Выполнил
ст.гр.11405120
Серафинович П.А.
Вариант 6

Лабораторная работа №2

Прямая и обратная геодезическая задача на эллипсоиде

1.Обратная геодезическая задача

С помощью обратной геодезической задачи найдём длину, прямой и обратный азимут геодезической линии, используя исходные данные.

Таблица 1 – Исходные данные

№ точки	Город	φ	λ
6	Столбцы	53°36′00″	27°06′00″
7	Слуцк	53°00′00″	27°36′00″

Вычисляем разности в радианах широт и долгот, а также среднее значение широты:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \tag{1}$$

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \tag{2}$$

$$\varphi_{cp} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \tag{3}$$

Вычисление радиуса кривизны первого вертикала и меридиана и вспомогательные величины, которые обеспечат компактный вид формул и уменьшат сложность вычислений остальных величин.

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \left(\sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2}} \tag{4}$$

$$M = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\left(1 - e^2 \cdot \left(\sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{5}$$

где e^2 – квадрат эксцентриситета и равен

$$e^2 = 2 \cdot f - f^2 \tag{6}$$

a, f – параметры эллипсоида WGS84

Вспомогательные величины рассчитываются по следующим формулам

$$t = \mathrm{tg}\left(\varphi_{cp}\right) \tag{7}$$

$$\eta^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \cdot \left(\cos\left(\varphi_{cp}\right)^2\right) \tag{8}$$

$$V^2 = 1 + \eta^2 \tag{9}$$

$$f_1 = \frac{1}{M} \tag{10}$$

$$f_2 = \frac{1}{N} \tag{11}$$

$$f_3 = \frac{1}{24} \tag{12}$$

$$f_4 = \frac{1+\eta^2 - 9 \cdot \eta^2 \cdot t^2}{24 \cdot V^4} \tag{13}$$

$$f_5 = \frac{1-2 \cdot \eta^2}{24} \tag{14}$$

$$f_6 = \frac{\eta^2 \cdot \left(1-t^2\right)}{8 \cdot V^4} \tag{15}$$

$$f_7 = \frac{1+\eta^2}{12} \tag{16}$$

$$f_8 = \frac{3+8 \cdot \eta^2}{24 \cdot V^4} \tag{17}$$

2. Вычисление трёх вспомогательных величин

$$S \cdot \sin(\alpha) \;\; S \cdot \cos(\alpha) \;\; \Delta\alpha$$

$$S \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{f_2} \cdot \Delta\lambda \cdot \cos\left(\varphi_{cp}\right) \cdot \left(1 - f_3 \cdot \left(\Delta\lambda \cdot \sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2 + f_4 \cdot (\Delta\varphi)^2\right) \tag{18}$$

$$S \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{f_1} \cdot \Delta\varphi_{cp} \cdot \cos\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right) \cdot \left(1 - f_5 \cdot \left(\Delta\lambda \cdot \sin\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2 + f_6 \cdot (\Delta\varphi)^2\right) \tag{19}$$

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda \cdot \sin\left(\varphi_{cp}\right) \cdot \left(1 + f_7 \cdot \left(\Delta\lambda \cdot \cos\left(\varphi_{cp}\right)\right)^2 + f_8 \cdot (\Delta\varphi)^2\right) \tag{20}$$

3. Вычисления окончательных значений величин

Длина геодезической линии

$$S = \sqrt{\left(S \cdot \sin(\alpha)\right)^2 + \left(S \cdot \cos(\alpha)\right)^2} \tag{21}$$

Величина азимута вычисляется стандартно, т.е. как румб с учётом четверти.

$$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{S \cdot \sin(\alpha)}{S \cdot \cos(\alpha)}\right|\right) \tag{22}$$

$$\alpha_1 = \alpha - \frac{\Delta\alpha}{2} \tag{23}$$

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{\Delta\alpha}{2} + \pi \tag{24}$$

Значение азимутов должно находится в интервале

$$0 \le \alpha \le 2\pi \tag{25}$$

Результаты расчётов приведены в таблице 2

Таблица 2 – результаты решения обратной геодезической задачи

Эксцентриситет (е)	0,08181919
N, м	6391905,429992
M, м	6376556,736165
η	0,049061701
V	1,001202802
f4	0,03994974
f5	0,041466079
f6	-0,00023952
f7	0,083533921
f8	0,125198905
s·sin(α)	33335,547554
s·cos(α)	-66774,583897
Δα, °	0,400894237
S, м	74633,1279352
α_1, °	153,270032
α_2, °	333,6709263

2. Прямая геодезическая задача

Зная широту и долготу первой точки, прямой и обратный азимут и длину геодезической линии, можем найти с помощью прямой геодезической задачи: широту и долготу второй точки и обратный азимут геодезической линии.

Вычисляем приблизительные координаты точки 2

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{S \cdot \cos(\alpha_1)}{M_1} \tag{26}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{S \cdot \sin(\alpha_1)}{N_1 \cdot \cos(\varphi_1)} \tag{27}$$

В ходе итерационного процесса вычисляются обратный азимут, широта и долгота второй точки по формулам:

$$\Delta\alpha = \Delta\lambda \cdot \sin(\varphi_{cp}) \cdot \left(1 + f_7 \cdot (\Delta\lambda \cdot \cos(\varphi_{cp}))^2 - f_4 \cdot \Delta\varphi^2\right) \tag{28}$$

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\Delta\alpha}{2} \tag{29}$$

$$\alpha_2 = \alpha + \frac{\Delta\alpha}{2} + \pi \tag{30}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 + f_2 \cdot \frac{S \cdot \sin(\alpha)}{\cos(\varphi_{cp})} \cdot \left(1 + f_3 \cdot \left(\Delta\lambda \cdot \sin(\varphi_{cp})\right)^2 - f_4 \cdot \Delta\varphi^2\right) \quad (31)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + f_1 \cdot \frac{S \cdot \cos(\alpha)}{\cos\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)} \cdot \left(1 - f_5 \cdot \left(\Delta\lambda \cdot \cos(\varphi_{cp})\right)^2 - f_6 \cdot \Delta\varphi^2\right) \quad (32)$$

Перед началом каждой итерации перевычисляются значения формул (1 – 5), а также все необходимые для их вычисления вспомогательные величины (7 – 17). Итерации следует продолжать до тех пор, пока значения текущей и предыдущей итераций не будут отличаться на пренебрегаемо малую величину. Результаты вычислений представлены в таблице 3

Таблица 3 – Результаты вычисления прямой геодезической задачи

φ_2, °	53,00108688
λ_2, °	27,60706238
Δα, °	0,40655231400
α, °	153,47330820
α2, °	333,67658440000
λ, °	27,59995693000
φ, °	52,99998512000
Δα, °	0,40085240500
α, °	153,47045820000
α2, °	333,67088440000
λ, °	27,60000028000
φ, °	53,00000011000
Δα, °	0,40088720000
α, °	153,47047560000
α2, °	333,67091920000
λ, °	27,60000006000
φ, °	53,0000002000

3. Вычисление кратчайшего расстояния между двумя исходными точками.

Чтобы решить данную задачу необходимо воспользоваться описанием формы эллипсоида в параметрическом виде.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(\varphi)\cdot\cos\varphi\sin\lambda \\ N(\varphi)\cdot\cos\varphi\cos\lambda \\ N(\varphi)(1-e^2)\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{33}$$

где $N(\varphi)$–первый вертикал

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\cdot(\sin(\varphi))^2}} \tag{34}$$

Тогда координаты первой и второй точек равны:

X_1 = 3376702,9422855 м X_2 = 3408941.34397939 м

Y_1 = 1727946.1951466 м Y_2 = 1782151.46681298 м

Z_1 = 5110449.8216982 м Z_2 = 5070543.50335441 м

Кратчайшее расстояние между двумя исходными точками находится по формуле

$$S = \sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 + Z_2)^2} \tag{35}$$

S = 74632,70237608700

Для проверки правильности нахождения расстояния необходимо пространственные прямоугольные координаты перевести в геодезические. Для этого воспользуемся следующими формулами.

$$\lambda = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right) \tag{36}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{Z + \varepsilon\, b\sin^3(q)}{p - e^2\ a\cos^3(q)}\right) \tag{37}$$

$$\varepsilon = \frac{e^2}{1-e^2} \tag{38}$$

$$b = a\,(1 - f) \tag{39}$$

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{40}$$

$$q = arctg\left(\frac{Z\,a}{p\,b}\right) \tag{41}$$

Полученные геодезические координаты представлены в таблице 4.

Таблица 4. Координаты точек

eps (ε)	0,006739497
b, м	6356752,3142452
p_1	3793141,28576321
p_2	3846679,7289813
q_1	0,933891561
q_2	0,923409587
λ_1, °	27,10000000000
λ_2, °	27,60000000000
φ_1, °	53,60000000000
φ_2, °	53,00000000000

Сравним расстояния на сфере и на эллипсоиде:

$$S_{сф} < S_{эл}$$

74532,406418726 м < 74633,1279352 м

Расстояние на сфере получилось меньше, чем на эллипсоиде. Также найдены кратчайшие расстояния между двумя исходными пунктами. Они составили S = 74531,981399889 м (значение взято из ЛР1) и S = 74632,70237608700 м. Как можно заметить, значения отличаются: кратчайшее расстояние будет меньше. Это зависит от формы поверхности, так как форма сферы отличается от формы эллипсоида.