**Paired dominating set.**

Dato il grafo stradale di una città, dove le strade sono rettilinee, il problema consiste nel posizionare alcune sentinelle per sorvegliare gli incroci. Ogni sentinella sorveglia l'incrocio in cui è posta e tutti quelli adiacenti. Tutti gli incroci della città devono essere sorvegliati usando il minimo numero di sentinelle. Le sentinelle però devono anche controllarsi a due a due. Formulare il problema e classificarlo. Risolvere l'esempio con i dati del file `PAIRED_DOMINATING_SET.TXT`.

**Dati.**

La città ha 30 incroci, collegati dalle vie elencate in tabella. Alcuni incroci possono avere una sola via incidente.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1, 2 | 1, 3 | 1, 4 | 2,30 |
| 3,13 | 3,16 | 4, 5 | 4, 6 |
| 4,24 | 5, 6 | 5, 8 | 5,13 |
| 6, 7 | 7, 9 | 7,10 | 8, 9 |
| 8,12 | 8,13 | 8,27 | 9,10 |
| 9,27 | 10,11 | 11,23 | 11,29 |
| 12,13 | 12,18 | 12,19 | 12,27 |
| 13,14 | 14,15 | 14,18 | 15,16 |
| 15,17 | 18,19 | 18,28 | 19,20 |
| 19,28 | 20,21 | 20,22 | 20,29 |
| 24,25 | 24,26 | 27,29 | |

Tabella 1: Elenco delle vie.

**Soluzione.**

Il problema è una variante del Dominating Set Problem, chiamata Paired Dominating Set, che richiede di selezionare alcuni vertici di un grafo. Si formula naturalmente con una variabile binaria $x_i$ associata ad ogni vertice $i \in V$, per indicare se una sentinella viene collocata nel corrispondente incrocio ($x_i = 1$) o no ($x_i = 0$).

L'obiettivo richiede di usare il minimo numero di sentinelle, cioè

$$\text{minimize } z = \sum_{i \in V} x_i.$$

Il vincolo di copertura di tutti gli incroci si esprime con una disequazione:

$$x_i + \sum_{k \in V : [i,k] \in E} x_k \geq 1 \;\; \forall i \in V.$$

Nello scrivere questo vincolo bisogna prestare attenzione al fatto che gli spigoli del grafo sono coppie non ordinate.

Si può anche osservare che a causa del vincolo sulle coppie, il vincolo di copertura

$$x_i + \sum_{k \in V : [i,k] \in E} x_k \geq 1 \;\; \forall i \in V$$

può essere scritto in una forma equivalente nel discreto ma più stringente nel rilassamento continuo:

$$\sum_{k \in V : [i,k] \in E} x_k \geq 1 \;\; \forall i \in V.$$

Infatti ogni incrocio non presidiato da una sentinella deve avere almeno una sentinella adiacente ed ogni incrocio presidiato da una sentinella deve comunque avere almeno una sentinella adiacente perché abbinata. Quindi in ogni caso, che un incrocio sia presidiato o no da una sentinella, deve comunque esserci almeno una sentinella adiacente.

Quindi, se il requisito viene interpretato come "per ogni sentinella, deve esisterne un'altra adiacente", questi vincoli bastano.

Se invece il requisito viene interpretato come "devono esistere coppie disgiunte di sentinelle adiacenti" si può usare una variabile binaria $y_{ij}$ per ogni spigolo $[i,j] \in E$ del grafo: essa vale 1 se e solo se due sentinelle abbinate sono poste agli estremi dello spigolo.

I vincoli che collegano le variabili $x$ e $y$ sono

$$y_{ij} \leq x_i \quad y_{ij} \leq x_j \quad \forall [i,j] \in E.$$

Questi vincoli si possono scrivere anche in forma aggregata,

$$2y_{ij} \leq x_i + x_j \quad \forall [i,j] \in E$$

ma il rilassamento continuo ne risulta indebolito.

Per imporre che ogni sentinella sia abbinata esattamente ad un'altra, si può usare un vincolo di uguaglianza:

$$x_i = \sum_{[i,j] \in E} y_{ij} \quad \forall i \in V.$$

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned}
\text{minimize } \; & z = \sum_{i \in V} x_i & & \\
\text{subject to } \; & \sum_{k \in V : [i,k] \in E} x_k \geq 1 & \forall i \in V & \\
& y_{ij} \leq x_i & \forall [i,j] \in E & \quad (1)\\
& y_{ij} \leq x_j & \forall [i,j] \in E & \quad (2)\\
& x_i = \sum_{[i,j] \in E} y_{ij} & \forall i \in V & \quad (3)\\
& x_i \in \{0,1\} & \forall i \in V & \\
& y_{ij} \in \{0,1\} & \forall [i,j] \in E. & \quad (4)
\end{aligned}$$

dove i vincoli (1), (2), (3) e (4) si possono omettere nella prima interpretazione.

Il modello è di Programmazione Lineare 0-1.

La soluzione calcolata con i dati dell'esempio prevede nel secodo caso $12$ sentinelle, localizzate e abbinate come segue: $(1, 2)$, $(4, 24)$, $(9, 10)$, $(11, 23)$, $(14, 15)$ e $(19, 20)$. Nel primo caso la soluzione ottima prevede $11$ sentinelle: le stesse di cui sopra tranne che nel vertice $23$.

In entrambi i casi l'ottimalità della soluzione è garantita; l'unicità no.