

Non-crossing matching.

Alcuni sensori ed alcuni attuatori in un sistema robotico sono collegati tra loro con un unico bus. Ogni sensore può inviare dati ad ogni attuatore ed ogni attuatore può ricevere dati da qualsiasi sensore, ma quando una coppia sensore-attuatore usa il bus, nessun'altra può farlo. Tutti i sensori e tutti gli attuatori sono ordinati in una data sequenza e tutti possono collegarsi al bus ma solo rispettando ciascuno la propria sequenza.

Variante 1: Nell'esecuzione di una sequenza ogni sensore può trasmettere ad un solo attuatore (o a nessuno) ed ogni attuatore può ricevere da un solo sensore (o da nessuno).

Variante 2: Nell'esecuzione di una sequenza ogni sensore può trasmettere ad un qualsiasi numero di attuatori (anche a nessuno) ed ogni attuatore può ricevere da un qualsiasi numero di sensori (anche da nessuno).

L'utilità dei dati trasmessi è diversa per ogni coppia sensore-attuatore e si vuole massimizzare l'utilità complessiva dei dati trasmessi, scegliendo opportunamente come accoppiare sensori ed attuatori nel rispetto dei vincoli descritti sopra.

Formulare il problema (nelle due varianti) e classificarlo.

Risolvere l'esempio descritto nel file NONCROSSING.TXT. Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Dati.

I sensori sono 6, gli attuatori sono 6.

	1	2	3	4	5	6
1	1	10	15	47	68	130
2	9	4	7	18	40	98
3	15	10	5	10	23	82
4	45	18	9	8	14	50
5	67	50	31	24	13	29
6	131	100	82	50	26	14

Tabella 1: Utilità dei dati trasmissibili per ogni coppia (riga=sensore, colonna=attuatore).

Soluzione commentata.

Il problema è una variante del classico problema del matching di massimo valore su grafo bipartito. Tuttavia in questo caso gli edges del matching non possono intersecarsi tra loro a causa del vincolo sulla sequenza. Il problema è noto come *non-crossing matching problem*.

Dati.

Sono dati due insiemi indicizzati, S per i sensori e T per gli attuatori. Una matrice di coefficienti w_{st} indica l'utilità dei dati per ogni coppia $s \in S, t \in T$.

Variabili.

Il problema si può formulare con una variabile binaria x_{st} per ogni possibile coppia sensore-attuatore. Essa indica se la trasmissione tra i due avviene o no.

Vincoli.

Nella variante 1 esistono vincoli di assegnamento per imporre che ogni sensore ed ogni attuatore non sia selezionato in più di una trasmissione.

$$\sum_{s \in S} x_{st} \leq 1 \quad \forall t \in T$$
$$\sum_{t \in T} x_{st} \leq 1 \quad \forall s \in S.$$

Nella variante 2, tali vincoli non devono essere imposti.

In entrambi i casi, bisogna invece imporre i vincoli che gli edges del matching che rappresentano le trasmissioni selezionate non si incrocino. Si formula quindi un vincolo di incompatibilità tra coppie di variabili binarie che corrispondono a coppie sensore-attuatore che non possono essere selezionate entrambe senza violare il vincolo. Ciò si verifica quando per due coppie (s_1, t_1) e (s_2, t_2) si ha $s_1 < s_2$ e $t_1 > t_2$.

$$x_{s_1 t_1} + x_{s_2 t_2} \leq 1 \quad \forall s_1, s_2 \in S, t_1, t_2 \in T : (s_1 < s_2) \wedge (t_1 > t_2).$$

Obiettivo.

L'obiettivo consiste nel massimizzare l'utilità complessiva delle trasmissioni selezionate.

$$\text{maximize } z = \sum_{s \in S} \sum_{t \in T} w_{st} x_{st}.$$

Il problema è di PLI (in entrambe le versioni) e la soluzione calcolata dal solutore è garantita essere ottima. Non è garantito che sia unica.