Esercizio 2: Piove!

I dati del problema sono:

- altezza $H = 1{,}80$ [metri],
- distanza della mano dai piedi $S = 1{,}40$ [metri],
- lunghezza del manico dell'ombrello $B = 0{,}90$ [metri],
- sezione dell'ombrello $L = 0{,}80$ [metri],
- velocità di caduta verticale della pioggia $v = 1$ [m/sec],
- velocità del vento $w = 0{,}75$ [m/sec],
- massima inclinazione del corpo $\alpha^{max} = 0{,}4$ [radianti].

Le variabili del problema sono tre: l'inclinazione in avanti del corpo rispetto alla verticale α [radianti], l'inclinazione dell'ombrello rispetto al corpo β [radianti] e la velocità r [m/sec].

Da queste tre variabili e dai dati del problema dipendono le coordinate dei punti importanti per esprimere i vincoli: la testa T, la mano M, le due estremità della sezione dell'ombrello P e Q. Per comodità si può assumere un sistema di riferimento cartesiano con l'origine O coincidente con i piedi della persona. Si ha quindi:

- Coordinate della testa

$x_T = H \sin(\alpha)$
$y_T = H \cos(\alpha)$

- Coordinate della mano

$x_M = S \sin(\alpha)$
$y_M = S \cos(\alpha)$

- Coordinate del centro della sezione dell'ombrello

$x_C = x_M + B \sin(\alpha + \beta)$
$y_C = y_M + B \cos(\alpha + \beta)$

- Coordinate dell'estremo superiore della sezione dell'ombrello

$x_P = x_C - (L/2) \cos(\alpha + \beta)$
$y_P = y_C + (L/2) \sin(\alpha + \beta)$

- Coordinate dell'estremo inferiore della sezione dell'ombrello

$x_Q = x_C + (L/2) \cos(\alpha + \beta)$
$y_Q = y_C - (L/2) \sin(\alpha + \beta)$

Dalla velocità dipende inoltre l'inclinazione della pioggia rispetto alla persona e all'ombrello. Il coefficiente angolare della traiettoria della pioggia è dato da $m = v{=}(w + r)$. L'ombrello definisce un cilindro (che proiettato in due dimensioni è una striscia compresa tra due rette parallele) protetto dall'acqua. Si vuole che tutta la persona giaccia all'interno di questa striscia (cioè che sia i piedi che la testa siano interni alla striscia). Bisogna quindi confrontare il coefficiente angolare della traiettoria della pioggia con il coefficiente angolare della retta che passa per i punti P e T (per verificare che non si bagni la testa) e con il coefficiente angolare della retta che passa per i punti Q e O (per verificare che non si bagnino i piedi). Tali coefficienti angolari sono $m_{PT} = (y_P - y_T)/(x_P - x_T)$ e $m_{QO} = (y_Q - y_O)/(x_Q - x_O)$, dove $x_O = y_O = 0$ per la scelta del sistema di riferimento.
Bisogna quindi imporre che $m_{QO} <= m <= m_{PT}$.

Altri vincoli sono dati dai limiti imposti ai valori delle variabili:

- $-\alpha^{max} <= \alpha <= \alpha^{max}$
- $-\pi <= \beta <= \pi$
- $r >= 0$.

La funzione obiettivo è la velocità r e bisogna massimizzarla.

Il modello di programmazione matematica risultante è non-lineare con variabili continue.

Domanda 1. La soluzione ottima richiede un'inclinazione del corpo pari ad α^*= 0,4 radianti (la massima consentita), un'inclinazione dell'ombrello rispetto al corpo pari a $\beta^* = 0{,}7$ radianti e una velocità di avanzamento pari a $r^* = 0{,}43$ metri al secondo.

Domanda 2. Per rispondere alla seconda domanda è sufficiente considerare variabile la distanza *S*, vincolandola tra i valori $H/2$ e H. Risolvendo nuovamente il modello si trova un valore della velocità leggermente superiore al caso precedente ($r^* = 0{,}46$ metri al secondo). Tale soluzione si ottiene in effetti spostando la mano a distanza di 99 centimetri dai piedi (più in basso di prima) e diminuendo l'inclinazione dell'ombrello rispetto al corpo ($\beta^* = 0{,}51$ radianti).