Prova scritta di Ricerca Operativa
20 Giugno 2022

Esercizio 1: Terreno

Si vuole destinare un appezzamento di terra ad uso agricolo. Tuttavia esso presenta dislivelli che ostacolerebbero il movimento dei mezzi agricoli e impedirebbero un omogeneo assorbimento dell'acqua piovana. Perciò, prima di ararlo e seminarlo, si vuole livellare il terreno. L'appezzamento è rettangolare ed è stato diviso in quadratini uguali, di area pari ad un metro quadrato, con lati paralleli a quelli del rettangolo. Grazie ad osservazioni satellitari, di ogni quadratino è stata rilevata l'altezza rispetto ad un dato valore di riferimento.

L'operazione di livellamento del terreno va compiuta spostando terra dai quadratini con eccesso a quelli con difetto, in modo che al termine tutti siano allo stesso livello. Il costo da pagare per questa movimentazione di terra (che si vuole minimizzare) è proporzionale alle quantità di terra spostate e alle distanze. E' noto il costo unitario, cioè il costo da sostenere per spostare un metro cubo di terra ad un metro di distanza.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio con i dati del file TERRENO.TXT e discutere l'ottimalità e l'unicità della soluzione ottenuta.

Variante: è consentito che rimangano nel terreno dei lievi dislivelli. Studiare come varia il costo in funzione del massimo dislivello tollerato (inteso come differenza di quota tra il punto più alto ed il punto più basso del terreno).

N.B. Eseguire solo le prime 3 o 4 iterazioni dell'analisi parametrica.

Esercizio 2: L'indice di Davies Bouldin

Sono dati N punti nel piano Euclideo e si vuole definire una loro partizione in un dato numero K di clusters, in modo da ottimizzare l'indice di Davies Bouldin, che è definito come segue.

Per ogni cluster C_k, sia T_k il numero di punti assegnati al cluster. Usando la norma Euclidea, si definisce un indicatore di compattezza del cluster C_k come

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{T_k} \sum_{j \in C_k} ((x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2)}$$

dove si sono indicate con indice j le coordinate dei punti del cluster e con indice k le coordinate del centroide del cluster.

Si definisce poi per ogni coppia di clusters C_h e C_k un indicatore di separazione, M_{hk}, che è dato dalla distanza Euclidea tra i due centroidi.

La misura di quanto bene due clusters C_h e C_k sono distinti è data da $R_{hk} = \dfrac{S_h + S_k}{M_{hk}}$, che si vorrebbe basso; in tal modo, infatti, la partizione risulta buona quando i due clusters sono compatti (valori di S bassi) e distanti tra loro (valore di M alto).

L'indice di Davies Bouldin è definito come $DB = \dfrac{1}{N} \sum_{k=1}^{K} \max_{h \neq k} \{R_{kh}\}$.

Formulare il problema, classificarlo.

Risolvere l'esempio con i dati del file DAVIESBOULDIN.TXT con un numero a scelta di clusters (ad es. $K = 5$).

Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.