ГРУППЫ 19.Б04– 19.Б06
IV семестр, 2020/2021 уч. год
Задание №1

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дано алгебраическое или трансцендентное уравнение вида

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

причем, известно, что все интересующие вычислителя корни находятся на отрезке [A, B], на котором функция $f(x)$ определена и непрерывна.

Требуется найти все корни уравнения (1) на [A, B] нечетной кратности (здесь A, B, $f(x)$ – параметры задачи).
Решение задачи разбить на два этапа:

1. Процедура отделения корней уравнения (1) на отрезке [A, B];
2. Уточнение корней уравнения (1) на отрезках перемены знака вида $[a_i, b_i]$
   a. Методом половинного деления (методом бисекции);
   b. Методом Ньютона (методом касательных);
   c. Модифицированным методом Ньютона;
   d. Методом секущих

с заданной точностью $\varepsilon>0$ (ε – параметр задачи).

Примечания:

1) Требования к оформлению задачи: вывести на печать название темы, исходные параметры задачи: A, B, вид функции $f(x)$, ε.
2) Отделение корней произвести способом табулирования [A, B] с шагом $h>0$ (где $h=(B–A)/N$, $N\geq2$ – параметр задачи). При реализации выбирать достаточно малые значения h. Результатом решения задачи отделения корней является последовательный вывод отрезков перемены знака функции $f(x)$ вида $[a_i, b_i]$ из [A, B], а также указание их количества.
3) При уточнении корней на каждом из отрезков $[a_i, b_i]$ указанными методами, выводить на печать (для каждого метода)
   - название метода (для порядка));
   - начальное(ые) приближение(я) к корню;
   - количество шагов m (в каждом методе своё) для достижения точности $\boldsymbol{\varepsilon}$, такой что $|\,x_m – x_{m-1}\,| < \boldsymbol{\varepsilon}$;
   - приближенное решение x_m уравнения (1), найденное каждым из упомянутых методов с точностью $\boldsymbol{\varepsilon}$;
   - $|\,x_m – x_{m-1}\,|$ (в методе бисекции выводить длину последнего отрезка);
   - абсолютную величину невязки для прибл. решения x_m : $\left| f(x_m) - 0 \right|$.

Тестовые задачи:

1.	$f(x)= x – 10 \cdot\sin(x)$	[A, B] = [-5; 3]	$\varepsilon = 10^{-6}$
2.	$f(x)= 2^{-x} – \sin(x)$	[A, B] = [-5; 10]	$\varepsilon = 10^{-6}$
3.	$f(x)= 2^{x} – 2 \cos(x)$	[A, B] = [-8; 10]	$\varepsilon = 10^{-6}$
4.	$f(x)= \mathrm{sqrt}(4x+7) – 3\cdot \cos(x)$	[A, B] = [-1,5; 2]	$\varepsilon = 10^{-8}$
5.	$f(x)= x\cdot \sin(x) – 1$	[A, B] = [-10; 2]	$\varepsilon = 10^{-5}$
6.	$f(x)= 8\cdot\cos(x) – x – 6$	[A, B] = [-9; 1]	$\varepsilon = 10^{-7}$

7. $f(x)= 10 \cdot \cos(x)– 0,1 \cdot x^2$ $[A, B] = [-8; 2]$ $\varepsilon = 10^{-5}$

8. $f(x)= 4\cdot\cos(x) + 0,3\cdot x$ $[A, B] = [-15; 5]$ $\varepsilon = 10^{-5}$

9. $f(x)= 5\cdot \sin(2x) – sqrt(1– x)$ $[A, B] = [-15; -10]$ $\varepsilon = 10^{-6}$

10. $f(x)= 1,2\cdot x^4+2\cdot x^3–13\cdot x^2–14,2\cdot x–24,1$ $[A, B] = [-5; 5]$ $\varepsilon = 10^{-6}$

11. $f(x)= 2 \cdot x^2 – 2^x– 5$ $[A, B] = [-3; 7]$ $\varepsilon = 10^{-5}$

12. $f(x)= 2^{-x} + 0,5\cdot x^2 – 10$ $[A, B] = [-3; 5]$ $\varepsilon = 10^{-8}$

13. $f(x)= \sin(x) + x^3– 9x+3$ $[A, B] = [-5; 4]$ $\varepsilon = 10^{-8}$

14. $f(x)= x-\cos^2(\pi x)$ $[A, B] = [-1; 2]$ $\varepsilon = 10^{-8}$

15. $f(x)= (x-1)^2 – \exp(-x)$ $[A, B] = [-1; 3]$ $\varepsilon = 10^{-8}$

16. $f(x)= \sin (5x) + x^2 – 1$ $[A, B] = [-3; 3]$ $\varepsilon = 10^{-8}$

17. $f(x)= \cos(3x) – x^3$ $[A, B] = [-2; 1]$ $\varepsilon = 10^{-8}$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к выполнению Задания №2

ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:

1) число значений в таблице (в наших обозначениях это $m+1$);
2) x – точка интерполирования, значение в которой хотим найти;
3) n – степень интерполяционного многочлена, который будет построен для того, чтобы найти значение в точке x.

ВАЖНО:

При задании аргументов исходной таблицы выбирать/определять их попарно-различными!

Никаких ограничений на x нет, введенное x может совпадать с табличным или лежать вне [a,b], из которого выбираются узлы интерполяции.

Запрашивая у пользователя значение n, сразу ограничивать его значением m, то есть просить ввести $n \leq m$. Если введенное пользователем $n>m$, «ругаться», сообщать: «Введено недопустимое значение n» и просить ввести n заново.

НА ЭКРАНЕ должна быть отражена следующая информация:

1) название задачи (Задача алгебраического интерполирования);
2) номер Вашего варианта;
3) число значений в таблице;
4) исходная таблица значений функции;
5) точка интерполирования x;
6) степень многочлена n;
7) отсортированная таблица (или набор узлов, ближайших к точке x, по которым будет строиться интерполяционный многочлен степени не выше n);
8) значение интерполяционного многочлена $P_n^L(x)$, найденное при помощи представления в форме Лагранжа;
9) значение абсолютной фактической погрешности для формы Лагранжа $|f(x) - P_n^L(x)|$;
10) значение $P_n^N(x)$, найденное при помощи представления в форме Ньютона;
11) значение абсолютной фактической погрешности для формы Ньютона $|f(x) - P_n^N(x)|$;
12) предложение ввести новые значения x и n или выйти из программы.

ГРУППЫ 19.Б04–19.Б06
IV семестр, 2020/2021 уч. год
Задание №2

Задача алгебраического интерполирования. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона и в форме Лагранжа

Подготовительный этап:

Составить и вывести на печать таблицу из $(m+1)$ значения функции f в попарно-различных точках (узлах) x_j, где $j=0,1,..,m$. Здесь число значений в таблице — параметр задачи, формула для непрерывной функции f остается на усмотрение студента.

При создании таблицы возможно как случайное задание узлов из некоторого промежутка $[a; b]$ (важным ограничением здесь является попарная различность узлов), так и задание с помощью формулы (например, равноотстоящие с шагом h узлы или узлы − корни многочлена Чебышёва $T_{m+1}(x)$, линейно-отображенные на $[a; b]$).

ВАЖНО: при решении задачи с «оптимальными» чебышёвскими узлами степень интерполяционного многочлена должна быть равна m (т.е. нужно взять ВСЕ узлы из таблицы).

Задача:

Для таблично-заданной функции f требуется найти значение в точке x, используя алгебраическое интерполирование.

Решение задачи алгебраического интерполирования:

Предложить пользователю ввести степень n интерполяционного многочлена ($n \leq m$) и точку интерполирования x.

Решением задачи будет значение $P_n(x) \approx f(x)$ (здесь P_n — алгебраический интерполяционный многочлен функции f, степени не выше n (при этом $n \leq m$), построенный по набору из $(n+1)$ узла x_j , решающему задачу минимизации погрешности интерполирования в заданной точке x).

Упорядочить узлы исходной таблицы по мере удаления их от точки интерполирования x (провести любую любимую сортировку). Далее работать уже с отсортированной таблицей. Узлы для построения P_n теперь располагаются в первых $(n+1)$ строках таблицы.

Найти значение $P_n^N(x)$, используя представление в форме Ньютона. Для этого построить таблицу разделенных разностей по первым $(n+1)$ значениям таблицы до порядка n включительно. Вычислить фактическую погрешность $ef_n(x)=|f(x)-P_n^N(x)|$.

Найти значение $P_n^L(x)$, используя представление в форме Лагранжа. Вычислить фактическую погрешность $ef_n(x)=|f(x)-P_n^L(x)|$ в этом случае.

<u>Решение тестовой задачи:</u>

<u>Вариант 1</u>

$f(x)=\sin(x) - x^2/2$		$a=0$	$b=1$	$x=0,65$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

<u>Вариант 2</u>

$f(x) = \ln(1+x)$		$a=0$	$b=1$	$x=0,35$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

<u>Вариант 3</u>

$f(x)=\exp(x) - x$		$a=0$	$b=1$	$x=0,65$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

<u>Вариант 4</u>

$f(x)=\sqrt{(1+x^2)}$		$a=0$	$b=0,7$	$x=0,4$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

<u>Вариант 5</u>

$f(x)= 1-\exp(-2\cdot x)$		$a=0$	$b=1$	$x=0,65$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

<u>Вариант 6</u>

$f(x)= x^2/ (1+x^2)$		$a=0,4$	$b=1$	$x=0,85$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

<u>Вариант 7</u>

$f(x)=\exp(-x) - x^2/2$		$a=0$	$b=1$	$x=0,65$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

<u>Вариант 8</u>

$f(x)=2\cdot\sin(x) - x/2$		$a=0,2$	$b=0,7$	$x=0,35$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

<u>Вариант 9</u>

$f(x)=1-\exp(-x)+x^2$		$a=0$	$b=1,5$	$x=0,95$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

<u>Вариант 10</u>

$f(x)= \cos(x) + 2\cdot x$		$a=0,5$	$b=1,8$	$x=1,2$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

Вариант 11

$f(x)= \sin(x) + x^2/2$		$a=0,4$	$b=0,9$	$x=0,75$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

Вариант 12

$f(x)=\exp(-x) – x^2/2$		$a=0$	$b=1$	$x=0,6$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

Вариант 13

$f(x)=\ln(1+x)-\exp(x)$		$a=1$	$b=10$	$x=5,25$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

Вариант 14

$f(x)=\sqrt{(1+x^2)} + x$		$a=0$	$b=1$	$x=0,15$
$x_j=a+j\cdot(b-a)/m$ $j=0,1..m$		$n=7$	$m=15$	

ГРУППЫ 17.Б04-мм – 17.Б06-мм
IV семестр, 2020/2021 уч. год

Задание №3.1
Задача обратного интерполирования

Подготовительный этап (создание таблично-заданной функции):

СОЗДАТЬ и ВЫВЕСТИ НА ПЕЧАТЬ таблицу из $(m+1)$ значения функции f в равноотстоящих с шагом $h=(b-a)/m$ точках (узлах) $x_i=a+i\cdot h$, где $i=0,1,..,m$. Узлы x_i – точки деления отрезка $[a; b]$ на m частей.

Здесь число значений в таблице $m+1$, a, b — **параметры задачи**; формула для непрерывной функции f, значениями которой заполняется таблица, остается на усмотрение обучающегося.

ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ запрашивать у пользователя, вводить с клавиатуры.

Постановка задачи обратного интерполирования:

Дана таблично-заданная функция (смотри таблицу, созданную на подготовительном этапе). Найти значение/значения аргумента/аргументов, при котором данная таблично–заданная функция принимает значение F.

Решение задачи обратного интерполирования (случай строгой монотонности):

Параметры: значение F; натуральное $n1$– степень интерполяционного многочлена для первого способа решения, натуральное $n2$– степень интерполяционного многочлена для второго способа решения, ε – точность, с которой находится корень алгебраического уравнения в способе 2.

Решить задачу для строго-монотонной функции двумя способами.
Выводить на печать (для каждого способа):
- Параметры задачи, относящиеся к способу решения
- Решение задачи обр.интерполирования;
- Модуль невязки

Предусмотреть возможность ввода новых значений параметров F, n и ε.

Решение тестовой задачи: При создании таблицы на подготовительном этапе, взять формулу для функции из своего варианта Задания №2; $a=0$, $b=1$, $m=10$, $\varepsilon=10^{-8}$ (параметры по умолчанию).

О СПОСОБАХ РЕШЕНИЯ

1 способ решения:
ПУСТЬ таблично-заданная функция, для которой решается задача, строго монотонна (предполагается, что функция f, таблица которой дана в задаче, на рассматриваемом участке – это строго монотонная и непрерывная функция, то у нее существует обратная функция f^{-1}, которая также строго монотонна и непрерывна).
ТОГДА задача обратного интерполирования может быть сведена к задаче поиска значения $f^{-1}(F)$ для таблично-заданной функции f^{-1}(при этом следует поменять местами столбцы исходной таблицы и далее трактовать значения $f(x_i)$ как аргументы для f^{-1}).
Таким образом, ИМЕЕМ задачу алгебраического интерполирования для таблично-заданной функции f^{-1}, где F – точка интерполирования. Теперь, если построить интерполяционный многочлен Q_{n1} по таблице значений, то решением задачи будет значение $Q_{n1}(F) \approx f^{-1}(F)$.

Степень интерполяционного многочлена $n1$ — параметр задачи ($n1 \leq m$) – запросить у пользователя.
При нахождении значения $Q_{n1}(F)$ использовать программу из Задания №2 (представление в форме Лагранжа или Ньютона – неважно).

Результатом решения задачи обратного интерполирования 1 способом является значение $X= Q_{n1}(F)$.

ПРОВЕРКА: В тестовой задаче всегда можно посчитать модуль невязки $r_n(X)=\left| f(X)-F \right|$.

2 способ решения:
Если мы не располагаем информацией, что на рассматриваемом участке таблицы функция строго монотонна и непрерывна, и, следовательно, не полномочны «переворачивать таблицу», то возможно следующее решение. Также этот способ решения можно применять, если первый способ возможен, но не дал хороший результат (например, если обратная функция плохо приближается многочленом).

Результатом решения задачи обратного интерполирования 2 способом будет(ут) корень(ни) уравнения $P_{n2}(x)=F$, где $P_{n2}(x)$ – интерполяционный полином функции $f(x)$.

При построении интерполяционного многочлена $P_{n2}(x)$ можно использовать программу из Задания №2. Алгебраическое уравнение решить методом бисекции или методом секущих с точностью ε (смотри Задание №1).

Результатом решения задачи обратного интерполирования 2 способом является значение $\boldsymbol{x}$ – корень уравнения $P_{n2}(x)-F=0$.

ПРОВЕРКА: В тестовой задаче всегда можно посчитать модуль невязки $r_n(\boldsymbol{x})=\left| f(\boldsymbol{x})-F \right|$ для каждого приближенного решения.

Задание №3.2

Нахождение производных таблично-заданной функции по формулам численного дифференцирования

Подготовительный этап:

СОЗДАТЬ и ВЫВЕСТИ НА ПЕЧАТЬ таблицу из $(m+1)$ значения функции f в равноотстоящих с шагом h точках $x_i=x_0+i\cdot h$, где $i=0,1..m$.
Рассматривать функцию $f(x)=e^{1,5*k*x}$, где k = ((номер Вашего варианта по mod 5) +1).
Здесь число значений в таблице $m+1$, a, $h>0$ — **параметры задачи**;

ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ запрашивать у пользователя, вводить с клавиатуры.

Решение задачи численного дифференцирования:

Для таблично-заданной функции f (смотри таблицу, созданную на подготовительном этапе), найти значение ее первой и второй производной в узлах x_i таблицы. Для этого воспользоваться известными простейшими формулами численного дифференцирования, имеющими погрешность, порядка $0(h^2)$ (смотри конспект занятия). Значения второй производной вычислить только во внутренних узлах таблицы: $x_i=x_0+i\cdot h$, где $i=1,..,m-1$.

Вывести на печать:
- Параметры задачи
- Результаты, оформленные в виде таблицы:

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)_{ЧД}$	$\lvert f'(x_i)_T - f'(x_i)_{ЧД} \rvert$	$f''(x_i)_{ЧД}$	$\lvert f''(x_i)_T - f''(x_i)_{ЧД} \rvert$

Предусмотреть возможность ввода новых значений параметров, создание новой таблицы значений функции и расчета ее производных.

ГРУППЫ 17.Б04-мм – 17.Б06-мм
IV семестр, 2020/2021 уч. год

<u>Задание №4</u>

Приближённое вычисление интеграла по составным квадратурным формулам

Написать программу для вычисления определенного интеграла при помощи составных квадратурных формул (КФ).

1) Параметры задачи: пределы интегрирования a, b, весовая функция $\rho(x)$ и функция $f(x)$, N – число промежутков деления $[a, b]$ в составной КФ.
2) **Для случая $\rho(x) \equiv 1$ и легко интегрируемой функции $f(x)$** вычислить точно и вывести на печать значение интеграла от $\rho(x) \cdot f(x)$ по конечному $[a, b]$. (Обозначим это значение за J).
3) Вычислить приближённо и вывести на печать значение интеграла от $\rho(x) \cdot f(x)$ по $[a, b]$ при помощи составных формул *левых, правых, средних прямоугольников, трапеций, Симпсона* с параметром m. (Обозначим эти значения $J(h)$, здесь $h = (b-a)/N$).
4) Посчитать и вывести на печать $|J - J(h)|$ — абсолютную фактическую погрешность для каждой составной КФ.
5) Для каждой составной КФ оценить погрешность вычислений (теоретически, смотри сводную оценку погрешности).
6) Сравнить теоретическую и фактическую погрешности (значение фактической погрешности должно быть меньше).

<u>При отладке программы обязательно протестировать все квадратурные формулы на многочленах степеней, соответствующих их (формул) алгебраической степени точности.</u>

7) Знать/найти ответы на следующие вопросы:

- Сколько (в терминах N) значений функции $f(x)$ участвует (в теории, а не при Вашей реализации программы) в вычислении интеграла по каждой составной КФ?
- Почему, несмотря на то, что АСТ КФ средних прямоугольников равна 1, а АСТ Симпсона равна 3, они обе точны для $f(x) = 1{,}27 \cdot x^5 + 2{,}04 \cdot x$ при интегрировании по $[a, b] = [-5, 5]$ и для $[a, b] = [-90, 90]$?
- *Если ответ на предыдущий вопрос не находится, подумайте, почему для той же функции не будет точности, например, для $[a, b] = [-1, 5]$?

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к Заданию №4

ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:

1) пределы интегрирования *a, b* (запрашивать у пользователя);
2) весовая функция $\rho(x)$ и функция $f(x)$ (описать в коде вес $\rho(x)$ положить $\equiv 1$ и несколько вариантов для функции $f(x)$, в частности, обязательно рассмотреть функции-многочлены: нулевой, первой и третьей степени);
3) N – число промежутков деления $[a, b]$ (запрашивать у пользователя).

НА ЭКРАНЕ/В ОТЧЕТЕ (в блоке по тестовой задаче) должна быть отражена следующая информация:

1) название задачи;
2) $a=\ \ , b=\ \ , N=\ \ , h=(b-a)/N$;
3) J – точное значение интеграла (найти вручную, через первообразную);
4) далее, для каждой составной квадратурной формулы (далее КФ) выводить:
    - значение $J(h)$;
    - абсолютную фактическую погрешность $|J - J(h)|$;
    - теоретическую погрешность = $Const \cdot M_{d+1} \cdot (b-a) \cdot h^{d+1}$. Здесь d – АСТ КФ формулы, $M_{d+1} = \max_{[a,b]} |f^{(d+1)}(x)|$, *Const=1/2 для левых и правых, 1/12 для трапеций, 1/24 для средних и 1/2880 для составной КФ Симпсона.*

ФОРМЫ КОНТРОЛЯ:

1) Все составные КФ должны быть точны (погрешность *0* или машинный *0*) для $f(x)=const$, однако, наиболее важно проверить точность КФ левых и правых прямоугольников при тестировании программы;
2) Оставшиеся составные КФ должны быть точны для f(x)– многочленов первой степени, а КФ Симпсона точна для произвольного многочлена второй и третьей степени.

«ПРОВЕРКА НА ПРОЧНОСТЬ»:

Протестировать программу для случая, когда искомое значение интеграла довольно велико (подобрать такие $f(x)$ и $[a, b]$). «Поиграть» числом разбиений N (от 10 000 до 1 000 000).

- Убедиться, что программа «не ломается».
- Убедиться, что КФ Симпсона при умеренном числе разбиений (1 000, 10 000) дает результат, более точный чем при миллионе.
- Подумать, с чем может быть связана потеря точности «у Симпсона».

ГРУППЫ 17.Б04-мм – 17.Б06-мм
IV семестр, 2020/2021 уч. год

<u>*Задание № 4.1*</u>

Приближённое вычисление интеграла по составным квадратурным формулам

Написать программу для вычисления определенного интеграла при помощи составных квадратурных формул (КФ).

1) Параметры задачи: пределы интегрирования a, b, весовая функция $\rho(x)$ и функция $f(x)$, N – число промежутков деления $[a, b]$ в составной КФ.
2) **Для случая $\rho(x)\equiv 1$ и легко интегрируемой функции $f(x)$** вычислить точно и вывести на печать значение интеграла от $\rho(x)\cdot f(x)$ по конечному $[a, b]$. (Обозначим это значение за J).
3) Вычислить приближённо и вывести на печать значение интеграла от $\rho(x)\cdot f(x)$ по $[a, b]$ при помощи составных формул *левых, правых, средних прямоугольников, трапеций, Симпсона* с параметром N. (Обозначим эти значения $J(h)$, здесь $h = (b-a)/N$).
4) Посчитать и вывести на печать $|J - J(h)|$ – абсолютную фактическую погрешность для каждой составной КФ.
5) Для каждой составной КФ оценить погрешность вычислений (теоретически, смотри сводную оценку погрешности).
6) Сравнить теоретическую и фактическую погрешности (значение фактической погрешности должно быть меньше).

<u>**При отладке программы обязательно протестировать все квадратурные формулы на многочленах степеней, соответствующих их (формул) алгебраической степени точности.**</u>

7) Знать/найти ответы на следующие вопросы:

- Сколько (в терминах N) значений функции $f(x)$ участвует (в теории, а не при Вашей реализации программы) в вычислении интеграла по каждой составной КФ?
- Почему, несмотря на то, что АСТ КФ средних прямоугольников равна 1, а АСТ Симпсона равна 3, они обе точны для $f(x)= 1,27\cdot x^5+2,04\cdot x$ при интегрировании по $[a, b]$= [-5, 5] и для $[a, b]$= [-90, 90]?
- *Если ответ на предыдущий вопрос не находится, подумайте, почему для той же функции не будет точности, например, для $[a, b]$= [-1, 5]?

<u>*Задание № 4.2*</u>

1) Увеличить N в l раз (здесь l – параметр, натуральное число). Вычислить приближённо и вывести на печать значения интеграла от $\rho(x)\cdot f(x)$ по $[a, b]$, посчитанные при помощи составных формул *средних прямоугольников, трапеций, Симпсона* с новым параметром $N\cdot l$. (Обозначим новое значение за $J(h/l)$).

2) Посчитать и вывести на печать абсолютную погрешность каждой формулы для случая нового числа промежутков разбиения $N \cdot l$.
3) Уточнить значения $J(h)$ и $J(h/l)$ по принципу Рунге для каждой КФ.
4) Посчитать и вывести на печать абсолютные погрешности для уточнённых значений.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к Заданию №4.1

ПАРАМЕТРЫ ЗАДАЧИ:

1) пределы интегрирования a, b (запрашивать у пользователя);
2) весовая функция $\rho(x)$ и функция $f(x)$ (описать в коде вес $\rho(x)$ положить $\equiv 1$ и несколько вариантов для функции $f(x)$, в частности, обязательно рассмотреть функции-многочлены: нулевой, первой и третьей степени);
3) N – число промежутков деления $[a, b]$ (запрашивать у пользователя).

НА ЭКРАНЕ/В ОТЧЕТЕ (в блоке по тестовой задаче) должна быть отражена следующая информация:

1) название задачи;
2) $a=$, $b=$, $N=$, $h=(b-a)/N$;
3) J – точное значение интеграла (найти вручную, через первообразную);
4) далее, для каждой составной квадратурной формулы (далее КФ) выводить:
   - значение $J(h)$;
   - абсолютную фактическую погрешность $|J - J(h)|$;
   - теоретическую погрешность = $Const \cdot M_{d+1} \cdot (b-a) \cdot h^{d+1}$. Здесь d – АСТ КФ формулы, $M_{d+1} = max_{[a,b]} |f^{(d+1)}(x)|$, *Const=1/2 для левых и правых, 1/12 для трапеций, 1/24 для средних и 1/2880 для составной КФ Симпсона.*

ФОРМЫ КОНТРОЛЯ:

1) Все составные КФ должны быть точны (погрешность 0 или машинный 0) для $f(x)=const$, однако, наиболее важно проверить точность КФ левых и правых прямоугольников при тестировании программы;
2) Оставшиеся составные КФ должны быть точны для f(x)– многочленов первой степени, а КФ Симпсона точна для произвольного многочлена второй и третьей степени.

«ПРОВЕРКА НА ПРОЧНОСТЬ»:
Протестировать программу для случая, когда искомое значение интеграла довольно велико (подобрать такие $f(x)$ и $[a, b]$). «Поиграть» числом разбиений N (от 10 000 до 1 000 000).

- Убедиться, что программа «не ломается».
- Убедиться, что КФ Симпсона при умеренном числе разбиений (1 000, 10 000) дает результат, более точный чем при миллионе.
- Подумать, с чем может быть связана потеря точности «у Симпсона».

Задание №5

КФ Гаусса, ее узлы и коэффициенты. Вычисление интегралов при помощи КФ Гаусса

1. Определить и вывести на печать узлы и коэффициенты КФ Гаусса при $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (парами: узел $\leftrightarrow$ коэффициент). При нахождении корней многочлена Лежандра выбрать точность ϵ как минимум порядка 10^{-12}.

2. Выборочно осуществить проверку точности на многочлене наивысшей степени, для которого соответствующая КФ Гаусса должна быть точна. Например, для $N = 2,\ 4,\ 6$ проверять точность на многочленах степени 3, 7 и 11 соответственно.

3. Вычислить интеграл из варианта задания при помощи КФ Гаусса с заданным числом узлов (для всех указанных значений параметра N). При этом, кроме значения интеграла, выводить на печать все узлы и коэффициенты КФ, подобной КФ Гаусса, для каждого N. Предусмотреть возможность ввода других значений параметров a, b, то есть пересчитывать узлы и коэффициенты подобной КФ для произвольных a, b.

Варианты тестовых задач

Вариант 1

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad N = 2, 5, 6, 8$$

Вариант 2

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)(4+3x^2)}}, \qquad N = 4, 6, 7, 8$$

Вариант 3

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}\,\mathrm{d}x, \qquad N = 5, 6, 7, 8$$

Вариант 4

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x}}, \qquad N = 3, 4, 6, 7$$

Вариант 5

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad N = 3, 4, 5, 6$$

Вариант 6

$$\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x, \qquad N = 4, 6, 7, 8$$

Вариант 7

$$\int_{1,6}^{2,7} \frac{x+0,8}{\sqrt{(x^2+1,2)}}\,\mathrm{d}x, \qquad N = 4, 5, 7, 8$$

Вариант 8

$$\int_0^{\pi/4} \cos x^2 \, \mathrm{d}x, \qquad N = 3, 6, 7, 8$$

Вариант 9

$$\int_0^{\pi/4} \sin x^2 \, \mathrm{d}x, \qquad N = 3, 6, 7, 8$$

Вариант 10

$$\int_0^{1} \sqrt{x} \sin x^2 \, \mathrm{d}x, \qquad N = 3, 6, 7, 8$$

Вариант 11

$$\int_0^{1} \sqrt{x} \cos x^2 \, \mathrm{d}x, \qquad N = 3, 6, 7, 8$$

Вариант 12

$$\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x, \qquad N = 4, 5, 6, 7$$

Вариант 13

$$\int_0^{1} \sqrt{x}\, e^{x^2} \, \mathrm{d}x, \qquad N = 4, 5, 6, 7$$

Вариант 14

$$\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\,(1 + x)}, \qquad N = 4, 5, 6, 8$$

Задание №6

Приближённое вычисление интегралов при помощи квадратурных формул Наивысшей Алгебраической Степени Точности (КФ НАСТ)

1. Теоретический блок:

   (a) знать, что такое Алгебраическая Степень Точности КФ, двустороннюю оценку для АСТ ИКФ в случае знакопостоянного веса;

   (b) знать, чему равна наивысшая АСТ КФ с N узлами;

   (c) знать формулировку теоремы о КФ гауссова типа (или КФ НАСТ);

   (d) знать алгоритм построения КФ НАСТ с весом;

   (e) знать теорему о погрешности КФ НАСТ;

   (f) из теории ортогональных многочленов знать определение и свойства ортогональных многочленов.

2. Практический блок:

   Параметры задачи: пределы интегрирования – $a,\ b$ (запрашивать у пользователя; вводятся с клавиатуры), функции $\rho(x)$ и $f(x)$ (описать в коде программы).

   (a) Написать программу, позволяющую вычислить приближенно $\int_a^b \rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ при помощи составной КФ Гаусса с N узлами с числом промежутков деления $[a,\,b]$ равным m (N и m — параметры задачи, запрашивать у пользователя; вводятся с клавиатуры).
   Выводить на печать исходные параметры N и m; узлы и коэффициенты исходной КФ Гаусса в количестве N штук. Полученное значение интеграла (не менее 12 знаков после запятой).

   (b) Реализовать приближенное вычисление $\int_a^b \rho(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ при помощи КФ типа Гаусса (КФ НАСТ) с 2-мя узлами.
   Выводить на печать все промежуточные вычисления: моменты весовой функции, ортогональный многочлен, узлы и коэффициенты построенной КФ НАСТ.
   Сделать проверку на коэффициенты и точность КФ на одночлене x^3.
   Вывести полученное значение интеграла (не менее 12 знаков после запятой).
   Сравнить полученное значение со значением по составной КФ Гаусса с N узлами.

   (c) Написать программу, позволяющую вычислить приближенно $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\,\mathrm{d}x$ при помощи КФ Мелера с N_1, N_2, N_3 узлами (N_1, N_2, N_3 — параметры задачи, запрашивать у пользователя; вводятся с клавиатуры).
   Выводить на печать для соответствующих N_1, N_2, N_3
   1) все узлы и коэффициенты КФ Мелера;
   2) полученное значение интеграла (не менее 12 знаков после запятой).
   Сравнить полученные приближенные значения между собой.

Варианты тестовых задач

Вариант 1
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\,b] = [0,\,1],\ f(x) = \sin(x),\ \rho(x) = \sqrt{x}$.
Для КФ Мелера $f(x) = \cos(x)$.

Вариант 2
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\,b] = [0,\,1],\ f(x) = \sin(x),\ \rho(x) = x^{1/4}$.
Для КФ Мелера $f(x) = \cos(x)$.

Вариант 3
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.
Для КФ Мелера $f(x) = \exp(2x)$.

Вариант 4
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = x^{-1/4}$.
Для КФ Мелера $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Вариант 5
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = -\ln(x)$.
Для КФ Мелера $f(x) = \frac{\cos(3x)}{0.3+x^2}$.

Вариант 6
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = -x\ln(x)$.
Для КФ Мелера $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Вариант 7
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = |x - 0.5|$.
Для КФ Мелера $f(x) = \cos(x)$.

Вариант 8
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = e^x$.
Для КФ Мелера $f(x) = \cos(x)$.

Вариант 9
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = \frac{1}{x+0.1}$.
Для КФ Мелера $f(x) = \exp(2x)$.

Вариант 10
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = \sqrt{1-x}$.
Для КФ Мелера $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Вариант 11
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = \cos(x)$.
Для КФ Мелера $f(x) = \frac{\cos(3x)}{0.3+x^2}$.

Вариант 12
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = \sin(2x)$.
Для КФ Мелера $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Вариант 13
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = e^{-x}$.
Для КФ Мелера $f(x) = \cos(x)$.

Вариант 14
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = \cos^2(x)$.
Для КФ Мелера $f(x) = \cos(x)$.

Вариант 15
Для составной КФ Гаусса и КФ НАСТ $[a,\, b] = [0,\, 1]$, $f(x) = \sin(x)$, $\rho(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.
Для КФ Мелера $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Группы 19.Б04–19.Б06
IV семестр, 2020/2021 уч. год
Задание №7

Численное решение Задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

Найти решение Задачи Коши для уравнения $y'(x)=f(x,y)$ с начальным условием $y(x_0)=y_0$ следующими методами:

1. В тестовой задаче найти точное решение.
2. Запросить у пользователя $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{N}$ – параметры задачи.
3. Получить численное решение задачи Коши тремя методами Эйлера для случая равноотстоящих аргументов $\boldsymbol{x_k = x_0+k\cdot h}$**, где** $\boldsymbol{k=1,2,\dots, N}$**.** Для каждого метода Эйлера вывести таблицу значений и абсолютных погрешностей для всех $\boldsymbol{x_k = x_0+k\cdot h}$**, где** $\boldsymbol{k=1,2,\dots,N}$**.**
4. Получить численное решение задачи Коши Методом Рунге-Кутта 4-го порядка для случая равноотстоящих аргументов $\boldsymbol{x_k = x_0+k\cdot h}$**, где** $\boldsymbol{k=1,2,\dots, N}$**.** Вывести таблицу значений и абсолютных погрешностей для всех $\boldsymbol{x_k = x_0+k\cdot h}$**, где** $\boldsymbol{k=1,2,\dots,N}$**.**
5. Получить численное решение задачи Коши при помощи экстраполяционного метода Адамса 4-го порядка в точках $\boldsymbol{x_k = x_0+k\cdot h}$**, где** $\boldsymbol{k=3,\dots, N}$**.** При этом начало таблицы (первые пять пар значений) заполнить точными значениями. Вывести таблицу значений и абсолютных погрешностей для всех $\boldsymbol{x_k = x_0+k\cdot h}$**, где** $\boldsymbol{k=3,\dots,N}$**.**
6. В конце предоставить сводку результатов для всех пяти методов:
   вывести абсолютную погрешность для последнего значения $\boldsymbol{y_N \approx y(x_N)}$**.**

ВАРИАНТЫ ТЕСТОВЫХ ЗАДАЧ

Вариант 1. $y'(x) = -y^2(x)+1,\ y(0)=0;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 2. $y'(x) = -y(x)+x,\ y(0)=1;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 3. $y'(x) = -2\cdot y(x)+y^2(x),\ y(0)=1;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 4. $y'(x) = -y(x)+y^2(x),\ y(0)=0{,}5;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 5. $y'(x) = -y(x)+\sin(x),\ y(0)=1;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 6. $y'(x) = -y(x)+e^{-x},\ y(0)=1;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 7. $y'(x) = -y(x)+\cos(x),\ y(0)=1;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 8. $y'(x) = -y(x)\cdot(1+x),\ \ y(0)=1;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 9. $y'(x) = -y(x)\cdot(2-\cos(x)),\ \ y(0)=1;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 10. $y'(x) = -3\cdot y(x)+y^2(x),\ \ y(0)=1;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 11. $y'(x) = -y^2(x),\ \ y(0)=1;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 12. $y'(x) = -y(x)+y^2(x),\ y(0)=0{,}5;\ \ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 13. $y'(x) = -y(x)+2\cdot y^2(x)+1,\ y(0)=0{,}25;\ h=0{,}1\ \ N=10$

Вариант 14. $y'(x) = -y(x)+x/2,\ \ y(0)=1;\ h=0{,}1\ \ N=10$