Esercizio 2: Piscina nel parco

Le variabili del problema sono le coordinate dei vertici del rettangolo oppure i coefficienti delle rette che contengono i lati. Seguendo la seconda ipotesi, che risulta leggermente più semplice, siano a_i, b_i e c_i i tre coefficienti della retta $i=1..4$. Affinché essi rappresentino effettivamente una retta è necessario imporre la condizione di normalizzazione

$$a_i^2+b_i^2=1\ \forall i=1\ldots4$$

Dette x_i e y_i le coordinate del vertice i-esimo, si può imporre il passaggio delle rette per i vertici con le otto equazioni:

$$a_i x_i+b_i y_i+c_i=0\ \forall i=1\ldots4$$
$$a_i x_{i+1}+b_i y_{i+1}+c_i=0\ \forall i=1\ldots4$$

dove gli indici vanno letti modulo 4.

Per imporre che il quadrilatero sia un rettangolo, basta imporre la condizione di perpendicolarità tra le rette con indici consecutivi (bastano 3 delle 4 condizioni):

$$a_i a_{i+1}=-b_i b_{i+1}\ \forall i=1\ldots3$$

Le lunghezze dei lati, dette *L1* e *L2*, sono date da

$$L1=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$L2=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}$$

e l'area da massimizzare è quindi $A = L1*L2$.

Le proporzioni tra le lunghezze sono imposte dai vincoli

$$L1\geq0.4L2$$
$$L2\geq0.4L1$$

Bisogna anche imporre che le coordinate dei vertici siano all'interno del parco:

$$0\leq x_i\leq100\ \forall i=1\ldots4$$
$$0\leq y_i\leq100\ \forall i=1\ldots4$$

Infine, occorre imporre che gli alberi in posizione data non cadano all'interno del rettangolo. Indicando con x' e y' le loro coordinate e utilizzando l'indice $j=1\ldots8$ per indicare gli alberi, si può imporre che le equazioni delle rette dei lati siano soddisfatte come disuguaglianze a meno che il vincolo sia reso ridondante da un termine che dipende da una variabile binaria z_{ij}, come si usa fare in presenza di vincoli disgiuntivi. Bisogna infatti imporre che ogni albero cada dalla parte esterna di almeno uno dei quattro lati della piscina.

Si ha quindi:

$$a_i x'_j+b_i y'_j+c_i\geq-M z_{ij}\ \forall i=1..4,\ j=1..8$$

e

$$\sum_{i=1}^{4} z_{ij} \leq 3 \; \forall j = 1 \ldots 8.$$

Perché i lati siano orientati nella direzione giusta, si può imporre che i vertici del rettangolo soddisfino le stesse disuguaglianze con il segno opposto, cioè siano verso l'interno della piscina rispetto a ciascun lato.

$$a_i x_k + b_i y_k + c_i \leq 0 \; \forall i, k = 1..4$$

Il modello risultante è di PNL e non è convesso.