

Soluzione tema d'esame 20 b.

Esercizio 1: Ferrovie

Il problema consiste nel determinare il flusso ottimo, che permetta allo spedizioniere di aumentare il proprio profitto, da un nodo s a un nodo t in un grafo orientato, dove le capacità degli archi sono date dal prodotto di tre fattori: il numero di treni/giorno, il numero di vagoni/treno e la capacità/vagone.

Le merci da trasportare sono tre (problema di flusso *multicommodity*). Perciò occorrono variabili diverse per rappresentare il flusso dei materiali su ciascuno dei 16 archi, cioè 48 variabili. Con $x(i,j,k)$ si indica il flusso di merce k ($k=A..C$) lungo l'arco (i,j) .



La funzione obiettivo risulta quindi essere la seguente:

$$\max \sum_{i,j,k} x_{i,j,k} * v_k$$

dove v_k indica il valore in euro/ton della merce k , che viene fornito come dato; in Lindo la funzione si presenta così: $\max \ 80 \ x_{s1A} + 80 \ x_{s2A} + 50 \ x_{s1B} + 50 \ x_{s2B} + 65 \ x_{s1C} + 65 \ x_{s2C}$.

La funzione richiede di massimizzare il valore complessivo del flusso[euro/giorno], cioè la somma pesata delle quantità di merce spedite, ciascuna moltiplicata per un coefficiente dato che è il valore unitario della merce.

1. I **vincoli di conservazione del flusso** sono gli stessi dei problemi con una sola *commodity*: per ciascuna delle merci bisogna imporre che la quantità entrante in ogni nodo sia uguale alla quantità uscente, fatta eccezione per i due nodi estremi.

Vincoli di conservazione del flusso per ogni tipo di merce

```
nodo_1A) xs1A - x13A - x14A = 0
nodo_1B) xs1B - x13B - x14B = 0
nodo_1C) xs1C - x13C - x14C = 0
nodo_2A) xs2A - x24A - x25A = 0
nodo_2B) xs2B - x24B - x25B = 0
nodo_2C) xs2C - x24C - x25C = 0
nodo_3A) x13A - x36A - x37A = 0
nodo_3B) x13B - x36B - x37B = 0
nodo_3C) x13C - x36C - x37C = 0
nodo_4A) x14A + x24A - x46A - x47A - x48A = 0
nodo_4B) x14B + x24B - x46B - x47B - x48B = 0
nodo_4C) x14C + x24C - x46C - x47C - x48C = 0
nodo_5A) x25A - x57A - x58A = 0
nodo_5B) x25B - x57B - x58B = 0
nodo_5C) x25C - x57C - x58C = 0
nodo_6A) x36A + x46A - x6tA = 0
nodo_6B) x36B + x46B - x6tB = 0
nodo_6C) x36C + x46C - x6tC = 0
nodo_7A) x37A + x47A + x57A - x7tA = 0
nodo_7B) x37B + x47B + x57B - x7tB = 0
nodo_7C) x37C + x47C + x57C - x7tC = 0
nodo_8A) x48A + x58A - x8tA = 0
nodo_8B) x48B + x58B - x8tB = 0
nodo_8C) x48C + x58C - x8tC = 0
```

2. I **vincoli di capacità** invece devono imporre che **su ogni arco** il flusso complessivo, che è la somma di tre termini relativi alle tre diverse merci, non superi la capacità dell'arco.

Vincoli di capacità sugli archi [ton/giorno]

```
cap_s1) xs1A + xs1B + xs1C <= 800
cap_s2) xs2A + xs2B + xs2C <= 480
cap_13) x13A + x13B + x13C <= 400
cap_14) x14A + x14B + x14C <= 360
cap_24) x24A + x24B + x24C <= 256
cap_25) x25A + x25B + x25C <= 128
cap_36) x36A + x36B + x36C <= 320
cap_37) x37A + x37B + x37C <= 384
cap_46) x46A + x46B + x46C <= 240
cap_47) x47A + x47B + x47C <= 192
cap_48) x48A + x48B + x48C <= 240
cap_57) x57A + x57B + x57C <= 720
cap_58) x58A + x58B + x58C <= 400
cap_6t) x6tA + x6tB + x6tC <= 486
cap_7t) x7tA + x7tB + x7tC <= 300
cap_8t) x8tA + x8tB + x8tC <= 396
```

- Esistono anche dei **vincoli di capacità sui nodi**, che si possono esprimere imponendo che per ogni tipo di merce e per ogni nodo (inclusi s e t) il totale flusso entrante nel o uscente dal nodo sia non superiore al limite dato. Il vincolo può essere imposto sul flusso entrante o sul flusso uscente indifferentemente, dato che i due devono essere uguali per effetto dei vincoli di conservazione del flusso.

Vincoli di capacità sui nodi [ton/giorno]

```
cap_sA) xs1A + xs2A <= 1000
cap_sB) xs1B + xs2B <= 1000
cap_sC) xs1C + xs2C <= 1000
cap_1A) xs1A <= 300
cap_1B) xs1B <= 1800
cap_1C) xs1C <= 1400
cap_2A) xs2A <= 250
cap_2B) xs2B <= 900
cap_2C) xs2C <= 100
cap_3A) x13A <= 900
cap_3B) x13B <= 650
cap_3C) x13C <= 1400
cap_4A) x14A + x24A <= 2000
cap_4B) x14B + x24B <= 1500
cap_4C) x14C + x24C <= 2000
cap_5A) x25A <= 1000
cap_5B) x25B <= 1000
cap_5C) x25C <= 1000
cap_6A) x6tA <= 1200
cap_6B) x6tB <= 1200
cap_6C) x6tC <= 1400
cap_7A) x7tA <= 600
cap_7B) x7tB <= 700
cap_7C) x7tC <= 950
cap_8A) x8tA <= 300
cap_8B) x8tB <= 1700
cap_8C) x8tC <= 1900
cap_tA) x6tA + x7tA + x8tA <= 1000
cap_tB) x6tB + x7tB + x8tB <= 1000
cap_tC) x6tC + x7tC + x8tC <= 1000
```

Il valore ottimo è : (OBJECTIVE FUNCTION VALUE) 82100.00

Risposte

1) Se diminuisse il termine noto dei vincoli di capacità sulle singole stazioni, la soluzione non cambierebbe poiché nessuno dei vincoli è attivo, quindi non utilizzo tutta la capacità delle stazioni, con l'eccezione di soli tre casi critici che corrispondono agli unici tre vincoli attivi di questo tipo: essi riguardano le operazioni di carico e scarico della merce A nelle stazioni 1 e 2 e della merce C nella stazione 2.

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
CAP_SA)	450.000000	0.000000
CAP_SB)	966.000000	0.000000
CAP_SC)	440.000000	0.000000
CAP_1A)	0.000000	15.000000
CAP_1B)	1800.000000	0.000000
CAP_1C)	940.000000	0.000000
CAP_2A)	0.000000	30.000000
CAP_2B)	866.000000	0.000000
CAP_2C)	0.000000	15.000000
CAP_3A)	600.000000	0.000000
CAP_3B)	650.000000	0.000000
CAP_3C)	1300.000000	0.000000
CAP_4A)	1984.000000	0.000000
CAP_4B)	1500.000000	0.000000
CAP_4C)	1400.000000	0.000000
CAP_5A)	990.000000	0.000000
CAP_5B)	966.000000	0.000000
CAP_5C)	916.000000	0.000000
CAP_6A)	714.000000	0.000000
CAP_6B)	1200.000000	0.000000
CAP_6C)	1400.000000	0.000000
CAP_7A)	546.000000	0.000000
CAP_7B)	700.000000	0.000000
CAP_7C)	704.000000	0.000000
CAP_8A)	290.000000	0.000000
CAP_8B)	1666.000000	0.000000
CAP_8C)	1586.000000	0.000000
CAP_TA)	450.000000	0.000000
CAP_TB)	966.000000	0.000000
CAP_TC)	440.000000	0.000000

Il prezzo ombra (dual prices) dei vincoli è pari rispettivamente a 15, 30 e 15 Euro/tonnellata. Tale è il massimo prezzo che lo scaricatore dovrebbe essere disposto a pagare per mantenere i termini noti dei vincoli attivi ai valori attuali.

2) Le tratte critiche sono quelle corrispondenti agli archi il cui vincolo di capacità è attivo e il prezzo duale è strettamente positivo. Essi sono (1,3), (1,4), (2,4), (2,5) ed identificano il taglio di minima capacità nel grafo della rete ferroviaria.

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
CAP_S1)	40.000000	0.000000
CAP_S2)	96.000000	0.000000
CAP_13)	0.000000	65.000000
CAP_14)	0.000000	65.000000
CAP_24)	0.000000	50.000000
CAP_25)	0.000000	50.000000
CAP_36)	74.000000	0.000000
CAP_37)	230.000000	0.000000
CAP_46)	0.000000	0.000000
CAP_47)	56.000000	0.000000

Il vincolo non è attivo perché ho un valore nullo nel prezzo d'ombra, quindi non pagherei nulla per avere un'unità in più di questa risorsa.

CAP_48)	0.000000	0.000000
CAP_57)	710.000000	0.000000
CAP_58)	282.000000	0.000000
CAP_6T)	0.000000	0.000000
CAP_7T)	0.000000	0.000000
CAP_8T)	38.000000	0.000000

3) Con l'analisi parametrica sul vincolo di capacità della tratta (6,t) si ricava che i punti di discontinuità della retta spezzata che lega la funzione obiettivo al termine noto del vincolo hanno coordinate (476,82100), (442,80400) e (0, 51670) ed il coefficiente angolare dei tratti lineari tra di essi è pari a 50 e 65.

Da questi dati si ricava con qualche semplice calcolo che il valore di ascissa, cioè di capacità, corrispondente ad una diminuzione del 10% del valore ottimo, cioè a 73890 anziché 82100 Euro/giorno è compreso tra 378 ton/giorno (due vagoni in meno per ogni treno) e 324 ton/giorno (tre vagoni in meno per ogni treno). La risposta quindi è: 2 vagoni.

RIGHTHANDSIDE PARAMETRICS REPORT FOR ROW: CAP_6T

VAR OUT	VAR IN	PIVOT ROW	RHS VAL	DUAL PRICE BEFORE PIVOT	OBJ VAL
			486.000	0.000000E+00	82100.0
X57C	SLK 6	66	476.000	0.000000E+00	82100.0
X24C	X14A	12	460.000	50.0000	81300.0
X25B	X13B	61	442.000	50.0000	80400.0
X46B	X14B	55	442.000	65.0000	80400.0
X24B	SLK 4	58	442.000	65.0000	80400.0
X13C	X24C	15	324.000	65.0000	72730.0
X36A	X46B	8	240.000	65.0000	67270.0
X36B	SLK 10	64	240.000	65.0000	67270.0
X25C	X47A	62	232.000	65.0000	66750.0
SLK 11	SLK 5	26	150.000	65.0000	61420.0
X7TC	X48A	68	122.000	65.0000	59600.0
X6TA	ART	63	0.000000E+00	65.0000	51670.0