Выполнил
ст.гр.11405120
Серафинович П.А.
Вариант 6

Лабораторная работа №1

Прямая и обратная геодезическая задача на сфере

Исходные данные: φ_1 = 53°36', λ_1, = 27°06', φ_2 = 53°00', λ_2 = 27°36'.

1. Обратная геодезическая задача на сфере

По теореме косинусов найдем сферическое расстояние рассчитываем по формуле (1).

$$\psi_{12} = \arccos\left(\sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)\cdot\cos(\Delta\lambda_{12})\right) \tag{1}$$

где $\Delta\lambda_{12}$ находим по формуле (2)

$$\Delta\lambda_{12} = \lambda_2 - \lambda_1 \tag{2}$$

Прямой азимут рассчитывается по формуле (3)

$$A_{12} = \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A_{12})}{\cos(A_{12})}\right|\right) \tag{3}$$

где $\sin(A_{12})$ находим по формуле (4), $\cos(A_{12})$ находим по формуле (5)

$$\sin(A_{12}) = \frac{\sin(\Delta\lambda_{12})\cdot\cos(\varphi_2)}{\sin(\psi_{12})} \tag{4}$$

$$\cos(A_{12}) = \frac{\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_1)\cdot\sin(\psi_{12})} \tag{5}$$

Обратный азимут рассчитывается по формуле (6)

$$A_{21} = 360^\circ - \mathrm{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right|\right) \tag{6}$$

где $\sin(A'_{21})$ находим по формуле (7), $\cos(A'_{21})$ находим по формуле (8)

$$\sin(A'_{21}) = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\varphi_1)}{\sin(\varphi_2)} \tag{7}$$

$$\cos(A'_{21}) = \frac{\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\psi_{12})} \tag{8}$$

Результаты вычислений приведены ниже

Дано:	Решение:
$\varphi_1 = 53°36'00{,}0''$	$\psi_{12} = \arccos\left(\sin(\phi_1)\cdot\sin(\phi_2) + \cos(\phi_1)\cdot\cos(\phi_2)\cdot\cos(\Delta\lambda_{12})\right)$ $= 0{,}011698698$ рад $= 0°40'13{,}0''$
$\lambda_1 = 27°06'00{,}0''$	$\Delta\lambda_{12} = \lambda_2 - \lambda_1 = 0°30'00{,}0''$
$\varphi_2 = 53°00'00{,}0''$	$A_{12} = 360° - \mathrm{arctg}\left(\left\lvert\frac{\sin(A_{12})}{\cos(A_{12})}\right\rvert\right) = 153°19'30{,}1''$
$\lambda_2 = 27°36'00{,}0''$	
ψ_{12} – ?	$\sin A_{12} = \frac{\sin(\Delta\lambda_{12})\cos(\phi_2)}{\sin(\psi_{12})} = 0{,}448928578$ рад
A_{12} – ?	$\cos A_{12} = \frac{\sin(\phi_2) - \sin(\phi_1)\cos(\psi_{12})}{\cos(\phi_1)\sin(\psi_{12})} = -0{,}893567643$
A_{21} – ?	$A_{21} = 360° - \mathrm{arctg}\left(\left\lvert\frac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right\rvert\right) - 180° = 333°43'33{,}4''$
	$\sin A'_{21} = \frac{\sin(A_{12})\cos(\phi_1)}{\sin(\phi_2)} = 0{,}58925097$
	$\cos A'_{21} = \frac{\sin(\phi_1) - \sin(\phi_2)\cos(\psi_{12})}{\cos(\phi_2)\sin(\psi_{12})} = 0{,}896686863$

Ответ: $\psi_{12} = 0°40'13{,}0''$, $A_{12} = 153°19'30{,}1''$, $A_{21} = 333°43'33{,}4''$

2. Прямая геодезическая задача

По теореме косинусов с учетом формул приведения можем найти широту второй точки по формуле:

$$\varphi_2 = \arcsin\left(\sin(\varphi_1)\cdot\cos(\psi_{12}) + \cos(\varphi_1)\cdot\sin(\psi_{12})\cdot\cos(A_{12})\right) \tag{9}$$

А также долгота второй точки по формуле 10

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12} \tag{10}$$

При этом $\Delta\lambda_{12}$ рассчитывается по формуле 11

$$\Delta\lambda_{12} = \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{\sin(\Delta\lambda_{12})}{\cos(\Delta\lambda_{12})}\right|\right) \tag{11}$$

где $\sin(\Delta\lambda_{12})$ и $\cos(\Delta\lambda_{12})$ высчитываем по формуле 12

$$\begin{gathered}\sin(\Delta\lambda_{12}) = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)}\\ \cos(\Delta\lambda_{12}) = \frac{\cos(\psi_{12}) - \sin(\varphi_1)\cdot\sin(\varphi_2)}{\cos(\varphi_1)\cdot\cos(\varphi_2)}\end{gathered} \tag{12}$$

Обратный азимут

$$A_{21} = 360^\circ - \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right|\right) \tag{13}$$

где $\sin(A'_{21})$ и $\cos(A'_{21})$ по формуле 14

$$\begin{gathered}\sin(A'_{21}) = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\varphi_1)}{\cos(\varphi_2)}\\ \cos(A'_{21}) = \frac{\sin(\varphi_1) - \sin(\varphi_2)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\varphi_2)\cdot\sin(\psi_{12})}\end{gathered} \tag{14}$$

При нахождении прямых и обратных азимутов сначала вычисляется румб и затем уже с учетом четверти сам азимут.

Результаты вычислений приведены ниже.

Дано:	Решение:
$\varphi_1 = 53°36'00{,}0''$	$\varphi_2 = \arcsin\left(\sin(\phi_1)\cos(\psi_{12}) + \cos(\phi_1)\cdot\sin(\psi_{12})\cdot\cos(A_{12})\right) = 53°00'00{,}0''$
$\lambda_1 = 27°06'00{,}0''$	$\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda_{12} = 27°36'00{,}0''$
$\psi_{12} = 0°40'13{,}0''$	$\Delta\lambda_{12} = \mathrm{arctg}\left(\left\lvert\frac{\sin(\Delta\lambda_{12})}{\cos(\Delta\lambda_{12})}\right\rvert\right) = 0°30'00{,}0''$
$A_{12} = 153°19'30{,}1''$	$\sin\Delta\lambda_{12} = \frac{\sin(A_{12})\cos(\psi_{12})}{\cos(\phi_2)} = 0{,}0087265355$
φ_2–?	$\cos\Delta\lambda_{12} = \frac{\cos(\psi_{12}) - \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)}{\cos(\phi_1)\cos(\phi_2)} = 0{,}999961923$
λ_2–?	$A_{21} = 360° - \mathrm{arctg}\left(\left\lvert\frac{\sin(A'_{21})}{\cos(A'_{21})}\right\rvert\right) - 180° = 333°43'33{,}4''$
	$\sin A'_{21} = \frac{\sin(A_{12})\cdot\cos(\phi_1)}{\cos(\phi_2)} = 0{,}58925097$
	$\cos A'_{21} = \frac{\sin(\phi_1) - \sin(\phi_2)\cdot\cos(\psi_{12})}{\cos(\phi_2)\cdot\sin(\psi_{12})} = 0{,}896686863$

Ответ: $\varphi_2 = 53°00'00{,}0''$, $\lambda_2 = 27°36'00{,}0''$, $A_{21} = 333°43'33{,}4''$

3. Нахождение кратчайшего расстояния между двумя точками

Для нахождения кратчайшего расстояния между двумя точками примем радиус сферы за R = 6371000 м, воспользуемся следующими формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\lambda) \\ r\cos(\varphi)\sin(\lambda) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \lambda = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ \varphi = \arcsin\left(\dfrac{z}{r}\right) \end{cases} \tag{15}$$

$$S = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{16}$$

Также воспользуемся сферической формулой для нахождения кратчайшего расстояния между двумя точками

$$S_a = a \cdot R \tag{17}$$

Воспользуемся формулами 15 для первой и второй точки соответственно

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi_1)\cos(\lambda_1) \\ r\cos(\varphi_1)\sin(\lambda_1) \\ r\sin(\lambda_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3365602{,}381008010 \\ 1722265{,}750952590 \\ 5127978{,}382954530 \end{pmatrix} \text{м}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi_2)\cos(\lambda_2) \\ r\cos(\varphi_2)\sin(\lambda_2) \\ r\sin(\lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3397849{,}428136730 \\ 1776352{,}753343280 \\ 5088106{,}834511300 \end{pmatrix} \text{м}$$

Тогда, по формуле 16: S = 74531,981399889 м

Воспользуемся формулой 17 и сравним значение, полученное по формуле 16: $S_a = a \cdot R$ = 74532,406418726 м.

$$S_a > S$$

Так как мы сравнили расстояния, найденные через формулы прямоугольного пространства и пространства на сфере можно сделать вывод о том, что расстояние на сфере между одними и теми же точками будет больше чем в прямоугольном пространстве из-за появления такой величины как сферический избыток.