МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ

“КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ

ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО”

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

КУРСОВА РОБОТА

з навчальної дисципліни

“Забезпечення якості програмного забезпечення”

Виконав студент групи КМ-71

ЛИСИЙ П.О.

Керівник

ЛЮБАШЕНКО Н.Д.

Оцінка:

Кількість балів:

КИЇВ – 2019

ЗМІСТ

[ВСТУП 3](#_Toc25180996)

[РОЗДІЛ 1. РОЗВ’ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ 4](#_Toc25180997)

[1.1 Класифікація диференціальних рівнянь 4](#_Toc25180998)

[1.2 Методи розв’язання 6](#_Toc25180999)

[1.2.1 Метод скінченних різниць 6](#_Toc25181000)

[1.2.2 Метод скінчених елементів, метод скінчених об’ємів та методи проекцій 9](#_Toc25181001)

[РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВОГО МЕТОДУ ДЛЯ ПОСТАВЛЕНОГО ЗАВДАННЯ (ВАРІАНТ 13) 10](#_Toc25181002)

[2.1 Постановка задачі 10](#_Toc25181003)

[2.2 Побудова математичної моделі 11](#_Toc25181004)

[2.3 Обчислювальна частина 12](#_Toc25181005)

[РОЗДІЛ 3. ТЕСТУВАННЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ 14](#_Toc25181006)

[ВИСНОВКИ 18](#_Toc25181007)

[ЛІТЕРАТУРА 19](#_Toc25181008)

# ВСТУП

Метою роботи є дослідження та використання на практиці методів для розв’язку системи диференціальних рівнянь. А саме: вирішення задачі про пошук температури у заданих точках певної тонкої пластини, на кінцях якої підтримується постійна температура. Написання тест-кейсів для перевірки коректної роботи програми.

# РОЗДІЛ 1. РОЗВ’ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

**1.1 Класифікація диференціальних рівнянь**

Класифікація диференціальних рівнянь може здійснюватися за різними ознаками. Класифікація відіграє важливу роль, оскільки для кожного класу рівнянь розроблені відповідна теорія та методи розв’язування. Основними критеріями класифікації ДРЧП є:

1) **Порядок рівняння**. Порядком рівняння є найвищий порядок похідної, що входить в це рівняння. Наприклад,

- рівняння 2-го порядку,

- рівняння 1-го порядку.

Найпоширенішими є ДРЧП 2-го порядку.

2) **Число незалежних змінних.** Незалежними змінними є змінні від яких залежить невідома (шукана) функція. На практиці в ролі незалежних змінних виступають звичайні Декартові координати у просторі та час.

3) **Лінійність**. Розрізняють лінійні та нелінійні рівняння з частинними похідними. У лінійних рівняннях залежна змінна (функція) та всі її похідні входять лінійно, тобто вони не перемножуються, не підносяться до квадрату, не є аргументами інших функцій і т.д. У протилежному випадку рівняння буде нелінійним. Приклади нелінійних рівнянь наведено нижче:

В загальному випадку, лінійним рівнянням другого порядку з двома незалежними змінними називається рівняння такого виду:

Де A,B,C,D,E,F,G –задані функції змінних х та y

4) **Однорідність.**Диференціальне рівняння називається однорідним, якщо вільний член тотожньо дорівнює нулю в заданій області визначення. У протилежному випадку рівняння називається неоднорідним. Наприклад, рівняння Пуассона – неоднорідне, а рівняння Лапласа –однорідне.

5) **Вид коефіцієнтів**. Якщо коефіцієнти рівняння є сталими величинами, то таке рівняння називається рівнянням з постійними коефіцієнтами, у протилежному випадку – рівнянням зі змінними коефіцієнтами.

Усі лінійні ДРЧП другого порядку відносяться до одного з трьох типів: параболічного, гіперболічного та еліптичного. Рівняння параболічного типу визначаються умовою  . Рівняння дифузії (та всі його часткові випадки) має параболічний тип. Рівняння гіперболічного типу описують коливальні процеси і визначаються умовою  . Рівняння еліптичного типу описують встановлені процеси і задаються умовою

  . Зокрема, рівняння Пуассона і Лапласа є еліптичними. У випадку змінних коефіцієнтів тип рівняння може змінюватися від точки до точки.

6) **Стаціонарність**. Якщо ДРЧП включає похідну по часу, то таке диференціальне рівняння називається нестаціонарним в іншому випадку – стаціонарним.

**1.2 Методи розв’язання**

Розрізняють десять груп методів розв’язування ДРЧП:

* **Методи розділення змінних**
* **Методи інтегральних перетворень**
* **Методи розв’язування координат**
* **Перетворення залежної змінної**
* **Чисельні методи**
* **Методи теорії збурень**
* **Методи функцій Гріна**
* **Методи інтегральних рівнянь**
* **Варіаційні методи**
* **Методи розкладу за власними функціями**

**Розглянемо детальніше декілька методів.**

**1.2.1 Метод скінченних різниць**

Метод скінченних різниць є один із методів чисельних методів для розв’язування ДРЧП.

Для диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних найчастіше використовується двовимірна прямокутна сітка. Центрально - різницеві шаблони, які https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fksa/2kvetnyj_komp%27yuterne_modelyuvannya_system_procesiv/t1/5._src/5._image031.pngзастосовують на двовимірній квадратній сітці з кроком h , зображеній на рисунку 1 (індекс j надається незалежній змінній  y, а t відноситься до x ), можуть бути отримані аналогічно одновимірному випадку.

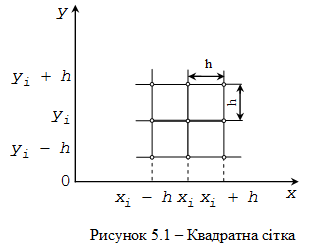
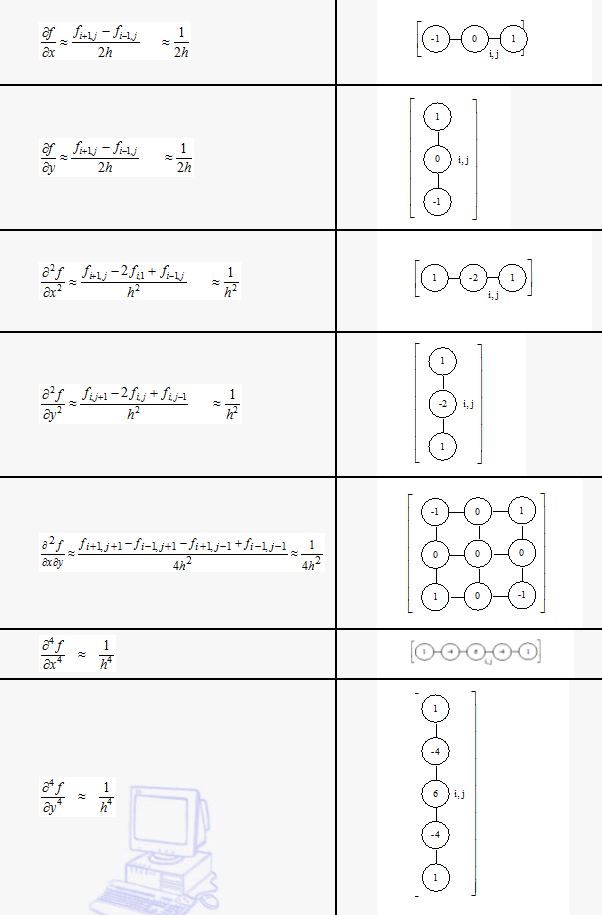


Рисунок 1 – Квадратна сітка

Для зручності позначення  замінимо на . Користуючись цим позначенням, отримаємо вирази для частинних похідних, з якими доводиться зустрічатися на практиці, й використання яких ілюструється відповідними обчислювальними шаблонами (таблиця 2).

З цих елементів будуються більш складні обчислювальні шаблони для диференціальних рівнянь. Додавання похідних здійснюється суперпозицією відповідних обчислювальних шаблонів. Цим методом конструюються шаблони для  і  .

Всі наведені обчислювальні шаблони мають похибку другого порядку. Можна побудувати більш точні обчислювальні шаблони, якщо включити у розгляд додаткові вузли. Іноді, щоб звести до мінімуму розповсюдження похибок , користуються лівими або правими різницями.



Таблиця 2 - Обчислювальні шаблони для похідних

**1.2.2 Метод скінчених елементів, метод скінчених об’ємів та методи проекцій**

Метод кінцевих елементів використовується в випадках, коли апроксимуючі функції в різних точках області зручно вибирати різними, а методи кінцевих об’ємів користуються для складних систем, де важливо дослідити процес з великою кількістю параметрів у часі.

Сутність проекційних методів обчислювальної математики полягає в представленні розв’язку задачі множиною проекцій у визначеній системі координатних функцій.

# РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВОГО МЕТОДУ ДЛЯ ПОСТАВЛЕНОГО ЗАВДАННЯ (ВАРІАНТ 13)

**2.1 Постановка задачі**

Розглядається тонка прямокутна пластина, що розігрівається. Пластина є ізольованою, окрім країв, де підтримується постійна температура. Ізоляція пластини та маленька товщина означають, що розповсюдження тепла можна розглядати у вимірах x та y. У стаціонарному стані розподіл температури усередині пластини описується рівнянням Лапласа

де (x,y) ‒ температура в точці пластини з координатами (x,y) .

Варіант 13:

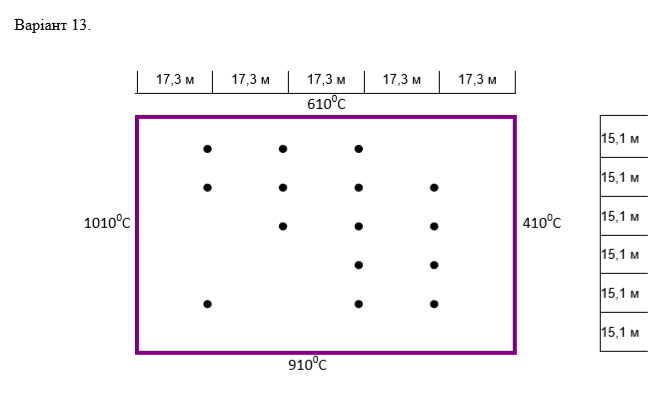


Рисунок 3 – 13 варіант роботи

**2.2 Побудова математичної моделі**

Робимо декілька перетворень для рівняння Лапласа.

(1)

У нашому варіанті k = 17.3, m = 15.1

Тепер представимо вузли нашої пластини як відповідну матрицю, де елементи матриці – вузли, в яких шукаємо температуру ( позначає вузли матриці)

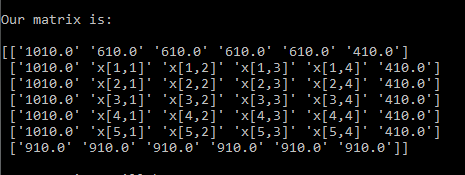


Рисунок 4 – Пластина у вигляді матриці

Для кожного елементу (нашої матриці) запишемо рівняння (1). Отримаємо систему лінійних рівнянь.

**2.3 Обчислювальна частина**

У нашому варіанті k = 17.3, m = 15.1

Систему лінійних рівнянь складаємо з формули (1):

де

Систему лінійних рівнянь матиме наступний вигляд ( позначає вузли матриці):

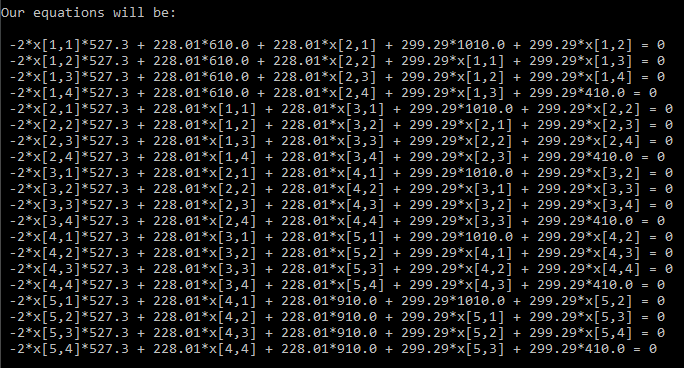


Рисунок 5 – Система отриманих рівнянь

Наступним кроком є конвертація рядків до відповідних елементів матриці та рядку розв’язків. Розв’язання системи проводимо за допомогою бібліотеки numpy. З даного пакету ми будемо використовувати функцію numpy.linalg.solve(summ, solution), де sum – масив коефіцієнтів при відповідних елементах матриці , а solution – вектор вільних членів.

В результаті отримаємо вектор рішень для кожного елемента матриці . Представимо вектор у вигляді матриці.

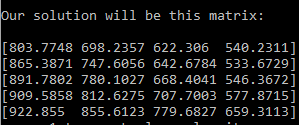


Рисунок 6 – Розв`язок системи рівнянь

Знайдемо саме ті точки, що потрібні для нашого варіанту:

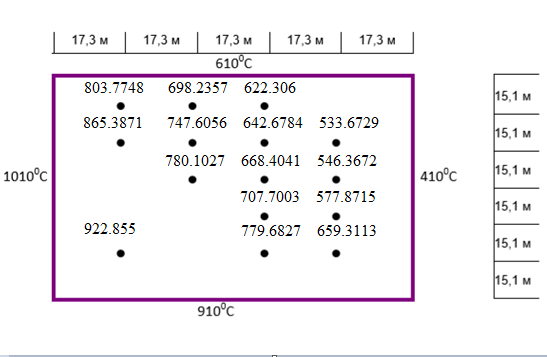


Рисунок 7 – Точки, що потрібні нам в завданні

# РОЗДІЛ 3. ТЕСТУВАННЯ ПРОГРАМНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Тест-кейс розроблений за результатами, які можна вважати достовірними

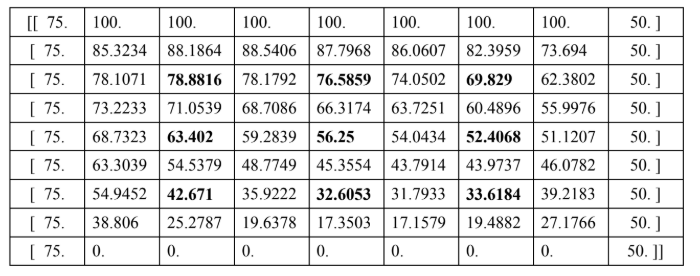


Рисунок 8 – таблиця достовірних даних для h = 1, m = 1

Передаємо в програму потрібні значення і порівнюємо результат з достовірним.

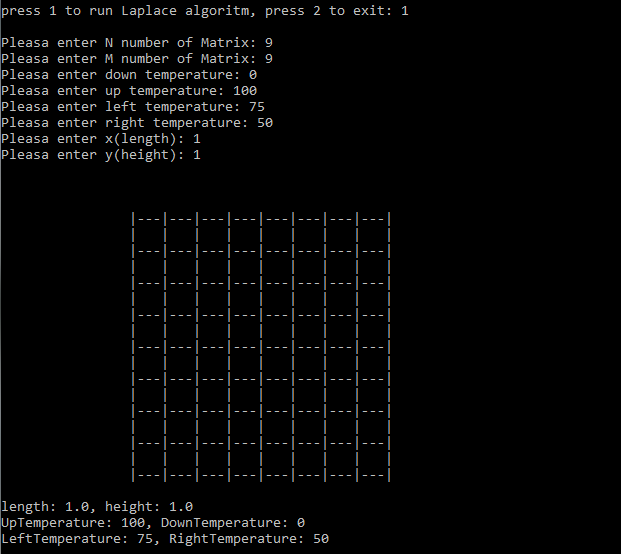


Рисунок 9 – вхідні данні та зображення пластини

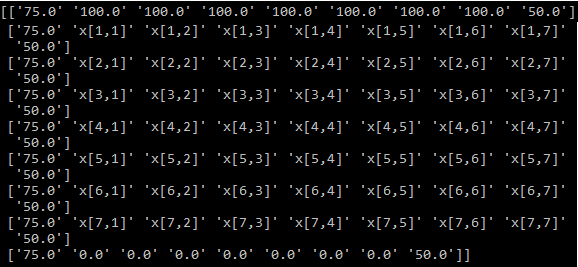


Рисунок 10 – Матриця для складання рівнянь

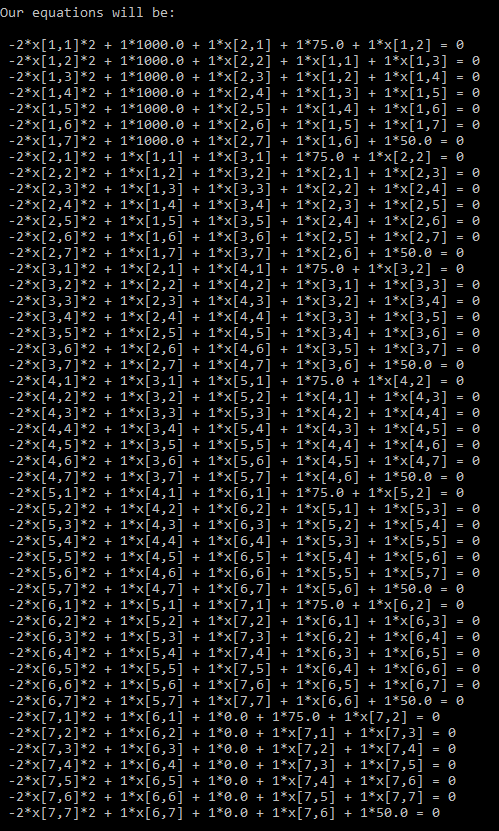


Рисунок 11 – система рівнянь для пластини 9x9

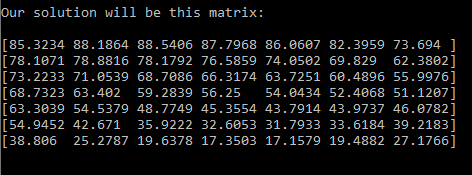


Рисунок 12 – система розв’язків для пластини 9x9

Порівнюємо результат з істинним. Значення ідентичні. Отже дана програма працює коректно. Під час тестування були виправлені деякі неточності з візуалізацією даних та була додана обробка помилок для некоректних значень вхідних даних.

# ВИСНОВКИ

За допомогою курсової роботи були вивчені та застосовані на практиці методи розв’язання диференціальних рівнянь, а саме скінченно-різницевий метод. Отримано чисельний результат розв’язку задачі розповсюдження тепла по тонкій, ізольованій(окрім країв, де підтримується постійна температура) пластинці. Для цього дана задача була розглянута як задача Діріхле для рівняння Лапласа і розв’язана методом скінченних різниць, а саме: була визначена сітка, значення похідних в вузлах якої знайдено методом скінчених різниць, отримано систему з рівнянь (по кількості вузлів у сітці), знайдено її рішення, результат був записаний у формі рисунку.

# 

# ЛІТЕРАТУРА

1.Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. - К.: Видавнича група BHV, 2006. - 480 c.

2.Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. –М.: Наука, 1966. – 632 с.

3.Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1966. – 664 с.