

Modelli di programmazione lineare

Giovanni Righini

Esercizio 1: Il mix produttivo ottimale. Questo esercizio è tratto da E.V. Denardo, *The science of decision making: a problem-based approach using Excel*, Wiley, 2002.

Un impianto produce tre modelli di veicoli: A, B e C. L'impianto contiene un reparto motori, un reparto carrozzeria e tre reparti per le finiture, uno per ogni modello. I primi due reparti trattano motori e carrozzerie di tutti e tre i modelli. I dati sono espressi nella tabella 1. Le capacità produttive di ogni reparto sono espresse in ore lavorative per settimana. I tempi di lavorazione sono espressi in ore lavorative per veicolo. Sono dati i profitti per ogni veicolo. Si vuole massimizzare il profitto complessivo.

Reparto	Capacità	Tempi di lavorazione		
		A	B	C
Motori	120	3	2	1
Carrozzeria	80	1	2	3
A	96	2		
B	102		3	
C	40			2
Profitti		840	1120	1200

Soluzione.

Si tratta di un problema di massimizzazione dei profitti, ottenuti trasformando risorse in prodotti, con vincoli sulla massima quantità di risorse disponibili. Le variabili rappresentano le quantità prodotte ed i profitti unitari sono dati per ogni prodotto.

Il modello matematico è il seguente.

Dati. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, 5$ la risorsa e con un indice $j = A, \dots, C$ i modelli. Indichiamo con a_{ij} il consumo dato di risorsa $i = 1, \dots, 5$ per ogni veicolo di tipo $j = A, \dots, C$ (ore / veicolo). Indichiamo con b_i la massima quantità di risorsa $i = 1, \dots, 5$ disponibile, cioè la massima capacità produttiva di ogni reparto (ore / settimana). Indichiamo con c_j il profitto per ogni tipo di veicolo $j = A, \dots, C$ (Euro / veicolo).

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere quanti veicoli produrre di ogni tipo ogni settimana. Definiamo quindi una variabile per ogni tipo di modello. La variabile indica il numero di veicoli prodotti ogni settimana. Abbiamo quindi le variabili x_j con $j = A, \dots, C$, misurate in veicoli / settimana.

Vincoli. Il numero di veicoli producibili è limitato da cinque risorse limitate, che corrispondono ai cinque reparti interessati. Si esprimono i vincoli come $\sum_{j=A}^C a_{ij}x_j \leq b_i \quad \forall i = 1, \dots, 5$.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare il profitto complessivo z , che dipende dalla produzione scelta: $z = \sum_{j=A}^C c_jx_j$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned}
 \max z &= \sum_{j=A}^C c_jx_j \\
 \text{s.t. } &\sum_{j=A}^C a_{ij}x_j \leq b_i && \forall i = 1, \dots, 5 \\
 &x_j \geq 0 && \forall j = A, \dots, C
 \end{aligned}$$

Esercizio n.1 bis: Radioterapia

Nel trattamento anti-tumorale con radioterapia è possibile irraggiare la parte malata da diverse posizioni ed angolature e con diversa intensità. Per ognuna di queste possibilità tuttavia bisogna tener conto degli effetti collaterali nocivi che il trattamento provoca sugli organi adiacenti la massa tumorale. Si supponga di conoscere un insieme discreto di possibilità di irraggiamento di un tumore e di voler decidere con quale intensità effettuare l'irraggiamento per ciascuna di esse. Si considerano un dato numero di organi adiacenti da preservare e **per ogni possibilità di irraggiamento è noto un coefficiente che esprime la percentuale di radiazione che colpirebbe il tumore e la percentuale di radiazione che colpirebbe ciascuno degli organi adiacenti.** Nell'esempio riportato qui le posizioni da cui è possibile irraggiare il tumore sono cinque e gli organi adiacenti il tumore sono sette.

Organi	Posizioni				
	1	2	3	4	5
Tumore	0.4	0.3	0.25	0.7	0.5
Org. 1	0.1	0.0	0.0	0.1	0.2
Org. 2	0.1	0.0	0.15	0.0	0.1
Org. 3	0.0	0.1	0.0	0.0	0.0
Org. 4	0.0	0.2	0.1	0.1	0.0
Org. 5	0.1	0.0	0.2	0.0	0.1
Org. 6	0.1	0.3	0.15	0.1	0.1
Org. 7	0.2	0.1	0.15	0.0	0.0

Table 1: Coefficienti di assorbimento delle radiazioni [%] per il tumore e per gli organi adiacenti.

L'intensità totale delle radiazioni utilizzabili nel trattamento è limitata a 60 Gray e ci sono soglie massime anche sull'intensità di radiazione per ogni singola possibilità di irraggiamento.

Posizione	Limite max.
1	12
2	13
3	10
4	15
5	15

Table 2: Limiti massimi di radiazione (Gray) erogabile per ogni posizione.

Si vuole **massimizzare l'effetto delle radiazioni sul tumore**, cioè la quantità totale di radiazioni assorbite dal tumore, nel rispetto di alcune soglie massime di tolleranza per i livelli di radiazione assorbiti da ciascun organo adiacente.

Organo	Limite max.
1	5.5
2	9.0
3	6.0
4	2.4
5	7.0
6	5.5
7	9.5

Table 3: Limiti massimi di radiazione (Gray) ammissibile per ogni organo.

Soluzione.

Per quanto possa sembrare strano, questo problema di ottimizzazione in ambito sanitario ha una formulazione matematica pressoché identica a quello precedente, tratto invece da un tipico contesto di ingegneria industriale. In entrambi i casi, infatti, si vuole massimizzare un effetto, nel rispetto di alcuni vincoli. In questo esempio l'effetto da massimizzare è la quantità di radiazioni sul tumore anziché il profitto ed i vincoli sono dati dalla massima quantità di radiazioni sugli organi circostanti anziché dalle risorse limitate. Tuttavia sia la funzione obiettivo sia i vincoli si formulano ancora con funzioni lineari. Si tratta inoltre di un problema con variabili limitate, dove cioè è utile considerare soluzioni di base estese, in cui ogni variabile non-basica può essere fuori base per due motivi diversi: o perché ha un valore pari al suo limite inferiore o perché ha un valore pari al suo limite superiore.

Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $O = 7$ organi e $P = 5$ posizioni di irraggiamento. Indichiamo con un indice $i = 0, \dots, O$ ogni organo, dove l'indice $i = 0$ indica il tumore e con un indice $j = 1, \dots, P$ ogni posizione. Indichiamo con m_i la massima intensità di radiazione ammissibile per ogni organo $i = 1, \dots, O$ e con r_j la massima intensità di radiazione erogabile dalla posizione $j = 1, \dots, P$. Indichiamo con a_{ij} la percentuale di radiazione assorbita dall'organo $i = 0, \dots, O$ dalla posizione $j = 1, \dots, P$. Indichiamo con R la massima quantità di radiazione erogabile complessiva.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel **decidere la quantità di radiazione da erogare da ogni posizione**. Definiamo quindi una variabile continua e non-negativa per ogni posizione, per indicare tale quantità. Abbiamo quindi variabili continue non-negative $x_j \forall j = 1, \dots, P$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che:

- la radiazione complessiva sia non superiore a R : $\sum_{j=1}^P x_j \leq R$;
- la radiazione erogata da ogni posizione $j = 1, \dots, P$ non sia superiore al limite massimo r_j : $x_j \leq r_j \forall j = 1, \dots, P$;
- la radiazione assorbita da ogni organo $i = 1, \dots, O$ non sia superiore al limite massimo m_i : $\sum_{j=1}^P a_{ij} x_j \leq m_i \forall i = 1, \dots, O$.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare la radiazione che colpisce il tumore: $\max \sum_{j=1}^P a_{0j} x_j$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= \sum_{j=1}^P a_{0j} x_j \\ \text{subject to } \sum_{j=1}^P a_{ij} x_j &\leq m_i && \forall i = 1, \dots, O \\ x_j &\leq r_j && \forall j = 1, \dots, P \\ \sum_{j=1}^P x_j &\leq R \\ x_j &\geq 0 && \forall i = 1, \dots, O \quad \forall j = 1, \dots, P. \end{aligned}$$

Nell'ipotesi di poter eccedere una delle soglie di tolleranza relative agli organi adiacenti, quale soglia di tolleranza converrebbe violare per avere il miglior risultato sul tumore?

Esercizio 2: Patate

Un'azienda produce pacchi di patatine surgelate sia a bastoncino (A) che in pezzi più piccoli (B) e di fiocchi surgelati per il puré (C). L'azienda acquista da due fornitori con rese differenti.

	A	B	C
Forn. 1	20%	20%	30%
Forn. 2	30%	10%	30%

L'avanzo del 30% per entrambi i fornitori è lo scarto non recuperabile. Il profitto dell'azienda è di 2 centesimi di Euro per ogni chilogrammo di patate provenienti dal fornitore 1 e di 3 centesimi per ogni chilogrammo di patate provenienti dal fornitore 2. Ci sono delle limitazioni alle quantità massime di ciascun tipo di prodotto: 6 tonnellate di A, 4 di B e 8 di C.

Soluzione.

Si tratta di una variante del problema di mix produttivo ottimale, nella quale si vogliono massimizzare i profitti trasformando risorse in prodotti, ma stavolta i vincoli anziché limitare la quantità di risorse disponibili limitano la quantità di prodotti producibile; le variabili non indicano le quantità di prodotti ottenuti bensì le quantità di risorse acquistate ed i profitti unitari non sono legati ai prodotti ma alle risorse acquistate.

Il modello matematico del problema è il seguente.

Dati. Bisogna definire un insieme di prodotti e un insieme di fornitori. Siano P l'insieme dei prodotti e F l'insieme dei fornitori. Nell'esempio dato i prodotti sono tre e i fornitori due.

I dati descritti nel testo sono:

- una matrice, che indichiamo con a_{pf} che indica la percentuale di trasformazione delle patate per ogni prodotto $p \in P$ e per ogni fornitore $f \in F$ [adimensionale];
- un vettore, che indichiamo con c_f che indica il profitto unitario per ogni chilogrammo di patate acquistato dal fornitore $f \in F$ [€/Kg];
- un vettore, che indichiamo con b_p che indica la massima produzione di ogni prodotto $p \in P$ [Kg].

Per rendere omogenee le unità di misura, è opportuno quindi esprimere i dati b in chilogrammi anziché tonnellate e i dati c in euro al chilogrammo anziché centesimi al chilogrammo. Questo fa sì che nello stesso modello compaiano numeri dell'ordine dei centesimi e numeri dell'ordine delle migliaia: cinque ordini di grandezza sono tollerabili per un solutore, ma in generale è opportuno prestare attenzione a che non compaiano nel modello coefficienti molto diversi tra loro come ordine di grandezza, perché questo potrebbe provocare problemi numerici nel processo risolutivo.

Variabili. Le variabili sono le quantità da acquistare presso ogni fornitore [Kg]. Le indichiamo con x_f per ogni fornitore $f \in F$. Sono variabili continue e non-negative.

Si noti che nel modello di PL, dove le variabili corrispondono alle colonne e i vincoli alle righe, l'esempio proposto risulta avere due colonne e tre righe, anche se nella descrizione testuale la matrice a viene presentata con due righe e tre colonne. E' quindi conveniente utilizzare l'indice p come indice di riga e l'indice f come indice di colonna e scrivere a_{pf} anziché a_{fp} come potrebbe essere intuitivo ad una prima occhiata.

Vincoli. La produzione di ogni tipo di prodotto $p \in P$ è limitata superiormente dai dati b_p . Esiste pertanto un vincolo di disuguaglianza per ogni prodotto. Il primo membro, che deve rappresentare la quantità totale prodotta per ogni $p \in P$, è dato dalla somma di tanti termini quanti i fornitori.

$$\sum_{f \in F} a_{pf} x_f \leq b_p \quad \forall p \in P \text{ [Kg]}.$$

Si può facilmente controllare che ogni indice che compare in ogni vincolo sia quantificato o (nel senso di xor) sia usato come indice di una somma.

Tutti i vincoli sono lineari.

Obiettivo. Il testo non specifica esplicitamente l'obiettivo, ma ragionando sul modello risulta evidente che si tratta di un problema di massimizzazione del profitto complessivo [€].

Anche il profitto, che indichiamo con z è dato dalla somma di tanti termini quante le variabili del problema.

$$\text{maximize } z = \sum_{f \in F} c_f x_f \text{ [euro]}.$$

Anche la funzione obiettivo è lineare.

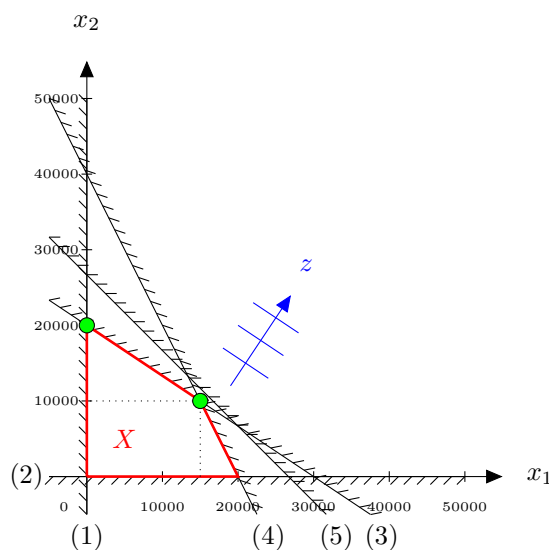
Il modello completo. Dalle definizioni sopra riportate risulta il seguente modello: a sinistra è indicato il modello del problema, a destra il modello dello specifico esempio proposto.

$\begin{aligned} \text{maximize } z &= \sum_{f \in F} c_f x_f \\ \text{s.t. } \sum_{f \in F} a_{pf} x_f &\leq b_p \quad \forall p \in P \\ x_f &\geq 0 \quad \forall f \in F \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{maximize } z &= 0,02x_1 + 0,03x_2 \\ \text{s.t. } 0,20x_1 + 0,30x_2 &\leq 6000 \\ 0,20x_1 + 0,10x_2 &\leq 4000 \\ 0,30x_1 + 0,30x_2 &\leq 8000 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$
---	--

Poiché le variabili sono continue e sia i vincoli che l'obiettivo sono lineari, si tratta di un modello di programmazione lineare.

Nell'esempio proposto il modello alle disuguaglianze ha tre vincoli e due variabili. Posto in forma standard, esso ha quindi tre vincoli e cinque variabili. La base è formata da tre colonne, mentre le restanti due sono fuori base. Quindi almeno due delle cinque variabili sono certamente nulle in ogni soluzione di base. Risolvendo il modello con l'algoritmo del simplesso si ottiene la soluzione ottima $x_1 = 0, x_2 = 20000$, a cui corrisponde una produzione di 6000, 2000 e 6000 chilogrammi per i tre prodotti. Di conseguenza il primo dei tre vincoli risulta essere attivo all'ottimo, gli altri due no. Le variabili di slack all'ottimo valgono infatti: $x_3 = 0, x_4 = 2000$ e $x_5 = 2000$. Si verifica quindi che, come previsto, due delle cinque variabili sono nulle: si tratta di x_1 e x_3 .

Dato che l'esempio ha due sole variabili, si può risolvere anche per via geometrica.



La soluzione ottima fornita dal solutore non è unica: poiché le curve di livello dell'obiettivo sono parallele al vincolo (5), anche la soluzione di base $x_1 = 15000, x_2 = 10000$ è ottima. Del fatto che la soluzione ottima non sia unica è facile accorgersi notando che una delle variabili fuori base, x_1 , ha costo ridotto nullo. Si tratta di un esempio nel quale il problema duale è degenere e quindi il primale ha soluzioni ottime multiple.

Esercizio 3: Cereali.

Una fattoria ha due lotti di terreno: A di 200 acri e B di 400 acri. Sei tipi di cereali numerati da 1 a 6 possono esservi coltivati. Per ogni quintale di cereale prodotto il profitto è dato dalla tabella seguente.

Cereale	1	2	3	4	5	6
Profitto unit. [€/q]	48	62	28	36	122	94

Ogni quintale di cereale necessita di una certa area (espressa in acri) e di una certa quantità di acqua (espressa in metri cubi) secondo questa tabella.

Cereale	1	2	3	4	5	6
area su A	0.02	0.03	0.02	0.016	0.05	0.04
area su B	0.02	0.034	0.024	0.02	0.06	0.034
acqua	120	160	100	140	215	180

Il volume totale di acqua disponibile è di 400000 metri cubi.

Soluzione.

Si tratta ancora di un problema di mix produttivo ottimale.

Il modello matematico del problema è il seguente.

Dati. Bisogna anzitutto definire un insieme di cereali, che indichiamo con C . Inoltre, visto che due delle risorse, i terreni, sono dello stesso tipo, possiamo introdurre anche un insieme di terreni T .

I dati descritti nel testo sono:

- un vettore, che indichiamo con v le cui componenti indicano il profitto unitario v_c per ogni tipo di cereale $c \in C$ [€/q];
- una matrice, che indichiamo con a i cui elementi a_{tc} indicano il consumo unitario di superficie su ogni terreno $t \in T$ per ogni cereale $c \in C$ [acri/q];
- un vettore, che indichiamo con h le cui componenti h_c indicano il consumo unitario di acqua per ogni cereale $c \in C$ [mc];
- un vettore, che indichiamo con b le cui componenti b_t indicano la superficie disponibile sui terreni [acri];
- uno scalare, che indichiamo con H che indica la quantità di acqua disponibile [mc].

Per evitare che nello stesso modello compaiano coefficienti molto piccoli (come 0.016) e molto grandi (come 400000), è opportuno modificare le unità di misura. Ad esempio le quantità di acqua possono essere misurate in migliaia di metri cubi.

Variabili. Le variabili sono le quantità di cereale da coltivare su ogni terreno [q]. Le indichiamo con x_{tc} per ogni terreno $t \in T$ e per ogni cereale $c \in C$. Sono variabili continue e non-negative.

Si noti che non bastano 6 variabili, una per ogni cereale, poiché non sarebbe possibile distinguere le quantità coltivate sui diversi terreni, le quali implicano in generale un consumo di superficie diverso su terreni diversi.

Vincoli. La produzione dei cereali è limitata da tre risorse: la superficie dei due terreni e l'acqua. Esistono pertanto tre vincoli di disuguaglianza, uno per ogni risorsa, che impongono che quanto consumato non ecceda la quantità disponibile.

$$\sum_{c \in C} a_{tc} x_{tc} \leq b_t \quad \forall t \in T \quad [\text{acri}]$$
$$\sum_{c \in C, t \in T} h_c x_{tc} \leq H \quad [\text{Kmc}]$$

Si può facilmente controllare che ogni indice che compare in ogni vincolo sia quantificato o (nel senso di xor) sia usato come indice di una somma.

Tutti i vincoli sono lineari.

Obiettivo. Anche in questo caso il testo non specifica esplicitamente l'obiettivo, ma appare evidente che si tratta ancora di un problema di massimizzazione del profitto complessivo [€].

Anche il profitto, che indichiamo con z è dato dalla somma di tanti termini quante le variabili del problema.

$$\text{maximize } z = \sum_{c \in C, t \in T} v_c x_{tc} \text{ [euro]}.$$

Anche la funzione obiettivo è lineare.

Il modello completo. Dalle definizioni sopra riportate risulta il seguente modello: sopra è indicato il modello del problema, sotto il modello dello specifico esempio proposto.

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= \sum_{c \in C, t \in T} v_c x_{tc} \\ \text{s.t. } \sum_{c \in C} a_{tc} x_{tc} &\leq b_t & \forall t \in T \\ \sum_{c \in C, t \in T} h_c x_{tc} &\leq H \\ x_{tc} &\geq 0 & \forall t \in T, \forall c \in C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= 48(x_{11} + x_{21}) + 62(x_{12} + x_{22}) + 28(x_{13} + x_{23}) + 36(x_{14} + x_{24}) + 122(x_{15} + x_{25}) + 94(x_{16} + x_{26}) \\ \text{s.t. } 0,02x_{11} + 0,03x_{12} + 0,02x_{13} + 0,016x_{14} + 0,05x_{15} + 0,04x_{16} &\leq 200 \\ 0,02x_{21} + 0,034x_{22} + 0,024x_{23} + 0,02x_{24} + 0,06x_{25} + 0,034x_{26} &\leq 400 \\ 0,120(x_{11} + x_{21}) + 0,160(x_{12} + x_{22}) + 0,100(x_{13} + x_{23}) + & \\ + 0,140(x_{14} + x_{24}) + 0,215(x_{15} + x_{25}) + 0,180(x_{16} + x_{26}) &\leq 400 \\ x_{11}, x_{21}, x_{12}, x_{22}, x_{13}, x_{23}, x_{14}, x_{24}, x_{15}, x_{25}, x_{16}, x_{26} &\geq 0. \end{aligned}$$

Poiché le variabili sono continue e sia i vincoli che l'obiettivo sono lineari, si tratta di un modello di programmazione lineare.

Nell'esempio proposto il modello alle disuguaglianze ha tre vincoli e dodici variabili. Posto in forma standard, esso ha quindi tre vincoli e quindici variabili. La base è formata da tre colonne, mentre le restanti dodici sono fuori base. Quindi almeno dodici delle quindici variabili sono certamente nulle in ogni soluzione di base.

Infatti, risolvendo il modello con l'algoritmo del simplesso si ottiene una soluzione ottima che prevede di coltivare 1860,47 quintali di un solo tipo di cereale, il numero 5, su un solo terreno. Le altre due variabili in base sono le variabili di slack dei due vincoli sulle superfici, che non sono attivi.

Tutte le altre variabili sono nulle, inclusa la variabile di slack del vincolo sull'acqua, che è attivo. Intuitivamente c'è un'altra soluzione ottima che consiste nel coltivare la stessa quantità dello stesso cereale sull'altro terreno. Infatti i costi ridotti delle due variabili x_{15} e x_{25} sono entrambi nulli, sia quello della variabile in base sia quello della variabile fuori base, il che significa che le due variabili possono scambiarsi di ruolo indifferentemente.

Poiché il problema ha dodici variabili e non due, non è possibile darne una rappresentazione geometrica.

Esercizio 4: Scommesse sui cavalli.

In una corsa di cavalli i favoriti sono Fulmine, Freccia, Dardo e Lampo, quotati rispettivamente 3 : 1, 4 : 1, 5 : 1 e 6 : 1. Avendo un budget di 57 Euro da spendere, si vuole massimizzare la vincita nel caso peggiore.

Soluzione.

Si tratta ancora di un problema di massimizzazione con risorse limitate, ma stavolta il modo in cui le risorse vengono ripartite è variabile e la funzione obiettivo è di tipo max-min, cioè si vuole massimizzare non la somma di alcuni termini ma il minimo di essi.

Il modello matematico del problema è il seguente.

Dati. Sono dati

- un insieme di cavalli, C ;
- un vettore i cui elementi q_c indicano la quotazione del cavallo $c \in C$ [adimensionali];
- uno scalare b , che indica il budget disponibile [€].

Variabili. Le variabili sono le puntate x_c su ogni cavallo $c \in C$ [€]. Sono variabili non-negative. A rigore, dovrebbero essere definite come variabili discrete, essendo vincolate ad essere multipli interi di una puntata minima accettabile, ad esempio 0,01 €. Tuttavia, assumiamo di poter risolvere il problema nel continuo, poiché l'approssimazione che si introduce (dell'ordine di grandezza del centesimo) è chiaramente trascurabile rispetto alle grandezze in gioco (dell'ordine di grandezza della decina).

Vincoli. Esiste un vincolo di budget che limita la quantità totale delle puntate.

$$\sum_{c \in C} x_c \leq b \quad [\text{euro}]$$

Il vincolo è lineare.

Obiettivo. Poiché si chiede di massimizzare la vincita nel caso peggiore, si tratta di una funzione obiettivo di tipo max-min. Esprimerla come

$$\text{maximize } z = \min_{c \in C} \{q_c x_c\} \quad [\text{euro}]$$

sarebbe corretto matematicamente, ma non consentirebbe di risolvere il modello con un solutore di programmazione matematica. A questo scopo è necessario che la funzione obiettivo sia effettivamente una funzione e non il minimo (o il massimo) tra diverse funzioni. Per conseguire questo risultato è dunque necessario riformulare l'obiettivo, linearizzandolo. La tecnica che si utilizza a questo scopo è tipica di tutte le funzioni obiettivo max-min o min-max. Essa consiste nell'introdurre una variabile ausiliaria col significato di "minimo di..." (o "massimo di..."), la quale costituisce l'obiettivo e viene vincolata ad essere minore o uguale (o maggiore uguale) rispetto a tutte le grandezze di cui dev'essere il minimo (o il massimo). Nel nostro esempio, si introduce quindi una variabile ausiliaria y (espressa in €), l'obiettivo da massimizzare diventa semplicemente

$$\text{maximize } z = y$$

e si aggiungono i vincoli

$$y \leq q_c x_c \quad \forall c \in C.$$

La variabile ausiliaria è anch'essa continua e non-negativa. I vincoli e la funzione obiettivo risultano lineari.

Il modello completo. Dalle definizioni sopra riportate risulta il seguente modello: a sinistra è indicato il modello del problema, a destra il modello dello specifico esempio proposto.

$$\text{maximize } z = y$$

$$\text{s.t. } \sum_{c \in C} x_c \leq b$$

$$y \leq q_c x_c \quad \forall c \in C$$

$$x_c \geq 0 \quad \forall c \in C$$

$$y \geq 0$$

$$\text{maximize } z = y$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 57$$

$$y \leq 3x_1$$

$$y \leq 4x_2$$

$$y \leq 5x_3$$

$$y \leq 6x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y \geq 0$$

Poiché le variabili sono continue e sia i vincoli che l'obiettivo sono lineari, si tratta di un modello di programmazione lineare.

Nell'esempio proposto il modello alle disuguaglianze ha cinque vincoli e cinque variabili. Posto in forma standard, esso ha quindi cinque vincoli e dieci variabili. La base è formata da cinque colonne, mentre le restanti cinque sono fuori base. Quindi almeno cinque delle dieci variabili sono certamente nulle in ogni soluzione di base. Tuttavia, per come sono fatti i quattro vincoli $y \leq q_c x_c$, se una delle x_c fosse nulla, sarebbero nulle anche y e la variabile di slack del corrispondente vincolo. Per converso, se y è strettamente positiva, allora nessuna delle x_c può essere nulla. Quindi in tal caso l'unica possibilità è che siano nulle le cinque variabili di slack. Ciò significa che il budget viene investito completamente e che i valori delle puntate sono tali da generare le uguaglianze $3x_1 = 4x_2 = 5x_3 = 6x_4$.

Infatti, risolvendo il modello con l'algoritmo del simplesso si ottiene una soluzione ottima che ha queste caratteristiche. Il fatto che la vincita minima sia massimizzata implica che la vincita debba essere uguale in tutti i casi possibili. Il fatto più che tale vincita risulti, in questo esempio, strettamente superiore al budget, garantendo quindi una vincita certa al giocatore indipendentemente dall'esito della gara, è poco realistico e dipende dai valori dei dati (quotazioni troppo alte). In generale non è detto che sia così: basta risolvere lo stesso modello con valori inferiori delle quotazioni per convincersene.

Esercizio 5: Miscelazione di idrocarburi.

In una raffineria si vogliono miscelare 4 sostanze (A, B, C e D) per produrre benzina super, benzina normale e benzina verde. Ciascun tipo di benzina deve contenere una percentuale delle sostanze entro certi limiti indicati nella tabella seguente (colonne = tipi di benzina; righe = sostanze).

	super	normale	verde
A	$\leq 30\%$	$\leq 50\%$	$\leq 70\%$
B	$\geq 40\%$	$\geq 10\%$	
C	$\leq 50\%$		
D			

Le risorse disponibili sono date da 3000, 2000, 4000 e 1000 barili giornalieri delle 4 sostanze, che costano rispettivamente 3, 6, 4 e 5 dollari al barile. I ricavi ottenuti dalla produzione di ciascun tipo di benzina sono pari a 5,5, 4,5 e 3,5 dollari al barile. Si vogliono massimizzare i guadagni.

Soluzione.

Si tratta ancora di un problema di massimizzazione con risorse limitate, ma stavolta la trasformazione delle risorse in prodotti non è data, ma va decisa all'interno di dati intervalli. Anche la quantità di risorse disponibili non è determinata e l'obiettivo richiede di massimizzare la differenza tra i profitti dovuti ai prodotti ottenuti e i costi dovuti alle risorse acquistate.

Il modello matematico del problema è il seguente.

Dati. Sono dati

- un insieme S di sostanze;
- un insieme B di benzine;
- un vettore i cui elementi p_s indicano il prezzo di acquisto di ogni sostanza $s \in S$ [\$/barile];
- un vettore i cui elementi v_b indicano il prezzo di vendita di ogni benzina $b \in B$ [\$/barile];
- un vettore i cui elementi q_s indicano la massima quantità disponibile per ogni sostanza $s \in S$ [barili];
- una matrice di limiti inferiori o superiori alla percentuali di ogni sostanza $s \in S$ in ogni benzina $b \in B$ [adimensionale]. Poiché i limiti inferiori e i limiti superiori giocano ruoli ovviamente diversi nel modello, è opportuno sdoppiare la matrice in una matrice l (lower bounds) e una matrice u (upper bounds), ciascuna con una riga per ogni sostanza ed una colonna per ogni benzina. Laddove i limiti non sono specificati, basta porre $l_{bs} = 0$ e $u_{bs} = 1$.

Variabili. Non è immediato intuire quale sia la scelta più opportuna per le variabili. Istintivamente si può essere portati a definire come variabile la percentuale di sostanza s nella benzina b per ogni $s \in S, b \in B$. Tuttavia questa scelta, che permette di esprimere in modo immediato i vincoli sulle percentuali massime e minime, rende problematico esprimere le quantità totali di sostanze consumate e di benzine prodotte. Meglio quindi utilizzare variabili x_{sb} che esprimono le quantità (misurate in barili) di ogni sostanza $s \in S$ in ogni benzina $b \in B$. Tali variabili sono continue e non-negative.

Vincoli. Esiste un vincolo sulle massime quantità di sostanze utilizzabili:

$$\sum_{b \in B} x_{sb} \leq q_s \quad \forall s \in S \quad [\text{barili}]$$

Inoltre esistono i vincoli sui limiti inferiori e superiori nella composizione delle benzine. Per esprimerli più facilmente può essere conveniente (anche se non è indispensabile) **introdurre una variabile ausiliaria y_b per ogni benzina $b \in B$, indicante la quantità totale prodotta**. Si ha così:

$$\begin{aligned} x_{sb} &\geq l_{sb} y_b \quad \forall s \in S, \forall b \in B \quad [\text{barili}] \\ x_{sb} &\leq u_{sb} y_b \quad \forall s \in S, \forall b \in B \quad [\text{barili}]. \end{aligned}$$

Le variabili ausiliarie y vengono compensate da altrettanti vincoli di uguaglianza, che ne definiscono il valore in funzione delle variabili originali x

$$y_b = \sum_{s \in S} x_{sb} \quad \forall b \in B \text{ [barili]}.$$

Tutti i vincoli sono lineari e anche le variabili ausiliarie y sono continue e non-negative.

Obiettivo. Si chiede di massimizzare i profitti, ossia la differenza tra il totale dei ricavi ed il totale dei costi. I costi complessivi sono dati da $\sum_{s \in S} p_s \sum_{b \in B} x_{sb}$. I ricavi complessivi sono dati da $\sum_{b \in B} v_b \sum_{s \in S} x_{sb}$. Quindi l'obiettivo si può esprimere come segue:

$$\text{maximize } z = \sum_{s \in S, b \in B} x_{sb}(v_b - p_s) \text{ [euro]}.$$

Il modello completo. Dalle definizioni sopra riportate risulta il seguente modello (del problema, non dello specifico esempio).

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= \sum_{s \in S, b \in B} (v_b - p_s)x_{sb} \\ \text{s.t. } \sum_{b \in B} x_{sb} &\leq q_s & \forall s \in S \\ x_{sb} &\geq l_{sb}y_b & \forall s \in S, \forall b \in B \\ x_{sb} &\leq u_{sb}y_b & \forall s \in S, \forall b \in B \\ y_b &= \sum_{s \in S} x_{sb} & \forall b \in B \\ x_{sb} &\geq 0 & \forall s \in S, \forall b \in B \\ y_b &\geq 0 & \forall b \in B \end{aligned}$$

Poiché le variabili sono continue e sia i vincoli che l'obiettivo sono lineari, si tratta di un modello di programmazione lineare.

Esercizio n.6: La dieta.

Un team di dietologi ha studiato le quantità ottimali di sostanze nutritive che dovrebbero costituire l'alimentazione ottimale per un atleta. L'atleta deve procurarsi le sostanze nutritive da un opportuno mix di cibi disponibili e vuole riuscirvi **minimizzando** i costi. Proteine, carboidrati, grassi, calcio e fosforo devono essere assunti in quantità comprese tra dati valori minimi e massimi. Formulare il problema, classificarlo e risolverlo con i dati seguenti. Quanto costa ogni giorno la dieta ottimale?

Sostanze	Alimenti						
	Pasta	Latte	Formaggio	Pesce	Verdura	Pane	Polenta
Proteine	11.5	3.15	8	18.5	2.1	12.0	9
Carboidrati	72.7	4.85	3.8	0.5	0	68	74
Grassi	1.5	1.55	11	19	0.1	6	1

Table 4: Quantità di sostanza nutritive (grammi di sostanza per ogni chilogrammo di alimento).

Sostanze	Limite inferiore	Limite superiore
Proteine	25	35
Carboidrati	15	25
Grassi	10	20

Table 5: Limiti superiori ed inferiori di sostanze nutritive (grammi / giorno).

Sostanze	Alimenti						
	Pasta	Latte	Formaggio	Pesce	Verdura	Pane	Polenta
Costo	4	4	15	22.5	3	1	5

Table 6: Costi degli alimenti (Euro / Kg).

Soluzione.

Simmetricamente ai casi precedenti, si tratta stavolta di un problema di minimizzazione dei costi vincolata al soddisfacimento di una domanda. I costi dipendono dalle risorse impiegate e la trasformazione delle risorse in prodotti è fissata da coefficienti dati.

Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono date $S = 3$ sostanze e $A = 7$ alimenti. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, S$ le sostanze (proteine, carboidrati, grassi) e con un indice $j = 1, \dots, A$ gli alimenti. Indichiamo con a_{ij} la quantità (in grammi) di sostanza $i = 1, \dots, S$ per ogni chilogrammo di alimento $j = 1, \dots, A$ [g / kg]. Indichiamo con l_i ed u_i la minima e la massima quantità di sostanza $i = 1, \dots, S$ da assumere ogni giorno [g / giorno]. Indichiamo con c_j il prezzo di ogni alimento $j = 1, \dots, A$ [Euro / kg].

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere le *quantità* ottimali di ogni alimento da inserire nella dieta dell'atleta. Definiamo quindi una variabile per ogni tipo di alimento: essa indica la quantità di alimento che deve essere consumata dall'atleta ogni giorno. Abbiamo quindi le variabili x_j con $j = 1, \dots, A$, misurate in kg / giorno. Le variabili sono continue e non-negative.

Vincoli. Le quantità di sostanze nutritive $i = 1, \dots, S$ devono essere comprese entro i limiti l_i e u_i . Esiste quindi una coppia di vincoli per ogni sostanza nutritiva $i = 1, \dots, S$. Si esprimono i vincoli come $l_i \leq \sum_{j=1}^A a_{ij}x_j \leq u_i \quad \forall i = 1, \dots, S$. Ogni vincolo è espresso in grammi / giorno.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il costo complessivo z , che dipende dalle quantità di alimenti scelti: $z = \sum_{j=1}^A c_jx_j$. La funzione obiettivo è espressa in Euro / giorno.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned}
\min z &= \sum_{j=1}^A c_j x_j \\
\text{s.t. } \sum_{j=1}^A a_{ij} x_j &\geq l_i & \forall i = 1, \dots, S \\
\sum_{j=1}^A a_{ij} x_j &\leq u_i & \forall i = 1, \dots, S \\
x_j &\geq 0 & \forall j = 1, \dots, A.
\end{aligned}$$

Esercizio n.7: Miscelazione dell'alluminio

Questo problema è tratto da F. Schoen, *Modelli di ottimizzazione per le decisioni*, Ed. Esculapio, 2006.

Un impianto produce alluminio da rottami. A questo scopo è possibile acquistare in quantitativi limitati alcuni rottami costituiti in massima parte da alluminio, ma contenenti anche altri elementi chimici, e di volerli miscelare in modo tale da ottenere tramite fusione un materiale che contenga quantitativi prefissati dei vari elementi chimici ("alluminio 6063"). Per correggere la qualità dei rottami disponibili è possibile acquistare metalli puri in quantità teoricamente illimitate ma ad un prezzo sensibilmente più alto.

Elementi	Materiali					
	Scarti ALMC	Scarti KAC	Rottami	Al	Si	Mg
Silicio	0.50	0.50	0.30		100	
Magnesio	0.75	0.70	0.50			100
Ferro	0.20	0.20	0.35			
Rame	0.01	0.01	0.05			
Manganese	0.02	0.02	0.05			
Zinco	0.02	0.02	0.05			
Cromo	0.02	0.02	0.05			
Titanio	0.02	0.02	0.05			
Alluminio	97.0	97.0	90.0	100		
Altri elementi	0.06	0.06	0.77			
Impurità	1.40	1.45	7.83			

Table 7: Composizione chimica dei materiali (percentuale in peso per ogni elemento chimico).

Elementi	Percentuale minima	Percentuale massima
Silicio	0.2	0.6
Magnesio	0.45	0.9
Ferro		0.35
Rame		0.1
Manganese		0.1
Zinco		0.1
Cromo		0.1
Titanio		0.1
Alluminio	96.9	100.0
Altri elementi		0.15

Table 8: Limiti percentuali superiori ed inferiori di elementi chimici.

Materiali	Quantità disponibili	Costo
Scarti ALMC	0.50	1230
Scarti KAC	1.20	1230
Rottami	2.20	1230
Al	illimitata	2140
Si	illimitata	1300
Mg	illimitata	2442

Table 9: Quantità (tonnellate) e costi (Euro / tonnellata) dei materiali.

La quantità di alluminio 6063 da produrre è pari a 4,5 tonnellate.

Si noti che le impurità dei materiali contribuiscono al peso complessivo del prodotto finale ma non sono vincolate.

Soluzione.

Si tratta ancora di un problema di minimizzazione di costi con vincoli di domanda. I costi dipendono dalle quantità (variabili) di risorse impiegate. I vincoli sui prodotti ottenuti sono espressi sia sia limiti inferiori che superiori.

Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $M = 6$ materiali e $E = 10$ elementi. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, M$ i materiali e con un indice $j = 1, \dots, E$ gli elementi. Indichiamo con a_{ij} la percentuale di elemento $j = 1, \dots, E$ nel materiale $i = 1, \dots, M$ [adimensionale]. Indichiamo con l_j ed u_j la minima e la massima percentuale di elemento $j = 1, \dots, E$ nel prodotto della fusione [adimensionale]. Indichiamo con q_i la quantità massima disponibile di ogni materiale $i = 1, \dots, M$ [tonnellate]. Indichiamo con c_i il prezzo di ogni materiale $i = 1, \dots, M$ [Euro / tonnellata]. Indichiamo con Q la quantità di Alluminio 6063 da produrre.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere le *quantità* ottimali di ogni materiale da miscelare. Definiamo quindi una variabile per ogni tipo di materiale: essa indica la quantità di materiale che viene impiegato per la fusione di alluminio 6063. Abbiamo quindi le variabili x_i con $i = 1, \dots, M$, misurate in tonnellate. Le variabili sono continue e non-negative.

Vincoli. Le quantità di materiali impiegate non possono eccedere i limiti q_i : $x_i \leq q_i \forall i = 1, \dots, M$. La quantità complessiva prodotta deve essere pari a Q : $\sum_{i=1}^M x_i = Q$. Questi vincoli sono espressi in tonnellate. Infine, la percentuale di ogni elemento nel prodotto della fusione deve essere compreso nei limiti specificati. Esiste quindi una coppia di vincoli per ogni elemento $j = 1, \dots, E$: $l_j \leq \sum_{i=1}^M \frac{a_{ij}x_i}{Q} \leq u_j \forall j = 1, \dots, E$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il costo complessivo z , che dipende dalle quantità di materiali usati: $z = \sum_{i=1}^M c_i x_i$. La funzione obiettivo è espressa in Euro.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned}
 \min z &= \sum_{i=1}^M c_i x_i \\
 \text{s.t. } \sum_{i=1}^M \frac{a_{ij}x_i}{Q} &\geq l_j && \forall j = 1, \dots, E \\
 \sum_{i=1}^M \frac{a_{ij}x_i}{Q} &\leq u_j && \forall j = 1, \dots, E \\
 \sum_{i=1}^M x_i &= Q \\
 x_i &\leq q_i && \forall i = 1, \dots, M \\
 x_i &\geq 0 && \forall i = 1, \dots, M.
 \end{aligned}$$

Esercizio 8: Pianificazione multi-periodo.

Il direttore di un'impresa produttrice di gelati deve decidere il piano di produzione estivo per i mesi di Giugno, Luglio, Agosto e Settembre. Il responsabile delle vendite chiede che siano disponibili in ciascun mese 200, 300, 500 e 400 tonnellate di gelato da mettere sul mercato. Il responsabile della produzione informa che la capacità produttiva dell'azienda varierà nei prossimi mesi. Attualmente essa è di 400 tonnellate di gelato al mese, ma dal 1 Luglio con la messa in opera dei nuovi impianti aumenterà del 25%. Tuttavia in Agosto, per le ferie del personale, la produttività massima sarà di sole 300 tonnellate. L'ufficio acquisti informa che il prezzo degli ingredienti necessari alla produzione di una tonnellata di gelato sarà di 34, 36, 32 e 38 Euro nei mesi in oggetto. Il responsabile della qualità ricorda che gli ingredienti devono essere freschi e quindi non si possono acquistare in anticipo. L'azienda ha però la possibilità di immagazzinare il gelato **prodotto in eccesso**, per rivenderlo nel mese successivo. A questo proposito, il responsabile della logistica sostiene che i costi di immagazzinamento del gelato nelle celle frigorifere saranno di 2, 3, 2 e 3 Euro per ogni chilogrammo di gelato invenduto al termine di ciascuno dei quattro mesi. In base a questi dati il direttore deve decidere la quantità di gelato da produrre in ciascuno dei quattro mesi estivi.

Soluzione.

Si tratta della variante multi-periodo del problema di soddisfacimento della domanda a costo minimo. Non si ha trasformazione di risorse in prodotti, ma solo dimensionamento della produzione su diversi periodi, ciascuno con un proprio livello di domanda da soddisfare. Il modello richiede quindi di introdurre vincoli di conservazione del flusso per collegare tra loro le soluzioni relative a periodi diversi.

Dati. Sono dati

- un insieme M di mesi;
- un vettore i cui elementi d_m indicano la domanda di gelato sul mercato nel mese $m \in M$ [ton];
- un vettore i cui elementi q_m indicano la capacità produttiva dell'impresa nel mese $m \in M$ [ton];
- un vettore i cui elementi c_m indicano il prezzo di acquisto degli ingredienti nel mese $m \in M$ [€/ton];
- un vettore i cui elementi g_m indicano il costo di giacenza del gelato invenduto al termine del mese $m \in M$ [€/ton]; questo dato è indicato in €/Kg ma va convertito in €/ton per uniformità con le unità di misura degli altri dati.

Variabili. Come indicato chiaramente nel testo, la decisione da prendere riguarda la quantità di gelato da produrre in ciascun mese. Si hanno quindi variabili x_m , misurate in tonnellate, che indicano le quantità prodotte in ogni mese $m \in M$. Tali variabili sono continue e non-negative.

Vincoli. Esiste un vincolo sulle capacità produttiva di ogni mese:

$$x_m \leq q_m \quad \forall m \in M \quad [\text{ton}]$$

Questi vincoli consistono in limiti superiori alle variabili. Possono quindi essere inseriti nel modello senza aumentarne le dimensioni in termini di righe del tableau.

Inoltre esistono i vincoli di conservazione del flusso tramite i quali si può rappresentare simultaneamente sia la possibilità di produrre il gelato in anticipo rispetto al mese di vendita, sia il requisito di soddisfare la domanda del mercato in ogni mese.

Per esprimerli è utile (anche se non indispensabile) introdurre variabili ausiliarie s_m (espresse in tonnellate) che indicano le quantità di gelato già prodotto ma non ancora venduto al termine di ogni mese $m \in M$. Tali variabili sono continue e non-negative e vengono compensate da altrettanti vincoli di uguaglianza con la forma seguente:

eccedenza mensile

$$s_{m-1} + x_m = d_m + s_m \quad \forall m \in M : m \geq 2 \quad [\text{ton}].$$

Si noti che il vincolo di soddisfacimento della domanda è stato così trasformato nella condizione di non-negatività delle variabili s .

Il **vincolo di conservazione del flusso** non si può scrivere per $m = 1$ poiché s_0 non è definita. Il significato di tale grandezza è la quantità di gelato in magazzino all'inizio del periodo di pianificazione. Tale dato è necessario ma non è specificato nella descrizione del problema. Non è evento raro che nel definire il modello matematico di un problema si giunga a scoprire che alcuni dati sono mancanti (o viceversa sono ridondanti). Assumiamo che sia quindi noto un dato in più, che indichiamo con \bar{s} . Supponiamo che sia $\bar{s} = 0$. Aggiungiamo il vincolo di conservazione del flusso relativo al primo mese:

$$\bar{s} + x_1 = d_1 + s_1 [\text{ton}].$$

Tutti i vincoli sono lineari.

Obiettivo. L'obiettivo è la minimizzazione i costi. I costi complessivi sono dati da due voci diverse: i costi di acquisto degli ingredienti e i costi di giacenza delle eventuali scorte invendute.

$$\text{minimize } z = \sum_{m \in M} (c_m x_m + g_m s_m) \text{ [euro]}.$$

Il modello completo. Dalle definizioni sopra riportate risulta il seguente modello: sopra è indicato il modello del problema, sotto il modello dello specifico esempio proposto.

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &= \sum_{m \in M} (c_m x_m + g_m s_m) \\ \text{s.t. } s_{s-1} + x_m &= d_m + s_m & \forall m \in M : m \geq 2 \\ \bar{s} + x_1 &= d_1 + s_1 \\ 0 \leq x_m &\leq q_m & \forall m \in M \\ s_m &\geq 0 & \forall m \in M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &= 34x_1 + 36x_2 + 32x_3 + 38x_4 + 2000s_1 + 3000s_2 + 2000s_3 + 3000s_4 \\ \text{s.t. } 0 + x_1 &= 200 + s_1 \\ s_1 + x_2 &= 300 + s_2 \\ s_2 + x_3 &= 500 + s_3 \\ s_3 + x_4 &= 400 + s_4 \\ 0 \leq x_1 &\leq 400 \\ 0 \leq x_2 &\leq 500 \\ 0 \leq x_3 &\leq 300 \\ 0 \leq x_4 &\leq 500 \\ s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Poiché le variabili sono continue e sia i vincoli che l'obiettivo sono lineari, si tratta di un modello di programmazione lineare.

Esercizio n.9: Posologia

Questo problema è un libero adattamento di un esercizio tratto da F. Schoen, *Modelli di ottimizzazione per le decisioni*, Ed. Esculapio, 2006.

Un dato trattamento farmacologico richiede che il paziente assuma una certa sostanza X durante il giorno. La sostanza X può essere assunta in quantità variabili in qualunque ora del giorno tramite farmaci di diverso tipo. Per semplicità il giorno viene suddiviso in 24 fasce orarie di un'ora ciascuna. L'effetto dei farmaci viene misurato dal tasso di una certa proteina Y nel sangue del paziente. Il tasso di proteina Y è direttamente proporzionale alla quantità di sostanza X assunta dal paziente, a parità di tempo trascorso. Naturalmente gli effetti dovuti all'assunzione di sostanza X in fasce orarie diverse si sommano. Il dosaggio di sostanza X da assumere in ciascuna fascia oraria ha lo scopo di mantenere il tasso di proteina Y al di sopra di un valore minimo necessario all'organismo. Tale valore minimo a sua volta varia a seconda dell'ora, poiché dipende dall'attività dell'organismo: digestione, sonno, ecc... È noto il livello minimo di proteina Y da assicurare per ogni fascia oraria, così come un livello massimo (indipendente dall'ora) che non deve essere superato. Tale livello massimo di proteina Y consentito è pari a 45 mg/cc.

Fascia oraria	Proteina Y	Fascia oraria	Proteina Y
0:00 - 1:00	5.0	12:00 - 13:00	25.0
1:00 - 2:00	1.0	13:00 - 14:00	30.0
2:00 - 3:00	0.0	14:00 - 15:00	25.0
3:00 - 4:00	0.0	15:00 - 16:00	15.0
4:00 - 5:00	0.0	16:00 - 17:00	5.0
5:00 - 6:00	0.0	17:00 - 18:00	4.0
6:00 - 7:00	4.0	18:00 - 19:00	3.0
7:00 - 8:00	15.0	19:00 - 20:00	25.0
8:00 - 9:00	12.0	20:00 - 21:00	30.0
9:00 - 10:00	5.0	21:00 - 22:00	25.0
10:00 - 11:00	4.0	22:00 - 23:00	20.0
11:00 - 12:00	3.0	23:00 - 24:00	10.0

Table 10: Livello minimo di proteina Y da garantire (mg/cc) in ogni ora del giorno.

L'effetto nel tempo di ogni farmaco è noto: a parità di sostanza X fornita all'organismo, alcuni farmaci sviluppano rapidamente una grande quantità di proteina Y ed hanno un effetto limitato nel tempo, mentre altri sviluppano una quantità di proteina Y inferiore e più duratura. L'effetto nel tempo di ogni farmaco è indipendentemente dall'ora in cui esso viene assunto.

Ore trascorse	Farmaci	
	Prismil	Cilindren
0	1.5	2.5
1	3.0	4.0
2	4.0	5.5
3	2.5	4.0
4	1.9	3.0
5	1.4	1.5
6	1.0	0.7
7	0.7	0.4
8	0.5	0.2
9	0.3	0.0
10	0.2	0.0
11	0.1	0.0
12 o più	0.0	0.0

Table 11: Tasso di proteina Y prodotta (mg/cc per ogni grammo di farmaco assunto).

Si vuole trovare una posologia che consenta di rispettare i limiti richiesti, minimizzando (a) la quantità di sostanza complessiva da assumere durante la giornata, oppure (b) il costo della cura, calcolabile conoscendo il prezzo dei farmaci. Il farmaco Prismil costa 0.70 Euro/grammo; il farmaco Cilindren costa 0.95 Euro/grammo.

Soluzione.

Come il precedente, anche questo è un problema di soddisfacimento di domanda multi-periodo a costo minimo. In questo caso inoltre la domanda si può soddisfare consumando due diverse possibili risorse di cui bisogna stabilire il mix ottimale. Anziché utilizzare vincoli di conservazione del flusso per collegare periodi consecutivi, l'effetto in un periodo dipende dalle decisioni relative ai periodi precedenti secondo coefficienti dati.

Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $F = 2$ farmaci e $N = 24$ fasce orarie. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, N$ la fascia oraria e con un indice $j = 1, \dots, F$ il farmaco. Indichiamo con q_i il fabbisogno di proteina in ogni fascia oraria $i = 1, \dots, N$. Indichiamo con a_{kj} la quantità di proteina Y generata a k ore di distanza dall'assunzione di una quantità unitaria di farmaco $j = 1, \dots, F$. Indichiamo con Q la massima quantità di proteina Y consentita. Indichiamo con c_j il prezzo del farmaco $j = 1, \dots, F$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere la *quantità* di ogni farmaco da assumere in ogni fascia oraria. Abbiamo quindi le variabili continue e non-negative x_{ij} con $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, F$, misurate in grammi.

Vincoli. La quantità di proteina Y in ogni fascia oraria è la somma di vari contributi, dovuti ai farmaci assunti dal paziente nelle ultime 12 ore. Quindi la quantità di proteina nella fascia oraria $i = 1, \dots, N$ è data da $\sum_{j=1}^F \sum_{k=0}^{12} a_{kj} x_{i-k, j}$. L'indice $i - k$ va inteso come indice circolare, cioè calcolato modulo 24. Tale quantità deve risultare compresa tra q_i e Q .

Funzione obiettivo. Il testo dell'esercizio propone due funzioni obiettivo diverse. Nel primo caso si vuole minimizzare la quantità complessiva di farmaci assunti nell'arco della giornata. Si ha quindi $\min z' = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^F x_{ij}$. Nel secondo caso si vuole minimizzare il costo giornaliero della terapia. Si ha quindi $\min z'' = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^F c_j x_{ij}$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned}
 \min z' &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^F x_{ij} \\
 \min z'' &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^F c_j x_{ij} \\
 \text{s.t. } &\sum_{j=1}^F \sum_{k=0}^{12} a_{kj} x_{i-k, j} \geq q_i && \forall i = 1, \dots, N \\
 &\sum_{j=1}^F \sum_{k=0}^{12} a_{kj} x_{i-k, j} \leq Q && \forall i = 1, \dots, N \\
 &x_{ij} \geq 0 && \forall i = 1, \dots, N \quad \forall j = 1, \dots, F
 \end{aligned}$$

Esercizio n.10: Mars Express

La missione Mars Express consiste nell'esplorare la superficie del pianeta Marte con una sonda orbitante attorno da esso. Durante ogni orbita gli strumenti scientifici a bordo della sonda acquisiscono dati, che vengono immagazzinati in dispositivi di memoria, uno per ogni strumento. Tali dispositivi devono essere periodicamente svuotati, trasmettendo i dati a Terra, in modo da liberare la memoria per altri dati. La trasmissione dei dati a Terra può avvenire solo durante particolari finestre temporali durante le quali la posizione della sonda è visibile dalle stazioni di Terra. La capacità del canale di trasmissione è limitata e ad ogni orbita solo una parte dei dati in memoria può essere trasmessa a Terra. Gli scienziati sono in grado di stimare in anticipo la quantità di dati che verranno immagazzinati in ogni dispositivo di memoria in ogni orbita per un certo numero di orbite nel futuro. Essi conoscono anche la durata delle finestre temporali disponibili per la trasmissione, per ciascuna di tali orbite. Si tratta di pianificare la trasmissione dei dati a Terra, cioè di decidere per ogni finestra temporale di trasmissione quanti dati scaricare da ogni dispositivo di memoria. L'obiettivo è quello di mantenere in tutti i dispositivi un certo margine di sicurezza, in vista del fatto che la quantità dei dati in ingresso nelle orbite future è solo frutto di una previsione, ma non è nota con certezza, e si vuole evitare che un eventuale picco imprevisto nella quantità di dati in ingresso provochi la saturazione di uno o più dispositivi di memoria. Si vuole quindi minimizzare il massimo livello di riempimento raggiunto dai dispositivi di memoria durante il periodo considerato.

Si noti che dopo ogni orbita avviene prima lo svuotamento dei dispositivi (trasmissione a Terra) e poi il riempimento con i dati nuovi.

Nell'esempio riportato qui di seguito si considerano 5 dispositivi di memoria e 10 orbite. I dati sono i seguenti.

Orbite	Memorie				
	1	2	3	4	5
1	35	0	80	25	50
2	200	70	100	25	0
3	0	150	0	25	100
4	600	300	0	25	75
5	200	0	210	25	200
6	50	0	85	0	45
7	40	60	50	0	300
8	300	90	20	60	0
9	0	100	100	60	20
10	0	20	100	60	250

Table 12: Quantità di dati previste in ingresso (Mbit).

Orbita	Durata
1	45
2	47
3	55
4	45
5	35
6	42
7	30
8	35
9	44
10	40

Table 13: Durata della finestra disponibile per la trasmissione al termine di ogni orbita (minuti).

La velocità di trasmissione dei dati è pari a 9 Mbit/minuto.

Memoria	Capacità	Contenuto iniziale
1	1000	500
2	1200	600
3	1000	500
4	500	250
5	700	350

Table 14: Capacità e riempimento iniziale dei dispositivi di memoria (Mbit).

Soluzione.

Anche in questo caso si tratta di un problema di pianificazione multi-periodo, ma anche multi-prodotto. Ogni “prodotto” corrisponde infatti ad un diverso banco di memoria. Per rendere compatibili le scelte relative a periodi diversi è necessario utilizzare vincoli di conservazione del flusso, che in questo caso impongono la conservazione dei dati. Per rendere compatibili le decisioni relative a banchi di memoria diversi in ogni periodo, invece, è necessario considerare la risorsa limitata data dal tempo disponibile per la trasmissione. Si vuole quindi massimizzare la quantità di dati trasmessa nel rispetto di tali vincoli, ma la funzione obiettivo è di tipo min-max, poiché si vuole minimizzare il rischio che uno qualsiasi dei banchi di memoria vada in overflow. Si combinano quindi in questo modello diverse caratteristiche incontrate separatamente negli esercizi precedenti.

Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $O = 10$ orbite e $M = 5$ dispositivi di memoria. Indichiamo con un indice $j = 1, \dots, O$ ogni orbita e con un indice $i = 1, \dots, M$ ogni memoria. Indichiamo con s_i la quantità iniziale di dati e con c_i la capacità massima per ogni banco di memoria $i = 1, \dots, M$. Indichiamo con t_j la durata della finestra di trasmissione dell’orbita $j = 1, \dots, O$. Indichiamo con d_{ij} la quantità di dati prevista in ingresso alla memoria $i = 1, \dots, M$ durante l’orbita $j = 1, \dots, O$. Indichiamo con R il bit-rate di trasmissione.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere la *quantità* di dati da scaricare da ogni memoria in ogni finestra. Definiamo quindi le variabili continue e non-negative $x_{ij} \forall i = 1, \dots, M \forall j = 1, \dots, O$. Nel formulare il modello risulterà utile introdurre anche altre variabili (v. seguito).

Vincoli. I vincoli del problema sono i seguenti.

- La quantità di dati trasmessa in ogni finestra temporale non ecceda la capacità di trasmissione, data a sua volta dal prodotto tra il bit-rate di trasmissione e la durata della finestra temporale: $\sum_{i=1}^M x_{ij} \leq R t_j \quad \forall j = 1, \dots, O$.
- La quantità di dati trasmessa non può essere più grande della quantità di dati presente nel dispositivo di memoria in quel momento. Per esprimere questo insieme di vincoli è utile quindi definire per ogni memoria e per ogni orbita la grandezza continua e non-negativa y_{ij} che indica quanti dati sono rimasti in memoria nel dispositivo i dopo il completamento di tutte le operazioni (acquisizioni e trasmissioni) fino a quelle dell’orbita j . In tal modo il vincolo si può esprimere facilmente imponendo $x_{ij} \leq y_{ij-1} \quad \forall i = 1, \dots, M \quad \forall j = 1, \dots, O$. Inoltre si ha $y_{ij} = y_{ij-1} - x_{ij} + d_{ij}$, che è un’equazione di conservazione dei dati: per ogni dispositivo i ciò che rimane in memoria dopo l’orbita j è pari a ciò che era rimasto in memoria dopo l’orbita $j - 1$ meno la quantità di dati trasmessa a Terra dopo l’orbita j più la quantità di dati nuovi immagazzinati durante l’orbita j . Si noti che per $j = 1$ è necessario conoscere le grandezze y_{i0} , che sono le quantità di dati inizialmente presenti nelle memorie, cioè i dati s_i .
- il contenuto di ogni dispositivo non deve mai eccedere la sua capacità: $y_{ij} \leq c_i \quad \forall i = 1, \dots, M \quad \forall j = 1, \dots, O$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il massimo livello percentuale di riempimento dei dispositivi di memoria, quindi si tratta di una funzione di tipo min-max: $\min \max_{i=1, \dots, M} \max_{j=1, \dots, O} \{100 * y_{ij} / c_i\}$. Introduciamo quindi una variabile ausiliaria z e richiediamo di minimizzare z con i vincoli $z \geq 100 * y_{ij} / c_i \quad \forall i = 1, \dots, M \quad \forall j = 1, \dots, O$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize } z \\
 & \text{subject to } z \geq 100 * y_{ij} / c_i & \forall i = 1, \dots, M \quad \forall j = 1, \dots, O \\
 & y_{ij} = y_{ij-1} - x_{ij} + d_{ij} & \forall i = 1, \dots, M \quad \forall j = 1, \dots, O \\
 & y_{i0} = s_i & \forall i = 1, \dots, M \\
 & x_j \leq y_{ij-1} & \forall i = 1, \dots, M \quad \forall j = 1, \dots, O \\
 & y_{ij} \leq c_i & \forall i = 1, \dots, M \quad \forall j = 1, \dots, O \\
 & \sum_{i=1}^M x_{ij} \leq R t_j & \forall j = 1, \dots, O \\
 & y_{ij} \geq 0 & \forall i = 1, \dots, M \quad \forall j = 1, \dots, O \\
 & x_{ij} \geq 0 & \forall i = 1, \dots, M \quad \forall j = 1, \dots, O.
 \end{aligned}$$

Come cambierebbe il problema se i dati potessero essere scaricati in blocchi da N Mbit per volta da ogni dispositivo (ad esempio $N=25$)?

Come cambierebbe il problema se ci fosse il vincolo che in ogni finestra di trasmissione ogni dispositivo di memoria può soltanto o essere svuotato del tutto oppure non trasmettere nulla?

Come cambierebbe il problema se solo un dato numero k di dispositivi potessero trasmettere a Terra in ogni finestra temporale?

Esercizio n.11: Interpolazione

In una nuova abitazione si vuole misurare il consumo energetico effettivo degli elettrodomestici. A questo scopo in giorni diversi viene misurato per quanto tempo ogni elettrodomestico viene usato e si rileva il totale consumo rilevato al contatore centrale. Il consumo totale in un dato giorno è quindi dato dalla somma di **diversi contributi, ciascuno dovuto ad uno degli elettrodomestici**; ogni contributo è pari al prodotto tra il tempo di funzionamento (misurato) e la potenza assorbita dall'elettrodomestico (incognita). Si sa che la lettura sul contatore è soggetta ad approssimazioni dovute a cause diverse (piccoli consumi delle lampadine, eventuale contributo positivo dato da un pannello fotovoltaico,...), mentre si suppone che le misure dei tempi di funzionamento siano precise. Si vuole calcolare i valori incogniti di potenza assorbita dagli elettrodomestici che meglio spiegano i dati sperimentali raccolti. A tal fine in **ogni giorno si calcola un errore (approssimazione sul contatore) come la differenza tra il consumo letto sul contatore e la somma dei contributi relativi ai diversi elettrodomestici** (che dipendono dai valori incogniti di potenza assorbita e dai tempi di funzionamento misurati). **Si vuole quindi stabilire quali sono i valori di potenza assorbita da ogni elettrodomestico che rendono minima una funzione dell'errore**. Si propongono quattro criteri: (a) minimizzare il massimo errore in valore assoluto; (b) minimizzare il valore assoluto del valor medio degli errori; (c) minimizzare il valor medio dei valori assoluti degli errori; (d) minimizzare l'errore quadratico medio. **Gli elettrodomestici sono 8, i giorni in cui vengono eseguite le misurazioni sono 12.**

Il primo giorno consumo 10 utilizzando ED1 per 0.2h + ED2 per 0.4h....

Giorno	Consumo (KWh)	Tempo (h)							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	10	0.2	0.4	0.5	0.6	0.6	0.5	0.2	0.2
2	20	0.1	1.0	0.1	1.2	1.1	1.0	0.6	0.3
3	10	0.1	0.5	0.5	0.7	0.5	0.5	0.1	0.2
4	15	0.2	0.6	0.6	0.8	0.6	0.6	0.2	0.3
5	5	0.1	0.4	0.2	0.3	0.2	0.2	0.0	0.2
6	10	0.2	0.5	0.4	0.7	0.5	0.4	0.2	0.3
7	10	0.3	0.4	0.5	0.8	0.4	0.4	0.2	0.2
8	20	0.6	0.8	1.0	1.5	1.3	0.6	0.5	0.6
9	12	0.3	0.4	0.5	0.7	0.5	0.5	0.3	0.2
10	25	0.5	0.9	1.1	1.3	0.9	1.2	0.8	0.5
11	2	0.0	0.2	0.0	0.0	0.1	0.0	0.0	0.1
12	5	0.0	0.5	0.2	0.3	0.2	0.1	0.1	0.3

Table 15: Consumo e tempi di funzionamento in ciascun giorno.

Soluzione.

Non si tratta più di un problema di massimizzazione vincolato da risorse limitate né di minimizzazione vincolato al raggiungimento di una soglia richiesta, bensì di un problema di interpolazione ottima, dove l'obiettivo è quello di calibrare i parametri di una funzione (in questo caso, una retta) in modo che interpolino nel modo più preciso possibile un insieme di dati. L'obiettivo è minimizzare una misura dello scostamento della funzione dai dati e può essere definita in modi diversi.

Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $E = 8$ elettrodomestici e $G = 12$ giorni. Indichiamo con un indice $g = 1, \dots, G$ ogni giorno e con un indice $e = 1, \dots, E$ ogni elettrodomestico. Indichiamo con t_{ge} il tempo di funzionamento dell'elettrodomestico $e = 1, \dots, E$ nel giorno $g = 1, \dots, G$ [ore]. Indichiamo con c_g il consumo letto sul contatore nel giorno $g = 1, \dots, G$ [KWh].

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere i valori di potenza assorbita che spiegano nel modo migliore gli esperimenti. Definiamo quindi una variabile continua non-negativa per ogni elettrodomestico: abbiamo quindi le variabili x_e con $e = 1, \dots, E$, misurate in KiloWatt [KW]. Come suggerito dal testo dell'esercizio, per esprimere la funzione obiettivo è opportuno introdurre variabili ausiliarie che rappresentano l'approssimazione nella lettura del contatore in ogni giorno. Abbiamo perciò anche una variabile continua e libera (può assumere valori sia positivi che negativi) a_g per ogni giorno $g = 1, \dots, G$.

Vincoli. Il legame tra le variabili x e le variabili a è espresso dalla definizione di approssimazione data nel testo:

$$a_g = c_g - \sum_{e=1}^E t_{ge} x_e \quad \forall g = 1, \dots, G.$$

Funzione obiettivo. Si considerino separatamente i quattro casi.

Caso (a): per minimizzare il massimo errore in valore assoluto bisogna definire una funzione obiettivo di tipo "min-max":

$$\text{minimize } f^{(a)} = \max_{g=1, \dots, G} \{|a_g|\}.$$

Essa si può esprimere in un modello lineare introducendo una variabile ausiliaria: minimize $f^{(a)} = z'$ con i vincoli $z' \geq a_g$ e $z' \geq -a_g \quad \forall g = 1, \dots, G$.

Caso (b): per minimizzare il valore assoluto della media degli errori bisogna considerare la seguente funzione obiettivo "min-max":

$$\text{minimize } f^{(b)} = \left| \frac{1}{G} \sum_{g=1, \dots, G} a_g \right|.$$

Come nel caso precedente, essa si può esprimere in un modello lineare introducendo una variabile ausiliaria: minimize $f^{(b)} = z''$ con i due vincoli $z'' \geq (1/G) \sum_{g=1}^G a_g$ e $z'' \geq -(1/G) \sum_{g=1}^G a_g$.

Caso (c): per minimizzare il valor medio dei valori assoluti degli errori bisogna considerare la seguente funzione obiettivo:

$$\text{minimize } f^{(c)} = \frac{1}{G} \sum_{g=1, \dots, G} |a_g|.$$

La tecnica di linearizzazione è la stessa dei casi precedenti, ma stavolta i valori assoluti da eliminare sono tanti quanti i giorni e quindi altrettante sono le variabili ausiliarie da inserire nel modello: minimize $f^{(c)} = \frac{1}{G} \sum_{g=1, \dots, G} z_g'''$ con i vincoli $z_g''' \geq a_g$ e $z_g''' \geq -a_g$ per ogni $g = 1, \dots, G$.

Caso (d): per minimizzare l'errore quadratico medio bisogna ricorrere ad una funzione quadratica, cioè non-lineare: minimize $f^{(d)} = (1/G) \sum_{g=1}^G a_g^2$. In questo ultimo caso la soluzione si può tuttavia ricavare imponendo che siano nulle le derivate della funzione obiettivo rispetto a ciascuna delle variabili x_e . Si ottengono così E equazioni lineari in altrettante incognite, riconducendosi da un problema di ottimizzazione quadratico ad un problema di esistenza lineare. Per ricavare le condizioni analitiche si procede facilmente come segue: $\frac{\partial f^{(d)}}{\partial x_e} = \sum_{g=1}^G \frac{\partial f^{(d)}}{\partial a_g} * \frac{\partial a_g}{\partial x_e} = \sum_{g=1}^G \frac{1}{G} 2a_g * (-t_{ge}) = -\frac{2}{G} \sum_{g=1}^G t_{ge} a_g$, da cui le E condizioni analitiche del primo ordine

$$\sum_{g=1}^G t_{ge} a_g = 0 \quad \forall e = 1, \dots, E.$$

Il modello matematico completo risulta quindi:

Caso (a):

$$\begin{aligned}
 & \min z' \\
 & \text{s.t. } a_g = c_g - \sum_{e=1}^E t_{ge} x_e & \forall g = 1, \dots, G \\
 & \quad z' \geq a_g & \forall g = 1, \dots, G \\
 & \quad z' \geq -a_g & \forall g = 1, \dots, G \\
 & \quad x_e \geq 0 & \forall e = 1, \dots, E.
 \end{aligned}$$

Caso (b):

$$\begin{aligned}
 & \min z'' \\
 & \text{s.t. } a_g = c_g - \sum_{e=1}^E t_{ge} x_e & \forall g = 1, \dots, G \\
 & \quad z'' \geq (1/G) \sum_{g=1}^G a_g \\
 & \quad z'' \geq -(1/G) \sum_{g=1}^G a_g \\
 & \quad x_e \geq 0 & \forall e = 1, \dots, E.
 \end{aligned}$$

Caso (c):

$$\begin{aligned}
 & \min \frac{1}{G} \sum_{g=1, \dots, G} z_g''' \\
 & \text{s.t. } a_g = c_g - \sum_{e=1}^E t_{ge} x_e & \forall g = 1, \dots, G \\
 & \quad z_g''' \geq a_g & \forall g = 1, \dots, G \\
 & \quad z_g''' \geq -a_g & \forall g = 1, \dots, G \\
 & \quad x_e \geq 0 & \forall e = 1, \dots, E.
 \end{aligned}$$

Caso (d):

$$\begin{aligned}
 & \min (1/G) \sum_{g=1}^G a_g^2 \\
 & \text{s.t. } a_g = c_g - \sum_{e=1}^E t_{ge} x_e & \forall g = 1, \dots, G \\
 & \quad x_e \geq 0 & \forall e = 1, \dots, E.
 \end{aligned}$$

trasformabile in:

$$\begin{aligned}
 & a_g = c_g - \sum_{e=1}^E t_{ge} x_e & \forall g = 1, \dots, G \\
 & \sum_{g=1}^G t_{ge} a_g = 0 & \forall e = 1, \dots, E \\
 & x_e \geq 0 & \forall e = 1, \dots, E.
 \end{aligned}$$

Esercizio n.12: Trasporto a costo minimo

È dato un insieme di origini (punti di produzione di una data merce), ciascuno caratterizzato da un'offerta, ossia da una quantità di merce in uscita. È dato un insieme di destinazioni (punti di consumo della merce), ciascuno caratterizzato da una domanda, ossia da una quantità di merce richiesta in ingresso. La somma delle offerte e la somma delle domande sono uguali. È dato il costo unitario di trasporto della merce da ogni origine ad ogni destinazione. Si vuole decidere quali quantità di merce trasportare da ogni origine ad ogni destinazione, in modo da soddisfare i vincoli sulla domanda e sull'offerta minimizzando i costi.

Origini	Destinazioni			
1	20	25	30	28
2	15	12	32	26
3	18	41	36	37
4	32	23	35	20
5	31	40	19	38
6	33	22	34	21
7	25	29	26	27
8	30	24	39	28

Table 16: Costi di trasporto da 8 origini a 4 destinazioni.

Origine	Offerta
1	30
2	40
3	20
4	35
5	40
6	30
7	25
8	50

Table 17: Offerta di ogni origine.

Destinazione	1	2	3	4
Domanda	70	70	50	80

Table 18: Domanda di ogni destinazione.

Soluzione.

Questo esercizio è un problema di minimizzazione dei costi con vincoli sia sul soddisfacimento della domanda relativa alle destinazioni sia con vincoli di capacità relativi alle origini. E' un esempio di problema di ottimizzazione su grafo, poiché si può formulare su un grafo bipartito, i cui nodi sono partizionati in un insieme di origini ed un insieme di destinazioni ed i cui archi hanno tutti la coda nell'insieme delle origini e la testa nell'insieme delle destinazioni.

Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $O = 8$ origini e $D = 4$ destinazioni. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, O$ ogni origine e con un indice $j = 1, \dots, D$ ogni destinazione. Indichiamo con o_i l'offerta dell'origine $i = 1, \dots, O$ e con d_j la domanda della destinazione $j = 1, \dots, D$. Indichiamo con c_{ij} il costo unitario di trasporto della merce dall'origine $i = 1, \dots, O$ alla destinazione $j = 1, \dots, D$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere la *quantità* di merce da trasportare da ogni origine ad ogni destinazione. Definiamo quindi una variabile continua e non-negativa per ogni coppia origine-destinazione, per indicare tale quantità. Abbiamo quindi variabili $x_{ij} \forall i = 1, \dots, O \forall j = 1, \dots, D$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che la merce complessivamente in uscita da ogni origine sia pari alla sua offerta e la merce complessivamente in ingresso ad ogni destinazione sia pari alla sua domanda. Esistono pertanto un vincolo per ogni origine, del tipo $\sum_{j=1}^D x_{ij} = o_i \quad \forall i = 1, \dots, O$ ed un vincolo per ogni destinazione, del tipo $\sum_{i=1}^O x_{ij} = d_j \quad \forall j = 1, \dots, D$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il costo complessivo, che è dato dal prodotto tra i costi unitari e le quantità trasportate: $\min \sum_{i=1}^O \sum_{j=1}^D c_{ij} x_{ij}$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &= \sum_{i=1}^O \sum_{j=1}^D c_{ij} x_{ij} \\ \text{subject to } \sum_{j=1}^D x_{ij} &= o_i & \forall i = 1, \dots, O \\ \sum_{i=1}^O x_{ij} &= d_j & \forall j = 1, \dots, D \\ x_{ij} &\geq 0 & \forall i = 1, \dots, O \quad \forall j = 1, \dots, D. \end{aligned}$$