Finestre temporali.

Un camionista deve visitare un dato insieme di clienti in una sequenza già fissata, per effettuare delle consegne.

Ogni cliente ha specificato un insieme di finestre temporali durante le quali è disponibile per la consegna. Se il veicolo arriva presso un cliente al di fuori di una finestra temporale, per poter effettuare la consegna deve aspettare l'inizio della prima finestra temporale utile. Naturalmente, non è consentito arrivare presso un cliente dopo la fine della sua ultima finestra temporale.

I tempi di viaggio tra clienti consecutivi sono noti ed il tempo di servizio presso ogni cliente si può considerare trascurabile.

Il camionista parte da un deposito iniziale e termina il suo viaggio ad un deposito finale. Anche i due depositi possono avere associate una o più finestre temporali.

Il camionista può scegliere liberamente l'istante in cui partire dal deposito iniziale (purché all'interno delle sue finestre temporali) ed il suo obiettivo è di minimizzare il tempo di viaggio complessivo, cioè il tempo che intercorre tra l'istante di partenza dal deposito iniziale a quello di arrivo nel deposito finale.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto dai dati riportati nel file FINESTRE.TXT. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Dati.

I clienti sono 4.

Da	A	Tempo
Dep.	1	48
1	2	80
2	3	72
3	4	88
4	Dep.	52

Tabella 1: Tempi di viaggio [minuti].

Punto	Finestre temporali
Dep.	[0,200]
Cl. 1	[68,112] [148,176] [200,220]
Cl. 2	[200,244] [264,276] [320,344]
Cl. 3	[215,235] [264,296] [332,368] [412,420]
Cl. 4	[312,344] [400,416] [464,504]
Dep.	[460,560]

Tabella 2: Finestre temporali [minuti].

Soluzione.

Indichiamo con $n+1$ il numero di clienti da visitare, in modo da riservare l'indice 0 e l'indice n ai depositi iniziale e finale. Nel seguito indichiamo come "punto" da visitare indifferentemente un cliente o un deposito. Sia $P = \{0, \dots, n\}$ l'insieme indicizzato dei punti. Ogni punto ha associato un insieme di finestre temporali. Sia m_p il numero di finestre temporali per ogni punto $p \in P$ e sia $F_p = \{1, \dots, m_p\}$ l'insieme indicizzato delle finestre temporali del punto $p \in P$. Per ogni finestra temporale $f \in F_p$ di ogni punto $p \in P$ sono dati un istante iniziale s_{pf} e un istante finale e_{pf}. Infine, è dato il tempo di viaggio, che indichiamo con τ_p, necessario per raggiungere ogni punto $p \in P$ dal punto precedente; fa eccezione il punto di indice 0 che non deve essere raggiunto. Quindi il vettore τ_p è definito e utilizzato nel modello solo per $p > 0$.

Le variabili devono indicare l'istante di visita di ogni punto e la finestra temporale scelta. Servono quindi variabili continue t_p per ogni punto $p \in p$ e variabili binarie x_{pf} per ogni finestra temporale $f \in F_p$ di ogni punto $p \in P$.

I vincoli devono imporre anzitutto che sia selezionata una finestra temporale per ogni punto:

$$\sum_{f \in F_p} x_{pf} = 1 \quad \forall p \in P.$$

Inoltre, l'istante di visita di ogni punto $p \in P$ deve cadere all'interno della finestra temporale selezionata:

$$\sum_{f \in F_p} s_{pf} x_{pf} \leq t_p \leq \sum_{f \in F_p} e_{pf} x_{pf}.$$

Infine, gli istanti di visita di punti consecutivi devono essere non-decrescenti e distanziati almeno del tempo di viaggio:

$$t_p \geq t_{p-1} + \tau_p \quad \forall p \in P : p > 0.$$

L'obiettivo è la minimizzazione della differenza tra istante di arrivo e istante di partenza:

$$\text{minimize } z = t_n - t_0.$$

Ne risulta un modello di programmazione lineare intera, con variabili binarie. La soluzione fornita da un solutore, quindi, è garantita ottima, non necessariamente unica.

Con i dati dell'esempio, una soluzione ottima è quella con partenza all'istante $t_0 = 172$, visite ai clienti negli istanti $220, 340, 412, 500$ e arrivo al deposito finale nell'istante $t_5 = 552$. La durata del viaggio è di 380 minuti, di cui 340 minuti di viaggio (valore fisso, non ottimizzabile) e 40 minuti di attesa.