Напруження змінання σ_b одиночного з’єднання розраховували так

$$\sigma_b = \frac{P_c}{dt}, \quad (1)$$

де P_c - критичне зусилля змінання, d - діаметр отвору, t - товщина зразка.

Використовуючи усереднений результат випробування ряду зразків з одиночним болтом були визначені напруження змінання в околі контактних елементів у багаторядному болтовому з’єднанні двох пластин вуглепластика ЕЛУР-008П/БН довжиною $L = 200$ mm, шириною $W = 100$ mm та товщиною $t = 3,4$ mm. Пластини ПКМ були з’єднані двома рядами сталевих болтів M6 і дюралевою накладкою завтовшки 5 mm рис. 2а. Під час навантаження зразок кріпили у клинових захопах розривної машини EUS-20 і розтягали зі швидкістю 1 mm/хв. Використовуючи відповідну апаратуру для реєстрації зображень і метод ЦКЗ отримали розподіл деформацій в околі усіх болтів, які з’єднують дві пластини ламінату рис 2б та розрахували напруження змінання подані у таблиці 1 [5].



Ruc. 1.

Ruc.2.

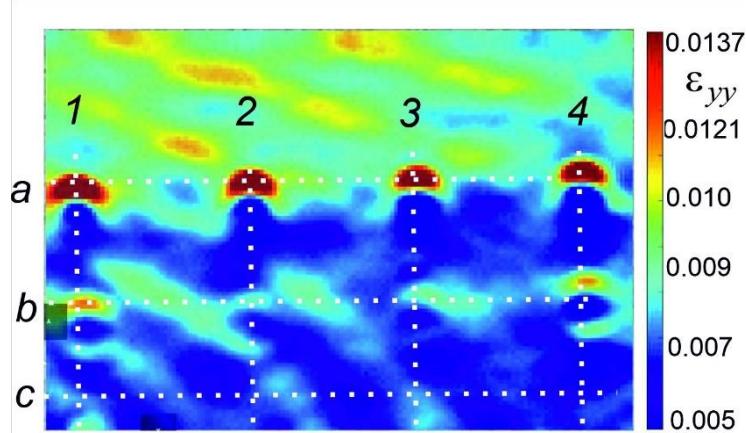
Таблиця 1

Вузол з'єднання (див. рис. 2б)	ε_{yy}	$[\sigma_b]$, MPa
1a	$0,61 \cdot 10^{-2}$	200
2a	$1,80 \cdot 10^{-2}$	225
3a	$0,51 \cdot 10^{-2}$	185
4a	$0,11 \cdot 10^{-2}$	105
5a	$0,50 \cdot 10^{-2}$	180
1b	$2,04 \cdot 10^{-2}$	246
2b	$2,10 \cdot 10^{-2}$	284
3b	$0,50 \cdot 10^{-2}$	190
4b	$2,00 \cdot 10^{-2}$	242
5b	$2,15 \cdot 10^{-2}$	290

Таблиця 2

Стовбець Ряд	1	2	3	4
a	191	168	159	156
b	154	152	150	151
c	145	140	136	138

- діаметром 5 mm, а ряди (b) та (c) діаметром 6 mm. Довжина робочої частини зразка становила l = 70 mm. Під час досліджень зразок встановлювали у плоских захопах розривної машини FP-100 і піддавали розтягу зі швидкістю переміщення траверси 1 mm/хв. Розраховані напруження біля контактних елементів у багаторядному заклепковому з'єднанні за навантаження 60 KN подано у таблиці 2, а розподіл деформацій в напрямку прикладеного зусилля на рис.3.



Ruc. 3.

Запропонована у цьому дослідженні експериментально-роздрахункова методика, що дає можливість виявляти відхилення величин напружень у контактних елементах багаторядного з'єднання біля кожної контактного елемента і встановити найбільш навантажені елементи та на основі цих даних оптимізувати розташування контактних елементів.

Причиною розкиду напружень між окремими точковими елементами і рядами є сукупність різноманітних факторів таких як – неспіввісність розташування отворів у з'єднувальних пластинах, різні за величиною початкові зазори, натяги та зусилля клепки, а також інші технологічні відхилення, які часто виникають під час виробництва. Ці особливості, які виникають при виготовленні багаторядних з'єднань необхідно враховувати, в процесі вибору оптимальної відстані між рядами під час проектування та відприфлювання технологічних процесів. Після певного доопрацювання запропоновану методику можна буде використовувати для експлуатаційного контролю напружень і величини овалізації отворів різних типів багаторядних з'єднань.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: деформації отвору, цифрова кореляція зображень, напруження змінання, болтові і за-клепкові з'єднання, поле деформації, початковий зазор

1. Двейрин А. З. Обзор и анализ состояния проблемы расчетно-экспериментального обеспечения проектирования агрегатов самолета из полимерных композитов с механическими соединениями деталей // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского “ХАИ”, 2014. – Вып. 66. – С. 5–19.
2. Карпов Я. С. З'єднання деталей і агрегатів з композиційних матеріалів. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського “ХАІ”, 2006. – 360 с.
3. Карпов Я. С. Дослідження напруженено-деформованого стану багаторядних механічних з'єднань деталей з композиційних матеріалів // Авіаційно-космічна техніка і технологія. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського “ХАГ”, 1998. – С. 328–334.
4. Киркач А. Б. Проблема прочности болтовых соединений на основе слоистых композиционных пластиков // Вестник ХПИ. Сер. Динамика и прочность машин. – 2011. – С. 45–54.
5. Ivanyts'kyi, Y.L., Hvozdyuk, M.M., Maksymenko, O.P. et al. Evaluation of the strength of bolted joints of composite plates/ Mater Sci (2019) 55: 265. <https://doi.org/10.1007/s11003-019-00298-9>.
6. Maksymenko O. P., Ivanyts'kyi Ya. L., Hvozdyuk M. M. Evaluation of the stiffness of a composite-metal joint by the method of digital image correlation // Materials Science. – 2015. – № 6. – P. 817–823.
7. Maksymenko, O.P., Semenets, O.I., Hvozdyuk, M.M. et al. Distribution of Crushing Stresses in Multirow Riveted Joints/Mater Sci Vol.58, No3 (2023). P.369-376.

O.P. Maksymenko¹, M.M. Hvozdyuk^{1,2}, Ya.L. Ivanyts'kyi

EVALUATION OF MECHANICAL JOINTS STRENGTH OF SHEET MATERIALS BY OPTICAL-DIGITAL METHOD

¹ G.V. Karpenko Physico-Mechanical Institute NASU, Naukova St., 5, 79060, Lviv, Ukraine;

e-mail: olmaksi@gmail.com

²Lviv Polytechnic National University, Stepan Bandera str., 12, 79013, Lviv, Ukraine

It is proposed to use an optical-digital system and methods of processing digital images to determine the distribution of deformations and stresses in multi-row bolted and riveted joints of sheet materials. According to the results of the experimental tests of a single connection were built, the bearing stress was set at the deformation of the hole of 2% for multi row connection.

В. О. Дегтярев

ВПЛИВ ЗАЛИШКОВИХ НАПРУЖЕНЬ В ЗВАРНИХ КОНСТРУКЦІЯХ НА ГРАНИЧНІ НАПРУЖЕННЯ ЦИКЛУ

Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАНУ,
вул. Садово-Ботанічна, 2, 01014, Київ, Україна; e-mail: viadeg09@gmail.com

Запропоновано методику визначення діаграми граничних напружень циклу зварних з'єднань з усталеними залишковими напруженнями. Встановлено, що похила ділянка діаграми зміщується паралельно щодо такої зварних зразків без залишкових напружень.

Ключові слова: граничне напруження, границя витривалості, залишкове напруження, амплітуда напруження циклу, мінімальна границя циклічної повзучості.

В літературі прийнято вважати залишкові напруження розтягування (ЗН) високими, що впливають на утомну міцність зварних конструкцій, коли дотримується умова $\sigma_{\text{зал}} > 0,5\sigma_t$, де σ_t -границя плинності матеріалу. ЗН, які рівні $\sigma_{\text{зал}} < 0,5\sigma_t$, вважаються низькими і на міцність не впливають. Але це поділ є суто умовним, тому що, залежно від величини максимального напруження від зовнішнього навантаження, вони змінюються у широкому діапазоні з різним ступенем впливу на опір утоми зварних елементів металоконструкцій.

Мета роботи полягає в обґрунтуванні методу розрахунку діаграм граничних напружень циклу (ДГНЦ) зварних з'єднань з будь-якою величиною ЗН за результатами випробувань зразків без ЗН. Обробка результатів втомних випробувань стикових з'єднань низьковуглецевої та низьколегованої 09Г2С сталей з різним рівнем вихідних ЗН показала, що якщо спільно врахувати вплив усталеного залишкового ЗН $\sigma_{\text{зал}}^y$ та границю витривалості σ_R при будь-якому значенні коефіцієнта асиметрії

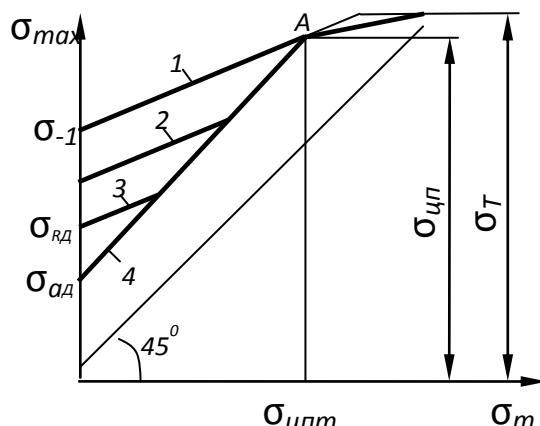


Рис. Діаграми граничних напружень циклу зварних з'єднань.

циклу R_σ , то ДГНЦ з ЗН збігається з ДГНЦ зразків без ЗН (на рис. пряма 1). Це дозволило запропонувати методику розрахунку ДГНЦ зварних з'єднань з різними $\sigma_{\text{зал}}^y$ за результатами випробувань зразків без ЗН. Задаючись на прямий 1 будь-якою точкою та розглядаючи її у вигляді суми $\sigma_{R\Sigma} = \sigma_{\text{зал}}^y + \sigma_R$, можна визначити середнє напруження циклу σ_m і граничну амплітуду циклу σ_a^n , при дії яких у зразку залишається $\sigma_{\text{зал}}^y$, що є граничним у вигляді

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{R\Sigma} - \sigma_R}{1 - \Psi_\sigma} + \sigma_{mR} - \sigma_{\text{зал}}^y, \quad (1) \quad \sigma_a^n = \frac{\sigma_B - \sigma_{R\Sigma}}{\sigma_B / \sigma_{-1} - 1}. \quad (2)$$

де σ_{-1} -границя витривалості зварного з'єднання без ЗН при симетричному циклі навантаження, $\Psi_\sigma = \sigma_{-1} / \sigma_B$ - коефіцієнт впливу асиметрії навантаження, σ_{mR} - середнє напруження циклу в зразку без ЗН, σ_B -границя міцності матеріалу.

Після деяких перетворень при $\sigma_R = \sigma_{-1}$ за умови проведення випробувань при розтягуванні границю витривалості з'єднання з $\sigma_{\text{зар}}^y$ можна визначити за формулою

$$\sigma_{RD} = \frac{\sigma_{-1}(\sigma_B - \sigma_{\text{зар}}^y) + \sigma_m(\sigma_B - \sigma_{-1})}{\sigma_B}. \quad (3)$$

Ясно, що з підвищеннем σ_m границя витривалості зварного з'єднання зростає.

В якості прикладу у таблиці наведено розрахункові значення опору утомі стикових з'єднань низьковуглецевої та низьколегованої сталі 09Г2С з різним рівнем значень $\sigma_{\text{зар}}^y$.

Таблиця. Розрахункові значення граничних напружень циклу зварних з'єднань з різним рівнем вихідних залишкових напружень.

Марка сталі. Границя плинності σ_t та міцності σ_B . Вид з'єднання.	Сумарні напруження, МПа		$\sigma_{\text{зар}}^y$ МПа	σ_m МПа	σ_a^n МПа	σ_{RD} МПа
	$\sigma_{R\Sigma}$	$\sigma_{m\Sigma}$				
1	2	3	4	5	6	7
Низьковуглецева $\sigma_t = 300$ МПа $\sigma_B = 410$ МПа Стикове	300	244	180	44	56	120
	200	117	180	-3	83	20
	300	244	150	94	56	150
	200	117	150	-33	83	50
	300	244	100	144	56	200
	200	117	100	17	83	100
	300	244	50	194	56	250
	200	117	50	67	83	150
Низьколегована 09Г2С $\sigma_t = 340$ МПа $\sigma_B = 518$ МПа Стикове	340	277	250	27	63	90
	220	113	250	-136	107	-30
	340	277	200	77	63	140
	220	113	200	-86	107	20
	340	277	100	177	63	240
	220	113	100	14	107	120
	340	277	50	227	63	290
	220	113	50	64	107	170

Зверху ДГНЦ прийнято обмежувати границею плинності. Оскільки при різній комбінації середнього напруження та амплітуди напруження відбувається накопичення різної залишкової деформації, тому логічніше діаграму обмежувати границею циклічної повзучості. Тому при дотриманні умови $\sigma_{\text{зар}}^y = \sigma_{un} - \sigma_{RD}$ неважко переконатися, що чим більша границя витривалості, тим менше $\sigma_{\text{зар}}^y$, де σ_{un} - мінімальна границя циклічної повзучості (на рис. к. А), яка, як показали дослідження низьколегованих сталей, на 10-14 % менша за σ_t . Запропонована методика повною

мірою буде реалізована у разі дотримання умови $\sigma_{R\Delta} + \sigma_{\text{зal}}^{\text{B}} < \sigma_{\text{up}}$. У цьому випадку вихідні залишкові напруження при циклічному навантаженні зварного з'єднання не досягають граничної величини і не змінюються. Тому у всіх вищеперелічені формулах можна використовувати значення вихідного ЗН, визначене після зварювання виробу. Аналіз табл. показав, що ДГНЦ з'єднань з різними $\sigma_{\text{зal}}^y$ не тільки паралельні між собою (на рис. прямі 2,3), а й паралельні ДГНЦ зразків без ЗН. Причому зі збільшенням $\sigma_{\text{зal}}^y$ кожна діаграма розташовується трохи нижче попередньої. Закінчуються такі діаграми на прямій 4, яка в літературі вважається ДГНЦ зварного з'єднання з високим значенням ЗН, у якої гранична амплітуда циклу σ_{ad} не залежить від σ_m , а сама діаграма при $\sigma_{K\Sigma} = \sigma_{\text{up}}$, задаючись будь-яким значенням R_σ , описується рівнянням

$$\bar{\sigma}_{R\Delta} = \frac{2 \cdot \sigma_{ad}}{1 - R_\sigma} = \frac{2}{1 - R_\sigma} \left(\frac{\sigma_R - \Psi_\sigma \cdot \sigma_{up}}{1 - \Psi_\sigma} - \sigma_{mR} \right). \quad (4)$$

В дійсності кожна точка на цій прямій відповідає границі витривалості зварного з'єднання зі своїм значенням $\sigma_{\text{зal}}^y$. У виразі 4 замість σ_{up} можна використовувати границю плинності, проте використання σ_{up} підвищує точність розрахунку. Ясно, що зі збільшенням ЗН відбувається зниження границі витривалості досліджуваних зварних з'єднань на більш значиму величину. Залежно від марки матеріалу вплив залишкових напружень виявляється дещо різним. Якщо до теперішнього часу вважалось, що ЗН рівні $0,5\sigma_t$ низькі і не впливають на опір утомі, то така їх величина знижує опір утомі з'єднання з низьковуглецевої сталі на 30 %, а з низьколегованої на 33 %.

Таким чином, запропоновану методику можна розглядати як експрес - метод розрахунку характеристик опору утомі зварних з'єднань з різним рівнем $\sigma_{\text{зal}}^y$ за відсутності можливості проведення повномасштабних експериментальних досліджень.

Враховуючи існування єдиної діаграми граничних напружень циклу та задаючись σ_m від зовнішнього навантаження, можна встановити також значення $\sigma_{\text{зal}}^y$ у вигляді

$$\sigma_{\text{зal}}^y = \frac{\sigma_{up} - \sigma_{-1}}{\sigma_B - \sigma_{-1}} - \sigma_m. \quad (5)$$

Регулювання значення $\sigma_{\text{зal}}^y$ зовнішнім навантаженням може знайти своє застосування у способах підвищення міцності конструкцій, що розробляються.

V.O. Dehtiarev

THE INFLUENCE OF RESIDUAL STRESSES IN WELDED STRUCTURES ON THE LIMIT STRESSES OF THE CYCLE

G.S. Pisarenko Institute for problems of strength of the NAS of Ukraine, Ukraine;
Sadovo-Botanichna Str, 2, 01014, Kyiv, Ukraine;
e-mail: viadeg09@gmail.com

Abstract. A method for determining the diagram of limiting stresses of the cycle of welded joints with established residual stresses is proposed. It is established that the inclined section of the diagram shifts parallel to that of welded samples without residual stresses.

Key words: cycle limit stress diagram, endurance limit, residual stress, yield strength, cyclic creep limit, strength limit, cycle stress amplitude, cyclic creep.

В. О. Дегтярев

ОЦІНКА ГРАНИЧНИХ НАПРУЖЕНЬ ЗВАРНИХ З'ЄДНАНЬ СТАЛЕЙ РІЗНОЇ МІЦНОСТІ З ЗАЛИШКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАНУ,
бул. Садово-Ботанічна, 2, 01014, Київ, Україна; e-mail: viadeg09@gmail.com

Запропоновано методику, яка дозволила на прикладі аналізу діаграм граничних напружень циклу зварних з'єднань сталей Ст.3сп, 09Г2С та 14ХМНДФР показати, що в досліджуваному діапазоні середніх напружень циклу та усталених залишкових напружень зварні з'єднання більшої міцності маютьвищі значення границі витривалості, яка інтенсивніше зростає зі збільшенням середнього напруження циклу.

Ключові слова: зварне з'єднання, границя витривалості, залишкове напруження, середнє напруження циклу, амплітуда напруження циклу.

Раніше встановлено, що діаграма граничних напружень циклу (ДГНЦ) стикового з'єднання стали більшої міцності з високими залишковими напруженнями (ЗН) розтягування після їх поєднання в суміщеному вигляді є продовженням діаграми менш міцного з'єднання. Оскільки вихідні ЗН зростають пропорційно границі плинності основного матеріалу σ_T , то, незважаючи на однакові одержувані значення границь витривалості σ_R до певного рівня значень коефіцієнта асиметрії циклу R_σ , у зварних з'єднаннях сталей більшої міцності значення усталених залишкових напружень $\sigma_{\text{зal}}^y$ також будуть більшими. Враховуючи те, що величина $\sigma_{\text{зal}}^y$ за інших рівних умов відіграє основну роль у зниженні опору утомі, порівнювати результати випробувань зварних з'єднань сталей, що містять різний рівень $\sigma_{\text{зal}}^y$, не цілком обґрунтовано. Крім цього, не враховується той факт, що однакові границі витривалості зварних з'єднань різної міцності отримують при неоднаковому відношенні середнього напруження циклу σ_m до границі плинності матеріалу.

У зв'язку з цим представляє інтерес у проведенні таких досліджень, які б дозволили зіставити опір втомі зварних з'єднань сталей різного рівня міцності, що містять одинаковий рівень граничних усталених залишкових напружень в діапазоні зміни R_σ , при якому, як зазначалося, спостерігається збіг діаграм.

Аналіз проведено на прикладі випробувань стикових зварних з'єднань низьковуглецевої Ст.3сп ($\sigma_T = 300$ МПа), низьколегованої 09Г2С ($\sigma_T = 340$ МПа) та низьколегованої високоміцної 14ХМНДФР ($\sigma_T = 600$ МПа) сталей. Максимальні вихідні ЗН склали, залежно від рівня міцності сталі, 0,75-0,85 від σ_T та відповідають 260, 290 та 450 МПа у зварних з'єднаннях сталей Ст.3сп, 09Г2С та 14ХМНДФР відповідно.

Раніше отримані результати утомних випробувань стикових зварних з'єднань вищезгаданих сталей з високими ЗН показали, що в діапазоні зміни R_σ від -1 до 0,6 границі витривалості збігаються. Оскільки ДГНЦ зварних з'єднань з високими ЗН паралельна лініїї проведеної під кутом 45, це вказує на те, що гранична амплітуда σ_a^n не залежить від середнього напруження циклу. Це означає, що при однакових значеннях σ_R в зварних з'єднаннях сталей різної міцності як значення $\sigma_{\text{зal}}^y$, так і відношення граничних напружень до границі плинності матеріалу буде різним. У зв'язку з цим, якщо представити ДГНЦ зварних з'єднань у відносних координатах,

можна побачити (Рис. 1), що вже спочатку при одинакових відносних значеннях середніх напружень σ_m/σ_T вони розходяться. При цьому сталі більшої міцності мають більш високі відносні значення границі витривалості σ_R/σ_{-1} , змінюючи кут нахилу діаграми у вигляді прямій більшою мірою. Найбільший кут нахилу має зварне з'єднання сталі 14ХНДФР (пряма 3). Подання даних у такому вигляді дозволяє аналізувати отримані результати у порівняннях умовах випробувань. У загальному вигляді рівняння для кожної прямої можна записати як

$$\frac{\sigma_{R_i}}{\sigma_{-1}} = 1 + \kappa \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_T} \right),$$

де $\sigma_{-1} = 60$ МПа - границя витривалості зварного стикового з'єднання з залишковими напруженнями при симетричному циклі навантаження, $\kappa = \sigma_T/\sigma_{-1}$ - кут нахилу прямий.

Це дає можливість визначення ДГНЦ зварних з'єднань досліджуваних сталей, знаючи рівняння однієї з них.

В якості прикладу у таблиці наведено розрахункові значення границь витривалості зварних з'єднань досліджуваних сталей при різних значеннях σ_m/σ_T . Аналіз табличних даних показав, що при однаковому відношенні σ_m/σ_T , тобто при випробуваннях у порівняннях умовах, у міру підвищення міцності сталі границя витривалості збільшується. Причому зі збільшенням цього відношення різниця між границями витривалості зростає.

Таблиця. Границі витривалості зварних з'єднань досліджуваних сталей.

Сталь	Границі витривалості σ_R , МПа при різних σ_m/σ_T				
	0	0,1	0,3	0,5	0,7
Ст.Зсп	60	90	150	210	270
09Г2С	60	94	162	230	298
14ХНДФР	60	120	240	360	480

Відомо, що зі зростанням середнього напруження циклу за умови досягнення максимальних напружень (з урахуванням залишкових) границі плинності матеріалу відбувається зниження вихідних ЗН до рівня усталених. Враховуючи проведені раніше дослідження, які дозволили визначити діаграми граничних напружень циклу або граничних амплітуд циклу зварних з'єднань з різною величиною $\sigma_{зal}^y$, а також використовуючи результати випробувань зварних з'єднань без ЗН, можна визначити граничні напруження зварних з'єднань досліджуваних сталей при однаковому рівні $\sigma_{зal}^y$. Враховуючи експериментальні та розрахункові дані, чутливість стикових зварних з'єднань до $\sigma_{зal}^y$ представлялась у вигляді залежності між відношенням граничної амплітуди циклу до відповідної границі витривалості та величиною граничних усталених залишкових напружень. В даному випадку розглядалися найцікавіші характеристики - мінімальна гранична амплітуда σ_a^n та відповідне їй граничне напруження циклу, при яких реалізується єдиний граничний цикл напружень. З аналізу результатів слід, що в з'єднаннях сталей з більш високими механічними властивостями однакові значення σ_a^n/σ_R досягаються при більш

високих значеннях σ_{ocm}^y . Ця різниця зростає у міру підвищення σ_a^n / σ_R . Наприклад, $\sigma_a^n / \sigma_R = 0,5$, що відповідає $R\sigma = 0$, в з'єднаннях сталей Ст.Зсп і 14ХМНДФР можна отримати при σ_{ocm}^y , рівних 170 і 440 МПа відповідно.

Користуючись отриманими даними, неважко встановити залежності границь витривалості зварних з'єднань досліджуваних сталей від граничних усталених залишкових напружень за умови, що зварні з'єднання сталей різної міцності мають однакову мінімальну граничну амплітуду циклу від зовнішнього навантаження, яка дорівнює 60 МПа. Аналіз представлених результатів (Рис. 2) показав, що з підвищенням усталених залишкових напружень для усіх досліджуваних зварних з'єднань σ_R зменшується. Однак граници витривалості зварних з'єднань сталей з більш високими механічними властивостями залишаються завжди вищими у всьому дослідженому діапазоні зміни σ_{ocm}^y . Наприклад, при зміні σ_{ocm}^y від 50 МПа до 200 МПа границя витривалості зварного з'єднання низьколегованої високоміцної сталі (пряма 3) в порівнянні з низьковуглецевою (прямая 1) вище в 2,2 та 4 рази відповідно. Якщо при σ_{ocm}^y , рівному 200 МПа, зниження граници витривалості зварного з'єднання низьковуглецевої сталі відбувається в 3 рази, то для зварного з'єднання високоміцної сталі тільки в 1,5.

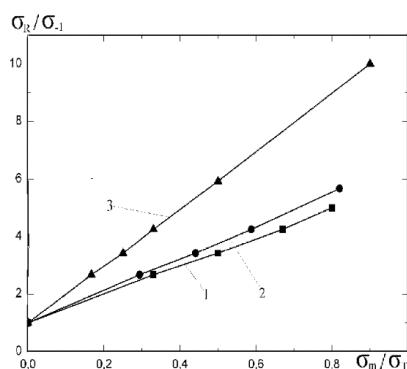


Рис.1.

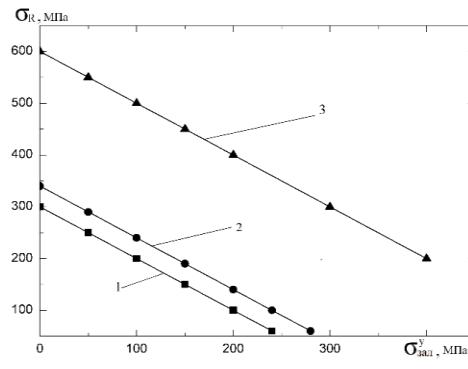


Рис.2.

Таким чином, отримані дані дозволили зіставити граничні напруження в зварних з'єднаннях сталей різної міцності при однаковому рівні як усталених залишкових напружень, так і діючих напружень від зовнішнього навантаження, що може допомогти у виборі сталі при відомих умовах експлуатації.

V. Dehtiarev

ASSESSMENT OF LIMIT STRESSES OF WELDED STEEL JOINTS OF DIFFERENT STRENGTHS WITH RESIDUAL TENSIONS

G.S. Pisarenko Institute for problems of strength of the NAS of Ukraine, Ukraine;
Sadovo-Botanichna Str, 2, 01014, Kyiv, Ukraine;
e-mail: viadeg09@gmail.com

Abstract. A methodology was proposed, which made it possible to show, on the example of the analysis of cycle limit stress diagrams of welded joints of St.3sp, 09G2S and 14KhMNDFR steels, that in the investigated range of average cycle stresses and steady residual stresses, welded joints of greater strength have higher values the limit of endurance, which increases more intensively with an increase in the average stress of the cycle.

Key words: welded joint, endurance limit, residual stress, average cycle stress, cycle stress amplitude.

М.Ф. Дмитриченко¹, І.М. Богданов¹

ВПЛИВ МАСТИЛЬНИХ ДОБАВОК, ТВЕРДОСТІ ТА ШОРСТКОСТІ МАТЕРІАЛУ НА РОЗВИТОК МІКРОПІТІНГУ В КОНТАКТІ ПАРИ ТЕРТЯ КОЧЕННЯ

¹Національний транспортний університет
бул. Михайла Омеляновича-Павленка, 1, 01010, Київ, Україна
e-mail: dmitrichenko@ntu.edu.ua

Анотація. Мікропітінг є втомним пошкодженням, що виникає в умовах, коли товщина масляної плівки менша шорсткості поверхні. Результати проведених випробувань підтвердили вплив твердості і шорсткості поверхні випробувального зразка та різних мастильних матеріалів на виникнення мікропітінгу. Випробування на тертя проводилися на модернізованому стенді СМЦ – 2. На більш твердій і шорсткій поверхні зразків були отримані глибші мікролунки. Використання мастила з фосфорною присадкою призвело до отримання мікролунки меншої глибини, ніж при використанні мастила з додаванням сірки. Було висловлено припущення, що коефіцієнт тертя не значно впливає на розвиток мікролунки. Відношення товщини масляної плівки до середньоквадратичної шорсткості після початкового припрацювання виявилося величим. На дуже твердій поверхні з великою шорсткістю мікропітінг розвивається легше. Однак з'ясувалося, що його розвиток можна стримати відповідними присадками до мастильних матеріалів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: мікропітінг, втома, пошкодження, шорсткість поверхні, тертя кочення.

Вступ. Із великого різноманіття мікродефектів поверхні твердих тіл найбільш поширеними можна вважати плоску клиноподібну тріщину, яка має деяке заокруглення у її гирлі з радіусом ρ . При прикладені зовнішніх сил до крихких твердих тіл поблизу гирла тріщини і в площині її перерізу спостерігається різке збільшення напруженого стану матеріалу σ_m , що у декілька разів перевищує середнє напруження σ , прикладене до зовнішньої поверхні тіла.

У тих випадках, коли енергія, прикладена зовнішніми силами до матеріалу гирла тріщини, перевищує енергію, необхідну для утворення нової поверхні, відбувається розвиток тріщини. Якщо цього перевищення не відбувається, тріщина після деякого свого збільшення у момент прикладення зовнішньої сили, після зняття навантаження повертається у початкове положення. В умовах же реальних тіл, що не мають абсолютної пружності, може відбуватися і поступовий розвиток тріщини. Особливо це проявляється при багатоциклових навантаженнях твердих тіл.

Оброблюваний матеріал та його структура істотно впливають на характер і висоту нерівностей оброблюваної поверхні.

Величина R_a оброблюваної поверхні зменшується при переході від структури ферито-перліту до троститу та тростито-мартенситу. Ферит, що є м'якою, в'язкою складовою структури сталі, легко деформується, при обробці різанням має схильність до утворення нерівностей на поверхнях. З точки зору отримання поверхні з мінімальною R_a виявляються надзвичайно несприятливими структури з неоднорідною величиною зерен, зокрема структура «глобулярного перліту», що складається з круглих зерен цементиту, розсіяних по основній масі металу.

Під час експлуатації технічних систем зношування поверхонь деталей пар тертя відбувається у результаті підсумування різних за інтенсивністю та видами елементарних актів руйнувань та змін механічних та фізико-хімічних властивостей матеріалу під впливом зовнішніх факторів (середовище, температура, тиск, вид тертя, швидкість відносного переміщення поверхонь, тощо). Сукупність різних факторів у процесі тертя визначає вид зношування та його інтенсивність. Внаслідок різноманітності вихідних матеріалів деталей, що утворюють пари тертя, та умов їх експлуатації види зношування надзвичайно різноманітні.

Так, причиною виникнення втомного зношування є втомні явища в поверхневих шарах металу, внаслідок чого утворюються тріщини, а потім і викришуються поверхні (піттинг).

Втомне зношування спостерігається в умовах високих контактних навантажень при одночасному коченні та проковзування однієї поверхні по іншій у присутності мастильних матеріалів.

Процес прогресуючого втомного зношування протікає наступним чином. Спочатку на поверхні тертя утворюються втомні тріщини. Мастильний матеріал, потрапляючи в тріщини, сприяє їх розклиненню та викришуванню частинок металу, внаслідок чого на поверхні деталі з'являються дрібні лунки (піттинг). Число цих лунок і одночасно їх розміри збільшуються до тих пір, поки контактні напруження, що підвищуються, на робочих поверхнях не приведуть до пластичної деформації та інтенсивного зношування деталі.

Найбільше впливають на розвиток втомного зношування умови тертя (навантаження і температура), властивості матеріалів (твердість і шорсткість поверхні) і мастильні матеріали.

Для забезпечення достатньої товщини масляної плівки, щоб запобігти пошкодженням деталей трансмісії, зазвичай вибирається високов'язкісне трансмісійне мастило. Однак, для підвищення ефективності за рахунок зниження опору перемішуванню потрібне малов'язкісне трансмісійне мастило, яке затримувало б

розвиток різних видів пошкоджень впродовж тривалого часу при роботі за умови, що шорсткість між двома контактуючими поверхнями перевищує товщину масляної плівки. У таких умовах мащення виникає проблема мікропітингу. Він є однією з форм втомного руйнування, і якщо прогресує, то може привести до серйозних поломок. На разі приділено багато уваги механізму мікропітингу, а також висловлене припущення, що шорсткість і твердість поверхні впливають на його розвиток [8, 7]. Більшість дослідників використовували один тип мастила та брали до уваги один параметр при розрахунках. Однак необхідно враховувати вплив виду мащення на мікропітинг, ступінь втоми зносу, коефіцієнт тертя в різних умовах, а також ефективність присадок, яка залежить від зміни контактної поверхні.

Експериментальна частина. Мікропітинг має тенденцію виникати на стороні кореня зуба ведучої шестерні. У результаті розрахунку параметрів у найнижчій точці контакту окремих зубів ведучої шестерні, яка піддається максимальному навантаженню у даному методі випробування, найбільший контактний тиск становитиме 1,6 ГПа, а коефіцієнт ковзання – 60%. Умови випробування були близькі до умов відтворення мікропітингу. Середня глибина зносу і максимальна глибина були виміряні за допомогою приладу для вимірювання шорсткості.

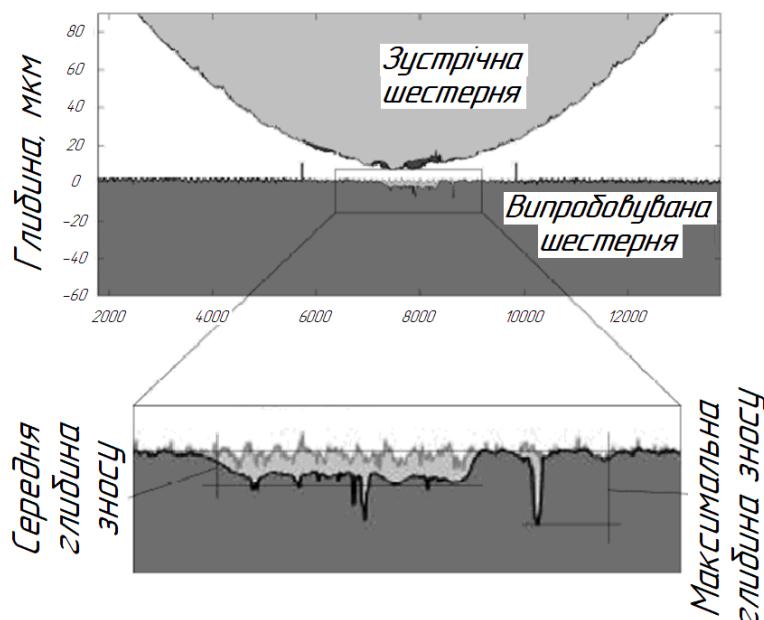


Рис. 1.

На рисунку 1 показаний метод вимірювання середньої глибини зносу і максимальної глибини. В якості середньої глибини зносу було взято середнє значення вимірюваної шорсткості через кожні 20 мкм, щоб уникнути впливу піків, і максимальне значення різниці між, до і після випробування. Що стосується максимальної глибини, то за неї приймали мінімальне значення діаграми шорсткості в області контакту. Виміри проводилися у трьох точках на кожному зразку для випробувань, потім обчислювалося середнє значення. Результати, які показали істотну різницю пошкодження у порівнянні з іншими, наприклад, у разі значного зносу через помилки гарту, були виключені.

Коефіцієнти тертя розраховували зі співвідношення між силою тертя і вертикальним навантаженням. Як і у разі випробування на витривалість, як еталон, використовувалася найнижча точка контакту одного зуба на ведучій шестерні при випробуванні на мікропітинг. Для того щоб кількість тепла, що виділяється у зоні контакту, було близьким до випробування на витривалість, тиск було встановлено на 1,9 ГПа, що вище, ніж при випробуванні на довговічність.

У всіх мастильних матеріалах в якості базового мастила використовується мінеральне мастило. Кожне мастило містить кислий фосфат або сульфатне мастило. Обидва мастильні матеріали містять антиоксидантні присадки для запобігання руйнуванню під час випробування.

Результати і обговорення. Випробування відбувались на модернізованому стенді СМЦ – 2. Пара тертя – шестерenna передача. Шестерні виготовлені із якісної конструкційної вуглецевої сталі 20Х (5120 AISI).

У вихідних умовах $R_a = 0,5$ мкм і 750 Hv середня глибина зносу, максимальна глибина і R_a після випробувань були більші, ніж в інших умовах. Відмінності із-за мастила виявлялися у максимальній глибині та R_a у зазначених умовах, а максимальна глибина була особливо близька до подвоєної через вибір мастила. Під час обговорення цих характеристик враховувався вплив шорсткості, твердості та мастильних матеріалів на умови мікропітингу. У порівнянні з попередніми випробуваннями, дрібні сліди обробки металу зникли, а

загальна поверхня стала гладкою. Крім того, поблизу вершини гребеня шорсткості було кілька лунок шириною приблизно від 10 до 60 мкм. Кількість лунок була більшою у початкових умовах $R_a = 0,5$ мкм, ніж в $R_a = 0,3$ мкм. Крім того, в умовах 750 Hv сліди обробки металу майже зникли, і всюди було видно безліч лунок. Підраховано, що згладжування за рахунок видалення дрібних виступів і утворення шорсткості за рахунок мікропітингу відбувалися одночасно.

Вимірювання проводились після 1, 3, 6, 9, 12, 15 і 25 мільйонів циклів. У всіх випадках відбулося значне зменшення R_a за перший мільйон циклів, в подальшому у більшості випадків значної зміни шорсткості не спостерігалося. Тому передбачається, що згладжування майже завершено за 1 мільйон циклів. Беручи до уваги результат спостереження за допомогою лазерного мікроскопа, можна зробити висновок, що глибокі канавки, які утворилися при металообробці, залишилися після випробування. Глибина канавки була виміряна як максимальна. У вихідних умовах $R_a = 0,5$ мкм і 750 Hv максимальна глибина збільшувалася з часом, тому передбачається, що мікропітинг згодом збільшуватиметься. Відповідно до зміни R_a і максимальної глибини з плинном часу було висловлено припущення, що початкова сумісність з основою досягається за 1 мільйон циклів, а потім мікропітинг розширяється в деяких умовах. Отже, було підтверджено, співвідношення шорсткості, яка виникла, з кінцевою максимальною глибиною у цьому випробуванні. Чим більше R_a після початкової сумісності, тим більше кінцева максимальна глибина. Підтверджено, що на мікропітингове пошкодження дуже впливає лямбда-кофіцієнт – відношення товщини масляної плівки до середньоквадратичної шорсткості [6].

Лямбда-кофіцієнт спочатку було розроблено для кількісної оцінки якості режимів роботи мастильного матеріалу стосовно характеристик підшипників [2]. Приблизно з 1990-х років лямбда-співвідношення тестиувалося і використовувалося для визначення оптимальних режимів мастил для зубчастих коліс. В обох випадках було виявлено, що лямбда-співвідношення досить добре корелює з поверхневою контактною втомою [3, 5].

Трибологічна концепція лямбда-кофіцієнта (λ) – відношення товщини мастильної плівки (h) до шорсткості поверхні (σ) – існує вже понад 50 років. Перше запропоноване рішення по товщині мастильної плівки стосовно лінійно-контактному ЕГД (еластогідродинамічного мастила) приписується Грубіну та Ертелю [1]. Їх метод спрямований на визначення центральної товщини плівки, роблячи при цьому припущення, що контакт з лінією нескінчений, мастильні матеріали мають ньютонівську поведінку, а рідини нестискувані. Метод Ертеля-Грубіна використовувався у численних технічних дослідженнях з моменту його створення, і його цінність досі обговорюється. Однак, також широко визнано, що рішення Ертеля та Грубіна не враховує багато потенційних факторів при розрахунку товщини плівки. Додаткові одновимірні рівняння були розроблені, щоб врахувати більше цих змінних, включаючи рівняння Доусона і Хіггінсона, та оцінки мінімальної товщини плівки на вихідній стороні контакту [2].

Окрім шорсткості передбачається, що залишкова напруга також впливає на розвиток мікропітингу [4], тому необхідно враховувати не тільки стан поверхні, але і її внутрішнє напруження та хімічний склад із-за легуючих елементів.

Висновки. Більш тверді зразки, як правило, мають велику глибину зносу, однак відмінності незначні, у разі коли шорсткість гладка.

Мастильні матеріали, що містять фосфорну присадку, показують меншу зміну максимальної глибини через зміни твердості і шорсткості, ніж сірка.

Кофіцієнт тертя не обов'язково низький при невеликому зносі.

На поверхні з високою твердістю і високою шорсткістю лунки зазвичай розвиваються легше. Однак з'ясувалося, що зростання лунок можна призупиняти відповідними мастильними матеріалами і присадками.

1. “Fundamental Principles of Contact and Lubrication.” Automotive Lubricants and Testing. Ed. Simon C. Tung and George E. Totten. West Conshohocken, PA: ASTM International, 2012. 14-15. Print.
2. C.A. Moyer and L.L. Bahney (1990), “Modifying the Lambda Ratio to Functional Line Contacts,” Tribology Transactions, 33:4, 535-542, DOI: 10.1080/10402009008981986.
3. Dwyer-Joyce, R S, University of Sheffield on behalf of The Tribology Group. “The Stribeck Curve & Lambda Ratio.” Tribological Design Data. Sheffield: Institution of Mechanical Engineers, 1995. 11. Print.
4. Hasegawa, N., Fujita, T., Uchidate, M., Abo, M. and Kinoshita, H., “Estimation Method of Micropitting Life from S-N Curve Established by Residual Stress Measurements and Numerical Contact Analysis,” Tribology Online, 14, 3, 2019, 131-142.
5. Krantz, Tim. “Correlation of Gear Surface Fatigue Lives to Lambda Ratio (Specific Film Thickness).” 2013 STLE Annual Meeting, STLE. Detroit, Michigan, May 5-9, 2013. Conference Presentation.
6. Morales-Espejel, G. E., Rycerz, P. and Kadiric, A., “Prediction of Micropitting Damage in Gear Teeth Contacts Considering the Concurrent Effects of Surface Fatigue and Mild Wear”, Wear, 398-399, 2018, 99-115.
7. Oila, A. and Bull, S. J., “Assessment of the Factors Influencing Micropitting in Rolling/Sliding Contacts,” Wear, 258, 10, 2005, 1510-1524.
8. Yoshida, N. and Taki, T., “A Study of Micropitting Generation Mechanism,” Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C, 74, 739, 2008, 210-217 (in Japanese).

В.П. Голуб, А.В. Плащинська, О.В. Романов

ЩОДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧ РОЗРАХУНКУ ЦИКЛІЧНОЇ ДОВГОВІЧНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ МЕТОДОМ ЕКВІВАЛЕНТНИХ НАПРУЖЕНЬ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: creep@inmech.kiev.ua*

Розв'язуються задачі розрахунку довговічності елементів конструкцій внаслідок класичної (багатоциклової) втоми за умов одновісного асиметричного та двовісного комбінованого навантаження. Розв'язки базуються на основі концепції еквівалентних напружень, що дозволяють складні режими циклічного навантаження звести до одновісного симетричного циклу.

Розглядається руйнування внаслідок втоми призматичних стержнів, тонкостінних трубчастих елементів та тонкостінних циліндричних оболонок. Умови циклічного навантаження задаються співвідношеннями

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a \sin 2\pi n; \quad (a)$$

$$\tilde{\tau} = \tau_m + \tau_a \sin 2\pi n; \quad (b)$$

$$\tilde{\sigma}_\Sigma = \sigma_a \sin 2\pi n + \tau_a \sin 2\pi n, \quad (v)$$

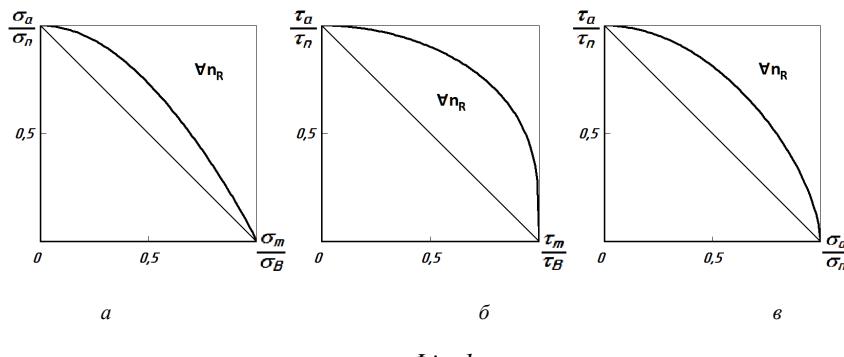
де $\tilde{\sigma}, \tilde{\tau}, \tilde{\sigma}_\Sigma$ – циклічні напруження; σ_m, τ_m – статичні компоненти циклічних напружень; σ_a, τ_a – амплітуди циклічних напружень; n – число циклів навантаження.

Циклічна довговічність n_R згідно із концепцією еквівалентних напружень задається співвідношенням [1]

$$n_R = \frac{1}{(1+q)D(\sigma_{eqv})^q}, \quad (2)$$

де σ_{eqv} – еквівалентне напруження; q, D – матеріальні константи, що визначаються за умов одновісного симетричного ($\sigma_m = \tau_m = 0$) циклу.

Структура еквівалентних напружень σ_{eqv} в (2) для умов навантаження (1) задається виходячи із гіпотези існування єдиних діаграм граничних напружень в нормованій системі координат (фіг.1), що інваріантні відносно числа циклів до руйнування n_R .



Фіг. 1

Єдині діаграми задаються степеневими трансцендентними функціями, так що для еквівалентних напружень σ_{eqv} отримуємо співвідношення

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_n} - \left[\cos\left(\frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_n}\right) \right]^\lambda = 0 \Rightarrow \sigma_{\text{eqv}} = \left[\cos\left(\frac{\pi \sigma_m}{2 \sigma_a}\right) \right]^{-\lambda} \sigma_a; \quad (\text{a})$$

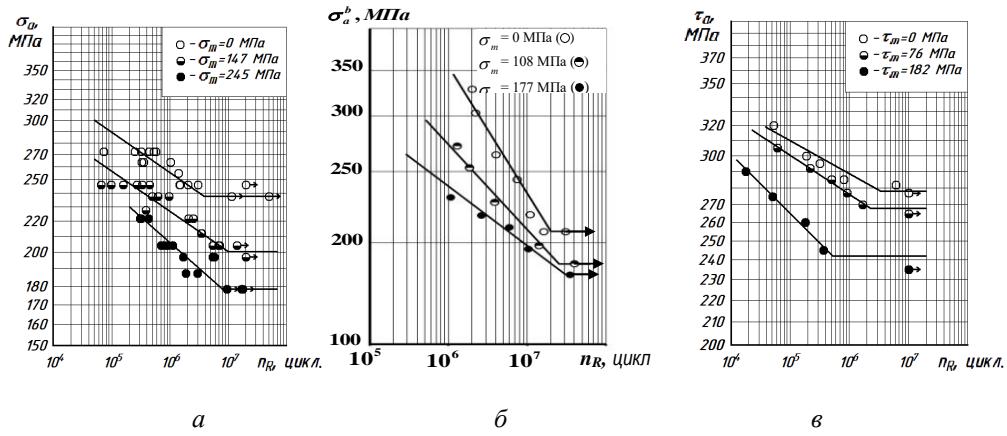
$$\frac{\tau_a}{\tau_n} - \left[\cos\left(\frac{\pi \tau_m}{2 \tau_n}\right) \right]^\lambda = 0 \Rightarrow \sigma_{\text{eqv}} = \left[\cos\left(\frac{\pi \tau_m}{2 \tau_a}\right) \right]^{-\lambda} \tau_a; \quad (\text{б}) \quad (3)$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_n} - \left[\cos\left(\frac{\pi \tau_a}{2 \tau_n}\right) \right]^\lambda = 0 \Rightarrow \sigma_{\text{eqv}} = \left[\cos\left(\frac{\pi \tau_a}{2 \tau_n}\right) \right]^{-\lambda} \sigma_a, \quad (\text{в})$$

де прийнято, що $\sigma_{\text{eqv}} = \sigma_n$ та $\sigma_{\text{eqv}} = \tau_n$; σ_B, τ_B – межі короткочасної міцності σ_n, τ_n – обмежені межі втоми за умов асиметричного циклу навантаження.

Для розрахунку циклічної довговічності n_R в (2) за умов одновісного асиметричного розтягом-стиском, або одновісного асиметричного згину підставляємо (3,а), а при одновісному асиметричному крученні застосуємо (3,б).

На фіг. 2 результати розрахунків (лінії) циклічної довговічності n_R

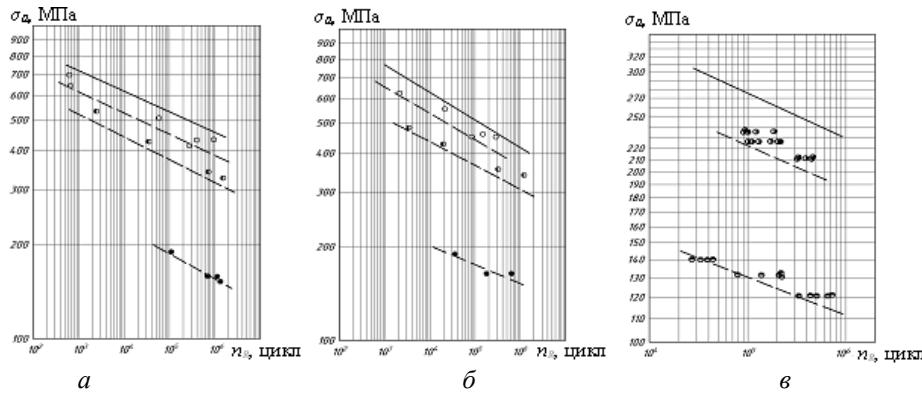


Фіг. 2

призматичних стержнів за умов одновісного асиметричного розтягу-стиску для хромистої сталі 1Х2М (а), одновісного асиметричного згину для вуглецевої сталі 2 (б) та одновісного асиметричного кручення для хромонікелевої сталі (в), порівняно із експериментальними даними (маркери) для декількох рівнів статичної компоненти σ_m та τ_m . Експериментальні дані запозичені із [2,3].

Для розрахунку циклічної довговічності n_R за умов двовісного комбінованого навантаження в (2) підставляємо (3,в).

На фіг.3 наведено результати розрахунків (лінії) та експериментальні (точки) [3, 4] залежності довговічності за умов двовісного комбінованого навантаження гладких циліндричних зразків сталі JIS SNCM8 (a) і тонкостінних трубчастих зразків сталі JIS



Фіг. 3

SNCM8 (b) при $V = 0,25 (\circ)$, $0,58 (\bullet)$, $1,73 (\bullet)$ та сталі 45 (c) при $V = 0,4 (\bullet)$, $1,23 (\bullet)$.

Підхід щодо розрахунку довговічності елементів конструкцій внаслідок класичної втоми за умов одновісного асиметричного та двовісного комбінованого циклічного навантаження на основі концепції еквівалентних напружень, як показала апробація експериментальними даними, є одним із найбільш ефективних підходів до розв'язку такого класу задач.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: втома, еквівалентні напруження, одновісне асиметричне циклічне навантаження, двовісне комбіноване циклічне навантаження

1. Golub V.P., Kryzhanovskii V.I., Pogrebniak A.D. A Method for Fatigue Analysis of Metallic and Composite Materials under Asymmetric High-Cycle Loading // Int. Appl. Mech., 2004. – Vol. 40, N11. – P.1281-1290.
2. Влияние частоты нагружения, температуры и асимметрии цикла на выносливость теплостойких сталей 1Х2М и Х18Н9. Сообщение 1 / Кузьменко В.А., Ищенко И.И., Троян И.А., Гришаков С.В. и др. // Пробл. прочности, 1981. – №2. – С. 30-36.
3. Панфилов Ю.А. Описание предельного состояния при переменной двухосной напряженности и его применение в расчетах. Сообщ. 1. Простое нагружение // Пробл. прочности, 1981. – № 1. – С. 49-53.
4. Tanaka K., Matsuoka S. The strength of JIS SNCM8 steel under combined alternating stresses // Advances in research on the strength and fracture of materials. – New York: Pergamon Press, 1978. – Vol. 28. – P. 1161-1168.

V.P.Golub, A.V. Plashchynska, O.V. Romanov

REGARDING THE SOLUTION OF PROBLEMS IN COMPUTING THE FATIGUE LIFE OF STRUCTURAL ELEMENTS USING EQUIVALENT STRESS METHOD

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;*
e-mail: creep@inmech.kyiv.ua

The problems in computing the fatigue life of structural elements due to classical (multicycle) fatigue under conditions of uniaxial asymmetric and biaxial combined loading are solved. Solutions are based on the concept of equivalent stresses, which allow complex modes of cyclic loading to be reduced to a uniaxially symmetric cycle.

V. O. Melnyk, A. V. Didukh

ANTIPLANE DEFORMATION OF AN ANISOTROPIC ELASTIC-PLASTIC BODY WITH A FILLED CRACK

Karpenko Physico-Mechanical Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine,
5 Naukova Street, Lviv, 79060, Ukraine; e-mail: melnyk.vitalii@ipm.lviv.ua

The propagation of cracks in composite materials has several distinct features. One of these features is the formation of sufficiently large pre-fracture zones near the crack tips. These zones are formed by unbroken fibers of the reinforcing material and a sufficiently plastic matrix. To determine the critical load of such materials, nonlinear fracture mechanics is applied, particularly the δ_c -criterion of critical opening or shear displacement of the crack edges.

In engineering practice, especially in the construction industry, injection technologies are used to restore the strength of structural elements damaged by cracks [1-3]. These technologies involve the injection of liquid polymers into defect zones, where, after solidification, the polymers counteract the displacement of the opposite surfaces of the cracks. As a result, the body is reinforced and can bear operational loads.

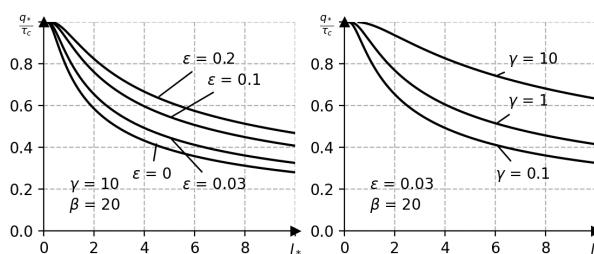


Fig. 2. Dependence of the critical load on the normalized length of defects ($l_* = 8a\tau_c/c_{44}\sigma_{IIIc}\pi$) at different values of stiffness coefficients ($\epsilon = \mu/c_{44}$) and anisotropy parameter ($\gamma = c_{55}/c_{44}$). Here, c_{44} and c_{55} are the elastic moduli, μ is the shear modulus of the interlayer material, $\beta = a/b$, where b is the semi-axis of the crack opening during the injection.

the elastic properties of the materials. We also establish the strength of the body with a crack through the application of injection reinforcement technology depends on the geometric parameters of the defect and the defect sizes for which linear fracture mechanics may be applied.

This work was carried out within the framework of project No. 2023.04/0132 of the National Research Foundation of Ukraine.

KEYWORDS: elastic-plastic body, crack healing, antiplane deformation, strength.

1. Маруха В. І., Панасюк В. В., Силованюк В. П. Ін'єкційні технології відновлення роботоздатності пошкоджених споруд тривалої експлуатації. // Львів: Спілом, 2009 – 298 р.
2. Czarnecki L., Emmons P. H. Naprawa i ochrona konstrukcji betonowych. // Krakow: Polski Cement, 2002 – 434 p.
3. Panasyuk V. V., Marukha V. I., Sylovanyuk V. P. Injection Technologies for the Repair of Damaged Concrete Structures. Springer Dordrecht Heidelberg New York London. // Springer, 2014 – 230 p.

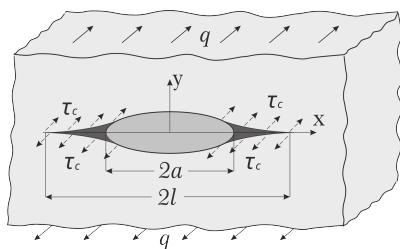


Fig. 1. Schematic representation of longitudinal shear of a body with a defect.

We consider the antiplane deformation of an elastic-plastic body containing a crack filled with injection material using nonlinear fracture mechanics (Fig. 1). By using the model of an elastic Winkler-type layer, we reduce the problem to solving an integro-differential equation. We obtain an analytical solution to the equation, assuming that the stress in the layer changes little with the formation of a plastic zone. Our results show (Fig. 2) that the effectiveness of restoring the strength of a body with a crack through the application of injection reinforcement technology depends on the geometric parameters of the defect and the defect sizes for which linear fracture mechanics may be applied.

В. В. Хворостяний

ВИЗНАЧЕННЯ РІВНЯ ПОШКОДЖУВАНОСТІ ОПТИЧНОГО СКЛА В УМОВАХ КРАЙОВОГО ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАНУ,
бул. Садово-Ботанічна, 2, 01014, Київ, Україна;
e-mail: plt2002@ukr.net

Вступ. Проблема достовірного визначення пошкоджуваності елементів конструкцій зі скла, матеріалу з крихким характером руйнування, що характеризується значним впливом стану поверхні, залишається вкрай важливою і актуальною в науковому та практичному вимірі, адже для багатьох технічних виробів вона обумовлює можливість, доцільність та ефективність їх використання в складних та екстремальних умовах експлуатації. Утворення при контактних навантаженнях крайових сколів та інших локальних пошкоджень на зразках чи деталях із силікатного скла призводить у підсумку до їх часткового або навіть повного руйнування. Таким чином працездатність та надійність конструкцій може різко знижуватися, що позначається на собівартості готової продукції, збільшенні матеріально-технічних витрат, пов'язаних в тому числі з виконанням науково-технічного супроводу «життєвого циклу» відповідальних виробів різноманітного призначення.

Інноваційний розвиток багатьох галузей промисловості відбувається за рахунок знаходження та реалізації нешаблонних шляхів вирішення поточних виробничих завдань в синергетичній взаємодії із застосуванням нових наукових підходів теоретичних та експериментальних досліджень механічних властивостей сучасних крихких матеріалів. Найбільш поширені методики з визначення механічної поведінки матеріалів доповнюються перспективними методами досліджень, серед яких слід виокремити метод локального навантаження краю зразка за допомогою інденторів та пуансонів [1]. Перевагами методу є відносна простота, доступність та зручність використання, точність емпіричних результатів, отримуваних в умовах, що моделюють реальні експлуатаційні навантаження крихких матеріалів. Опис запропонованого експрес-аналізу пошкоджуваності оптичного скла з порівнянням статистичних оцінок його крайового руйнування є метою наведеного дослідження.

Експрес-оцінка пошкоджуваності кромок скла. Більшість дослідників на першому етапі аналізу результатів будують залежності «прикладене навантаження P_f (Н) – відстань руйнування L (мм)» (рис. 1, а). Емпіричні дані можна продемонструвати не лише таким «klassичним» способом, але й у вигляді діаграм пошкоджуваності, для яких величину L відкладають по осі ординат, а P_f – по осі абсцис з нанесенням мінімальних, середніх та максимальних значень відстані руйнування для кожного рівня навантаження (рис. 1, б). Для скла кварцового оптичного КВ, випробуваного S+EF методом, на цих діаграмах (рис. 1) були застосовані відповідно лінійна та поліноміальні апроксимуючі залежності. А це дозволяє прогнозувати рівень пошкоджуваності кромок скла при певному навантаженні на індентор, оперуючи отриманими коефіцієнтами апроксимації. Побудова діаграм пошкоджуваності виявляє область можливих значень локальних руйнувань кромок крихких матеріалів, а наведений підхід можна розглядати як експрес-аналіз їх пошкоджуваності, важливий передусім з практичної точки зору.

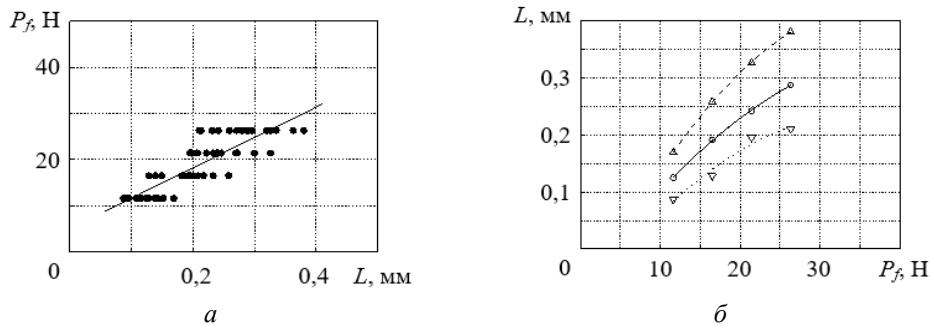


Рис. 1.

Статистична оцінка крайової пошкоджуваності скла. Обґрунтоване визначення гарантованого рівня пошкоджуваності кромок скла проведено з використанням статистичного аналізу експериментальних даних на основі розподілу Вейбула. Для оптичного скла наведеного дослідження було обчислено характеристику пошкоджуваності $L^{0,01}$, що відповідає низькій ймовірності руйнування кромки $F=1\%$. Порівняння емпіричних середніх та максимальних значень пошкоджуваності скла зі статистичними результатами виконували за даними, одержаними при навантаженні на індентор $P_f=20$ Н (табл. 1). Показано, що прогнозні оцінки руйнування кромок скла перевищують експериментальні в 1,2...1,9 разів.

Таблиця 1.

Найменування скла	Пошкоджуваність кромки L , мм		
	емпіричні дані		статистичні дані
	$L_{середнє}$	L^{max}	$L^{0,01}$
кварцове оптичне КІ	0,201	0,240	0,371
кварцове оптичне КВ	0,242	0,326	0,432
тяжкий флінт ТФ-2	0,163	0,235	0,312

Висновки. Наведено результати експериментально-розрахункового вивчення пошкоджуваності оптичного скла в умовах крайового локального навантаження. Запропоновано експрес-аналіз рівня пошкоджуваності скла, що може застосовуватися при якісних оцінках матеріалів. Виконане порівняння емпіричних та статистичних параметрів пошкоджуваності скла, комплексне використання яких підвищує точність визначення критичних розмірів крайових сколів.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: оптичне скло; крайове локальне навантаження; діаграми пошкоджуваності кромки; розподіл Вейбула, статистична оцінка пошкоджуваності.

V. V. Khvorostianyi

DETERMINATION OF THE LEVEL DAMAGEABILITY OF OPTICAL GLASS IN CONDITIONS OF THE EDGE LOCAL LOADING

G.S. Pisarenko Institute for Problem of Strength of the National Academy of Sciences
Sadovo-botanichna Str., 2, 01014, Kyiv, Ukraine;
e-mail: plt2002@ukr.net

Abstract. The results of an experimental and computational study of the damageability of optical glass in conditions of the edge local loading are given. An express analysis of the level damageability of glass is proposed, which can be used in the qualitative assessment of materials. A comparison of empirical and statistical parameters of glass damageability was made, the complex use of which increases the accuracy of determining the critical dimensions of edge chips.

1. Хворостяній В. В., Родичев Ю. М., Сорока Е. Б. Оценка твердости и локальной повреждаемости керамики и стекла методом царапания до скальвания кромки // Техн. диагностика и неразруш. контроль. – 2019. – №3. – С. 55 – 60.

Б.П. Маслов

ДОВГОТРИВАЛА МІЦНІСТЬ КОМПОЗИТНИХ ЕЛАСТОМЕРІВ ПЕРІОДИЧНОЇ СТРУКТУРИ

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ, вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: maslov@inmech.kyiv.ua

Композитні еластомери періодичної структури в сучасній класифікації механічних метаматеріалів відносяться до групи із певними механічними властивостями [6], що виникають із геометрії їхніх субодиниць, а не тільки зі складу матеріалу [7]. Поняття метаматеріалу було запроваджено від електромагнетики та акустики до механіки. Композитні структури є об'єктом досліджень механіки довготривалого деформування і руйнування [1, 2, 4], але методи тривимірного аналізу та проектування цих інженерних мікроструктур лише з'являються. Як правило, метаматеріали мають різноманітні, значно покрашенні механічні властивості зокрема такі, як нульовий або від'ємний коефіцієнт Пуассона, модуль зсуву, що зникає, суттєво не лінійну залежність у часі поведінку та інші особливості, що відрізняють їх від звичайних природних та композитних структур.

На відміну від чисто пружніх або в'язких гетерогенних середовищ, у спадкових композитних матеріалах зв'язок між консервативним і дисипативним механізмами деформації може призводити до появи нових ефективних властивостей, які є відсутніми у масштабі окремих компонентів. Це можна підтвердити використанням принципу відповідності [3], який дозволяє перетворити в'язкопружну задачу на символічно пружну в області змінних перетворення Лапласа–Карсона. Має практичний інтерес використання комплексних наведених властивостей, що характеризують реакцію композитного середовища на гармонічні навантаження [5]. На рис.1 наведено принципову діаграму варіантів покращення ефективності регулярних метаструктур [6].

З принципу суперпозиції Больцмана реакцію на напруження лінійного спадкового в'язкопружного матеріалу при заданій історії деформації $\mathbf{e}(u)$, $u \in [0; t]$ з початковою умовою $\boldsymbol{\sigma}(t = 0) = 0$, можна записати [7]

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \mathbf{R}(t-u) \mathbf{e}(u) du \right]$$

з $\mathbf{R}(t)$ тензором в'язкопружної жорсткості (функцією релаксації) або, в короткій формі запису

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{R} * d\mathbf{e})(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Тут $*$ позначає добуток інтегральної згортки. По всьому тексту тензори виділено жирним шрифтом.

Подібним чином, реакція деформації $\mathbf{e}(t)$ на історію напружень $\boldsymbol{\sigma}(u)$, $u \in [0; t]$, і початковою умовою $\mathbf{e}(t = 0) = 0$, записується

$$\mathbf{e}(t) = (\mathbf{J} * d\boldsymbol{\sigma})(t) \quad (2)$$

$\mathbf{J}(t)$ - тензор в'язкопружної податливості (функція повзучості), загальний вигляд якої

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{S} + \frac{1}{\eta_r} t + \int_0^\infty \mathbf{H}(\tau) (1 - e^{-t/\tau}) d\tau \quad (3)$$

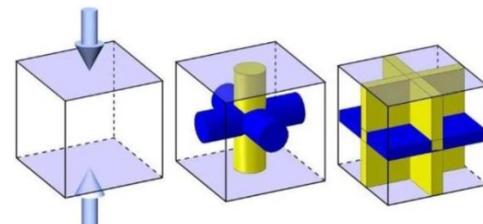


Рис. 1

з \mathbf{S} пружна податливість, $\frac{1}{\eta_r}$ ретардова в'язка податливість та \mathbf{H} спектр ретардації. Спектри релаксації та ретардації характеризують в'язкопружний переходний процес довготривалої реакції матеріалу.

Надалі застосовуємо постановку задачі в термінах квазилінійної спадкової повзучості з дробовими визначальними рівняннями [4]. Визначальне рівняння має форму (2) з дробовою функцією релаксації $\mathbf{R}_\mu(t)$

$$\mathbf{R}_\mu(t) = \mathbf{C}_r + \int_0^{+\infty} \mathbf{G}(\tau) E_\mu[-(t/\tau)^\mu] d\tau \quad (4)$$

де $E_\mu(t)$ - функція Мітtag-Леффлера. Очевидно, що при $\mu = 1$ функція релаксації $\mathbf{R}_\mu(t)$ відповідає класичній функції релаксації $\mathbf{R}(t)$.

Локальна задача для гармонічних навантажень розв'язується за принципом відповідності перетворенням задачі дробової в'язкопружності в задачу символічної пружності. Задача від часу передноситься на LC-область і дозволяє визначити модулі, що характеризують в'язкопружну реакцію матеріалу. Розглядаємо неоднорідне середовище, що займає об'єм Ω , і складається з N однорідних фаз із характеристичною функцією $\chi^{(s)}(\mathbf{x})$ та об'ємом $\Omega^{(s)}$, ($s \in [0; N]$). Крім того, передбачається, що $\Omega^{(s)} \ll \Omega$ і що фази ідеально з'єднані. Дробову спадкову релаксаційну функцію фази (s) позначимо $\mathbf{R}_\mu^{(s)}(t)$. Звідси випливає, що локальний тензор релаксації $\mathbf{R}_\mu(\mathbf{x}, t)$ має вигляд

$$\mathbf{R}_\mu(\mathbf{x}, t) = \sum_{s=1}^N \mathbf{R}^{(s)}(t) \chi^{(s)}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

з $\chi^{(s)}(\mathbf{x}) = 1$, якщо $\mathbf{x} \in \Omega^{(s)}$ і 0 інакше. Середні значення обсягу за Ω і $(\Omega^{(s)})$ позначаються відповідно $\langle \cdot \rangle$ і $\langle \cdot \rangle^{(s)}$. За визначенням характеристична функція, об'ємна частка фази (s) становить $c_s = \langle \chi^{(s)} \rangle$. Об'ємні середні значення функції f по композиту Ω і по фазі Ω^r позначені відповідно.

Реакцію в'язкопружного неоднорідного середовища на синусоїdalne навантаження трансформуємо в спектральну область шляхом розгляду перетворення Лапласа-Карсона основного рівняння для чисто уявної змінної перетворення $z = i\omega$, ($i^2 = -1$).

Припускаючи загальне деформаційне навантаження $\bar{e}(t) = LC(\bar{e}^A) * e^{i\omega t}$, локальна проблема, що відповідає стаціонарному режиму на кутовій частоті ω записується як

$$\boldsymbol{\sigma}^*(\mathbf{x}, i\omega) = \mathbf{R}^*(\mathbf{x}, i\omega) \mathbf{e}^*(\mathbf{x}, i\omega), \quad \forall (\mathbf{x}, \omega) \in \Omega \times [0; +\infty] \quad (6)$$

$$div \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{0}, \quad curl(curl \mathbf{e}^*) = \mathbf{0}, \quad \forall (\mathbf{x}, \omega) \in \Omega \times [0; +\infty] \quad (7)$$

$$\langle \mathbf{e}^* \rangle = \bar{\mathbf{e}}^* \quad (8)$$

із заданими граничними умовами. Визначальне рівняння в комплексній області записуємо

$$\langle \boldsymbol{\sigma}^* \rangle(i\omega) = \tilde{\mathbf{R}}_\mu^*(i\omega) \langle \mathbf{e}^* \rangle(i\omega), \quad \forall \omega \in [0; +\infty[, \quad (9)$$

тоді тензор релаксації представимо як суму

$$\tilde{\mathbf{R}}_\mu^*(i\omega) = \tilde{\mathbf{R}}'_\mu(\omega^\mu) + i\tilde{\mathbf{R}}''_\mu(\omega^\mu). \quad (10)$$

Тут $\tilde{\mathbf{R}}'_\mu(\omega^\mu)$, $\tilde{\mathbf{R}}''_\mu(\omega^\mu)$ наведені модулі накопичення і розсіюння, пропорційні накопиченні та розсіянні енергії. Оскільки $i^\mu = e^{i\pi\mu/2}$, то

$$\tilde{\mathbf{R}}'_\mu(\omega^\mu) = \tilde{\mathbf{C}}_r + \int_0^{+\infty} \frac{1}{q} [\theta \cos(\frac{\pi\mu}{2}) + \theta^2] \tilde{\mathbf{G}}(\tau) d\tau \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}''_\mu(\omega^\mu) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{q} [\theta \sin(\frac{\pi\mu}{2})] \tilde{\mathbf{G}}(\tau) d\tau. \quad (12)$$

При цьому

$$\theta = (\omega\tau)^\mu, \quad q = 1 + 2\theta\cos(\frac{\pi\mu}{2}) + \theta^2. \quad (13)$$

Ефективний тензор розсіювання $\tilde{\eta}(\omega^\mu)$, який характеризує затухання, визначається

$$\tilde{\eta}(\omega^\mu) = \tilde{\mathbf{R}}''(\omega^\mu)[\tilde{\mathbf{R}}'(\omega^\mu)]^{-1}. \quad (14)$$

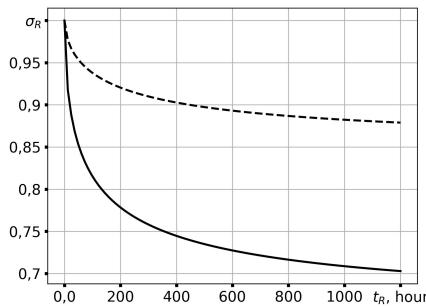


Рис. 2

ди.

Для прикладу розглянемо композит, утворений з твердого ракетного палива [5], армованого регулярно вкрашеними високомодульними доданками. На рис. 2 зображені порівняльні графіки залежності критичної напруження σ_R від часу t для чистої матриці (штрихова лінія) та для армованого композиту (суцільна). Програмний комплекс Wolfram Mathematica 14.1 [8] (ліцензія 8801-3966) використано для чисельного аналізу та підготовки ілюстративного матеріалу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: довготривала міцність, спадкова повзучість, руйнування, критерій, регулярний композит, нестисливість, циклічне навантаження, чисельні методи.

1. Маслов Б.П. Побудова критерію довготривалого руйнування внаслідок повзучості тонкостінних шаруватих структур // Прикл. механіка.- 2024. - 60, N 6. – С. 32 – 44.
2. Маслов Б.П. Побудова критерію довготривалого руйнування втоми для тонкостінних шаруватих оболонок // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка, випуск №2, 2023, Серія фізико-математичні науки, сс. 136-139. DOI: 10.17721/1812-5409.2023/2.22
3. Maslov, B.P. Nonlinear Hereditary Creep of Isotropic Composites of Random Structure // Int. Appl. Mech. - 2022. - 58, N1. - P. 75-90.
4. Maslov, B. Nonlinear Hereditary Creep of Transversely Isotropic Composites of Random Structure In: Advanced Structured Materials, 2023, 191, pp. 367-390
5. Fang C, Shen X, He K, Yin C, Li S, Chen X, Sun H. 2020 Application of fractional calculus methods to viscoelastic behaviours of solid propellants. // Phil. Trans. R. Soc. A 378: 20190291. <http://dx.doi.org/10.1098/rsta>.
6. Torrent D, Parnell WJ, Norris AN. Loss compensation in time-dependent elastic metamaterials. // Phys. Rev. - 2018. - B 97, 014105.
7. Wineman A. Nonlinear viscoelastic solids - a review. // Math. Mech. Solids. - 2009. - 14, 300–366. (doi:10.1177/1081286509103660)
8. Wolfram Mathematica 14.1, <https://www.wolframcloud.com>

B.P. Maslov

LONG-TERM STRENGTH OF COMPOSITE ELASTOMERS OF PERIODIC STRUCTURE

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences, P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine; e-mail: maslov@inmech.kyiv.ua

A model and criterion of long-term strength for composite elastomers of periodic structure is constructed. The parameters of the stress concentration at the boundary of the components are determined. The possibility of predicting the long-term strength of the hereditary material is shown. The computer software Wolfram Mathematica 14.1 (license 8801-3966) is used for numerical analysis and illustrations preparing.

А.О.Камінський¹, Є.Є.Курчаков¹, Ю.О.Чорноіван¹

**ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ЕФЕКТІВ В НЕЛІНІЙНОМУ
ОРТОТРОПНОМУ ТІЛІ З ТРИЩИНОЮ**

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
бул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: fract@inmech.kiev.ua

Предметом дослідження є крайові ефекти в нелінійному ортотропному тілі зі центральною тріщиною нормального відриву. Беремо до уваги, що біля кожного кінця тріщини утворюється зона передруйнування – вузька область, у якій спостерігаються ознаки руйнування. Цю область оточуватиме зона нелінійності [5]. Згаданим вище ефектам була присвячена робота [2]. В цій роботі для випадку плоского напруженого стану виявлено, як поздовжній розмір тіла і довжина зони передруйнування впливають на поля деформацій та напружень, а також на конфігурацію зони нелінійності. Однак, в цілому питання залишилось відкритим [3, 4].

В даній роботі теж зосередимось на випадку плоского напруженого стану.

Крайову задачу про рівновагу нелінійного ортотропного тіла зі центральною тріщиною нормального відриву поставлено в компонентах вектора переміщення [5]. Для цього притягнуто тензорно-лінійні визначальні рівняння, які зв'язують компоненти тензора напружень з компонентами тензора деформацій, та співвідношення між компонентами тензора деформацій і компонентами вектора переміщення.

Зону передруйнування замінено розкритим розрізом. До поверхонь розрізу прикладено деякі вектори напружень. В рівняннях, що описувати стан зони передруйнування, зв'язано компоненти указаних векторів у споріднених точках на поверхнях розрізу з компонентами відповідного вектора зміщення [5].

Крайову задачу розв'язано узагальненим методом додаткових напружень [5]. Змінюватимемо поперечний розмір тіла, довжину тріщини і довжину зони передруйнування. В результаті встановлено, як при цьому будуть змінюватись питома енергія з утворення зони передруйнування, нормальні компоненти тензора деформацій та нормальні компоненти тензора напружень у особливих точках, а також конфігурація зони нелінійності. Припущене, що початковий стан тіла збігається із його натуральним станом.

Вважалось також, що анізотропія первісна (виявляється за нескінченно малої деформації тіла з початкового стану) [1]. Тіло віднесено до системи координат x^1, x^2, x^3 , визначені фундаментальним метричним тензором g .

Анізотропію охарактеризовано двома взаємно оберненими тензорами четвертого рангу, F і G .

Компоненти тензора анізотропії F визначені за відомими для околу початкового стану залежностями кожної компоненти тензора деформацій D від кожної компоненти тензора напружень S :

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial}{\partial S^{\gamma\delta}} D_{\alpha\beta} \Big|_{S^{\gamma\delta}=0}.$$

Тензорно-лінійні визначальні рівняння, які зв'язують компоненти тензора напружень S з компонентами тензора деформацій D , мають вигляд

$$S^{\alpha\beta} = \frac{H}{Z} g^{\alpha\beta} + \frac{\Phi}{\Omega} \left(G^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} - \frac{E}{Z} g^{\alpha\beta} \right). \quad (1)$$

$$Z = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}; H = F_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\beta} S^{\gamma\delta}; E = g^{\alpha\beta} D_{\alpha\beta}.$$

А величини Φ та Ω з рівнянь (1) є такими:

$$\Phi = \sqrt{K - \frac{H^2}{Z}}; \quad \Omega = \sqrt{\Xi - \frac{E^2}{Z}}.$$

Критерій нелінійності

$$\Omega = \nu.$$

Критерій міцності

$$\Omega = \psi.$$

Зону передруйнування у процесі розв'язування замінено розкритим розрізом. До поверхонь розрізу приєднані прямолінійні елементи з нескінченно малою площею поперечного перетину.

Видалено прямолінійний елемент, приєднаний до поверхонь розрізу у споріднених точках. До цього елемента прикладено вектори напруження \mathbf{P}_+ і \mathbf{P}_- (рис. 1, a), а до поверхонь розрізу – вектори напруження $-\mathbf{P}_+$ і $-\mathbf{P}_-$ (рис. 1, б).

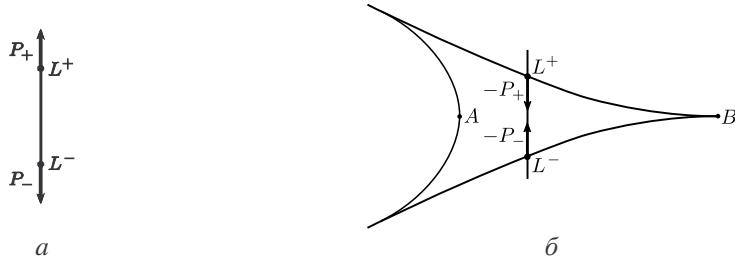


Рис. 1

Для обчислень використано дані, які наведено у роботі [6].

Головні компоненти тензора анізотропії \mathbf{F} такі:

$$F_{1111} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}, -F_{1122} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}, -F_{1133} = 0,049 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1},$$

$$F_{1212} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}, F_{1313} = 0,121 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}, F_{2222} = 0,142 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1},$$

$$-F_{2233} = 0,045 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}, F_{2323} = 0,107 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}, F_{3333} = 0,193 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}.$$

За формулами (1.1) обчислено, головні компоненти тензора анізотропії \mathbf{G} :

$$G^{1111} = 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, G^{1122} = 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, G^{1133} = 2,263 \cdot 10^{10} \text{ Pa},$$

$$G^{1212} = 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, G^{1313} = 2,066 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, G^{2222} = 8,781 \cdot 10^{10} \text{ Pa},$$

$$G^{2233} = 2,744 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, G^{2323} = 2,336 \cdot 10^{10} \text{ Pa}, G^{3333} = 6,395 \cdot 10^{10} \text{ Pa}.$$

Усього розв'язано чотири варіанти краєвої задачі. В кожному із них розмір $s_{(1)}$ тіла становив $6,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. В перших трьох варіантах краєвої задачі розмір $s_{(2)}$ тіла був таким: 1 – $3,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; 2 – $2,8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; 3 – $2,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Довжина l_R тріщини становила $1,50 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Довжина l_S розрізу була такою: 1 – $0,08 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; 2 – $0,10 \cdot 10^{-2} \text{ m}$; 3 – $0,12 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

На рис. 2 зображене межу зони нелінійності, побудовану для одного з варіантів краєвої задачі за умови, що довжина l_R тріщини становить $1,50 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

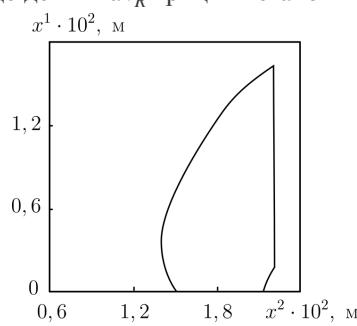


Рис. 2

Висновки.

Зі зменшенням поперечного розміру тіла і збільшенням довжини тріщини і довжини зони передруйнування стає більшою питома енергія, спрямована на утворення зони передруйнування.

Третя компонента тензора деформацій у кінці зони передруйнування, найбільша за абсолютноним значенням, майже не залежить від поперечного розміру тіла, довжини тріщини і довжини зони передруйнування.

Зі зменшенням поперечного розміру тіла і збільшенням довжини тріщини і довжини зони передруйнування стають меншими компоненти тензора напружень у кінці тріщини.

Внаслідок зменшення поперечного розміру тіла та збільшення довжини тріщини скорочується зона нелінійності, що оточує зону передруйнування. Внаслідок збільшення довжини зони передруйнування зазначена зона нелінійності розширюється.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійне ортотропне тіло, центральна тріщина нормального відриву, зона передруйнування, рівняння стану, зона нелінійності, крайові ефекти.

1. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
2. Каминский А.А., Курчаков Е.Е. О краевых эффектах в нелинейном упругом анизотропном теле с трещиной // Доп. НАН України. – 2019. – № 4. – С. 31 – 41.
3. Clayton J. D. Nonlinear fracture mechanics (in Encyclopedia of Continuum Mechanics. Eds. H. Altenbach, A. Öchsner, Berlin, Springer, 2020. – P. 1840 – 1846.
4. Gross D. Path Independent Integrals and Crack Growth Parameters in Nonlinear Fracture Mechanics // Nonlinear Fracture Mechanics. – 1990. – P. 123 – 141.
5. Kaminsky A.O., Kurchakov E.E., Chornoivan Y.O. Boundary-Value Problems of Fracture Mechanics for a Nonlinear Anisotropic Body // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 3. – P. 243 – 279.
6. Kaminsky A.O., Kurchakov E.E., Chornoivan Y.O. Fracture Process Zone in Cracked Nonlinear Orthotropic Body // Int. Appl. Mech. – 2024. – **60**, N 1. – P. 34 – 58.

A.O. Kaminsky¹, E.E. Kurchakov¹, Y.O. Chornoivan¹

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE BOUNDARY EFFECTS IN NONLINEAR ORTHOTROPIC BODY WITH CRACK

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: fract@inmech.kyiv.ua

The boundary value problem of the equilibrium of a nonlinear orthotropic body with a central mode I crack, at both tips of which a process zone is formed, is numerically solved. As a result, it was found out how exactly the transverse size of the body, the length of the crack and the length of the process zone affect the fields of deformations and stresses, as well as the configuration of the nonlinearity zone that appears at both tips of the crack.

Key words: nonlinear orthotropic body, central mode I crack, process zone, governing equations, nonlinearity zone, edge effects.

М.Ф. Селіванов¹, П.В. Фернаті¹, Л.М. Терещенко¹

**ВИЗНАЧЕННЯ ТРАЄКТОРІЇ РОЗВИТКУ ТРИЩИНІ З ВИКОРИСТАННЯМ
АДАПТИВНОЇ РОЗБИВКИ ІЗ РЕГУЛЯРНОЮ ЧАСТИНОЮ**

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П. Несторова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: fract@inmech.kyiv.ua

Визначення шляху тріщини має вирішальне значення для розуміння структурної цілісності матеріалів, оскільки це допомагає ідентифікувати потенційні осередки руйнування. Аналізуючи шлях утворення тріщин, інженери можуть передбачити, як і де конструкція може вийти з ладу, дозволяючи їм впроваджувати превентивні заходи. Крім того, ці знання допомагають у проектуванні більш стійких конструкцій, зрештою підвищуючи безпеку та довговічність.

При чисельному моделюванні траекторії тріщини за допомогою методу скінченних елементів доводиться робити малі приrostи тріщини Δa , щоб отримати ламану траекторію з розривними змінами напрямку [2]. Зазвичай, застосовується явний алгоритм для симуляції траекторії тріщини. Напрямок поточної ділянки ламаної тріщини θ виводиться в рамках лінійно пружної механіки руйнування, використовуючи коефіцієнти інтенсивності напруження (КІН) K_I і K_{II} . На відміну від більш простої явної схеми, в неявній схемі кожне поточне положення вершини визначається з умови $K_{II}(a + \Delta a) = 0$. Ця умова за використання явної схеми виконується наближено; вважається, що вона буде скоригована наступним приростом.

Найчастіше КІН визначаються на основі J -інтегралів, які обчислюються інтегруванням характеристик поля вздовж контуру навколо вершини тріщини. Хоч для інтегрування можна використовувати і нерегулярні сітки [1] регулярність надає можливість контролювано покращувати точність обчислень. Це особливо важливо при використанні неявної схеми визначення траекторії тріщини.

В даній роботі для V-подібної тріщини в плоскому елементі конструкції проілюстровано результати визначення траекторії тріщини за використання неявної схеми дослідження. Для цього розроблено алгоритм побудови регулярної сітки для кругової області в околі вершини тріщини, яка моделюється кусково лінійним розрізом. Точність визначення КІН за допомогою цього алгоритму проілюстровано для тріщини нормального відриву, розв'язок для якої взято з літератури в якості еталонного. Для обраних параметрів регулярності проілюстровано зміни J -інтегралів в залежності від кута повороту другої ділянки білінійної (без врахування симетрії) тріщини. І, нарешті, наведено результати визначення траекторії тріщини для перших чотирьох ділянок приросту.

Розглянемо наскрізну тріщину в ізотропній пластині (Рис. 1a). Довжини і кути нахилу θ кожної ділянки задають тріщину у вигляді ламаної. За наявності лише однієї ділянки за $\theta_1 = 0$ матиме тріщину нормального відриву. В [2] для такої тріщини визначено $K_I = 568.3416 \text{ МПа}/\text{м}^{1/2}$, який отримано за $a = 10 \text{ мм}$, $d = 100 \text{ мм}$, $\sigma = 100 \text{ МПа}$, $E = 210 \text{ ГПа}$ і $\nu = 0.3$ (a – напівдовжина тріщини).

Будемо визначати КІН тріщини у вигляді ламаної на основі J -інтегралів. Для цього побудуємо алгоритм адаптивної побудови регулярної сітки в круговій області заданого радіуса в околі вершини. Регулярність визначатиме трьома параметрами: кількість допоміжних кіл n_{rings} , кількість секторів n_{sectors} і коефіцієнт k , який вказує у скільки разів кожне наступне кільце ширше за попереднє. Збільшення параметра k робить щільність сітки більшою біля вершини тріщини, що дозволяє точніше врахувати великий градієнт

поля для цієї області. На Рис. 1б представлена приклад регулярної сітки для $n_{\text{rings}} = 6$ і $n_{\text{sectors}} = 8$.

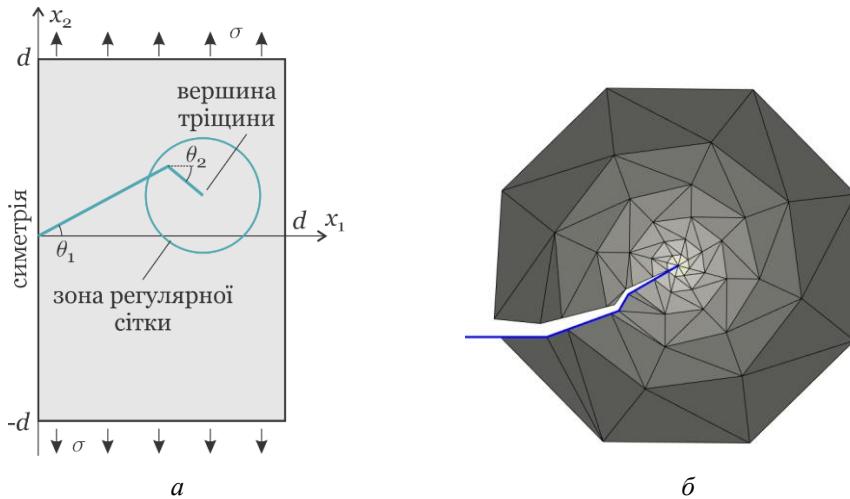


Рис. 1.

На Рис. 2 проведено порівняння точності обчислень КІН для трьох комбінацій параметрів регулярності. Спостерігається незначне покращення точності обчислень із зростанням параметра k на інтервалі (1.3, 1.5). Останню комбінацію і $k=1.42$ будемо використовувати для визначення траекторії тріщини. Ця комбінація забезпечує гладкість залежності J -інтегралів від кута нахилу ділянки, що розраховується.

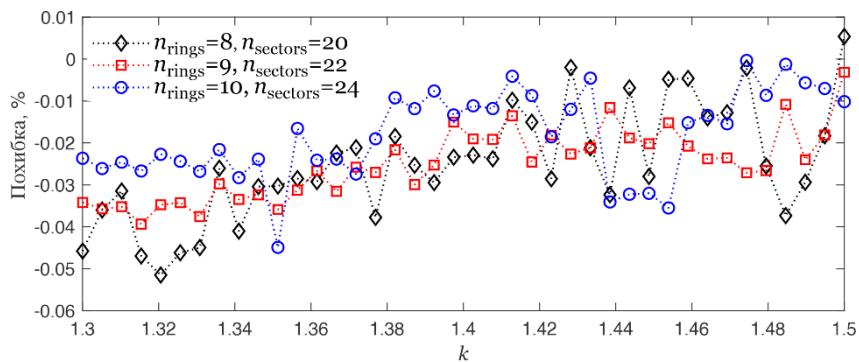


Рис. 2.

На Рис. 3 представлено такі залежності для ілюстрації першого кроку розрахунку відхилення тріщини від свого початкового напрямку.

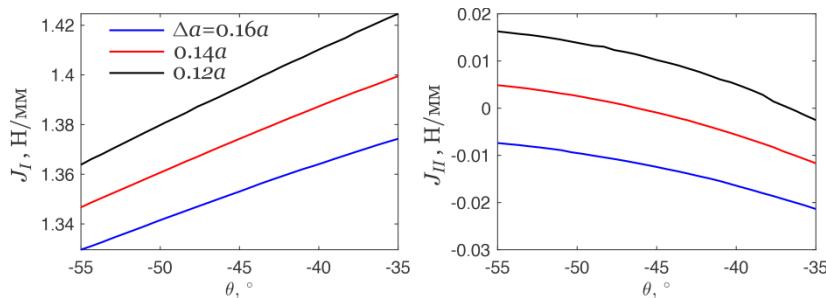
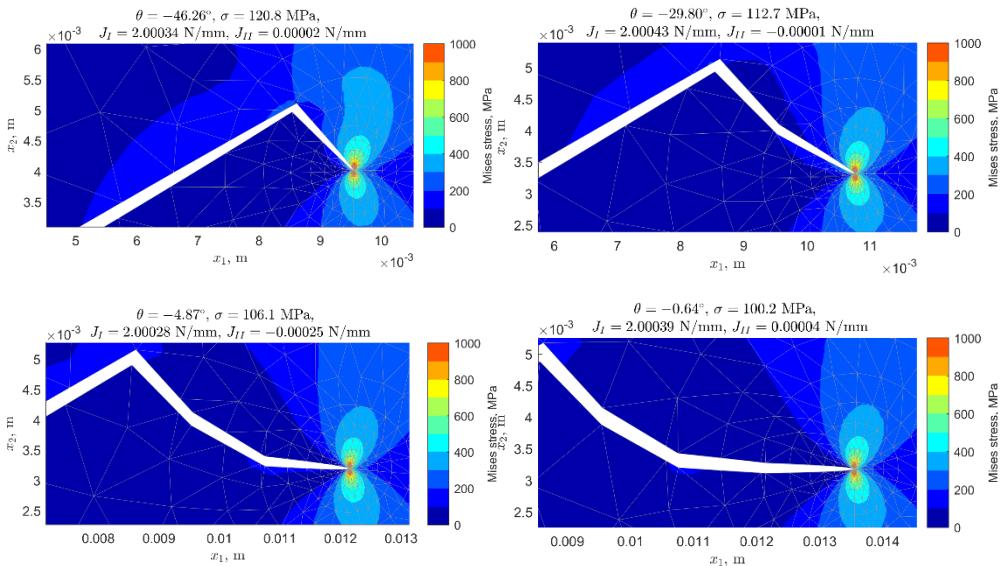


Рис. 3.

Виявилось, що для першого з досліджених приростів нуля J_{II} не існує, що свідчить, що траекторія цієї ділянки відповідає змішаному режиму руйнування. Також зазначимо, що нулі J_{II} для двох інших приростів відрізняються на 11 градусів.

Рис. 4 ілюструє результати розрахунку траекторії тріщин для перших чотирьох приростів кожний з яких становить 14% від початкової довжини $a = 10$ мм. Кут θ і рівень зовнішнього навантаження σ на кожному кроці визначаються з рівнянь $J_I = J_{Ic}$ і $J_{II} = 0$. Розрахунки проведено для енергії руйнування $J_{Ic} = 2$ Н/мм.



Rис.4.

Спостерігаємо, що нахил четвертої ділянки несуттєво відрізняється від нуля. В подальшому траекторія тріщини стає прямолінійною.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: тріщина змішаного режиму руйнування, траекторія тріщини, неявний метод визначення траекторії тріщини

1. Greco F., Ammendolea D., Lonetti P., Pascuzzo A. Crack propagation under thermo-mechanical loadings based on moving mesh strategy // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2021. – **114**, N 1. – P. 103033.
2. Kuna M. Finite Elements in Fracture Mechanics: Theory-Numerics-Applications. Berlin: Springer, 2013. – 464 p.

M.F. Selivanov¹, P.V. Fernati¹, L.M. Tereshchenko¹

DETERMINING CRACK GROWTH PATH USING ADAPTIVE MESH REFINEMENT WITH REGULAR PART

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine
e-mail: fract@inmech.kyiv.ua

This paper presents a study on the determination of crack paths using an implicit scheme for a V-shaped crack in a plate. We have developed a novel algorithm that adaptively constructs a regular mesh around the crack tip, facilitating accurate modeling of the crack as a piecewise linear cut. Our findings demonstrate the efficacy of this approach in enhancing the precision of crack path predictions, which is essential for improving the reliability and safety of engineering structures.

В . П . Голуб, П.Ю. Кобзар

**МЕТОД ЧИСЛЬНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ГРАФІЧНИХ
ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: spiritofspirit@gmail.com*

Перед дослідниками стоїть актуальна задача апробації теоретичних моделей та порівняння їх з експериментом. Зазвичай дані у літературі наведені у графічній формі, що є важким для визначенням та подальшим використанням. Наприклад, актуальним є отримання даних з логарифмічних систем координат, оскільки точність на таких графіках відіграє ключову роль. На підставі експериментальних графічних даних необхідно зробити адекватні та точні табличні дані, тобто провести ідентифікацію таких даних. Адже на практиці порівняння власних теоретичних моделей буде проводитись саме з табличними результатами, оскільки у якості експериментальних даних у більшості випадків використовують запозичені з літератури дані у формі графіків. Ідеологія визначення чисельних табличних даних з графічних пов'язана з виставленням базису та роботі методами лінійної алгебри та чисельних методів. Саме ключове в роботі це є визначення ортогонального базису на базі якого і будуть обраховуватися точки з графіків.

Спочатку виставляються ключові точки для побудови ортогонального базису і вказуються координати таких точок в системі координат графіка. Система координат графіка це внутрішня система координат яка наведена в літературі. Також є система координат відносно зображення і зчитавши такі координати відбувається перетворення в координати графіку і уже ці координати і є тими табличними координатами, що цікавлять нас для дослідження. Нехай P це деяка точка що має координати в системі координат графіка $P(u,v)$ також P має координати $P(x,y)$, що відповідають системі координат зображення. Перетворення між системою координат графіка та зображення (1):

$$\vec{P} = u \cdot \vec{EU} + v \cdot \vec{EV} + \vec{E0}. \quad (1)$$

Отже EU та EV це вектори ортогонального базису відносно координат графіка, $E0$ – це вектор зміщення між координатною системою графіка та зображення. Для отримання EU , EV , $E0$ використовується набір точок, що виставляється для конкретного графіку. Для визначення таких векторів застосовується метод найменших квадратів (2), який хоче мінімізувати квадрат відхилення кожної точки, що була виставлена для шуканого базису графіка.

$$\sum_{i=0}^n \left(\vec{P}_i - (PU_i \cdot \vec{EU} + PV_i \cdot \vec{EV} + \vec{E0}) \right)^2 \rightarrow \min. \quad (2)$$

Де n це кількість виставлених точок базису і для кожного вектора береться часткова похідна по кожній координаті векторів EV , EU , $E0$. Провівши перетворення

отримуємо систему рівнянь для x та y та розв'язавши таку систему рівнянь отримуємо (3), наведено приклад для координати x :

$$\begin{pmatrix} \sum_i PU_i \cdot PU_i & \sum_i PU_i \cdot PV_i & \sum_i PU_i \\ \sum_i PU_i \cdot PV_i & \sum_i PV_i \cdot PV_i & \sum_i PV_i \\ \sum_i PU_i & \sum_i PV_i & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} EU_x \\ EV_x \\ E0_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i PU_i \cdot PX_i \\ \sum_i PV_i \cdot PX_i \\ \sum_i PX_i \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Розв'язавши її за допомогою метода Крамера отримуємо $EU, EV, E0$. Аналогічно проводять знаходження для координати y . Знаючи ці вектори робиться перетворення на графіку точок через систему рівнянь (1) для кожної координати. Вказані PX, PY після роботи алгоритму видають PU, PV , які і необхідно внести в табличні результати і уже з ними проводиться подальший аналіз теоретичної моделі. Приклад застосування для функції $f(x) = \ln(x)$:

x	y , розраховано	y , з програми
1.498252256305	0.404299266315	0.40222042279821
2.000262366420	0.693278355166	0.691500993887899
2.502051415994	0.917110961791	0.915355063066866
2.997569820145	1.09780190044	1.09654798345415
3.499639945097	1.25266009037	1.25059121811754
4.002115953279	1.38682320957	1.38532681455228
4.503904222122	1.50494462554	1.50320001113014
5.000035662058	1.60944504482	1.6081742903978

Отже робота алгоритму достатня для роботи з експериментальними даними наведеними в літературі.

Key words: апробація теоретичних моделей, графічне представлення, ідентифікація даних, чисельні методи, метод найменших квадратів, перетворення координат.

V.P. Golub, P.Y. Kobzar

THE METHOD OF NUMERICAL IDENTIFICATION OF GRAPHICAL EXPERIMENTAL DATA

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: spiritofspirit@gmail.com

Abstract. Researchers face the challenge of validating theoretical models against experimental data, often presented graphically. Precise conversion of this data into tabular form is essential for accurate analysis. Using linear algebra and numerical methods, an orthogonal basis is established. The vectors EU, EV , and $E0$ are determined via the least squares method and Cramer's rule, enabling the transformation of graphical coordinates into usable data for further study.

О.С. Богданова¹, М.В. Дудик², А.О. Камінський¹, Ю.В. Решітник²

ПОВОРОТ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ У КВАЗІКРИХКИЙ МАТЕРІАЛ БІМАТЕРІАЛЬНОГО ТЛА У КУТОВІЙ ТОЧЦІ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ

¹Інститут механіки імені С.П.Тимошенка НАН України,

бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

²Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини,

бул. Садова, 2, 20300, Умань, Україна;

e-mail: o.bogdanova@i.ua, dudik_m@hotmail.com, dfm11@ukr.net,

dikhtarenko_iu@udpu.edu.ua

В умовах плоскої деформації розглядається початковий етап повороту міжфазної тріщини у кутовій точці ламаної межі розділу двох різних однорідних ізотропних матеріалів, який полягає в утворенні маломасштабної зони передруйнування у менш тріщиностійкому матеріалі з квазікрихким характером руйнування. Зона передруйнування моделюється лінією розриву переміщення довжини l (рис. 1), на якій виконується квадратичний критерій міцності типу Мізеса – Хілла $(\sigma_\theta / \sigma_1)^2 + (\tau_{r\theta} / \tau_1)^2 = 1$ з граничними значеннями σ_1 нормальног і τ_1 дотичного напружень у квазікрихкому матеріалі в якості критеріальних параметрів. Зовнішнє навантаження враховується шляхом формулювання умови на нескінченості у формі вимоги зшивання шуканого розв'язку з асимптотикою відомого розв'язку аналогичної задачі без зони передруйнування.

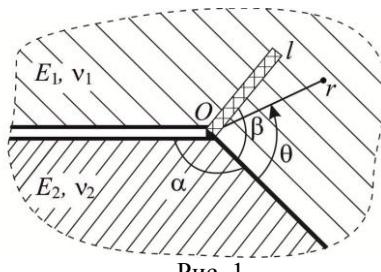


Рис. 1

За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задачу про розрахунок параметрів зони передруйнування зведено до векторного функціонального рівняння відносно трансформант компонентів напружень і градієнтів переміщень. Для його розв'язання використано наближений метод [1], який базується на поетапному розщепленні вихідного векторного рівняння на пару незалежних скалярних функціональних рівнянь, що розв'язуються за допомогою методу Вінера – Гопфа. Розщеплення векторного рівняння у нульовому наближенні здійснено завдяки нехтуванню недіагональними елементами його матричного коефіцієнта. Отриманий на цьому етапі розв'язок використовувався у наступному наближенні шляхом заміни розшукуваних функцій при недіагональних компонентах матричного коефіцієнта вихідного рівняння, що також приводило до пари скалярних функціональних рівнянь з доступним подальшим розв'язанням.

Зі знайденого наближеного розв'язку функціонального рівняння задачі виведено

замкнути систему трансцендентних рівнянь і співвідношень для розрахунку довжини зони, фазового кута навантаження і величини дисипації енергії в зоні. З умови максимуму величини дисипації енергії визначався кут нахилу зони відносно межі розділу матеріалів.

Отримано вирази для швидкості вивільнення енергії в зоні та розкриття тріщини в її вершині, які забезпечують застосування енергетичного і деформаційного критеріїв оцінки граничних навантажень, що передують зрушенню тріщини у напрямку, визначеному орієнтацією зони передруйнування в момент зрушення. Здійснено числовий аналіз залежності параметрів зони передруйнування від величини навантаження, механічних характеристик з'єднаних матеріалів та кута зламу межі розділу матеріалів. Виявлено суттєвий вплив на досліджені параметри конфігурації зовнішнього навантаження і відношення опору відриву до опору зсуву матеріалу, в якому розвивається зона передруйнування. Встановлено існування стрімкого переходу матеріалу від крихкого механізму руйнування до пластичного при зміні відношення опорів відриву і зсуву у достатньо вузькому інтервалі його значень.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ламана межа розділу, міжфазна тріщина, зона передруйнування, умова міцності Мізеса – Хілла, векторне рівняння Вінера – Гопфа, поворот тріщини.

1. Kaminsky A., Dudyk M., Reshitnyk Yu., Chornoivan Yu. An analytical method of modeling the process zone near the tip of an interface crack due to its kinking from the interface of quasi-elastic materials. // Int. J. Solids Struct. – 2023. – **267** (112117).

O.S. Bogdanova¹, M.V. Dudyk², A.O. Kaminsky¹, Y.V. Reshitnyk²

INTERFACE CRACK KINKING INTO A QUASI-BRITTLE MATERIAL OF A BI-MATERIAL BODY AT THE CORNER POINT OF A BROKEN INTERFACE

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;

² Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
Sadova Str., 2, 20300, Uman, Ukraine;
e-mail: o.bogdanova@i.ua, dudik_m@hotmail.com, dfm11@ukr.net,
dikhtiarenko_iu@udpu.edu.ua

A mathematical model of the process zone, which under plane strain conditions is formed in a material with a quasi-brittle fracture mechanism near the tip of an interfacial crack at the corner point of a broken interface, has been developed. The process zone is modeled by the displacement discontinuity line, on which the Mises–Hill strength condition is satisfied. The equation for calculating the length and orientation of the process zone, the phase angle of stresses and the amount of energy dissipation in the zone is derived.

Є.В. Воробйов, Т.В. Аппілого娃

МІЦНІСТЬ ТА НИЗЬКОТЕМПЕРАТУРНА СТРИБКОПОДІБНА ДЕФОРМАЦІЯ СПЛАВІВ З ОГЛЯДУ НА ВІД ЗАПАСУ ПОТЕНЦІЙНОЇ ЕНЕРГІЇ У СИСТЕМІ НАВАНТАЖЕННЯ

*Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАНУ,
вул. Садово-Ботанічна, 2, 01014, Київ, Україна; e-mail: evsv1@meta.ua*

За температур нижче 30 К пластична деформація металів втрачає стійкість в результаті виникнення ефекту низькотемпературної стрибкоподібної деформації. Найбільш небезпечним проявом цього явища є різкий перехід від пружнього деформування до швидкісної локалізованої пластичної течії, тобто раптове зниження або втрата несівної здатності конструкційного елементу з можливим досягненням надмірної деформації або руйнування.

Розвиток стрибка деформації за заданої початкової температури проявляється як властивість системи зразок-машина у залежності від її характеристик, котрі можна розділити на дві головні групи. Перша з них включає характеристики, які стосуються матеріалу, а друга – системи навантажування, у тому числі – виду потенційної енергії, що переходить у роботу деформування.

При випробуваннях матеріалів на розтяг забезпечують рух силової рами з тягами завдяки електричній енергії і роботі електро- чи гідроприводу. Але за температури рідких гелію чи водню для деформування зразку подальший притік енергії стає непотрібним. За досягнення критичного рівня напруження σ_0 відбувається стрибок деформації, лише завдяки запасу потенційної пружньої енергії у системі зразок-машина. Він є пропорційним підатливості системи і квадрату сили $P_0 \sim \sigma_0$. Дослідження впливу зазначених характеристик для пружної системи було виконано у роботі [1]

Ще одним видом енергії, що може перетворюватись у роботу стрибкоподібної деформації є потенційна гравітаційна енергія підвішеного вантажу. Така система навантаження формально відповідає випробуванням розтягнутого зразка у режимі повзучості. Повний запас енергії вантажу масою M_0 пропорційний висоті центру мас над обраним нульовим рівнем, тобто може бути будь яким великом на відміну від пружної енергії. Головна принципова відмінність системи з підвішеним вантажем полягає в тому, що її жорсткість практично дорівнює нулю, тож деформівна сила релаксує слабо. У той же час сила пружності – позиційна сила, що різко зменшується при зростанні деформації. Такі значні відмінності можуть суттєво змінювати характер досліджуваного ефекту. На практиці дуже великі вагові навантаження у поєднанні з кріогенними температурами зустрічається у резервуарах для зберігання скраплених газів, зокрема у водневих баках ракет-носіїв. Такі баки, заввишки до 40 м, розташовані у нижній частині ракети, і мають експлуатаційну температуру 20 К, що забезпечує можливість реалізації ефекту низькотемпературної стрибкоподібної деформації металів. Та на сьогоднішній час розвиток стрибка деформації металів за рахунок потенційної енергії поля гравітації залишається недослідженім. Тож метою цієї роботи є визначення впливу характеристик металу на величину стрибкоподібної деформації зразка, у порівнянні з пружною системою.

Об'єктом дослідження є процес окремого стрибка деформації циліндричного металевого зразка, розтягнутого за допомогою підвішеного вантажу, маса якого повільно збільшується до стартового рівня. Матеріалами послуговують аустенітна сталь 03Х20Н16АГ6 та алюмінієвий сплав АМг5, що їх п'ятикратні циліндричні зразки

діаметром 3 мм піддано розтягу за температури 4 К у середовищі рідкого гелію. Вибір цих сплавів зумовлений контрастом рівнів міцності, за близьких величин характеристик пластичності. Метод дослідження – це чисельний експеримент, що базується на багатопараметричній математичній моделі стрибкоподібної деформації у гравітаційній системі [2]. Модель відображає стан динамічної рівноваги системи і описує процес стрибка як рух системи. Модель конкретизовано для зразків сталі 03Х20Н16АГ6 і алюмінієвого сплаву АМг5 у режимі повзучості в середовищі рідкого гелію.

Результати чисельного дослідження для обох матеріалів у порівнянні з пружною системою [1] наведено на рис. 1. Зі зростанням стартового напруження відбувається інтенсивне збільшення стрибкоподібної деформації ε_D . Тут і далі світлі точки відповідають базовим величинам параметрів експерименту [1].

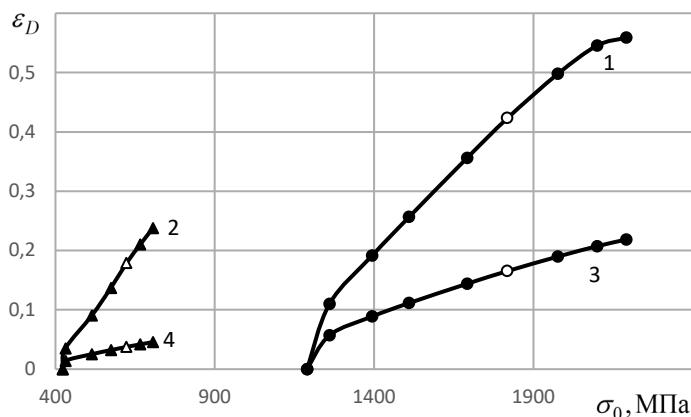


Рис. 1. Залежність стрибкоподібної деформації від стартового напруження для сталі 03Х20Н16АГ6 (1, 3) та алюмінієвого сплаву АМг5 (2, 4) гравітаційній (1, 2), та для пружній (3,4) системах

Для алюмінієвого сплаву, як матеріалу з порівняно низькою міцністю, досягнута деформація є суттєво меншою в обох системах. Але у гравітаційній системі зростання ε_D набагато сильніше, причому деформація сягає 0,56 і 0,24 відповідно для сталі та алюмінієвого сплаву. Це значно перевершує ресурс пластичності матеріалів, тож руйнування при стрибку є незворотнім. Характерною особливістю отриманих залежностей є близький до лінійного характер.

Оскільки величина σ_0 визначається масою підвішеного вантажу, має суттєво змінюватись кругова частота ω , як один з параметрів моделі [2]. Згідно з принципом найменшої дії, шляхом чисельного експерименту знаходили значення ω , як резонансне, тобто як точку максимуму на амплітудно-частотній характеристиці. Відповідні залежності показані на рис. 2.

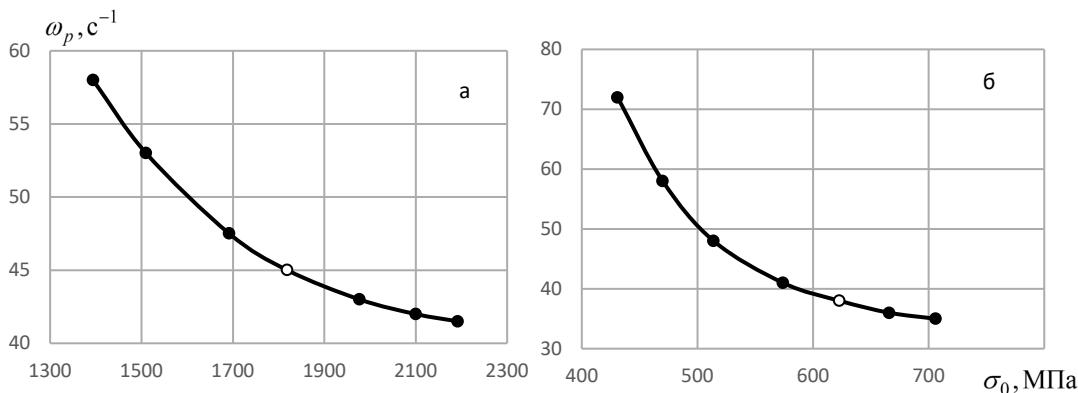


Рис. 2. Залежність резонансної частоти від стартового напруження для сталі 03Х20Н16АГ6 (а) та алюмінієвого сплаву АМг5 (б) в гравітаційній системі

Таким чином, виявлено якісну подібність впливу стартового напруження як характеристики міцності, причому величини досягнутих деформацій різко відрізняються.

Порівняльні розрахунки довели, що потенційна енергія поля гравітації спричиняє набагато більшу локалізовану деформацію зразка, ніж потенційна пружна енергія.

При гравітаційному навантаженні виникає дуже велика деформація, що локалізується в умовах повільної релаксації напруження, і це неминуче спричиняє руйнування ще до завершення процесу стрибка.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стрибок деформації, математична модель, рідкий гелій.

1. E.V. Vorob'ev, T.V. Anpilogova. Numerical analysis of the deformation instability of metals in liquid helium. *Computational Materials Science*. V.68. 2013. P. 66–72.
2. С.В. Воробйов, Т.В. Анпілогова. Моделювання низькотемпературної переривчастої деформації металів в залежності від режиму навантаження і виду накопиченої потенційної енергії. *Проблеми міцності*. 2024. В друці.

E. V. Vorobyov, T. V. Anpilogova

**STRENGTH AND LOW-TEMPERATURE JUMP-LIKE DEFORMATION OF ALLOYS
REGARDING THE TYPE OF RESERVED POTENTIAL ENERGY IN THE LOAD SYSTEM**

*G.S.Pisarenko Institute for Problems of Strength National Academy of Sciences of Ukraine,
2, Sadovo-Botanic Str, 01014, Kyiv, Ukraine, e-mail: evs1@meta.ua*

It is shown that a very large deformation occurs under gravitational loading, which is localized under conditions of slow stress relaxation, and this inevitably causes destruction even before the jump process is completed.

М.В. Дудик¹, Т.В. Поліщук¹

**ПРО ВІДГАЛУЖЕННЯ МІЖФАЗНОЇ ЗСУВНОЇ ТРІЩИНІ У КУТОВІЙ
ТОЧЦІ ЛАМАНОЇ МЕЖІ ПОДІЛУ**

¹Уманський державний педагогічний університет імені Павла Тичини,
бул. Садова, 2, 20300, Умань, Україна;
e-mail: dudik_m@hotmail.com, polischuk_t@ukr.net

В умовах плоскої деформації розглядається напружене-деформований стан пружного біматеріального тіла біля кутової точки ламаної межі поділу і міжфазної зсувної тріщини з берегами, контактуючими без тертя. Внаслідок концентрації напружень в околі точки зламу передбачається утворення зони передруйнування з наступним зародженням в ній тріщини нормального відриву, яка стає відгалуженням початкової міжфазної тріщини. Таким чином, приходимо до задачі про розрахунок параметрів зони передруйнування і умов ініціації в ній відгалуженої тріщини.

Припускаючи дію симетричного навантаження, розглядаємо маломасштабну зону передруйнування, що поширюється в одному з матеріалів композитного з'єднання з вершини кута зламу вздовж його бісектриси. Зону передруйнування моделюємо лінією розриву нормального переміщення, на якій нормальне напруження дорівнює опору матеріалу відриву. За допомогою інтегрального перетворення Мелліна задачу про розрахунок параметрів зони передруйнування зведено до функціонального рівняння відносно трансформант нормального напруження і градієнта нормального переміщення, яке розв'язано засобами методу Вінера – Гопфа. Отримано аналітичні вирази для розрахунку довжини зони передруйнування і швидкості вивільнення енергії в ній. Здійснено числовий аналіз параметрів зони передруйнування. Сформульовано умови трансформації зони передруйнування у тріщину нормального відриву.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: кусково-однорідне тіло, ламана межа розділу, міжфазна тріщина ковзання, зона передруйнування.

M.V. Dudyk¹, T.V. Polishchuk¹

**ON THE BRANCHING OF AN INTERFACIAL SHEAR CRACK AT THE CORNER POINT
OF A BROKEN INTERFACE**

¹Pavlo Tychyna Uman State Pedagogical University,
Sadova Str., 2, 20300, Uman, Ukraine;
e-mail: dudik_m@hotmail.com, polischuk_t@ukr.net

Under the conditions of plane deformation, the problem of calculating the parameters of the small-scale process zone near the corner point of the broken interface of two different elastic isotropic materials is considered. On the part of the interface adjacent to the corner point, the presence of an interfacial crack with frictionless contacting faces is assumed. Analytical expressions were obtained for calculating the length of the process zone and the rate of energy release in it.

Писаренко Г.Г.¹, Войналович О.В.², Бялонович А.В.¹, Майло А.М.¹

ХАРАКТЕРИСТИКА ПОШКОДЖЕНОСТІ КОНСТРУКЦІЙНОЇ СТАЛІ ЗА БАГАТОЦИКЛОВОЇ ВТОМИ НА МЕЖІ НЕПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ

¹ Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України,
вул. Садово-Ботанічна 2, Київ-0114, 01014, Україна;

² Національний університет біоресурсів і природокористування України
вул. Героїв Оборони, 15, 03041, Київ, Україна

Ступінь порушення цілісності металоконструкції за багатоциклової втоми можна охарактеризувати накопиченим пошкодженням, яке нині представляють у формі фрактальної розмірності здеформованої поверхні полікристалічного матеріалу [1]. Змінення амплітуди мікропластичних зсувів на поверхні металоконструкції призводить до еволюції деформаційного рельєфу поверхні металу, який описують певним розподілом амплітудних параметрів локальних максимумів та мінімумів деформацій поверхні.

У роботі на вібростенді з електрострікційним збудженням коливань в резонансному режимі випробовували на втомі плоскі прямокутні зразки двоступінчастої форми з конструкційної сталі марки Ст 20 (рис. 1). Зразки під час циклічного навантажування зазнавали симетричного плоского згинання з максимумом циклічних напружень у місці галтельного переходу зразка. Фізико-механічні характеристики досліджуваної сталі марки Ст 20 наступні: $\sigma_{0,2} = 336$ МПа; $\sigma_t = 504$ МПа; $\sigma_{-1} = 206$ МПа; $HV_r = 202,3$.

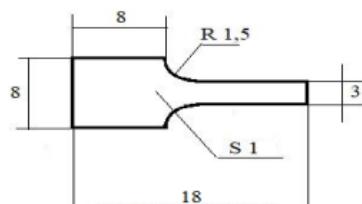


Рис.1.

Втомні випробування зразків сталі Ст 20 проводили з частотою близько 13кГц. Амплітуду коливань зразків під час циклічного навантажування підтримували на частоті резонансу коливальної системи «силозбуджувач - зразок». Отриману діаграму багатоциклової втоми зразків Ст 20 показано на рис. 2, де окремо позначено три ступіні навантажування зразків за різних амплітуд циклічних напружень, для яких було виконано спеклометричні дослідження.

Для цих зразків на окремих етапах втоми до моменту зміщення частоти резонансу на 3% від початкової частоти втомного випробування, припиняючи циклічне навантажування, послідовно отримували спеклограми поверхні у зоні максимальних циклічних напружень у зразках.

Цифрові спеклінтерферометричні зображення поверхні зразків було оброблено з використанням програми атомно-силової (АС) мікроскопії [2]. Зокрема, ці результати дозволяють проаналізувати закономірності еволюції накопичення площ та об'ємів локальних максимумів та мінімумів у досліджуваних діапазонах циклів навантажування та амплітуд циклічних напружень.

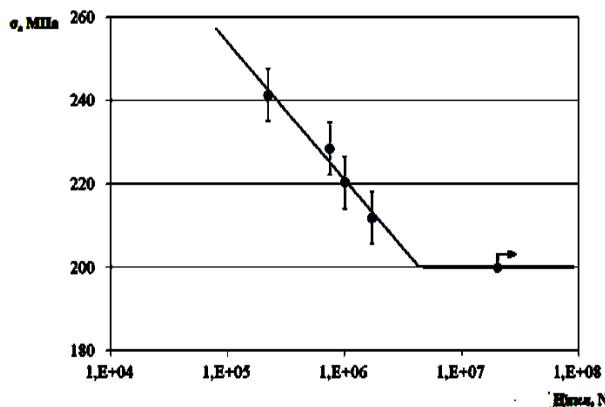


Рис.2.

Для оцінення кількісного впливу тривалості навантажування на кінетику пошкодженості у відносній формі запропоновано використати значення індексу навантаженості(індексу деформацій)К, який визначають за формулою

$$K = [-I_{min}/I_{max}] \cdot 100\%. \quad (1)$$

де I_{max} - амплітуда локального максимуму, I_{min} - амплітуда локального мінімуму.

На основі кореляційних залежностей пошкодженості, накопиченої на стадіях втоми зразків, побудовано кінетичну характеристику, з якої можна виявити тривалість навантажування, коли розсяяне пошкодження (руйнування) переходить до іншої стадії втоми із зміненням механізму руйнування (рис. 3, 1 –експериментальні дані; 2 –апроксимація степеневою функцією). За відносної довговічності понад 80 % нахил графіка змінюється так, що стає практично горизонтальним.

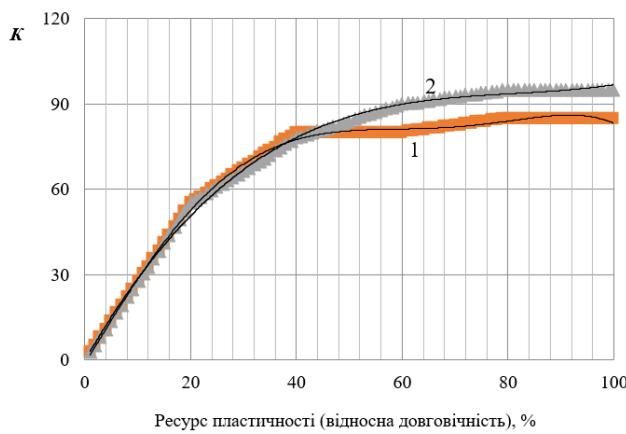


Рис.3.

Висновки

1. Обґрунтовано метод кількісного оцінення поточного стану фізико-механічних властивостей матеріалу, який характеризує щільність дефектів поверхні, на основі аналізу спектрального складу яскравості проміння, відбитого від деформованої поверхні. з визначенням функції розподілу інтенсивності та параметрів її відхилення від її середнього значення.

2. Розроблено метод безконтактного вимірювання деформаційних характеристик у поточному режимі експлуатації металоконструкцій, що корелюють з параметрами

втомного пошкодження металу. Згідно з методом аналізують зображення динамічного спекл-модульованого потоку когерентного потоку світла, відбитого від здеформованої поверхні металу, а неоднорідність мікродеформованого стану мезоструктури полікристалу враховують за умови дотримання методичної ідентичності досліджень. Метод дозволяє встановити стохастичні закономірності залежності амплітудних та спектральних параметрів розподілу яскравості зображення спеклструктурі поверхні матеріалу від його стану пошкодження внаслідок зміненняступеню неоднорідності фізико-механічних властивостей поверхневого шару металевих полікристалічних матеріалів.

3.Отримано експериментальні ознаки того, що локальному руйнуванню металу за циклічного навантажування передує наявність мікропластичної деформації поверхневого шару, як характеристики пошкодження, що виникає на стадії розсіяного руйнування за пружно- пластичного деформування, що узгоджується із загальною ознакою розвитку руйнування за механічного навантаження, незалежно від його виду, є мірою вичерпання пластичних властивостей металу в локальній зоні зародження макротріщини на поверхні металоконструкції за динамічного і статичного навантажування

КЛЮЧОВІ СЛОВА :втома металів і сплавів, кореляційний аналіз, мікропластичне деформування поверхні, деформаційний мікрорельєф, фотометричне сканування.

1. Karuskevich M., Karuskevich O., Maslak T., SchepakS. (2012). Extrusion/intrusion structures as quantitative indicators of accumulated fatigue damage. International Journal of Fatigue. **39**. 116-121. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2011.02.007>
2. Horcas I., Fernández R., Gómez-Rodríguez J.M., Colchero J., Gómez-Herrero J., Baro A.M. (2007). WSXM: A software for scanning probe microscopy and a tool for nanotechnology. The Review of scientific instruments. 78(1):013705. DOI:10.1063/1.2432410

G. G. Pisarenko¹, O. V. Voinalovych², A. V. Byalonovich¹, A.M. Mailo

CHARACTERIZATION OF STRUCTURAL STEEL DAMAGE UNDER MULTI-CYCLE FATIGUE AT THE LIMIT OF INELASTIC DEFORMATION

¹ *G.S. Pisarenko Institute for Problems of Strength of the National Academy of Sciences of Ukraine*

² *National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine*

The paper deals with the correlation characteristics of strain defects in laboratory specimens of structural steel formed under multicycle loading. A methodical approach to assessing the characteristics of the physical and mechanical state of damage preceding local material fracture by photometric analysis of the inhomogeneity of microplastic deformation of the metal surface is substantiated.

М.О. Єфімов, В.А. Гончарук, В.В. Купрін, Н.П. Захарова

КОНЦЕНТРАЦІЙНА ЗАЛЕЖНІСТЬ ЗМІЦНЮЮЧОГО ЕФЕКТУ
В КОМПОЗИТАХ Al – AlB₁₂

*Інститут проблем матеріалознавства ім. І.М. Францевича НАНУ,
вул. Омеляна Пріцака, 3, 03142, Київ, Україна;
e-mail: n.iefimov@gmail.com*

Дослідження механічних властивостей проводились на порошкових композитних матеріалах системи Al – AlB₁₂, в яких доля зміцнюючих частинок α-AlB₁₂ складала 2,5, 5, 10 та 15 об. %. Композиційні суміші порошків Al (розміром 40 мкм) та α-AlB₁₂ (з середнім розміром 2,5 мкм) перемішувались в закритому контейнері протягом 12 год. Відтак суміші порошків пресували в зразки діаметром 25 мм та висотою 10-15 мм. Операцію рідиннофазного спікання провадили в установці високочастотного нагріву в тиглі з Al₂O₃ в інертній атмосфері при температурах 1250 – 1750 °C в залежності від кількості частинок α-AlB₁₂. Контролю температури проводили термопарою ВР 5-20. Механічні властивості досліджували при випробуваннях на стиск на машині Р-5. Отримані криві навантаження було побудовано в координатах «істинна деформація – істинне напруження», тобто з урахуванням зміни (збільшення) поперечного перерізу зразка в процесі стиску.

Аналіз даних механічних випробувань показує, що в композитах Al-AlB₁₂, що містять 2,5 та 5 об. % частинок α-AlB₁₂, має місце дисперсійне зміцнення, яке характеризує величина $\Delta\tau$. Як бачимо, воно задовільно описується рівнянням, отриманим з рівняння Орована [1]. Так рівняння Орована у вихідному виді:

$$\Delta\tau = \frac{\alpha G b}{\lambda}, \quad (1)$$

де $\Delta\tau$ – приріст границі плинності, який обумовлений наявністю дисперсних частинок; λ – середня відстань між частками; G – модуль зсуву матеріалу частинок; b – вектор Бюргерса дислокаций; α – const, яка визначається кількістю дисперсних частинок в площині ковзання, зазвичай $\alpha = 2 \div 4$.

Вводячи f_V (об'ємну концентрацію зміцнюючої фази 5 об. % AlB₁₂) та беручи до уваги, що:

$$\lambda = r \cdot \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3f_V}}, \quad (2)$$

отримуємо:

$$\Delta \tau = 0,6\alpha \frac{Gb}{r} \sqrt[3]{f_V}, \quad (3)$$

де r – радіус зміцнюючої частинки.

Таким чином, співвідношення (3) характеризує залежність ефекту зміцнення від концентрації дисперсних частинок α -AlB₁₂ та їх розміру. Експериментальна залежність ефекту зміцнення від об'ємної долі частинок 5 об. % AlB₁₂ в композитах типу Al – AlB₁₂ наведена на рис. 1 а. Якщо побудувати цю залежність, як ефект зміцнення від величини $f_V^{1/3}$, отримуємо $\Delta\tau \sim f_V^{1/3}$ (рис. 1 б). Тобто, для композитів, що містять 2,5 та 5,0 об. % частинок α -AlB₁₂, зміцнюючий ефект задовільняє рівнянню (3), отриманому безпосередньо з рівняння Орована.

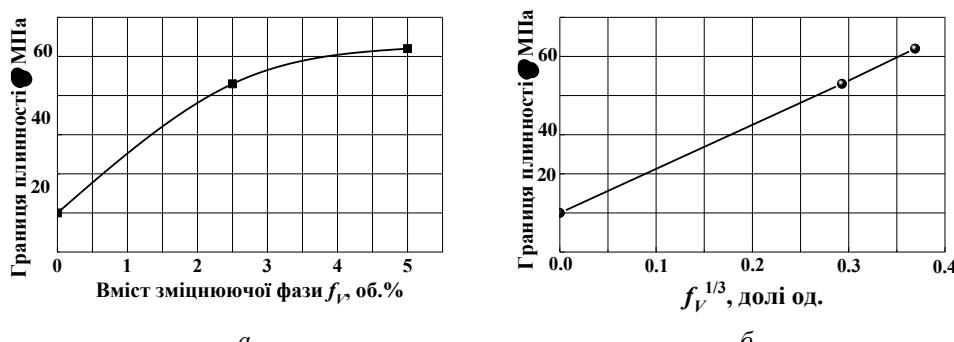


Рис. 1. Залежність границі плинності композита Al – AlB₁₂ від вмісту зміцнюючої фази в різних координатах

В усіх композитах, які було досліджено, середній розмір зміцнюючих частинок α -AlB₁₂ складав $r = 2,5$ мкм. Якщо $G = 200$ ГПа та $b = 1$ нм (період гратки α -AlB₁₂ $a = 1$ нм [2]) та $\alpha = 2$ при $f_V = 2,5\% = 0,025$ ($f_V^{1/3} = 0,293$) отримуємо $\Delta\tau = 29$ МПа; при $f_V = 5,0\% = 0,05$ ($f_V^{1/3} = 0,368$) отримуємо $\Delta\tau = 37$ МПа. Ці розрахункові значення досить добре співпадають з експериментальними даними (табл. 1).

Таблиця 1. Залежність границі плинності композитів Al – AlB₁₂ від вмісту зміцнюючої фази

Вміст зміцнюючої фази f_V (об. %)	$f_V^{1/3}$ (долі одиниці)	Границя плинності τ (МПа)	Приріст границі плинності $\Delta\tau$ (МПа)
0 (чистий Al)	0	20	0
2,5	0,293	52	32
5	0,369	62	42
10	0,465	24	4
15	0,532	–	–

При подальшому збільшенні об'ємної долі частинок α -AlB₁₂ до 10 об. % ефект дисперсійного зміцнення різко знижується (табл. 1). Це пояснюється процесами формування конгломератів частинок α -AlB₁₂, що призводить до різкого збільшення параметра r в рівнянні (3). Оскільки розмір конгломерату частинок істотно більше розміру окремої частинки це призводить до зниження $\Delta\tau$. В композитах, які містять 15 об. % частинок α -AlB₁₂, відбувається знеміцнення композитного матеріалу. Матеріал починає руйнуватися крихко, не досягаючи границі плинності, тобто композит різко втрачає

пластичність внаслідок формуванню великої кількості конгломератів частинок α - AlB_{12} .

Слід зазначити, що при малому вмісті зміцнюючої фази α - AlB_{12} , ефект дисперсійного зміцнення може різко знизитися. Мінімально необхідну концентрацію f_{Vkp} можна визначити з умови перетину будь якою площиною, яка проходить через зерно матриці, хоча б декількох частинок зміцнюючої фази. При радіусі частинок r і розмірі зерна матриці алюмінію d ймовірність такої події $P = r/d$. Отже, кількість частинок в одному зерні (при рівномірному розподілі) необхідних для перетину площиною в середньому однієї частинки становить $n = d/r$. При цьому об'ємний вміст другої фази:

$$f_V = n \frac{r^2}{d^2}, \text{ або } f_{Vkp} = \beta \frac{r^2}{d^2}, \quad (4)$$

де α – середня кількість дисперсійних частинок в площині ковзання, при якому дисперсійне зміцнення є ефективно.

Для досліджених композитів, коли середній розмір частинок α - AlB_{12} $r = 2,5$ мкм, $d = 40$ мкм, $\alpha = 2 - 4$, отримуємо $f_{Vkp} = 0,75 - 1,5$ об. %. Таким чином, мінімальна доля зміцнюючої фази в композитах типу Al – AlB_{12} з урахуванням похибки розрахунку повинна становити ~ 1 об. %.

Таким чином, досліджено композитні матеріали системи Al – AlB_{12} , в яких доля зміцнюючих частинок α - AlB_{12} складала 2,5, 5, 10 та 15 об. %. Встановлено наявність дисперсійного зміцнення в них, яке задовільняє модифікованому рівнянню Орована для композитів, які містять 2,5 та 5 об. % зміцнюючої фази α - AlB_{12} . При вмісті частинок α - AlB_{12} вище за 10 об. % зміцнюючий ефект нівелюється і відбувається знеміцнення композита за рахунок утворення конгломератів з частинок α - AlB_{12} .

КЛЮЧОВІ СЛОВА: алюмоматричні композити, рівняння Орована, дисперсійне зміцнення

1. Orowan E. Classification and nomenclature of internal stresses // Symposium on Internal Stresses in Metals and Alloys, London: Inst. Metals. – 1947. – P. 47 – 59.
2. Higashi I. Crystal Chemistry of α - AlB_{12} and γ - AlB_{12} // Journal of Solid State Chemistr. – 2000. – **154**, N 1. – P. 168 – 176.

M.O. Iefimov, V.A. Goncharuk, V.V. Kuprin, N.P. Zakharova

**CONCENTRATION DEPENDENCE OF THE STRENGTHENING EFFECT
IN AI - AlB_{12} COMPOSITES**

*Frantsevich Institute for Problems of Materials Science of the National Academy of Sciences,
Omeliana Prisaka Str., 3, 03142, Kyiv, Ukraine;
e-mail: n.iefimov@gmail.com*

Composite materials of the Al – AlB_{12} system with 2.5, 5, 10 and 15 vol.% of α - AlB_{12} reinforcing particles were obtained by liquid-phase sintering method. The presence of dispersion hardening which is well described by the modified Orowan's equation was found for composites with 2.5 and 5 vol.% of the α - AlB_{12} strengthening phase. In composites with 10 vol.% of α - AlB_{12} particles and above, the strengthening effect is neutralized and even de-strengthening occurs, which is explained by the formation of conglomerates of α - AlB_{12} particles.

В.Г.Сидяченко

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПОПЕРЕДЬОГО ТЕРМОМЕХАНІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ТРИЦІНОСТІЙКІСТЬ РЕАКТОРНОЇ СТАЛІ ПРИ ЗМІШАНИХ МОДАХ ДЕФОРМУВАННЯ

*Інститут проблем міцності ім. Г.С.Писаренка НАНУ,
бул. Садово-Ботанічна, 2, 01014, Київ, Україна;
e-mail: Sydiachenko@ukr.net*

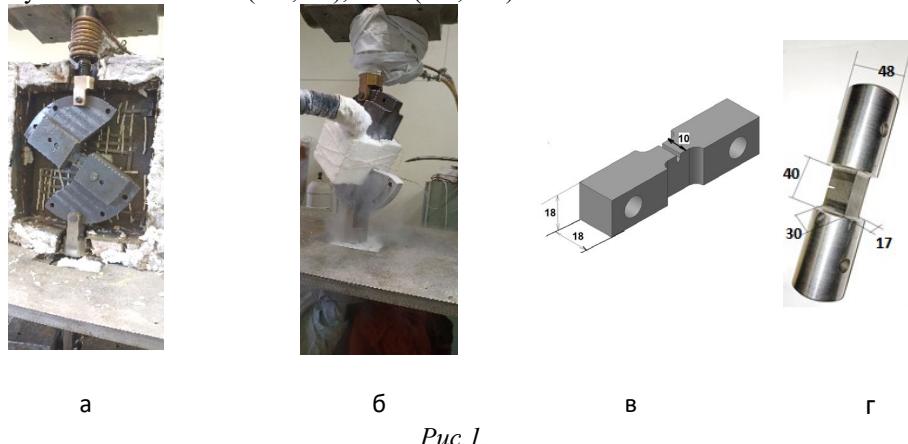
Відомо, що попереднє термомеханічне навантаження (ПТН), що полягає в перевантаженні елементу конструкції з тріщиною в пластичному стані, тобто за температури вище крихко-в'язкого переходу, сприяє підвищенню опору крихкому руйнуванню тепlostійких сталей з тріщинами. Проте експериментальні дані, стосовно впливу ПТН на в'язкість руйнування тепlostійких реакторних сталей, обмежуються вивченням в'язкості руйнування за модою I (нормальний відрив) [2,3]. Інформація щодо впливу ПТН при різних модах навантаження на в'язкість руйнування сталей з тріщинами обмежена і суперечлива [1,5]. Слід зазначити, що в реальних конструкційних елементах орієнтація площини тріщини по відношенню до прикладених зусиль носить випадковий характер. Саме тому, важливо враховувати, що ПТН і подальше експлуатаційне навантаження приводять до деформації зразка з тріщиною не за модою I, а до будь-яких мод навантаження, включаючи змішані моди I+II+III. Таким чином оцінка несучої спроможності елементів конструкції повинна здійснюватися за критеріями тріциностійкості при змішаних модах деформування. Для цього необхідно мати інформацію про критичні характеристики тріциностійкості при модах деформування I, II, III та їх змішаності.

Метою даного дослідження є розробка теоретичних та експериментальних методів дослідження впливу ПТН на характеристики тріциностійкості металевих сплавів при змішаних модах деформування з урахуванням ефекту масштабу.

З метою проведення експериментальних досліджень було розроблено методику, що дає змогу дослідження тріциностійкості при деформуванні зразка при змішаних модах I+II+III в температурному діапазоні від крихкого до в'язкого руйнування (рис.1,а,б). Різні співвідношення (I+II+III) мод деформування досягали, змінюючи положення зразків (рис.1,в,г) по відношенню до осі навантаження (F) (рис.2,а) [4,6].

Випробування на статичну тріциностійкість виконували за схемами (рис.2, а) при кутах нахилу зразка ($\alpha=\beta=30^\circ$, $\alpha=\beta=60^\circ$) до осі навантаження зразка (F) при: кімнатній температурі ($+20^\circ\text{C}$), та температурах ПТН ($+300^\circ\text{C}$) та крихкого руйнування (-100°C). Макро аналіз характеру руйнування свідчить що, при кімнатній температурі руйнування було пластичним і тріщина розвивалась автомодельно в своїй площині, тобто близько до критерію максимальних деформацій зсуву: як при змішаності мод ($30^\circ, 30^\circ$) так і при ($60^\circ, 60^\circ$). Причому характер зламу мало змінювався при зміні розміру поперечного перерізу робочої ділянки зразка від 10×18 мм до 17×30 мм. Діаграма «навантаження - переміщення», що реєструвалася для визначення КІН відзначалася не лінійністю. В той же час характер зламу при нормальному відриві зразка з перерізом 17×30 мм, характерний для крихкого руйнування, мав плоску поверхню, а його діаграма була лінійна. Отже, перехід до навантаження сталі 15Х2НМФАА змішаними I+II+III модами деформування демонструє зміну характеру руйнування при температурі $+20^\circ\text{C}$.

Перехід до низьких температур супроводжувався зміною механізму руйнування за макроламом зразка при змішаних I+II+III модах деформування. Кут розвитку тріщини змінювався у відповідності до критерію максимальних нормальних напружень, а злам при цьому мав характерний для крихкого руйнування кристалічний характер, як при кутах навантаження ($30^\circ, 30^\circ$), так і ($60^\circ, 60^\circ$).



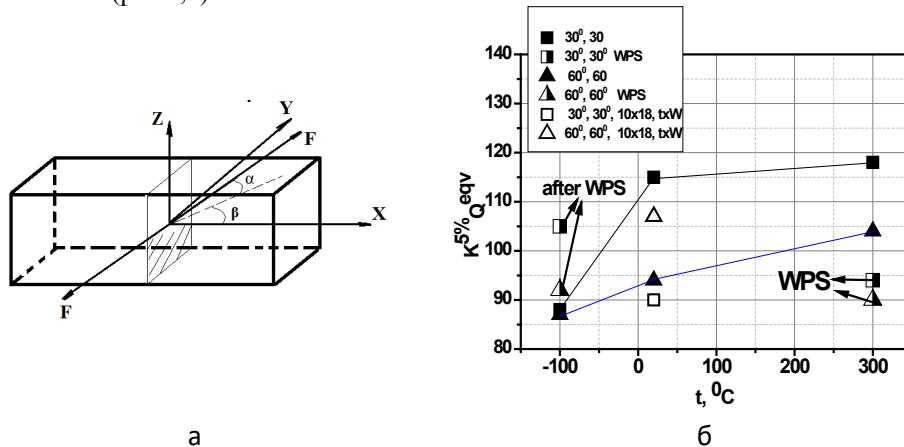
Ruc. 1.

Зважаючи на не лінійність діаграм «навантаження – переміщення» при змішаних модах деформування, КІН визначали за 5% січною як $P_Q^{5\%}$ за залежностями [6]. Визначивши $K_I^{5\%}$, $K_{II}^{5\%}$, $K_{III}^{5\%}$ для навантаження при кутах α, β ($30^\circ, 30^\circ$) і ($60^\circ, 60^\circ$) відповідно, визначали умовні еквівалентні значення КІН:

$$K_{VI,II,III} = \frac{K_{VI,II}(1 + 2\nu) + \sqrt{K_{VI,II}^2(1 - 2\nu)^2 + 4K_{III}^2}}{2} \quad (1)$$

$$K_{VI,II} = \frac{0.83K_I + \sqrt{0.4489K_I^2 + 3K_{II}^2}}{1.5}.$$

Аналіз температурної залежності за еквівалентною в'язкістю руйнування засвідчив, що опір розвитку тріщин при змішаних I+II+III модах деформування зростає з підвищеннем температури випробувань, водночас зростання в навантаженні компонент поперечного і поздовжнього зсуву знижує інтенсивність зміни тріщиностійкості (рис.2,б).



Ruc. 2.

Водночас при домінуванні умов плоскої деформації (за температури -100°C) впливу мод навантаження на в'язкість руйнування не спостерігалося.

Аналіз впливу ПТН на в'язкість руйнування за низьких температур засвідчив, що при змішаних модах (I+II+III), які характеризуються кутами нахилу зразка до осьового навантаження ($30^{\circ}, 30^{\circ}$), підвищення в'язкості руйнування при температурі -100°C на 20%, але зі збільшенням в навантаженні компонент поперечного і поздовжнього зсуву при кутах ($60^{\circ}, 60^{\circ}$) вплив ПТН на в'язкість руйнування зменшується. Отже, на основі отриманих результатів і аналізі існуючих даних передбачається, що основний вклад в ефект ПТН при змішаних модах руйнування вносить затуплення вершини тріщини за modoю I.

На основі виконаних експериментальних досліджень корпусної реакторної сталі 15X2НМФАА побудовано температурну залежність статичної тріщиностійкості при змішаних I+II+III модах деформування. Показано, що за умови розміру пластичної зони близької до умов плоскої деформації, в області низьких температур, в'язкість руйнування не залежить від співвідношення мод деформування. Умовні еквівалентні характеристики статичної тріщиностійкості, отримані за залежностями лінійно-пружної механіки руйнування, збільшуються з підвищеннем температури, проте зростання в навантаженні компонент поперечного і поздовжнього зсуву знижує інтенсивність зміни тріщиностійкості.

Експериментально і розрахунково встановлено збільшення в'язкості руйнування при змішаних I+II+III модах при температурі -100°C після попереднього термомеханічного навантаження при відповідному співвідношенні мод деформування. Зростання в навантаженні II і III моди зменшує вплив попереднього термомеханічного навантаження.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: в'язкість руйнування, змішанні моди деформування, тріщиностійкість, попереднє термомеханічне навантаження.

1. Ayatollahi, M.R., Mostafavi, M. Finite element analysis of a center crack specimen warm pre-stressed under different modes of loading // Comput. Mater. Sci. - 2007. **38**. – P.847–856.
2. Chell, G.G., Haigh, J.R., Vitek, V. A theory of warm prestressing: experimental validation and the implications for elastic plastic failure criteria// Int. J. Fracture – 1981. – 17. – P. 61–81.
3. Pokrovsky, V.V., Troschenko, V.T., Kaplunenko, V.G., Podkol'zin, V.Y., Fiodorov, V.G., Dragunov, Y.G. A promising method for enhancing resistance of pressure vessels to brittle fracture// Int. J. Pres. Ves. and Piping – 1994. 58, P.9–24.
4. Sidyachenko V., Pokrovskii V. Prediction of the effect of warm prestressing on the mixed mode fracture toughness of the reactor pressure vessel steels // Procedia Structural Integrity. – 2024. – **59**. –P.265-270.
5. Swankie, T.D., Smith, D.J. Low temperature mixed mode fracture of a pressure vessel steel subject to prior loading // Eng/ Fract. Mech. – 1998. – 61, P.387–405.
6. Richard H.A., Schramm M, Schirmeisen N.-H. Cracks on Mixed Mode loading. Theories, experiments, simulations // Int. J. Fatigue. – 2014. – **62**. – P.93–103.

V.G. Sidyachenko

EFFECT OF WARM PRESTRESING ON THE CRACKING RESISTANCE OF REACTOR STEEL IN MIXED MODES DEFORMATION

G.S. Pisarenko Institute for Problem of Strength of the National Academy of Sciences of Ukraine
Sadovo-botanichna Str., 2, 01014, Kyiv, Ukraine; e-mail: Sydiachenko@ukr.com

It was experimentally established, that the resistance to the development of cracks by the value of the equivalent characteristic of stress intensity factor in mixed I+II+III modes of deformation, increases with an increase in the test temperature, while the increase in the load of the transverse and longitudinal shear components reduces the intensity of the change in crack resistance. It was established that the increase in static fracture toughness, as a result of warm prestressing in mixed I+II+III modes decreases with the transition to transverse and longitudinal shear loading.

А.В.Кравчук^{1*}, Є.О. Кондряков¹, О.М. Масло¹, Н.М. Лобода^{1,2}, Руденко О.М.³

**ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-РОЗРАХУНКОВІ ДОСЛІДЖЕННЯ З ВИЗНАЧЕННЯ
МЕЖІ МІЦНОСТІ ПРИ ЗСУВІ КЛЕЙОВИХ З'ЄДНАНЬ**

¹*Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України,
бул. Садово-Ботанічна, 2, 01014, Київ, Україна;*

**e-mail: avdenago11@gmail.com*

²*Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна*

³*ТОВ "НДІЦА", вул. К.Білокур 4, оф.18. Київ, 01014, Україна*

В сучасних галузях промисловості, зокрема в автомобільній, аерокосмічній та будівельній клейові з'єднання знаходять широке застосування [8]. Основною перевагою таких з'єднань є можливість побудови конструкцій та їх герметизації з різних за природою матеріалів: металевих, полімерних, дерев'яних, скляних, керамічних та ін. Існує велика різноманітність клейів і герметиків, проте більшість з них мають за основу синтетичні та природні високомолекулярні сполуки. [1]. Більшість конструкційних клейів характеризується високою міцністю при зсувлі, разом з тим незначною міцністю при відриві, що слід враховувати при конструюванні виробів і зводити до мінімуму навантаження, напримок яких перпендикулярний з'єднанню. Також більшість літературних джерел свідчить про те, що міцність з'єднання зменшується зі збільшенням товщини клею [5]. Для отримання високої міцності з'єднання товщина клею повинна бути достатньо тонкою, в межах 0,1 - 0,5 мм, однак це залежить від типу клею. Для багатьох конструкційних клейів оптимальна товщина клею повинна бути в діапазоні 0,1 - 0,2 мм [4]. Для високопластичних клейів на основі поліуретану, товщина клею від 0,5 мм до 1 мм дає оптимальну міцність для алюмінієвих з'єднань [3].

Разом з тим, клейові з'єднання мають недоліки, обумовлені виникненням слабкого приграницяного шару, що призводить до втрати міцності. Причини утворення такого шару: порушення технології склеювання (відсутність знежирення, неправильний вибір способу нанесення, низька температура при використанні клейів-розплавів і т. ін.); неправильний підбір матеріалів; погана змочуваність субстрату; концентрація напружень в з'єднанні, яка викликана наявністю порожнин в клейовому шарі, що утворилися при нанесенні, зокрема через нерівності поверхні субстрату; нерівномірність клейового шару за товщиною, яка може бути викликана недостатнім тиском при отвердінні, поганим нанесенням, високою в'язкістю клею, нерівномірною дисперсією наповнювача і т. ін.; невідповідною товщиною клейового шару, яка обумовлена високою або дуже низькою в'язкістю клею, неправильною фіксацією з'єднання; прихованими дефектами в матеріалах, що склеюються (порожнини, тріщини, внутрішня напруга і т. ін.) [1].

Існує ще один суттєвий недолік клейових з'єднань, який призводить до втрати міцності конструкції при її тривалому використанні у вологому середовищі – гігроскопічність [7]. Поглинута вода погіршує механічні властивості клею і впливає на межу розділу клей-підкладка. Волога може потрапляти в клейове з'єднання кількома шляхами: проникаючи в об'єм клею, просочуючись на межі розділу фаз, капілярно проникаючи в мікропори та тріщини, а також поширюючись у проникній підкладці перед тим, як досягти клейового шару [2]. Особливо це актуально в умовах швидких змін температури, високої вологості або агресивного середовища.

Експериментальні дослідження впливу різних факторів на міцність клейових з'єднань за різних технологій виготовлення та умов експлуатації є актуальними в наш час. Проте за умов неможливості проведення великої кількості дороговартісних експериментів використовуються чисельні методи їх досліджень. Оцінка міцності клейових з'єднань з використанням методу скінченних елементів показує дуже високий рівень деталізації і точності результатів. Поєднання результатів експериментально-розрахункових досліджень може бути використане для проведення оцінки міцності реальних конструкцій, що працюють при екстремальних умовах навантаження [6].

В даній роботі проведено експериментальні дослідження міцності при зсувлі клейового з'єднання на основі багатокомпонентного поліуретану за температури -60°C , Такий тип з'єднань використовується в аерокосмічній галузі та повинен забезпечувати проектну міцність на висоті 12000 метрів. Експериментальні дослідження проводились проводились із використанням сервогідрравлічної випробувальної машини BISS-202V. Для випробувань при низьких температурах було розроблено спеціальну кліматичну камеру, що дозволяє проводити охолодження зразків зі швидкістю $0,35\ldots0,43^{\circ}\text{C}/\text{сек}$.

Чисельне моделювання за умов, що відтворюють експеримент, проводилось з використанням методу скінченних елементів. За результатами експериментально-розрахункових досліджень проводилось порівняння отриманих значень меж міцності клейового з'єднання двох пластин з алюмінієвого сплаву з анодованим покриттям.

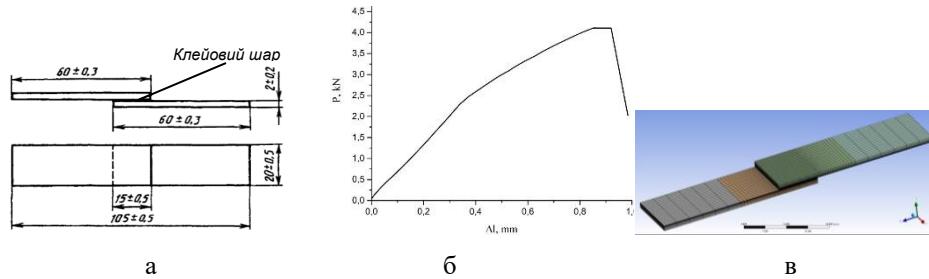


Рисунок 1. Геометричні розміри зразків клейового з'єднання (а), характерна діаграма руйнування клейового з'єднання (б), скінчено-елементна модель зразків (в)

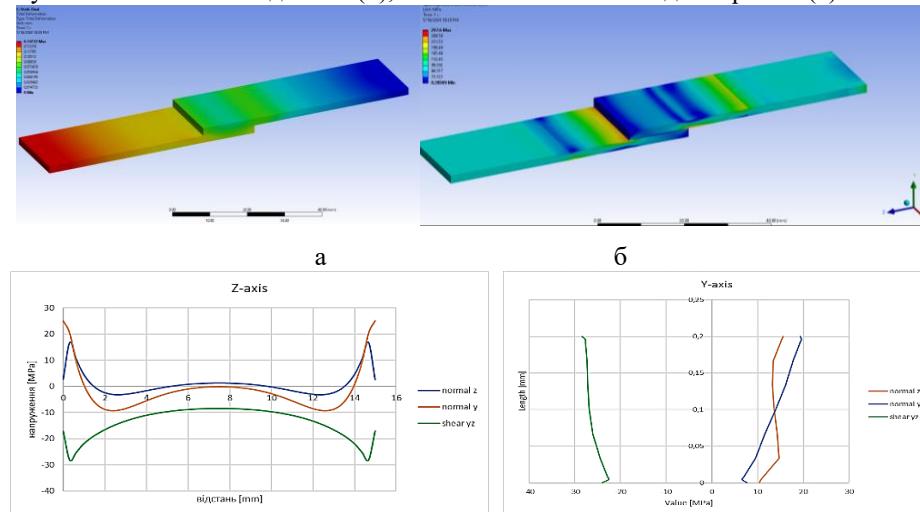


Рисунок 2. Поля розподілу еквівалентних деформацій (а) та напружень (б), розподіл напружень у клейовому шарі у поздовжньому (в) та поперечному (г) напрямках.

Геометричні розміри алюмінієвих зразків з клейовим з'єднанням, що було використано для експериментальних досліджень, показано на рис. 1,а. Типова експерим-

нтальна діаграма руйнування за температури -60°C наведена на рис. 1, б. Скінченно-елементна модель зразків показана на рис.1,в

Отримане за результатами експериментальних досліджень значення межі зсуву становить $t=13,14 \text{ MPa}$. За результатами чисельного моделювання досліджено напружене-деформований стан у клейовому шарі (рис. 2,а,б) та побудовано діаграми розподілу напружень у повздовжньому (рис. 2,в) та поперечному (рис. 2,г) перерізі.

За результатами чисельного моделювання отримано середнє значення дотичних напружень $t= 13,71 \text{ MPa}$. Отже, відмінність експериментальних та розрахункових результатів складає 4,4%. Цей результат свідчить про коректність умов проведення як експериментальних досліджень, так і чисельного моделювання, що може бути використано для подальших досліджень з урахуванням більш складних процесів деформування та руйнування клейових з'єднань, в тому числі у реальних елементах конструкцій.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: межа міцності при зсуві, клейове з'єднання, метод скінченних елементів

1. Технологія склеювання та герметизації : навчальний посібник / Черкашина Г. М., Авраменко В. Л., Підгорна Л. П. та ін. Харків : Друкарня Мадрид, 2021. 199 с. ISBN 978-617-7988-84-6
2. Adams R D, Cowap J W, Farquharson G, Margary G M and Vaughn D 2009 The relative merits of the Boeing wedge test and double cantilever beam test for assessing the durability of adhesively bonded joints, with particular reference to the use of fracture mechanics International Journal of Adhesion and Adhesives 29 609–20
3. Boutar Y, Naïmi S, Mezlini S, da Silva L F M, Hamdaoui M and Ali M B S 2016 Effect of adhesive thickness and surface roughness on the shear strength of aluminium onecomponent polyurethane adhesive single-lap joints for automotive applications Journal of Adhesion Science and Technology 30(17) 1913–29
4. Gleich D M, Van Tooren M J L and Beukers A 2001 Analysis and evaluation of bondline thickness effects on failure load in adhesively bonded structures Journal of Adhesion Science and Technology 15(9) 1091–1101
5. Kahraman R, Sunar M. and Yilbas B. Influence of adhesive thickness and filler content on the mechanical performance of aluminum single-lap joints bonded with aluminum powder filled epoxy adhesive Journal of Materials Processing Technology 2008, 205 183–9
6. Thomas S. Methfessel, Wilfried Becker A geometrical parameter study of the analytical stress calculation in adhesive joints with thick bonding layers Proc. Appl. Math. Mech. 2022;22:1 p. 1-6 DOI: 10.1002/pamm.202200043
7. Sugiman S, Salman S, Setyawan P.D., Sulardjaka S, Materials Science and Engineering (2019) 012007 doi:10.1088/1757-899X/532/1/012007
8. Hart-Smith L. J., Analysis and Design of Advanced Composite Bonded Joints (NASA Langley Contract Report, NASA CR- 2218, 1973a).

A.V. Kravchuk^{1*}, E.O. Kondriakov¹, O.M. Maslo¹, N.M. Loboda^{1,2}, Rudenko O.M.³

EXPERIMENTAL AND NUMERICAL STUDIES TO DETERMINE THE SHEAR STRENGTH OF ADHESIVE JOINTS

¹G.S. Pisarenko Institute for Problems of Strength NAS of Ukraine,
Sadovo-Botanichna Str., 2, 01014, Kyiv, Ukraine;

*e-mail: avdenago11@gmail.com

²National Technical University of Ukraine 'Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute',
Beresteysky ave. 37 03056, Kyiv, Ukraine

³ LLC "Scientific & Research Engineering Center for the Valve Industry" (LLC S&R ECVI),
K. Bilokur Str., 4, office 18, 01014, Kyiv, Ukraine;

This study investigates the shear strength of polyurethane-based adhesive joints at -60°C . Experimental tests were conducted using a BISS-202V servo-hydraulic testing machine with a custom-designed climate chamber. Finite element analysis was employed to model the experiment conditions. The results showed good agreement between experimental and numerical methods, with only a 4.4% difference in shear strength values, validating the approach for future research on complex deformation and failure processes in adhesive joints.

П.О. Булах, В.П. Швець, О.М. Масло

**ВПЛИВ РІВНЯ РОЗСІЯНИХ ПОШКОДЖЕНЬ НА ФІЗИКО-МЕХАНІЧНІ
ВЛАСТИВОСТІ СТАЛЕЙ В УМОВАХ ПЛОСКОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ**

*Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка Національної академії наук України,
бул. Садово-Ботанічна, 2, 01014, Київ, Україна;
e-mail: pavelbulakh@gmail.com*

Для процесу накопичення розсіяних мікродефектів у структурі конструкційного матеріалу та її деградації під впливом експлуатаційних термосилових навантажень характерні такі два основних явища як зародження мікродефектів та зростання їх розмірів, що протікають одночасно. Результатом такого процесу є зниження фізико-механічних властивостей матеріалу, виникнення макротріщини та, як наслідок, руйнування конструкції в процесі пружно-пластичного деформування матеріалу супроводжується постійним ростом та об'ємним розсіянням розсіяних по об'єму всього тіла дефектів та мікротріщин.

З ряду досліджень відомо [1, 2] про вплив різних типів пошкодження структури на механічні характеристики. Так, розсіяння значень границі міцності пов'язані головним чином з пошкодженнями, що виникають внаслідок розпушування і відриву матеріалу, тоді як пошкодження зсувою природи впливають на значення границі текучості.

Розсіювання значень характеристик пружності, таких як модуль пружності I роду, також обумовлене впливом пошкодженням структури різних типів.

Рівень накопичених розсіяних пошкоджень можна оцінити за зміною ефективної несівної площини поперечного перерізу у деякому малому мікрооб'ємі матеріалу під впливом процесів перерозподілу мікродефектів, який безперервно відбувається під дією зовнішнього термосилового навантаження. На макрорівні рівень пошкоджень можна оцінити за зміною модуля пружності при пружно-пластичному деформуванні, відповідно до гіпотези Ж. Леметра [5].

Постулат про еквівалентність пружної енергії для пошкодженого та непошкодженого станів дає нам можливість оцінити параметр пошкодження за допомогою гіпотези про деградацію модуля пружності у формулюванні [6] :

$$D_E = 1 - \sqrt{\frac{E_i}{E_0}}$$

де E_i – поточне значення модуля пружності при розвантаженні; E_0 – вихідне значення модуля пружності.

Модуль пружності першого роду вважається константою матеріалу, оскільки пружна деформація відбувається лише за рахунок зміни міжатомних відстаней, тобто пружного зміщення атомів з положення рівноваги в кристалічній решітці і не змінює структуру металу. Проте локальні пластичні деформації, які виникають раніше, ніж напруження у металі досягнуть границі текучості, призводять до зміни модуля пружності навіть на пружній ділянці кривої деформації що є причиною пружної післядії і релаксації [4].

Окрім модуля пружності I роду E , інтегральною характеристикою механічних властивостей та структурного стану матеріалу також є твердість матеріалу.

Перебудова структури металу і, як наслідок, збільшення дефектів, що відбувається в результаті пластичної деформації, знижує модуль пружності. Після кожної такої перебудови структури на площині текучості метал повертається до пружного стану, але вже з іншими пружними властивостями [1, 3]. В свою чергу, зменшення однорідності структури матеріалу, що характеризується коефіцієнтом гомогенності m [7] в умовах циклічного навантаження добре корелює із деградацією модуля пружності I роду E .

Таким чином коефіцієнт гомогенності m , як і модуль пружності I роду E є чутливим до зміни структурного стану параметрами, які для деформованого матеріалу відрізняються від свого вихідного значення, внаслідок накопичення у матеріалі розсіяних пошкоджень різної природи, що виникають при його опорі дії як дотичних, так і нормальніх напружень та можуть використовуватися як параметр, що застосовується для оцінки пошкоджуваності металу конструкцій.

Для вивчення впливу виду напруженого стану на кінетику зміни модуля пружності та коефіцієнта гомогенності використовували результати випробувань тонкостінних трубчастих зразків із сталі 10ГН2МФА при різних співвідношеннях головних напружень.

Для зручності аналізу вираз для розрахунку параметра пошкоджуваності застосовувався у вигляді:

$$D_m = 1 - \sqrt{\frac{m_i}{m_0}}$$

де m_0 – величина коефіцієнта гомогенності металу зразка у вихідному стані перед початком випробувань; m_i – значення коефіцієнта гомогенності, що отримані на основі обробки результатів вимірювань твердості після встановленої кількості циклів навантаження зразка.

З отриманих експериментальних даних видно, що для всіх реалізованих видів навантаження, величина пошкоджуваності виражена як через модуль пружності так і через коефіцієнт гомогенності в міру напрацювання збільшується. Про це свідчать дані представлені на рис. 1.

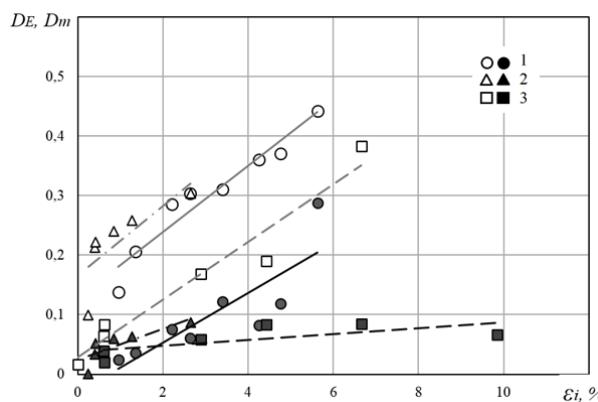


Рис.1 – Залежність накопичення пошкоджень від деформації для сталі 10ГН2МФА: темні точки - через зміну модуля пружності E ; світлі точки - через зміну коефіцієнта гомогенності m : 1 – одновісний розтяг ($K = \sigma_z/\sigma_\theta = \infty$); 2 – рівномірний двовісний розтяг ($K = 1$); 3 – нерівномірний двовісний розтяг ($K = 0,5$)

Виходячи з отриманих даних про кінетику пошкоджуваності металу (рис.1), можна зробити висновок, що залежно від співвідношення головних напружень величина пошкоджуваності буде різна. Так, в умовах нерівномірного двовісного розтягу величини пошкоджуваності дещо вищі ніж при рівномірному та при одновісному розтязі, що ймовірно пов'язано з меншою величиною граничної деформації втрати

стійкості пластичного деформування в умовах $K = 0,5$ у порівнянні із величинами граничної деформації при $K=1$ та $K=\infty$.

При нерівномірному двовісному розтязі здатність сталі чинити опір руйнуванню від втоми значно знижується в порівнянні з одновісним та рівномірним двовісним розтягом. В умовах двовісного розтягу криві пошкоджуваності зміщуються в область більших значень, ніж при одновісному розтязі, що свідчить про зниження опору циклічній повзучості сталі 10ГН2МФА. Таким чином, накладення другої компоненти напружень, приводить до підвищення здатності металу чинити опір циклічній повзучості й одночасно дещо знижує опір руйнуванню від втоми порівняно з цими ж характеристиками за умов одновісного пульсуочного розтягу.

Отримані результати дослідження дозволяють стверджувати, що зміна величини коефіцієнта гомогенності m та модуля пружності першого роду E , отриманих в умовах циклічного навантаження, при різних співвідношеннях головних напружень циклу вказує на більш ранню інтенсифікацію пошкоджуваності металу в умовах двовісного навантаження в порівнянні з одновісним.

Таким чином, ефективність достатньо простого у застосування методу LM-твердості при оцінці поточного стану матеріалів може дозволити істотно спростити отримання експериментальних даних необхідних для розрахунків довговічності елементів конструкцій, що працюють в умовах малоциклового навантаження. Проведені дослідження показали, що при рівні деформації матеріалу яких перевищує величину деформації при границі пропорційності, модуль пружності першого роду та параметр гомогенності матеріалу мають кореляційний зв'язок, наближений до прямо пропорційної залежності.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: метод LM-твердості, твердість, модуль пружності, граничний стан, малоциклова втома, тепlostійка сталь, пошкоджуваність.

1. Горб М. Л., Карпинос Д. М., Островский А. А. Экспериментальное исследование влияния деформационной анизотропии на упруго-пластические свойства тонколистовой стали . Пробл. прочности. 1970. № 7. С. 25 – 30.
2. Лебедев А. А., Маковецкий И. В., Музыка Н. Р., Волчек Н. Л., Швец В. П. Оценка поврежденности материала по рассеянию характеристик упругости и статической прочности. Проблемы прочности. 2006. № 2. С. 5–14.
3. Лебедев А. А., Чаусов Н. Г., Богинич И. О. и др. Влияние размера зерна на рост поврежденности металла при пластическом деформировании. Пробл. прочности. 1997. №5. С. 5 – 13.
4. Скрипник Ю.Д. Определение некоторых упругих характеристик материалов при помощи параболической интерполяции диаграмм деформирования // Проблемы прочности. – 1982. - № 11. – С. 86-89.
5. Lemaitre J., Chaboche J.-L. Mechanics of Solid Materials. Cambridge University Press, 1990. 584 p.
6. Marcilio A. On the elastic modulus degradation in continuum damage mechanics / A. Marcilio, Y. Jilin, J. Norman. // Computers and Structures. – 2000. – №76. – С. 703–712.
7. Pavlo Bulakh Experimental validation of the assessment of the limit state of heat-resistant steels by the LM-hardness method // Procedia Structural Integrity, Volume 59, 2024, Pages 253-258.

V.P. Shvets, P.O. Bulakh, O.M. Maslo

INFLUENCE OF THE LEVEL OF DISTRIBUTED DAMAGE ON THE PHYSICAL AND MECHANICAL PROPERTIES OF STEEL UNDER PLANE STRESS STATE

*G.S. Pisarenko Institute for Problems of Strength
of the National Academy of Sciences of Ukraine;
2 Sadovo-Botanichna str., Kyiv-014, 01014, Ukraine;
e-mail: pavelbulakh@gmail.com*

It is shown in the study that when material deformations exceed the proportionality limit, the modulus of elasticity of the material and the homogeneity parameter of the structure according to the LM-hardness method are correlated.

О.С.Богданова¹

**ВПЛИВ ДВОВІСНОСТІ НАВАНТАЖЕННЯ НА ГРАНИЧНИЙ СТАН
ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ПЕРІОДИЧНОЮ СИСТЕМОЮ
КОЛІНЕАРНИХ ТРІЩИН**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: o.bogdanova@i.ua*

Розглядається нескінчена тонка ортотропна пластина, ослаблена періодичною системою тріщин (роздрізів) довжини $2l$, розташованих уздовж дійсної осі Ox , з центрами в точках $x_n = \pm 2nD$, $y=0$. Оси ортотропії матеріалу паралельні до осей Ox та Oy . Береги роздрізів вільні від навантаження, а на нескінченності діє однорідне двовісне навантаження $\sigma_y = p > 0$, $\sigma_x = q$, $\tau_{xy} = 0$, $z \rightarrow \infty$ ($z=x+iy$). Матеріал пластини задовольняє умові міцності загального вигляду $F(\sigma_1, \sigma_2, C_i) = 0$. У роботі не накладаються будь-які обмеження на вигляд поверхні міцності, чисельні результати отримано на прикладі умови міцності Мізеса-Хілла.

Під впливом зовнішніх навантажень на продовженні тріщин виникають зони передруйнування, напруження в яких задовольняють умові міцності. Замінimo ці зони додатковими розрізами довжини d , до берегів яких прикладені напруження σ_x^0, σ_y^0 . Внаслідок симетрії задачі напрямки x, y є головними, тому напруження σ_x^0, σ_y^0 задовольняють умові міцності. Отримана гранична задача розв'язується методом комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі. За допомогою перетворення $w = \sin(\pi z/2D)$ [3] переїдемо від площини $z = x + iy$ на параметричну площину $w = \tilde{x} + i\tilde{y}$. При цьому зовнішність періодичної системи розрізів площини z переїде на нескінченнолистну риманову поверхню з одним розрізом $(-\sin(\pi L/2D); \sin(\pi L/2D))$. Використовуючи вирази для комплексних потенціалів, отримані в [1] для площини з одним розрізом, отримуємо вирази комплексних потенціалів для задачі з періодичною системою тріщин.

З умови обмеженості напружень у всій площині отримуємо співвідношення для визначення розміру зони передруйнування в залежності від параметрів навантаження та геометрії задачі:

$$\sin \frac{\pi l}{2D} / \sin \frac{\pi L}{2D} = \cos \frac{\pi p}{2\sigma_y^0}, \quad L = l + d, \quad (1)$$

При досягненні довжиною зони передруйнування значення $D - l$ відбувається злиття зон передруйнування двох сусідніх тріщин, тобто умова

$$d = D - l, \text{ або } \frac{D}{l} = \frac{\pi}{2 \arcsin \left(\cos \left(\pi p / 2\sigma_y^0 \right) \right)} \quad (2)$$

є однією з умов граничного стану пластини, послабленою системою колінеарних тріщин. На рис.1 наведено криві, визначені на підставі умови (2) для $D/l=1.5$ (крива 1),

5.0 (крива 2), 10.0 (крива 3). Суцільні лінії відповідають $\sqrt{E_1/E_2} = 0,3$, пунктирні – $\sqrt{E_1/E_2} = 0,9$. Крива 4 відповідає кривій міцності пластиини без тріщин.

На підставі представлень напружень через комплексні потенціали [2] знаходимо вирази напруження σ_x^0 через напруження σ_y^0 :

$$\sigma_x^0 = \sqrt{E_1/E_2} (\sigma_y^0 - p) + q, \quad (3)$$

яке разом із умовою міцності утворюють замкнуту систему двох лінійних рівнянь для визначення напружень у зонах передруйнування σ_x^0, σ_y^0 . Очевидно, що напруження σ_x^0, σ_y^0 не залежать від геометричних параметрів задачі, а визначаються лише зовнішнім навантаженням та умовою міцності матеріалу.

Скориставшись виразом переміщень через комплексні потенціали [2], знаходимо переміщення берегів тріщин і, отже, розкриття у вершинах тріщин $|x - x_n| = l, y = 0$:

$$\delta(l) = 2v(l) = \frac{4T_0}{\pi} \sigma_y^0 \sin \frac{\pi l}{2D} \ln \sec \frac{\pi p}{2\sigma_y^0}, \quad T_0 = \frac{1}{\sqrt{E_1 E_2}} \sqrt{2 \left(\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} - \nu_{12} \right) + \frac{E_1}{G_{12}}}. \quad (4)$$

Якщо за критерій руйнування вибрати критерій критичного розкриття тріщини, то тріщини почнуть розвиватися, коли розкриття у вершині досягне деякого граничного значення $\delta(l) = \delta_c$. Тоді на підставі (4) поле граничних навантажень (p_*, q_*) визначається співвідношенням

$$\frac{4T_0 \sigma_y^0(p_*, q_*)}{\pi} \sin \frac{\pi l}{2D} \ln \sec \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*, q_*)} = \delta_c, \quad (5)$$

або, якщо виразити δ_c через граничне навантаження при одновісному розтягу $p_*^{(0)}$

$$\sigma_y^0(p_*, q_*) \ln \cos \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*, q_*)} = \sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0) \ln \cos \frac{\pi p_*^{(0)}}{2\sigma_y^0(p_*^{(0)}, 0)}. \quad (6)$$

Значення J -інтегралу у нашому випадку [4]:

$$J = - \int_0^\delta \sigma_y d\delta = \sigma_y^0 \delta(l) = \frac{4T_0 (\sigma_y^0)^2}{\pi} \sin \frac{\pi l}{2D} \ln \sec \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0}. \quad (7)$$

Якщо за критерій руйнування прийняти критичне значення J -інтегралу J_c , то граничне навантаження p_* визначається співвідношенням

$$\frac{4T_0 (\sigma_y^0(p_*, q_*))^2}{\pi} \sin \frac{\pi l}{2D} \ln \sec \frac{\pi p_*}{2\sigma_y^0(p_*, q_*)} = J_c. \quad (8)$$

Таким чином, граничний стан площини, ослабленої системою тріщин, визначається сукупністю умов (2) і (5) (або (2) і (8)). На рис. 2 представлени крива міцності бездефектного матеріалу (крива 5) і криві граничного стану пластиини, ослабленої системою колінеарних тріщин при $D/l = 5,0$. Криві 1 відповідають $p_*^{(0)}/\sigma_{0y} = 0,1$, криві 2 – $p_*^{(0)}/\sigma_{0y} = 0,5$, криві 3 – $p_*^{(0)}/\sigma_{0y} = 0,7$. Суцільні ділянки відповідають граничному навантаженню, визначеному по δ_c -критерію, пунктирні – по J_c -критерію. Крива 4 відповідає навантаженню, при якій відбувається злиття зон передруйнування (умова (2)).

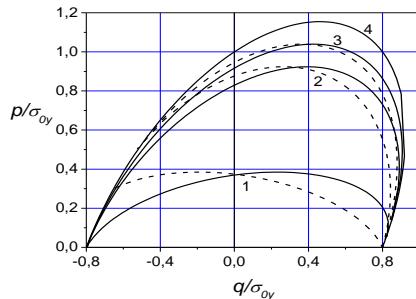


Рис.1

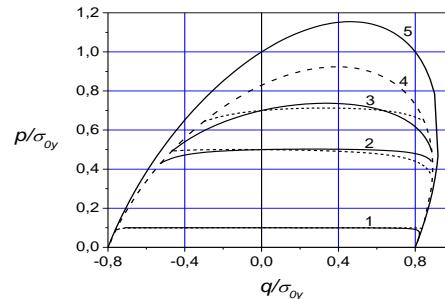


Рис.2

Отримані результати дозволяють зробити наступні висновки:

1. при збільшенні відстані між тріщинами зменшується їх взаємний вплив, причому, чим вищий рівень зовнішнього навантаження, то діє перпендикулярно лінії розташування тріщин, тим довше позначається наявність сусідніх тріщин на процес формування зон передруйнування;
2. наявність компоненти зовнішнього навантаження, що діє вздовж лінії розташування тріщин, істотно впливає на розмір зон передруйнування, причому ця компонента може як збільшувати, так і зменшувати розмір цих зон у порівнянні з одновісним розтягом;
3. граничний стан пластиини, послабленої системою тріщин, визначається як критеріями руйнування типу δ_c - або J_c - критеріїв, так і умовою злиття зон передруйнування – для довільної довжини тріщини існує така комбінація зовнішнього навантаження, що діє вздовж та перпендикулярно до лінії розташування тріщин, при якій відбувається злиття зон передруйнування сусідніх тріщин;
4. наявність компоненти зовнішнього навантаження, що діє вздовж лінії розташування тріщин, істотно впливає на граничний стан пластиини в порівнянні з одновісним розтягом, причому цей вплив тим сильніше, чим вище граничне навантаження при одновісному розтягу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: руйнування, ортотропна пластина, двовісне навантаження, узагальнена модель Дагдейла, граничний стан, періодична система тріщин.

1. Каминский А.А., Богданова О.С. Моделирование процесса разрушения ортотропных материалов при двухосном нагружении // Прикл. механика. – 1996. – т.32, № 10. – С.81-87.
2. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела.-М.:Гостехиздат,1950.-299 с.
3. Парトン В.З., Морозов Е.М. Механика упруго-пластического разрушения.-М.:Наука,1974,-416 с.
4. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения.-М.:Наука,1974.-640 с.

O.S.Bogdanova¹

ON INFLUENCE OF BIAXIAL LOADING ON THE LIMIT STATE OF ORTHOTROPIC PLATE WITH A PERIODIC SYSTEM OF COLLINEAR CRACKS

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: o.bogdanova@i.ua

Based on the modified Dugdale model, the limit state of an orthotropic plate whose material satisfies the general strength condition weakened by a periodic system of collinear cracks under biaxial loading was investigated. General solution to the problem, the basic equations for determining stresses in failure zones, size of failure zones and geometric parameters were obtained. The effect of biaxial loading on the process of failure zone formation and the limit state of the plate were studied.

**А. В. Кравчук^{1,5*}, Г. В. Чижик^{1,5}, О. М. Полярус^{2,5}, Р. В. Кравчук¹,
Ю. О. Вронська^{3,5}, Г. В. Приходько^{4,5}**

**МЕТОДИКА ОЦІНКИ МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК НОВИХ СПЛАВІВ
НА ОСНОВІ НІТРИДІВ МЕТАЛІВ (TiN, ZrN, NbN, Cr₂N, AlN) ТА ІНТЕРМЕТА-
ЛІДІВ, NiAl, NiTi, Ni₃Ti, ЩО ЗАСТОСОВУЮТЬСЯ ДЛЯ ОТРИМАННЯ МЕ-
ТАЛО-МАТРИЧНИХ КОМПОЗИТІВ**

¹Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, вул. Садово-Ботанічна 2,
04014 Київ, Україна

*e-mail: avdenago11@gmail.com

²Інститут проблем матеріалознавства ім. І. М. Францевича НАН України, вул. Омеляна
Пріцака 3, Київ, 03142 Київ, Україна

³Інститут металофізики ім. Г. В. Курдюмова НАН України, б-р Академіка Вернадського 36,
03142 Київ, Україна

⁴Луцький національний технічний університет, вул. Львівська 75, 43018 Луцьк, Україна

⁵Інститут металургії та матеріалознавства ім. Александра Крупковського Польської ака-
demii наук, вул. Реймонта 25, 30-059 Krakів, Польща

Одним зі шляхів підвищення ресурсу роботи деталей та елементів конструкцій відповідального обладнання є нанесення захисних покріттів, стійких до впливу експлуатаційних чинників. Основними вимогами, що висуваються до конструктивних елементів та покріттів є довговічність, надійність, зносостійкість, висока міцність, термостійкість, корозійна стійкість в агресивних середовищах та ін. Традиційно в промисловості застосовувались конструкційні матеріали на основі заліза, титану, нікелю та алюмінію.

Проте в 2000-х роках було відкрито сплави [7, 8], які містили у своєму складі від 5 до 13 елементів в рівних долях або близьких до еквімолярних пропорціях, з унікальними властивостями в порівнянні з традиційними. Вони можуть одночасно мати високу міцність, твердість, стійкість в корозійних середовищах, зносостійкість та стійкість до високотемпературного окислення. Ці сплави отримали назву високоентропійних (ВЕС) через те, що їхня ентропія змішування перевищує значення 1,5 R (R – молярна газова константа). Це відкриття дало поштовх у розвитку матеріалознавства в останні два десятиліття та на даний час має високий науковий, дослідницький та інженерний потенціал [1, 2].

Високі механічні характеристики ВЕС дозволяють їх використання в різноманітних галузях промисловості, зокрема як твердосплавні наплавки для ріжучого інструменту, покриття поверхні прес-форм, вогнетривкі капсули аварійних боксів надвисоких будівель, корозійностійкі покриття механізмів хімічної промисловості, покриття деталей авіадвигунів, лопаток турбін, зносостійкі покриття, ремонтні (наплавні) покриття у зношених деталях механізмів машин, а також у мікроелектроніці та медицині. ВЕС в свою чергу діляться на два класи: ентропійні сплави на основі легкосплавних чи тугоплавких металів та композитні ВЕС. Останні мають дещо вищі характеристики твердості та зносостійкості. Для ВЕС композитного класу при формуванні метало-матричних композитів характерне додавання їх, як зміцнюючої фази.

Однією з задач роботи є розробка нових метало-матричних композитних покріттів на основі інтерметалідних сплавів еквіатомного складу, де в якості армуючої складової застосовуються середньо та високоентропійні нітриди. Для реалізації поставленої задачі – створення композитів з необхідними функціональними параметрами, важливим є отримання коректних даних щодо фізико-механічних характеристик їх

складових. Такі дані разом з комплексними металофізичними та фізико-хімічними дослідженнями є основою для прогнозування надійності та довговічності метало-матричних композиційних покривів.

З огляду на вищезазначене, метою даного дослідження є розробка методики визначення механічних властивостей інтерметалідних сплавів та ентропійних нітридів, а також метало-матричних композитів, утворених з них.

Складність таких досліджень полягає у новизні та різноманітності матеріалів, для яких не існує нормативних документів, які б могли регламентувати методи досліджень, а також відсутності затвердженого переліку механічних характеристик необхідних для опису якості розробленого матеріалу. окрім випробувань на стиск та згин для дослідження таких матеріалів розвивають сучасні методики, що дозволяють визначення граници міцності та модуля пружності: до них належать інструментоване мікроіндентування [6] та індентування [3], а також продавлювання дискових мікророзрязків (small punch test) [5]. Для визначення залежності модуля пружності від температури використовується динамічний механічний аналіз [4].

В роботі розроблено методику оцінки механічних характеристик нових матеріалів на основі нітридів металів: TiN, ZrN, NbN, Cr₂N, AlN та інтерметалідів: NiAl, NiTi, Ni₃Ti, що застосовуються для формування метало-матричних композитів. Дані методики включають випробування на стиск та згин в діапазоні температур 20...1000 °C в атмосферному середовищі, визначення модуля пружності та мікротвердості за результатами мікроіндентування при кімнатних температурах, а також коефіцієнту тертя та характеристики зносу в сухому та вологому середовищі за результатами мікротрибологічних досліджень.

Спроектоване спеціальне устаткування та розроблена методика дозволила визначити та провести аналіз механічних характеристик інтерметалідів NiAl, NiTi, Ni₃Ti, а також середньоентропійного нітриду (TiZrNb)N, та високоентропійного нітриду (TiZrCrAlNb)N, злитки яких показані на рис. 1. Показано відмінності між досліджуваними матеріалами за границею міцності при стиску, згині, модулем пружності, мікротвердістю, коефіцієнтом тертя та зносостійкістю у сухому та вологому середовищі.



Рисунок. 1. Злитки інтерметалідів NiAl, (а) NiTi, (б) Ni₃Ti(в), середньоентропійного нітриду (TiZrNb)N (г), високоентропійного нітриду (TiZrCrAlNb)N (д)

Дослідження виконані в рамках міжнародного проекту «Development of new MMCs coating based on NiAl, NiTi intermetallic matrix reinforced with high entropy nitrides (Cr, Zr, Nb, V, Al, Ti)N» – міжнародної довгострокової програми підтримки українських дослідницьких груп в Польській академії наук, що реалізується у співпраці з Національною академією наук США за підтримки зовнішніх партнерів (реєстраційний номер проекту: PAN.BFB.S.BWZ.355.022.2023).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: Інтерметаліди, середньоентропійний нітриди, високоентропійний нітриди, випробування на стиск, наноіндентування, мікротвердість, макротвердість.

1. Аналіз критеріїв формування високоентропійних сплавів на основі тугоплавких металів/ Владзієвська П. А. // Кваліфікаційна робота магістра - Суми 2020, <https://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/81684>
2. Формування структури багатокомпонентного AlFeCrTiMoCoNi сплаву під час механічного легування/ Духота Д. Г.// Дипломна робота на здобуття ступеня бакалавра Київ 2021 <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/52702>
3. Analysis of the methods for determination of strength characteristics of NPP main equipment metal from the results of hardness and indentation measurements / V.V. Kharchenko, O.A Katok, R.V. Kravchuk, et. al. // Procedia Structural Integrity 36, 59-65
4. Grib, S.V., Ivasishin, O.M., Illarionov, A.G. et al. «Influence of cold plastic deformation on the structure and physicomechanical properties of the biocompatible low-modulus Zr₅₁Ti₃₁Nb₁₈ alloy», Phys. Metals Metallogr. 120, 790–795 (2019). <https://doi.org/10.1134/S0031918X19080040>
5. García T.E., Rodríguez C., Belzunce F.J., Suárez C., «Estimation of the mechanical properties of metallic materials by means of the small punch test.» Journal of Alloys and Compounds Volume 582, 5 January 2014, Pages 708-717 <https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2013.08.009>
6. Jõgiaas T., Zabels R., Tarre A., Tamm A. «Hardness and modulus of elasticity of atomic layer deposited Al₂O₃-ZrO₂ nanolaminates and mixtures» Materials Chemistry and Physics Volume 240, 15 January 2020, 122270 <https://doi.org/10.1016/j.matchemphys.2019.122270>
7. Microstructural development in equiatomic multicomponent alloys /B. Cantor, I. Chang, P. Knight, A. Vincent// Materials Science and Engineering: A. – 2004. – Vol. 375 – 377. – P. 213 – 218
8. Nanostructured high-entropy alloys with multiple principal elements; novel alloy design concepts and outcomes / J. W. Yeh, S. K. Chen, S. J. Lin et. al. // J. Adv. Eng. Mater. – 2004. – Vol. 6 (5). P. 299 – 303.

**A.V. Kravchuk^{1,5*}, G. V. Chyzyk^{1,5}, O. M. Poliarus^{2,5}, R. V. Kravchuk¹
Y. O. Vronksa^{3,5}, H. V. Prykhodko^{4,5}**

METHOD OF EVALUATION OF MECHANICAL CHARACTERISTICS OF NEW ALLOYS BASED ON METAL NITRIDES (TiN, ZrN, NbN, Cr₂N, AlN) AND NiAl, NiTi, Ni₃Ti INTERMETALLICS USED FOR THE CREATION OF METAL-MATRIX COMPOSITES

¹G.S. Pisarenko Institute for Problems of Strength NAS of Ukraine,
Sadovo-Botanichna Str., 2, 01014, Kyiv, Ukraine

*e-mail: avdenago11@gmail.com

²Frantsevich Institute for Problems of Materials Science NAS of Ukraine,
Omelyana Pritsaka St., 3, 03142 Kyiv, Ukraine

³G. V. Kurdyumov Institute for Metal Physics of the NAS of Ukraine,
Academician Vernadsky Blvd, 36, 03142 Kyiv, Ukraine

⁴Lutsk National Technical University, Lvivska St., 75, 43018 Lutsk, Ukraine

⁵Instytute of Metallurgy and Materials Scienece Polish Academy of Scienses,
25 Reymonta Str. 30-059 Krakow, Poland

The paper presents comprehensive experimental studies to determine the mechanical characteristics of intermetallics, medium- and high-entropy nitrides. The experimental analysis studies of intermetallics NiTi, Ni₃Ti, NiAl, medium-entropy nitride (TiZrNb)N and high-entropy nitride (TiZrCrAlNb)N were carried out. The research results include determination of the compressive and bending strength, elastic modulus, microhardness, and tribological properties. The research results allow comparing different materials with the same characteristics obtained using the same experimental equipment

В.Л. Богданов¹, О.І. Лесик¹

**КОЕФІЦІЕНТИ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ В ПОПЕРЕДНЬО
НАПРУЖЕНИЙ ПІВПЛОЩИНІ З ПРИПОВЕРХНЕВОЮ ТРІЩИНОЮ
НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ**

*¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
бул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: bogd1965@gmail.com*

В роботі розглянуто плоску задачу механіки руйнування півплощини з приповерхневою тріщиною нормальноговідриву за дії спрямованих вздовж тріщини початкових (залишкових) напруженень. В рамках підходу лінеаризованої механіки деформівного твердого тіла виконано математичну постановку крайової задачі, із застосуванням представлень загальних розв'язків через потенціальні гармонічні функції та з використанням апарату інтегральних розкладів Фур'є її зведене спочатку до парних інтегральних рівнянь, а потім до системи неоднорідних інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. З аналізу асимптотичного розподілу напружень біля вершини тріщини отримано аналітичні вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень та зроблено висновки щодо їх залежності від початкових (залишкових) напружень та впливу на них взаємодії тріщини та вільної межі півплощини. Також зроблено висновок про збіг порядку сингулярності в розподілі напружень біля тріщини в задачі, що розглядається, з тим, який мали в плоскій задачі для півплощини з тріщиною за відсутності початкових напруженень.

Розглянемо півплощину $y_2 \geq -h$ з початковими напруженнями S_{11}^0 , які діють вздовж площин $y_2 = \text{const}$. Під дією початкових напружень в тілі виникає однорідний напружене-деформований стан вигляду

$$S_{ii}^0 = \text{const}, S_{22}^0 = 0, S_{11}^0 \neq 0, S_{33}^0 \neq 0, \\ u_i^0 = \lambda_i^{-1}(\lambda_i - 1)y_i, \lambda_i = \text{const} \quad (i = 1, 2, 3),$$

де λ_i – коефіцієнти подовження (чи скорочення) вздовж координатних осей, викликані початковими напруженнями. Півплощина містить на лінії $y_2 = 0$ плоску тунельну тріщину довжиною $2a$, яка є нескінченною в напрямі осі Oy_3 і займає область $-a \leq y_1 \leq +a$. На берегах тріщини діють рівномірно розподілені нормальні навантаження інтенсивності $\sigma(y_1)$, направлені перпендикулярно до лінії розташування тріщини; границя півплощини вільна від напруженень.

В [2] наведено подання загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції, які у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння ($n_1^* \neq n_2^*$) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial}{\partial y_1}(\varphi_1 + \varphi_2), u_2 = m_1^*(n_1^*)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + m_2^*(n_2^*)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}, \\ Q'_{21} &= C_{44}^* \frac{\partial}{\partial y_1} \left[d_1^*(n_1^*)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + d_2^*(n_2^*)^{-1/2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \right], \\ Q'_{22} &= C_{44}^* \left(d_1^* l_1^* \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z_1^2} + d_2^* l_2^* \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_2^2} \right), z_1 = (n_1^*)^{-1/2} y_2, z_2 = (n_2^*)^{-1/2} y_2. \\ n_{1,2}^* &= a' \pm \sqrt{a'^2 - \frac{\omega'_{2222}\omega'_{2112}}{\omega'_{1111}\omega'_{1221}}}, \\ 2\omega'_{1111}\omega'_{1221}a' &= \omega'_{1111}\omega'_{2222} + \omega'_{2112}\omega'_{1221} - (\omega'_{1122} + \omega'_{1212})^2. \end{aligned} \quad (1)$$

де u_α компоненти вектора переміщень, викликаних додатковими напруженнями Q'_{ij} , а $\omega'_{ij\alpha\beta}$ - компоненти тензора четвертого рангу, які визначаються моделлю матеріалу.

Для зручності подальших викладок умовно розіб'ємо півплощину $y_2 \geq -h$ на області «1» (півплощина $y_2 \geq 0$) та «2» (смуга $-h \leq y_2 \leq 0$) (зазначимо, що при цьому береги тріщини належать різним областям). На межі областей поза тріщинами ($|y_1| > a; y_2 = 0$) мають виконуватися умови неперервності переміщень і напружень. При цьому граничні умови задачі та умови неперервності набувають вигляду

$$\begin{aligned} Q'_{22}^{(2)} &= -\sigma(y_1), Q'_{21}^{(2)} = 0 \quad (|y_1| \leq a; y_2 = 0); \\ Q'_{22}^{(2)} &= 0, Q'_{21}^{(2)} = 0 \quad (-\infty \leq y_1 \leq \infty; y_2 = -h); \\ u_1^{(1)} &= u_1^{(2)}, u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad (|y_1| > a; y_2 = 0); \\ Q'_{22}^{(1)} &= Q'_{22}^{(2)}, Q'_{21}^{(1)} = Q'_{21}^{(2)} \quad (-\infty \leq y_1 \leq \infty; y_2 = 0). \end{aligned} \quad (2)$$

Підставляючи в (2) вирази напружень і переміщень через гармонічні потенціали (1), можемо переформулювати ці умови в термінах потенціальних функцій.

Подальший хід розв'язку задачі є таким. Для дослідження граничних задач щодо невідомих потенціальних функцій застосовується метод інтегральних перетворень, а саме зазначені функції в кожній із областей «1» та «2» подаються у вигляді інтегральних розкладів Фур'є по просторовій координаті з невідомими функціями параметрів розкладу. При цьому граничні умови, що задаються на всій площині, (другий і четвертий рядки в (2)) дозволяють скоротити кількість невідомих функцій, що входять в інтегральні розклади Фур'є, на кількість зазначених умов. Решта граничних умов призводять до парних інтегральних рівнянь щодо невідомих функцій, що входять в інтегральні розклади Фур'є. Розв'язування парних інтегральних рівнянь проводиться методом підстановки і призводить до отримання розв'язуючих інтегральних рівнянь Фредгольма. Використовуючи отримані рішення для гармонічних потенціальних функцій, можна отримати розподіл напружень в тілі і на основі аналізу асимптотичного розподілу напружень в околі тріщин отримати вирази для коефіцієнтів інтенсивності напружень.

Розв'язувальна система інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду в безрозмірному вигляді є такою:

$$\begin{aligned} f(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 K_{11}(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_0^1 K_{12}(\xi, \eta) g(\eta) d\eta &= \frac{4k_1}{\pi k} \xi \int_0^{\pi/2} \Sigma(\xi \sin \theta) d\theta; \\ g(\xi) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 K_{22}(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_0^1 K_{22}(\xi, \eta) g(\eta) d\eta &= 0; \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (3) \\ K_{11}(\xi, \eta) &= k^{-2} \xi^{-1/2} \eta^{-3/2} [k_1(k_1 + k_2) \beta_1 S(z_{11}) + k_2(k_1 + k_2) \beta_2 S(z_{12}) - \\ 2k_1 k_2 (\beta_1 + \beta_2) S(z_{11})]; K_{12}(\xi, \eta) &= k_1(k_1 + k_2) k^{-2} \sqrt{\xi} \{ \eta^{-1/2} [Q_{-1/2}(z_{11}) + Q_{-1/2}(z_{12}) - \\ 2Q_{-1/2}(z_1)] - [Q_{-1/2}(z_{21}) + Q_{-1/2}(z_{22}) - 2Q_{-1/2}(z_2)] \}; K_{21}(\xi, \eta) &= k_2(k_1 + \\ k_2) k^{-2} \xi^{-1/2} \eta^{-3/2} \frac{1}{2} \left\{ \left[1 - \frac{2(2\beta_2)^2 z_{11}}{\xi \eta (z_{11}^2 - 1)} \right] S(z_{11}) - \frac{(2\beta_1)^2}{2\xi \eta (z_{11}^2 - 1)} Q_{-1/2}(z_{11}) + \left[1 - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2(2\beta_2)^2 z_{12}}{\xi \eta (z_{12}^2 - 1)} \right] S(z_{12}) - \frac{(2\beta_2)^2}{2\xi \eta (z_{12}^2 - 1)} Q_{-1/2}(z_{12}) - \left[1 - \frac{2(\beta_1 + \beta_2)^2 z_1}{\xi \eta (z_1^2 - 1)} \right] S(1) - \frac{(\beta_1 + \beta_2)^2}{2\xi \eta (z_1^2 - 1)} Q_{-1/2}(z_1) \right\}; \\ K_{22}(\xi, \eta) &= k^{-2} \xi^{-1/2} \{ k_2(k_1 + k_2) \beta_1 [\eta^{-3/2} S(z_{11}) - S(z_{21})] - k_1(k_1 + k_2) \beta_2 [\eta^{-3/2} S(z_{12}) - \\ S(z_{22})] - 2k_1 k_2 (\beta_1 + \beta_2) [\eta^{-3/2} S(z_1) - S(z_2)] \}; \Sigma(\xi) &= -\sigma(a\xi) (C_{44}^* d_1^* l_1^*)^{-1}; \beta = ha^{-1}, \beta_i = (n_i)^{-1/2} \beta; z_{1i} = (4\beta_i^2 + \xi^2 + \eta^2)(2\xi\eta)^{-1}, z_{2i} = (4\beta_i^2 + \xi^2 + 1)(2\xi)^{-1}, z_1 = [(\beta_1 + \beta_2)^2 + \\ \xi^2 + \eta^2](2\xi\eta)^{-1}, z_1 = [(\beta_1 + \beta_2)^2 + \xi^2 + 1](2\xi)^{-1}; S(z) = (z^2 - 1)^{-1} [Q_{1/2}(z) - \\ zQ_{-1/2}(z)]; Q_v(z) - функція Лежандра другого роду. \end{aligned}$$

Аналіз асимптотичного розподілу компонент тензора напружень в околі вершини тріщини дає таке їх значення:

$$\begin{aligned} Q'_{22}^{(2)}(y_1, 0) &= K_I [2\pi(y_1 - a)]^{-1/2} + O(1), \\ Q'_{21}^{(2)}(y_1, 0) &= K_{II} [2\pi(y_1 - a)]^{-1/2} + O(1), \end{aligned} \quad (4)$$

де під $O(1)$ розуміються регулярні члени, що не мають особливостей при $y_1 \rightarrow a$. Коефіцієнти інтенсивності напружень визначаються з виразів

$$K_I = -C_{44}^* d_1^* l_1^* \frac{k}{2k_1} \sqrt{\pi a} f(1), K_{II} = C_{44}^* d_1^* (n_1^*)^{-1/2} \frac{k}{2k_2} \sqrt{\pi a} \int_0^1 g(\eta) d\eta, \quad (5)$$

де функції $f(\xi)$ та $g(\xi)$ визначаються з розв'язку інтегральних рівнянь Фредгольма (3). Також в роботі показано, що при нескінченному збільшенні відстані між тріщиною і межею півплощини, тобто коли $\beta = ha^{-1} \rightarrow \infty$, з (5) отримуємо значення КІН, які повністю збігаються зі значеннями, які отримуються в плоскій задачі про нескінченну площину з тріщиною нормальноговідриву [1], а саме

$$K_I^\infty = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^1 \frac{\sigma(a\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta = 2 \sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^a \frac{\sigma(t)}{\sqrt{a^2-t^2}} dt, \quad K_{II}^\infty = 0. \quad (6)$$

З отриманих результатів можна зробити такі висновки:

- з співвідношень (4) бачимо, що порядок особливості (сингулярності) біля тріщини в плоскій задачі про півплощину з початковими напруженнями, що містить приповерхневу тріщину нормального відриву, дорівнює $-1/2$, тобто збігається з порядком особливості біля тріщини в аналогічній задачі для півплощини без початкових напружень;

- коефіцієнти інтенсивності напружень K_I та K_{II} залежать від початкових напружень, оскільки параметри C_{44}^* , d_1^* , l_1^* , n_1^* , що входять у вирази для КІН (5) та в праву частину рівнянь Фредгольма (3), залежать від параметра початкових напружень λ_1 ;

- взаємний вплив тріщини та поверхні півплощини призводить до якісних змін в розподілі напружень в околі вершини тріщини нормального відриву, а саме, до ненульових значень обох коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I та K_{II} (в задачі про ізольовану тріщину в нескінченій площині мали [1] $K_I \neq 0$, $K_{II} = 0$);

- при збільшенні відстані між тріщиною та межею півплощини приходимо до граничних значень КІН у вигляді (6), які повністю збігаються зі значеннями, які отримуються в задачі про нескінченну площину з тріщиною нормального відриву [1].

Слід також зазначити, що з отриманого в цій роботі розв'язку задачі про попередньо напружену півплощину з тріщиною можна, використовуючи підхід [2], отримати значення критичних параметрів навантаження при стисканні півплощини вздовж приповерхневої тріщини, паралельної граничній поверхні півплощини.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: півплосина з приповерхневою тріщиною, тріщина нормального відриву, початкові (залишкові) напруження, коефіцієнти інтенсивності напружень

1. Cherepanov G.P. Mechanics of Brittle Fracture. – New-York: McGraw-Hill, 1979. – 939 p.

2. Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M. Fracture of Materials Under Compression Along Cracks. In: Advanced Structure Materials, vol. 138. - Cham: Springer, 2020. – 490 p. - doi.org/10.1007/978-3-030-51814-1.

V.L. Bogdanov¹, O.I. Lesyk¹

STRESS INTENSITY FACTORS IN A PRE-STRESSED SEMI-PLANE WITH A NEAR-SURFACE MODE I CRACK

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine; e-mail: bogd1965@gmail.com

We consider the plane problem of fracture mechanics for a half-plane with a near-surface mode I crack under the action of initial (residual) stresses directed along the crack. Within the approach of linearized mechanics of a deformable solid body the problem was reduced to a system of inhomogeneous Fredholm integrals equations of the second kind. Analytical expressions for the stress intensity factors were obtained from the analysis of the asymptotic stress distribution near the crack tip, and conclusions were drawn regarding their dependence on the initial (residual) stresses and the influence of the interaction between the crack and the free boundary of the half-plane.

I.Ю. Подільчук

ЕФЕКТ БАУШІНГЕРА У ОРТОТРОПНИХ МАТЕРІАЛАХ З ІЗОТРОПНО-КІНЕМАТИЧНИМ ЗМІЦНЕННЯМ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: ipodil19@gmail.com*

Розглядається модель ефекту Баушінгера у загальному випадку складного напружено-деформованого стану у матеріалах з деформаційною анізотропією, зміцнення якої описується гіпотезою ізотропно-кінематичного типу. Ефект Баушінгера аналізується за допомогою моделі, основаної на використанні концепції поверхні навантаження і графо-аналітичного методу побудови визначальних рівнянь при складному навантаженні [1,2]. У якості прикладу, визначена чисельно міра ефекту Баушінгера у ортотропному матеріалі у випадку змінних параметрів анізотропії і одновісного ізометричного навантаження у напрямку осей симетрії. Показано, що з підвищенням долі ізотропної складової, міра ефекту Баушінгера підвищується.

Основні поняття. У відповідності до гіпотези зміцнення ізотропно-кінематичного типу, поверхня навантаження матеріалу, що піддається пластичному деформуванню, у просторі тензора напружень $\{\sigma_{ij}\} (i, j = 1, 2, 3)$, подана в ортогональній системі координат, описується рівнянням [2]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}(\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) - \frac{2}{3}(\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33}) - \\ - 2\sqrt{\frac{2}{3}}a_1\sigma_{11} + \sqrt{2}\left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} - a_2\right)\sigma_{22} + \sqrt{2}\left(\frac{a_1}{\sqrt{3}} + a_2\right)\sigma_{33} - 2\sqrt{2}(a_3\sigma_{12} + a_4\sigma_{23} + a_5\sigma_{31}) + \\ + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - R^2 = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, R$ - параметри, що характеризують анізотропію, обумовлену зміцненням матеріалу. Для зручності аналізу, процеси навантаження, що відбувається у просторі $\{\sigma_{ij}\}$, розглядаються у п'ятивимірному девіаторному просторі $\{S_m\} (m = 1, 2, 3, 4, 5)$, компоненти якого пов'язані з компонентами девіатора напружень $\{S_{ii}\}$ співвідношеннями

$$S_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}S_{11}; \quad S_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(S_{22} - S_{33}); \quad S_3 = \sqrt{2}S_{12}; \quad S_4 = \sqrt{2}S_{23}; \quad S_5 = \sqrt{2}S_{31}. \quad (2)$$

У цьому випадку, поверхня навантаження описується сферою

$$(S_i - a_i)(S_i - a_i) = R^2 (\varepsilon_i^p) \quad (3)$$

з координатами центра a_i і радіусом R , які є функціями пластичної деформації $\varepsilon_{(i)}^p$ і визначаються через границі текучості матеріалу у відповідності з методикою, наведеною [1]. Відмітимо, що у випадку ізотропного матеріалу (при цьому $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0, R = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_T$) рівняння (1) являє собою відому умову пластичності Генкі-Мізеса.

Графо-аналітичний метод [3] заснований на гіпотезі Циглера, в відповідності до якої поверхня навантаження (3) у процесі пластичного деформування зміщується у напрямку вектора, що з'єднує її центр з зображенчою точкою на траекторії навантаження.

Міра ефекту Баушінгера $\lambda_i (i = 1, 2, 3)$ у ортотропному структурно-стабільному матеріалі, що зміцнюється, при одновісному навантаженні в напрямку осей ізотропії по цим осям визначаються співвідношеннями

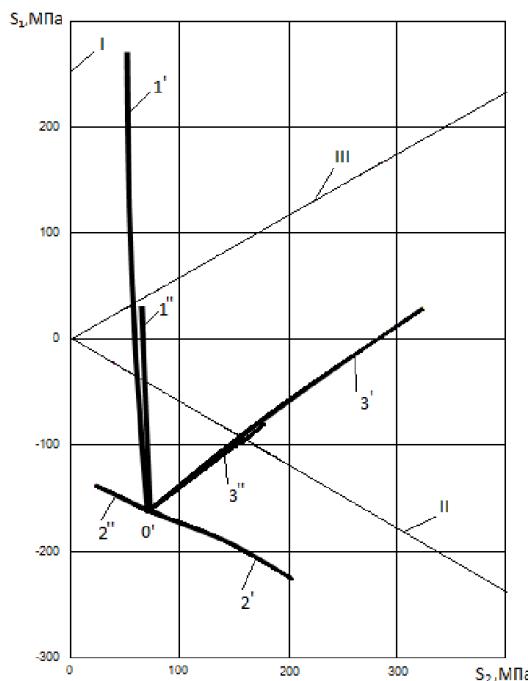
$$\lambda_1^{(k)} = \frac{\sigma_{1T}^{(-)}(\varepsilon_{(1)}^{p(k)})}{\sigma_{1T}^{(+)}(\varepsilon_{(1)}^p)}, \quad \lambda_2^{(k)} = \frac{\sigma_{2T}^{(-)}(\varepsilon_{(2)}^{p(k)})}{\sigma_{2T}^{(+)}(\varepsilon_{(2)}^p)}, \quad \lambda_3^{(k)} = \frac{\sigma_{3T}^{(-)}(\varepsilon_{(3)}^{p(k)})}{\sigma_{3T}^{(+)}(\varepsilon_{(3)}^p)}, \quad (4)$$

де $\sigma_{1T}^{(+)}, \sigma_{2T}^{(+)}, \sigma_{3T}^{(+)}$ - границі текучості при повторному розтязіу напрямках осей 1, 2, 3 відповідно; $\sigma_{1T}^{(-)}, \sigma_{2T}^{(-)}, \sigma_{3T}^{(-)}$ - границі текучості при стиску (після первинного розтягу) у напрямку осей 1, 2, 3 відповідно, є

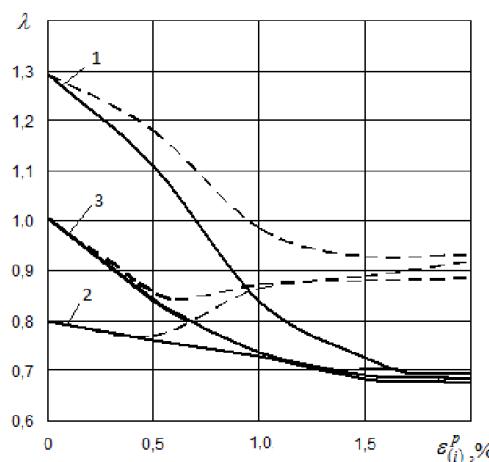
функціями величини пластичної деформації $\varepsilon_{(i)}^P$, накопиченою при первинному розтязі; $\varepsilon_{(1)}^P, \varepsilon_{(2)}^P, \varepsilon_{(3)}^P$ - пластичні деформації при первинному розтязі у напрямках осей 1, 2, 3 відповідно. Вважаємо, що діаграми деформування, а, як наслідок, і границі текучості у напрямках осей анізотропії у початковому стані матеріалу $\sigma_{1T}^{(0)}, \sigma_{2T}^{(0)}, \sigma_{3T}^{(0)}$, а також вид функції $R(\varepsilon_{(i)}^P)$ відомі.

Чисельний приклад: У якості прикладу чисельного розрахунку, визначимо міру ефекту Баушінгера у ортотропному структурно-стабільному матеріалі (сталь маргенситного класу) при знакозмінному одновісному навантаженні у трьох ортогональних напрямках, що співпадають з осями симетрії. Оцінимо також вплив співвідношення між ізотропною і кінематичною співвідношення між ізотропною і кінематичною складовими зміщення на цю міру. Для даного матеріалу границі текучості $\sigma_{1T}^0, \sigma_{2T}^0, \sigma_{3T}^0$ рівні 1350, 1710 і 1510 МПа.

Розглянемо наступні випадки деформаційного зміщення матеріалу при розтязі у напрямку осей 1,2,3, що характеризуються долею ізотропної складової: 1 - $R = R^{(0)} = const$; 2 - $R = R^{(0)} + 100\varepsilon_i^P$. Траекторії центра кола (7) для напрямків осей 1,2,3 показані на рис.1: при постійному значенні радіуса R (позначені 1',2',3' відповідно) і при змінному значенні радіуса R (позначені 1'',2'',3'' відповідно).



Графіки залежності міри ефекту Баушінгера від величини пластичної деформації ε_i^P при розтязі в напрямку осей 1, 2, 3 для вказаних законів зміщення наведені на рис.2. На цьому рисунку суцільні лінії відповідають випадку 1, штрихові - випадку 2.



Як видно, у області малих пластичних деформацій у випадку чисто кінематичного зміщення спостерігається монотонне зниження міри ефекту Баушінгера при розтязі в напрямку всіх трьох осей, але найбільш помітне у напрямку осі 1, вздовж якої здійснювався первинний розтяг. Із збільшенням величини пластичних деформацій таке зниження сповільнюється, а далі і зовсім припиняється. У випадку ізотропно-

кінематичного зміцнення, зниження міри ефекту Баушінгера у напрямку осі 1 носить більш сповільнений характер, а у напрямку осей 2 і 3 має місце її деяке підвищення. Відмічений вплив ізотропної складової зміцнення узгоджується з експериментально установлено закономірністю [19], що полягає в тому, що зазвичай переважання кінематичної енергії, що спостерігається при початковій стадії деформування, слабшає із збільшенням рівня пластичних деформацій переважаючою стає ізотропна складова.

Ключові слова: ефект Баушінгера, анізотропний матеріал, пластичне деформування, ізотропно-кінематичне зміцнення, ізометричне і не ізометричне навантаження.

1. Bastun V.N., Podil'chuk I.Yu., "Bauschinger effect prediction in thick-walled autofrettaged cylindrical pressure vessels," J. Pres. Vessel Technol., **139**, No.4 (2017).
2. Vladimir Bastun, Inna Podil'chuk. Bauschinger effect prediction in structural metallic materials – Lambert Academic publishing, 2019, 97 p.
3. Bastun V. N., Shkaraputa L. M. Strength of materials, 1987, 19 No 6: 785–790.

I.Yu. Podilchuk

Modeling the Bauschinger effect in orthotropic materials with isotropic-kinematic hardening

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: ipodil19@gmail.com*

The model of the Bauschinger effect in the general case of a combined stressed state in materials with strain anisotropy, whose hardening is described by the isotropic-kinematic hypothesis, is considered. The model uses the loading surface concept and a graphical-analytical method, which establishes the stress-strain relations under combined loading. As an example, the Bauschinger effect measure is determined numerically in an orthotropic material with variable anisotropy parameters under uniaxial isothermal loading along the anisotropy axes. It is shown that this measure increases with the isotropic hardening fraction.

Я.В. Павлюк

**ВИЗНАЧЕННЯ РЕЛАКСАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ В ТОНКОСТІННИХ
ТРУБЧАСТИХ ЕЛЕМЕНТАХ ІЗ ЛІНІЙНО-В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ
ЗА УМОВ РОЗТЯГУ ТА КРУЧЕННЯ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: creep@inmech.kiev.ua*

Розглядається задача розрахунку релаксації нормальних та дотичних напружень у тонкостінних трубчастих елементах за умов навантаження одновісним розтягом та скрученнем. Розв'язок будується шляхом узагальнення вихідної одновимірної моделі в'язкопружності на складний напруженний стан, що побудований на використанні гіпотези пропорційності девіаторів. Визначальні рівняння повзучості, що задають залежність між компонентами тензора напружень σ_{ij} , деформацій ε_{ij} і часом t , записуються у вигляді [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) = e_{ij}(t) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t) &= \frac{1}{2G} \left[s_{ij}(t) + \lambda_s \int_0^t K_s(t-\tau) s_{ij}(\tau) d\tau \right] + \\ &+ \frac{1}{3B} \delta_{ij} \left[\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right]; \quad (i,j=1,3), \end{aligned} \quad (1)$$

де $\sigma_{ij}(t)$ – компоненти тензора напружень; $e_{ij}(t)$, $s_{ij}(t)$ – компоненти девіатора деформацій і девіатора напружень; $\varepsilon_v(t)$ – об'ємна деформація; $K_s(t-\tau)$, $K_v(t-\tau)$ – ядра зсувної і об'ємної релаксації. В якості базових експериментів для визначення параметрів ядер релаксації напружень використовуються результати випробувань зразків на повзучість матеріалу при одновісному розтягу і чистому скрученні.

Методи визначення параметрів ядер повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану для випадку пропорційності девіаторів наведені в роботах [1, 2]. Методи засновані на результатах апроксимації дискретних значень ядер повзучості за умов складного напруженого стану функціями, що задають ядра. Дискретні значення ядер розраховуються згідно співвідношень, що встановлюють залежність між ядрами інтенсивності деформацій повзучості й об'ємної повзучості за умов складного напруженого стану та ядрами повзучості за умов одновимірних напруженіх станів. Одновимірні напружені стани розглядаються як базові.

У роботі у якості базового обрано одновісний розтяг із виміром поздовжніх та поперечних деформацій повзучості. У цьому випадку для залежності між ядрами інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$, об'ємної повзучості $K_v(t)$, поздовжньої повзучості $K_{11}(t)$ й поперечної повзучості $K_{22}(t)$ отримано співвідношення [1]

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{\lambda_1 K_{11}(t) + v_0 \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 + v_0}, \quad (2)$$

та відповідно співвідношення

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) - 2v_0 \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 - 2v_0}, \quad (3)$$

що дозволяють розраховувати дискретні значення ядер інтенсивності деформацій повзучості й об'ємної повзучості за ядрами поздовжньої й поперечної повзучості.

Для релаксації нормальних напружень $\sigma_{11}(t)$ із (1) отримуємо рівняння

$$\begin{aligned}\sigma_{11}(t) = & \frac{4}{3} G(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \left\{ 1 - \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_s + \beta_s)^n t^{(1+n)(1+\alpha_s)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_s)]} \right\} + \\ & + 3B(\varepsilon_{11} + 2\varepsilon_{22}) \left\{ 1 - \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_v + \beta_v)^n t^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\},\end{aligned}\quad (4)$$

а для релаксації дотичних напружень $\tau_{21}(t)$ – рівняння

$$\tau_{21}(t) = 2G\varepsilon_{21} \left\{ 1 - \lambda_s \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\lambda_s + \beta_s)^n t^{(1+n)(1+\alpha_s)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_s)]} \right\}, \quad (5)$$

де $\alpha_s, \beta_s, \lambda_s$ і $\alpha_v, \beta_v, \lambda_v$ – параметри ядер спадковості ($-1 < \alpha < 0; \beta > 0$).

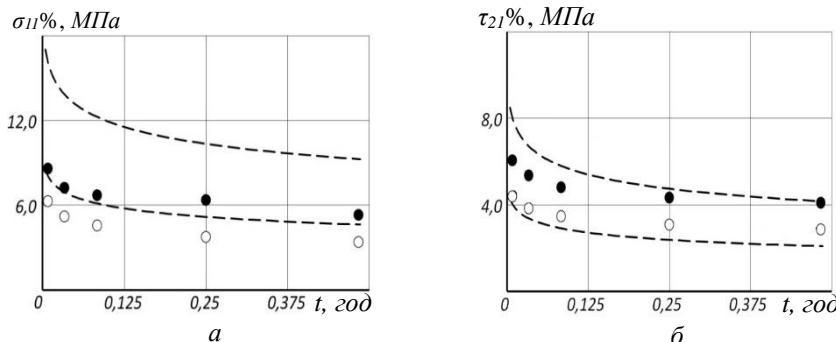
У якості об'єкту дослідження обрані тонкостінні трубчасті зразки з поліетилену високої щільності ПЕВП. Експериментальні дані запозичені з [2]. В якості базових експериментів розглядаються випробування тонкостінних трубчастих зразків на повзучість при одновісному розтягу, при чистому крученні і при комбінованому навантаженні із розтягом і крученням. За даними випробувань на одновісний розтяг визначаються параметри ядер поздовжньої та зсувної повзучості.

В таблиці 1 наведені значення параметрів ядер спадковості поліетилену ПЕВП. Значення пружних сталіх запозичені з [2].

Таблиця 1

$K_{11}(t), \text{ год}^{-1}$			$K_{21}(t), \text{ год}^{-1}$		
α_{11}	β_{11}	λ_{11}	α_{21}	β_{21}	λ_{21}
-0,6460	-0,1398	1,9439	-0,4700	-1,2467	2,0197
$K_i(t), R_i(t), \text{ год}^{-1}$			$K_v(t), R_v(t), \text{ год}^{-1}$		
α_i	β_i	λ_i	α_v	β_v	λ_v
-0,4706	1,2402	2,0155	-0,6334	0,2971	9,1396

На рис.1 співсталено результати розрахунку (лінії) релаксації нормальних (мал.1,а) та дотичних (мал.1,б) напружень із експериментальними даними (точки), та отримано



Ruc. 1.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: релаксація, тонкостінні трубчасті елементи, лінійна-в'язкопружність, ядро спадковості, одновісний розтяг, чисте кручення, розтяг із крученням.

1. Golub, V.P., Maslov, B.P. & Fernati, P.V. Identification of the Hereditary Kernels of Isotropic Linear Viscoelastic Materials in Combined Stress state. 1. Superposition of Shear and Bulk creep. Int Appl Mech 52, 165–175 (2016). <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0744-8>
2. Golub, V.P., Pavlyuk, Y.V. & Reznik, V.S. Calculation of Creep Strains of Thin-Walled Tubular Members Made of Linear Viscoelastic Materials Under Tension and Torsion. Int Appl Mech 58, 160–169 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10778-022-01143-4>

Y.V. Pavlyuk

DETERMINATION OF STRESS RELAXATION IN THIN-WALLED TUBULAR ELEMENTS MADE OF LINEAR-VISCOELASTIC MATERIALS UNDER TENSILE AND TORSIONAL CONDITIONS

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: creep@inmech.kiev.ua

The relaxation of isotropic homogeneous and non-aging linear-viscoelastic materials under conditions of complex stress state is considered. The solution is obtained by generalizing the initial one-dimensional viscoelasticity model to a complex stressed state, constructed using the hypothesis of the proportionality of deviators. The problems of stress relaxation calculation of thin walled tubes under combined tension with torsion have been solved and experimentally approved.

I.C. Скородинський

В'ЯЗКОПРУЖНИЙ ШАР НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ПІД ДІЄЮ РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНого ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ,
вул. Наукова, 3-б, 79060, Львів, Україна;
e-mail: skorodyniski@ukr.net*

Одними з найбільш розповсюджених у природі та в техніці є циклічні навантаження. Тому важливим є дослідження їх дії на непружні середовища та елементи конструкцій, коли непружні властивості матеріалів такі, як запізнення реакції матеріалу на зовнішню механічну дію, релаксація напружень, повзучість (течіння), незворотні залишкові деформації, гістерезисні втрати тощо проявляються досить часто і вимагають їх врахування при проектуванні та експлуатації відповідних об'єктів. В даній доповіді у межах узагальненої двопараметричної моделі [2] досліджено механічну поведінку нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі за дії нормального рівномірно розподіленого циклічного навантаження.

Розглянемо нескінчений в'язкопружний шар на жорсткій основі, що знаходить-ся під дією нормального рівномірно розподіленого на ділянці $x \in [-a, a]$ циклічного навантаження. Матеріал шару описує модель Кельвіна – Фойгта. Задачу розглядаємо в межах узагальненої двопараметричної моделі та плоскої деформації [2]. За прийнятих допущень інтенсивність зовнішнього навантаження представляється так:

$$p(x, t) = p_0 H_- (a - |x|) \sum_{i=1}^N f_i(t), \quad \text{supp } f_i(t) \subseteq [t_i, t_{i+1}) \quad (i = 1, \overline{N}; t_{N+1} \rightarrow \infty). \quad (1)$$

У формулі (1) p_0 – амплітуда; $H_-(x)$ – асиметрична функція Хевісайда; N – кількість циклів; t_i ($i = 1, \dots, N$; $t_1 = 0$) – моменти прикладання навантаження

Використовуючи результати роботи [2], для вертикального переміщення середини області навантаження отримаємо представлення

$$v(0, t) = -\frac{p_0}{\pi t_\eta} \left[\sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} G(t-\tau) f_j(\tau) d\tau + \int_{t_i}^t G(t-\tau) f_i(\tau) d\tau \right] \quad (t \in [t_i, t_{i+1}); i = \overline{1, N}), \quad (2)$$

де t_η – в'язкістний аналог другого коефіцієнта постелі [2], а

$$G(t) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{u^2 + \alpha_e^2}{u^2 + h^{-2}}\right) \frac{\sin au}{u(u^2 + h^{-2})} du. \quad (3)$$

У формулі (3) $2h$ – товщина шару; решту позначень розшифровано в [2].

Обчислення вертикальних переміщень в загальному випадку неперіодичного циклічного зовнішнього навантаження (1) складне і вимагає багато часу. Для періо-

дичних зовнішніх навантажень, коли $t_i = (i-1)T_c$ (T_c – період циклу), а

$$f_i(t) = f(t - (i-1)T_c), \quad \text{supp } f(t) \subseteq [0, T_c] \quad (i = \overline{1, N})$$

отримаємо рекурентні формули

$$\begin{aligned} v(0, t) &= -\frac{P_0}{\pi t_n} \int_0^t G(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t < T_c; \\ v(0, t) &= v(0, t - T_c) - \frac{P_0}{\pi t_n} \int_0^{T_c} G(t-\tau) f(\tau) d\tau, \quad t \geq T_c. \end{aligned} \quad (4)$$

Співвідношення (4) набагато ефективніші, оскільки використовують інформацію з попереднього циклу.

В якості конкретного прикладу отримано та проаналізовано часові залежності вертикального переміщення середини області навантаження для випадку прямокутного, періодичного відносно часу зовнішнього чинника [1]. Побудовано графіки для трьох матеріалів шару та для трьох значень приведеної товщини $\lambda = h/a$. Встановлено, що основні закономірності в'язкопружного деформування шару за дії рівномірно розподіленого навантаження такі ж, як і за дії зосередженої сили [3]. Крім цього, виявлено монотонно зростальну залежність абсолютнох значень переміщень та швидкостей від приведеної товщини шару. Час розрахунку за формулами (4) в даному конкретному випадку був на порядок меншим, ніж при використанні формул типу (2). При цьому абсолютна похибка обчислень не перевищує 10^{-7} .

Для вищевказаного зовнішнього навантаження встановлено, що, як і у випадку зосередженої сили [3], при $N \rightarrow \infty$ закон зміни в часі вертикального переміщення навантаженої поверхні наближається до періодичного. Такий режим деформування називатимемо усталеним.

Аналогічно до випадку зосередженої сили [3], введемо функціональну послідовність

$$v_n(t) = v(0, t + t_n) = v(0, t + (n-1)T_c) \quad (n = 1, 2, \dots; \quad t \in [0, T_c]). \quad (5)$$

Показано, що послідовність (5) має ті ж властивості, що й відповідна послідовність для зосередженої сили [3]. Зокрема, ця послідовність монотонно спадна, обмежена знизу і рівномірно збігається до неперервної граничної функції $v_s(t)$ з швидкістю геометричної прогресії. Збіжність цієї послідовності моделює процес настання усталеного режиму деформування в шарі.

Умова збіжності послідовності (5) має вигляд

$$|v_{n+1}(0) - v_n(0)| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (6)$$

звідки видно, що настання усталеного режиму визначається залишковими переміщеннями (деформаціями) $v_m = v_n(0) = v(0, t_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). Для числового дослідження настання усталеного режиму (збіжності послідовності (5)) бралася модифікована умова (6):

$$\left| \frac{v_{n+1}(0) - v_n(0)}{v_n(0)} \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (7)$$

Проведено розрахунки для трьох вищезгаданих матеріалів і тих же значень параметра λ при $\varepsilon = 0.02$. Встановлено, що, аналогічно до випадку зосередженої сили, найшвидше усталений режим наступає у випадку податливого матеріалу (після 3 – 4 циклу залежно від товщини шару), а найповільніше – у випадку жорсткого матеріалу (після 19 – 20 циклу залежно від товщини шару). Залежність швидкості настання усталеного режиму від приведеної товщини шару при $0.1 \leq \lambda \leq 1$ незначна. Зауважимо, що навіть при усталеному режимі максимальні за модулем вертикальні переміщення приблизно на порядок менші від відповідних пружних переміщень через запізнення деформації у матеріалі Кельвіна – Фойгта та малий час навантаження. Як і у випадку зосередженої сили [3], за дії рівномірно розподіленого періодичного навантаження завжди є незворотні залишкові деформації (переміщення v_m). Ці залишкові переміщення визначають збіжність функціональної послідовності (5) (настання усталеного режиму) згідно з (7). Границне максимальне за модулем значення залишкових переміщень в усталеному режимі v_{rs} дас формула

$$v_{rs} = v_s(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_m.$$

За повного зняття навантаження залишкові деформації прямують до нуля.

Таким чином, у межах узагальненої двопараметричної моделі та плоскої деформації досліджено механічну поведінку нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі за дії нормального рівномірно розподіленого циклічного навантаження. Встановлено співпадіння основних закономірностей деформування для зосередженого та рівномірно розподіленого зовнішніх чинників, коли останні змінюються в часі за прямокутним, періодичним законом. Досліджено процес настання усталеного режиму в шарі. Встановлено, що основні закономірності настання усталеного режиму такі ж, як і за дії зосередженої сили, однак з'являються закономірності, пов'язані з параметром λ . В якості відмінності від випадку зосередженого навантаження слід вказати на немонотонну залежність залишкових переміщень від жорсткості матеріалу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: в'язкопружний шар, узагальнена двопараметрична модель, циклічне навантаження, вертикальне переміщення, усталений режим, залишкові переміщення.

1. Скородинський І.С. Аналіз деформування нескінченного в'язкопружного шару на жорсткій основі за рівномірно розподіленого циклічного навантаження // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2022. – Вип. 20. – С. 82 – 87.
2. Skorodyn's'kyi I. S. and Maksymuk O. V. A generalized model of viscoelastic interlayer or coating taking into account its transverse shear deformation // J. Math. Sci. – 2014. – **201**, N 1. – P. 72 – 82.
3. Skorodyn's'kyi I. S. and Maksymuk O. V. Stressed state of a viscoelastic layer on the rigid foundation under the action of concentrated cyclic loads // Mater. Sci. – 2020. – **56**, N 1. – P. 82 – 89.

I.S. Skorodyn's'kyi

VISCOELASTIC LAYER ON THE RIGID FOUNDATION UNDER THE ACTION OF UNIFORMLY DISTRIBUTED CYCLIC LOAD

Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics of the National Academy of Sciences.

*Naukova Str., 3-b, 79060, Lviv, Ukraine;
e-mail: skorodynski@ukr.net*

The response of an infinite viscoelastic layer on the rigid foundation to the normal uniformly distributed cyclic load applied to the free surface is investigated within the framework of a generalized two-parameter model and the plane strain. The peculiarities of viscoelastic deformation of the layer including the steady-state regime and residual displacements are studied. A good correlation with the case of concentrated force is established.

Ю . М . Кононов

ПРО СТІЙКІСТЬ ОБЕРТАННЯ У СЕРЕДОВИЩІ З ОПОРОМ ВІЛЬНОГО ПРУЖНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА З РІДИНОЮ

*Інститут прикладної математики і механіки НАНУ,
бул. Генерала Батюка, 19, 84116, м. Слов'янськ, Україна;
e-mail: kononov.yurij.nikitovich@gmail.com*

Розглянута задача про моделювання обертання у середовищі з опором вільного пружного твердого тіла з порожнинами, які містять рідину у вигляді системи двох і трьох пружно зв'язаних твердих тіл з рідинкою. На підставі відомих рівнянь руху системи зв'язаних гіростатів П.В. Харламова виведені рівняння обертання у середовищі з опором вільної системи двох і трьох пружного зв'язаних твердого тіла з порожнинами, які повністю заповнені нестисливою рідиною. Тверди тіла з'єднані пружними відновлювальними сферичними шарнірами або пружними шарнірами Гука. На основі функції стану С.Л. Соболєва для ідеальної рідини отримано трансцендентне характеристичне рівняння збуреного рівномірного обертання для двох ($n = 2$) і трьох ($n = 3$) гіроскопів Лагранжа з довільними осесиметричними порожнинами. З урахуванням основного тону коливання рідини отримано характеристичне рівняння шостого порядку для $n = 2$ і дев'ятого порядку для $n = 3$. На підставі критерію Льєнара – Шіпера, записаного в іннорному вигляді, вписані умови асимптотичної стійкості рівномірного обертання гіроскопів Лагранжа з рідиною. Поведіні аналітичні дослідження цих умов. Розглянуті випадки відсутності рідини у одному, або у двох або у трьох твердих тіл, випадки відсутності пружності у шарнірах та випадки однакових твердих тіл з однаковими порожнинами і рідиною. Отримані умови стійкості є точними для еліпсоїдальних порожнин, а для всіх інших порожнин тільки наближеними. Доведено, що коли перші тони коливання рідин у порожнинах більші одиниці, то при зростанні коефіцієнтів пружності шарнірів завжди буде можлива асимптотична стійкість. Для еліпсоїдальних порожнин це означає, що вони повинні бути стиснуті вздовж осі обертання. Показано відсутність внутрішнього резонансу при збігу перших тонів коливання рідин у порожнинах. Проведено порівняння отриманих умов стійкості з умовами стійкості при відсутності дисипативних і постійних моментів.

У випадку пружних сферичних шарнірів характеристичні рівняння при $n = 2$ і $n = 3$ відповідно мають вигляд [1–3]:

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu_1\lambda^2 \\ \mu_1\lambda^2 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ і } \begin{vmatrix} F_1 & \mu_1\lambda^2 & \mu_2\lambda^2 \\ \mu_1\lambda^2 & F_2 & \mu_3\lambda^2 \\ \mu_2\lambda^2 & \mu_3\lambda^2 & F_3 \end{vmatrix} = 0,$$

а випадку пружних універсальних шарнірів –

$$\begin{vmatrix} F_1 & \mu_1\lambda^2 - k_1 \\ \mu_1\lambda^2 - k_1 & F_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ і } \begin{vmatrix} F_1 & \mu_1\lambda^2 - k_1 & \mu_2\lambda^2 \\ \mu_1\lambda^2 - k_1 & F_2 & \mu_3\lambda^2 - k_2 \\ \mu_2\lambda^2 & \mu_3\lambda^2 - k_2 & F_3 \end{vmatrix} = 0,$$

Тут $F_i = A'_i \lambda^2 + (i\tilde{C}_i + D_i)\lambda + k_{i-1} + k_i - \lambda^2(i\lambda - \omega_{0i}) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{E_{il}}{i\lambda - \tilde{\lambda}_{il}}$, $E_{il} = \frac{2a_{il}^2}{N_{il}^2}$,

$$\tilde{\lambda}_{il} = \omega_{0i} - \lambda_{il} = \omega_{0i} \lambda_{il}' , \quad \lambda_{il}' = 1 - 2/\kappa_{il}, \quad k_0 = k_3 = 0, \quad \tilde{C}_i = C_i \omega_{0i}, \quad (i = \overline{1, n})$$

При $n = 3$ маємо :

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 + m_1 m_{23} c_1^2 / m, \quad A'_2 = A_2 + (m_2 m_{31} c_2^2 - 2m_2 m_3 c_2 s_2 + m_3 m_{12} s_2^2) / m, \\ A'_3 &= A_3 + m_3 m_{12} c_3^2 / m, \quad \mu_1 = m_1 c_1 (m_2 c_2 + m_3 s_2) / m, \quad \mu_2 = m_1 m_3 c_1 c_3 / m, \quad (1) \\ \mu_3 &= m_3 c_3 [m_1 s_2 + m_2 (s_2 - c_2)] / m, \quad m = m_1 + m_2 + m_3, \quad m_{kl} = m_k + m_l, \end{aligned}$$

а при $n = 2$ у коефіцієнтах (1) слід покласти масу третього гіроскопа з рідиною $m_3 = 0$.

Слід зазначати, що задача про обертання у середовищі з опором системи пружно зв'язаних твердих тіл з рідиною (СПЗТР) має і самостійний науковий і практичний інтерес, оскільки багато об'єктів сучасної техніки можуть бути представлені та досліджені у вигляді СПЗТР.

Розглянуто можливість стабілізації нестійкого вільного обертання у середовищі з опором твердого тіла з рідиною за допомогою пружних сферичних шарнірів та обертання частин його твердих тіл.

Дослідження виконані в рамках конкурсної тематики НАН України № 2-19-П (науково дослідна робота за темою ВБ-15-18-21/479) та були частково підтримана грантом від Фонду Сімонса (PD-Ukraine-00010584, Президентські дискреційні гранти на підтримку України, одержувач Кононов Ю.М.).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: rotation of a free system of two and three elastically connected rigid bodies with a liquid, a medium with resistance, Lagrange gyroscope, ideal incompressible fluid, asymptotic stability

1. Kononov, Yu.M. & Sviatenko, Ya.I. Stabilization of spinning Lagrange gyroscope filled with ideal fluid in a resisting medium // Int. Appl. Mech. – 2023. – **59**, № 2. – P. 207 – 217.
2. Кононов Ю.М. Про стійкість обертання у середовищі з опором вільної системи двох твердих тіл, зв'язаних пружним сферичним шарніром і маючих порожнини з рідиною // Український математичний вісник – 2024. – **21**, № 2. – с. 38 – 52.
3. Кононов Ю.М. Про стійкість обертання у середовищі з опором вільної системи трьох пружно зв'язаних твердих тіл. Прикладна механіка – 2024. – **60**, № 5 (у друку).

Y.M. Kononov

ON THE STABILITY OF ROTATION IN AN ENVIRONMENT WITH RESISTANCE OF A FREE ELASTIC SOLID BODY WITH A LIQUID

*Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences,
St. Generala Batyuk, 19, 84116, Sloviansk, Ukraine
e-mail: kononov.yuriy.nikitovich@gmail.com*

The problem of modeling rotation in a medium with resistance of a free elastic solid body with cavities containing liquid, in the form of a system of two and three elastically connected solid bodies with liquid, is considered. Based on the known equations of P.V. Kharlamov on the motion of a system of coupled gyrostats, the equations of rotation in a medium with the resistance of a free system of two and three elastically connected rigid bodies with cavities completely filled with an incompressible liquid were derived and investigated.

P . P . Lizunov, O. S. Pogorelova, T. G. Postnikova*

EFFICIENCY AND DYNAMICS OF A DOUBLE-SIDED VIBRO-IMPACT DAMPER COMPARED TO A SINGLE -SIDED ONE

*Kyiv National University of Construction and Architecture,
31, Povitryanykh Syl ave., Kyiv, Ukraine, 03680;
e-mail: posttan@ukr.net

In this report, the performance of symmetric double-sided and asymmetric single-sided vibro-impact nonlinear energy sinks (DS and SSVI NES) is studied. Much attention is paid to selection of the optimal damper design using the tools of standard software. It is shown that their efficiency is similar but the dynamics is significantly different. All dampers with optimized design mitigate the vibrations of main structure quite well.

KEY WORDS: double-sided, single-sided, vibro-impact, damper, nonlinear energy sink, efficiency, mitigation

Vibro-impact nonlinear sinks (VI NESs), i.e. vibro-impact dampers, are the devices of passive vibration control that are used for mitigating the unwanted vibrations of the main structure. They are actively studied in the world scientific literature at two recent decades. They can be considered as the development of the tuned mass dampers (TMDs), which were studied quite widely and were implemented to engineering practice in several known constructions. It is considered that the nonlinearity of the system with attached NES allows to realize so-called targeted energy transfer (TET), that is, to transfer the part of the mechanical energy from the heavy primary structure (PS) to the light damper and to reduce this energy.

We consider two types of the vibro-impact NESs – symmetric double-sided and asymmetric single-sided (Fig.1). The strong nonlinearity and discontinuous of this system is due the repeated damper impacts on the obstacles. The both damper types have the same mechanics; they differs only in layout.

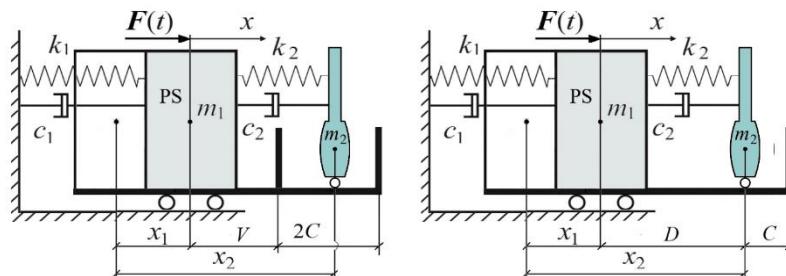


Fig.1. Schematic diagrams of the DS (left) and SS (right) VI NESs

The parameters of the primary structure are set in advance and are not subject to optimization:

$$m_1=1000 \text{ kg}, k_1=3.95 \cdot 10^4 \text{ N/m}, c_1=452 \text{ N}\cdot\text{s/m}, E_1=E_3=2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, \nu_1=\nu_3=0.3.$$

In this paper, we study the performance of the DSVI NES and SSVI NES and system dynamical behavior under action of harmonic force: $F(t) = P \cos(\omega t + \varphi_0)$, $P = 800$ N.

The impacts can occur when:

For DSVI NES

$$\begin{aligned} x_2 \leq x_1 + V & \text{ on the left obstacle} & x_2 \leq x_1 & \text{ on the PS directly} \\ x_2 \geq x_1 + V + 2C & \text{ on the right obstacle} & x_2 \geq x_1 + D + C & \text{ on the obstacle} \end{aligned}$$

For SSVI NES

We simulate an impact by a nonlinear contact force in accordance with the quasi-static Hertz contact theory: $F_{con}(z) = K[z(t)]^{3/2}$, where the K coefficient characterizes the mechanical and geometric properties of colliding surfaces in the contact zone. The motion equations for this system are as follows:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 - c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k_2 (x_2 - x_1 - D) &= F(t) - H(z_1)F_{con}(z_1) + H(z_2)F_{con}(z_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1 - D) &= H(z_1)F_{con}(z_1) - H(z_2)F_{con}(z_2) \end{aligned} \quad (1)$$

The total mechanical energy of the PS is

$$E_{1total}(t) = E_{1kinetic}(t) + E_{1poten}(t) = \frac{m_1 \dot{x}_1(t)^2 + k_1 x_1(t)^2}{2} \quad (2)$$

The damper parameter optimization is carried out using the standard software. We optimize several damper parameters but, contrary to popular belief, we do not optimize its mass. The optimization programs show a significant decrease in the maximum PS energy E_{1max} with a significant increase in mass and with little change in other parameters (Table 1).

Table 1. Decrease of maximum PS energy E_{1max} with increasing damper mass m_2

m_2 , kg	V_{opt} , m	C_{opt} , m	c_{2opt} , N·s/m	k_{2opt} , N/m	E_{1max} , J
40.0	0.496	0.238	64.78	216.5	517.4
49.3	0.416	0.256	70.15	196.1	281.9
66.1	0.154	0.250	71.86	222.6	101.2

Therefore, we pre-select the damper mass and optimize all other parameters for the selected value. Fig. 2 shows the maximum PS energy for different variants of SS (left) and DS (right) VI NES depending on exciting force frequency at damper mass $m_2=40$ kg.

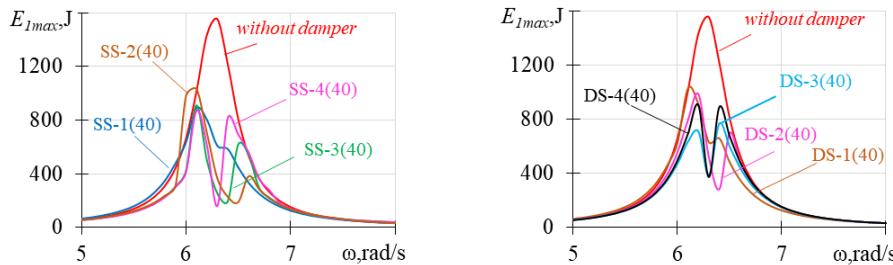


Fig.2. Maximum PS energy for different variants of SS (left) and DS (right) VI NES depending on exciting force frequency at damper mass $m_2=40$ kg

The efficiency of all dampers with different optimized parameters is similar; they all provide a significant reduction in the maximum PS energy, i.e. good mitigation of the PS vibrations. However, the bilateral damper impacts on both barriers occur in narrow region located near resonance. In Fig. 3, these areas are shown in pink and bounded by vertical dashed lines. The beige areas define the zones with unilateral impacts only the PS.

The dynamic behavior of SS and DS VI NES is significantly different. The system with attached DSVI NES exhibits the calm periodic dynamics with the same numbers of symmetric

impacts on the left and right obstacles. The system with attached SSVI NES demonstrates rich complex dynamics with alternation of different periodic and irregular modes.

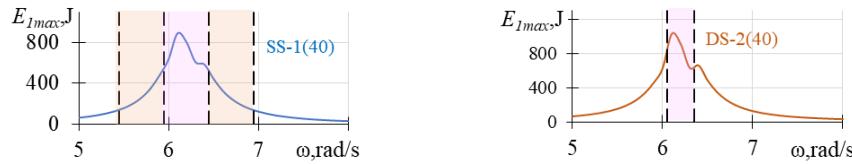


Fig.3. Areas of bilateral impacts are highlighted in pink

It is worth noting that efficiency of the lighter dampers of mass $m_2=20$ kg with optimized parameters is similar: they also significantly decrease the maximum PS energy, that is, provide a good mitigation of its vibrations. Fig.4 shows this clearly.

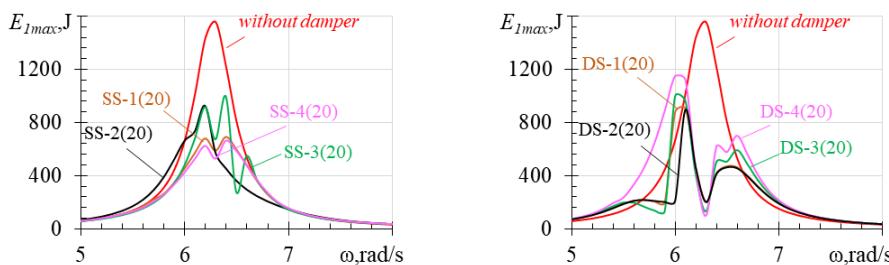


Fig.4. Maximum PS energy for different variants of SS (left) and DS (right) VI NES depending on exciting force frequency at damper mass $m_2=20$ kg

1. Lizunov P., Pogorelova O., Postnikova T. The influence of various optimization procedures on the dynamics and efficiency of nonlinear energy sink with synergistic effect consideration //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2024. – **463**. – P. 134167. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4663138>
2. Lizunov P., Pogorelova O., Postnikova T. Comparison of the performance and dynamics of the asymmetric single-sided and symmetric double-sided vibro-impact nonlinear energy sinks with optimized designs //International Journal of Mechanical System Dynamics. – 2024. Status Under Review.
3. Lizunov P., Pogorelova O., Postnikova T. Dynamic Behavior and Efficiency of Vibro-Impact Dampers with Different Optimized Designs // Journal of Applied Mechanics and Materials. 2024 (in press)
4. Lizunov P., Pogorelova O., Postnikova T. Comparative analysis of performance of single-sided and double-sided vibro-impact dampers (ID: CGQIHA6680000) //Fourth International Nonlinear Dynamics Conference (NODYCON 2025). Stevens Institute of Technology, Hoboken, NJ, USA (June 22 - 25, 2025). Abstract submitted.

P . P . Lizunov, O. S. Pogorelova, T. G. Postnikova

EFFICIENCY AND DYNAMICS OF A DOUBLE-SIDED VIBRO-IMPACT DAMPER COMPARED TO A SINGLE -SIDED ONE

*Kyiv National University of Construction and Architecture,
31, Povitryanykh Syl ave., Kyiv, Ukraine, 03680;
e-mail: posttan@ukr.net*

In this report, the performance of symmetric double-sided and asymmetric single-sided vibro-impact nonlinear energy sinks (DS and SSVI NES) is studied. Much attention is paid to selection of the optimal damper design using the tools of standard software. It is shown that their efficiency is similar but the dynamics is significantly different. All dampers with optimized design mitigate the vibrations of main structure quite well.

Я.О.Жук^{1,2}, О.П. Жук¹, О.М.Багно¹

SH-ХВИЛІ В ПРУЖНОМУ ШАРІ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,

бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: opzhuk1939@gmail.com; alexbag2016@gmail.com

²Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
просп. Глушкова, 4e, 01033, Київ, Україна; e-mail: yaroslavzhuk@knu.ua

Результати досліджень поширення пружних хвиль в тілах з початковими напруженнями використовуються при розробці ультразвукового неруйнівного методу дослідження напруженого стану елементів конструкцій [1,2], а також при визначенні пружних констант третього порядку. В даній роботі на основі лінеаризованих рівнянь нелінійної теорії пружності [3] розглянуто вплив початкових деформацій в ізотропному стисливому пружному шарі, що має довільну форму пружного потенціалу, на фазові швидкості SH-хвиль. Шар віднесене до лагранжевих координат x_1, x_2, x_3 , які до деформації співпадають з декартовими. При цьому серединна площа шару, який має товщину $2h$, суміщено з координатною площею $x_3 = 0$. Початковий деформований стан шару вважатимемо однорідним

$$u_m^0 = \delta_{im} (\lambda_i - 1) x_i, \quad \lambda_i = \text{const}, i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

а його початковий напружений стан визачатимемо співвідношенням [3]

$$\sigma_{ij}^{*0} = \delta_{ij} \left[\frac{\partial}{\partial A_1^0} + (\lambda_i^2 - 1) \frac{\partial}{\partial A_2^0} + 3 \left(\frac{\lambda_i^2 - 1}{2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial A_3^0} \right] \Phi^0. \quad (2)$$

В формулах (1) і (2) позначено: λ_i –степінь подовження; Φ –пружний потенціал; A_i –інваріанти тензора деформації Гріна; σ_{ij}^* –компоненти тензора узагальнених напружень; u_m –переміщення. Верхній індекс «0» вказує, що параметр, позначений ним, характеризує початковий напружений стан шару. В подальшому приймемо, що збурення об'ємних сил відсутні. Тоді рівняння руху в переміщеннях можна записати в такому вигляді [3]

$$L_{m\alpha} u_\alpha = 0. \quad (3)$$

Нормальні хвилі, переміщення в яких відбуваються перпендикулярно напряму поширення хвилі і паралельно поверхням шару, називаються SH-хвильами. Нехай

хвиля поширюється в додатньому напрямі осі Ox_1 . Тоді переміщення в ній будуть паралельні осі Ox_2 . Розв'язок u_2 рівняння (3) можна записати в такому вигляді

$$u_2 = f_2(\xi_3) \exp[i(\lambda_1 x_1 k_1 - \omega t)]. \quad (4)$$

В (4) враховано деформацію шару в напрямі поширення хвилі. Невідома амплітудна функція $f_2(\xi_3)$ визначається з рівняння (3). Використавши позначення

$$\alpha^2 = \frac{k_1^2 (\rho V^2 - \mu_{12} \lambda_1^2 \lambda_2^2 - \sigma_{11}^{*0} \lambda_1^2)}{\mu_{32} \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \sigma_{33}^{*0} \lambda_3^2} \quad (5)$$

і підставивши (4) в рівняння (3) одержимо співвідношення для визначення амплітудної функції

$$f_2''(\xi_3) + \alpha^2 f_2(\xi_3) = 0. \quad (6)$$

У формулах (4)-(6) позначено: V – фазова швидкість поширення SH -хвилі; k_1 – хвильове число; ω – частота; ρ – густина матеріалу шару; $\xi_3 = \lambda_3 x_3$, а величини $\lambda_j (j=1,2,3)$ і μ_{ij} обчислюються за допомогою формул роботи [3]. Із формулі (4), врахувавши розв'язок рівняння (6), одержуємо співвідношення для обчислення переміщень в шарі при поширенні SH -хвилі

$$u_2 = [A \cos(\alpha \xi_3) + B \sin(\alpha \xi_3)] \exp[i(k_1 \lambda_1 x_1 - \omega t)]. \quad (7)$$

У випадку відсутності збурень навантаження на поверхні шару сталі інтегрування A і B обчислюються із системи рівнянь, визначених граничними умовами для переміщень на поверхнях шару

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3} = 0 \quad (x_3 = \pm h). \quad (8)$$

При цьому із умови існування нетривіальних розв'язків системи рівнянь (8), одержимо дисперсійне рівняння

$$\alpha \lambda_3 h = \frac{m\pi}{2}, \quad (9)$$

яке при $m = 0, 2, 4, \dots$ визначає фазові швидкості симетричних відносно серединної площини шару мод, а при $m = 1, 3, 5, \dots$ – фазові швидкості мод антисиметричних відносно серединної площини шару. У формулі (9) m позначає номер моди. Враховуючи (5) із (9) одержуємо

$$\frac{V}{c_t} = \left[\frac{\mu}{\mu_{12}\lambda_1^2\lambda_2^2 + \sigma_{11}^{*0}\lambda_1^2} - \frac{(\mu_{32}\lambda_2^2 + \sigma_{33}^{*0})m^2\pi^2}{4(\mu_{12}\lambda_1^2\lambda_2^2 + \sigma_{11}^{*0}\lambda_1^2)(k_t h)^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

У формулі (10) c_t – швидкість зсувної хвилі, а k_t – її хвильове число. Моди відповідних номерів m з'являються в шарі даної товщини при критичних частотах, які визначаються із формули (9) про умові $k_1 = 0$. В кожному конкретному випадку початкового напруження шару фазова швидкість SH -хвилі номера m може бути вичислена за допомогою формули (10).

В роботі дослідження залежності фазових швидкостей SH -хвиль від початкових напружень проведено для випадку, коли хвиля поширюється в ізотропному шарі в додатньому напрямі осі Ox_1 , а шар знаходиться в стані однорідного розтягу-стиску вздовж товщини шару:

$$\sigma_{11}^{*0} = \sigma_{22}^{*0} = 0; \sigma_{33}^{*0} \neq 0. \quad (11)$$

Чисельне дослідження проведено із використанням потенціалу Мернагана. Аналіз результатів показав, що фазова швидкість SH -хвиль лінійно залежить від початкових напружень, а величина зміни швидкості, обумовлена початковими напруженнями, велика в околі критичної частоти, яка визначає відповідну моду. При цьому початкові напруження змінюють критичні частоти. Величина цієї зміни зростає із збільшенням номера моди.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: плоский стисливий шар, початкові напруження, лінеаризовані рівняння, критичні частоти, симетричні моди, антисиметричні моди

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2 т.: Т.2.Закономерности распространения. –К.: Наук. думка, 1986. – 536 с.
2. Гузь А.Н. Упругие волны в скимаемых материалах с начальными напряжениями и неразрушающий ультразвуковой метод определения двухосных остаточных напряжений//Прикл. механика. – 1994. – 30, №1. – С. 3-17.
3. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – К.: Наук. думка, 1973. –270 с.

Y.A. Zhuk^{1,2}, O.P. Zhuk¹, A.M. Bagno¹

SH-WAVES IN THE PRESTRESSED ELASTIC LAYER

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: opzhuk1939@gmail.com; alexbag2016@gmail.com

² Taras Shevchenko National University of Kyiv
Academician Glushkov Ave., 4e, 01033, Kyiv, Ukraine;
e-mail: yaroslavzhuk@knu.ua

In the work, on the basis of the linearized equations of nonlinear theory of elasticity, the finite initial stress influence on the phase velocity of the SH-waves propagating within isotropic elastic layer described by the elastic potential of arbitrary form is investigated. Numerical results are obtained for the Murnaghan-type potential.

К.О. Семенович¹

**ПРОЯВИ НЕЛІНІЙНИХ ЕФЕКТІВ ПРИ КУТОВОМУ РУСІ СИСТЕМИ
СПІВОСНИЙ РЕЗЕРВУАР-РІДИНА**

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
проспект Академіка Глушкова, 4-Е, 01033, Київ, Україна;

e-mail: kateryna.semenovych@knu.ua

На основі моделі, представлена в [1], розглянуто динаміку сумісного кутового руху співосного циліндричного резервуару, частково заповненого ідеальною нестисливою однорідною рідиною. Найбільш вивченим є випадок заданого поступального руху резервуару [2], розгляд кутових рухів вимагає введення додаткового векторного потенціалу. Відмінність у побудові моделі для випадку співосного резервуару полягає у необхідності залучення до розгляду додаткового набору базисних функцій для забезпечення виконання граничних умов на внутрішній стінці. В початковий момент часу система перебуває у положенні рівноваги, рух системи відбувається під дією гармонічного імпульсу, прикладеного до стінки резервуару. Було розглянуто різні випадки вимушених коливань системи. Проаналізовано вплив нелінійностей на кутові коливання співосного резервуару, а також на коливання вільної поверхні рідини, перерозподіл енергії [3] між формами коливань, проведено порівняння із лінеаризованим розв'язком.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійна динаміка рідини, сумісний рух, співосний резервуар.

1. Limarchenko O., Matarazzo G., Yasinsky V. Rotational motion of structures with tanks, partially filled by liquid.– Kyiv: FADA Ltd, 2003.– 286 p.
2. Луковський І. О. Дослідження вимушених нелінійних коливань рідини у кругових циліндрических симностях на основі семимодової моделі третього порядку / І. О. Луковський, О. В. Солодун // Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем. – Київ: Праці Інституту математики НАН України. – Т. 47. – 2003. – С. 161–179.
3. Limarchenko O.S., Semenovich K.O. Energy redistribution between the reservoir and liquid with free surface for angular motions of the system // J. of Mathem. Sci. – 2017. – 222, N 3. – P. 296 – 303.

K.O. Semenovych¹

MANIFESTATIONS OF NONLINEAR EFFECTS IN THE ANGULAR MOVEMENT OF THE COAXIAL TANK-LIQUID SYSTEM

¹ Taras Shevchenko National University of Kyiv, Academician Glushkov avenue, 4-E,
01033, Kyiv, Ukraine
e-mail: kateryna.semenovych@knu.ua

Dynamics of a coaxial cylindrical tank on pendulum suspension, partially filled with an ideal liquid, is considered in combined statement. The results of linear and nonlinear modeling of the behavior of the system under harmonic excitation of a tank are presented. The influence of nonlinearities on the angular oscillations of the tank, as well as on the oscillations of the free surface of the liquid was analyzed, and a comparison was made with the linearized solution.

В.З. Грищак

АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПРОБЛЕМИ КОЛИВАНЬ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ НАЯВНОСТІ ЛОКАЛІЗОВАНОГО ЗБУРЕННЯ

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка»,
e-mail: HRYSHCHAK.V.Z@dnu.one

Локалізоване, зокрема періодичне, зовнішнє збурення на сучасні силові елементи конструкцій нової техніки є одним з важливих факторів впливу на динамічні характеристики та поведінку досліджуваних систем в умовах, наблизених до експлуатаційних. На стадії створення нових конструкцій важливим елементом є наявність ефективних інженерних алгоритмів розрахунку на базі аналітико-чисельних підходів, які вимагають існування аналітичних залежностей із застосуванням функції Дірака, що є актуальною проблемою прикладної математики і механіки щодо вибору раціональних параметрів з точки зору несучої здатності конструкції із змінними параметрами по відношенню до реальних схем зовнішнього навантаження. Розглядається проблема нелінійних коливань механічної системи з параметрами, залежними від часу, і впливу локалізованого зовнішнього збурення на базі сингулярного диференціального рівняння

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 f}{dt^2} + B_1(t)f + \mu(B_2(t)f^2 + B_3(t)f^3) = Q_0(t)\text{DiracDelta}[t - t_0], \quad (1)$$

де $f(t)$ – шукана функція, $\varepsilon = \frac{1}{\omega_0}$, μ – параметри асимптотичного розвинення, ω_0 – частота власних коливань.

Відповідно до методу збурення по параметру нелінійності μ , розв'язок основного рівняння (1) отримується у двочленній апроксимації за формулою:

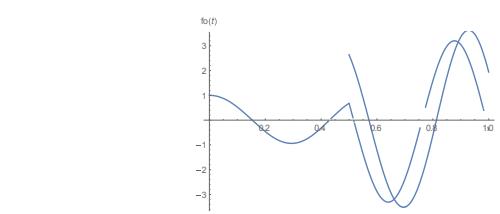
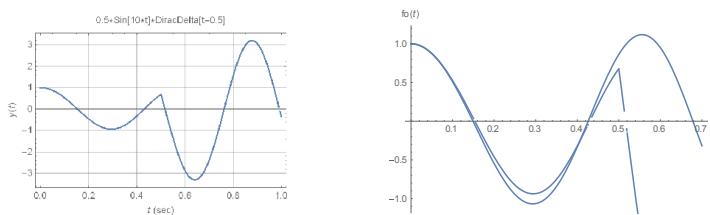
$$f(t) = \varphi_0(t) + \mu\varphi_1(t) \quad (2)$$

З подальшим застосуванням методу фазних інтегралів до розв'язку лінійної задачі, який є принциповим з точки зору досліджуваної проблеми.

Отримано наближений аналітичний загальний розв'язок нелінійної проблеми на базі двочленної апроксимації за методами збурення і ВКБ, в якому перша складова відповідає за власні коливання системи, друга – за вимушенні коливання з впливом локалізованого збурення, а третя складова – за характер нелінійності досліджуваної системи. Відповідні константи аналітичного розв'язку знаходяться з початкових умов.

На Рис.1 надані результати чисельних розв'язків для конкретних параметрів досліджуваної системи у відповідності до запропонованого наближеного аналітичного підходу та прямого чисельного інтегрування базового диференціального рівняння задачі при заданому характері локалізованого збурення

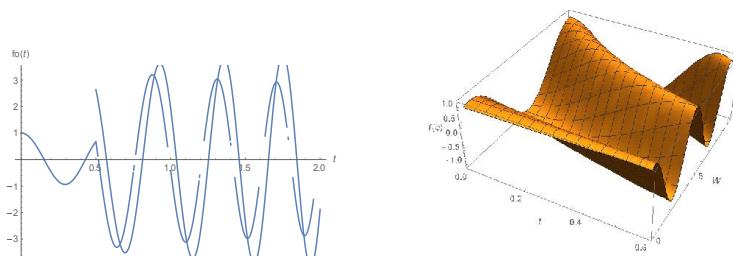
$$Q_0(t) = A\text{Sin}[\Omega t] \cdot \text{DiracDelta}[t - 0.5], \text{ зокрема для } \Omega = 10.$$



a)

б)

с)



д)

е)

Рис.1. а) – Пряме чисельне інтегрування основного рівняння задачі; б) – порівняння з наближенім асимптотичним розв’язком до точки локалізації збурення; с) – порівняння розв’язків в зоні, наблизений до точки локалного збурення; д) – порівняння розв’язків за точкою локалізації збурення (зовнішня асимптотика); е) – тривимірна залежність впливу частоти зовнішнього локалізованого періодичного навантаження.

Для аналізу впливу характеру нелінійності досліджуваної системи із змінними у часі параметрами у відповідності до запропонованого підходу дослідження необхідним є одержання ВКБ-розв’язків сингулярних лінійних рівнянь із змінними коефіцієнтами у двох наближеннях до величини часу локалізованого збурення (внутрішня асимптотика), а також в околі і за точкою локалізації збурення (зовнішня асимптотика). Для уточнення здобутих розв’язків за чисельним і аналітичним методами у запропонованому гібридному підході пропонується застосування принципу ортогоналізації за Гальоркіним, що дає змогу одержати наближені аналітичні розв’язки як для «малих», так і «великих» параметрів асимптотичного розвинення.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійні коливання, змінні за часом параметри, локалізоване збурення, гібридний асимптотичний підхід, наблизений аналітичний розв’язок, функція Дірака.

Література

1. Gristchak V.Z. Bifurcations and Postbuckling Behavior of Vibrating of the Nonhomogeneous System //J. Solids and Structures, Vol. 28 (8), pp. 821-831, 1990.
2. Geer J. F. A Hybrid Perturbation –Galerkin Technique for Partial Differential Equations / J. F. Geer, C. M. Andersen // Asymptotic Analysis and Numerical Solution of Partial Differential Equations.–Vol. 130. – P. 113–134, – 1991.
3. Geer J. F. Resonant Frequency Calculations Using A Hybrid Perturbation Galerkin Technique / J. F. Geer, C. M. Andersen // Appl. Mech. Rev.– Vol. 44, № 11. – P. 76–88. – 1991.
4. GristchakV. Z.A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Application / V. Z. Gristchak, Ye. M. Dmitrieva //TechnischeMechanik. – 1995. –Vol. 15. – P. 281–294.
5. Грищак В.З.Застосування гібридного ВКБ-Гальоркін методу дорозв’язання деяких краївих задач механіки / В.З. Грищак, Е.М. Дмитрієва// Доповіді НАН України, № 4, с. 63-67, 1999.
6. Wolfram Stephen. «Mathematica». A System for Doing Mathematics by Computer, SecondEdition, Addison Wesley Publishing Co., Redwood City, California, 1991.

Gristchak V.Z.

AN ASYMPTOTICSOLUTIONFOR VIBRATIONSTRUCTUTERS PROBLEMUNDER LOCALIZED PERTURBATION VALIABILITY

Dnipro University of Technology
e-mail: HRYSHCHAK.V.Z@dnu.one

An approximate analytical solution to the problem of forced oscillation of mechanical systems with time-varying parameters, taking into account localized dynamic disturbance, is proposed.

Н.В. Жоголева¹, В.Ф. Щербак¹

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ЗОВНІШНЬОЇ ПЕРІОДИЧНОЇ СИЛИ

¹Інститут прикладної математики і механіки НАН України,
бул. Батюка, 19, 84116, Слов'янськ, Україна;
e-mail: zhogoleva.nadia@gmail.com, scherbakv54@gmail.com

Багато механічних конструкцій піддаються дії зовнішніх періодичних сил. Тому цілком природно, що виникають теоретичні та інженерні проблеми для яких важливою стає оцінка величини зовнішнього впливу. Такі задачі типові, наприклад, для компенсації гармонійних збурень в алгоритмах автоматичного керування, викликаних ефектами затримки зворотного зв'язку, у віброізоляції конструкцій, для адаптивної фільтрації в обробці сигналів, в системах використання кінетичної енергії тощо [1,2,6]. В принципі, метод найменших квадратів, аналіз Фур'є та перетворення Лапласа забезпечують потенційні рішення виникаючих проблем. Однак ці методи можуть не підійти, наприклад, для алгоритмів керування з обробкою даних у реальному часі.

Метою даної роботи є використання методу інваріантних співвідношень у задачі визначення параметрів зовнішніх впливів на механічні системи. Цей метод [3] був розроблений в аналітичній механіці і був призначений, зокрема, для пошуку часткових розв'язків (залежностей між змінними) в задачах динаміки твердого тіла з нерухомою точкою. Його модифікація до проблем теорії спостереження та ідентифікації [5] дозволила за рахунок керувань синтезувати додаткові зв'язки між відомими та невідомими величинами вихідної системи, які виникають на траєкторіях її розширеної динамічної моделі.

Задача ідентифікації зовнішньої періодичної сили. В якості моделі автоколивної системи будемо розглядати рівняння вимушеного руху осцилятора Ліснара -- диференціального рівняння другого порядку, яке моделює коливання матеріальної точки

$$\ddot{x}(t) + f(x(t))\dot{x}(t) + g(x(t)) = u(t). \quad (1)$$

Тут $x(t)$ - відхилення точки від положення рівноваги в момент t , $\dot{x}(t)$ швидкість відхилення, множник $f(x(t))$ характеризує закон дисипації, а функція $g(x(t))$ потенціальні сили. Зовнішній вплив на осцилятор задається функцією

$$u(t) = \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} \cos k\omega t + a_{2k} \sin k\omega t).$$

Перепишемо (1) у формі динамічної системи в просторі станів, зробивши попередньо заміну змінних Ліснара за формулами $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t) + F(x(t))$,

де $F(x(t)) = \int_0^x f(\sigma) d\sigma$. В результаті отримуємо систему:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) - F(x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= -g(x_1(t)) + u(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Припустимо, що змінна $x_1(t)$ вимірюється, тобто є відома як функція часу. Компонента $x_2(t)$ і коефіцієнти a_i , $i = \overline{1, 2n}$ відрізка ряду Фур'є невідомі і повинні бути визначені з інформації про рух осцилятора. Такою інформацією є $x_1(t)$ та ті величини, які можна отримати лише з вихідних даних. Зокрема, виходячи з кількості невідомих, введемо вектор $y(t) = (y_0(t), y_1(t), \dots, y_{2n}(t))^T \in R^{2n+1}$ який задамо як розв'язок задачі Коші для деякої невизначененою поки що системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{y}(t) = U(t, y(t), x_1(t)), \quad y(0) \in R^{2n+1}. \quad (3)$$

Тобто розв'язок системи диференціальних рівнянь (3) ми будемо розглядати далі як відому вектор функцію часу при фіксації правої частини цієї системи.

Задача. Знайти асимптотично точні оцінки компоненти фазового вектора $x_2(t)$ і коефіцієнтів a_i , $i = \overline{1,2n}$ за даними про $x_1(t)$ для системи (2).

Синтез інваріантних співвідношень. Згідно з методом синтезу інваріантних співвідношень в задачах спостереження та ідентифікації [4] будемо шукати вихідні невідомі як суму невизначених поки що функцій від відомих величин

$$\begin{aligned} x_2 &= \Phi_0(t, x_1) + y_0, \\ a_i &= \Phi_i(t, x_1) + y_i, \quad i = \overline{1,2n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Співвідношення (4) в разі їх існування визначатимуть інваріантні співвідношення в фазовому просторі розширеної системи диференціальних рівнянь (2),(3). Введемо відхилення від співвідношень (4)

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= x_2 - \Phi_0(t, x_1) - y_0, \\ \varepsilon_i &= a_i - \Phi_i(t, x_1) - y_i, \quad i = \overline{1,2n}. \end{aligned} \quad (5)$$

Якщо $\varepsilon_0(t) = \varepsilon_1(t) = \dots = \varepsilon_{2n}(t) \equiv 0$ на деяких траєкторіях розширеної системи (2),(3) для деяких функцій $U(t, y, x_1)$, $\Phi_i(t, x_1)$, $i = \overline{0,2n}$, то формули (4) стають інваріантними співвідношеннями і визначають $x_2(t)$ і коефіцієнти a_i , $i = \overline{1,2n}$ саме на цих траєкторіях. На інших траєкторіях з'являються ненульові відхилення ε_i , $i = \overline{0,2n}$. Таким чином за вказаним методом інваріантних співвідношень треба визначити:

- 1) праву частину додаткових рівнянь $U(t, y, x_1)$ так, щоб існували співвідношення (4);
- 2) вибрати функції $\Phi_i(t, x_1)$, $i = \overline{0,2n}$, таким чином, щоб забезпечили виконання умови $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t) = 0$, $i = \overline{0,2n}$, в співвідношеннях (5).

Твердження 1. Для довільної сім'ї диференційованих функцій $\Phi_i(t, x_1)$, $i = \overline{0,2n}$, і допоміжної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 &= -\Phi'_{0x_1} y_0 - g(x_1) - \Phi'_{0t} - \Phi'_{0x_1}(\Phi_0 - F) + \tilde{u}, \\ \dot{y}_i &= -\Phi'_{ix_1} y_0 - \Phi'_{it} - \Phi'_{ix_1}(\Phi_0 - F), \quad i = \overline{1,2n}, \end{aligned} \quad (6)$$

де $\tilde{u} = \sum_{k=1}^n [(\Phi_{2k-1} + \xi_{2k-1}) \cos k\omega t + (\Phi_{2k} + \xi_{2k}) \sin k\omega t]$, формули (4) визначають інваріантні співвідношення для розширеної системи диференціальних рівнянь (2),(6).

Нам невідомо, на яких траєкторіях системи диференціальних рівнянь (2), (6) співвідношення (4) стають інваріантними. Тому природно розглядати задачу вибору функцій $\Phi_i(t, x_1)$, $i = \overline{0,2n}$ таким чином, щоб відхилення у формулах (5) прагнули до нуля. Для цього розглянемо диференціальні рівняння для відхилень. З урахуванням структури допоміжної системи (6) вони стають однорідними та приймають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_0 &= -\Phi'_{0x_1} \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^n (\varepsilon_{2k-1} \cos k\omega t + \varepsilon_{2k} \sin k\omega t), \\ \dot{\varepsilon}_i &= -\Phi'_{ix_1} \varepsilon_0. \quad i = \overline{1,2n} \end{aligned} \quad (7)$$

Нехай $\lambda > 0$ і функції, які залишались вільними приймають вигляд

$$\Phi_0(t, x_1) = \lambda x_1, \quad \Phi_{2k-1}(t, x_1) = x_1 \cos k\omega t, \quad \Phi_{2k}(t, x_1) = x_1 \sin k\omega t. \quad (8)$$

З використанням апарату адаптивної стабілізації динамічних систем [4] було доказано

Твердження 2. Диференціальні рівняння (7) для відхилень ε_i , $i = \overline{0,2n}$ з урахуванням (8) приймають вигляд

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_0 &= -\lambda \varepsilon_0 + \sum_{k=1}^n (\varepsilon_{2k-1} \cos k\omega t + \varepsilon_{2k} \sin k\omega t), \\ \dot{\varepsilon}_{2k-1} &= -\varepsilon_0 \cos k\omega t, \quad \dot{\varepsilon}_{2k} = -\varepsilon_0 \sin k\omega t, \end{aligned} \quad (9)$$

при цьому їх тривіальний розв'язок $\varepsilon_0(t) = \varepsilon_1(t) = \dots = \varepsilon_{2n}(t) \equiv 0$ має властивість глобальної асимптотичної стійкості.

Таким чином всі ступені свободи методу інваріантних співвідношень зафіксовано а саме: задана структура допоміжної системи диференціальних рівнянь (6), вибрано

доданки $\Phi_i(t, x_1)$, $i = \overline{0, 2n}$ в формулах (5) при яких $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon_i(t) = 0$, $i = \overline{0, 2n}$. Тобто формули (55) безпосередньо визначають асимптотичні оцінки невідомих вихідної задачі.

Фінальні співвідношення.

Підсумовуючи наведене вище маємо

Твердження 3. Формули

$$\hat{x}_2(t) = \lambda x_1(t) + y_0(t),$$

$$\hat{a}_{2k-1}(t) = x_1(t) \cos k\omega t + y_{2k-1}(t),$$

$$\hat{a}_{2k}(t) = x_1(t) \sin k\omega t + y_{2k}(t), \quad k = \overline{1, n},$$

де $y_i(t)$, $i = \overline{0, 2n}$ є довільний розв'язок задачі Коши для додаткової системи диференціальних рівнянь

$$\dot{y}_0 = -\lambda y_0 - g(x_1) - \lambda(\lambda x_1 - F(x_1)) + \tilde{u},$$

$$\dot{y}_{2k-1} = x_1 k \omega \sin k\omega t - (\lambda x_1 - F + y_0) \cos k\omega t,$$

$$\dot{y}_{2k} = -x_1 k \omega \cos k\omega t - (\lambda x_1 - F + y_0) \sin k\omega t, \quad k = \overline{1, n},$$

де $\tilde{u} = \sum_{k=1}^n [(x_1 \cos k\omega t + \xi_{2k-1}) \cos k\omega t + (x_1 \sin k\omega t + \xi_{2k}) \sin k\omega t]$, визначають асимптотичні оцінки невідомих $x_2(t)$, a_i , $i = \overline{1, 2n}$.

Запропонована схема визначення швидкості коливань осцилятора та коефіцієнтів наближення за допомогою відрізу ряду Фур'є ($n=15$) зовнішньої сили була чисельно промодельована для осцилятора Дуффінга та математичного маятника. Отримані результати засвідчують працевздатність наведеного методу.

Acknowledgments. This work was supported by a grant from the Simons Foundation (PD-Ukraine-00010584, N.V. Zhogoleva and V.F. Shcherbak)

КЛЮЧОВІ СЛОВА: спостереження нелінійних систем, інваріантні співвідношення, осцилятор, стабілізація відхилень.

1. Chauvin J., Petit N. Reconstruction of the Fourier expansion of inputs of linear time-varying systems, Automatica 46 (2) (2010) 354–361.
2. Torres, L.; Gómez-Aguilar, J.; Jiménez, J.; Mendoza, E.; López-Estrada, F.; Escobar-Jiménez, R. Parameter identification of periodical signals: Application to measurement and analysis of ocean wave forces. Digit. Signal Proc. vol. 69, October – 2017, 59–69.
3. Kharlamov P. V. On invariant relationships of a system of differential equations, Mekhanika Tvergogo Tela, 6, 15–24 (1974). (in Russian)
4. LaSalle J. P. Stability theory and invariance principles. In Dynamical systems (eds. L. Cesari, J. K. Hale and J. P. LaSalle), Academic Press, (1976), 211–222.
5. Zhogoleva N. V. Shcherbak V. F. Synthesis of additional relationships in inverse control problems, Trudy IPMM NAN України, vol. 29, 69–76 (2015). (in Russian)
6. Zhogoleva N.V., Shcherbak V.F. Determination of External Harmonic Influence on the Self-Oscillating System // International Applied Mechanics. vol. 59, No. 2, 2023 pp.238-244, March, – 2023.

N.V. Zhogoleva¹, V.F. Shcherbak¹

IDENTIFICATION OF EXTERNAL PERIODIC FORCE PARAMETERS

¹Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine,

Batiuka str., 19, 84116, Sloviansk, Ukraine;

e-mail: zhogoleva.nadia@gmail.com, scherbakv54@gmail.com

The problem of determining the coefficients of the partial sum of the Fourier series approximating the action of a periodic force on the Lienard oscillator is considered. A method is proposed for asymptotic estimation on the trajectories of an extended system of unknown variables in the form of functions of known ones. Relationships are given for estimating the oscillator velocity and the coefficients of the Fourier series based on measurements of the oscillator displacement.

Д. В. Пошивач¹

**ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СТІЙКОСТІ ПРУЖНИХ СИСТЕМ ПРИ
СТОХАСТИЧНОМУ ПАРАМЕТРИЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ МЕТОДОМ
МОНТЕ-КАРЛО**

¹ Кіївський національний університет будівництва і архітектури,
просп. Повітряних Сил, 31, 03037, Київ, Україна;
e-mail: poshyvach.dv@knuba.edu.ua

У багатьох випадках інженерної практики гнучкі конструктивні елементи такі як стержні, пластини й оболонки перебувають під дією динамічних поздовжніх навантажень, у тому числі змінюваних у часі стохастичним чином. Такі навантаження спричиняють зміну в часі параметрів поперечної жорсткості системи, збуджуючи поперечні коливання. Такі коливання їй відповідні навантаження називають параметричними. На відміну від звичайних вимушених коливань, параметричні не стабілізуються з часом, а згасають або необмежено зростають, що означає динамічну стійкість або нестійкість пружної системи. При цьому, динамічній нестійкості (параметричному резонансу) відповідають не окремі значення, а цілі області у просторі амплітудного та частотного параметрів навантаження [1]. Навіть у випадку простого гармонічного навантаження диференціальні рівняння параметричних коливань не розв'язуються в елементарних функціях. Стохастичний характер навантаження, у свою чергу, додатково ускладнює визначення реакції пружної системи на параметричне навантаження. Це викликає потребу застосування тих чи інших наблизених чисельних методів для дослідження динамічної стійкості системи.

При стохастичному параметричному навантаженні динамічну стійкість пружної системи можна розуміти як стійкість за імовірністю стохастичної системи. Пропонується методика дослідження стійкості за імовірністю параметричних коливань пружних систем при випадковому навантаженні методом Монте-Карло [4].

У просторі амплітудного й частотного параметрів динамічного навантаження обираються деякі точки, а саме вузли координатної сітки з певними кроками. Для кожної з обраних точок проводиться серія випробувань, що полягають у чисельному моделюванні випадкових коливань пружної системи при відповідних параметрах навантаження. За результатами серії випробувань визначається статистична частота втрати стійкості системи в дослідженій точці. Між дослідженими точками будуються ізолінії статистичної частоти. Смуга побудованих ізоліній містить шукану границю стійкості за імовірністю випадкових параметричних коливань пружної системи. Кожне чисельне випробування включає генерування реалізації випадкового навантаження — послідовності його значень із певним кроком по часу. Ці значення підставляються в систему простих диференціальних рівнянь, до якої зведено математичну модель параметричних коливань пружної системи. Система рівнянь розв'язується методом Рунге-Кутти 4-го порядку. Отримана послідовність значень випадкових переміщень пружної системи оцінюється на предмет тенденції розвитку з часом: зменшення амплітуд означає стійкість, зростання — нестійкість. Для використання в означеній методиці бажаними є системи диференціальних рівнянь із обмеженою кількістю невідомих функцій. У різних випадках, вони отримуються або аналітичними перетвореннями вихідних диференціальних рівнянь динамічної

рівноваги пружних систем, або редукуванням їх скінченноелементних моделей [2].

За означеню методикою розглянуто декілька задач, наприклад, про кругову циліндричну оболонку під дією динамічного поздовжнього навантаження на торцевих крайках. Вихідну систему диференціальних рівнянь у частинних похідних зведені методом узагальнених координат до нескінченної послідовності незалежних рівнянь у звичайних похідних, із однією невідомою функцією кожне. Розглянуто навантаження, що змінюється в часі як широкосмуговий випадковий процес, заданий функцією своєї спектральної щільності. Динамічну стійкість пружної системи, представленої диференціальним рівнянням із однією невідомою, досліджено в певних межах відносної інтенсивності навантаження й відносної характеристики частоти його спектра. У просторі цих відносних параметрів побудовано сімейство ізоліній статистичної частоти втрати стійкості. Їх порівняно з границею асимптотичної стійкості за імовірністю, яку наблизена теорія Стратоновича-Хасьмінського [3] пропонує для системи з одним ступенем вільності при широкосмуговому випадковому параметричному впливі. Також, досліджено зварену двотаврову балку під дією динамічного поперечного навантаження у площині стінки. Таке навантаження змушує згинальні коливання балки в цій площині. Але така балка значно більше схильна до згинальних і крутильних коливань із площини стінки, по відношенню до яких навантаження є параметричним. Створено скінченноелементну модель балки. Модальний аналіз моделі показав, що дві найнижчі частоти власних коливань відповідають згинанню з площини стінки і крученню навколо поздовжньої осі. За допомогою методики редукування скінченноелементних моделей [2], що передбачає розкладення вектора вузлових переміщень по формах власних коливань, отримано матриці жорсткості й геометричної жорсткості для системи з двома ступенями вільності, які відповідають зазначеним формам власних коливань балки з площини стінки. Досліджено динамічну стійкість цієї редукованої системи при навантаженні, яке є вузькосмуговим випадковим процесом. Побудовано ізолінії статистичної частоти втрати стійкості. Їх порівняно з границею зони комбінаційного параметричного резонансу сумарного типу для системи з двома ступенями вільності при детермінованому гармонічному впливі [1].

КЛЮЧОВІ СЛОВА: параметричні коливання, випадкові коливання, динамічна стійкість, стійкість за імовірністю, метод Монте-Карло.

1. Вибрации в технике: Справочник: В 6-ти т. — Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. — М.: Машиностроение, 1978. — 352 с.
2. Гоцуляк Є. О., Дехтярюк Є. С., Лук'янченко О. О., Борисенко В. Г. Методика редукування рівнянь в задачах параметричних коливань конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. — Вип. 74. — К.: КНУБА, 2004. — С. 24-34.
3. Диментберг М. Ф. Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 176 с.
4. Пошивач Д. В. Чисельний аналіз динамічної стійкості кругової циліндричної оболонки при випадковому параметричному збудженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. — Вип. 71. — К.: КНУБА, 2002. — С. 115-124.

D. V. Poshyvach¹

INVESTIGATION OF DYNAMIC STABILITY OF ELASTIC SYSTEMS UNDER STOCHASTIC PARAMETRIC LOADS WITH MONTE CARLO SIMULATION METHOD

¹ Kyiv National University of Construction and Architecture,
Air Forces Ave., 31, 03037, Kyiv, Ukraine;
e-mail: poshyvach.dv@knuba.edu.ua

A technique is introduced for numerical investigation of dynamic stability of elastic systems under stochastic parametric loads with Monte Carlo simulation method. Two examples of plotting of statistical frequency stability boundaries for such systems with the technique are considered.

I.B. Янчевський¹, O.X. Остос²

**«РЕЗОНАНСНІ» ЯВИЩА ПРИ ЗБУДЖЕННІ СФЕРИЧНОГО СЕГМЕНТА
В НАПІВНЕСКІНЧЕННІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОРОЖНИНІ
З ІДЕАЛЬНОЮ СТИСЛИВОЮ РІДИНОЮ**

¹*Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна;*

e-mail: i.yanchevskyi@kpi.ua

²*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна*

Взаємодія акустичних, пружних і електромагнітних хвиль з системою відбиваючих тіл у безмежному просторі є предметом численних досліджень. Різноманіття дифракційних процесів за методами і підходами до дослідження можна умовно поділити на процеси взаємодії хвиль з одиночним об'єктом в безмежному середовищі, і на такі, що пов'язані з наявністю системи тіл. У переважній більшості випадків розглядаються системи однотипних тіл, зазвичай, це системи або циліндричних, або сферичних тіл. Дифракційні задачі для систем тіл, обмежених неоднотипними поверхнями, зокрема, циліндричними й сферичними, досліджені значно менше [2]. У прикладному контексті такі задачі можуть бути пов'язані з вивченням акустичних процесів у рамках установлення принципів організації руху і взаємодії плаваючих часток, крапель рідини, газових бульбашок і кавітаційних утворень в паливопроводах за допомогою виникаючих у таких процесах радіаційних сил [1, 2]. Історично перші дослідження і багато наступних були виконані за допомогою побудови розв'язків відповідних граничних задач методами розділення змінних і застосуванням теорем додавання. В роботі [2] більшість задач стосується усталених хвильових процесів, які описуються рівнянням Гельмгольца, але також наведено розв'язки аналогічних задач для вібраційних процесів, що відбуваються в нестисливій рідині й описуються рівнянням Лапласа. На основі аналізу числових результатів встановлено особливості взаємодії акустичних хвиль з тілами циліндричної та сферичної форми.

В даній роботі побудовано точний аналітичний розв'язок задачі для напівнескінченної кругової жорсткої циліндричної порожнини, яка заповнена стисливою рідиною і містить сферичний сегмент. Торець порожнини також є жорстким. Передбачається, що середовище зазнає кінематичне збудження за рахунок випромінюваної сферичним тілом періодичної радіальної швидкості або динамічне збудження за рахунок випромінюваного тілом акустичного тиску. Метою роботи є отримання частотних залежностей для тиску та швидкості при різних співвідношеннях геометричних параметрів системи з метою виявлення нових ефектів, обумовлених хвильовою взаємодією сферичного сегмента із границями порожнини.

Для задоволення граничних умов на поверхні сферичного сегмента, а також на поверхні циліндричної порожнини та її торця, застосовані співвідношення, що дозволяють представити сферичні хвильові функції через циліндричні й навпаки. В результаті розв'язання граничної задачі зведене до нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів загального розв'язку, матриця якої містить невласні інтеграли. Зазначена система розв'язується методом усічення. Точність задоволення граничним умовам контролюється. Як результат визначені залежності акустичного тиску і швидкості від частоти збудження тіла в характерних точках порожнини

при різних співвідношеннях між геометричними параметрами системи. Чисельні результати отримані для віссиметричного випадку, однак розроблений підхід може бути розвинений для дослідження і досить загальних конфігурацій.

Слід зазначити, результати розв'язання задачі про коливання сферичного сегмента в нескінченій порожнині з рідиною чисельним методом представлено в статті [3]. В цій статті досліджено характеристику та закони акустичного випромінювання сферичних ковпачкових перетворювачів і решіток, а саме проведені розрахунки про випромінювальний тиск і спрямованість випромінювання сферичних ковпачкових перетворювачів і решіток у сферичній координатах на основі сферичного гармонійного перетворення Фур'є, а також наведено стислі вирази для них у дальньому полі. Показано залежність випромінювання сферичного ковпака від кута нахилу полюса сферичного ковпака, радіуса сферичної перегородки, частоти коливань. Дослідження показують, що коефіцієнт, який є відношенням величини радіуса сферичної перегородки до довжини акустичної хвилі визначає характеристику акустичного випромінювання сферичних ковпачкових перетворювачів та антенних решіток. Зі збільшенням значення цього коефіцієнта в ширині променя з'являються пульсації, причому чим більше його значення, тим більше пульсацій в ширині променя.

Виконані попередні обчислення показали, що обмеженість порожнини в осьовому напрямку (при відносно невеликому віддаленні сферичного збудника від жорсткого днища) приводить до появи в рідині нових «аномальних» частот, відмінних від подібних частот, властивих нескінченій порожнині. Амплітуди гідродинамічних характеристик при таких частотах зростають на декілька порядків. При цьому навіть у випадку, коли в нескінченій порожнині аномальні явища виражені слабо (радіус сферичного сегмента малий у порівнянні з радіусом порожнини), у напівнескінченій порожнині вони можуть проявитися суттєво.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: сферичний сегмент, напівнескінчена циліндрична порожнина, коливання, гідродинамічні параметри

1. Жук О.П., Гузь О.М., Жук Я.О. Радіаційні сили акустичного поля в рідині з включеннями. – Київ: Альянт, 2023. – 240 с.
2. Кубенко В.Д., Янчевський І.В. Дифракція акустичних хвиль на системах неоднотипних тіл. – Київ: Політехніка, 2024. – 268 с.
3. Xia J. Analysis on acoustic directivity of spherical cap transducers / J.Xia, H.Huang, C.Zhang, Q.Li //ActaAcustica. – 2018. – 43. – P. 592–599.

I.V. Yanchevskyi¹, O.Kh. Ostos²

«RESONANCE» PHENOMENA DURING EXCITATION OF SPHERICAL SEGMENT IN SEMI-INFINITE CYLINDRICAL CAVITY WITH IDEAL COMPRESSIBLE FLUID

¹National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Beresteyskyi Ave. 37, 03056, Kyiv, Ukraine;
e-mail: i.yanchevskyi@kpi.ua

²S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine

A problem of fluid excitation by oscillating spherical segment with regard for the effect of limiting surface of a semi-infinite round cylindrical cavity is considered. A solution of Helmholtz equation under the corresponding boundary conditions on the surface is searched for to construct a potential of the fluid rates. As a result an infinite set of linear algebraic equations relative to the expansion coefficient of the unknown potential have been obtained. The system is solved by the truncation method. The accuracy of satisfying the boundary conditions is controlled. As a result, the dependences of the acoustic pressure and velocity on the body excitation frequency at characteristic points of the cavity are determined at different ratios between the geometrical parameters of the system.

I.В.Яничевський, Т.В. Гетьман

**РОЗРОБКА НАДБУДОВИ В ANSYS ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНИХ
ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ НА ОСНОВІ ACT**

*Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна
e-mail: i.yanchevskyi@kpi.ua*

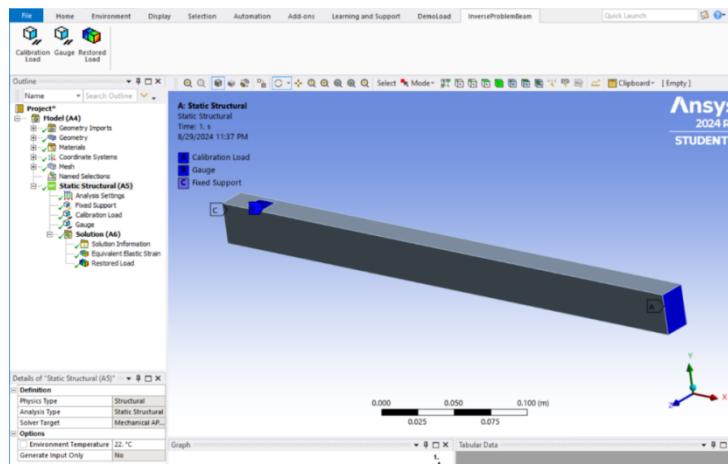
На сьогодні в багатьох галузях промисловості, зокрема і в машинобудуванні, все частіше постає питання автоматизації процесів розрахунку та розробки складних інженерних систем. Це обумовлено передусім питаннями ефективного використання часу інженерів та розробників, необхідностю зменшення часу на випуск продуктів, обмеженого фінансування, виправлення помилок, ін. Тому широкого розповсюдження отримали так звані Computer-Aided Engineering (CAE)-пакети, які дозволяють розв'язувати широкий клас прикладних задач механіки.

До найбільш популярних CAE-пакетів в інженерній практиці слід віднести комплекс ANSYS, який в своєму складі має багато різноманітних модулів для розрахунку задач з різних розділів механіки. Зокрема, до його складу входить програма ANSYS Mechanical APDL (MAPDL), яка має потужне математичне ядро для розрахунку механічних моделей як в статичній, так і динамічній постановці. А також програма ANSYS Workbench з більш сучасним та зручнішим інтерфейсом користувача. Проте при кожній модифікації розрахункової моделі його користувачі мають проводити багато підготовчих операцій та виконувати чималу монотонну роботу. Для спрощення цих етапів ANSYS пропонує використовувати Application Customization Toolkit (ACT) [2], який дозволяє адаптувати робочий процес для ANSYS Workbench з використанням користувачких компонентів, провести автоматизацію простих та складних робочих процесів. Він дозволяє користувачам втілювати різноманітні наукові розробки, які не реалізовані в програмному комплексі, та інтегрувати продукти ANSYS в зовнішні робочі процеси. Все програмування ведеться за допомогою сучасних технологій, які знайомі багатьом студентам та інженерам, такі як C# або IronPython (реалізація Python для платформи Microsoft.NET, є написаним на C# ретранслятором Python коду) – для написання скриптів; та XML – для загальної організації надбудови (створення тулбарів, кнопок, визначення місця розташування скриптів і т.ін.).

ANSYS ACT дозволяє автоматизувати роботу на всіх етапах розрахунків: препроцесинг, розв'язання, постпроцесинг. При цьому, користувачам відповідних Надбудов можна не володіти усіма спеціальними навичками. Основна робота в ANSYS Mechanical здійснюється через об'єкти ExtAPI.DataModel.Project. Ця ієархія вкладених об'єктів відповідає дереву моделей, яке доступне зліва в головному вікні ANSYS Mechanical, в якому відображаються граничні умови та результати розрахунків [2].

На Рис. 1 зображені інтерфейси розробленої авторами тестової версії Надбудови для ANSYS Mechanical для автоматизації розв'язання т.зв. обернених граничних задач механіки, алгоритм якого представлено в монографії [1]. Слід звернути увагу, що класичні версії ANSYS не передбачають можливість розв'язання зазначеного класу задач. Вхідними даними для таких задач виступають задані деформації, механічні на-

пруження та наявна інформація про діючі на конструктивний елемент навантаження (зони прикладання, напрями).



Puc. 1

Використання Надбудов дозволяє як автоматизувати значну частину роботи користувача ANSYS, використовуючи розроблені кнопки для швидкого внесення необхідних даних, так і внесення в так звану «чорну скриньку» основних алгоритмів обробки вхідних даних та подальших розрахунків.

Отже, використання технології ANSYS ACT дозволяє автоматизувати виконання більшості рутинних та монотонних процесів для ANSYS Workbench, зменшивши при цьому час на виконання підготовчих операцій, розрахунків, а також, в майбутньому, провести необхідну обробку результатів. Ця технологія дозволяє також впроваджувати методи розв'язання унікальних задач механіки, які не реалізовані в базових версіях ANSYS. Тому розробка нових Надбудов за допомогою ANSYS ACT має широкі перспективи як в прикладному, так і в теоретичному контексті.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: ANSYS ACT, граничні обернені задачі, автоматизація розрахунків, Python

1. Янчевський І. В. Нестаціонарні коливання біноморфних електропружиних тіл. – Київ: Політехніка, 2023. – 448 с.
2. ANSYS, Inc, ANSYS ACT Developer's Guide. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://catalog.ansys.com/Developers.cshtml> 30.08.2024

I.V.Yanchevskyi, T.V. Hetman

DEVELOPMENT OF AN EXTENSIONS IN ANSYS FOR SOLVING INVERSE BOUNDARY MECHANICS PROBLEMS USING ACT

*National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute",
Beresteyskyi Ave. 37, 03056, Kyiv, Ukraine;
e-mail: i.yanchevskyi@kpi.ua*

Today, in many industries, including mechanical engineering, the issue of automating the calculation processes and development of complex engineering systems is increasingly arising. This is primarily due to the need for efficient use of engineer's and developer's time, the necessity for rapid product release or error correction, limited funding, and so on. The use of ANSYS ACT technology enables the automation of most routine and repetitive processes within ANSYS Workbench, thereby reducing the time required for preparatory operations, calculations, and eventually, the necessary post-processing of results. The paper demonstrates the capabilities provided by ANSYS ACT through the development of an extension for solving boundary inverse problems.

**Ю.Г. Серъожкін¹, В.П. Кислий¹, В.А. Мороженко¹, Є.А. Соловйов¹, В.М. Настич²,
Л.В. Борковська¹**

**ЛАЗЕРНО-АКУСТИЧНИЙ МЕТОД ВИЯВЛЕННЯ ПРИХОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ
ШЛЯХОМ РЕЄСТРАЦІЇ КОЛИВАНЬ ГРУНТУ**

¹ Інститут фізики напівпровідників ім. В.Є. Лашкарьова НАНУ,
просп. Науки, 41, 03028, Київ, Україна;
e-mail: yuseroz@gmail.com

² Казенне підприємство спеціального приладобудування «Арсенал»,
бул. Князів Острозьких, 8, 01010, Київ, Україна

Проблема виявлення та знешкодження прихованих у глибині ґрунту мін, особливо пластикових, існує протягом багатьох десятиліть в усьому світі. З початком військової агресії росії проти України ця проблема набула особливої актуальності і для нашої країни. Наразі існують декілька методів виявлення мін: біологічний, електромагнітний, оптичний, ядерний, акустичний та механічний. Кожен з них ефективний за певних умов залежно від типу міни, вибухового матеріалу та ґрунту. Найбільш розповсюдженим сенсором мін є металевий детектор, в якому використовується явище електромагнітної індукції, проте він малоефективний для виявлення пластикових мін через невеликий вміст металу. Підвищення чутливості металевих міношукачів зазвичай призводить до частих помилкових спрацьовувань через велику кількість металевих предметів, таких як шрапнель, гільзи та інше, що розкидані по мінному полю.

В останні роки розроблено нові методи виявлення мін, у тому числі пластикових. Одним з них є лазерно-акустичний метод, що зарекомендував себе як метод, який забезпечує високу ймовірність виявлення і дуже низький рівень помилкових спрацьовувань. Засіб полягає в збудженні коливань ґрунту (сейсмічних хвиль) при опроміненні акустичними хвиллями в діапазоні частот від 50 до 500 Гц та вимірюванні вібраційних характеристик поверхні ґрунту в кількох точках за допомогою лазерного допплерівського віброметра.

Інформаційним сигналом при лазерному гетеродинному прийомі є змінна складова струму фотоприймача, яка утворюється при інтерференції випромінювання лазерного гетеродину (опорний сигнал) та випромінювання гетеродину, яке розсіялося поверхнею, чиї механічні коливання аналізуються (прийнятий сигнал). Інформаційний сигнал реєструється на проміжній частоті, яка дорівнює різниці частот опорного та прийнятого сигналів. Він є модульованим за фазою, а модуляція фази залежить від параметрів руху поверхні, яка розсіює.

Взаємодія закопаного у ґрунті об'єкта з пружними хвиллями землі викликає його вібрацію. Внаслідок механічних резонансів та більшої механічної пружності об'єкта в порівнянні з сусіднім ґрунтом амплітуда коливань ґрунту безпосередньо над об'єктом перевищує амплітуду коливань навколошньої території. Прихований у ґрунті об'єкт виявляється за вищою амплітудою вібрації поверхні над цим об'єктом. Схема лазерно-акустичного методу пошуку підземних прихованых об'єктів (мін) наведена на Рис.1.

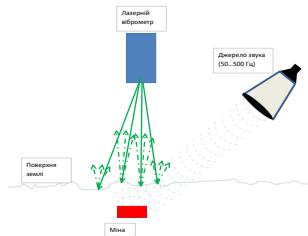


Рис.1.

Прикладом розробки лазерно-акустичної системі виявлення прихованіх об'єктів є лазерний багатопроменевий диференціальний інтерферометричний датчик (LAMBDIS), розроблений в національному центрі фізичної акустики (National Ctr. for Physical Acoustics, USA). Здатність LAMBDIS виявляти закопані об'єкти була продемонстрована в польових експериментах (Рис.2).

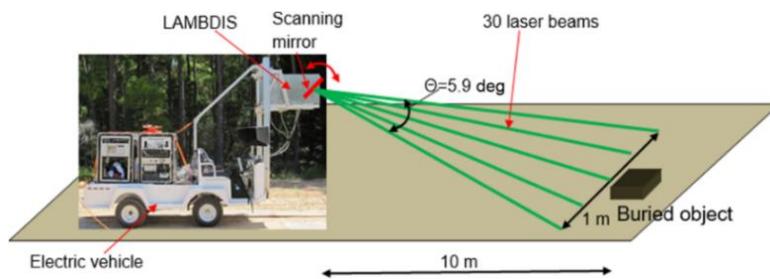


Рис.2.

Нами за допомогою лазерного допплерівського віброметру досліджувався акустичний відгук від різних ґрунтів (гравій, пісок) із зануреним пластиковим та металевими контейнерами розмірами приблизно $10 \times 10 \times 3 \text{ см}^3$. Для вимірювання амплітуди коливань поверхні, що розсіює лазерне випромінювання, використовувалась методика, яка наведена в [1]. Згідно цієї методики амплітуда коливань поверхні розраховувалася за формулою (Рис.3.):

$$a = 100 \cdot 10^{-\Delta I/20} \text{ pm},$$

де ΔI дорівнювало різниці між амплітудою відгуку на частоті коливань та амплітудою відгуку на нульової частоті. У даному прикладі поверхня коливалась з амплітудою 1 нм на частоті 1 КГц.

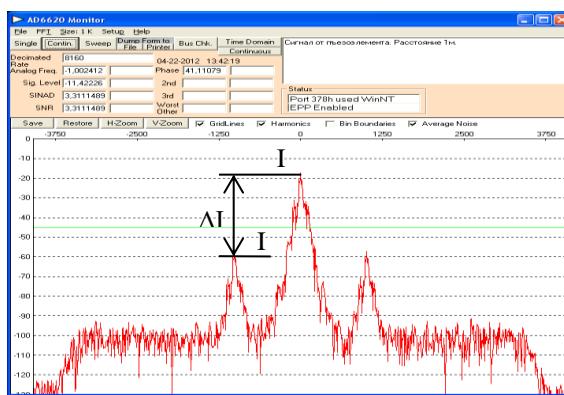


Рис.3.

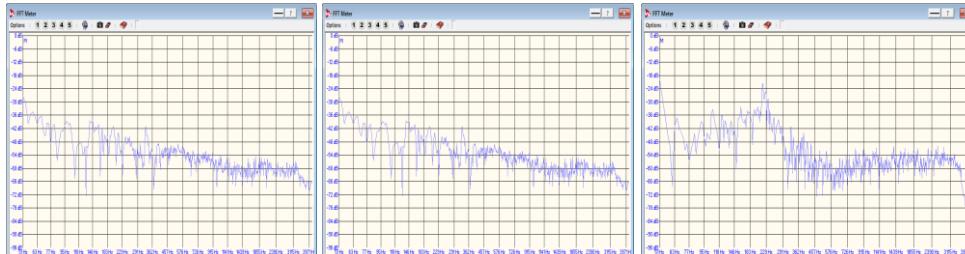
Експериментальна установка для дослідження акустичного відгуку зображена на Рис.4.

Аналіз сигналу від поверхні пластикового контейнера показав, що амплітуда її коливань становить 2 нм, а у випадку опромінення її акустичним сигналом зі спектром білого шуму – 50 нм.



Rис.4.

На Рис.5. наведено спектри сигналів від піску без опромінення акустичним сигналом (а), сигнал від піску з опроміненням білим шумом (б) і з пластиковим контейнером захуреним на глибині 5 см з опроміненням білим шумом (в). Амплітуда коливань поверхні піску над контейнером становила 10 нм, що достатньо для реєстрації та подальшої обробки.



Rис.3.

Подальший розвиток лазерно-акустичного методу передбачає підвищення швидкості обробки сигналу та можливість створення двовимірних мап зображення прихованих об'єктів. Можна очікувати, що мобільний лазерно-акустичний комплекс може бути використаний для виконання задач гуманітарного розмінування території України. Слід зазначити, що такі системи ще знаходяться на стадії розробки і не представлені на ринку, але мають потенціал для розвитку. Дослідження, що виконуються в Інституті фізики напівпровідників дозволяють розпочати в Україні розробку лазерно-акустичних комплексів виявлення мін та інших прихованых об'єктів .

Робота виконується в рамках проекту 2023-04/0088 НФДУ.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гуманітарне розмінування, лазерно-акустичний метод виявлення прихованых об'єктів, лазерний віброметр

1. Yu. Serozhkin, O. Kollyukh, Y. Venger, Detection of dust grains vibrations with a laser heterodyne receiver of scattered light // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transf. 109(8) 2008 1517-1526, DOI:10.1016/j.jqsrt.2008.01.008
2. V. Aranchuk et.al., Laser multibeam differential interferometric sensor for acoustic detection of buried objects // Optical Engineering, 62(2) (2023) 024103. DOI: 10.1117/1.OE.62.2.024103.

Г. О. Фесенко

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНОГО ЧВЕРТЬ ПРОСТОРУ

*ОНУ імені І. І. Мечникова,
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій,
бул. Всеволода Змієнка, 2, 65082, Одеса, Україна;
e-mail: fesenko@onu.edu.ua*

Побудовано хвильове поле пружного чверть простору, коли одну грань жорстко закріплено, а на іншій вздовж прямокутної ділянки діє динамічне нормальне стискальне навантаження. Реалізовано метод, запропонований Поповим Г.Я. [2]. Метод базується на введенні двох нових функцій, які виражаються сумаю та різницею похідних переміщень. Рівняння руху розділяються на систему з двох рівнянь і одного рівняння, яке розв'язується незалежно. Границні умови також розділені. Метод було реалізовано Вайсфельд Н.Д. та Поповим Г.Я. для аналогічної задачі у статичної постановці [3]. Інтегральні перетворення Лапласа та Фур'є застосовуються послідовно до рівнянь і граничних умов на відміну від традиційних підходів, коли інтегральні перетворення застосовуються до подань розв'язку через гармонічні функції. Це призводить до одновимірної векторної неоднорідної краївої задачі відносно невідомої трансформанти переміщення. Задача розв'язана за допомогою матричного диференціального числення [1]. Отримане при цьому сингулярне інтегральне рівняння розв'язано методом ортогональних поліномів, підсумовуючи слабко збіжну частину та аналізуючи сингулярність невідомої функції на кінцях інтервалу, зводячи його до нескінченної алгебраїчної системи 1-го роду. Вихідне поле переміщень знайдено після застосування обернених інтегральних перетворень. Для випадку усталених коливань проаналізовано амплітуду вертикальних переміщень в залежності від форми ділянки навантаження, значень власних частот коливань та матеріалу пружного середовища.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: пружний чверть простір, динамічне навантаження, матричне диференціальне числення, сингулярне інтегральне рівняння, ортогональні поліноми.

1. Попов Г.Я., Абдуманапов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. –Алматы: Рауан, 1999. – 113 с.
2. Popov G.Ya. On reducing the equations of motion of an elastic medium to one independent and to two jointly solvable equations // DAN. – 2002. – **384**, №2. – P. 193–196.
3. Vaysfeld N.D., Popov G.Ya. Mixed Boundary Value Problem of Elasticity for a Quarter Space // Mech. Solids. – 2009. – 44, P. 712–728

A. A. Fesenko

DYNAMICAL PROBLEM FOR ELASTIC QUARTER SPACE

*Odesa I. I. Mechnikov National University,
Vsevoloda Zmienka Str., 2, 65082, Odesa, Ukraine;
e-mail: fesenko@onu.edu.ua*

The dynamical problem for the elastic quarter space was considered using the method of Popov G.Ya. The system of motion equations was divided into the system of two equations and independently solved equation. The integral transforms lead to the one-dimensional vector boundary problem, which was solved with the matrix differential calculus. The integral equations were derived and resolved in the process. The vertical displacement was analyzed in a case of steady state oscillations.

Ю. П. Глухов

**ДВІ МОДЕЛІ ЗАХИСНОГО ПОКРИТТЯ ДЛЯ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ З
ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: gluchov.uriy@gmail.com*

Дане дослідження спрямовано на вивчення хвильових процесів в шаруватих пружних тілах при врахуванні ряду ускладнюючих факторів: різних моделей шаруватого покриття, початкових напружень, різних швидкостей руху поверхневого навантаження. Результати досліджень можуть бути використані в інженерній та науковій практиці для проектування та розрахунку багатошарових елементів конструкцій, створення в більш ефективних методів оцінки і прогнозування стану об'єктів з шаруватим покриттям з врахуванням реальних властивостей пружних тіл.

Розглядаються і порівнюються дві моделі шаруватого стисливого або нестисливого півпростору: 1) пружна пластина на пружному півпросторі; 2) верхній шар (захисне покриття) моделюється зосередженими масами.

Зосереджена сила рухається по вільній поверхні захисного шару з постійною швидкістю під довільним кутом.

Границі поверхні елементів шаруватого середовища є плоскі і паралельні між собою. Початковий напружене-деформований стан півпростору вважається однорідним.

Вважаємо можливими два варіанта контакту між елементами шаруватого середовища на граничних поверхнях: жорсткий контакт і нежорсткий контакт.

Припускаємо, що напруження, що виникають за рахунок дії навантаження, значно менші початкових напружен. Це припущення дозволяє застосовувати лінеаризованну теорію пружності [1] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

Розв'язок задач отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є та методу комплексних потенціалів. В обох випадках задачі зводяться до розв'язку систем звичайних неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами відносно невідомих функцій. Порядок рівнянь залежить від умов контакту між захисним покриттям і основою.

Аналітичні результати приведені в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження.

Для числового аналізу розглядався нестисливий матеріал з потенціалом Бартенєва-Хазановича та стисливий матеріал з потенціалом гармонічного типу. Розрахунки були проведенні в рамках теорії скінчених початкових деформацій. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень механічних параметрів елементів шаруватої основи на основні характеристики її напруженодеформованого стану.

Аналіз отриманих числових результатів дозволяє зробити наступні висновки.

Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи, визначаються координатами точки, що досліджується, початковими напруженнями, швидкістю навантаження, механічними параметрами шаруватого середовища та умовами їх контакту.

При заданих початкових видовженнях значення величин, що характеризують напружено-деформований стан, при стискуванні більше, ніж при розтягуванні.

Загасання на відстані від точки прикладання навантаження відбувається повільніше при стискуванні, ніж при розтягуванні.

Існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщення мало залежать від початкових деформацій.

Зі збільшенням швидкості руху навантаження вплив початкових напружень зменшується.

Для більш жорсткого шару вплив швидкості поверхневого навантаження і початкових напружень зменшується.

Для надзвукової швидкості навантаження епюри величин, що досліджуються, асиметричні по відношенню до точки прикладання навантаження. При цьому пряма хвиля загасає набагато швидше, ніж зворотна, але не зникає повністю через наявність поверхневого шару.

Умови контакту між захисним шаром і півпростором мають суттєве значення для більш жорсткого шару по відношенню до основи. Значення величин, що характеризують напружено деформований стан, у відповідних точках основи при нежорсткому kontaktі більше, ніж при жорсткому.

Дана робота присвячена вивченняю впливу захисного покриття, початкових напружень, умов контакту, механічних характеристик матеріалів, параметрів руху поверхневого навантаження на напружено-деформований стан пружної основи. Розглядаються і порівнюються дві моделі шаруватого стисливого або нестисливого півпростору: 1) пружна пластина на пружному півпросторі; 2) верхній шар (захисне покриття) моделюється зосередженими масами.

Ключові слова: шаруватий півпростір, початкові напруження, рухоме навантаження

- Гузь А.Н. Упругие волны в тела с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: «А.С.К», 2004. – 672 с.

Yu. P. Glukhov

TWO MODELS OF PROTECTIVE COATING FOR ELASTIC BASE WITH INITIAL STRESSES

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: gluchov.urii@gmail.com*

This work is devoted to the study of the influence of protective coating, initial stresses, mechanical characteristics of materials, and parameters of surface load movement on the stress-strain state of an elastic base. Two models of a layered compressible or incompressible half-space are considered and compared: 1) the top layer (protective coating) is modelled by concentrated masses; 2) an elastic plate on an elastic half-space.

Key words: layered half-space, initial stresses, moving load

М. О. Вабіщевич¹, І.К. Фесун¹

**ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ СТАЛЕВИХ
КОНСТРУКЦІЙ ПРИ РАПТОВОМУ ОБВАЛЕННІ З УРАХУВАННЯМ
ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ**

¹Київський національний університет будівництва і архітектури,
просп. Повітряних Сил, 31, 03037, Київ, Україна;
e-mail: vabix@ukr.net; fesuni99@gmail.com

У світовій науковій спільноті перші прояви вивчення явища прогресуючого обвалення та методів унеможливлення його виникнення датуються 60-и роками минулого століття, а вже значна активізація досліджень відбулась від початку нового століття і триває до сьогоднішніх днів. Це пояснюється наступними чинниками:

- виникнення всесвітньо відомих випадків прогресуючого обвалення (вежі ВТЦ, Murtah Office Building, Skyline Plaza) [1];
- технологічною можливістю виконання об'ємних розрахунків;
- введенням в окремих нормативних документах вимог про забезпечення стійкості проти прогресуючого обвалення [2];
- величезною кількістю зруйнованих будівель і споруд внаслідок повномасштабного вторгнення РФ в Україну [3];
- величезною кількістю будівель і споруд, які за очевидними ознаками мали бути повністю зруйнованими внаслідок руйнування окремих ключових несучих конструкцій, а залишились частково пошкодженими (внаслідок повномасштабного вторгнення РФ в Україну).
- відсутністю єдиних методик розрахунку, якими необхідно керуватись під час розрахунків на прогресуюче обвалення [2];
- малозабезпечений стан нормативної бази щодо стійкості за прогресуючого обвалення будівель та споруд [2].

Загалом, дослідження забезпечення стійкості проти прогресуючого обвалення можна охарактеризувати як пошук прихованіх резервів несучої здатності конструкцій будівель та споруд. Ці так звані «приховані резерви» під час розрахунку аварійної ситуації при прогресуючому обваленні в проектуванні можуть бути наступними:

- 1) врахування фактичних навантажень без застосування коефіцієнтів за навантаженням;
- 2) врахування ненесучих огорожувальних конструкцій в роботу;
- 3) врахування фактичної роботи матеріалів;
- 4) вибір методу моделювання раптового видалення конструкції.

З першим пунктом питання фактично повністю вичерпане, оскільки під час реального проектування це обумовлюється технічним завданням та відповідним збором навантажень, то вже інші пункти вимагають грунтовного дослідження.

Врахування фактичної роботи матеріалів, у випадку сталі, передбачає використання нелінійної моделі замість лінійної, збільшення допустимої межі деформування, допустимість утворення пластичних шарнірів.

Відповідно до п.5.3.6 [5] сталеві конструкції поділяються на три класи залежно від виду напружено-деформованого стану (НДС):

- 1 клас – допускається лише пружна робота перерізу;
- 2 клас – допускається пружно-пластична робота перерізу;

- 3 клас – допускається пластична робота перерізу.

Відповідно до п.9.2.7 [5] розрахунок на міцність нерозрізних балок і защемлених балок допускається виконувати за ф. 9.10 [5] як розрахунок перерізів 3-го класу (з урахуванням перерозподілу згинальних моментів і утворенням пластичних шарнірів) у розрахункових перерізах, де діє максимальний момент.

$$\frac{M_x \gamma_n}{c_x \beta_r W_{xn,min} R_y \gamma_c} \leq 1 \quad (9.10)$$

Таким чином, згідно ф.9.10 фізична нелінійність сталі (розрахунки конструкцій з урахуванням пластичних деформацій) врахована через коефіцієнт c_x , відбувається збільшення розрахункового опору з використанням цього коефіцієнту на 4-60% залежно від схеми перерізу. При цьому відповідно до 5.3.7 «при спеціальному обґрунтуванні допускається використовувати більш точні розрахункові моделі (наприклад, геометрично чи фізично нелінійні...». Загалом, на просторах наукової спільноти поширилося багато різноманітних діаграм «напруження-деформація», здебільшого це спрощені білінійні діаграми, білінійні із зміщенням, трилінійні, їх похідні, криволінійні тощо (рис.С2 [8]).

Однак деякі дослідники стурбовані тим, що недооцінка пластичної поведінки конструкцій може привести до серйозних похибок, особливо за аварійних ситуацій [7]. Тому пропонується для розрахунків стійкості проти прогресуючого обвалення використовувати реальну діаграму сталі. Використання фактичної діаграми передбачає використання не лише ділянок пропорційності за усталеними нормами, а і використанням площинки текучості та, за відповідного обґрунтування, зони зміщення або і зони руйнування.

Ключовим питанням є вибір допустимої межі деформування, яка залежить не лише від вибору моделей матеріалів, а і від класу сталі, умов розрахункових ситуацій. Широка варіативність вхідних умов унеможливлює встановлення єдинихграничних меж деформування. Наприклад, рекомендоване обмеження значення основної деформації моделей рис.С2 [8] становить 5%, щоб уникнути неконсервативних результатів [7]. У дослідженні прогресуючого обвалення каркасу внаслідок зіткнення транспортного засобу [9] використана фактична криволінійна модель, гранична деформація прийнята рівним 20%, 18% і 10% для балок, колон і з'єднань відповідно. У дослідженні динамічного видалення колон із сталевого каркасу [10] прийнято спрощену білінійну модель із граничною деформацією 20%.

Метод альтернативного шляху як один із прямих методів забезпечення стійкості за прогресуючого обвалення будівель і споруд передбачає забезпечення спроможності конструкції або системи в цілому перерозподіляти навантаження при відмові окремого елемента. Реалізація моделювання раптового видалення конструкції можлива такими методами [6]:

- квазістатичний (pulldown аналіз; pushdown аналіз);
- динамічний (пряме інтегрування рівнянь руху за часом).

Реалізація квазістатичного методу відбувається за умови прикладання реакції зворотного знаку з коефіцієнтом динамічності Кд [6]. Реалізація динамічного методу відбувається за умови парикування навантаження, що моделюється прикладанням навантаження від'ємного знаку, що змінює своє значення від нуля до повного значення за певний час.

Таким чином, з урахуванням вибору моделі моделювання матеріалу та методу моделювання задача раптового обвалення конструкцій може бути вирішена такими шляхами:

1. Квазістатичним методом без урахування фізичної нелінійності.
2. Квазістатичним методом із урахуванням фізичної нелінійності.
3. Динамічним методом без урахування фізичної нелінійності.
4. Динамічним методом із урахуванням фізичної нелінійності.
5. Динамічним методом із урахуванням фізичної та геометричної нелінійності.

Висновки.

1. Врахування фізичної нелінійності під час розрахунків на стійкість до прогресуючого обвалення є прямою вимогою окремих нормативних документів. Це пояснюється використанням «прихованіх резервів» матеріалів, а також певних змін напруженого-деформованого стану конструкцій під час аварійної ситуації.
2. Традиційний квазістатичний метод в силу своєї простоти потребує лише застосування коефіцієнта динамічності, що не завжди коректно відображає динамічну поведінку системи після раптового обвалення.
3. Реалізація динамічного методу (пряме інтегрування рівнянь руху за часом) із урахуванням фізичної та геометричної нелінійностей є найбільш наближеним способом моделювання раптового видалення конструкції під час розрахунку на стійкість до прогресуючого обвалення.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: прогресуюче обвалення, забезпечення стійкості, динамічне деформування, відмова елемента, фізична нелінійність, чисельні дослідження, надійність.

1. R. Shankar Nair. Progressive Collapse Basics // Modern Steel Construction. – 2004.
2. Вабіщевич М.О., Фесун І.К. Підходи щодо забезпечення стійкості до прогресуючого обвалення будівель та споруд. Сучасний стан та перспективи// Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2023. – Вип. 110. – С. 256-263.
3. Вабіщевич М. О., Фесун І. К. Про обстеження індивідуальних житлових будинків, що були пошкоджені та зруйновані внаслідок бойових дій. Управління розвитком складних систем. Київ, 2023. № 53. С. 127 – 134, dx.doi.org/10.32347/2412-9933.2023.53.127-134.
4. ДБН В.1.2-14:2018. Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Загальні принципи забезпечення надійності та конструктивної безпеки будівель і споруд. Із Зміною №1 – К.: Мінрегіонбуд України, 2018. – 36 с. – Чинний від 01.01.2019.
5. ДБН В.2.6-198:2014 Сталеві конструкції. Норми проектування. Із Зміною №1 – К.: Мінрегіон України, 2014. – 206 с. – Чинний від 01.01.2015.
6. Барабаш М. С. Питання опору прогресуючому руйнуванню несучих систем у ПК Ліра-САПР // Сталий розвиток авіаційної інфраструктури України : колективна монографія. — Львів - Торунь : Liha-Pres, 2023. — С. 301-316.
7. Citation: Zhang, Z.-J.; Chen, B.-S.; Bai, R.; Liu, Y.-P. Non-Linear Behavior and Design of Steel Structures: Review and Outlook. Buildings 2023, 13, 2111. <https://doi.org/10.3390/buildings13082111>
8. EN1993-1-5; Eurocode 3: Design of Steel Structures. Part 1-5: Plated Structural Elements. European Committee for Standardization: Brussels, Belgium, 2006.
- 9- Kang, H.; Kim, J. Progressive collapse of steel moment frames subjected to vehicle impact. J. Perform. Constr. Facil. 2015, 29, 04014172.
10. Janfada Iman S, Sheidaei Mohammad Reza, Kiakojouri Foad. Comparative analysis of code-based dynamic column removal and impact-induced progressive collapse in steel moment-resisting frames. Int J Steel Struct 2023;23:1576–86. <http://dx.doi.org/10.1007/s13296-023-00788-2>.

M.O. Vabishchevich¹, I.K. Fesun¹
THE INVESTIGATION OF THE PROCESS OF STEEL STRUCTURE DYNAMIC DEFORMATION AT THE SUDDEN COLLAPSE CONSIDERING PHYSICAL NONLINEARITY

¹ Kyiv National University of Construction and Architecture,
Povitrianykh Syl Ave, 31, 03037, Kyiv, Ukraine;
e-mail: vabix@ukr.net; fesuni99@gmail.com

Taking into account the real work of steel, in the case of progressive collapse, involves the use of a non-linear model instead of a linear one, an increase in the permissible limit of deformation, the admissibility of the formation of plastic hinges. The implementation of the dynamic method, taking into account physical and geometric nonlinearities, is the most approximate way of simulating the sudden removal of the structure during the calculation of resistance to progressive collapse.

В.Д.Кубенко

**ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ШАРУ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ ПРИ
НЕСТАЦІОНАРНОМУ ПОВЕРХНЕВОМУ ЗБУДЖЕННІ**

*'Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: venkub@ukr.net*

Побудовано точний аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі про поширення акустичних хвиль у шарі ідеальної стисливої рідини, що лежить на жорсткій основі. Передбачається, що на вільній поверхні шару у певний початковий момент часу починає діяти осесиметрична навантаження, що змінюється у часі за ступінчастим законом. На відміну від аналогічної задачі для півпростору хвильовий процес у шарі характеризується багатократними відбиттями збуджуваних прямої хвилі і хвиль, що відбиті від меж шару. Мета роботи – визначення полів тиску та швидкості в шарі в залежності від часу та просторових координат.

Для розв'язку сформульованої задачі використовуються класичні методи розділення змінних та інтегральних перетворень Лапласа та Ханкеля. Отриманий у просторі зображені розв'язок відповідної граничної задачі для скалярного хвильового рівняння піддається послідовному оберненню щодо інтегральних перетворень з використанням табличних співвідношень, теорем про згортку та апарату узагальнених функцій. Аналітичний вираз для визначеного тиску (швидкості) представлено у вигляді ряду, кожний член якого відповідає хвилі, що певну кількість разів відбита від меж шару. Утримання відповідного числа членів ряду дозволяє обчислити шукану гідродинамічну характеристику на потрібному інтервалі часу. Вирази для членів ряду скла містять елементарні функції або визначені інтеграли від них і дозволяють практично миттєво обчислювати характеристики хвильових полів як у близькій, так і в дальній зоні.

Наведено численні приклади обчислень тиску на осі симетрії задачі як для фіксованої області дії навантаження, так і для такої, що змінюється у часі. Показаний характер розподілу тиску як вздовж радіальної координати, так і по товщині в різних поперечних перерізах. Обчислено розвиток тиску в залежності від часу в дальній зоні. Проілюстровано, зокрема, результат суперпозиції прямої хвилі та збуджуваної на межі області дії навантаження хвилі розрідження, що призводить до стрибкоподібних змін тиску в певні моменти часу.

Ю. П. Глухов

**ШАРУВАТИЙ ПІВПРОСТІР З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ ПІД
ДІЄЮ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: gluchov.uriy@gmail.com*

Роботу присвячено вивченю динамічних процесів у багатошарових попередньо напруженіх тілах під час дії рухомого поверхневого навантаження. У межах лінеаризованої теорії для тіл із початковими напруженнями такі задачі вивчали як у точній постановці, так і з використанням наближених моделей багатошарового середовища [2].

Розглянемо пружний багатошаровий півпростір під дією поверхневого рухомого навантаження. Шарувате середовище складається з плоско паралельних пружних шарів завтовшки h_s ($s = \overline{1, N}$), що лежать на півпросторі. Шари пронумеровані за порядком $s = \overline{1, N}$ зверху вниз. Порядковий номер півпростору $N + 1$. Шари і півпростір складаються зі стисливих або нестисливих попередньо напруженіх ізотропних матеріалів із довільною формою пружного потенціалу і віднесені до декартової системи координат ξ_i ($i = 1, 2, 3$), які вводяться в початковому деформованому стані.

Вважаємо, що початковий напружене-деформований стан півпростору є однорідним. Нехай навантаження рухається вільною поверхнею верхнього шару з постійною швидкістю v протягом великого проміжку часу, причому воно не залежить від координати ξ_3 , тоді відносно системи координат, пов'язаної з цим навантаженням, існує усталений плоский деформований стан. Для розв'язку задачі скористаємося співвідношеннями лінеаризованої теорії пружності тіл із початковими напруженнями [1]. Припускаючи, що картина деформацій інваріантна відносно часу в рухомій разом із навантаженням системі координат (y_1, y_2) , де $y_1 = \xi_1 - vt$; $y_2 = \xi_2$, рівняння усталеного руху шарів і півпростору через функцію $\chi(y_1, y_2)$ можна записати у вигляді

$$\left(\eta_1^{(s)2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^{(s)2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{(s)(j)} = 0; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

Корені $\eta_1^{(s)}$ і $\eta_2^{(s)}$ визначаються з рівнянь

$$\eta^{(s)4} + 2A^{(s)}\eta^{(s)2} + A_1^{(s)} = 0, \quad (2)$$

де коефіцієнти $A^{(s)}$ і $A_1^{(s)}$ є функціями швидкості v навантаження і параметрів, що характеризують матеріал елементів шаруватого середовища: $\tilde{\omega}^{(s)}$ – у разі стисливого матеріалу і $\tilde{\chi}^{(s)}$ – у разі нестисливого матеріалу.

Розглядаються такі граничні умови:

при $y_2 = 0$

$$\tilde{Q}_{21}^{(1)} = \delta_{\theta N} P_1 \delta(y_1); \quad \tilde{Q}_{22}^{(1)} = P_2 \delta(y_1); \quad \theta = \sum_{s=1}^N \theta_1^{(s)}; \quad (3)$$

і при $y_2 = -h_s$

$$u_2^{(s)} = u_2^{(s+1)}; \quad \tilde{Q}_{22}^{(s)} = \tilde{Q}_{22}^{(s+1)}; \quad \tilde{Q}_{21}^{(s)} = \theta_1^{(s)} \tilde{Q}_{21}^{(s+1)}; \\ (1 - \theta_1^{(s)}) \tilde{Q}_{21}^{(s+1)} = \theta_1^{(s)} (u_1^{(s+1)} - u_1^{(s)}); \quad s = \overline{1, N}. \quad (4)$$

Тут параметр $\theta_1^{(s)} = 1$ відповідає випадку жорсткого контакту між елементами шаруватого півпростору, а $\theta_1^{(s)} = 0$ — випадку нежорсткого контакту.

Розв'язок задач отримано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Аналітичні результати приведені в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження.

Для числового аналізу розглядався нестисливий матеріал з потенціалом Бартенєва-Хазановича та стисливий матеріал з потенціалом гармонічного типу. Розрахунки були проведені в рамках теорії скінчених початкових деформацій. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень механічних параметрів елементів шаруватої основи на основні характеристики її напруженодеформованого стану.

У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуто постановку плоскої стаціонарної задачі про збурення багатошарового попередньо напруженого півпростору рухомим поверхневим навантаженням. Як приклад розглянуто двовимірну задачу для двошарового півпростору. За допомогою методу інтегральних перетворень Фур'є отримано фундаментальний розв'язок задачі в загальному вигляді при різних умовах контакту і швидкостях руху навантаження.

Ключові слова: шаруватий півпростір, початкові напруження, рухоме навантаження

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. — Киев: «А.С.К», 2004. — 672 с.
2. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. — Кременчуг, 2007. — Издательство «Кременчуг». — С. 795.

Yu. P. Glukhov

LAYERED HALF-SPACE WITH INITIAL STRESSES UNDER THE ACTION OF A MOVING LOAD

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: gluchov.uriy@gmail.com

Within the framework of the linearised theory of elasticity for bodies with initial stresses, a formulation of the plane steady-state problem on the perturbation of a multilayer prestressed half-space by a moving surface load is considered. As an example, a two-dimensional problem for a two-layer half-space is considered. Using the method of integral Fourier transforms, the fundamental solution of the problem is obtained in a general form under various contact conditions and load motion speeds.

Key words: layered half-space, initial stresses, moving load

Б. М. Кіфоренко¹, Я.В. Ткаченко¹

ВИБІР ОПОРНОЇ ОРБІТИ ДЛЯ РОЗВЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ПЕРЕХОДІВ МІЖ БЛИЗЬКИМИ ЕЛІПТИЧНИМИ ОРБІТАМИ

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: bkifor@ukr.net, yaroslavvt@ukr.net

Проблема максимізації маси вантажів, що транспортуються між орбітами в на-
вколопланетному просторі, є актуальною для сучасної механіки космічного польоту
через надзвичайно високу вартість виведення одиниці маси на низьку монтажну орбіт-
ту сучасними ракетами-носіями. В роботах [1, 2] проведено сумісну оптимізацію ке-
рувань, параметрів рушійної системи малої тяги та траекторій руху міжорбітального
транспортного апарату в ньютонівському центральному гравітаційному полі. Для пе-
реходів між близькими орбітами сформульовані задачі розв'язуються з використан-
ням рівнянь руху в оскулюючих змінних, лінеаризованих в околі початкової орбіти.
Оптимальні керування (компоненти вектора реактивного прискорення) знайдені за
допомогою принципу максимуму.

Для елементарних еліптичних маневрів (маневрів малої зміни одного з оскулюю-
чих параметрів еліптичної орбіти протягом одного оберту навколо центру тяжіння)
проведено оцінку точності визначення максимальної маси транспортованого вантажу
в залежності від вибору опорної орбіти, навколо якої проводиться лінеаризація рів-
нянь руху. Точність отриманих результатів оцінюється шляхом порівняння з масою
корисного вантажу, отриманою при чисельному розв'язанні точних рівнянь руху.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: міжорбітальний транспортний апарат з малою тягою, оптимальне ке-
рування, опорна орбіта, максимум маси корисного вантажу

1. Kiforenko B.N., Tkachenko Ya.V Some Optimal Elementary Close to Elliptic Manoeuvres of Spacecrafts with an Engine of Constant Power and Accumulator of Energy // Journal of Automation and Information Sciences – 2003. – **35**, N 2. – P. 9 – 24.
2. Tkachenko Ya.V Method of Optimizing Maneuvers of an Orbital Transfer Vehicle in a Strong Central Field of Gravity // International Applied Mechanics – 2019. – **55**, N 5. – P. 544 – 551.

B.M.Kiforenko¹, Ya.V. Tkachenko¹

**SELECTION OF A REFERENCE ORBIT FOR SOLVING OF OPTIMIZING TRANSFERS
PROBLEM BETWEEN CLOSE ELLIPTICAL ORBITS**

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: bkifor@ukr.net, yaroslavvt@ukr.net

The accuracy of determining the maximum payload mass of an orbital transfer vehicle performing elementary elliptical maneuvers in a strong Newtonian gravitational field is estimated, depending on the choice of orbit parameters around which the equations of motion are linearized. We consider an elementary elliptical maneuver to be a maneuver of changing one of the orbit's oscillating parameters in one revolution around the gravitational center.

Н.Є. Ткаченко

РОЗСПОВАННЯ ДРІБНОДИСПЕРСНОЇ СУМІШІ НА ШЕРШАВІЙ ПОВЕРХНІ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: tk.ne@ukr.net*

Метою дослідження є знаходження густини розподілу твердих частинок в дисперсній суміші, яка взаємодіє з пологою шершавою поверхнею в наближенні однократного відбиття. Феноменологічний підхід не дає можливості досліджувати такі процеси. В околі шершавої поверхні (кнудсеновський шар) застосуються методи молекулярно-кінетичної теорії навіть для дослідження руху рідини, причому використовуються дві одночастинні функції розподілу. Обґрунтованість побудови кінетичної моделі дисперсної суміші приведена в роботі [2]. Особливості шершавої поверхні враховуємо в граничних умовах [1].

Основні припущення. Розміри частинок значно менші відстаней, на яких осереднені параметри фаз суттєво змінюються. Сили в'язкості рідини враховуються лише при її взаємодії з частинками, сили взаємодії між окремими частинками враховуємо осереднено через зміну гідродинамічного тиску рідини. Тобто, на окрему частинку діють сила тяжіння, сила тертя, сила Архімеда, сила, обумовлена прискореним рухом частинок відносно рідини, сила Жуковського і випадкова сила типу Ланжевенівського джерела. Для опису непотенціального руху частинок використовується статистичний підхід. Вважаємо, що початкові умови для кожної частинки являються випадковими величинами. Методами статистичної механіки будуємо кінетичне рівняння Ліувілля для опису непотенціального руху частинок. Розв'язком цього рівняння буде несиметрична N-частинна функція розподілу (густини ймовірності розподілу систем в фазовому просторі), з умовою нормування функції на одиницю. Інтегруючи по фазових координатах N-1 частинок отримуємо систему рівнянь для одночастинних функцій розподілу.

При великій кількості частинок неможливо задати початкові та граничні умови для кожної них, а їх зручніше задавати для всієї сукупності частинок на кінетичному рівні. Цей підхід дає можливість перехідні процеси в дисперсній суміші. Відмітимо, що на відміну від молекулярно-кінетичної газів, в нашому випадку для частинок маємо два параметри релаксації: дисипативний – γ і параметр густини – $n_0 r_0^3$.

Тут $n_0 = N/V$, де n_0 – середня густина числа частинок при відсутності зовнішніх полів, N – загальне число частинок, V – весь об'єм, r_0 – приведений радіус частинок. Параметр γ визначає час релаксації по швидкості в дисипативній системі – час за який встановлюється локальна рівновага системи по швидкостях. (Для лінійних сил тертя $\gamma = k/\bar{m}$, де k коефіцієнт опору, \bar{m} – приведена маса частинки). Можемо сказати, що параметр γ визначає ширину спектру флюктуацій швидкостей частинок. Цей параметр також визначає режими руху системи частинок: кінетичний та дифузійний. На кінетичному режимі встановлюється локальна рівновага системи частинок по швидкостях, а характеристики рідини не змінюються [3].

Із побудованого рівняння Ліувілля в фазовому просторі шляхом осереднення знаходимо ланцюг одночастинних функцій густини розподілу ймовірностей

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_s}{\partial \vec{q}} + \left[\vec{Q} - \frac{\partial \Pi_0}{\partial \vec{q}} \right] \frac{\partial f_s}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left(\frac{k}{m} \vec{p} f_s \right) = I_{sk}, \quad (1)$$

$$\vec{q} = \{q_1, q_2, q_3\}, \quad \vec{p} = \{p_1, p_2, p_3\},$$

де f_s - одночастинкова функція густини ймовірності розподілу s-ої групи частинок, \vec{p} – імпульс, \vec{q} – координата в осередненому одночастинковому фазовому просторі, \vec{Q} – непотенціальні сили міжфазової взаємодії, Π_0 – осереднена потенціальна енергія системи частинок, I_{sk} – функціонал, який залежить від двох одночастинкових функцій і визначається для кожної задачі окремо. Виписуємо також відповідні значення середніх величин. В нашому випадку використовуємо дві функції густини розподілу частинок, одна характеризує частинки, що падають на поверхню, а інша – відбиті від поверхні. Їх сума визначає середні параметри групи частинок. Розкладаючи в ряди по параметру, пов'язаному з середньою густиною частинок інтегруючи по імпульсах функцію розподілу в першому наближенні знайдемо вирази для густини розподілу частинок в фізичному просторі $\rho_1(\vec{x}, t)$, $\rho_2(\vec{x}, t)$.

Це будуть рівняння типу рівнянь Фокера-Планка-Колмогорова, в якому коефіцієнт при похідних по імпульсах від функції густини розподілу ймовірностей залежить від взаємодії між фазами. Задаємо звичайну умову нормування для загальної функції розподілу.

Початкові умови для рівнянь записуємо вигляді добутку δ -функцій по координатах. Границні умови виражаємо через локальні коефіцієнти обміну масою, імпульсом і енергією або коефіцієнтами акомодації, які пов'язані з середніми величинами, що вираховуються з допомогою загальної функції розподілу в залежності від типу шершавої поверхні випадків відбиття: дифузійного чи дзеркального [1]. Таким чином знайдемо розсіювання дисперсної суміші на шершавій поверхні в наближенні однократного відбиття.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: дисперсна суміш, кінетичне рівняння, шершава поверхня, взаємодія між фазами.

1. Алексеев С.Н., Баранцев Р.Г. Определение параметров функции рассеяния из экспериментальных данных. // Аэродинамика разреженных газов. Сборник. Л. ЛГУ. – 1974. – № 7. – С. 83 – 102.
2. Кильчевский Н.А., Кильчинская Г.А., Ткаченко Н.Е. Аналитическая механика континуальных систем. – К.: "Наукова думка", 1979. – 188 с.
3. Ткаченко Н.Е., Ткаченко С. Е. Двухфазная смесь в зазоре. // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. – 2001. – № 5. – С. 360 – 364.

N.E. Tkachenko

DISPERSAL OF THE FINELY DISPERSED MIXTURE ON A ROUGH SURFACE

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: tk.ne@ukr.net*

A method for finding the density distribution of solid particles in a dispersed mixture interacting with a gently sloping rough surface in the single reflection approximation is proposed on the basis of molecular kinetic theory.

А . С . Хорошун

ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКІСНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МЕХАНІЧНОЇ МОДЕЛІ СУПУТНИКА ІЗ ПОДВІЙНИМ ОБЕРТАННЯМ ПРИ ВРАХУВАННІ НЕЛІНІЙНОСТІ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: email@inmech.kyiv.ua*

Супутники із подвійним обертанням є одним з основних типів безпілотних космічних апаратів. Наблизено такий супутник можна представити у вигляді двох твердих тіл, платформи та ротора, що з'єднані жорстким валом. Задача полягає в тому, щоб забезпечити необертання платформи, наприклад, для проведення досліджень чи фотозйомки в заданому напрямку. Для цього електродвигун, що розташований на платформі, обертає за допомогою валу ротор у напрямку, який збігається із напрямком початкового обертання. Таким чином, кутова швидкість платформи прямує до нуля, а момент імпульсу ротора стає рівним початковому моменту системи. Відомо, однак, див. [1], що внаслідок такого маневру супутник може «спрекинутись» через збільшення кута нутрації чи швидкість обертання ротора почне необмежено зростати. В [3] для дослідження цих негативних режимів було запропоновано механічну модель, що отримала назву TORA.

Аналіз літератури показав, що здебільшого розглядається лінійна залежність сили, яка виникає при деформації пружини, від зміщення. Це добре узгоджується з тим, що при невеликих амплітудах зміщення та деформаціях неушкодженого матеріалу нелінійні ефекти проявляються несуттєво і їх вплив може не враховуватись. Однак, відомо, що для великих амплітуд зміщення та при наявності дефектів мікроструктури матеріалів вплив нелінійних ефектів може стати суттєвим. Тому аналіз динаміки механічних систем та побудова математичних моделей, які враховують нелінійність сил, що виникають при деформації пружинних елементів цих систем, становить значний інтерес.

TORA може бути віднесений до класу т.з. малоприводних механічних систем (MMC), які характеризуються тим, що кількість входів керування в них менша кількості змінних, які описують поведінку системи. Системи такого класу широко використовуються при конструюванні різноманітних роботів, аерокосмічних та морських апаратів, див. [2], оскільки мають переваги в меншому споживанні енергії і менший вартості у порівнянні з механічними системами з більшою кількістю входів керування.

Таким чином, з вищезазначеного випливає, що виходячи зі слабкої вивченості моделі TORA при врахуванні нелінійності сили, що виникає при деформації пружини, від зміщення, побудова керування, яке забезпечує бажану динаміку такої моделі, в контексті розвитку теорії MMC є, без сумніву, актуальною задачею сучасної теоретичної механіки і має важливе прикладне значення.

Отримано закон обертання електродвигуна, який забезпечує асимптотичне прямування траекторії руху моделі TORA із врахуванням нелінійної залежності сили, яка виникає при деформації пружини, що входить до складу моделі, від зміщення, до положення рівноваги та отримано область притягання стану рівноваги в просторі змінних моделі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: супутник із подвійним обертанням, малоприводна механічна система, функція Ляпунова, область притягання.

1. Hall C.D. Resonance capture in axial gyrostats. Journal of the Astronautical Sciences. 1995. 43, №2. P. 127–138.
2. Liu Y., Yu H. A survey of underactuated mechanical systems. IET Control Theory Appl. 2013. 7, №7. P. 921–935.
3. Yee R.K. Spinup dynamics of a rotating system with limiting torque. Master's Thesis. Los Angeles: UCLA, 1981.

A.S. Khoroshun

**THE INVESTIGATION OF THE QUALITATIVE PROPERTIES OF THE DUAL-SPIN
SATELLITE MECHANICAL MODEL TAKING INTO ACCOUNT THE NONLINEARITY
OF ELASTIC ELEMENTS**

*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: email@inmech.kyiv.ua*

The law of rotation of the electric motor, which provides asymptotic direction of the trajectory of the TORA model to its equilibrium state, is obtained in the work. In contrast to usual approach, the nonlinear dependence of the force, arising from the deformation of the elastic element of the model, on the amount of deformation is considered. The use of DSC (Dynamic Surface Control) technics allows to get the desired control. The development of the DSC method, which consists of the specific choice of parameters and filter constants, is proposed. This avoids the growth of the order of the auxiliary system, as well as the phenomenon of significant complication of the form of both the auxiliary system of differential equations and the law of control, the socalled “Explosion of terms”. Reducing the order of the system of differential equations and simplifying its form allowed in this case to obtain an explicit corresponding auxiliary function and with its help to prove that the proposed control law solves the control problem.

Є. С. Лапшин¹, О.І. Шевченко¹

ЕФЕКТИВНІСТЬ ГАШЕННЯ КОЛІВАНЬ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ З КУЛЬОВИМ ГАСИТЕЛЕМ

¹Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАНУ,
бул. Симферопольська, 2а, 3, 49005, Дніпро, Україна;
e-mail: office.igtm@nas.gov.ua

Висотним будинкам, опорам вітроелектричних установок, антенам і т. д. властиві низькочастотні власні коливання (менше 10 Гц). Для гасіння коливань таких споруд застосовують динамічні гасники з тілами кочення, конструкції яких описані у роботах [1–5].

У роботі [6] отримано нелінійне диференціальне рівняння другого порядку, яка описує рух системи, що включає тіло, коливання якого необхідно зменшити, і шаровий гаситель. Нелінійність обумовлена синусоїдальною залежністю сили, що повертає кулью в положення рівноваги від його кутового відхилення. Рівняння аналітично вирішено у припущенні про малість кутового відхилення, що дозволило лінеаризувати рівняння руху. Однак відсутній аналіз впливу лінеаризації на характеристики ефективності гасіння коливань системи, відсутній аналіз ефективності гасіння коливань системи у нелінійній постановці при імпульсному збуренні, наприклад, від вибуху.

Мета роботи – визначення ефективності гасіння коливань механічної системи з кульовим гасником у нелінійній постановці.

На рис. 1 наведено розрахункову схему до аналізу динаміки механічної системи [6], яка включає тіло (несуча маса), коливання якого слід зменшити, і кульовий гасник 2. Введено дві прямокутні системи координат: одна нерухома XOY , а друга рухлива $X_I O_I Y_I$, пов'язана з тілом 1. Початок O_I останньої поміщено в нижчу точку сферичної западини.

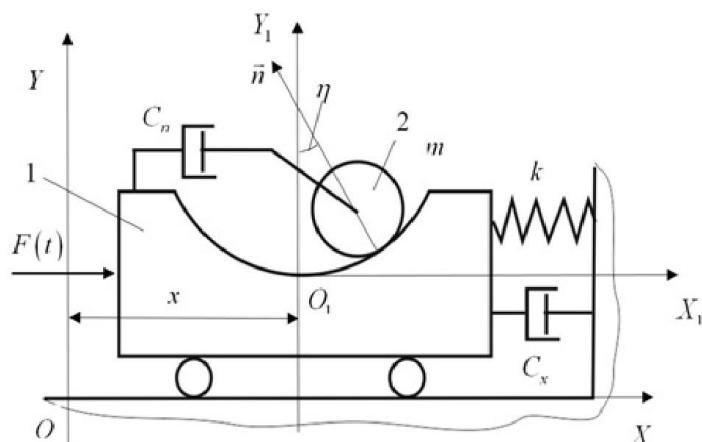


Рис. 1

У роботі [6] отримано такі нелінійні рівняння руху механічної системи:

$$(1 + \nu) \ddot{x} + 2n_x \dot{x} + \omega_0^2 x + \nu \bar{R} [\sin(\eta) \dot{\eta}^2 - \cos(\eta) \ddot{\eta}] = \bar{F}_0 \sin(\omega t) \\ \cos(\eta) \ddot{x} = 1,4 \bar{R} \ddot{\eta} + 2n_\eta \bar{R} \dot{\eta} + g \sin(\eta) \quad (1)$$

$$\text{де } \nu = \frac{m}{M}; \quad 2n_x = \frac{C_x}{M}; \quad 2n_\eta = \frac{C_\eta}{m}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}; \quad \bar{R} = R - r; \quad \bar{F}_0 = \frac{F_0}{M};$$

x – переміщення центру мас несучого тіла вздовж горизонтальної осі OX ;

η – кут між віссю OY_1 та внутрішньою одиничною нормальню \vec{n} , проведеною в точці контакту кулі та сферичного поглиблення;

m – маса кулі та тіла, для якого виконується гасіння коливань;

R і r – радіуси сферичного поглиблення та кулі;

k – коефіцієнт жорсткості пружного елемента;

n_x і n_η – коефіцієнти в'язкого опору руху тіла та кулі;

F_0 і ω_0 – амплітуда та кругова частота гармонійного силового збудження;

ω_0 – власна кругова частота.

Систему із двох диференціальних рівнянь (1) представимо у вигляді системи із чотирьох рівнянь першого порядку

$$x_1 = \dot{x} \\ \dot{x}_1 = N [7\bar{R}\nu\eta_1^2 \sin \eta + 10\bar{R}n_\eta\nu\eta_1 \cos \eta + 14n_x x_1 + \\ + 5g\nu \cos \eta \sin \eta + 7\omega_0^2 x - 7\bar{F}_0 \sin(\omega t)] \\ \eta_1 = \dot{\eta} \\ \dot{\eta}_1 = \frac{5}{\bar{R}} N [\bar{R}\nu\eta_1^2 \cos \eta \sin \eta + 2\bar{R}n_\eta\eta_1(1 + \nu) + \\ + \cos \eta (2n_x x_1 + \omega_0^2 x - \bar{F}_0 \sin(\omega t)) + g(\nu + 1) \sin \eta] \quad (2)$$

$$\text{де } N = \frac{1}{5\nu \cos^2 \eta - 7\nu - 7}$$

Ефективність гасіння коливань несучої маси характеризуватимемо ставленням максимальних відхилень від положення рівноваги за відсутності гасника і з ним

$$\alpha = \frac{A_0}{A} \quad (3)$$

Визначимо ефективність гасіння коливань після дії одиночного імпульсу. Нехай на систему, що спочиває, в момент часу $t = 0$ подіяв імпульс I . Внаслідок цього виникає початкова швидкість і далі відбувається вільний рух системи

$$V = I/(m+M).$$

Рівняння (2) вирішувалися чисельно методом Рунге-Кутти-Фельберга 4-5 порядку при $\bar{F}_0 = 0$ за умов і початкових умов $x = 0, \dot{x} = V, \eta = 0, \dot{\eta} = 0$.

Залежність максимальних переміщень несучої маси та ефективність гасіння коливання від початкової швидкості, що повідомляється в результаті дії одиночного імпульсу, наведена на рис. 2. Обчислення виконані за вихідних даних, наведених у [6]:

$$\nu = 0,05; \quad n_x = 0,03 \text{ c}^{-1}; \quad n_\eta = 0,18 \text{ c}^{-1}; \quad \omega_0 = 1,3 \text{ rad/c}; \quad R = 4,559 \text{ м}; \quad F_0 = 0,03 \text{ g}$$

пунктирна лінія (маркер – коло) – максимальне відхилення без гасника; суцільна лінія (маркер-трикутник) – максимальне відхилення з гасником; пунктирна лінія (маркер – квадрат) – ефективність гасіння імпульсу (права шкала).

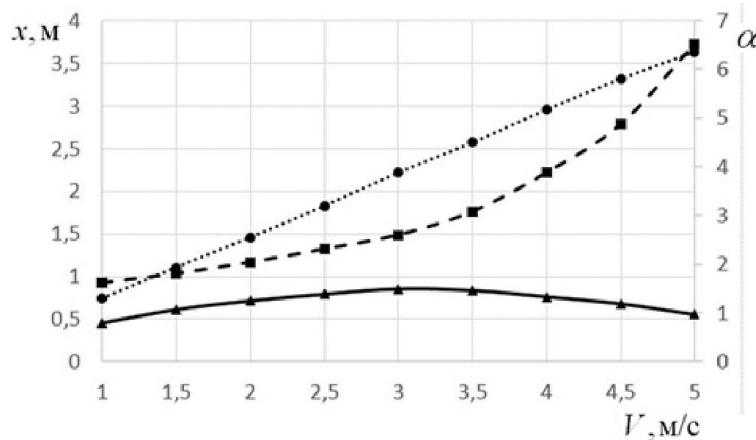


Рис. 2

За відсутності гасника коливань із збільшенням швидкості максимальне відхилення збільшується за лінійною залежністю, а за його наявності має максимум, що й зумовлює зростання ефективності гасіння коливань.

Таким чином, чисельне рішення системи нелінійних диференціальних рівнянь (2) та вираз (3) дозволяють визначити ефективність гасіння коливань несучої маси. Провівши чисельні експерименти, ідентифікують раціональні параметри гасителя коливань, що забезпечують необхідну ефективність.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: гашення коливань, механічна система, кульовий гаситель, низькочастотні власні коливання, несуча маса, ефективність гасіння коливань несучої маси

1. Legeza V.P. Dynamics of vibroprotective systems with roller dampers of low-frequency vibrations.// Strength of Materials. – 2004. – 2 (36). – P. 186–194.
2. Takei, H. Vibration control effects of tuned cradle damped mass damper // Journal of Applied Mechanics. – 2010. – 13. – 587–594.
3. Legeza V.P. Cycloidal pendulum with a rolling cylinder. // Mechanics of Solids. – 2012. – 47(4). – P. 380–384.
4. Obata M. Optimum parametric studies on tuned rotary-mass damper. – 2008. – 14. – P. 867–884.
5. Bransch, M. Unbalanced oil filled sphere as rolling pendulum on a flat surface to damp horizontal structural vibrations. – 2016. – 368. – P. 22–35.
6. Legeza V. P. Dynamics of a vibration protection system with a spherical vibration damper. – 2018. . – 54(5). –P. 103–115.

Y.S.Lapshin¹, O.I. Shevchenko¹

EFFICIENCY OF DAMPING OSCILLATIONS OF A MECHANICAL SYSTEM WITH A BALL DAMPER

¹M.S. Poliakov Institute of Geotechnical Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine (IGTM of the NAS of Ukraine)

Dynamic dampers with rolling elements are used to dampen vibrations of large structures. In the absence of a vibration damper, with increasing speed, the maximum deviation increases linearly, and in its presence, it has a maximum, which leads to an increase in the effectiveness of vibration damping. Numerical solution of the system of nonlinear differential equations allows to determine the efficiency of damping of vibrations of the carrier mass.

М.В. Демидюк^{1,2}, В.М. Демидюк²

ПАРАМЕТРИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ТРАНСПОРТНИХ ОПЕРАЦІЙ НЕЛІНІЙНИХ МАНІПУЛЯЦІЙНИХ СИСТЕМ

¹Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАНУ,
бул. Наукова, 3-Б, Львів, 79060, Україна;
e-mail: m_demyuk@ukr.net

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
бул. Університетська, 1, 79000, Львів, Україна

У доповіді обговорюємо чисельний метод побудови субоптимального розв'язку задач оптимального керування нелінійними маніпуляційними системами з двосторонніми нестационарними обмеженнями на узагальнені координати. Метод ґрунтуються на представленні узагальнених координат у вигляді суми кубічного полінома (за часом) та скінченного ряду за системою заданих ортогональних функцій із невідомими параметрами, що зводить вихідну задачу до задачі нелінійного програмування.

Розглянемо маніпуляційну систему, механічна модель якої являє собою систему твердих тіл з n ступенями вільності. Керування системою (дляожної ступені вільності) відбувається з допомогою активних приводів (наприклад, електромеханічних приводів). За досить загальних припущень рівняння руху маніпуляційної системи запишемо у вигляді

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}\mathbf{u}(t), \quad (1)$$

де $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$ – вектори узагальнених координат та керувань механічної системи, \mathbf{A} , \mathbf{C} – матриці розмірностей $n \times n$, \mathbf{B} – вектор розмірності n . Вважаємо, що матриця \mathbf{C} є невиродженою, а її компоненти є сталими величинами. Тут і нижче крапкою (зверху над величиною) позначено диференціювання за часом t .

Нехай задана (для виконання маніпулятором) транспортна операція: упродовжчасу $t \in [0, T]$ потрібно перенести вантаж із заданого початкового положення в задане кінцеве. Тут граничні (початкове та кінцеве) положення вантажу, а також тривалість руху T є заданими параметрами операції. Водночас закон руху вантажу не задається, а визначаються під час розв'язання відповідної задачі. Граничні положення вантажу переважно задаються в інерціальній системі координат. Однак, в окремих випадках, ці положення можуть задаватися також в термінах узагальнених координат маніпуляційної системи. Таке подання можна отримати після розв'язання відповідної оберненої задачі кінематики.

Задамо транспортну операцію маніпуляційної системи в такому вигляді:

$$q_i(0) = q_i^{(0)}, q_i(T) = q_i^{(T)}, \dot{q}_i(0) = \dot{q}_i(T) = 0, i = \overline{1, n}, \quad (2)$$

де $\{q_i^{(0)}, q_i^{(T)}\}_{i=1}^n$ – задані значення узагальнених координат маніпуляційної системи.

За реальних умов на рух маніпуляційної системи $\mathbf{q}(t)$ накладаються певні обмеження. Задамо ці обмеження в такому вигляді:

$$q_i^{\vee}(t) \leq q_i(t) \leq q_i^{\wedge}(t), \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}, \quad (3)$$

де $\{q_i^{\vee}(t), q_i^{\wedge}(t)\}_{i=1}^n$ – задані на проміжку $[0, T]$ неперервні функції, які визначаються робочою зоною маніпулятора.

Надалі вважаємо, що існує множина вектор-функцій $\{\mathbf{q}(t), \mathbf{u}(t)\}$, які на проміжку $t \in [0, T]$ задовільняють рівняння руху (1), умови транспортної операції (2) та обмеження (3). Можлива постановка такої задачі.

Задача 1. Визначити такий рух маніпуляційної системи $\mathbf{q}^*(t)$ та відповідні керування $\mathbf{u}^*(t), t \in [0, T]$, які з огляду на рівняння руху (1) та обмеження (2), (3) мінімізують заданий функціонал

$$E = \int_0^T F[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{u}(t)] dt \quad (4)$$

Як свідчать результати числового моделювання [1–4], ефективним у дослідженні сформульованої задачі є метод параметричної оптимізації (в просторі узагальнених координат). Метод ґрунтуються на параметричному представленні узагальнених координат маніпуляційної системи у вигляді суми кубічного полінома (за часом) та скінченного ряду за системою заданих ортогональних функцій із невідомими коефіцієнтами

$$q_i = \sum_{k=0}^3 p_{ik} t^k + G_i(t), \quad G_i(t) \equiv \sum_{k=1}^{n_i} a_{ik} g_{ik}(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де $\{p_{ik}\}_{k=0}^3$ – коефіцієнти кубічного полінома, які визначаємо з умов транспортної операції (2), $\{a_{ik}\}_{k=1}^{n_i}$ – коефіцієнти параметризації за системою функцій $\{g_{ik}(t)\}_{k=1}^{n_i}$, $g_{ik} \in C^2[0, T]$, n_i – задана стала величина, $i = \overline{1, n}$. Тут неперервність другої похідної $\ddot{g}_{ik}(t)$ пояснюється прагненням уникнути ударних ефектів під час руху маніпуляційної системи.

Коефіцієнти $\{p_{ik}\}_{k=0}^3$ знаходимо у вигляді розв’язку системи чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь, яку отримуємо після підставлення виразу (5) в умови (2). Остаточно одержуємо:

$$\begin{aligned} p_{i0} &= q_{i0} - G_{i0}, \quad p_{i1} = -\dot{G}_{i0}, \quad p_{i2} = [3\Delta_i - 3(G_{i1} - G_{i0}) + T(2\dot{G}_{i0} + \dot{G}_{i1})]/T^2, \\ p_{i3} &= [-2\Delta_i + 2(G_{i1} - G_{i0}) - T(\dot{G}_{i1} + \dot{G}_{i0})]/T^3, \end{aligned}$$

де $\Delta_i = q_{i1} - q_{i0}$, $G_{i0} = G_i(0)$, $\dot{G}_{i0} = \dot{G}_i(0)$, $G_{i1} = G_i(T)$, $\dot{G}_{i1} = \dot{G}_i(T)$.

Узагальнені швидкості $\dot{\mathbf{q}}$ та прискорення $\ddot{\mathbf{q}}$ обчислюємо диференціюванням виразів (5) за часом t . Обмеження (3) задовільняємо методом зовнішніх штрафних функцій, для чого подамо ці обмеження в інтегральній формі

$$Q_i = \int_0^T \{[q_i^{\vee}(t) - q_i(t)]_+^2 + [q_i(t) - q_i^{\wedge}(t)]_+^2\} dt, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6)$$

де позначено операцію: $[v]_+ = v$ при $v > 0$, $[v]_+ = 0$ при $v \leq 0$.

Далі, використовуючи підхід обернених задач динаміки, після підставлення параметризованих $\mathbf{q}(t, \mathbf{z})$, $\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{z})$, $\ddot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{z})$, де $\mathbf{z} = (a_{ik}; k = \overline{1, n_i}, i = \overline{1, n})$, у рівняння руху (1) знаходимо параметричне сімейство керувань $\mathbf{u}(t, \mathbf{z})$

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{z}) = \mathbf{C}^{-1}[\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})].$$

Підстановка отриманих $\mathbf{q}(t, \mathbf{z})$, $\dot{\mathbf{q}}(t, \mathbf{z})$, $\mathbf{u}(t, \mathbf{z})$ у вираз для функціонала (4) та інтеграли (6) зводить задачу I до задачі нелінійного програмування

$$E(\mathbf{z}) + \langle \lambda, \mathbf{Q}(\mathbf{z}) \rangle \xrightarrow{\mathbf{z}} \min,$$

де $E(\mathbf{z})$ – функція багатьох змінних, до якої зводиться функціонал (4), λ – вектор заданих величин (штрафних коефіцієнтів), $\mathbf{Q}(\mathbf{z})$ – вектор, компонентами якого є значення інтегралів (6). Для розв'язання отриманої задачі нелінійного програмування використовуємо стандартні числові процедури мінімізації функцій багатьох змінних.

Описаний алгоритм було використано в задачах оптимізації кінематичної структури та законів руху дволанкового маніпулятора [1, 2, 4], сукупної оптимізації конструктивних параметрів та законів руху замкнутого чотиріланкового маніпулятора [3], де було підтверджено ефективність методу параметричної оптимізації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: маніпуляційна система, задача оптимального керування, апроксимація, параметрична оптимізація, задача нелінійного програмування.

1. Демидюк М.В., Гошовська Н.В. Параметрична оптимізація руху дволанкового маніпулятора з використанням ортогональних поліномів// Прикл. пробл. механіки і математики. – 2016. – Вип. 14. С. 168-175.
2. Демидюк М.В., Демидюк В.М. Параметрична оптимізація кінематичної структури та руху дволанкового маніпулятора// Вісник Харків. національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія: Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2020. – Вип. 48. – С. 36-48.
3. Demydyuk M.V. Parametric optimization of four-link close-chain manipulator with active and passive actuators // J. of Mathematical Sci. – 2010. – **168**, No. 5. – P. 746-758.
4. Demydyuk M. V., Hoshovs'ka N.V. Parametric optimization of the transport operations of a two-link manipulator // J. of Mathematical Sci. – 2019. – **238**, Is. 2. – P. 174-88.

M.V.Demydyuk^{1,2}, V.M. Demydiuk²

PARAMETRIC OPTIMIZATION OF TRANSPORTATION OPERATIONS OF NONLINEAR MANIPULATION SYSTEM

¹Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NASU,
3-B, Naukova Str., Lviv, 79060, Ukraine;

e-mail: m_demydyuk@ukr.net

²Ivan Franko National University of Lviv,
1, Universytetska Str., Lviv, 79000, Ukraine

A numerical method for constructing a suboptimal solution to the problems of optimal control of nonlinear manipulation systems with bilateral nonstationary constraints on generalized coordinates is described. The method is based on the representation of generalized coordinates as the sum of a cubic polynomial (in time) and a finite series in a system of given orthogonal functions with unknown parameters, which reduces the problem of optimal control to a nonlinear programming problem.

I.Л. Іванов¹

СИНХРОНІЗАЦІЯ НЕІДЕНТИЧНИХ ЕНЕРГОСИСТЕМ ПРИ ІМПУЛЬСНИХ ЗБУРЕННЯХ

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;
e-mail: ihorivanov2006@gmail.com

Розглядається рух моделі енергосистеми при імпульсних збуреннях у термінах кута повороту θ у вигляді [1, 2]:

$$\begin{aligned} M\ddot{\theta} + D\dot{\theta} + P_{\max}\sin\theta &= P_m, \quad t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \dot{\theta}(\tau_k + 0) &= I(\theta(\tau_k), \dot{\theta}(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (1)$$

де M — момент інерції, D — стала демпфування, P_{\max} — максимальна потужність генератора, $P_m = A\sin\omega t$ — вхідна потужність системи, $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots$, $\lim_{k \rightarrow \infty} (\tau_{k+1} - \tau_k) > 0$, I — лінійна за своїми аргументами та відповідає за імпульсну дію, A, ω — сталі.

Разом із системою (1), що розглядається як ведуча, розглянемо ведену систему

$$\begin{aligned} M\ddot{\theta} + \bar{D}\dot{\theta} + \bar{P}_{\max}\sin\theta &= \bar{P}_m, \quad t \neq \tau_k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \dot{\theta}(\tau_k + 0) &= I(\theta(\tau_k), \dot{\theta}(\tau_k)), \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2)$$

де \bar{D} — стала демпфування, \bar{P}_{\max} — максимальна потужність генератора, $\bar{P}_m = \bar{A}\sin\omega t$ — вхідна потужність системи.

Системи (1) та (2) не є ідентичними, а отже їх повна синхронізація, взагалі кажучи, неможлива. Тому проблема полягає в отриманні умов їх синхронізації з точністю до $\sigma > 0$ при імпульсних збуреннях за допомогою регулятора на основі зворотного зв'язку. Припустимо, що цей регулятор отримує інформацію з затримкою, величина якої рівна $r > 0$.

Для даної пари неідентичних енергосистем за допомогою методу Ляпунова-Разуміхіна встановлено умови синхронізації з заданою точністю. Результат проілюстровано у вигляді області стійкості у просторі параметру керування та помилки синхронізації.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: енергосистема, метод Ляпунова, метод Разуміхіна

1. Іванов І.Л. Синхронізація хаотичної енергосистеми з запізненням при імпульсних збуреннях // 2023. – 59, №4. – С. 118 – 131.
2. Shahverdiev E.M., Hashimova L.H., Hashimova N.T. Chaos synchronization in some power systems // Chaos, Solitons & Fractals. – 2008. – 37, N 3. – P. 827 – 834.

I.L. Ivanov¹

SYNCHRONIZATION OF NON-IDENTICAL POWER SYSTEMS UNDER IMPULSIVE PERTURBATIONS

¹ *S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: ihorivanov2006@gmail.com*

The synchronization of two non-identical Single-Machine Infinite Bus (SMIB) power systems subject to time delay and impulsive perturbations is investigated. The focus is on ensuring synchronization even when the systems exhibit chaotic behavior. Using the Lyapunov-Razumikhin method, we derive delay-dependent synchronization conditions with given accuracy. Numerical simulations are conducted to validate the theoretical results.

О.С. Мазур¹

ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ НАНОПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ НА ОСНОВІ НЕЛОКАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ ТА МОДИФІКОВАНОЇ ТЕОРІЇ ПАРНИХ НАПРУЖЕНЬ

¹Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»,
вул. Кирпичова, 2, 61000, Харків, Україна

Стрімкий розвиток індустрії високих технологій дав значний поштовх для вивчення мікро- та наноструктур. Експериментальні та теоретичні дослідження показують, що класична теорія може призводити до некоректних результатів у дослідженнях мікро/наноструктур через появу дрібномасштабних ефектів, і тому не може бути застосована. Ця проблема призвела до розвитку некласичних теорій, серед яких нелокальна теорія пружності [1], модифікована теорія парних напружень [3]. Застосування саме цих теорій реалізовано в даній роботі для дослідження вільних коливань пластин складної форми. Дослідження проведено за допомогою метода Рітца, а проблема побудови системи базисних функцій вирішується шляхом застосування теорії R-функцій [2].

У представлений роботі розглянуто ортотропну мікро/нанопластину складної форми плану. Математична постановка враховує гіпотези Кірхгофа-Лява.

1. *Нелокальна теорія.*

Математична постановка задачі для мікро/нанопластини зводиться до розв'язання рівняння

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = (1 - \mu \nabla^2) \left(-\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \quad (1)$$

де w – переміщення пластини в напрямку Oz,

$$D_{11} = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{22} = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad D_{12} = D_{22} \nu_1, \quad D_{66} = \frac{G h^3}{12},$$

E_1, E_2 – модулі Юнга, $\nu_1 \nu_2$ – коефіцієнти Пуассона, G – модуль зсуву, h – товщина пластини, та ρ – щільність матеріалу. Рівняння (1) містить додатковий нелокальний параметр μ , значення якого адаптовано до експериментальних результатів або результатів молекулярної динаміки.

В роботі розглянуто наступні граничні умови:
вільно оперта пластина

$$w = 0, \quad M_n = 0, \quad (2)$$

жорстко затиснена пластина

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad (3)$$

де n – нормальнь до границі області, M_n – згинальний момент, та їх комбінації на різних частинах границі.

2. Модифікована теорія парних напружень.

Математична постановка задається наступним рівнянням в частинних похідних:

$$(D_{11} + D_l) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (D_{22} + D_l) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66} + D_l) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4)$$

де $D_l = l^2 G h$, l – дрібномасштабний параметр. Рівняння (4) доповнене граничними умовами (2), (3).

Дослідження для обох розглянутих випадків було проведено варіаційним методом Рітца, для якого побудова базисних функцій, що задовольняють граничні умови, виконана методом R-функцій. За допомогою запропонованого методу досліджено коливання пластини з вирізом, проведено аналіз впливу дрібномасштабних ефектів на значення частотного параметра.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: коливання нанопластин, теорія R-функцій, метод Рітца, нелокальна теорія, модифікована теорія парних напружень.

1. Eringen A. C., Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves // International Journal of Engineering Science. – 1972. – 10, N 5. – P. 425–435.
2. Rvachev V., Kurpa L. The R-functions in Problems of Plates Theory // Naukova Dumka. – Kyiv. – 1987.
3. Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity // International Journal of Solids and Structures. – 2002. – 39, N 10, P. 2731-2743.

O. S. Mazur¹

STUDING VIBRATIONS OF NANOPLATE WITH COMPLEX FORM BASED ON NON-LOCAL THEORY AND MODIFIED COUPLE STRESS THEORY

¹ National Technical University
"Kharkiv Polytechnic Institute",
St. Kyrpychova, 2, 61000, Kharkiv, Ukraine

Study of free vibrations of orthotropic nanoplates with complex shape for various types of boundary conditions is performed. The mathematical formulation is based on the Kirchhoff-Love hypotheses, the nonlocal theory and the modified couple stress theory are used to account for small-scale effects. The proposed approach applies the Ritz method and the theory of R-functions. The influence of the nonlocal parameter and material length scale parameter on linear frequency are investigated and discussed.

А.С. Хорошун¹, Ю.О. Ромасевич²

ДОСЛІДЖЕННЯ ЯКІСНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МЕХАНІЧНОЇ МОДЕЛІ СУПУТНИКА ІЗ ПОДВІЙНИМ ОБЕРТАННЯМ ПРИ ВРАХУВАННІ НЕЛІНІЙНОСТІ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

¹*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
бул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;*

²*Національний університет біоресурсів і природокористування України,
бул. Героїв Оборони, 15, 03041, Київ, Україна;
e-mail: khoroshunananatoliy@gmail.com*

Супутники із подвійним обертанням є одним з основних типів безпілотних космічних апаратів. Наблизено такий супутник можна представити у вигляді двох твердих тіл, платформи та ротора, що з'єднані жорстким валом. Задача полягає в тому, щоб забезпечити необертання платформи, наприклад, для проведення досліджень чи фотозйомки в заданому напрямку. Для цього електродвигун, що розташований на платформі, обертає за допомогою валу ротор у напрямку, який співпадає із напрямком початкового обертання. Таким чином, кутова швидкість платформи прямує до нуля, а момент імпульсу ротора стає рівним початковому моменту системи. Відомо, однак, див. [1], що внаслідок такого маневру супутник може «перекинутись» через збільшення кута нутації чи швидкість обертання ротора почне необмежено зростати. В [3] для дослідження цих негативних режимів було запропоновано механічну модель, що отримала назву TORA.

Аналіз літератури показав, що здебільшого розглядається лінійна залежність сили, яка виникає при деформації пружини, від зміщення. Це добре узгоджується з тим, що при невеликих амплітудах зміщення та деформаціях неушкодженого матеріалу нелінійні ефекти проявляються несуттєво і їх вплив може не враховуватись. Однак, відомо, що для великих амплітуд зміщення та при наявності дефектів мікроструктури матеріалів вплив нелінійних ефектів може стати суттєвим. Тому аналіз динаміки механічних систем та побудова математичних моделей, які враховують нелінійність сил, що виникають при деформації пружин елементів цих систем, становить значний інтерес.

TORA може бути віднесений до класу т.з. малоприводних механічних систем (MMC), які характеризуються тим, що кількість входів керування в них менша кількості змінних, які описують поведінку системи. Системи такого класу широко використовуються при конструкції різноманітних роботів, аерокосмічних та морських апаратів, див. [2], оскільки мають переваги в меншому споживанні енергії і менший вартості у порівнянні з механічними системами з більшою кількістю входів керування.

Таким чином, з вищезазначеного слідує, що виходячи зі слабкої вивченості моделі TORA при врахуванні нелінійності сили, що виникає при деформації пружини, від зміщення, побудова керування, яке забезпечує бажану динаміку такої моделі, в контексті розвитку теорії MMC є, без сумніву, актуальною задачею сучасної теоретичної механіки і має важливе прикладне значення.

Отримано закон обертання електродвигуна, який забезпечує асимптотичне прямування траекторії руху моделі TORA із врахуванням нелінійної залежності сили, яка виникає при деформації пружини, що входить до складу моделі, від зміщення, до положення рівноваги та отримано область притягання стану рівноваги в просторі змінних моделі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: супутник із подвійним обертанням, малоприводна механічна система, функція Ляпунова, область притягання.

1. Hall C.D. Resonance capture in axial gyrostats. Journal of the Astronautical Sciences. 1995. 43, №2. P. 127–138.
2. Liu Y., Yu H. A survey of underactuated mechanical systems. IET Control Theory Appl. 2013. 7, №7. P. 921–935.
3. Yee R.K. Spinup dynamics of a rotating system with limiting torque. Master's Thesis. Los Angeles: UCLA, 1981.

A.S. Khoroshun¹, Y.O Romasevych²

THE INVESTIGATION OF THE QUALITATIVE PROPERTIES OF THE DUAL-SPIN SATELLITE MECHANICAL MODEL TAKING INTO ACCOUNT THE NONLINEARITY OF ELASTIC ELEMENTS

¹ S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;

²National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine,
Heroiv Oborony Str., 15, 03041, Kyiv, Ukraine;
e-mail: khoroshunanatoliy@gmail.com

The law of rotation of the electric motor, which provides asymptotic direction of the trajectory of the TORA model to its equilibrium state, is obtained in the work. In contrast to usual approach, the nonlinear dependence of the force, arising from the deformation of the elastic element of the model, on the amount of deformation is considered. The use of DSC (Dynamic Surface Control) technics allows to get the desired control. The development of the DSC method, which consists of the specific choice of parameters and filter constants, is proposed. This avoids the growth of the order of the auxiliary system, as well as the phenomenon of significant complication of the form of both the auxiliary system of differential equations and the law of control, the so-called "Explosion of terms". Reducing the order of the system of differential equations and simplifying its form allowed in this case to obtain an explicit corresponding auxiliary function and with its help to prove that the proposed control law solves the control problem.

Ю . О . Ромасевич¹, В.С. Ловейкін¹, А.С. Хорошун²

ВИКОРИСТАННЯ УМОВ СТІЙКОСТІ РАУСА-ГУРВИЦЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ ШТРАФНОЇ ФУНКЦІЇ У ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ

¹Національний університет біоресурсів і природокористування України,

бул. Героїв Оборони, 15, 03041, Київ, Україна;

²Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,

бул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна;

e-mail: romasevichyuriy@ukr.net

Задачі оптимального керування рухом динамічних систем зустрічаються у різноманітних галузях науки і техніки, включаючи робототехніку, керування вантажопідйомними і транспортуючими машинами, літальними апаратами, у галузі автоматичного керування технологічними процесами промисловості, сільського господарства, будівельного виробництва тощо. Розглядаючи клас лінійних систем, необхідно зауважити, що теоретична база синтезу оптимальних керувань детально розроблена в [1]. У постановках задач достатньо широко використовуються функціонали, які відповідають квадратичним формам змінних стану та керувань (LQR-керування). Однак, у випадку необхідності мінімізації нелінійних функціоналів необхідно застосовувати інші підходи, які досить часто ґрунтуються на наближених чисельних методах оптимізації. Якщо задачу оптимального керування вдається звести до задачі безумовної оптимізації (вона передбачає визначення скінченної кількості аргументів, наприклад, коефіцієнтів оператора керування – регулятора), то ефективність її подальшого розв’язання буде у значній мірі залежати від застосування того чи іншого методу чисельної оптимізації. При цьому обов’язковою умовою синтезу оптимального керування є умова стійкості. У випадку, коли оператор керування рухом системи є лінійним, опис її руху можна виконати за допомогою системи лінійних диференціальних рівнянь. Тоді для неї можна побудувати характеристичний поліном і, отже, матрицю Гурвиця.

Як відомо [2], для того, щоб рух лінійної системи був стійким необхідно і достатньо, щоб діагональні мінори матриці Гурвиця були додатними. Ці умови можна отримати у вигляді нерівностей, в які входять шукані коефіцієнти оператора керування. Виконуючи пошук оптимальних значень цих коефіцієнтів, необхідно вимагати виконання отриманих нерівностей. У технічному плані ці умови зручно представити у вигляді певної штрафної функції. Вона видаватиме значні величини, якщо хоча б одна із умов не виконується, і буде рівна нулю при виконанні всіх умов:

$$P = \begin{cases} \delta_P \sum_{i=1}^n |\Delta_i|, & \text{якщо } \Delta_1 \leq 0 \vee \Delta_2 \leq 0 \vee \dots \vee \Delta_n \leq 0; \\ 0, & \text{якщо } \Delta_1 > 0 \wedge \Delta_2 > 0 \wedge \dots \wedge \Delta_n > 0, \end{cases}$$

де P – штрафна функція; δ_P – штрафний коефіцієнт; $\Delta_1 \dots \Delta_n$ – діагональні мінори матриці Гурвиця (визначники Гурвиця); n – порядок системи. Отже, матимемо складний функціонал, який необхідно мінімізувати:

$$Cr = F + P,$$

де Cr – цільова функція, яка підлягає мінімізації. Зважена штрафна функція P за своїми значеннями значно перевищуватиме вихідний функціонал F . Це досягається величиною штрафного коефіцієнта δ_P , який повинен бути на декілька порядків більшим, ніж найбільше значення вихідного функціонала (наприклад, $\delta_P=10^{10}$). Чисельний алго-

ритм оптимізації спочатку буде виконувати пошук таких коефіцієнтів оператора керування, при яких забезпечуватиметься стійкість регулювання. Лише перетнувши межу стійкості (у напрямку із області нестійкості в область стійкості) алгоритм оптимізації забезпечить обнулення штрафної функції і залишиться лише мінімізація першого доданку функціоналу. Обнулення штрафної функції відбудеться при виконанні всіх нерівностей – умов стійкості Раяса-Гурвиця.

Необхідно відмітити, що знайшовши такий розв'язок, який відповідатиме стійкому руху динамічної системи, оптимізаційний алгоритм не зможе покинути область стійкості. У випадку багатоагентних оптимізаційних алгоритмів (наприклад, PSO-орієнтовані, див. [3]) агент, який матиме кращий розв'язок задачі вже не покине область стійкості.

Така схема розв'язання задач оптимального керування у вигляді зворотного зв'язку дозволяє автоматично врахувати умови стійкості та забезпечити мінімізацію навіть нелінійних функціоналів. Це, в свою чергу, дає змогу дослідникам більш повно врахувати вимоги при синтезі оптимальних систем керування, не обмежуючись стандартними і добре відомими підходами.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: умови стійкості, штрафна функція, оптимальне керування, динамічна система.

1. Frank L.L., Draguna L.V., Vassilis L.S. Optimal control.3rd ed. JOHN WILEY & SONS, INC. 2012 – 540 p.
2. Rahman Q.I., Schmeisser, G. Analytic theory of polynomials. London Mathematical Society Monographs. New Series 26. Oxford: Oxford University Press. 2002. – 742 p.
3. Romasevych Y., Loveikin V., Loveikin Y. Development of a PSO Modification with Varying Cognitive Term // 2022 IEEE 3rd KhPI Week on Advanced Technology, KhPIWeek 2022 – Conference Proceedings (Kharkiv, 3-7 October 2022). – Kharkiv, 2022. – P. 1-5.

Y.O. Romasevych¹, V.S. Loveikin¹, A.S. Khorohun

USE OF ROUTH–HURWITZ STABILITY CONDITIONS FOR DEVELOPMENT A PENALTY FUNCTION IN OF OPTIMAL CONTROLS PROBLEMS

¹*National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine,
Heroiv Oborony Str., 15, 03041, Kyiv, Ukraine;*

²*S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences,
P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine;
e-mail: romasevichyuriy@ukr.net*

In the work Routh-Hurwitz stability conditions are considered for synthesis of optimal control. The problem to solve includes linear plant to control, linear control operator and linear or nonlinear criterion to minimize. The stated in the work proposition is to use Routh-Hurwitz stability conditions to develop a penalty function and modify initial criterion. It includes penalty and initial components. Its minimization is a two-stage procedure, at the end of which optimal control gains are determined.

С.В. Бабенко^{1,2}

НОВІ ВЕРХНІ ОЦІНКИ НОРМИ МАТРИЧНОЇ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЇ ФУНКІЇ

¹Черкаський національний університет імені Богдана Хмельницького, бул. Шевченка, 81, 18031,

Черкаси, Україна; e-mail: differenceeq@gmail.com

²Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ, вул. П.Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна

КЛЮЧОВІ СЛОВА: стійкість, часова шкала, матрична експоненціальна функція

Теорія часових шкал є перспективним напрямком математичної науки, предметом дослідження якої є функції, визначені на довільній непорожній замкнутій підмножині множини дійсних чисел \mathbb{R} , що називається часовою шкалою. Основними завданнями теорії є уніфікація понять і результатів неперервного та дискретного аналізу та узагальнення їх для будь-якої часової шкали. Прикладом такої уніфікації є динамічні рівняння на часовій шкалі: якщо в якості часової шкали взяти множину дійсних чисел, то динамічне рівняння перетворюється на диференціальне рівняння, якщо множину цілих чисел, то воно стає різницевим. При цьому, якщо в якості часової шкали взяти якусь іншу множину, то динамічне рівняння стає об'єктом, який не зустрічається в класичному аналізі. Основи теорії часових шкал викладені у роботах [1], [2] та [3].

Динамічні рівняння на часовій шкалі застосовуються для моделювання процесів різної природи. Одне з таких застосувань для моделювання систем керування пропонується у роботі [5]. Там розглядається система керування, яка описується системою лінійних диференціальних рівнянь і нульового розв'язок якої необхідно стабілізувати:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B \in \mathbb{R}^{n \times m}, \\ y &= Cx + Du, \quad C \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad D \in \mathbb{R}^{p \times m}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для стабілізації нульового розв'язку цієї системи застосовується керування у формі $u(t) = Kx(t_k)$, $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $t \in [t_k, t_{k+1})$, де $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ — деяка послідовність моментів часу, така що відстані $\mu(t_k)$ утворюють послідовність незалежних випадкових величин з відомими статистиками. Фактично, t_k — моменти часу, коли керування оновлюється. Розв'язувати поставлену задачу пропонується шляхом зведення системи (1) до системи динамічних рівнянь на часовій шкалі \mathbb{T} , точками якої є числа t_k , з подальшим дослідженням системи на стійкість:

$$x^{\Delta}(t) = (\mathcal{A}(\mu(t)) + \mathcal{B}(\mu(t))K)x(t), \quad t \in \mathbb{T}, \quad (2)$$

де $\mathcal{A}(\mu(t)) = \exp_c(A\mu(t))A$, $\mathcal{B}(\mu(t)) = \exp_c(A\mu(t))B$, а \exp_c є функцією від матриці і визначається за формулою:

$$\exp_c(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{X^{i-1}}{i!}.$$

Алгоритм побудови системи (2) детально наведено у роботі [6].

Як відомо, для дослідження стійкості лінійної системи диференціальних рівнянь необхідно мати оцінку норми матричної експоненти, побудованої для матриці системи. Аналогічним є стан справ і з лінійною системою динамічних рівнянь на часовій шкалі на зразок (2): умови стійкості такої системи можна отримати на основі оцінки норми так званої матричної експоненціальної функції. Ця функція узагальнює матричну експоненту $e^{A(t-t_0)}$ і позначається так: $e_A(t, t_0)$. З огляду на те, що часова шкала може мати досить складну структуру, задача про побудову оцінки норми матричної експоненціальної функції є нетривіальною. Робота [4] містить перші результати у напрямку розв'язання цієї задачі. А саме, у [4] отримана верхня оцінка норми $e_A(t, t_0)$ у вигляді:

$$\|e_A(t, t_0)\| \leq K e_{\alpha}(t, t_0), \quad \forall t, t_0 \in \mathbb{T} \quad (t \geq t_0), \quad (3)$$

де \mathbb{T} — часова шкала, K, α — відомі параметри, а $e_\alpha(t, t_0)$ — скалярна експоненціальна функція. Інші оцінки виду (3) були отримані пізніше у роботах [8] і [7].

У даній доповіді пропонуються деякі результати дослідження, присвяченого виведенню нової оцінки виду (3). Особливістю нової оцінки є те, що вона покращує оцінки з [8] і [7]. Перед тим, як навести основні результати, пояснимо деякі з позначень, які будуть використовуватися надалі. \mathbb{T} позначає часову шкалу, $\mu(t)$ — функцію зернистості шкали \mathbb{T} , $h_k(t, t_0)$ позначає узагальнені поліноми. $\mathcal{R}, \mathcal{R}^+$ позначають клас регресивних та додатно регресивних функцій, визначених на часовій шкалі \mathbb{T} , відповідно. Детальніше з цими поняттями можна ознайомитися, наприклад, у [1]. Слідуючи [1], введемо ще поняття, яке відіграє важливу роль для отримання оцінки.

Означення 1. Для заданої функції $\lambda \in \mathcal{R}(\mathbb{T}; \mathbb{C})$ такої що $1 + \mu(t)\lambda(t) \neq 0$, для всіх $t \in \mathbb{T}$, величина

$$\Re_{\mu(t)}(\lambda) = \lim_{s \rightarrow \mu(t)+0} \frac{|1 + s\lambda(t)| - 1}{s} \quad (4)$$

для $t \in \mathbb{T}$ називається Нільгеровою дійсною частиною функції λ .

Перший результат щодо оцінки міститься в наступній теоремі.

Теорема 1. Нехай $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Якщо існують дійсні числа $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{R}^+$, такі що $\eta_1 < \eta_2$ і виконуються умови:

(i) $\eta_1 \leq \Re_{\mu(t)}(\lambda_i(A)) \leq \eta_2$, для всіх $t \in \mathbb{T}$ і кожного власного значення $\lambda_i(A)$;

(ii) $\eta := \min \{1 + \mu_* \eta_1, 1 + \mu^* \eta_1\} > 0$,

то наступна оцінка виконується для всіх $t_0, t \in \mathbb{T}$:

$$\|e_A(t, t_0)\| \leq e_{\eta_2}(t, t_0) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2\|A\|}{\eta} \right)^k h_k(t, t_0), \quad (5)$$

де $t \geq t_0$.

Теорема 1 дає верхню оцінку норми матричної експоненціальної функції і в цій оцінці мажоруюча функція має вигляд добутку експоненціальної функції $e_{\eta_2}(t, t_0)$ та виразу, який є лінійною комбінацією узагальнених поліномів.

Перед тим, як формулювати наступну теорему, введемо функцію $\omega_\varepsilon(\mu)$:

$$\omega_\varepsilon(\mu) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{n-2} (1 + \mu\varepsilon)^{\frac{k}{n-1}}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (6)$$

та функції, визначені для всіх $t_0 \in \mathbb{T}$ за формулами:

$$t_1(t_0) = \inf \left\{ s \in \mathbb{T} : s \geq t_0 + \frac{(n-1)\eta}{2\|A\|} \right\}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \underline{t}(t_0) &= \sup \{s \in \mathbb{T} : s \leq t_0 + \omega_\varepsilon(\mu_*)\}, \\ \bar{t}(t_0) &= \inf \{s \in \mathbb{T} : s \geq t_0 + \omega_\varepsilon(\mu^*)\}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2\|A\|}{\eta} \right)^k h_k(t, t_0), \quad \forall t \in \mathbb{T}, t \geq t_0. \quad (9)$$

Теорема 2. Нехай $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матриця, для якої існують дійсні числа $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{R}^+$ ($\eta_1 < \eta_2$), які задовільняють умови (i) і (ii) Теореми 1. Тоді для будь-якого $t_0 \in \mathbb{T}$ та дійсного $\varepsilon > 0$ таких, що:

$$\omega_\varepsilon(\mu_*) \geq t_1(t_0) - t_0, \quad (10)$$

і для будь-якого $t \geq t_0$ зі шкали \mathbb{T} , виконується наступна оцінка:

$$\|e_A(t, t_0)\| \leq L(\varepsilon) e_{\eta_2 \oplus \varepsilon}(t, t_0), \quad (11)$$

де додатна константа $L(\varepsilon)$ обчислюється за формулою:

$$L(\varepsilon) = \max \left\{ \varphi(t_1(t_0)), \frac{n(2\|A\|/\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \max_{s \in [\underline{t}(t_0), \bar{t}(t_0)]} ((s-t_0)^{n-1} e_{\ominus\varepsilon}(s, t_0)) \right\}. \quad (12)$$

Відмінність оцінки (11) з даної теореми від оцінки з Теореми 1 в тому, що у оцінці (11) мажоруюча функція має вигляд добутку експоненціальної функції $e_{\eta_2 \oplus \varepsilon}(t, t_0)$ та константи $L(\varepsilon)$. Наступна теорема містить оцінку аналогічну оцінці з теореми 2 з тією відмінністю, що в ній пропонується більш зручна формула для обчислення константи $L(\varepsilon)$.

Теорема 3. Нехай $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матриця, для якої існують дійсні числа $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{R}^+$ ($\eta_1 < \eta_2$), які задовольняють умови (i) і (ii) Теореми 1. Тоді для будь-якого $t_0 \in \mathbb{T}$ та дійсного $\varepsilon > 0$ таких, що умова (10) виконується для всіх $t \geq t_0$ зі шкали \mathbb{T} , виконується наступна оцінка:

$$\|e_A(t, t_0)\| \leq L'(\varepsilon) e_{\eta_2 \oplus \varepsilon}(t, t_0), \quad (13)$$

де додатна константа $L'(\varepsilon)$ обчислюється за формулою:

$$L'(\varepsilon) = \max \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2\|A\|(t_1(t_0)-t_0)}{\eta} \right)^k \frac{1}{k!}, \frac{n}{(n-1)!} \left(\frac{2\|A\|}{\eta} \right)^{n-1} \right. \\ \left. \times \max_{s \in [\underline{t}(t_0), \bar{t}(t_0)]} ((s-t_0)^{n-1} e_{\ominus\varepsilon}(s, t_0)) \right\}. \quad (14)$$

1. Martin Bohner and Allan C Peterson. Advances in dynamic equations on time scales. - Springer Science Business Media, 2002.
2. Martin Bohner and Allan Peterson. Dynamic equations on time scales: An introduction with applications. - Springer Science Business Media, 2012.
3. Anatoly A Martynyuk. Stability theory for dynamic equations on time scales. - Springer, 2016.
4. C. Pötzsche, S. Siegmund, and F. Wirth. A spectral characterization of exponential stability for linear time-invariant systems on time scales // Discrete and Continuous Dynamical Systems. - 2003. - 9(5). - P. 1223–1241.
5. D. R. Poulsen, J. M. Davis, and I. A. Gravagne. Observer based feedback controllers on stochastic time scales. In 45th Southeastern Symposium on System Theory, pages 104–107. IEEE, 2013.
6. D. R. Poulsen. Stability and control on stochastic time scales. PhD thesis, Baylor University, 2015.
7. G. Russo and F. Wirth. Matrix measures, stability and contraction theory for dynamical systems on time scales. - Discrete Continuous Dynamical Systems-B, 2021.
8. F. Z. Taousser. Stability analysis of switched systems on non-uniform time domains. - PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 2015.

S.V. Babenko^{1,2}

NEW UPPER BOUNDS FOR THE NORM OF THE MATRIX EXPONENTIAL FUNCTION

¹The Bohdan Khmelnytsky National University of Cherkasy, Cherkasy, Ukraine, Shevchenko Boulevard 81, 18031, Cherkasy, Ukraine

²S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences, P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine; e-mail: differenceeq@gmail.com

In this paper, we derive some upper bounds for the norm of the matrix exponential function $e_A(t, t_0)$, where A is a regressive square matrix, $t, t_0 \in \mathbb{T}$, \mathbb{T} being an arbitrary nonempty closed subset of the set of real numbers \mathbb{R} , which is called a time scale. The matrix exponential function generalizes the usual matrix exponential as well as the integer power of a matrix: if $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ and A is a constant matrix, then $e_A(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$, while if $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ and $I + A$ is invertible, then $e_A(t, t_0) = (I + A)^{(t-t_0)}$.

А.А. Мартинюк, Т.О. Лук'янова, Ю.А. Мартинюк-Чернієнко

ОБМЕЖЕНІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРНИХ СИСТЕМ НА ЗАДАНОМУ ЧАСОВОМУ ІНТЕРВАЛІ

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ, вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: lukianovatetyana@gmail.com

В роботі досліджується нова властивість розв'язків нелінійних систем - обмеженість на заданому інтервалі часу відносно позитивно визначені функції. Для доведення основних тверджень використано метод функцій Ляпунова [2] у поєднанні з методом інтегральних нерівностей [1, 3].

Для системи двох скалярних рівнянь з нелінійним стійким наближенням встановлено оцінку функції Ляпунова і отримано умови обмеженості руху відносно позитивно визначені функції. Розглянуто задачу про обмеженість на заданому інтервалі відносно позитивно визначені функції розв'язків систем рівнянь з автономним стійким наближенням. Аналогічні умови обмеженості встановлено в разі стійкості неавтономного лінійного наближення.

Розглянуто також рівняння збуреного руху в нормальній формі Коші, для яких отримано умови обмеженості розв'язків на заданому інтервалі часу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: неавтономна система, стійке наближення, обмеженість на скінченному інтервалі, обмеженість відносно функції.

1. Anderson D.R., Ulness D.J. Results for conformable differential equations. - Working Paper, January 2016. – 42 p.
2. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. – Int. J. Control. – 1992. – 55, N 3. – P. 531 – 773.
3. Martynyuk A.A. Analysis of equi-boundedness and stability of essentially nonlinear systems. – Int. Appl. Mech. – 2023. – 59, N 1. – P. 69 – 78.

A.A. Martynyuk, T.O. Lukyanova, Yu.A. Martynyuk-Chernienko
BOUNDEDNESS IN NONLINEAR OSCILLATORY SYSTEMS AT A GIVEN TIME INTERVAL

S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences, P. Nesterov Str., 3, 03057, Kyiv, Ukraine; e-mail: lukianovatetyana@gmail.com

This paper considers three types of perturbed motion equations with a stable linear (nonlinear) approximation. New sufficient conditions for boundedness of motion on a finite interval with respect to a given Lyapunov function are obtained. The conditions are obtained on the basis of the direct Lyapunov method and the method of integral inequalities.