Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Факультет інформатики та обчислювальної техніки
Кафедра обчислювальної техніки

Методи оптимізації та планування експерименту

Лабораторна робота №2

“ПРОВЕДЕННЯ ДВОФАКТОРНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ З ВИКОРИСТАННЯМ ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ РЕГРЕСІЇ”

Виконав:
студент групи ІВ-83
Дровнін П. А.
Перевірив:
ас. Регіда П.Г.

Київ
2020 р.

Мета: провести двофакторний експеримент, перевірити однорідність дисперсії за критерієм Романовського, отримати коефіцієнти рівняння регресії, провести натуралізацію рівняння регресії.

Номер у списку: 10.

Варіант завдання: 310.

№$_{варіанта}$	x_1		x_2	
	min	max	min	max
310	-25	-5	10	60

1. Лістинг програми:

```
# Нехай довірча ймовірність буде 0.99

from random import randint
from math import sqrt


def get_r_kr(m):
    table_values = {2: 1.73, 6: 2.16, 8: 2.43, 10: 2.62, 12: 2.75, 15: 2.9, 20: 3.08}
    for i in range(len(table_values.keys())):
        if m == list(table_values.keys())[i]:
            return list(table_values.values())[i]
        if m > list(table_values.keys())[i]:
            less_than_m_key = list(table_values.keys())[i]
            less_than_m = list(table_values.values())[i]
            more_than_m_key = list(table_values.keys())[i + 1]
            more_than_m = list(table_values.values())[i + 1]
            return less_than_m + (more_than_m - less_than_m) * (m -
less_than_m_key) / (
                    more_than_m_key - less_than_m_key)


def determinant(matrix):
    return matrix[0][0] * matrix[1][1] * matrix[2][2] + matrix[0][1] * matrix[1][2] *
matrix[2][0] + matrix[0][2] * \
           matrix[1][0] * matrix[2][1] - matrix[0][2] * matrix[1][1] * matrix[2][0] -
matrix[0][1] * matrix[1][0] * \
           matrix[2][2] - matrix[0][0] * matrix[1][2] * matrix[2][1]
```

```
n_variant = 10
y_min = (20 - n_variant) * 10
y_max = (30 - n_variant) * 10
x1_min = -25
x1_max = -5
x2_min = 10
x2_max = 60
m = 5


def main():
    global m
    response_list1 = [randint(y_min, y_max) for i in range(m)]
    response_list2 = [randint(y_min, y_max) for j in range(m)]
    response_list3 = [randint(y_min, y_max) for k in range(m)]

    average1 = sum(response_list1) / len(response_list1)
    average2 = sum(response_list2) / len(response_list2)
    average3 = sum(response_list3) / len(response_list3)

    dispersion1 = sum((i - average1) ** 2 for i in response_list1) / 
len(response_list1)
    dispersion2 = sum((i - average2) ** 2 for i in response_list2) / 
len(response_list2)
    dispersion3 = sum((i - average3) ** 2 for i in response_list3) / 
len(response_list3)

    major_deviation = sqrt((4 * m - 4) / (m * m - 4 * m))

    f12 = dispersion1 / dispersion2 if dispersion1 >= dispersion2 else dispersion2 / 
dispersion1
    f23 = dispersion2 / dispersion3 if dispersion2 >= dispersion3 else dispersion3 / 
dispersion2
    f13 = dispersion1 / dispersion3 if dispersion1 >= dispersion3 else dispersion3 / 
dispersion1

    t12 = (m - 2) / m * f12
    t23 = (m - 2) / m * f23
    t13 = (m - 2) / m * f13

    r12 = abs(t12 - 1) / major_deviation
    r23 = abs(t23 - 1) / major_deviation
    r13 = abs(t13 - 1) / major_deviation
```

```
    r_kr = get_r_kr(m)

    print(f'{y_min=}')
    print(f'{y_max=}')

    print(f'\nЗначення відгуку в діапазоні [{y_min}-{y_max}]:')
    print(*response_list1, sep='\t')
    print(*response_list2, sep='\t')
    print(*response_list3, sep='\t')
    print('\nСереднє значення відгуку в кожній з точок плану:')
    print(average1)
    print(average2)
    print(average3)
    print('\nДисперсії для кожної точки планування:')
    print(f'{dispersion1:.3f}')
    print(f'{dispersion2:.3f}')
    print(f'{dispersion3:.3f}')
    print('\nОсновне відхилення:')
    print(f'{major_deviation:.3f}')
    print(f'\n{r12=:.3f}', '<' if r12 < r_kr else '>', f'{r_kr=:.3f}')
    print(f'\n{r23=:.3f}', '<' if r23 < r_kr else '>', f'{r_kr=:.3f}')
    print(f'\n{r13=:.3f}', '<' if r13 < r_kr else '>', f'{r_kr=:.3f}')

    if r12 < r_kr and r23 < r_kr and r13 < r_kr:
        print('\nОднорідність підтверджується з ймовірністю 0.99\n')

        normalized_x1_x2 = [
            [-1, -1],
            [-1, 1],
            [1, -1]
        ]

        mx_list = [sum(i) / len(i) for i in list(zip(normalized_x1_x2[0],
normalized_x1_x2[1], normalized_x1_x2[2]))]
        my = sum([average1, average2, average3]) / len([average1, average2,
average3])
        a1 = sum(i[0] ** 2 for i in normalized_x1_x2) / len(normalized_x1_x2)
        a2 = sum(i[0] * i[1] for i in normalized_x1_x2) / len(normalized_x1_x2)
        a3 = sum(i[1] ** 2 for i in normalized_x1_x2) / len(normalized_x1_x2)
        a11 = sum(
            normalized_x1_x2[i][0] * [average1, average2, average3][i] for i in
range(len(normalized_x1_x2))) / len(
            normalized_x1_x2)
        a22 = sum(
```

```
        normalized_x1_x2[i][1] * [average1, average2, average3][i] for i in
range(len(normalized_x1_x2))) / len(
        normalized_x1_x2)
    matrix_b = [
        [1, mx_list[0], mx_list[1]],
        [mx_list[0], a1, a2],
        [mx_list[1], a2, a3]
    ]
    matrix_b1 = [
        [my, mx_list[0], mx_list[1]],
        [a11, a1, a2],
        [a22, a2, a3]
    ]
    matrix_b2 = [
        [1, my, mx_list[1]],
        [mx_list[0], a11, a2],
        [mx_list[1], a22, a3]
    ]
    matrix_b3 = [
        [1, mx_list[0], my],
        [mx_list[0], a1, a11],
        [mx_list[1], a2, a22]
    ]
    b0 = determinant(matrix_b1) / determinant(matrix_b)
    b1 = determinant(matrix_b2) / determinant(matrix_b)
    b2 = determinant(matrix_b3) / determinant(matrix_b)

    print('\nРозрахунок нормованих коефіцієнтів рівняння регресії:')

    for i in normalized_x1_x2:
        print(
            f'y = b0 + b1 * x1 + b2 * x2 = {b0:.3f} + {b1:.3f} * {i[0]:2} + {b2:.3f} *
{i[1]:2}'
            f' = {b0 + b1 * i[0] + b2 * i[1]:.3f}')

    x10 = (x1_max + x1_min) / 2
    x20 = (x2_max + x2_min) / 2
    delta_x1 = (x1_max - x1_min) / 2
    delta_x2 = (x2_max - x2_min) / 2

    a_0 = b0 - b1 * (x10 / delta_x1) - b2 * (x20 / delta_x2)
    a_1 = b1 / delta_x1
    a_2 = b2 / delta_x2

    print('\nЗапишемо натуралізоване рівняння регресії:')
```

```
        print(
            f'y = a0 + a1 * x1 + a2 * x2 = {a_0:.3f} + {a_1:.3f} * {x1_min:3} + 
{a_2:.3f} * {x2_min:3}'
            f' = {a_0 + a_1 * x1_min + a_2 * x2_min:.3f}')
        print(
            f'y = a0 + a1 * x1 + a2 * x2 = {a_0:.3f} + {a_1:.3f} * {x1_min:3} + 
{a_2:.3f} * {x2_max:3}'
            f' = {a_0 + a_1 * x1_min + a_2 * x2_max:.3f}')
        print(
            f'y = a0 + a1 * x1 + a2 * x2 = {a_0:.3f} + {a_1:.3f} * {x1_max:3} + 
{a_2:.3f} * {x2_min:3}'
            f' = {a_0 + a_1 * x1_max + a_2 * x2_min:.3f}')

    else:
        print('\nОднорідність не підтвердилася, підвищуємо m на 1\n')
        m += 1
        main()


main()
```

Результати виконання роботи

y_min=100

y_max=200

Значення відгуку в діапазоні [100-200]:

119	118	110	109	107
156	112	179	186	147
151	173	190	145	120

Середнє значення відгуку в кожній з точок плану:

112.6

156.0

155.8

Дисперсії для кожної точки планування:

24.240

689.200

577.360

Основне відхилення:

1.789

r12=8.977 > r_kr=2.053

r23=0.159 < r_kr=2.053

r13=7.430 > r_kr=2.053

Однорідність не підтвердилася, підвищуємо m на 1 y_min=100

y_max=200

Значення відгуку в діапазоні [100-200]:

180	131	152	136	112	171
127	185	184	141	105	146
195	163	115	196	134	188

Середнє значення відгуку в кожній з точок плану:

147.0

148.0

165.16666666666666

Дисперсії для кожної точки планування:

548.667

834.667

975.806

Основне відхилення:

1.291

r12=0.011 < r_kr=2.160

r23=0.171 < r_kr=2.160

r13=0.144 < r_kr=2.160

Однорідність підтверджується з ймовірністю 0.99

Розрахунок нормованих коефіцієнтів рівняння регресії:

y = b0 + b1 * x1 + b2 * x2 = 156.583 + 9.083 * -1 + 0.500 * -1 = 147.000

y = b0 + b1 * x1 + b2 * x2 = 156.583 + 9.083 * -1 + 0.500 * 1 = 148.000

y = b0 + b1 * x1 + b2 * x2 = 156.583 + 9.083 * 1 + 0.500 * -1 = 165.167

Запишемо натуралізоване рівняння регресії:

y = a0 + a1 * x1 + a2 * x2 = 169.508 + 0.908 * -25 + 0.020 * 10 = 147.000

y = a0 + a1 * x1 + a2 * x2 = 169.508 + 0.908 * -25 + 0.020 * 60 = 148.000

y = a0 + a1 * x1 + a2 * x2 = 169.508 + 0.908 * -5 + 0.020 * 10 = 165.167

Теоретичні відомості

- Що таке регресійні поліноми і де вони застосовуються?

В теорії планування експерименту найважливішою частиною є оцінка результатів вимірів. При цьому використовують апроксимуючі поліноми, за допомогою яких ми можемо описати нашу функцію. В ТПЕ ці поліноми отримали спеціальну назву - регресійні поліноми, а їх знаходження та аналіз - регресійний аналіз. Найчастіше в якості базисної функції використовується ряд Тейлора, який має скінченну кількість членів.

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1!}F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}F''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^N}{N!}F^{(N)}(a)$$

Але при використанні апроксимуючого полінома Тейлора в його початковому вигляді виникає ряд проблем, пов'язаних із знаходженням похідних, оскільки нам невідома функція, а відомий лише ряд її значень. Тому ми замінюємо поліном Тейлора аналогічним йому рівнянням регресії:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{k} b_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^{k} b_{i,i} x_i^2 + \sum_{i,j,n=1}^{k} b_{i,j,k} x_i x_j x_n + \ldots$$

де k –кількість факторів (кількість x)

Мета даної роботи – дослідити лінійну регресійну модель

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i$$

- Визначення однорідності дисперсії.

  Однорідність дисперсії означає, що серед усіх дисперсій нема таких, які б значно перевищували одна одну. Перевірка однорідності проводиться за допомогою різних статистичних критеріїв.

- Що називається повним факторним експериментом

  Для знаходження коефіцієнтів у лінійному рівнянні регресії застосовують повний факторний експеримент (ПФЕ). Якщо в багатофакторному експерименті використані всі можливі комбінації рівнів факторів, то такий експеримент називається повним факторним експериментом.