

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Національний технічний університет України “КПІ”

**В.М. Бондаренко, В.Г. Губар**

**Основи електродинаміки**

**Розділ «Основи теорії сигналів»**

**(Навчальний посібник)**

*Рекомендовано Методичною радою НТУУ “КПІ”*

Київ  
НТУУ “КПІ”

2012

УДК 004.896

*Гриф надано Методичною радою НТУУ “КПІ”  
(Протокол № 2 від 18.10.2012 р. )*

Рецензенти

*В. І. Чупринка, д. т. н., професор,*

Київський національний університет технологій та дизайну

*Б. Л. Шрамченко, канд. техн. наук, доц.,*

Київський національний університет технологій та дизайну

Відповідальний редактор

*В. П. Корнєв, канд. техн. наук, доц.,*

Національний технічний університет України “КПІ”

**Бондаренко В.М., Губар В.Г.**

Основи електродинаміки. Розділ «Основи теорії сигналів» (Навчальний посібник). – К.: НТУУ “КПІ”, 2012. – 90 с.

В посібнику наведені відомості з теорії сигналів, включаючи елементи спектрального аналізу, у тому числі для дискретних сигналів. Відомості про сигнали та застосування їх моделей в оболонці системи OrCAD супроводжуються розібраними прикладами, що дають можливість самостійно вивчати основи теорії сигналів і засвоювати інструменти моделювання радіоелектронних пристроїв.

Для студентів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

УДК 004.896

## ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП .....	5
1. КЛАСИФІКАЦІЯ І ПАРАМЕТРИ СИГНАЛІВ .....	6
1.1. Періодичні сигнали .....	8
1.1.1. Гармонійні сигнали (синусоїдальні) .....	8
1.1.2. Додаткові параметри періодичних сигналів .....	11
1.1.3. Періодичні несинусоїдальні сигнали .....	12
1.1.3.1. Прямокутні коливання .....	13
1.1.3.2. Пилкоподібні коливання .....	15
1.1.3.3. Імпульсні коливання .....	15
1.2. Неперіодичні сигнали .....	16
1.2.1. Одиночний імпульс .....	17
1.2.2. Затухаючий гармонічний сигнал .....	18
1.2.3. Модульовані сигнали .....	19
1.3. Випадкові або нерегулярні сигнали .....	22
1.4. Порівняння сигналів .....	22
2. СПЕКТРАЛЬНО-ЧАСТОТНЕ ПОДАННЯ СИГНАЛІВ .....	25
2.1. Подання сигналів .....	25
2.2. Базисні функції .....	27
2.3. Отримання спектру періодичного сигналу за допомогою ряду Фур'є .....	30
2.3.1. Ряд Фур'є в тригонометричній формі .....	30
2.3.2. Ряд Фур'є в комплексній формі .....	33
2.3.3. Похибка при апроксимації сигналів .....	35

2.3.4. Гармонійний склад сигналу при наявності деяких форм його симетрії .....	37
2.4. Спектральне подання неперіодичних сигналів.....	41
2.4.1. Інтегральне перетворення Фур'є .....	41
2.4.2. Частотні характеристики .....	43
2.4.3. Зв'язок між частотними й часовими характеристиками кіл .....	46
2.4.4. Зв'язок між спектрами періодичних і неперіодичних сигналів..	49
2.4.5. Зв'язок перетворення Фур'є з перетворенням Лапласа .....	55
3. ДИСКРЕТНІ (ЦИФРОВІ) СИГНАЛИ .....	61
3.1. Дискретизація безперервних сигналів .....	61
3.2. Теорема відліків .....	63
3.3. Імпульсна модуляція .....	64
3.4. Функція передачі цифрової системи .....	66
3.5. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) .....	69
4. ПРАКТИКУМ. СИГНАЛИ В ORCAD .....	73
4.1. Основні аспекти роботи з редактором Stimulus Editor .....	73
4.2. Аналогові сигнали .....	75
4.2.1. Експоненціальний сигнал .....	75
4.2.2. Імпульсний сигнал .....	76
4.2.3. Кусково-лінійний сигнал .....	78
4.2.4. Синусоїдальний сигнал .....	79
4.2.5. Синусоїдальний сигнал з частотною модуляцією .....	81
4.3. Цифрові сигнали .....	83
4.3.1. Одиночний сигнал .....	83
4.3.2. Синхроімпульс .....	85
4.3.3. Шина .....	87
ЛІТЕРАТУРА .....	89

## ВСТУП

В посібнику наведені відомості з теорії сигналів, включаючи елементи спектрального аналізу, у тому числі для дискретних сигналів. Такі відомості сприяють кращому розумінню методів теорії електричних кіл, а також моделей сигналів, закладених у систему проектування радіоелектронних пристроїв ORCAD.

Наряду з графічним редактором електронних схем CAPTURE, ORCAD має такий потужний інструмент, як редактор сигналів STIMULUS. Останній надає широкі можливості редагування параметрів сигналів різних класів. Далі в процесі моделювання користувачу надається можливість виконати спектральний аналіз як вхідного, так і отриманого сигналу. При цьому використовується дискретне перетворення Фур'є.

Дисципліна «Основи електродинаміки» базується на знаннях фізики, теорії електричних кіл, обчислювальної математики, отриманих студентами впродовж першого та другого років навчання. Мета посібника – засвоєння основ теорії сигналів з придбанням навичок практичного застосування моделей сигналів у комп'ютерному моделюванні радіоелектронних пристроїв для отримання та поліпшення їх характеристик.

Даний посібник може бути використаний студентами та спеціалістами для самостійного вивчення основ теорії сигналів та редактора сигналів STIMULUS в оболонці дев'ятої версії ORCAD з подальшим його використанням в процесі схемотехнічного проектування електронних засобів. Також посібник може бути корисним при підготовці студентами дипломних проектів освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр та спеціаліст.

## 1. КЛАСИФІКАЦІЯ І ПАРАМЕТРИ СИГНАЛІВ

Сигнал – величина фізичного носія інформації. В якості носіїв інформації може виступати струм, напруга, магнітний потік та ін. Якщо, наприклад, носієм є напруга, то сигнал – це напруга, яка певним чином змінюється за часом.

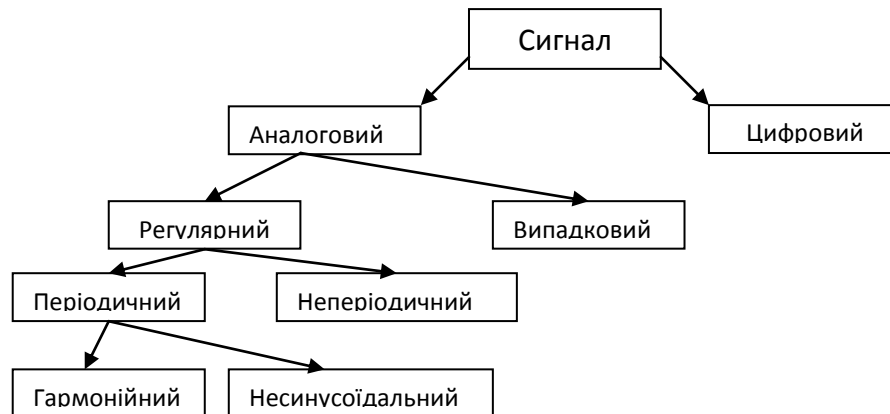


Рис. 1.1. Класифікація сигналів

Сигнали за своєю природою є *аналоговими*. *Цифрові* сигнали отримують в результаті обробки аналогових сигналів. На рис. 1.2 наведені приклади аналогових сигналів. Цифрові сигнали будуть розглянуті пізніше.

*Регулярним* називається сигнал, математичним поданням якого є заздалегідь задана функція часу. До основних типів регулярних сигналів відносяться періодичні і неперіодичні сигнали. *Періодичні* сигнали представляються функцією часу, що задовольняє умові  $f(t) = f(t+n \cdot T)$ , де  $n$  – ціле,  $T$  – деяка постійна, що називається періодом. *Гармонійний (синусоїдальний)* – сигнал, який змінюється за законом синуса або косинуса. *Несинусоїдальний* – періодичний сигнал, не схожий на синус або косинус. *Неперіодичними* називаються регулярні сигнали, які не мають періоду, або форма періоду в різних періодах відрізняється.

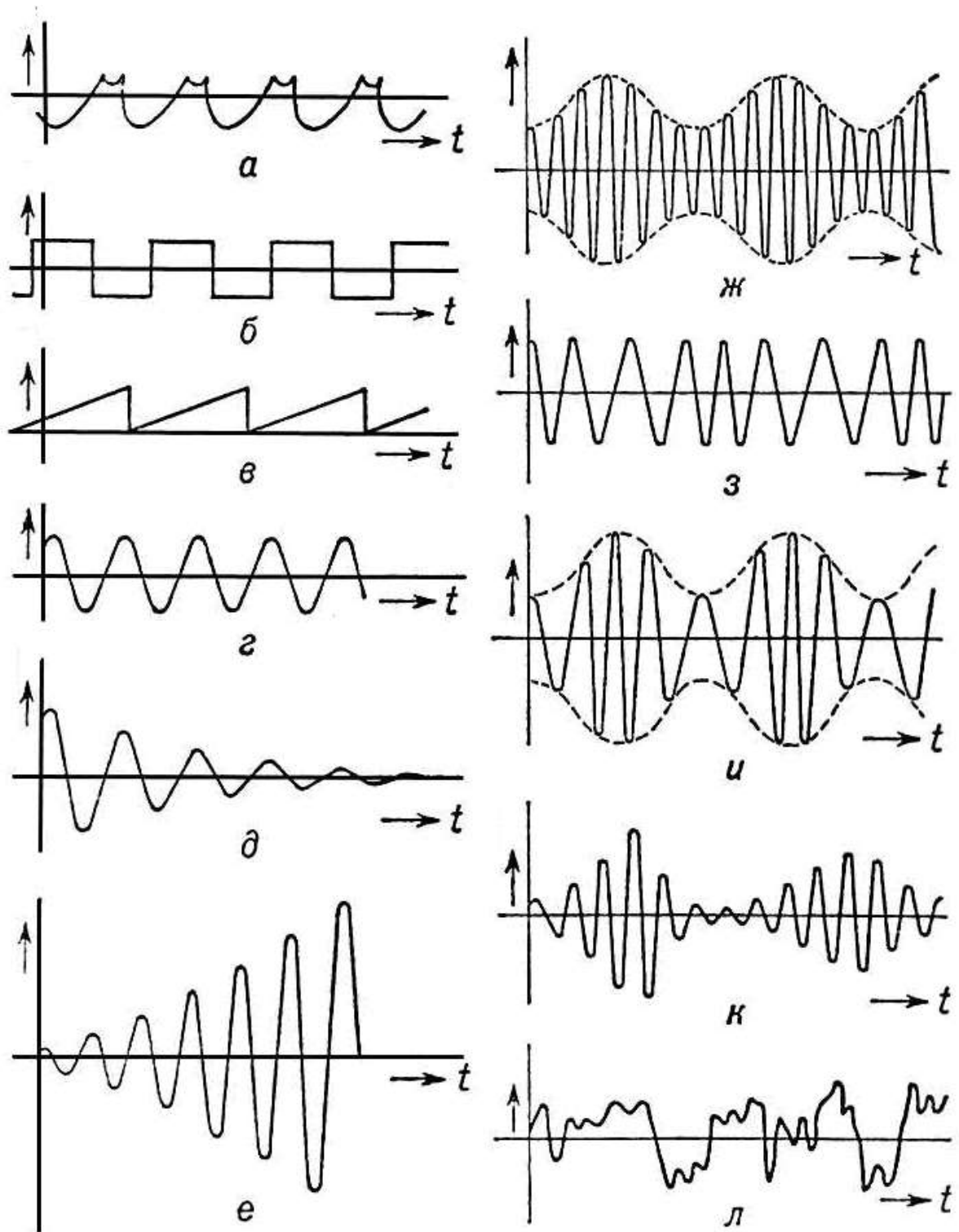


Рис. 1.2. Приклади різних видів сигналів:

а – загальний випадок періодичного сигналу; б – прямокутний; в – пилкоподібний; г – гармонійний; д – затухаючий; е – наростаючий; ж – амплітудно-модульований; з – частотно-модульований; и – сигнал, модульований по амплітуді і по фазі; к – сигнал, амплітуда і фаза якого є випадковими функціями; л – хаотичний сигнал.

*Випадковий* – це сигнал, який не може бути описаний заздалегідь заданою функцією часу. Для математичного представлення випадкових сигналів використовуються методи теорії ймовірностей та математичної статистики. Розглянемо деякі розповсюджені види сигналів.

## **1.1. Періодичні сигнали**

Форма сигналу повторюється через рівні проміжки часу, які називають періодом.

### **1.1.1. Гармонійні сигнали (синусоїдальні)**

Це такий сигнал, при якому струм та напруга змінюються з часом згідно з законом зміни синуса кута від 0 до 360 градусів. Це основна форма сигналу змінного струму, що являється результатом методів його генерації, наприклад на електростанціях. Електричний струм синусоїдальної форми утворюється внаслідок обертального руху ротора генераторного агрегату. З принципу дії цих агрегатів випливає періодичність зміни струму в залежності від кута повороту. Синусоїдальні сигнали найбільш широко розповсюджені; якщо ви почуєте вираз «10 кВ на частоті 1 МГц», то знайте, що мова йде про синусоїдальний сигнал. Синусоїдальний сигнал можна характеризувати наступними параметрами – період або частота, амплітуда, фаза, діюче значення, середнє значення, миттєве значення.

У випадку, якщо сигнал є синусоїдальним, період  $T$  (у секундах) відповідає відстані на осі часу між двома сусідніми піками (двома додатними або двома від’ємними). Довжина хвилі  $\lambda$  характеризує ту ж



відстань, але виражається в сантиметрах, дециметрах або метрах. Частота  $f$  – величина, що обернена до періоду,  $f = 1/T$ .

Основна одиниця виміру частоти – герц [Гц] (один період за секунду). Одиниця, в тисячу разів більша, називається кілогерцом [кГц], в мільйон разів більша – мегагерцом [МГц], а в мільярд разів більша – гігагерцом [ГГц]. Інколи, замість частоти визначають кутову частоту коливань, що позначають буквою  $\omega$ :

$$\omega = 2\pi f \quad (1.1)$$

Математичний вираз, що описує синусоїдальну напругу, має вигляд:

$$U(t) = U_m \sin 2\pi f t, \quad (1.2)$$

де  $U_m$  - амплітуда сигналу (його найбільше значення),  $f$  – частота в герцах (циклічна).

Синусоїдальний сигнал має вигляд:

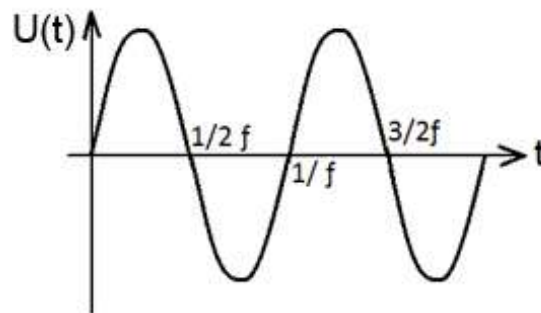


Рис. 1.3. Синусоїдальний сигнал

Інколи буває корисно перемістити початок координат ( $t=0$ ) в точку, що відповідає довільному моменту часу; в цьому випадку для синусоїдальної напруги потрібно включити початкову фазу  $\varphi$ :

$$U(t) = U_m \cos(2\pi f t + \varphi). \quad (1.3)$$

Якщо використовувати поняття кругової частоти  $\omega$ , то можна записати

вираз (1.2) у вигляді:

$$U(t) = U_m \sin \omega t, \text{ де } \omega = 2\pi f. \quad (1.4)$$

Тим не менш, часто використовують комплексний запис сигналу:

$$U(t) = \operatorname{Re}[U_m \exp[j(\omega t + \varphi)]] . \quad (1.5)$$

Основна перевага синусоїдальної функції (а також основна причина такого широкого розповсюдження синусоїдальних сигналів) полягає у тому, що ця функція являється рішенням цілого ряду лінійних диференціальних рівнянь, які описують як фізичні явища, так і властивості лінійних кіл. Лінійне коло має наступні властивості: вихідний сигнал, породжений сумою двох вхідних сигналів, дорівнює сумі двох вихідних сигналів, кожен з яких породжений вхідними сигналами, що діють не разом, а окремо; тобто, якщо Вих(A) – вихідний сигнал, породжений сигналом A, то для лінійного кола справедлива наступна рівність:

$$\text{Вих}(A + B) = \text{Вих}(A) + \text{Вих}(B) . \quad (1.6)$$

Якщо на вході лінійного кола діє синусоїдальний сигнал, то на виході також отримаємо синусоїдальний сигнал, але в загальному випадку його амплітуда і фаза будуть іншими. Це твердження справедливе лише для синусоїдального сигналу. На практиці прийнято оцінювати поведінку схеми по її амплітудно-частотній характеристиці, яка показує, як змінюється амплітуда синусоїдального сигналу в залежності від частоти. Підсилювач звукової частоти, наприклад, має «плоску» амплітудно-частотну характеристику в діапазоні від 20 Гц до 20 кГц.

Частоти синусоїдальних сигналів, з якими найчастіше доводиться працювати, лежать в діапазоні від декількох герц до декількох мегагерц. Робота з більш високими частотами потребує спеціальних ліній передач та

засобів передачі. Для мікрохвильових сигналів звичні кола, які складаються з окремих елементів, що з'єднані між собою дротами, не підходить, а потрібні спеціальні хвильоводи. Модель гармонійного сигналу використовується при розкладанні сигналів у тригонометричний ряд Фур'є.

### 1.1.2. Додаткові параметри періодичних сигналів

Амплітуду синусоїдального сигналу (а також будь-якого іншого сигналу) можна оцінювати як його абсолютне максимальне значення. Інколи користуються поняттям пікова амплітуда (амплітуда від піку до піку сигналу), яка дорівнює подвійній амплітуді.

Інколи користуються поняттям *діюче (ефективне) значення*, яке визначається наступним чином [1]:

$$U_{\partial} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt}, \quad (1.7)$$

де  $f(t)$  – періодичне коливання.

У випадку синусоїдального сигналу  $f(t) = U_m \sin \omega t$ , маємо

$$U_{\partial} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_m \approx 0,707 U_m.$$

Діюче значення змінного струму виражається значенням постійного струму, який, протікаючи через коло з постійним значенням електричного опору, виділяє таку ж енергію, як і змінний струм, протікаючий за той же час. Діюче значення джерела, що живить електричну мережу в СНД дорівнює 220 та 127 В (на частоті 50 Гц). У США напруга в електричній мережі має діюче значення 117 В (на частоті 60 Гц).

*Середнє значення* напруги визначається інтегралом:

$$U_{cp.} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt. \quad (1.8)$$

Для синусоїдальної функції  $U_{cp.} = \frac{2}{\pi} U_m \approx 0,636 U_m$ .

Середнім значенням коливання змінного струму називається середнє арифметичне значення цього коливання на протязі одного періоду. Середнім значенням змінного струму, що протікає в колі, визначається середнє споживання струму від джерела постійного струму, що живить це коло.

*Миттєве значення* змінного коливання – це значення, яке визначається в даний момент часу. Миттєве значення напруги далі позначається літерою  $u$  або  $U$ .

### Приклади

а) Визначити діюче значення синусоїдальної напруги  $f(t) = U_m \sin \omega t$

$$\begin{aligned} U_o &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} U_m^2 \int_0^T \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{U_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt} = \\ &= \sqrt{\frac{U_m^2}{2T} (T - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t) \Big|_0^T} = U_m \sqrt{\frac{1}{2T} (T - \frac{1}{2\omega} (\sin \frac{2*2\pi}{T} T - 0))} = U_m \sqrt{\frac{1}{2T} T} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

б) Визначити середнє значення синусоїдальної напруги

$$\begin{aligned} U_{cp} &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} U_m \sin \omega t dt = \frac{2U_m}{T} \int_0^{T/2} \sin \omega t dt = -\frac{2U_m}{\omega T} \cos \omega t \Big|_0^{T/2} = \\ &= \frac{2U_m}{\pi}. \end{aligned}$$

### 1.1.3. Періодичні несинусоїдальні сигнали

Це коливання, форма яких відрізняється від синусоїди. В деяких випадках такі коливання – результат спотворення синусоїдального коливання, що отриманий після проходження цього коливання через

пристрої з нелінійними елементами. Гармонійні нелінійні спотворення пов'язані з появою у вихідному сигналі нових гармонійних компонент. Спотворення залежать від амплітуди сигналу в даному колі і зазвичай тим більше, чим більша амплітуда.

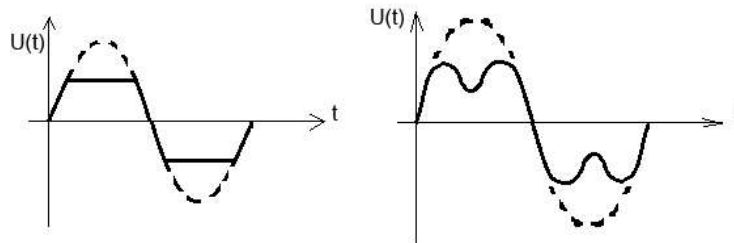


Рис. 1.4. Несинусоїдальні сигнали

Кількісно гармонічні спотворення визначаються за допомогою коефіцієнта гармонік або коефіцієнта нелінійних спотворень. Цей коефіцієнт виражається в процентах. Наприклад, в простих акустичних пристроях вміст гармонік обмежується декількома процентами, а в пристроях високоякісного відтворення звуку він не перевищує 1%.

### 1.1.3.1. Прямокутні коливання

Це періодичні коливання, в яких обидва півперіоди мають прямокутну форму. В загальному випадку обидва півперіоди можуть мати різну тривалість. Якщо їх тривалість однакова, то говорять, що це симетричне коливання, або коливання, що має форму меандру. Приклад сигналу наведений на рис. 1.5.

Прямокутне коливання характеризується амплітудою  $U_m$ , тривалістю додатного та від'ємного імпульсу  $T_1, T_2$ , періодом  $T = T_1 + T_2$  або частотою повторення  $f_n = 1/T = 1/(T_1 + T_2)$ .

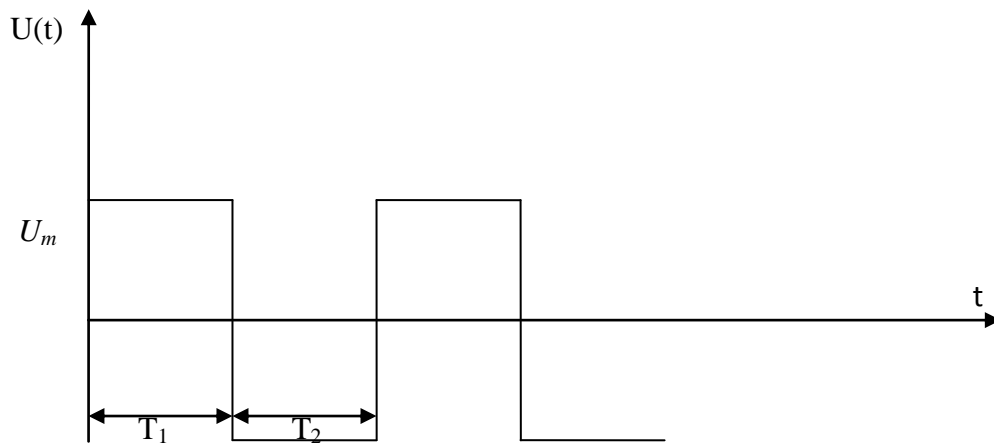


Рис. 1.5. Прямокутне коливання

Як і інші періодичні коливання, прямокутне коливання в загальному випадку можна розглядати як суму деякої постійної складової (постійного струму) і багатьох синусоїдальних коливань з різними амплітудами, частотами та часовим зсувом по відношенню один до іншого. Найнижчу частоту синусоїдального коливання називають *основною частотою*. Вона дорівнює частоті даного прямокутного коливання. Інші синусоїдальні складові, частоти яких являються кратними основній частоті, називаються *гармонічними складовими (гармоніками)*. Кути, що відповідають взаємним зсувам складових, визначені, наприклад, відносно основної складової, називають фазовими кутами. Форма коливання, що отримана шляхом додавання синусоїдальних складових, тим ближча до початкової, чим більше складових враховується в цьому процесі (рис.1.6). Прямокутні коливання є ідеалізованими і використовуються для моделювання пристроїв цифрової та імпульсної техніки.

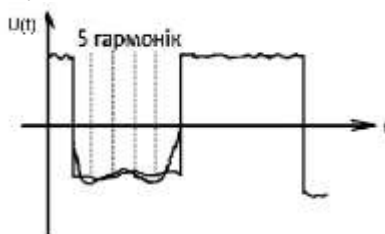


Рис. 1.6. Наближення до прямокутного коливання шляхом додавання гармонік

### 1.1.3.2. Пилкоподібні коливання

Це коливання, в яких зміна миттєвого значення протікає за часом по лінійному закону. В загальному випадку, час наростання  $T_1$  та спаду  $T_2$  коливання не дорівнюють один одному. Пилкоподібні коливання використовують у телебаченні, а також у приладах з осцилографічними електронно-променевими трубками.

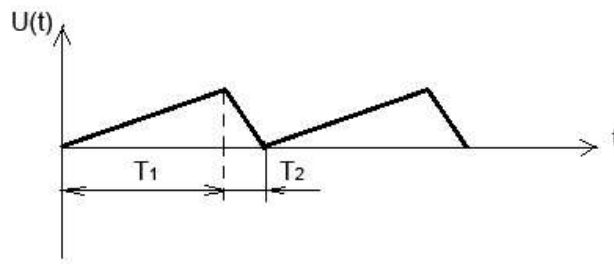


Рис. 1.7. Пилкоподібне коливання

### 1.1.3.3. Імпульсні коливання

Імпульсне коливання являє собою сигнал з короткочасною зміною встановленого стану в порівнянні з тривалістю усталеного процесу.

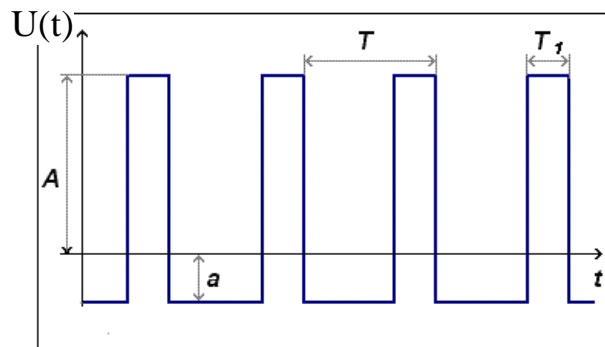


Рис. 1.8. Імпульсне коливання

На рис. 1.8 використані наступні позначення:  $A$  – максимальне

значення (пікове значення сигналу, з яким будуть генеруватися імпульси);

а – початкове значення;  $T$  – період;  $T_1$  – тривалість імпульсу;  $S = \frac{T}{T_1}$  – скважність. Частота повторення сигналу  $f_n$  пов'язана з його періодом  $T$  залежністю  $f_n = 1/T$ . Коефіцієнт заповнення – відношення тривалості імпульсу до періоду, тобто  $T_1 / T$ .

В імпульсному коливанні додатково розрізняємо фронт, зріз, а також вершину імпульсу (рис.1.9). Неможливо сформувати імпульси з часом фронту  $t_\phi = 0$ , оскільки будь-яке фізичне явище, також і зростання струму в колі, потребує певного часу. Тому, якщо говорити точно, на практиці можуть існувати не прямокутні, а лише трапецеїдальні імпульси. Однак назва «прямокутні» використовується всюди по відношенню до імпульсів з малим часом фронту та зрізу в порівнянні з тривалістю імпульсу.

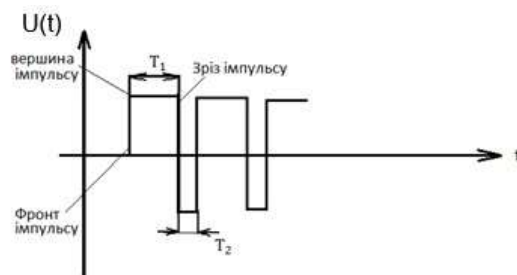


Рис. 1.9. Додаткові параметри імпульсного коливання

## 1.2. Неперіодичні сигнали

Коливання, форма яких в різні періоди різна, або взагалі не спостерігається ніякої періодичності. Прикладом може служити телевізійний сигнал зображення, що повторюється з частотою повтору рядків. В загальному випадку він різний в кожному періоді.



Неперіодичними сигналами являються електричні коливання, що відповідають, наприклад, мові.



Рис. 1.10. Неперіодичний сигнал

### 1.2.1. Одиночний імпульс

Імпульсами називають процеси з малим часом тривалості, причому саме визначення «мале» являється відносним. Воно мале по відношенню до часу, коли імпульс відсутній (наприклад, до часу перерви між двома наступними імпульсами). Імпульси можуть бути додатними або від'ємними по відношенню до деякого рівня відліку. Можуть бути поодинокими або повторюваними. Вище було показано, що повторення імпульсів може бути періодичним.

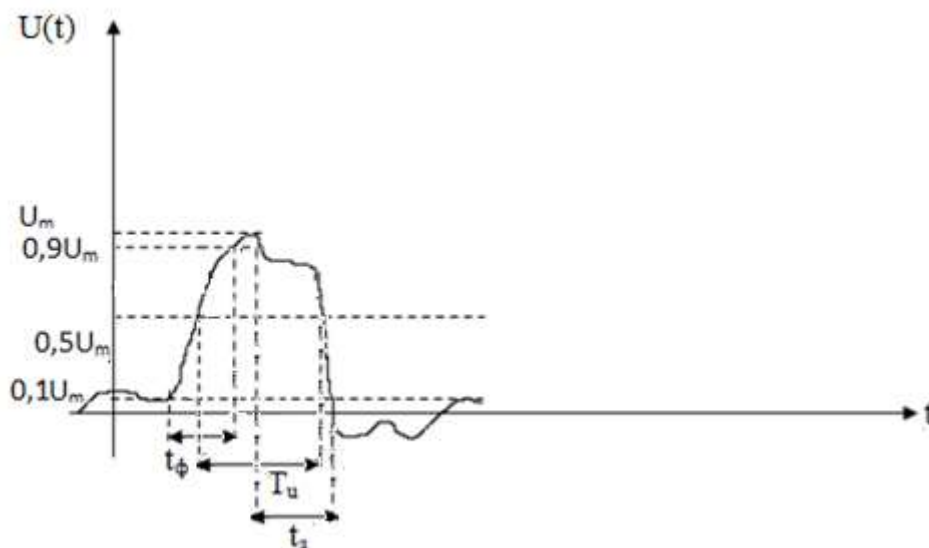


Рис. 1.11. Одиночний імпульс

Одиночний імпульс характеризується наступними основними параметрами: тривалістю, піковим значенням (амплітудою), часом наростання (спаду), формою сигналу. Тривалість імпульсу  $T_u$  визначається, звичайно, на рівні, що відповідає половині піку (амплітуди) імпульсу. Час формування фронту імпульсу  $t_f$  визначається як час, за який миттєве значення імпульсу наростає від 10 до 90 % усталеного значення. Аналогічно знаходять і час зрізу  $t_z$  (спадання від 90 до 10 %).

### 1.2.2. Затухаючий гармонічний сигнал

Два варіанти затухаючого гармонічного сигналу показані на рис. 1.12. Сигнал, зображений на рис. 1.12а, описується таким виразом:

$$U = U_{\max} \sin(\omega t) e^{(-\alpha t)}, \quad (1.9)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт затухання;  $\tau = \frac{1}{\alpha}$  – постійна часу.

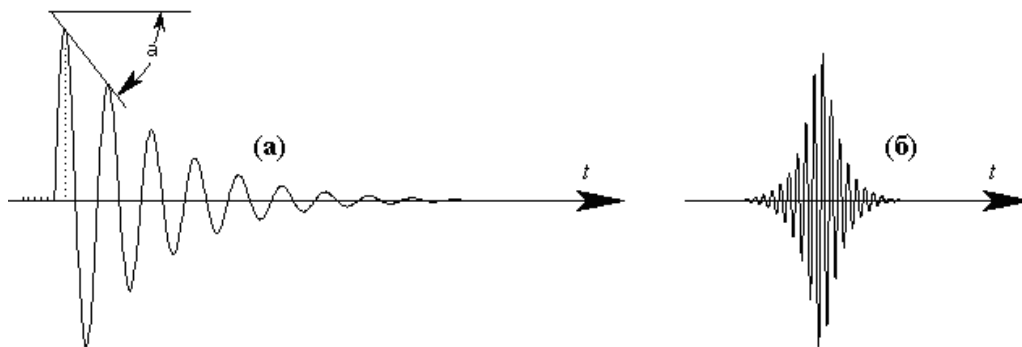


Рис. 1.12. Затухаючий гармонічний сигнал

### 1.2.3. Модульовані сигнали

Щоб передати сигнал на певну відстань потрібно скористатися якимось носієм. В якості носія можна використовувати ті матеріальні об'єкти, які мають властивість переміщатися у просторі, наприклад електромагнітне поле в проводах (провідний зв'язок), у відкритому просторі (радіозв'язок), світловий промінь (оптичний зв'язок).

Часто в якості носія використовують гармонійне коливання високої частоти – несуче коливання (його природа нас не цікавить). Процес перетворення сигналу полягає в зміні одного або декількох параметрів несучого коливання по закону зміни передавального сигналу (у наділенні несучого коливання властивостями передавального сигналу) і називається *модуляцією*. Відновлення початкового сигналу із модульованого коливання називається *детектуванням* або *демодуляцією* [2].

*Амплітудна* модуляція – вид модуляції, при якій змінним параметром несучого сигналу є його амплітуда. Нехай

$U_c(t)$  – інформаційний сигнал,  $|U_c(t)| < 1$ ,

$U_n(t)$  – несуче коливання.

Тоді амплітудно-модульований сигнал  $U_{am}(t)$  може бути записаний наступним чином:

$$U_{am}(t) = U_n(t) [1 + mU_c(t)]. \quad (1.10)$$

Тут  $m$  – деяка константа, яка називається *коефіцієнтом* модуляції. Формула (1.10) описує, що несучий сигнал  $U_n(t)$  модулюється по амплітуді сигналом  $U_c(t)$  з коефіцієнтом модуляції  $m$  (АМ на рис. 1.13). Передбачається також, що виконана умова:

$$0 < m \leq 1. \quad (1.11)$$

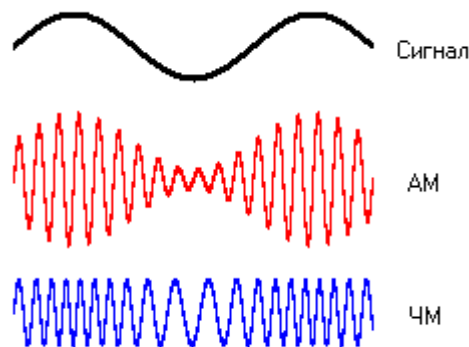


Рис. 1.13. Амплітудна (АМ) і частотна модуляція (ЧМ)

Виконання умови (1.11) необхідно для того, щоб вираз у квадратних дужках в (1.10) завжди був позитивним. Якщо він прийме негативне значення в якийсь момент часу, то відбувається так звана перемодуляція (надлишкова модуляція). Прості демодулятори (типу квадратичного детектора) демодулюють такий сигнал з сильними спотвореннями.

*Кутова модуляція* – можна змінювати за часом пропорційно до вхідного сигналу  $U_c(t)$  частоту несучого коливання. Якщо, припустимо, сигнал, що передається, являється гармонічним  $U_c(t) = U_{mc} \cos \Omega_c t$  (рис. 1.14), то зміна частоти буде мати вигляд:

$$\omega_n(t) = \omega_n + k_{чм} U_c(t) = \omega_n + \Delta \omega_n \cos \Omega_c t, \quad (1.12)$$

де  $k_{чм}$  – коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт частотної модуляції). Величину  $\Delta \omega_n = k_{чм} U_{mc}$  називають *девіацією частоти* (фактично, це максимальне відхилення частоти модульованого коливання від частоти несучого коливання). Такий вид модуляції називається *частотною модуляцією*.

При зміні фази несучого коливання пропорційно до сигналу  $U_c(t)$  отримаємо *фазову модуляцію*:

$$\varphi_n(t) = \varphi_n + k_{\phi M} U_c(t) = \varphi_n + \Delta\varphi_n \cos \Omega_c t, \quad (1.13)$$

де  $k_{\phi M}$  – коефіцієнт пропорційності;  $\Delta\varphi_n = k_{\phi M} U_{mc} = M_{\phi M}$  – *індекс фазової модуляції*.

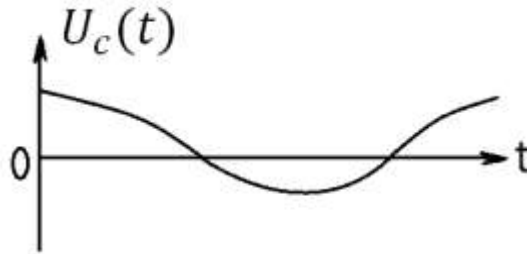


Рис. 1.14. Інформаційний сигнал

Між частотною та фазовою модуляцією існує тісний зв'язок. Представимо несуче коливання у вигляді

$$U_n(t) = U_{mn} \cos(\omega_n t + \varphi_n) = U_{mn} \cos \psi_n(t), \quad (1.14)$$

де  $\varphi_n$  – початкова фаза коливання,  $\psi_n(t)$  – повна фаза коливання.

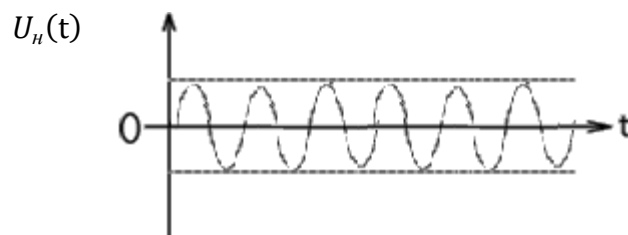


Рис. 1.15. Несучий сигнал

Між фазою  $\psi_n(t)$  і частотою  $\omega_n$  існує зв'язок:

$$\psi_n(t) = \int_0^t \omega_n(t) dt + \varphi_n. \quad (1.15)$$

Підставимо в це співвідношення вираз (1.12) для частотної модуляції. Отримаємо:

$$\psi_n(t) = \omega_n t + (\Delta\omega_n / \Omega_c) \sin \Omega_c t + \varphi_n. \quad (1.16)$$

Величина  $M_{\omega M} = \Delta\omega_n / \Omega_c$  називається *індексом частотної модуляції*.

Частотно-модульоване коливання запишеться у вигляді:

$$U_{\omega M}(t) = U_{mn} \cos(\omega_n t + M_{\omega M} \sin \Omega_c t + \varphi_n). \quad (1.17)$$

Фазо-модульоване коливання запишеться у вигляді:

$$U_{\phi_m}(t) = U_{m_n} \cos(\omega_n t + M_{\phi_m} \cos \Omega_c t + \varphi_n) \quad . \quad (1.18)$$

З порівняння двох останніх виразів випливає, що по зовнішньому вигляду важко розрізнити, який вид модуляції – частотний чи фазовий – застосовано. Тому часто обидва ці види модуляції називають кутовою модуляцією, а величини  $M_{\text{чм}}$  та  $M_{\phi_m}$  індексами кутової модуляції.

### 1.3. Випадкові або нерегулярні сигнали

Це сигнал, миттєве значення якого змінюється за часом по випадковому закону. Накладаючись на корисне коливання, воно може призвести до небажаних ефектів. Крім зовнішніх, сторонніх перешкод, таких як перешкоди від мережі електроживлення, радіостанцій, атмосфери, існують вельми небажані власні перешкоди або шуми, що утворюються всередині пристроїв і проявляються у вигляді великої кількості випадкових імпульсів із випадковим розподіленням частоти повторення і фазових кутів.

Велику роль відіграють теплові та дробові шуми. Перші утворюються в елементах кіл і залежать від опору елемента і його температури, другі – у напівпровідникових пристроях та електронних лампах і пов'язані з випадковим рухом носіїв заряду або нерівномірною емісією електронів з катоду.

### 1.4. Порівняння сигналів

При однаковій частоті сигнали можна порівнювати по фазі – відставання, випередження, синфазні, протифазні. Як порівнювати

амплітуди двох сигналів? Можна, наприклад, сказати, що сигнал  $X$  в два рази більший за сигнал  $Y$ . В багатьох випадках саме так і виконують порівняння. Але дуже часто подібні відношення можуть досягати мільйонів, і тоді зручніше використовувати логарифмічну залежність і вимірювати відношення в децибелах (децибел – десята частина бела, але величиною «бел» ніколи не користуються).

Одиниця вимірювання в 1 децибел (дБ) визначається як десятковий логарифм відношення двох фізичних величин, для яких одиницею вимірювання слугує потужність (енергія в одиницю часу). Цей логарифм треба помножити на 10:

$$Рівень [ дБ ] = 10 \lg \frac{P_2}{P_1}, \quad (1.19)$$

де  $P_2$  и  $P_1$  – величини, що вимірюються в одиницях потужності – Вт (л.с.).

У випадку електричної потужності

$$P = U * i = U^2 / R . \quad (1.20)$$

Підставляємо у перший вираз і маємо:

$$Рівень [ дБ ] = 10 \lg \left( \frac{U_{2m}^2}{U_{1m}^2} \right) = 20 \lg (U_{2m} / U_{1m}) , \quad (1.21)$$

де  $U_{1m}$  та  $U_{2m}$  – амплітуди двох сигналів. Наприклад, якщо один сигнал має амплітуду в два рази більшу ніж інший, то відношення першого сигналу до другого дорівнює +6 дБ. Якщо один сигнал в 10 разів більший за інший, то відношення першого до другого дорівнює +20 дБ, а якщо один сигнал в 10 разів менший за інший, то відношення дорівнює –20 дБ.

Для порівняння сигналів різної форми, наприклад синусоїдального і випадкового, треба використовувати ефективне значення або потужність.

## Приклади

Визначити величину в дБ для наступних відношень:

а)  $\frac{U_{m2}}{U_{m1}} = 2$ ; величина в дБ дорівнює  $20\lg 2 \approx 20 \cdot 0,3 = 6$  дБ.

б)  $\frac{U_{m2}}{U_{m1}} = 10$ ; величина в дБ дорівнює  $20\lg 10 = 20$  дБ.

в)  $\frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \frac{1}{10}$ ; величина в дБ дорівнює  $20\lg \frac{1}{10} = -20$  дБ.

г) слабка відмінність сигналів ( $\frac{U_{m2}}{U_{m1}} = \frac{U_{\partial 1}}{U_{m1}} = \frac{U_{\partial 1}}{\sqrt{2}U_{\partial 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ) – рівень менше  $20\lg \frac{1}{\sqrt{2}} = -3$  дБ.

д) сильна відмінність сигналу и шуму ( $\frac{U_{\partial 2}}{U_{\partial 1}} = \frac{U_{m2}}{U_{m1}} \geq \sqrt{10} \approx 3,16$ ) – рівень більше  $20\lg \sqrt{10} = 10$  дБ.



## 2. СПЕКТРАЛЬНО-ЧАСТОТНЕ ПОДАННЯ СИГНАЛІВ

### 2.1. Подання сигналів

Можливі два подання вхідних і вихідних величин, які є сигналами: просторово-часове та спектрально-частотне. Звичним є перше з них: вхідні та вихідні величини змінюються в часі, тобто можуть бути представлені функціями  $x_{\text{вх}}(t)$  або  $x_{\text{вих}}(t)$ , для яких використаємо єдине позначення  $f(t)$ . Щоб пояснити, що розуміється під спектрально-частотним поданням  $f(t)$ , наведемо деякі приклади. Нехай заданий періодичний сигнал  $f(t)$ :

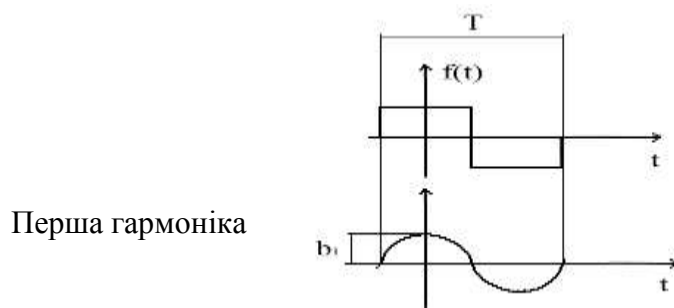


Рис. 2.1. Періодичний сигнал і перша гармоніка

Для такого сигналу одна косинусоїда з амплітудою  $b_1$  не дає уявлення про задану функцію. При додаванні її до косинусоїди, що має амплітуду  $b_3$  і зміщена відносно початку координат на  $t\varphi_3$ , виходить сигнал вже ближчий до заданого (рис. 2.2). Наближення буде ще кращим, якщо додати косинусоїду з амплітудою  $b_5$  і т.д.

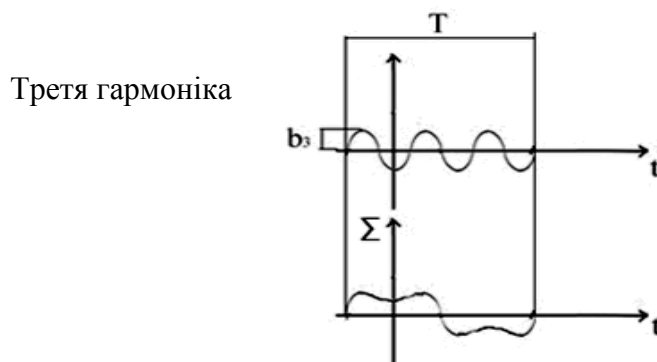


Рис. 2.2. Третя гармоніка і сума двох гармонік

Говорячи про спектрально-частотне подання, необхідно враховувати не тільки спектр амплітуд (рис. 2.3 а), але й повний спектр фаз, показаний на рис. 2.3 б, що відображає зсув по фазі всіх гармонік. Таким чином, для прямокутного коливання, яке повторюється в часі з періодом  $T$ , наведені обидва спектри. Відстань між лініями спектру дорівнює  $\omega_1$ , де  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  – основна кругова частота.

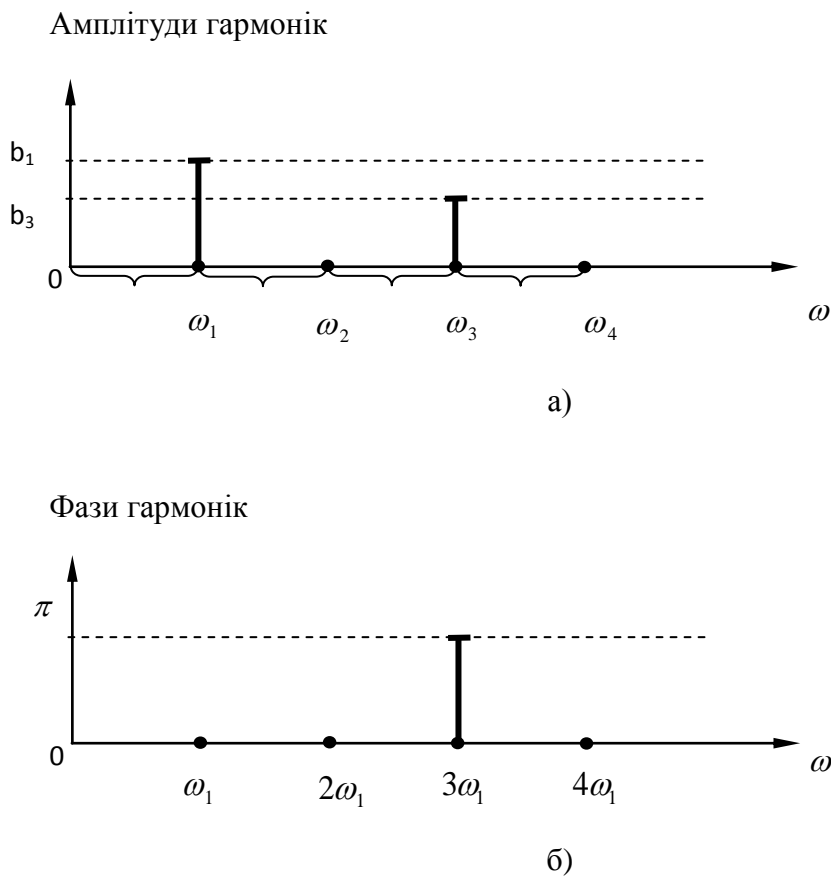


Рис. 2.3. а) амплітуди гармонік прямокутного коливання; б) фази гармонік прямокутного коливання

Вище йшлося про відомі параметри гармонік (амплітуди і фази). Як визначати ці параметри? Для їх визначення проводиться розкладання заданої функції  $f(t)$  по базисних функціях, якими в розглянутих прикладах були гармоніки – косинусоїди або синусоїди, або і ті й інші.

## 2.2. Базисні функції

Для розкладання заданого сигналу  $f(t)$  з метою переходу до його спектрально-частотного подання будемо використовувати базисні функції, що належать до нескінченного ряду функцій:

$$1, \cos \omega_1 t, \sin \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots \cos k\omega_1 t, \sin k\omega_1 t, \dots$$

Ці функції ортогональні в інтервалі  $[-\pi, \pi]$ , а в більш загальному випадку і в інтервалі  $[-T/2, T/2]$ , де величина  $T$  зв'язана з величиною  $\omega_1$ , співвідношенням  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ . Для пояснення ортогональності використовуємо для порядкового номера функції позначення  $k$  і  $n$ , вважаючи, що  $k$  і  $n$  можуть бути різними або ж збігатися.

Умови попарної ортогональності зазначених функцій мають вигляд (в інтервалі  $[-\pi, \pi]$ ):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \sin ntdt = 0 \text{ при } k \neq n$$

$$\text{і} \tag{2.1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt \sin ntdt = 0 \text{ при } k = n$$

$$\left( \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2ktdt = -\frac{1}{4k} \cos 2kt \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{4k} (\cos 2k\pi - \cos 2k\pi) \right).$$

Разом з тим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kt dt = \pi$$

$$\text{і} \tag{2.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt = \pi$$

$$\left( \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kt}{2} dt = \pi + \frac{\sin 2kt}{4k} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right).$$

При завданні розглянутих функцій у проміжку  $[-T/2, T/2]$  вони теж попарно ортогональні, якщо виконані умови:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos k\omega_1 t \sin n\omega_1 t dt = 0 \text{ при } k \neq n$$

i

(2.3)

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos k\omega_1 t \sin n\omega_1 t dt = 0 \text{ при } k = n .$$

Разом з тим

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2 k\omega_1 t dt \neq 0 \quad \text{і} \quad \int_{-T/2}^{T/2} \sin^2 k\omega_1 t dt \neq 0 . \quad (2.4)$$

Можливі інші набори базисних функцій. Наведемо загальне визначення умов попарної ортогональності нескінченного числа функцій  $f_0(t)$ ,  $f_1(t)$ , ...,  $f_k(t)$ , ..., заданих на інтервалі  $[t_a, t_b]$ :

$$\int_{t_a}^{t_b} f_k(t) f_n(t) dt = 0, \text{ при } k \neq n ,$$

(2.5)

$$\int_{t_a}^{t_b} f_k^2(t) dt \neq 0 \text{ при } k = n.$$

Якщо для будь-якої з базисних функцій (k-ої функції) останній інтеграл дорівнює 1, то функцію називають нормованою. Якщо в ортогональній системі функцій всі складові нормовані, то таку систему називають ортонормованою. Прикладами базисних функцій є функції Уолша і функції Хаара, які широко використовуються для цифрової обробки сигналів.

## Приклади

а) система функцій Уолша

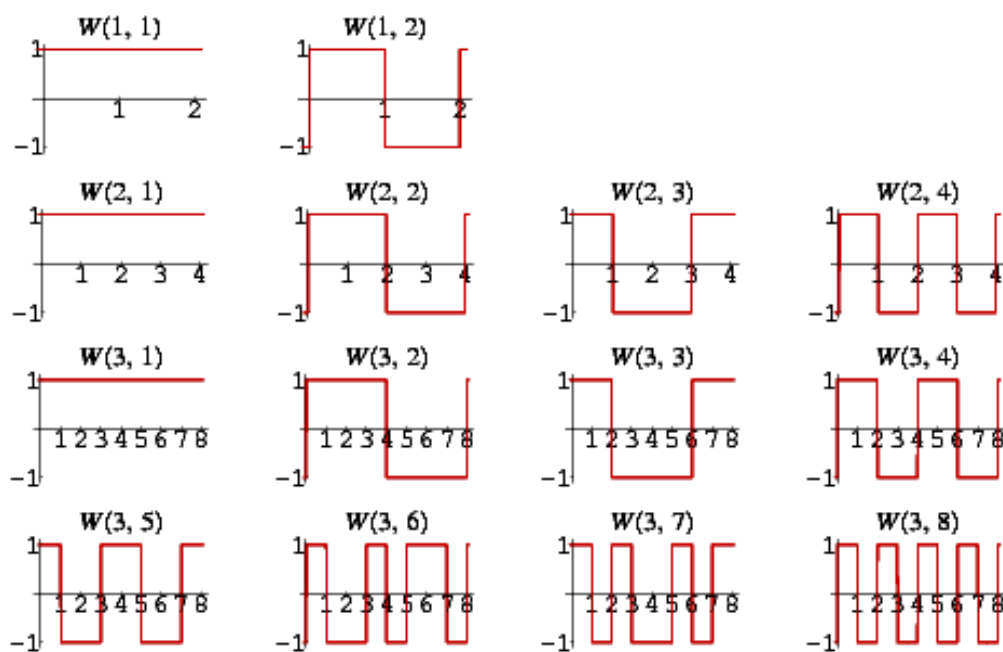


Рис. 2.4. Функції Уолша

б) система функцій Хаара

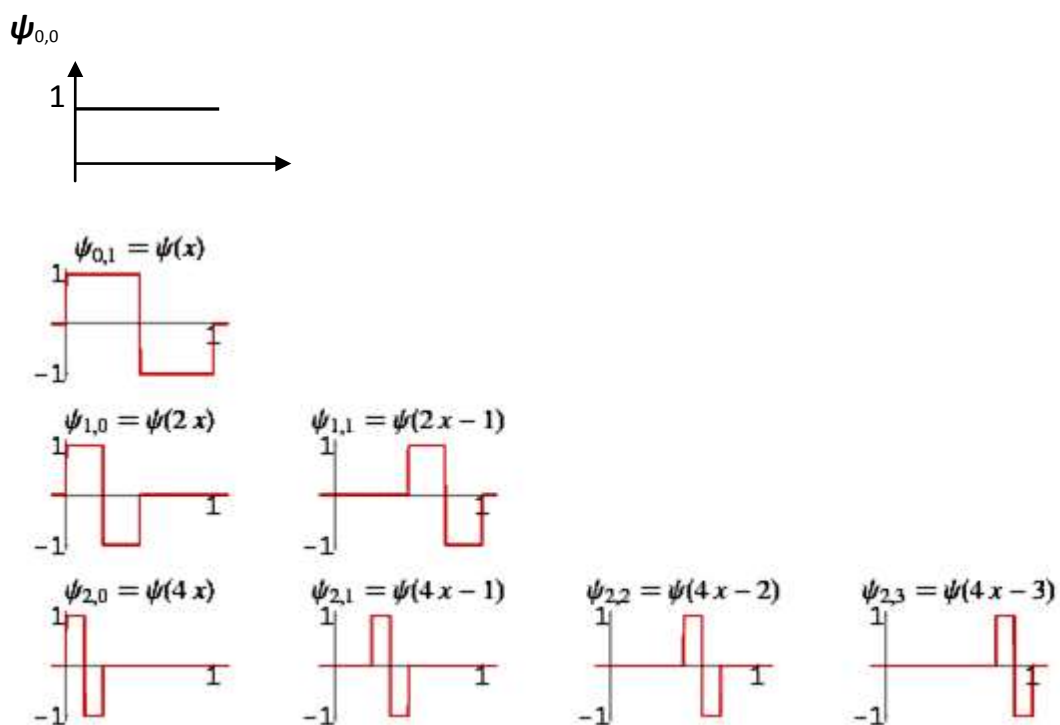


Рис. 2.5. Функції Хаара

Застосування спектрально-частотного подання:

1. Робить можливим різні способи обробки сигналів (стиснення, дискретизація і т.д.).
2. Іноді спрощує передачу сигналів.
3. Використовується для отримання частотних характеристик схем.

### **2.3. Отримання спектру періодичного сигналу за допомогою ряду Фур'є**

#### **2.3.1. Ряд Фур'є в тригонометричній формі**

Будь-який періодичний сигнал  $f(t)$ , представлений обмеженою, кусково-гладкою функцією, може бути розкладений у ряд Фур'є за умови, що виконуються умови Діріхле (ці умови вимагають, щоб на періоді  $T$  функція  $f(t)$  мала кінцеве число розривів першого роду і кінцеве число максимумів і мінімумів, що для реальних електричних сигналів звичайно виконується):

$$f(t) = A_0 + A_{1m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_{2m} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots + A_{km} \cos(\omega_k t + \varphi_k) + \dots \quad (2.6)$$

де  $A_0$  – постійна складова;  $A_{1m} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  – основна або перша гармоніка, що має частоту і період, рівні частоті  $\omega_1$  та періоду  $T$  функції  $f(t)$ ;  $A_{km} \cos(\omega_k t + \varphi_k)$  – вища гармоніка порядку  $k$  ( $k > 1$ );  $A_{km}$  – амплітуда,  $\varphi_k$  – початкова фаза  $k$ -тої гармоніки,  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ . Число гармонік в розкладанні нескінченно велике, однак, частіше за все, для досить точного подання  $f(t)$  можна взяти лише декілька перших гармонік.

Ряд Фур'є зазвичай представляють у вигляді

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \quad (2.7)$$

або, замінюючи  $\varphi_k$  на  $\psi_k = \varphi_k + \frac{\pi}{2}$ , маємо  $\sin(k\omega_1 t + \psi_k) = \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$

і, отже,  $f(t)$  можна представити у вигляді

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin(k\omega_1 t + \psi_k). \quad (2.8)$$

Крім того, вираз  $k$ -тої гармоніки можна перетворити таким чином:

$$A_{km} \sin(k\omega_1 t + \psi_k) = A_{km} (\sin k\omega_1 t \cos \psi_k + \sin \psi_k \cos k\omega_1 t) \quad (2.9)$$

або

$$A_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) = C_k \cos k\omega_1 t + B_k \sin k\omega_1 t. \quad (2.10)$$

При цьому величини  $C_k$  і  $B_k$  зв'язані з  $A_{km}$  і  $\varphi_k$  ( $\psi_k$ ) співвідношеннями

$$C_k = A_{km} \cos \varphi_k; \quad C_k = A_{km} (\cos \psi_k \cos \frac{\pi}{2} + \sin \psi_k \sin \frac{\pi}{2}) = A_{km} \sin \psi_k, \quad (2.11)$$

$$B_k = -A_{km} \sin \varphi_k; \quad B_k = -A_{km} (\sin \psi_k \cos \frac{\pi}{2} - \cos \psi_k \sin \frac{\pi}{2}) = A_{km} \cos \psi_k, \quad (2.12)$$

$$\operatorname{tg} \psi_k = \frac{C_k}{B_k}, \quad (2.13)$$

з яких випливає

$$A_{km} = \sqrt{C_k^2 + B_k^2}, \quad (2.14)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{B_k}{C_k}, \quad (2.15)$$

де з урахуванням знаків  $B_k$  і  $C_k$ ,  $\varphi_k$  може корегуватись на  $\pm\pi$ . При цьому формула ряду Фур'є приймає наступний вигляд:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos k\omega_1 t + B_k \sin k\omega_1 t). \quad (2.16)$$

Отримаємо вираз для обчислення коефіцієнтів ряду  $A_0$ ,  $C_k$ ,  $B_k$ . Спочатку отримаємо значення коефіцієнтів розкладання в ряд заданої на відрізьку  $[-\pi, \pi]$  функції

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k \cos kt + B_k \sin kt). \quad (2.17)$$

Множимо обидві частини останнього рівняння на  $\cos nt$  та інтегруємо по  $t$  в межах від  $-\pi$  до  $\pi$ . Потім множимо обидві частини цього рівняння на  $\sin nt$  і таким же чином виконуємо операцію інтегрування. Задані на відрізьку  $[-\pi, \pi]$

базисні функції

$$1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos kt, \sin kt, \dots$$

утворюють систему ортогональних функцій, причому

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos kt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin kt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n, \\ \pi & \text{при } k = n, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \cos kt \, dt = 0.$$

Завдяки цьому при множенні на будь-яку із зазначених базисних функцій обох частин розкладання в ряд і подальшому інтегруванні у зазначених межах в правій частині рівняння залишається лише відповідний коефіцієнт, помножений на  $\pi$ . Таким чином, отримаємо вирази для коефіцієнтів ряду

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad (2.19)$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt. \quad (2.20)$$

Для того щоб перейти від завдання  $t$  в інтервалі  $[-\pi, \pi]$  до його завдання в інтервалі  $[-T/2, T/2]$ , виконуємо заміну змінних, приймаючи  $t = \frac{T}{2\pi} \xi$ .

Вводимо позначення

$$f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi} \xi\right) = g(\xi). \quad (2.21)$$

Функція  $f(t)$  визначена на проміжку  $[-T/2, T/2]$  тоді, коли  $g(\xi)$  визначена в проміжку  $[-\pi, \pi]$ . Тому, записавши вираз коефіцієнтів ряду для функції  $g(\xi)$  і, замінюючи змінні як  $\xi = \frac{2\pi}{T} t$ , а також при введенні позначення  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , отримуємо вираз коефіцієнтів ряду:

$$C_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k \omega_1 t \, dt, \quad (2.22)$$

$$B_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k \omega_1 t \, dt, \quad (2.23)$$



причому  $C_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$ .

Визначаючи  $A_0$  як середнє значення  $f(t)$  на періоді

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad (2.24)$$

маємо:  $A_0 = \frac{C_0}{2}$ .

За отриманими значеннями  $C_k$  і  $B_k$  можна розрахувати амплітуди  $A_{km}$  і початкові фази  $\varphi_k$  всіх гармонік даної функції. Сукупність значень  $A_{km}$  дасть дискретний спектр амплітуд, а значення  $\varphi_k$  дадуть дискретний спектр фаз розглянутого сигналу. Коефіцієнти  $C_k$  і  $B_k$ , використовувані для визначення спектру, є коефіцієнтами ряду Фур'є, записаного в тригонометричній формі.

### 2.3.2. Ряд Фур'є в комплексній формі

Застосовується також запис ряду Фур'є в комплексній формі, яка отримується при заміні тригонометричних функцій показовими з введенням у розгляд комплексних величин [3]. Для такої заміни використовуються формули Ейлера

$$e^{jk\omega_1 t} = \cos k\omega_1 t + j \sin k\omega_1 t, \quad (2.25)$$

$$e^{-jk\omega_1 t} = \cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t, \quad (2.26)$$

з котрих слідує

$$\cos k\omega_1 t = \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2}, \quad (2.27)$$

$$\sin k\omega_1 t = \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j}. \quad (2.28)$$

Замінюючи таким чином в тригонометричній формі ряду Фур'є  $\cos k\omega_1 t$  і  $\sin k\omega_1 t$ , маємо

$$\begin{aligned}
C_k \cos k\omega_1 t + B_k \sin k\omega_1 t &= C_k \frac{e^{jk\omega_1 t} + e^{-jk\omega_1 t}}{2} + B_k \frac{e^{jk\omega_1 t} - e^{-jk\omega_1 t}}{2j} = \\
&= \frac{C_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_1 t} + \frac{C_k + jB_k}{2} e^{-jk\omega_1 t}. \quad (2.29)
\end{aligned}$$

Вводячи комплексно-спряжені величини  $A_k = \frac{C_k - jB_k}{2}$ ,  $A_k^* = \frac{C_k + jB_k}{2}$ , приводимо вираз ряду до вигляду

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{jk\omega_1 t} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k^* e^{-jk\omega_1 t}. \quad (2.30)$$

Оскільки  $B_k$  за визначенням (див. вираз (2.23)) є непарною функцією від  $k$ , то  $A_k^* = A_{-k}$  і

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^* e^{-jk\omega_1 t} = \sum_{k=-1}^{-\infty} A_k e^{jk\omega_1 t}. \quad (2.31)$$

Тоді, виконуючи підсумовування по  $q$  від  $-\infty$  до  $\infty$ , включаючи і  $k = 0$  ( $q = 0$ ), приходимо до формули

$$f(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q e^{jq\omega_1 t}. \quad (2.32)$$

Вираз для коефіцієнтів  $A_q$  отримується при підстановці в

$$A_q = \frac{C_k - jB_k}{2} \quad (2.33)$$

значень  $C_k$  і  $B_k$  (розрахункових формул (2.22), (2.23)) і використанні формул Ейлера для  $e^{-jk\omega_1 t}$ . Після заміни  $k$  на  $q$  маємо

$$A_q = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jq\omega_1 t} dt. \quad (2.34)$$

Порівняємо величини коефіцієнтів у виразах розкладання функції  $f(t)$  в ряд Фур'є для тригонометричної і комплексної форм ряду. При  $k = q = 0$  маємо співпадаючі значення  $A_0$ . Порівняння коефіцієнтів  $A_{km}$  і  $A_q$  з урахуванням того, що  $A_{km}$  може бути визначений як величина, яка є модулем суми відповідних складових для позитивної та негативної частот  $k\omega_1 = |q|/\omega_1$ , дає

$$A_{km} = 2|A_k| = \sqrt{C_k^2 + B_k^2}, \quad (2.35)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = -\frac{B_k}{C_k} \quad (2.36)$$

для всіх  $k \neq 0$ . Величину  $\dot{A}_k = 2|A_k|e^{j\varphi_k}$  можна розглядати як *комплексну амплітуду*  $k$ -ої гармоніки. Сукупність комплексних амплітуд всіх гармонік даної функції може розглядатися як дискретний спектр цієї функції. Його можна представити на графіку у вигляді спектру амплітуд і спектру фаз. По осі абсцис відкладаємо частоту, яка має дискретні значення, рівні частотам гармонік. Для кожної частоти гармоніки відкладаємо від осі абсцис паралельно осі ординат відрізки, довжини яких дорівнюють амплітудам  $|A_k|$  чи початковим фазам  $\varphi_k$  гармонік. При цьому  $|A_k| > 0$ , а  $\varphi_k$  може бути як позитивним, так і негативним.

Таким чином, при переході від тригонометричної до комплексної форми ряду Фур'є з штучним введенням у розгляд області негативних частот зменшуються в 2 рази модулі коефіцієнтів розкладання в ряд.

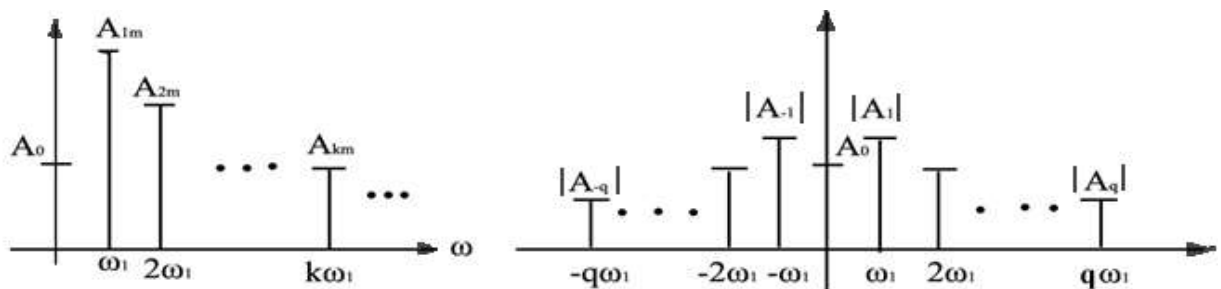


Рис. 2.6. Модулі коефіцієнтів розкладання тригонометричної (спектр амплітуд гармонік) і комплексної форм ряду Фур'є

### 2.3.3. Похибка при апроксимації сигналів

Основною похибкою при розкладанні періодичного сигналу  $f(t)$  в ряд Фур'є є похибка, обумовлена тим, що береться не нескінченне, а обмежене число гармонік. Важливим є наступна властивість розкладання сигналів в ряд по ортогональних базисних функціях: при прийнятті для апроксимації заданого сигналу  $f(t)$  обмеженого числа  $N$  членів ряду виходить мінімальна

середньоквадратична помилка, тобто така, яка свідомо менше середньоквадратичної помилки, яка була б отримана, якщо б використовувані базисні функції не були б попарно ортогональними [4]. Щоб показати це, отримаємо вирази коефіцієнтів  $B_k$  і  $C_k$  з умови мінімізації на інтервалі  $[-\pi, \pi]$  середньоквадратичної помилки

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - f_N(t)]^2 dt, \quad (2.37)$$

де

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^N C_n \cos nt + \sum_{n=1}^N B_n \sin nt. \quad (2.38)$$

З тим, щоб мінімізувати величину  $\varepsilon$ , коефіцієнти  $C_n$  і  $B_n$  візьмемо такими, щоб виконувалася умова

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial C_0} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_1} = \dots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_1} = \dots = \frac{\partial \varepsilon}{\partial B_n} = 0. \quad (2.39)$$

Розглянемо будь-який один із зазначених вище коефіцієнтів. Нехай, наприклад, це буде коефіцієнт  $C_k$ . Висновки, які будуть зроблені, можна так само повторити і для інших коефіцієнтів. Підставляючи значення  $f_N(t)$  у вираз  $\varepsilon$ , диференціюючи останнє по  $C_k$  і прирівнюючи похідну до нуля, отримуємо

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - \sum_{n=0}^N C_n \cos nt - \sum_{n=1}^N B_n \sin nt] \frac{\partial f_N(t)}{\partial C_k} dt = 0. \quad (2.40)$$

Похідна  $\frac{\partial f_N(t)}{\partial C_k} = \cos kt$ . З огляду на умови попарної ортогональності базисних функцій, приходимо до того, що

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(t) - C_k \cos kt] \cos kt dt = 0, \quad (2.41)$$

звідки, з урахуванням того, що  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kt dt = 1$ , знаходимо

$$C_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt. \quad (2.42)$$

Таким чином, вираз коефіцієнта ряду отримано з умови мінімізації середньоквадратичної помилки апроксимації сигналу  $f(t)$  при обмеженому числі членів ряду. Зі збільшенням числа членів ряду  $N$  раніше підраховані

коефіцієнти не зміняться, а середньоквадратична помилка апроксимації зменшується. Такі висновки справедливі і при розгляді розкладання сигналу  $f(t)$  в ряд у інтервалі  $[-T/2, T/2]$  при довільному  $T$ . Врахування тільки  $N$  перших членів ряду Фур'є означає, що виконується усікання лінійного спектру періодичного сигналу  $f(t)$ : спектральні лінії, що відповідають більшим, ніж  $N\omega_1$  частотам, не приймаються до уваги, що і є джерелом похибки.

#### 2.3.4. Гармонійний склад сигналу при наявності деяких форм його симетрії

При наявності того або іншого виду симетрії у кривих струму або напруги деякі коефіцієнти в розкладі у ряд Фур'є обертаються в нуль. Важливим випадком є симетрія кривих відносно осі абсцис, при якій виконується умова

$$f(t) = -f(t+T/2), \quad (2.43)$$

тобто негативна півхвиля є дзеркальним відображенням позитивної півхвилі.

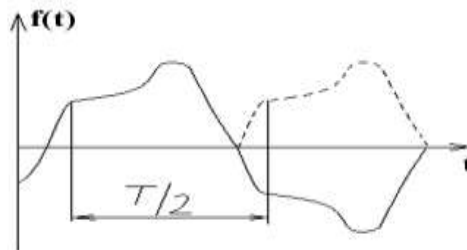


Рис. 2.7. Симетрія відносно осі абсцис

Якщо крива симетрична відносно осі абсцис, то ряд Фур'є не містить постійної складової і парних гармонік, оскільки для них не виконується умова (2.43). Дійсно, зсуву функції, а отже і першої гармоніки на  $T/2$ ,

відповідає зсув парних гармонік на ціле число повних періодів і значення цих гармонік не змінюють свого знака. Таким чином, будь-яка симетрична відносно осі абсцис крива містить тільки непарні гармоніки.

Може бути симетрія кривих іншого характеру. На рис. 2.8 зображена крива, симетрична відносно осі ординат. У цьому випадку функція задовольняє умові

$$f(t) = f(-t). \quad (2.44)$$

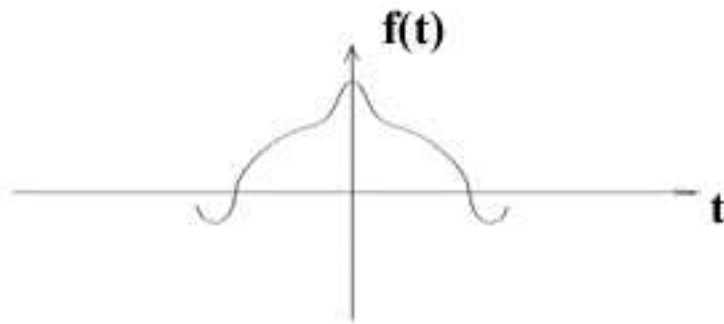


Рис. 2.8. Симетрія відносно осі ординат

При цьому:

$$B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_k = 0 \quad (2.45)$$

і розклад в ряд Фур'є має наступний вигляд:

$$f(t) = A_0 + C_1 \cos \omega_1 t + C_2 \cos 2\omega_1 t + C_3 \cos 3\omega_1 t + \dots + C_k \cos k\omega_1 t + \dots \quad (2.46)$$

Якщо крива симетрична відносно початку координат (рис. 2.9), то:

$$f(t) = -f(-t). \quad (2.47)$$

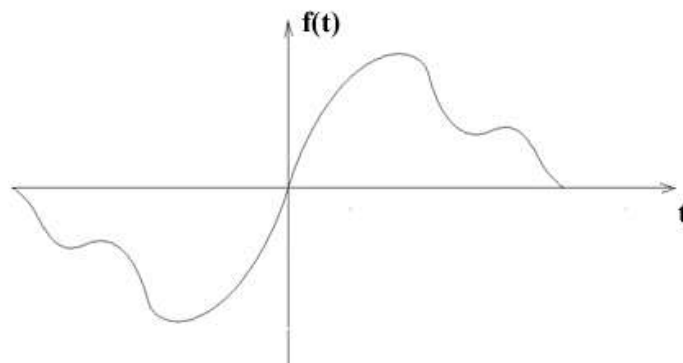


Рис. 2.9. Симетрія відносно початку координат

В цьому випадку:

$$A_0 = C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_k = 0 \quad (2.48)$$

і ряд Фур'є має вигляд:

$$f(t) = B_1 \sin \omega_1 t + B_2 \sin 2\omega_1 t + B_3 \sin 3\omega_1 t + \dots + B_k \sin k\omega_1 t + \dots \quad (2.49)$$

## Приклади

а) отримаємо коефіцієнти ряду Фур'є функції  $f(t)$ , зображеної на рис. 2.10. Функція є симетричною відносно осі абсцис, а також відносно осі ординат. Тому обчислимо лише коефіцієнти ряду  $C_k$ .

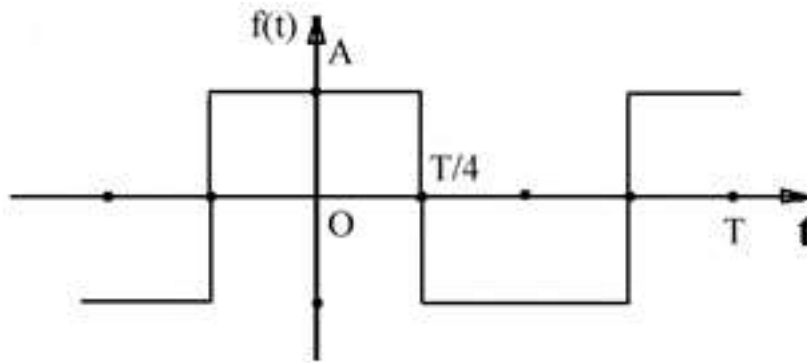


Рис. 2.10. Функція, симетрична відносно осі абсцис, а також відносно осі ординат

Для основної гармоніки маємо

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_1 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \omega_1 t dt = \\ &= \frac{4}{T} [A \int_0^{T/4} \cos \omega_1 t dt - A \int_{T/4}^{T/2} \cos \omega_1 t dt] = \\ &= \frac{4A}{T\omega_1} [\sin \omega_1 t \Big|_0^{T/4} - \sin \omega_1 t \Big|_{T/4}^{T/2}] = \frac{4A}{2\pi} \left[ \sin \frac{\pi}{2} - 0 - \sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} \right] = \frac{4A}{\pi}. \end{aligned}$$

Для вищих гармонік

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega_1 t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega_1 t dt = \\ &= \frac{4}{T} [A \int_0^{T/4} \cos k\omega_1 t dt - A \int_{T/4}^{T/2} \cos k\omega_1 t dt] = \end{aligned}$$

$$= \frac{4A}{T\omega_1 k} [\sin k\omega_1 t \Big|_0^{T/4} - \sin k\omega_1 t \Big|_{T/4}^{T/2}] = \frac{4A}{2\pi k} [\sin \frac{k\pi}{2} - 0 - \sin k\pi + \sin \frac{k\pi}{2}] =$$

$$= \frac{4A}{\pi k} [\sin \frac{k\pi}{2}].$$

Таким чином, перші 5 коефіцієнтів ряду Фур'є мають значення

$$C_1 = \frac{4A}{\pi}; C_2 = 0; C_3 = -\frac{4A}{3\pi}; C_4 = 0, C_5 = \frac{4A}{5\pi},$$

а ряд має вигляд

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} (\cos \omega_1 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_1 t + \dots).$$

На рис. 2.11 зображений дискретний спектр амплітуд для функції часу  $f(t)$ .

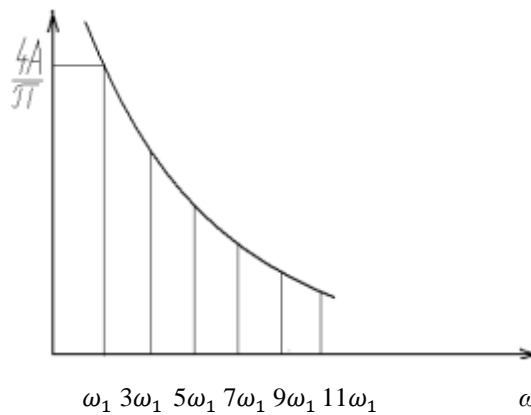


Рис. 2.11. Дискретний спектр амплітуд

б) випадок симетрії відносно осі абсцис, а також відносно початку координат (рис. 2.12). Тут маємо

$$A_0 = C_1 = C_2 = C_3 = \dots = C_k = 0,$$

а також

$$B_2 = B_4 = \dots = 0.$$

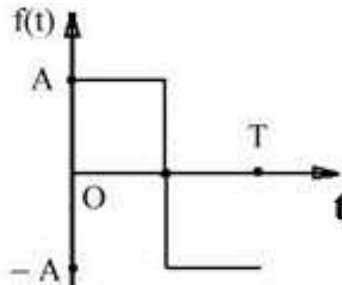


Рис. 2.12. Функція, симетрична відносно осі абсцис, а також відносно початку координат



Обчислимо коефіцієнт ряду  $B_1$ :

$$B_1 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_1 t dt = \frac{2}{T} [A \int_0^{T/2} \sin \omega_1 t dt - A \int_{T/2}^T \sin \omega_1 t dt] = \\ = \frac{2A}{T\omega_1} [-\cos \omega_1 t \big|_0^{T/2} + \cos \omega_1 t \big|_{T/2}^T] = \frac{2A}{2\pi} [1+1 + 1+1] = \frac{4A}{\pi}.$$

Аналогічно  $B_2$ :

$$B_2 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin 2\omega_1 t dt = \frac{2A}{2T\omega_1} [-\cos 2\omega_1 t \big|_0^{T/2} + \cos 2\omega_1 t \big|_{T/2}^T] = \frac{A}{2\pi} [-1+1+1-1]=0.$$

Обчисливши перші 5 коефіцієнтів, отримаємо ряд Фур'є

$$f(t) = \frac{4A}{\pi} (\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_1 t + \dots).$$

Можливо отримати і загальний вираз для  $B_k$ :

$$B_k = \frac{2A}{\pi k} [1 + (-1)^{k+1}].$$

Обчислення коефіцієнтів розкладання в ряд Фур'є періодичних прямокутних коливань виконується за формулами, які дозволяють уникнути безпосереднього інтегрування [5].

## 2.4. Спектральне подання неперіодичних сигналів

### 2.4.1. Інтегральне перетворення Фур'є

Як буде видно з подальшого, таке розкладання неперіодичних функцій має багато спільного з розкладанням періодичних несинусоїдальних функцій в ряд Фур'є. Сенса такого розкладу, по суті справи, той же, що і при аналізі процесів в лінійних колах, що знаходяться під дією періодичної несинусоїдальної напруги. Здійснюючи таке розкладання неперіодичної напруги на синусоїдальні складові, отримаємо можливість, користуючись добре відомими прийомами розрахунку струмів в колі при синусоїдальних напругах, знайти струми в колі від дії окремих складових напруги, а потім отримати результуючий струм, користуючись методом накладання.

Представлення неперіодичних функцій часу у вигляді інтегралу Фур'є можна отримати, виходячи з уже відомого нам розкладання періодичних функцій в ряд Фур'є, представленого в комплексній формі:

$$\begin{cases} f(t) = \frac{1}{T} \sum_{q=-\infty}^{q=\infty} A_q e^{jq\omega_1 t} , \\ A_q = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jq\omega_1 t} dt , \end{cases} \quad (2.50)$$

що отримано переносом множника  $\frac{1}{T}$  із виразу для  $A_q$  в формулу  $f(t)$ . Тут кутова частота першої гармоніки позначена  $\omega_1$ . Це необхідно, щоб відрізнити її від безупинно змінної частоти  $\omega$ , про яку йтиме мова далі. Два останніх вирази можна розглядати як взаємно зворотні перетворення, що встановлюють відповідність між  $f(t)$  і  $A_q$ . Функція  $A_q$  представляє собою дискретний спектр функції  $f(t)$ .

Припустимо тепер, що  $f(t)$  – неперіодична функція. Щоб отримати вираз, придатний для будь-якого значення  $t$  на підставі виразів (2.50), будемо розглядати дану неперіодичну функцію  $f(t)$  як періодичну з нескінченно великим періодом. При безмежному зростанні  $T$ , різниця  $\Delta\omega = 2\pi/T = \omega_1$  між кутовими частотами будь-яких двох суміжних гармонік ( $q\omega_1$  і  $(q-1)\omega_1$ ) дорівнює кутовий частоті  $\omega_1$  першої гармоніки і буде наближатися до нуля. Відповідно дискретна множина значень частот перейде в безперервно змінну частоту  $\omega$ .

Перепишемо перший вираз із (2.50) у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{q=-\infty}^{q=\infty} A_q e^{jq\omega_1 t} \Delta\omega \quad (2.51)$$

і спрямувавши  $\Delta\omega$  до нуля, отримуємо

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} A(j\omega) d\omega , \quad (2.52)$$

тобто ряд Фур'є переходить в інтеграл Фур'є. При цьому функція  $A(j\omega)$  визначиться на підставі другого виразу із (2.50) у вигляді

$$A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.53)$$

Співвідношення (2.53) називають прямим перетворенням Фур'є, що дозволяє знайти за заданої функції  $f(t)$  їй відповідну  $A(j\omega)$ .

Співвідношення (2.52) називають зворотним перетворенням Фур'є, що дає можливість за відомою функцією  $A(j\omega)$  знайти  $f(t)$ . Якщо розглядати включення електричного кола у момент  $t = 0$  під дію електрорушійної сили (ЕРС)  $e(t) = f(t)$ , то маємо умову  $f(t) = 0$  при  $t < 0$ , а отже, співвідношення (2.53) набуває вигляду:

$$A(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (2.54)$$

і називається однобічним прямим перетворенням Фур'є.

Слід зазначити, що пряме перетворення Фур'є має сенс, якщо інтеграл у його правій частині має певне кінцеве значення. Для цього недостатньо щоб функція задовольняла умовам Діріхле. На додаток до них є достатнім щоб  $f(t)$  була абсолютно інтегрована в межах від  $-\infty$  до  $+\infty$ , тобто щоб існував інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt, \text{ або } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (2.55)$$

Це, в свою чергу, означає, що  $f(t)$  повинна прямувати до нуля при  $t \rightarrow \infty$  і при  $t \rightarrow -\infty$ .

## 2.4.2. Частотні характеристики

Комплексна функція  $A(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  називається *спектральною щільністю* або *спектральною характеристикою* функції  $f(t)$ , оскільки вона являє собою безперервний спектр функції  $f(t)$ . Співвідношення (2.52) показує, що неперіодична функція, яка задовольняє вищезазначеним умовам, може бути представлена як сума нескінченно великого числа гармонічних складових з нескінченно малими амплітудами  $\frac{1}{2\pi} M(\omega)d\omega$  і

частотами, які займають весь діапазон від  $-\infty$  до  $+\infty$ . Величина  $M(\omega)$ , що характеризує залежність амплітуди від частоти, називається спектром амплітуд або амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ). Величина  $\varphi(\omega)$ , що характеризує залежність початкової фази від частоти, називається спектром фаз або фазо-частотною характеристикою (ФЧХ).

Представимо спектральну характеристику у вигляді

$$A(j\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = A_R(\omega) + jA_I(\omega). \quad (2.56)$$

При цьому величина  $A_R(\omega)$  називається дійсною частотною характеристикою, а величина  $A_I(\omega)$  – уявною частотною характеристикою. В свою чергу

$$A_R(\omega) = M(\omega) \cos \varphi(\omega), \quad (2.57)$$

$$A_I(\omega) = M(\omega) \sin \varphi(\omega), \quad (2.58)$$

що отримано за допомогою формули:  $e^{j\varphi(\omega)} = \cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)$ .

Помічаючи, що  $A(j\omega)$  і  $A(-j\omega)$  є спряженими комплексними величинами, можемо написати для їх модулів і фаз ( $M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$  і  $M(-\omega)e^{-j\varphi(-\omega)}$ ):

$$M(\omega) = M(-\omega), \quad (2.59)$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega). \quad (2.60)$$

Таким чином,  $M(\omega)$  є парною функцією  $\omega$ , а  $\varphi(\omega)$  – непарною функцією. Тому, представивши підінтегральну величину у виразі (2.52) у вигляді (використовуючи (2.56)):

$$e^{j\omega t} A(j\omega) = M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] + j M(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)],$$

(аналогічно:  $e^{-j\omega t} A(-j\omega) = M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] - j M(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$ )

будемо мати:

$$e^{j\omega t} A(j\omega) + e^{-j\omega t} A(-j\omega) = 2M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)],$$

і, отже, вираз (2.52) можна представити у вигляді

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty M(\omega) \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega, \quad (2.61)$$

що представляє собою інтеграл Фур'є (зворотне перетворення Фур'є) в

тригонометричній формі.

Останній вираз з усією ясністю показує, що неперіодичну функцію, що задовольняє зазначеним вище умовам, можна розглядати як суму нескінченної кількості гармонійних складових з нескінченно малими амплітудами  $\frac{1}{\pi} M(\omega) d\omega$  і початковими фазами  $\varphi(\omega)$ . Те, що амплітуди в цьому випадку виявилися в два рази більше, ніж при розгляді виразу (2.52), є результат того, що в останньому виразі  $\omega$  змінюється від 0 до  $+\infty$ , а не від  $-\infty$  до  $+\infty$ , і відповідно гармоніки з частотами  $\omega$  і  $-\omega$ , що містяться у виразі (2.52), підсумовано у виразі (2.61).

Неважко помітити, що

$$[M(\omega)]^2 = A(j\omega) A(-j\omega) \quad (2.62)$$

і, використовуючи вираз (2.53), отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [M(\omega)]^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} A(j\omega) A(-j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [A(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt] d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} A(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi [f(t)]^2 dt, \end{aligned}$$

або

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [M(\omega)]^2 d\omega. \quad (2.63)$$

Остання рівність виражає собою теорему Релея, а також називається рівністю Парсеваля.

В окремому випадку, коли  $f(t) = e(t)$  являє собою ЕРС, що впливає на коло лише з активним опором,  $G_e \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt$  дорівнює енергії, що виділяється в колі, причому  $G_e$  – є еквівалентна провідність всього кола. Рівність Парсеваля показує, що в даному випадку ця енергія може бути обчислена за відомою АЧХ ЕРС.

### 2.4.3. Зв'язок між частотними й часовими характеристиками кіл

Частотні й часові характеристики описують ту саму схемну функцію й зв'язок між ними визначається прямим і зворотнім перетворенням Фур'є. Зокрема, для одержання імпульсної характеристики користуються формулою:

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} H(\omega) \cos[\omega t + \alpha(\omega)] d\omega, \quad (2.64)$$

що представляє собою інтеграл Фур'є (зворотне перетворення) у тригонометричній формі. Розкриваючи  $\cos$  суми, отримаємо:

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [H_R(\omega) \cos \omega t - H_I(\omega) \sin \omega t] d\omega. \quad (2.65)$$

Вважаючи, що при  $t < 0$  маємо  $g(t) = 0$ , підставимо в тільки що отриманий вираз  $g(t)$  значення  $t = -t$ :

$$0 = \int_0^{\infty} [H_R(\omega) \cos \omega t + H_I(\omega) \sin \omega t] d\omega, \quad (2.66)$$

або

$$\int_0^{\infty} H_R(\omega) \cos \omega t d\omega = - \int_0^{\infty} H_I(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (2.67)$$

Використовуючи отримане співвідношення, маємо

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} H_R(\omega) \cos \omega t d\omega = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} H_I(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (2.68)$$

тобто можемо визначити імпульсну характеристику або по дійсній частотній, або по уявній частотній характеристиці. Використовуючи вираз (2.68), знаходимо перехідну характеристику кола [6]:

$$h(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{H_R(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (2.69)$$

Таким чином, виконавши аналіз кола в одній з областей (часовій або частотній), можна одержати результати в іншій області. Це особливо важливо для аналізу нелінійних кіл, коли безпосереднє одержання частотних характеристик може виявитися неможливим.

## Приклад

Обчислимо значення перехідної характеристики для фіксованого моменту часу  $t = 1$  с, використовуючи зворотне перетворення Фур'є для схемної функції  $H_Z = \frac{p+1}{p^2+6p+3}$ . Скористаємося наближенням до інтегралу (2.69):

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{H_R(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega \approx \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^N \frac{H_R(k\omega_1)}{k\omega_1} \sin k\omega_1 t \Delta\omega .$$

Нехай  $\omega_1 = 1$ , в цьому випадку період сигналу повинен складати

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi ,$$

тобто тільки до моменту  $t = 2\pi$  обчислення можуть достовірно відображати перехідну характеристику, яка не є періодичною функцією часу. Припущення про наявність періоду з'явилося завдяки приблизному обчисленню інтегралу. Враховуючи, що  $t = 1$  і  $\Delta\omega = 1$  отримаємо:

$$h(1) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^N \frac{H_R(k)}{k} \sin k .$$

Дійсна частотна характеристика, отримана аналітичним шляхом [7]

$$A_R = 1; \quad B_R = 3 - \omega^2; \quad A_I = \omega; \quad B_I = 6\omega$$

має вигляд

$$H_R(\omega) = \frac{3 - \omega^2 + 6\omega^2}{9 - 6\omega^2 + \omega^4 + 36\omega^2} = \frac{5\omega^2 + 3}{\omega^4 + 30\omega^2 + 9} .$$

Змінюємо  $\omega$  на  $k$  ( $\omega_1 = 1$ ) та розраховуємо приблизне значення  $h(1)$ , використовуючи перші 13 доданків та попарно усереднюючи їх для підвищення точності

$$h(1) \cong 0,637 \cdot 0,378 = 0,241 .$$

Розрахунки наведені нижче у табл. 2.1 (враховуємо, що  $\frac{\sin k}{k} = 1$  при  $k \rightarrow 0$ ).

Таблиця 2.1

$k$	$H(k)$	$\sin k$	$H(k) \cdot (\sin k / k)$	Середнє арифметичне
0	0,33	-	0,33	
1	0,2	0,84	0,17	0,25
2	23/145	0,91	0,07	0,12
3	48/360	0,14	0,0062	0,038
4	83/745	-0,76	-0,021	-0,0074
5	128/1384	-0,96	-0,018	-0,02
6	183/2385	-0,28	-0,0036	-0,01
7	248/3880	0,66	0,006	0,0012
8	323/6025	0,99	0,0066	0,0063
9	408/9000	0,41	0,002	0,00415
10	503/13009	-0,54	-0,002	0
11	608/18280	-1	-0,003	-0,0025
12	723/25065	-0,54	-0,0012	-0,0021
			Всього:	0,37765

Перехідну характеристику  $h(t)$  можна отримати з кращою точністю за допомогою зворотного перетворення Лапласу [7] наступним чином:

$H_Z(p) = \frac{p+1}{p^2+6p+3}$  має полюси  $p_{1,2} = -3 \pm \sqrt{6}$ ;  $p_3 = 0$  (додатковий полюс для  $h(t)$ );

$$H_Z(p) = \frac{k_1}{p+3-\sqrt{6}} + \frac{k_2}{p+3+\sqrt{6}} + \frac{k_3}{p};$$

$$k_1 \cong \frac{(p+0,55)(p+1)}{(p+0,55)(p+5,4)p} = \frac{0,45}{4,85 \cdot (-0,55)} = -0,17 \text{ для } p_1 = -0,55;$$

$$k_2 \cong \frac{p+1}{(p+0,55)p} = \frac{-4,4}{(-4,85) \cdot (-5,4)} = -0,17 \text{ для } p_2 = -5,4;$$



$$k_3 \cong \frac{p+1}{(p+0,55)(p+5,4)} = \frac{1}{0,55 \cdot 5,4} = 0,34 \text{ для } p_3 = 0.$$

В результаті перехідна характеристика має вигляд

$$h(t) = 0,34 - 0,17e^{-0,55t} - 0,17e^{-5,4t}$$

і при  $t = 1$  дає приблизно той же результат

$$h(1) = 0,34 - 0,17e^{-0,55} - 0,17e^{-5,4} \cong 0,34 - 0,099 - 0,0008 = 0,24.$$

#### 2.4.4. Зв'язок між спектрами періодичних і неперіодичних сигналів

Нехай розкладання періодичного сигналу  $f(t)$  в ряд Фур'є проводиться із застосуванням комплексної форми:

$$f(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q e^{jq\omega_1 t}. \quad (2.70)$$

Сукупність комплексних величин  $A_q$  при  $q$ , що змінюється від  $-\infty$  до  $\infty$ , утворюють комплексний спектр функції, що розглядається. Кожна із цих величин, взята при відповідній частоті  $q\omega_1$ , визначається амплітудою й фазою вектора  $A_q$ . При використанні для розкладання сигналу в ряд Фур'є тригонометричної форми:

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \quad (2.71)$$

сукупність величин  $A_{km}$  разом з  $A_0$  утворюють спектр амплітуд сигналу, а сукупність величин  $\varphi_k$  утворюють спектр фаз. Оскільки в багатьох випадках використовують окремо взятий спектр амплітуд, його часто просто називають спектром сигналу  $f(t)$ . У системі координат  $A_{km}, \omega$  для дискретних значень  $\omega = \omega_1, 2\omega_1, \dots, k\omega_1, \dots$  спектр повинен був би зображуватися послідовністю точок на площині. Оскільки таке його зображення не є зручним, то з кожної точки опускають перпендикуляр на вісь  $\omega$ , одержуючи на графіку певну кількість вертикальних ліній. Беручи до уваги таке зображення спектра, його називають лінійчатим спектром.

Спектральне подання неперіодичних сигналів є більш складним.

Формули інтегральних перетворень Фур'є:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (2.72)$$

де

$$A(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.73)$$

були отримані з формули ряду Фур'є при  $T \rightarrow \infty$ . У формулі зворотного перетворення підінтегральний вираз являє собою нескінченно малу величину. Будемо розглядати її як елементарне коливання з нескінченно малою амплітудою  $da$ , представлене в наступному вигляді:

$$da \cdot e^{j\omega t}. \quad (2.74)$$

Прирівнюючи (2.74) виразу  $\left(\frac{1}{\pi}\right) A(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ , отримуємо

$$A(j\omega) = \pi \cdot \frac{da}{d\omega}. \quad (2.75)$$

Як повідомлялося раніше, величина  $A(j\omega)$ , пропорційна похідній від амплітуди за частотою  $\omega$ , називається спектральною щільністю або спектральною характеристикою неперіодичного сигналу. Називають її також і комплексним спектром, а її модуль  $M(\omega) = |A(j\omega)|$  – спектром амплітуд неперіодичного сигналу.

Розглянемо, як пов'язані між собою спектри однотипних періодичних і неперіодичних сигналів. Нехай  $f(t)$  являє собою неперіодичний сигнал у вигляді одного прямокутного імпульсу (рис. 2.13). Однотипним із цим сигналом періодичним сигналом будемо вважати нескінченну множину таких самих імпульсів, що повторюються з періодом  $T$ , як показано на рис.2.14.

Хоча теоретично й вважають число періодів нескінченно великим, при розв'язку практичних завдань доводиться мати справу з кінцевим числом періодів. По мірі зменшення їх кількості лінійчатий спектр, видозмінюючись, наближається до безперервного спектра.

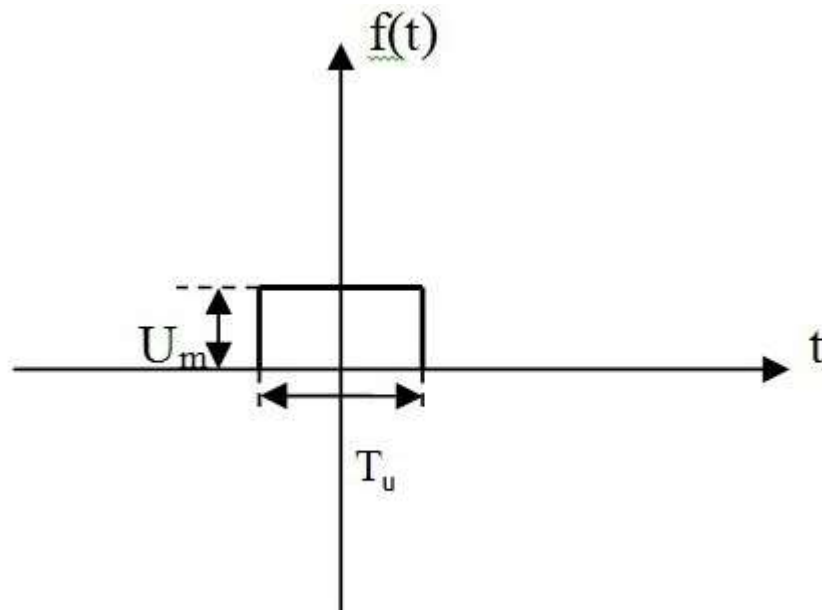


Рис. 2.13. Одиночний імпульс

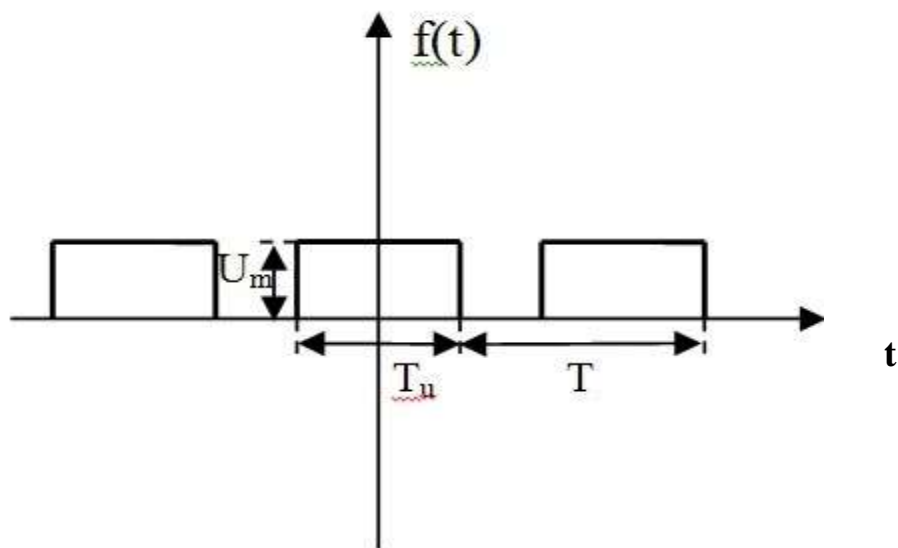


Рис. 2.14. Періодична послідовність імпульсів

Порівняємо формули комплексних спектрів неперіодичного й періодичного сигналів. Для одиночного імпульсу  $f(t) = 0$  при  $t < -T_u/2$  і при  $t > T_u/2$ . При цьому

$$A(j\omega) = \int_{-T_u/2}^{T_u/2} f(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (2.76)$$

Вираз для відповідного періодичного сигналу

$$A_q = \frac{1}{T} \int_{-T_u/2}^{T_u/2} f(t) e^{-jq\omega_1 t} dt \quad (2.77)$$

при  $\omega = q\omega_1$  відрізняється від (2.76) тільки множником  $1/T$ . Відповідним чином пов'язані між собою спектри амплітуд. Для одиночного імпульсу знаходимо:

$$A(j\omega) = U_m \int_{-T_u/2}^{T_u/2} e^{-j\omega t} dt = -\frac{U_m}{j\omega} (e^{-j\omega \frac{T_u}{2}} - e^{j\omega \frac{T_u}{2}}), \quad (2.78)$$

або, користуючись формулою Ейлера,

$$A(j\omega) = \frac{2U_m}{\omega} \cdot \sin \omega \frac{T_u}{2}. \quad (2.79)$$

Цей вираз можна представити і в іншому вигляді:

$$A(j\omega) = U_m T_u \frac{\sin \frac{\omega T_u}{2}}{\frac{\omega T_u}{2}}. \quad (2.80)$$

Розглянемо поведінку функції  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ , де  $\alpha = \frac{\omega T_u}{2}$  (графік – на рис. 2.15).

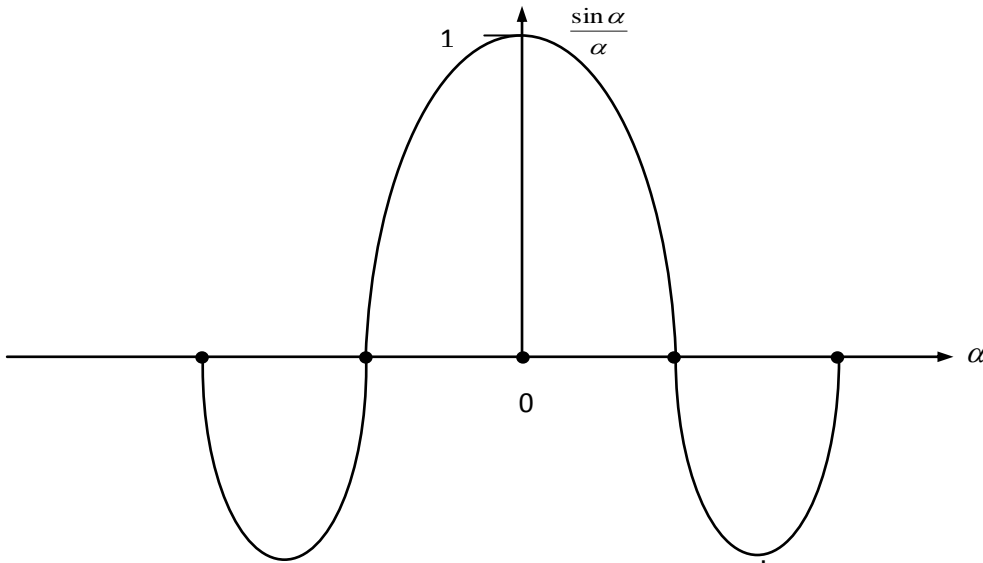


Рис. 2.15. Графік функції  $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$

При  $\alpha = 0$  маємо відповідно правилу Лопіталя  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{\cos \alpha}{1} = 1$ . У виразі для  $A(j\omega)$  величина  $U_m T_u$  – константа, що дорівнює площі імпульсу. Тому  $A(j\omega)$  має ту ж форму, що й розглянута функція. При  $\omega = 0$  величиною  $A(j\omega)$  визначається площа імпульсу будь-якої форми, а не тільки розглянутого імпульсу.

Співвідношення  $A_q = \frac{1}{T}A(j\omega)$  вказує на те, що з точністю до множника  $1/T$  коефіцієнт розкладу в ряд Фур'є періодичного сигналу дорівнює спектральній щільності однотипного з ним неперіодичного сигналу при  $\omega = q\omega_1$ . Це стосується й модулів відповідних величин. Даний висновок щодо імпульсних сигналів формулюється таким чином: модуль спектральної щільності одиничного імпульсу й огинаюча лінійчатого спектру періодичної послідовності, отриманої шляхом повторення заданого імпульсу, збігаються за формою й відрізняються тільки масштабом. Сказане стосується всіх  $\omega = k\omega_1$  при значеннях  $k$  від одиниці й вище (множник  $2/T$  для позитивних частот) й не стосується того, що дає лінійчатий спектр при  $\omega = 0$  (множник  $1/T$ ).

На рис. 2.16 зображені спектри амплітуд і фаз прямокутного імпульсу.

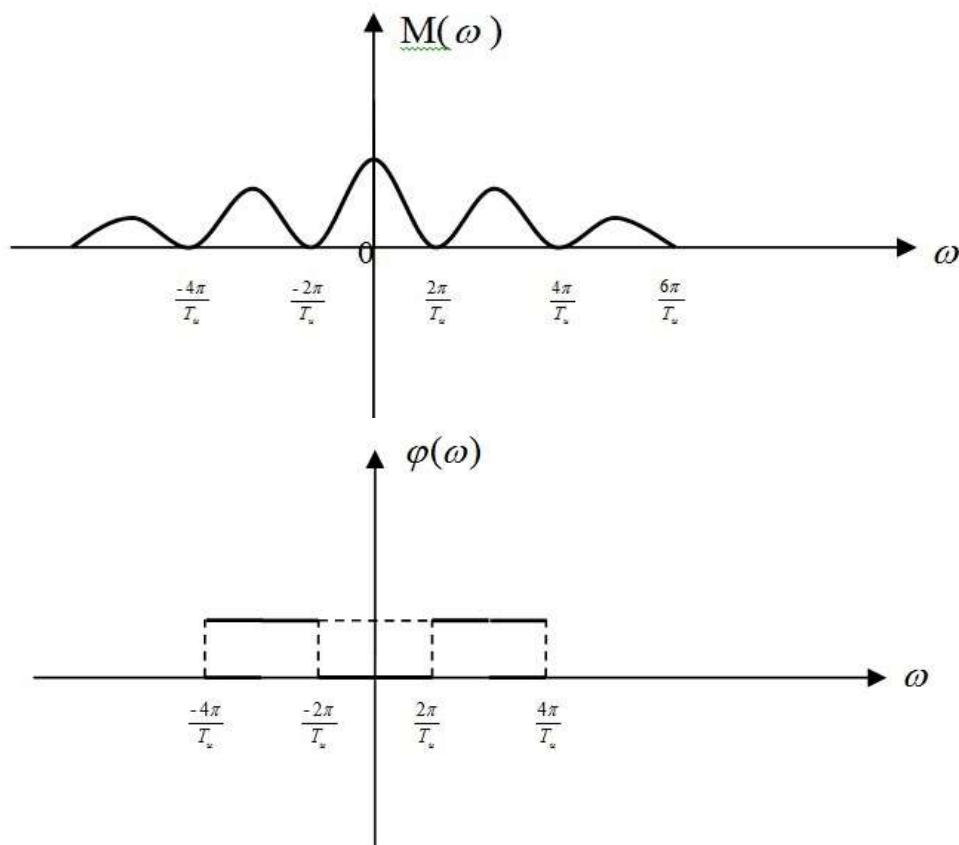


Рис. 2.16. Спектри амплітуд і фаз одиночного імпульсу

Крім того, нижче на рис. 2.17 показані спектри амплітуд одиночного імпульсу й періодичної послідовності однотипних прямокутних імпульсів. Лінійчатий спектр отриманий для послідовності зі скважністю  $T/T_u=2$  за допомогою комплексної форми ряду Фур'є ( $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ ).

Для неперіодичних сигналів похибки спектрального подання найчастіше бувають пов'язані з урізанням характеристики спектральної щільності  $A(j\omega)$ . Найбільш часто виникають похибки при спектральному поданні процесів у тих випадках, коли досліджуваний сигнал повторюється протягом декількох періодів  $T$ , але не є істинно періодичним: число періодів не нескінченно велике. Це має велике значення, оскільки іноді змінивши число розглянутих періодів такого неперіодичного сигналу всього лише на один період, отримуємо істотно змінену характеристику спектральної щільності.

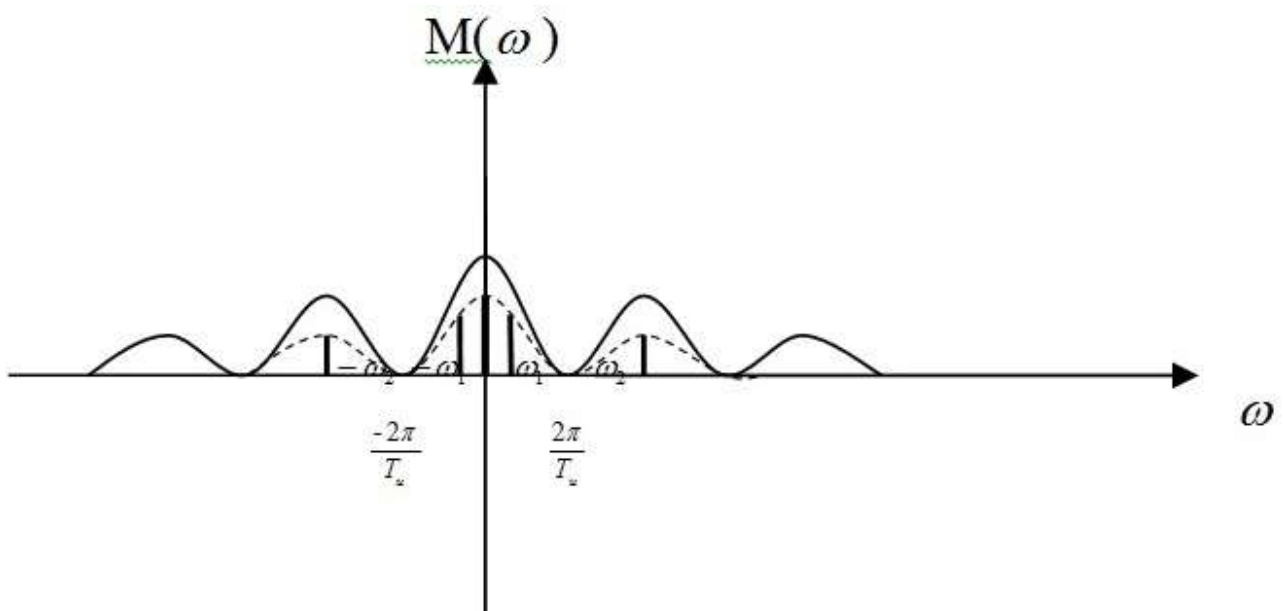


Рис. 2.17. Спектри амплітуд одиночного та послідовності імпульсів

#### 2.4.5. Зв'язок перетворення Фур'є з перетворенням Лапласа

При використанні інтеграла Фур'є для представлення сигналу  $f(t)$  у вигляді його спектральної щільності необхідно враховувати, що функція  $f(t)$  повинна бути абсолютно інтегрованою. Це означає, що функція має бути зникаючою, тобто повинна виконуватись умова  $f(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Деякі сигнали не є абсолютно інтегрованими, наприклад: одиничний стрибок і необмежені за часом гармонічні коливання. Для них перетворення Фур'є може бути виконане, хоча функція не є зникаючою, а, отже, і не є абсолютно інтегрованою. При цьому заданий сигнал  $f(t)$  тимчасово замінюється іншим  $\hat{f}(t)$ , який задовольняє умові абсолютної інтегрованості. Для функції  $\hat{f}(t)$  знаходиться її спектральна щільність  $\hat{A}(j\omega)$  і шляхом граничного переходу отримується вираз спектральної щільності  $A(j\omega)$  для функції  $f(t)$ .

Нехай, наприклад, є функція  $f(t)$  відмінна від одиничного стрибка тільки масштабом: замість одиниці береться величина  $C$ . Замінімо цю функцію на наступну:

$$\hat{f}(t) = e^{-\sigma t} f(t). \quad (2.81)$$

Спектральна щільність  $\hat{A}(j\omega)$  визначається формулою:

$$\hat{A}(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} C e^{-j\omega t} dt = C \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt. \quad (2.82)$$

Інтегруючи, отримуємо:

$$\hat{A}(j\omega) = -\frac{C}{\sigma+j\omega} e^{-(\sigma+j\omega)t} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{C}{\sigma+j\omega}. \quad (2.83)$$

Спектральна щільність  $A(j\omega)$  знаходиться тепер як ліміт  $\hat{A}(j\omega)$  при  $\sigma \rightarrow 0$ :

$$A(j\omega) = \frac{C}{j\omega}. \quad (2.84)$$

Таким чином, інтеграл Фур'є

$$A(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.85)$$

замінюється іншим інтегралом, який замість уявної величини  $j\omega$  включає комплексну змінну  $p = \sigma + j\omega$ :

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \quad (2.86)$$

і називається перетворенням Лапласа. В свою чергу, перетворення Фур'є є частковим випадком перетворення Лапласа за умови  $p = j\omega$ .

У теорії перетворення Лапласа функцію  $f(t)$  називають оригіналом, а відповідну функцію  $F(p) = L[f(t)]$  – лапласовим зображенням, або просто зображенням. Зворотнє перетворення Лапласа записують у такий спосіб:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt}dp. \quad (2.87)$$

Властивості перетворення Лапласа і перетворення Фур'є аналогічні:

1. Лінійність.

$$L[Cf(t)] = CL[f(t)], \text{ а якщо } f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t), \text{ то } L[f(t)] = \sum_{i=1}^n L[f_i(t)]. \quad (2.88)$$

2. Затримка. Для функції  $f(t - \tau)$ , що запізнюється на  $\tau$  відносно  $f(t)$ , справедливо

$$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau}L[f(t)]. \quad (2.89)$$

3. Зміщення. Якщо оригіналом є функція  $e^{-\eta t}f(t)$ , де  $\eta$  – будь-яке комплексне число, то її зображення

$$L[e^{-\eta t}f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(p+\eta)t}dt = F(p + \eta). \quad (2.90)$$

4. Згортка. Якщо

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau, \quad (2.91)$$

то

$$L[f(t)] = L[f_1(t)] \cdot L[f_2(t)]. \quad (2.92)$$

5. Диференціювання (n-а похідна).

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n L[f(t)] - [p^{n-1}f(0) + p^{n-2}f'(0) + p^{n-3}f''(0) + \dots + f^{(n-1)}(0)], \quad (2.93)$$

де  $f(0)$ ,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ , ...,  $f^{(n-1)}(0)$  – значення, що відповідають початковим



умовам. При нульових початкових умовах

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n L[f(t)] . \quad (2.94)$$

Інтегрування при нульових початкових умовах

$$L\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{L[f(t)]}{p} . \quad (2.95)$$

Раніше було відзначено, що перетворення Фур'є можливе для обмеженого класу функцій. Було зазначено, що достатньою умовою для існування перетворення є абсолютна інтегрованість функції  $f(t)$ . Перетворення Лапласа є більш загальним, тому що  $p$  розглядається як комплексна величина, що має дійсну частину, достатньо велику, щоб інтеграл Лапласа мав кінцеве значення для досить широкого класу функцій, що практично охоплюють усі функції, з якими зустрічаємося в теорії електронних кіл.

Завдяки тому, що перетворення Фур'є є частковим випадком перетворення Лапласа, коли в останньому дійсна частина комплексної змінної  $p$  прямує до нуля, можемо не робити інтегрування для обчислення  $A(j\omega)$ , а, скориставшись готовими таблицями для  $F(p)$ , що є у довідниках, замінити у виразах  $F(p)$  величину  $p$  на  $j\omega$ .

## Приклади

Розклад неперіодичних напруг у безперервний спектр синусоїдальних складових знаходить широке застосування в електронній техніці, у радіотехніці, у техніці автоматичного регулювання, тому що, маючи такий спектр і знаючи залежності параметрів кола від частоти, можна визначити характер впливу такої напруги на розглянуте коло. Одержимо частотні характеристики заданих функцій часу за допомогою перетворення Лапласа.

а) напруга змінюється з часом по закону  $u(t) = U_0 e^{-\delta t}$ . Згідно таблиці перетворень Лапласа

$$U_0 e^{-\delta t} \leftrightarrow \frac{U_0}{\delta + p} = F(p),$$

і, отже, частотна характеристика функції  $U_0 e^{-\delta t}$  має вигляд, отриманий виділенням уявної і дійсної частин (див. нижче):

$$F(j\omega) = U(j\omega) = \frac{U_0}{\delta + j\omega} = \frac{U_0}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}} e^{-j \arctg \frac{\omega}{\delta}},$$

тобто спектри амплітуд і фаз мають вигляд

$$F(\omega) = U(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}},$$

$$\alpha(\omega) = \alpha_U(\omega) = -\arctg \frac{\omega}{\delta}.$$

Позначення  $U(\omega)$  й індекс  $U$  в  $\alpha$  означають, що ці величини стосуються напруги. На рис. 2.18 зображений спектр амплітуд функції  $u(t) = U_0 e^{-\delta t}$ , а на рис. 2.19 – дійсна й уявна частотні характеристики, які визначаються формулами:

$$U(j\omega) = \frac{U_0}{\delta + j\omega} = \frac{U_0(\delta - j\omega)}{\delta^2 + \omega^2} = \frac{U_0\delta}{\delta^2 + \omega^2} - j \frac{U_0\omega}{\delta^2 + \omega^2} = U_R(\omega) + jU_I(\omega).$$

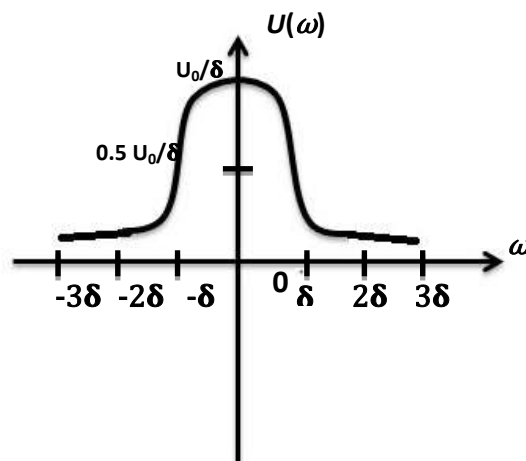
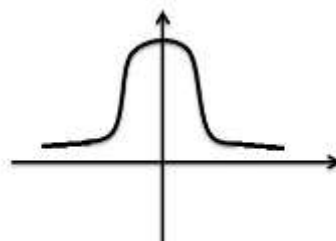


Рис. 2.18. Спектр амплітуд  $U(\omega)$



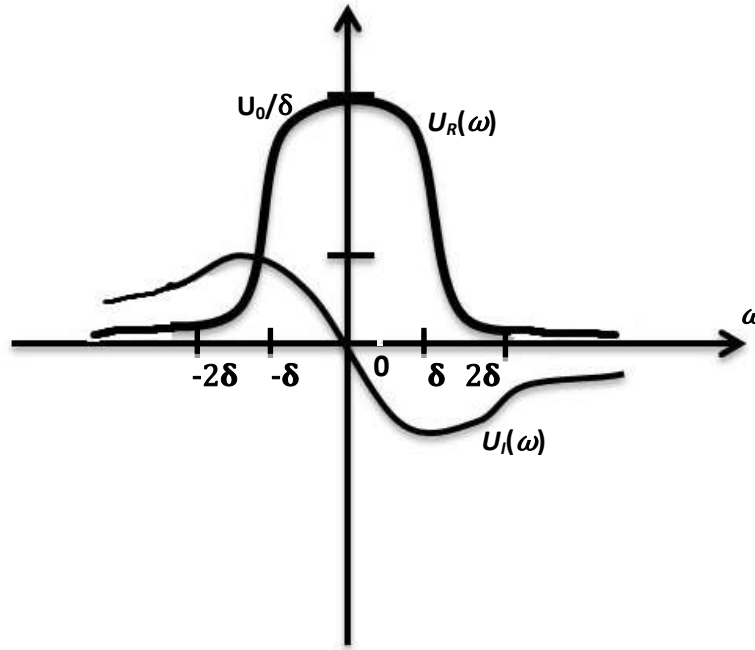


Рис. 2.19. Дійсна  $U_R(\omega)$  і уявна  $U_I(\omega)$  частотні характеристики

б) отримаємо частотні характеристики для функцій  $v(t) = U_0 = \text{const}$  і  $g(t) = U_0 \sin \omega_0 t$ , для яких безпосереднє застосування прямого перетворення Фур'є формально неможливе, оскільки інтеграл у цьому перетворенні для них не має визначеного кінцевого значення. Використаємо наступний прийом: помножимо функції на  $e^{-\delta t}$ , де  $\delta > 0$ . Частотні характеристики функцій  $U_0 e^{-\delta t}$  і  $U_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t$  отримаємо із зображень по Лапласу

$$U_0 e^{-\delta t} \leftrightarrow \frac{U_0}{\delta + p},$$

$$U_0 e^{-\delta t} \sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{U_0 \omega_0}{(p + \delta)^2 + \omega_0^2}.$$

при переході до ліміту, коли  $\delta \rightarrow 0$ :

$$v(t) = U_0 \leftrightarrow \frac{U_0}{j\omega};$$

$$g(t) = U_0 \sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{U_0 \omega_0}{(j\omega)^2 + \omega_0^2} = \frac{U_0 \omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2}.$$

Наприкінці наводимо таблицю, що ілюструє зв'язок можливих перетворень аналогових сигналів.

Таблиця 2.2. Зв'язок перетворень аналогових сигналів

Математичний опис	Пряме перетворення	Зворотне перетворення	Оператор $p$	Тип перетворення
1) $f(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$ Гармонійний сигнал	$\bullet$ $A_m = A_m e^{j\varphi} = a + jb$	$\bullet$ $f(t) = \text{Re}[A_m e^{j\omega t}]$	$p = j\omega$ $\omega - \text{const}$	Символічне (метод комплексних амплітуд)
2) $f(t) = f(t + T)$ Періодичний сигнал	$\bullet$ $A_k = A_m e^{j\varphi_k} =$ $\frac{T}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$	$f(t) =$ $= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bullet A_k e^{jk\omega_1 t}$	$p = jk\omega_1$  $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$  $k - \text{ціле}$	Ряд Фур'є
3) $f(t) \rightarrow 0$ $t \rightarrow \infty$ Неперіодичний зникаючий сигнал	$A(j\omega) = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)} =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$	$f(t) =$ $= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	$p = j\omega$ $\omega - \text{var}$	Перетворення Фур'є
4) $f(t) = 0$ $t < 0$ Неперіодичний сигнал для $t > 0$	$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$	$f(t) =$ $= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(p) e^{pt} dp$	$p =$ $= \sigma + j\omega$ $p - \text{var}$	Перетворення Лапласа

### 3. ДИСКРЕТНІ (ЦИФРОВІ) СИГНАЛИ

До цифрових відносять сигнали, дискретизовані за часом і за рівнем (квантовані). Часто буває достатньо розглянути сигнали, дискретизовані за часом. У багатьох випадках вихідні сигнали безперервні і їх дискретизація зводиться до того, що у фіксовані моменти часу беруться відліки (семпли) безперервних величин. Тут немає складностей. Однак при переході до частотного подання сигналу з'являється безліч спектрів, що ускладнює обробку інформації, тому що необхідно визначати умови, при яких можливе відновлення вихідного безперервного сигналу за його відліками. З дискретними сигналами часто доводиться зустрічатися й незалежно від того як вони були отримані.

#### 3.1. Дискретизація безперервних сигналів

Для дискретизації безперервного сигналу вісь часу розбивається на однакові інтервали, кожний з яких дорівнює  $\Delta t$ . Одержують  $N-1$  інтервалів дискретизації. При цьому на осі часу відзначається  $N$  точок, координатами яких є значення  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, (N-1)\Delta t$ . Для кожної із цих точок береться відлік значення вихідного сигналу в точці. Таким чином, виходить решітчаста функція у вигляді дискретних значень. Ця операція називається дискретизацією за часом, а  $\Delta t$  називають кроком дискретизації.

Для знаходження числових значень функції проводиться квантування за рівнем: вісь ординат розбивається на ряд інтервалів і з точністю до одиниці відліку  $\Delta f$  визначається значення решітчастої функції.

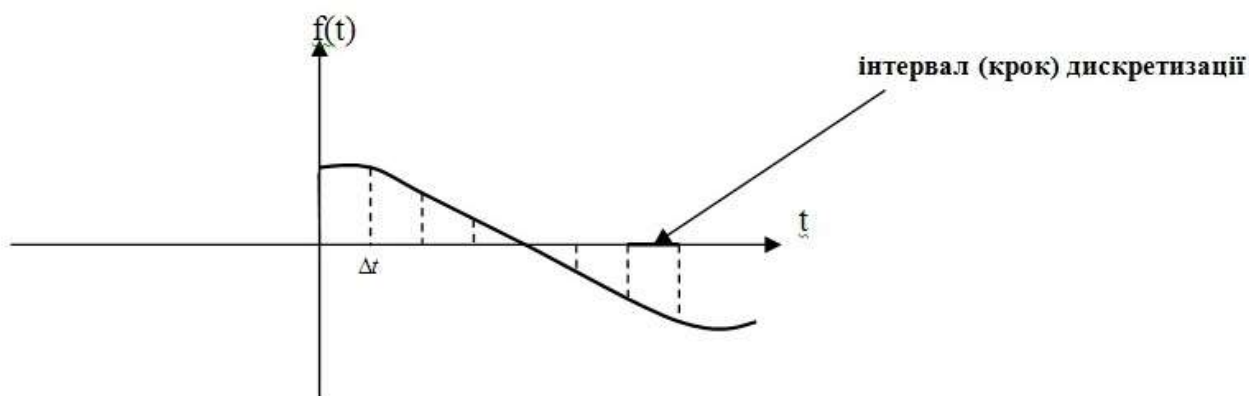


Рис. 3.1. Безперервний сигнал

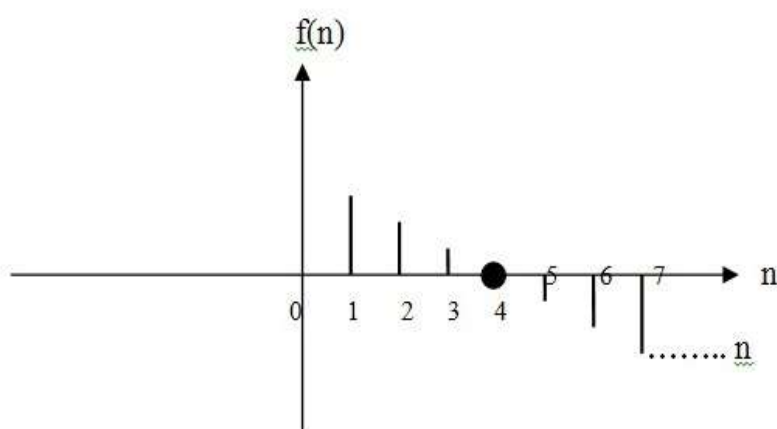


Рис. 3.2. Сигнал, дискретизований за часом (решітчаста функція)

Таким чином, дискретизація або відцифровка сигналу робиться за допомогою вимірювання, наприклад, напруги в багатьох точках по осі часу, переводу кожного виміру в числову форму й запису отриманих чисел у файл. Обладнання, що виконує дискретизацію, називається аналого-цифровим перетворювачем (АЦП або англійською ADC – Analog-to-Digital Converter). Різницю між безперервним сигналом, наприклад, звуковою хвилею та її відліками (семплами) можна порівняти з різницею між звичайним годинником із циферблатом, у якому стрілки обертаються безупинно, і електронним годинником, у якого покази дисплею

змінюються стрибками. Обладнання для виконання процедури перекладу числових відліків в електричну напругу називається цифро-аналоговим перетворювачем (ЦАП або DAC – Digital-to-Analog Converter).

### 3.2. Теорема відліків

Теорема відліків формалізує інтуїтивно розумну ідею: якщо спектральна характеристика  $A(j\omega) = A(j2\pi f)$  функції  $g(t)$  містить головним чином низькі частоти, тобто якщо функція  $|A(\omega)|$  амплітудного спектру (АС) відносно мала для частот  $|f| > f_B$  (рис.1.36), то навряд чи можна очікувати, що з функцією  $g(t)$  відбудуться значні зміни в часовому інтервалі, меншому у порівнянні з періодом  $1/f_B$  найвищої гармоніки досить великої амплітуди, що міститься в спектральному складі  $g(t)$ . Отже, функція  $g(t)$  досить повно визначається відліками в моменти часу, що знаходяться один від одного на відстані  $1/f_B$  секунд. Огинаючи ці відліки плавна крива не повинна всюди сильно відрізнятися від функції  $g(t)$ .

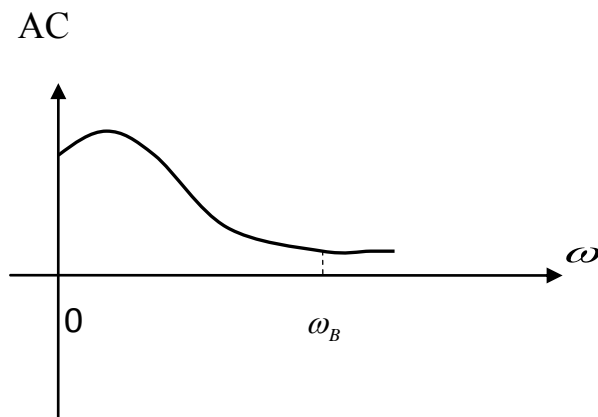


Рис. 3.3. Амплітудний спектр

*Теорема відліків:* нехай  $A(j\omega)$  – перетворення Фур'є функції  $g(t)$  і дорівнює нулю для всіх значень частоти  $|f| > f_B$ , а також не має

особливостей при  $|f| = f_B$ . Тоді відліки  $g(t)$  у точках  $t = n/2f_B$  (відліки, що відстоять один від іншого на час  $1/2f_B$ ) повністю визначають  $g(t)$  в усі моменти часу.

Іншими словами, якщо в спектрі сигналу немає гармонік із частотою вище  $\omega_B$  (або  $f_B$ ), це означає, що в інтервалі  $\Delta t < T_B$  не відбувається зміни сигналу, тобто такий інтервал  $\Delta t = T_B/2 = 1/2f_B$  можна використовувати як крок дискретизації. Цю теорему також називають теоремою Котельникова.

Розглянемо в якості прикладу звукові сигнали, чутний діапазон частот яких лежить в інтервалі від 16 – 20 Гц до 20 – 22 кГц. Якщо необхідно відцифрувати звук з високою точністю, то частота дискретизації повинна бути вище  $2 \times 22000 = 44000$  Гц = 44 кГц. Тому високоякісний відцифрований звук заснований на частоті дискретизації 44100 Гц. Частота нижче цього значення приводить до викривлень, а більша частота дискретизації не дасть суттєвого покращення звуку.

Система телефонії, споконвічно розроблена для переговорів, але не для цифрових комунікацій, відцифровує звук із частотою всього в 8 кГц. Отже будь-який звук із частотою вище 4 кГц буде спотворюватися при передачі по телефону. З цієї причини буває важко розрізнити по телефону звуки "с" і "ф". Взагалі потрібно відзначити, що частотний діапазон людського голосу лежить в інтервалі від 500 Гц до 2 – 4 кГц.

### **3.3. Імпульсна модуляція**

Крім чисто теоретичної цінності, теорема відліків має ряд прикладних застосувань, наприклад у системах з імпульсною модуляцією, у цифровій обробці даних. Однією з властивостей систем з імпульсною модуляцією є



те, що вони дозволяють передавати одночасно кілька незалежних сигналів по одному каналу з часовим ущільненням. У системах з фазо-імпульсною модуляцією (ФІМ) амплітуда вибірки кодується положенням кожного імпульсу відносно рівномірної часової сітки (рис. 3.4). Такі системи за інших рівних умов забезпечують більш високі якісні показники (наприклад, краще відношення сигнал/перешкода або більшу дальність передачі).

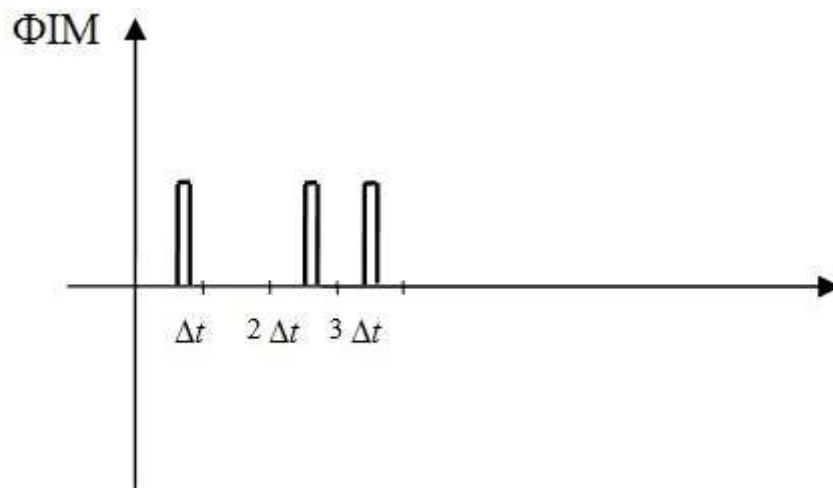


Рис. 3.4. ФІМ-сигнал

Такі ж переваги має імпульсно-кодова модуляція (ІКМ), результат якої показаний на рис. 3.5.

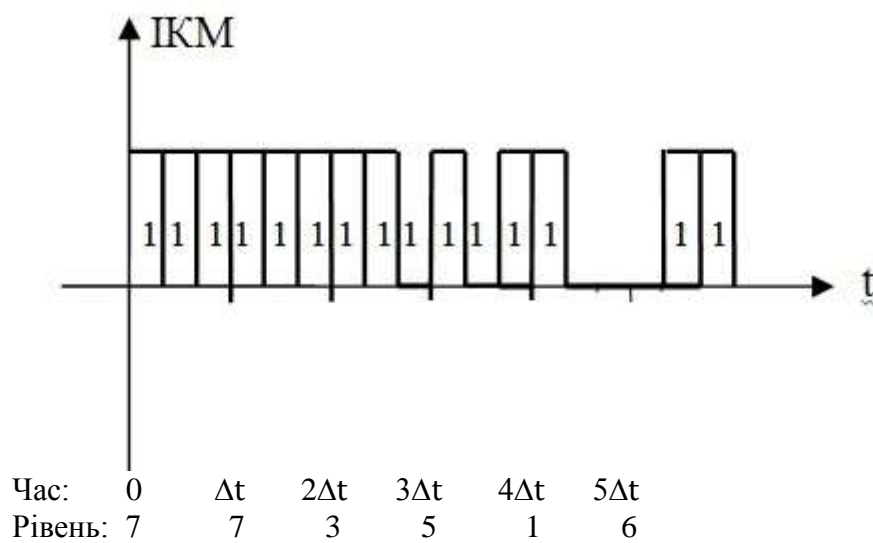


Рис. 3.5. ІКМ-сигнал

У ІКМ кожне значення з вибірки відліків спочатку квантується, або, інакше кажучи, замінюється номером найближчого з обраних рівнів. Кількість рівнів обирається як  $2^m$ , де  $m$  – ціле (від 0 до  $2^m-1$ ). Кожному номеру рівня відповідає сигнал певної форми тривалістю  $\Delta t = 1/2f_B$  секунд (на рис. 3.5 обрано  $m = 3$ , тобто у кожному інтервалі  $\Delta t$  може бути 3 імпульси). Зазвичай сигнал передається послідовністю одиниць і нулів, або позитивних і негативних імпульсів, що представляють номер рівня у двійковому вигляді. Як і ФІМ, ІКМ забезпечує підвищену якість за рахунок розширення смуги. На практиці, найбільшу ефективність виявляє саме цей метод (англійською, РСМ або Pulse-Code Modulation).

Квантування залежить від розміру відліку; кожен відлік – це число, але наскільки може бути велика розрядність числа? На практиці відліки складаються з 8 або 16 біт, але високоякісні звукові карти персональних комп'ютерів допускають використання 32 біт і вище. Припустимо, що найбільша напруга сигналу дорівнює 1 В, тоді при розрядності відліку в 8 біт можна буде розрізнити напругу із кроком в  $1/256$  ( $256 = 2^8$ ), що приблизно становить 4 мВ (0,004 В). Це означає, що значення сигналу з рівнем до 4 мВ будуть перетворені в нульові відліки й загублені. При 16 бітних відліках можливо розрізнити напруги, починаючи з  $1/2^{16} = 1/65536 \approx 15$  мкВ. Таким чином, не тільки крок дискретизації, але й розрядність відліків впливають на точність подання сигналу.

### **3.4. Функція передачі цифрової системи**

Дискретні сигнали звичайно відображаються послідовністю значень, що з'являються через постійні інтервали часу. Наприклад, східчаста послідовність  $1(n)$  визначається таким чином:

$$1(n) = \begin{cases} 1 & \text{для } n \geq 0 \\ 0 & \text{для } n < 0 \end{cases}, \quad (3.1)$$

де  $n$  – ціле. Така послідовність відповідає одиночній сходинці для аналогових сигналів. Дельта-послідовність визначається виразом:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{для } n = 0 \\ 0 & \text{для } n \neq 0 \end{cases}. \quad (3.2)$$

Ця послідовність відповідає імпульсній функції в аналоговій області. Зміщенню послідовності на  $k$  інтервалів відповідає

$$\delta(n - k) = \begin{cases} 1 & \text{для } n = k \\ 0 & \text{для } n \neq k \end{cases}. \quad (3.3)$$

Будь-яка послідовність імпульсів може бути записана через  $\delta(n - k)$

$$g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)\delta(n - k). \quad (3.4)$$

Розглянемо лінійну систему [4, 8], на яку діє дискретний сигнал  $g(n)$

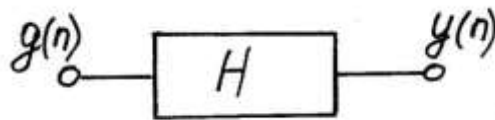


Рис. 3.6. Лінійна система

На виході системи маємо:

$$y(n) = H[g(n)] = H[\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)\delta(n - k)], \quad (3.5)$$

а з урахуванням її лінійності (суперпозиція):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)H[\delta(n - k)]. \quad (3.6)$$

Нехай  $h(n)$  – реакція системи на послідовність  $\delta(n)$ . Для системи, що не залежить від зсуву на  $k$  інтервалів

$$h(n - k) = H[\delta(n - k)]. \quad (3.7)$$

Отже

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)h(n - k). \quad (3.8)$$

Підставляючи  $k = n - m$  у рівняння (3.8), одержимо

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(n - m)h(m). \quad (3.9)$$

Заміна одного індексу  $m$  на інший  $k$  не змінить рівняння. Тому маємо

властивість згортки в дискретному вигляді:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(n-k)h(k) . \quad (3.10)$$

Реакція системи на деякому кроці  $n$  може залежати від вхідного впливу як на тому ж кроці  $n$ , так і на попередніх кроках, а також від значень самої реакції на ряді попередніх кроків. Тому в загальному випадку лінійна система описується різницеvim рівнянням:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k y(n-k) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k g(n-k) = 0 . \quad (3.11)$$

Розглянемо поведінку дискретної системи в частотній області. У цьому випадку вхідним впливом є синусоїдальний сигнал, який ми представляли дійсною частиною комплексної функції  $g(t)$ , зображеної на комплексній площині:

$$\cos \omega t \rightarrow g(t) = e^{j\omega t} . \quad (3.12)$$

Якщо зробити вибірку сигналу  $g(t)$  з інтервалом  $\Delta t = T$ , то отримаємо дискретний сигнал

$$g(nT) = e^{j\omega nT} . \quad (3.13)$$

Підставимо цей сигнал у вираз (3.10):

$$y(nT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)e^{j\omega T(n-k)} = e^{j\omega nT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)e^{-j\omega kT} \quad (3.14)$$

або

$$y(nT) = g(nT) \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)e^{-j\omega kT} . \quad (3.15)$$

Звідси передаточна функція (функція передачі) в частотній області

$$H[e^{j\omega T}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(kT)e^{-j\omega kT} . \quad (3.16)$$

Зазвичай вважають, що  $T = 1$ . Функція  $H[e^{j\omega}]$  є періодичною функцією частоти  $\omega$ , тому що  $e^{j\omega} = e^{j(\omega+2m\pi)}$ , де  $m$  – ціле, тобто частотна характеристика є періодичною функцією частоти. Отже, функцію передачі дискретної системи можна описати дискретним рядом Фур'є (ДРФ)

$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k} \\ h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega k} d\omega \end{cases} . \quad (3.17)$$

Аналогічно можна отримати вираз ДРФ для періодичної послідовності  $g(k)$ :

$$\begin{cases} A(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)e^{-j\omega k} \\ g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega})e^{j\omega k} d\omega \end{cases} \quad (3.18)$$

Порівняємо з рядом Фур'є для аналогового періодичного сигналу, який має дискретний спектр:

$$\begin{cases} f(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q e^{jq\omega_1 t} \\ A_q = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jq\omega_1 t} dt \end{cases} \quad (3.19)$$

Можна зробити висновок, що взаємна заміна часового і частотного вимірів дає схожі з точки зору обчислень вирази (3.18), (3.19). Якщо сигнал  $g(k)$  подається на вхід дискретної системи з функцією передачі  $H(e^{j\omega})$ , то реакцію системи у частотному вимірі можна представити у вигляді:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})A(e^{j\omega}), \quad (3.20)$$

де  $A(e^{j\omega})$  – спектральна характеристика дискретного сигналу  $g(k)$ .

### 3.5. Дискретне перетворення Фур'є (ДПФ)

При визначенні ДПФ вихідним є вираз ДРФ [4]:

$$A(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},$$

де 
$$g(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega, \quad (3.21)$$

в якому послідовність відліків  $g(n)$  представлена як один період періодичного сигналу  $f(n)$ . Також введена дискретна змінна  $\frac{2\pi}{N}k$ , що відображає значення кругової частоти  $\omega$ . Оскільки при розкладанні сигналу  $f(n)$  у ряд Фур'є виходить тільки  $N$  різних комплексних експонент  $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$  (значення повторюються), виявилось можливим замінити суму в

межах від  $-\infty$  до  $\infty$  сумою у межах від 0 до  $N - 1$ .

Таким чином, якщо  $g(n)$ ,  $n = 0, 1, \dots, N - 1$  є послідовністю кінцевих дійсних або комплексних чисел, то дискретне перетворення Фур'є цієї послідовності визначається як операція над послідовністю дискретних величин кінцевої тривалості [9]:

$$A(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} g(n) W^{kn}, \quad (3.22)$$

де  $W = e^{-j2\pi/N}$ ;  $j = \sqrt{-1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Експоненціальні функції  $W^{kn}$  є ортогональними, тобто тими, що задовольняють умові

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{kn} W^{-ln} = \begin{cases} N, & \text{якщо } (k - l) \text{ дорівнює нулю} \\ & \text{або цілому кратному } N; \\ 0 & \text{у інших випадках.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Використовуючи визначення  $A(k)$ , запишемо

$$\sum_{k=0}^{N-1} A(k) W^{-kn} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-kn} [g(0) + g(1)W^k + \dots + g(n)W^{kn} + \dots + g(N-1)W^{k(N-1)}].$$

Умова ортогональності дозволяє визначити зворотне дискретне перетворення Фур'є (ЗДПФ) наступним чином:

$$g(n) = \sum_{k=0}^{N-1} A(k) W^{-kn} \quad (3.24)$$

для  $n = 0, 1, \dots, N - 1$ .

Оскільки вирази для  $A(k)$  і  $g(n)$  становлять пару перетворень, то подання часової послідовності  $g(n)$  через експоненціальні функції  $W^{kn}$  є єдиним. При інших значеннях  $k$  і  $n$  вважається відповідно

$$A(k) = 0 \text{ і } g(n) = 0.$$

Для правильного користування формулами ДПФ і ЗДПФ потрібно враховувати, за яких умов їх застосування є правомірним. При виведенні формул вважається, що кожна з послідовностей  $g(n)$  кінцевої тривалості являє собою один період відповідної періодично повторюваної послідовності  $f(n)$ , для якої можуть бути використані формули розкладу

функції в ряд Фур'є.

### Приклад

Застосуємо ДПФ для отримання спектру дискретного сигналу  $g(n)$ .  
Нехай цей сигнал представлений чотирма відліками ( $N = 4$ ):

$$g(0) = 1; \quad g(1) = 1; \quad g(2) = -1; \quad g(3) = -1.$$

$$A(0) = \frac{1}{4} [g(0)W^0 + g(1)W^0 + g(2)W^0 + g(3)W^0] = \frac{1}{4} [1 + 1 - 1 - 1] = 0;$$

$$W^0 = 1;$$

$$\begin{aligned} A(1) &= \frac{1}{4} [g(0)W^0 + g(1)W^1 + g(2)W^2 + g(3)W^3] = \frac{1}{4} [1 - j + 1 - j] = \\ &= \frac{2}{4} - \frac{2}{4}j; \end{aligned}$$

$$W^1 = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = -j; \quad W^2 = e^{-j\pi} = -1; \quad W^3 = e^{-j\frac{3\pi}{2}} = j;$$

$$A(2) = \frac{1}{4} [g(0)W^0 + g(1)W^2 + g(2)W^4 + g(3)W^6] = \frac{1}{4} [1 - 1 - 1 + 1] = 0;$$

$$W^4 = e^{-j2\pi} = 1; \quad W^6 = e^{-j3\pi} = -1;$$

$$\begin{aligned} A(3) &= \frac{1}{4} [g(0)W^0 + g(1)W^3 + g(2)W^6 + g(3)W^9] = \frac{1}{4} [1 + j + 1 + j] = \\ &= \frac{2}{4} + \frac{2}{4}j; \end{aligned}$$

$$W^9 = e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j.$$

Таким чином, спектр амплітуд складається з наступних величин (з виразу (2.35)):

$$|A(0)| = 0; \quad |A(1)| = \sqrt{\frac{2}{4}}; \quad |A(2)| = 0; \quad |A(3)| = \sqrt{\frac{2}{4}},$$

а спектр фаз – з величин (за допомогою (2.36)):

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi(1) = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi(2) = 0; \quad \varphi(3) = -\frac{\pi}{4}.$$

Якщо припустити, що відліки  $g(n)$  використовуються у якості дискретних

значень прямокутного коливання  $f(t)$ , зображеного на рис. 2.12 ( $A=1$ ), впродовж одного періоду, ми не отримаємо очікуваного спадаючого амплітудного спектру, оскільки кількість відліків не є достатньою для виконання умов теореми відліків.



## 4. ПРАКТИКУМ. СИГНАЛИ В ORCAD

### 4.1. Основні аспекти роботи з редактором **Stimulus Editor**

Система проектування **OrCAD** надає користувачеві можливість щодо створення сигналів за допомогою редактора **Stimulus Editor**.

**Stimulus Editor** дозволяє створювати та перевіряти сигнали для використання в аналізі в часовій області. Редактор надає можливість створювати та редагувати наступні сигнали:

- джерел напруги;
- джерел струму;
- цифрові сигнали.

Меню редактора дозволяє задавати необхідні параметри сигналів такі як:

- час наростання переднього фронту;
- час спадання заднього фронту;
- період для періодичних сигналів;
- час між інтервалами для складного цифрового сигналу.

Всі зміни того чи іншого параметру сигналу користувач може спостерігати за допомогою графічного представлення сигналу. Редактор **Stimulus Editor** дозволяє створювати аналогові і цифрові сигнали, що виводяться в графічному вигляді на екран і записуються у файл (з розширенням імені \*.stl) для підключення зовнішніх сигналів до модельованої схеми. Кусково-лінійні аналогові сигнали і цифрові сигнали редагуються безпосередньо на екрані за допомогою курсору миші. Кожному сигналові привласнюється унікальне ім'я.

Програма **Stimulus Editor** викликається автономно, або за допомогою команди **Edit→PSpice Stimulus** з меню редактора **Capture** у режимі

редагування генераторів сигналу. Генератори сигналів зображуються символами **ISTIM**, **VSTIM**, **DSTM**, **DigClock**, **FileStim** (Рис. 4.1) з бібліотек Source.olb, Sourcestm.olb.

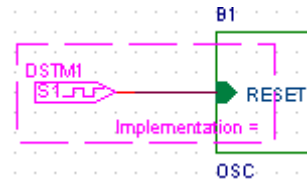


Рис. 4.1. Генератор сигналу DSTM – цифровий сигнал

Обговоримо основні фази роботи з редактором сигналів **Stimulus Editor**.

Спочатку по команді **File->New** створюється новий файл бібліотеки сигналів. Новий сигнал створюється за допомогою команди **Stimulus->New ([Alt] - N)**. На панелі, що відкрилася, (рис. 4.2) вибирається тип сигналу, а в рядку **Name** вказується ім'я сигналу.

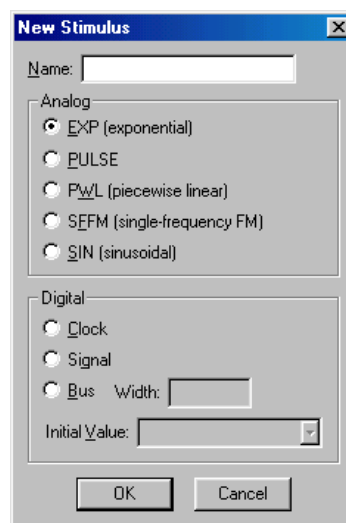


Рис. 4.2. Завдання імені та типу сигналу

У випадку, коли виклик здійснено з графічного редактора **Capture**, за умовчуванням створиться нове вікно редагування з ім'ям проекту, і автоматично відкривається діалогове вікно **New Stimulus**.

## 4.2. Аналогові сигнали

Підтримуються джерела аналогових сигналів наступних типів:

- EXP (exponential) – сигнал експоненціальної форми;
- PULSE – імпульсний сигнал;
- PWL (piecewise linear) – кусково-лінійний сигнал;
- SIN – синусоїдальний сигнал;
- SFFM (single-frequency FM) – гармонійний сигнал із синусоїдальною частотною модуляцією.

Після вибору необхідного типу сигналу, завдання його імені, наступне діалогове вікно пропонує ввести параметри сигналу. Параметри сигналу залежать від типу сигналу.

### 4.2.1. Експоненціальний сигнал

Вікно введення параметрів експоненціального типу сигналу (**EXP**) представлено на рис. 4.3.

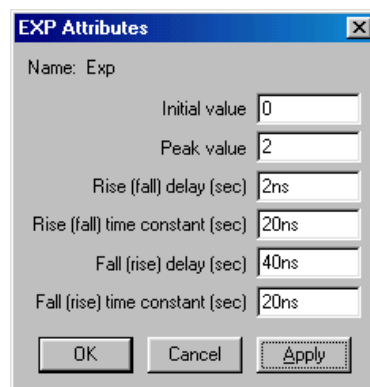


Рис. 4.3. Параметри експоненціального сигналу

Експоненціальна функція задається списком параметрів:

- **Initial value** – початкове значення ( $y_1$ );

- **Peak value** – максимальне значення ( $y_2$ );
- **Rise (fall) delay (sec)** – початок переднього фронту ( $t_d$ );
- **Rise (fall) time constant (sec)** – постійна часу переднього фронту ( $t_{cr}$ );
- **Fail (rise) delay (sec)** – початок заднього фронту ( $t_r$ );
- **Fail (rise) time constant (sec)** – постійна часу заднього фронту ( $t_{fr}$ ).

Функція описується виразом:

$$y(t) = \begin{cases} y_1 & \text{при } 0 < t < t_d; \\ y_1 + (y_2 - y_1)\{1 - \exp[-(t - t_d)/t_{cr}]\} & \text{при } t_d < t < t_r; \\ y_1 + (y_2 - y_1)\{1 - \exp[-(t - t_d)/t_{cr}] - 1 + \exp[-(t - t_r)/t_{fr}]\} & \text{при } t_r < t < \text{STOP}. \end{cases}$$

Завдання параметрів, як зазначено на рис 4.3, дозволяє отримати експоненціальний сигнал, представлений на рис. 4.4.

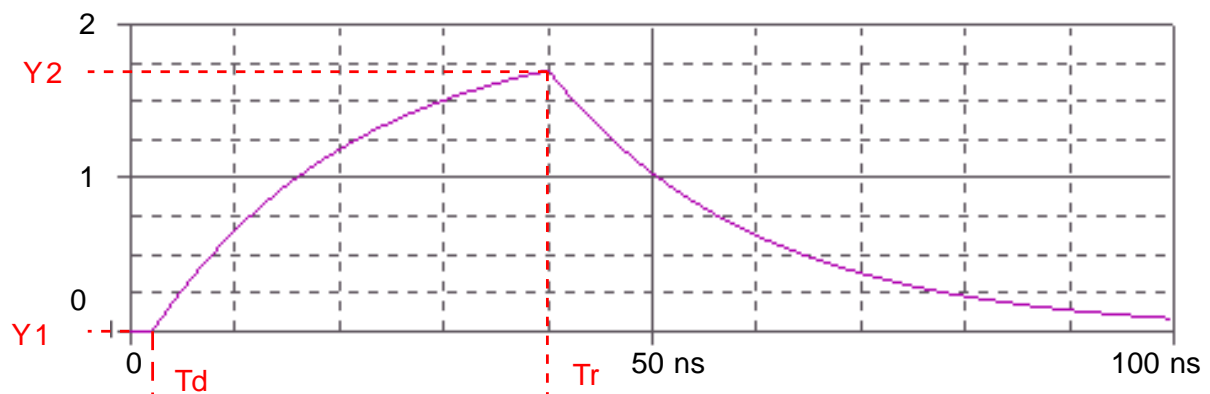


Рис. 4.4. Приклад побудови експоненціального сигналу

#### 4.2.2. Імпульсний сигнал

Доступні параметри імпульсного сигналу представлені на рис. 4.5.

**PULSE Attributes**

Name: pulse

Initial value: 0.1

Pulse value: 2

Delay (sec): 2ns

Rise time (sec): 10ns

Fall time (sec): 5ns

Pulse width (sec): 40ns

Period (sec): 100ns

OK Cancel Apply

Рис. 4.5. Параметри імпульсного сигналу **PULSE**

Імпульсна функція задається списком параметрів:

- **Initial value** – початкове значення ( $y_1$ );
- **Pulse value** – максимальне значення ( $y_2$ );
- **Delay (sec)** – початок переднього фронту ( $T_d$ ), с;
- **Rise time (sec)** – тривалість переднього фронту ( $T_r$ ), с;
- **Fall time (sec)** – тривалість заднього фронту ( $T_f$ ), с;
- **Pulse width (sec)** – ширина плоскої частини імпульсу ( $t$ ), с;
- **Period (sec)** – період повторення ( $T$ ), с.

Завдання параметрів, як зазначено на рис.4.5, дозволяє отримати імпульсний сигнал, представлений на рис. 4.6.

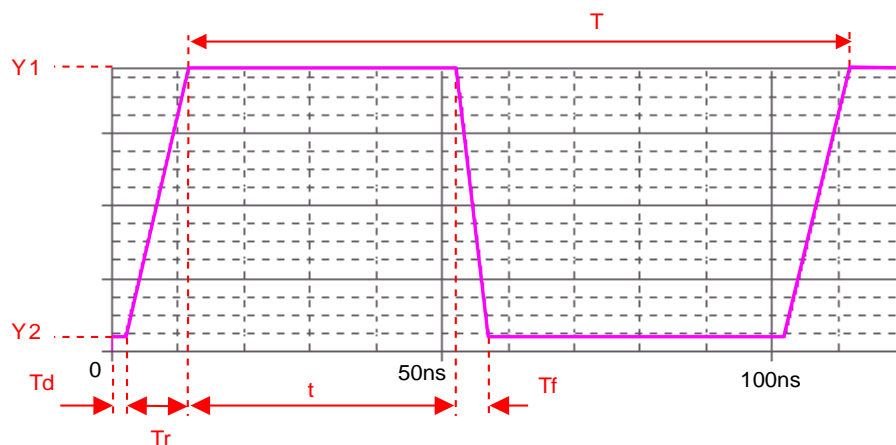


Рис. 4.6. Приклад побудови імпульсного сигналу

### 4.2.3. Кусково-лінійний сигнал

При виборі опції **PWL** у діалоговому вікні **New Stimulus**, редактор сигналів переходить відразу в режим редагування і «озброює» користувача курсором у вигляді «олівця». За допомогою цього інструмента користувач можете вказати необхідні точки для побудови сигналу визначеної форми (рис. 4.7).

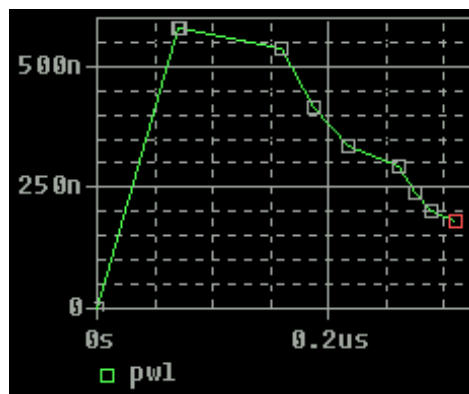


Рис. 4.7. Параметри імпульсного сигналу **PWL**

Білими квадратами зображуються введені точки. Червоним кольором зображується поточна точка. Положення введених точок можна корегувати, натиснувши ліву кнопку миші («олівця») на одному з білих квадратиків і, не відпускаючи, переміщати «олівець», що дозволяє отримати нове положення виділеної точки.

За замовчуванням перша точка будь-якого сигналу знаходиться в координатах 0,0 (по часовій шкалі і по шкалі амплітуди). Діапазон виведених значень графіків підбудовується автоматично для найбільш точного і повного показу. Для зміни діапазону результату необхідно виконати команду **Plot→Axis Settings** або натиснути на відповідну кнопку панелі інструментів



У діалоговому вікні **Axis Settings** (рис. 4.8) доступні наступні

параметри:

- у групі **Displayed Data Range** – діапазон даних, що задається:  
**Time** – по осі часу;  
**Y Axis** – по осі амплітуди сигналу;
- у групі **Extent of the Scrolling Region** – задати або автоматично (**Auto Range**), або визначити самим (**User Defined**) область скролювання.
- у групі **Minimum Resolution** – точність, з якою відтворюється графік (окремо по осі X і по осі Y).

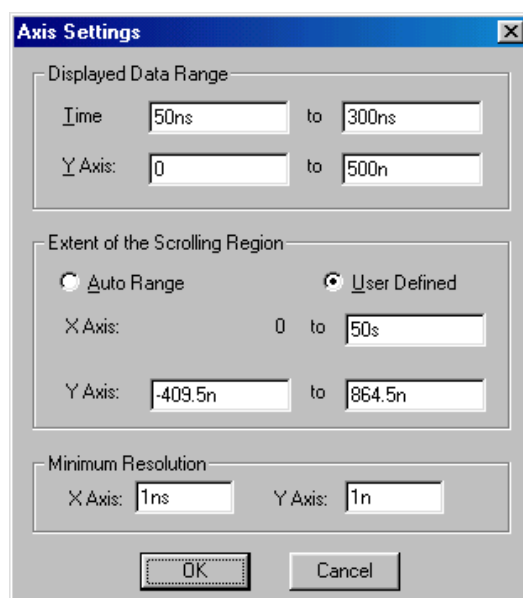


Рис. 4.8. Діалогове вікно **Axis Settings**

#### 4.2.4. Синусоїдальний сигнал

Вікно введення параметрів синусоїдального типу сигналу (**SIN**) представлено на рис. 4.9.

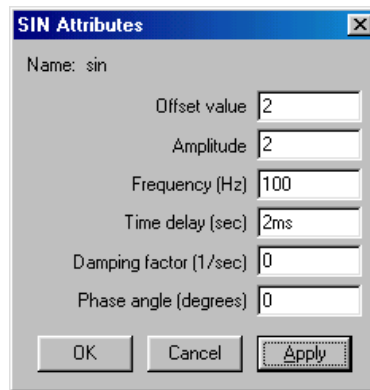


Рис. 4.9. Параметри синусоїдального сигналу

Синусоїдальна функція задається наступним списком параметрів:

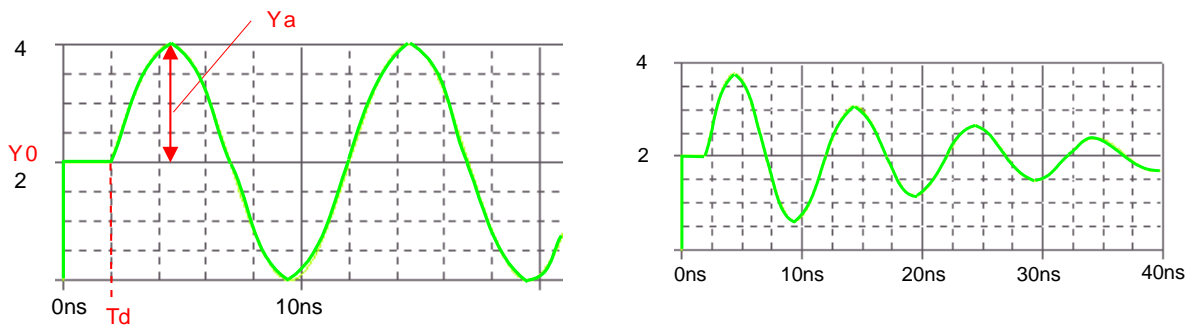
- **Offset value** – постійна складова ( $y_0$ );
- **Amplitude** – амплітуда ( $y_a$ );
- **Frequency (Hz)** – частота ( $f$ ), Гц;
- **Time delay (sec)** – затримка ( $T_d$ ), с;
- **Damping factor (1/sec)** - коефіцієнт загасання ( $d_f$ ), 1/с;
- **Phase angle (degrees)** – початкова фаза ( $\varphi$ ), град.

Функція описується виразом:

$$y(t) = \begin{cases} y_0 + y_a \cdot \sin(2\pi\varphi/360) & \text{при } 0 \leq t \leq T_d \\ y_0 + y_a \cdot \exp[-(t - T_d)d_f] \cdot \sin[2\pi f(t - T_d) + 2\pi\varphi/360] & \text{при } t \geq T_d. \end{cases}$$

Завдання параметрів, як зазначено на рис 4.9, дозволяє отримати синусоїдальний сигнал, представлений на рис. 4.10.





а) коефіцієнт затухання  $d_f = 0$

б) коефіцієнт затухання  $d_f = 50$

Рис. 4.10. Приклад побудови сигналу синусоїдальної форми

#### 4.2.5. Синусоїдальний сигнал з частотною модуляцією

Вікно введення параметрів синусоїдального типу сигналу (**SFFM**) представлено на рис. 4.11.

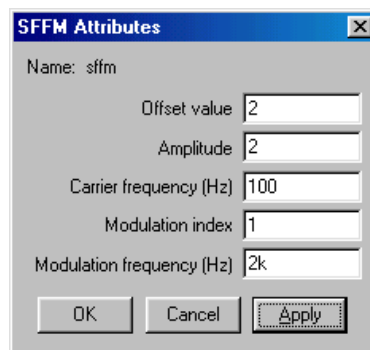


Рис. 4.11. Параметри синусоїдального сигналу з частотною модуляцією

Синусоїдальна функція сигналу з частотною модуляцією задається наступним списком параметрів:

- **Offset value** – постійна складова ( $y_0$ );
- **Amplitude** – амплітуда ( $y_a$ );
- **Carrier frequency (Hz)** – частота несучої ( $f_c$ ), Гц;
- **Modulation index (sec)** – індекс частотної модуляції ( $m$ ), с;

- **Modulation frequency** (Hz) – частота модуляції ( $f_m$ ), Гц.

Функція описується виразом:

$$y(t) = y_0 + y_a \cdot \sin[2\pi f_c t + m \cdot \sin(2\pi f_m t)] .$$

При завданні аналогових сигналів користувач має можливість також проставляти свої мітки по команді **Tools→Label**. При цьому стають доступні наступні види міток:

**Text** – введення тексту. Зміст тексту вводиться в спеціальному вікні за запрошенням "**Enter text label**" і, після натискання **Enter**, переноситься в потрібне місце на полі графіка за допомогою миші або функціональних клавіш.

**Line** – проведення відрізка лінії, що з'єднує дві точки, за запрошенням програми в рядку повідомлень "**Place the cursor at the start of the line**". При цьому точка вказується натисканням кнопки миші.

**Poly-line** – проведення лінійно-ламаних ліній, заданих точками зламів. Введення таких об'єктів завершується натисканням **Esc**, і вони при виконанні команд переміщення і видалення сприймаються як одне ціле.

**Arrow** – нанесення на графік відрізка лінії зі стрілкою на кінці. Точка прив'язки сполучена з початком відрізка, а стрілка переміщується разом з курсором до моменту фіксації.

**Box** – нанесення прямокутника по заданих точках протилежних кутів.

**Circle** – нанесення кола по заданому центру у довільній точці на колі.

**Ellipse** – нанесення еліпса з указівкою його кута нахилу, точки центра і довжини великої і малої півосей. По запрошенню програми в командному рядку вводиться значення кута нахилу еліпса в градусах:

**Enter the inclination of the ellipse: 0**

Точкою прив'язки еліпса служить його центр, що відмічається за запрошенням **Place the cursor at the center of the ellipse. Stretch the ellipse as necessary**. В результаті переміщення курсору в двох напрямках еліпс приймає необхідні розміри.

### 4.3. Цифрові сигнали

Цифрові сигнали мають вигляд періодичних сигналів і сигналів довільної форми. В програмі **Stimulus Editor** передбачені наступні цифрові сигнали (**Digital**):

- одиночні сигнали (**Signal**);
- синхроімпульси (**Clock**);
- шина (**Bus**).

#### 4.3.1. Одиночний сигнал

**Signal** – часова діаграма логічних станів, що задаються користувачем за допомогою миші. Після вибору цього сигналу на екрані відображається поле графіка, позначене ліворуч ім'ям сигналу червоного кольору (ознака активності сигналу і його доступності для редагування). Курсор приймає форму олівця, а клацнувши мишею, відзначають крапки переходу в новий стан. Моменти часу зміни логічного стану задаються по команді **Edit→Attributes [Ctrl] – T**, або натисканням на відповідну кнопку



Редагувати параметри цифрового сигналу **Signal** можливо за допомогою діалогового вікна **Edit Digital Transition** (рис. 4.12).

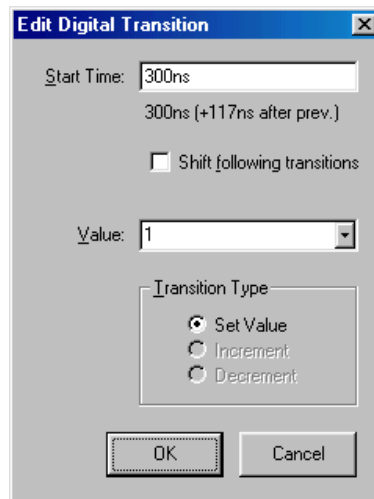


Рис. 4.12. Вікно редагування параметрів цифрового сигналу **Signal**

Доступні параметри сигналу:

**Start Time** – місце розташування маркера (в дужках зазначено час, на який відрізняється маркер від попереднього, тобто фактично тривалість поточного стану);

**Shift following transitions** – дана опція доступна при вставці перехідного стану (не додавання). При включеній опції, наступні стани переміщуються, при цьому тривалість зберігається.

**Value** – у списку, що випадає, виберіть стан переходу:

- **0/1** – завдання логічних нуля або одиниці;
- **X** – невизначений стан сигналу;
- **Z** – стан високого імпедансу.

Для виходу з режиму редагування використовують кнопку [**Esc**], курсор приймає форму стрілки. У цьому режимі можливо переглянути всі проставлені переходи. Для цього необхідно виділити сигнал як показано на рис. 4.13. Після цього є можливість вибрати конкретну мітку і відредагувати її часові показники і стан.

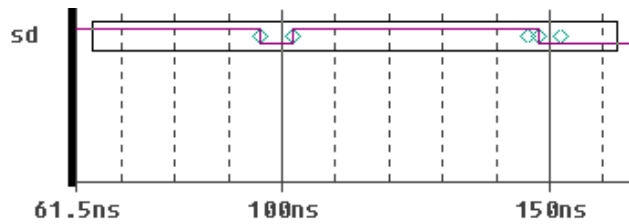


Рис. 4.13. Відмітки виділеної частини сигналу

Моменти часу поточного положення курсору вказуються в лівій частині нижнього рядка екрана. При цьому для зручності завдання моментів часу в меню **Plot** бажано встановити необхідну дискретність зміни часу по команді **Axis Settings/Minimum Resolution**. Звернемо увагу, що в даному режимі точки зміни станів цифрових сигналів, позначені мітками у вигляді ромбів, можна переміщати за допомогою курсору і видаляти натисканням клавіші **[Del]**.

#### 4.3.2. Синхроімпульс

**Clock** – сигнал синхронізації. Даний тип сигналу можливо задати за допомогою двох специфікацій:

1. Частоти та коефіцієнта заповнення (**Frequency and Duty Cycle**).  
Задана специфікація (рис. 4.14) характеризується наступними параметрами:

- частотою повторення (**Frequency**);
- коефіцієнтом заповнення (**Duty Cycle**);
- значенням початкового стану (**Initial Value**);
- затримкою (**Time Delay**).

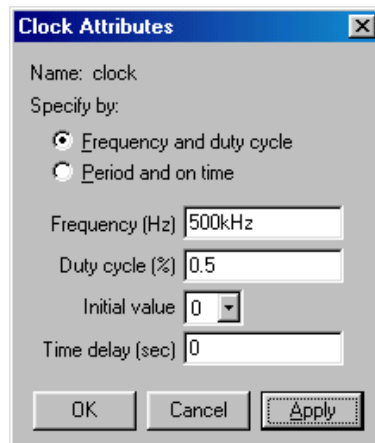


Рис. 4.14. Завдання параметрів сигналу по частоті та коефіцієнту заповнення

2. Періоду і тривалості сигналу (**Period and on time**). Дана специфікація (рис. 4.15) характеризується наступними параметрами:

- періодом повторень (**Period**);
- тривалістю імпульсу (**On time**);
- значенням початкового стану (**Initial Value**);
- затримкою (**Time Delay**).

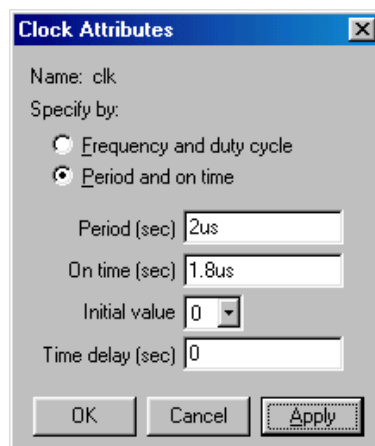
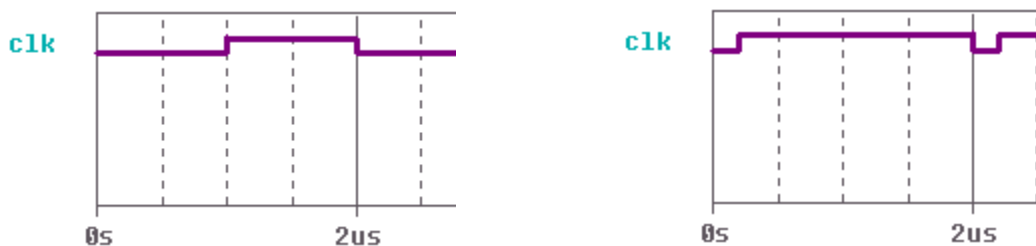


Рис. 4.15. Завдання параметрів сигналу за допомогою періоду та тривалості імпульсу

Приклади побудованих сигналів представлено на рис. 4.16.



- а) задано частотою та коефіцієнтом заповнення      б) задано періодом та тривалістю імпульсу

Рис. 4.16. Приклади сигналів синхронізації

### 4.3.3. Шина

**Bus** – багаторозрядні сигнали (шини). Задаються по тому ж принципу, що **Signal**, тільки додатково потрібно задати розрядність шини (**Bus Width**).

Моменти зміни логічного стану задаються по команді **Edit→Attributes** ([Ctrl]-T). В діалоговому вікні **Edit Digital Transition**, в полі **Transition Type** доступні наступні типи відліків:

- **Increment** – збільшення на 1;
- **Decrement** – зменшення на 1.

При виборі опції **Increment** (**Decrement**) задається збільшення (зменшення) зміни стану і курсором послідовно відзначаються моменти часу збільшення (зменшення) коду стану багаторозрядного сигналу.

Команда **Edit→Attributes** ([Ctrl]-T) доступна як для редагування параметрів поточного відліку (червоний квадратик на зображенні сигналу), так і для редагування параметрів сигналу в цілому. Для редагування параметрів сигналу в цілому необхідно клацнути лівою кнопкою миші на імені сигналу, при цьому колір сигналу зміниться на червоний. В діалоговому вікні **Digital Stimulus Attributes** (рис. 4.17) для редагування

параметрів доступні наступні опції:

- **Bus Width** – розрядність шини;
- **Display Radix** – система лічення, в якій відображаються значення відліків:

**Binary** – двійкова;

**Decimal** – десятична;

**Hexadecimal** – шістнадцятирічна;

**Octal** – восьмирічна.

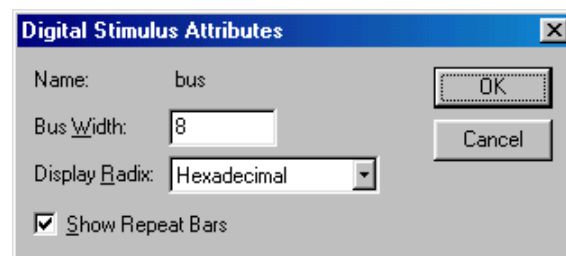


Рис. 4.17. Завдання параметрів сигналу **Bus**



## ЛІТЕРАТУРА

1. Хабловски И., Скулимовски В. Электроника в вопросах и ответах/ Под ред. В.И. Котикова. – М.: Радио и связь, 1984. – 304 с.
2. Основы теории электрических цепей и электроники: Учебник для вузов/ В.П. Бакалов, А.Н. Игнатов, Б.И. Крук. – М.: Радио и связь, 1989. – 528 с.
3. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники: Учебник для вузов. Том 1. – 3-е изд., перераб. и дополнен. – Л.: Энергоиздат, 1981. – 536 с.
4. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. – М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 496 с.
5. Калниболотский Ю.М., Солодовник А.И., Бондаренко В.Н. К вопросу синтеза оптимального квазисинусоидального сигнала. – Электронное моделирование, 1980, № 2, с. 43 – 48.
6. Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем. – 2-е изд., перераб. и дополнен. – М.: Сов. Радио, 1976. – 608 с.
7. Бондаренко В.М., Бондаренко Н.О. Основи радіоелектроніки: Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних робіт для студентів напряму підготовки 6.050902 «Радіоелектронні апарати». – К.: «Аверс», 2008. – 67 с.
8. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. – М.: Радио и связь, 1988. – 560 с.
9. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов/ Под ред. И.Б. Фоменко. – М.: Связь, 1980. 248 с.
10. Манаев Е.И. Основы радиоэлектроники. – 3-е изд., перераб. и дополнен. – М.: Радио и связь, 1990. – 512 с.

- 11.Кеон Дж. OrCAD Pspice. Анализ электрических цепей. М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2008. – 640 с.
- 12.Хайнеман Р. PSPICE. Моделирование работы электронных схем. – М.: ДМК Пресс, 2002. – 336 с.
- 13.Бондаренко В.М., Губар В.Г. Моделювання електронних схем та систем. Розділ “Режими моделювання в OrCAD”. Навчальний посібник для студентів напряму підготовки 6.050902 “Радіоелектронні апарати”. Рекомендовано Методичною радою НТУУ “КПІ”, 2010. – 54 с.
- 14.Бондаренко В.М. Основи радіоелектроніки. Розділ «Основи теорії електронних схем». Навчальний посібник для студентів напряму підготовки 6.050902 “Радіоелектронні апарати”. Рекомендовано Методичною радою НТУУ “КПІ”, 2009. – 72 с.