

Programmazione lineare

Ricerca operativa

Giovanni Righini



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

Programmazione lineare (PL)

Un problema è di **programmazione lineare** (Linear Programming) quando:

- le **variabili** hanno un dominio **continuo**;
- i **vincoli** sono **equazioni e disequazioni lineari**;
- la **funzione obiettivo** è una **funzione lineare delle variabili**.

Nella sua **forma generale** un problema di PL si presenta così:

$$\text{maximize/minimize } z = cx \quad (1)$$

$$\text{subject to } A_1x \geq b_1 \quad (2)$$

$$A_2x \leq b_2 \quad (3)$$

$$A_3x = b_3 \quad (4)$$

$$x' \geq 0 \quad (5)$$

$$x'' \text{ libere} \quad (6)$$

I vincoli possono essere di tipo \leq, \geq o $=$.

Alcune variabili possono essere vincolate a valori **non-negativi**.

Forma alle disuguaglianze

I problemi di PL possono essere riformulati nella forma “**alle disuguaglianze**”, che è utile per l'interpretazione geometrica del problema. Per passare dalla **forma generale** alla **forma alle**

disuguaglianze, occorre eliminare dal modello i **vincoli di uguaglianza** e le **variabili libere**.

Eliminazione vincoli di uguaglianza

I vincoli di uguaglianza si possono eliminare semplicemente per sostituzione. Ad esempio:

$$\begin{array}{llllll} \text{maximize } z = & 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & -x_2 & -x_3 & \leq & 8 \\ & 3x_1 & +2x_2 & & \geq & -6 \\ & & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ & & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Da $x_2 - 2x_3 = 1$ si ricava $x_2 = 2x_3 + 1$.
Sostituendo x_2 nel modello si ottiene:

$$\begin{array}{llllll} \text{maximize } z = & 3x_1 & +x_3 & -2 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & -3x_3 & \leq & 9 & \\ & 3x_1 & +4x_3 & \geq & -8 & \\ & & 2x_3 & \geq & -1 & \\ & & x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Eliminazione variabili libere

Le variabili libere si possono eliminare sostituendole con la differenza tra due variabili non-negative. Ad esempio, ponendo $x_1 = x_4 - x_5$ nel modello:

$$\begin{array}{llll} \text{maximize } z = & 3x_1 & +x_3 & -2 \\ \text{s.t.} & 2x_1 & -3x_3 & \leq 9 \\ & 3x_1 & +4x_3 & \geq -8 \\ & & 2x_3 & \geq -1 \\ & & x_3 & \geq 0 \end{array}$$

si ottiene

$$\begin{array}{llllll} \text{maximize } z = & +x_3 & +3x_4 & -3x_5 & -2 \\ \text{s.t.} & -3x_3 & +2x_4 & -2x_5 & \leq 9 \\ & 4x_3 & +3x_4 & -3x_5 & \geq -8 \\ & 2x_3 & & & \geq -1 \\ & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Forma alle disuguaglianze

$$\begin{array}{llllll} \text{maximize } z = & +x_3 & +3x_4 & -3x_5 & -2 \\ \text{s.t.} & -3x_3 & +2x_4 & -2x_5 & \leq 9 \\ & 4x_3 & +3x_4 & -3x_5 & \geq -8 \\ & 2x_3 & & & \geq -1 \\ & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

I termini costanti nella f.o. possono essere trascurati.

I vincoli ridondanti possono essere eliminati.

Tutte le disequazioni devono essere coerenti in segno e opposte all'obiettivo:

- massimizzazione con vincoli di \leq ;
- minimizzazione con vincoli di \geq .

$$\begin{array}{llllll} \text{maximize } w = & +x_3 & +3x_4 & -3x_5 & & \\ \text{s.t.} & -3x_3 & +2x_4 & -2x_5 & \leq 9 \\ & -4x_3 & -3x_4 & +3x_5 & \leq 8 \\ & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0 \end{array}$$

Rappresentazione matriciale

$$\begin{array}{ll} \text{maximize } w = & +x_3 \quad +3x_4 \quad -3x_5 \\ \text{s.t.} & -3x_3 \quad +2x_4 \quad -2x_5 \leq 9 \\ & -4x_3 \quad -3x_4 \quad +3x_5 \leq 8 \\ & x_3, \quad x_4, \quad x_5 \geq 0 \end{array}$$

Lo stesso modello si può rappresentare in modo più compatto usando la notazione matriciale.

$$\begin{array}{ll} \text{maximize } w = & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

dove

$$c^T = [\ 1 \quad 3 \quad -3 \]$$
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Interpretazione geometrica della PL

Ogni **soluzione** x è un assegnamento di valore alle variabili. Quindi corrisponde ad un punto in uno spazio continuo ad n dimensioni, dove n è il numero di **variabili** nel modello.

Ogni **vincolo di uguaglianza** $ax = b$ corrisponde ad un **iperpiano**.

Ogni **vincolo di disuguaglianza** $ax \leq b$ corrisponde ad un **semispazio**.

Il **sistema dei vincoli** nel modello alle disuguaglianze corrisponde all'**intersezione dei corrispondenti semispazi**.

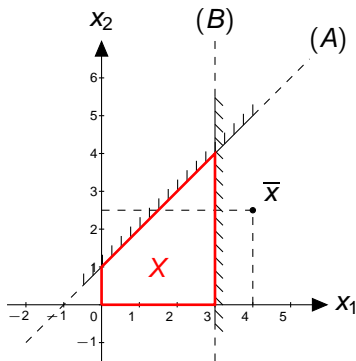
L'intersezione di semispazi è un **poliedro**.

I semispazi sono **convessi**.

L'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso.

Quindi **i poliedri sono convessi**.

Interpretazione geometrica della PL



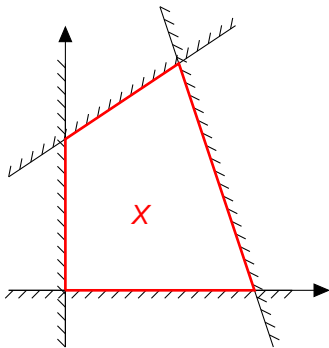
$$n = 2$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

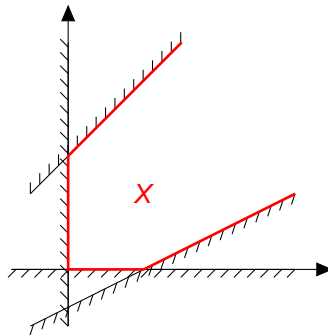
Regione ammissibile:

$$X = \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 & (A) \\ x_1 \leq 3 & (B) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Interpretazione geometrica della PL

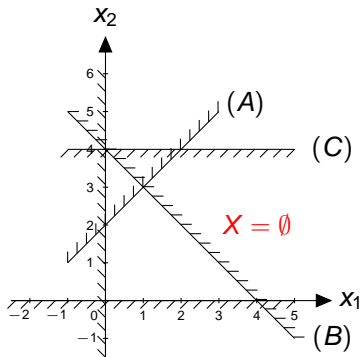


Poliedro limitato (politopo)



Poliedro illimitato

Interpretazione geometrica della PL

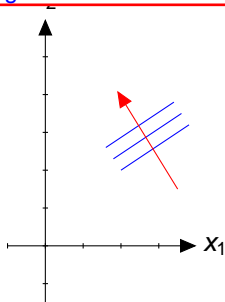


Poliedro vuoto

$$X = \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 2 & (A) \\ x_1 + x_2 \leq 4 & (B) \\ x_2 \geq 4 & (C) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Interpretazione geometrica della PL

Tutti i punti che giacciono sulla retta hanno lo stesso valore di z . La freccia indica in che direzione si sta migliorando.



$$\text{minimize } z = 2x_1 - 3x_2$$

Poiché la funzione obiettivo è lineare, tutte le **soluzioni equivalenti** giacciono su uno stesso **iperpiano**.

La funzione obiettivo corrisponde ad un **fascio di iperpiani paralleli**, ordinati come i corrispondenti valori dell'obiettivo.

La **direzione di ottimizzazione** (cioè minimizzazione o massimizzazione) definisce l'ordinamento degli iperpiani del fascio.

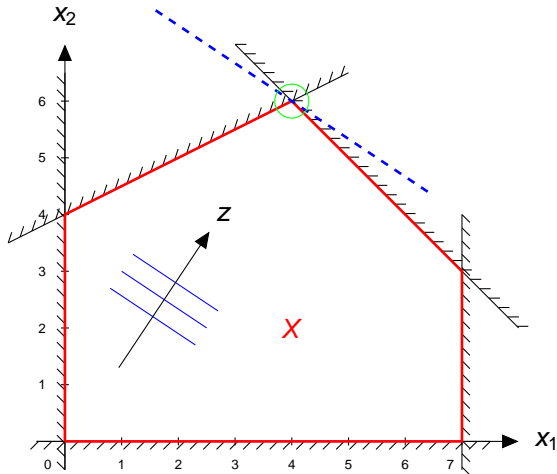
La direzione della freccia in questo caso è in alto a sx dato che devo minimizzare e il coefficiente angolare di x_1 è >0 e quello di x_2 è <0

Interpretazione geometrica della PL

Per la **convessità del poliedro** che rappresenta la regione ammissibile e per la **linearità delle curve di livello** della funzione obiettivo, possono darsi tre casi:

- **il poliedro è vuoto**: non esistono soluzioni ammissibili;
- **il poliedro è illimitato** nella direzione di ottimizzazione: non esiste un valore ottimo finito;
- esiste almeno un **vertice del poliedro** che corrisponde al **valore ottimo**.

Interpretazione geometrica della PL



Forma standard

$$\begin{array}{llllll} \text{maximize } w = & +x_1 & +3x_2 & -3x_3 & & \\ \text{s.t.} & -3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & \leq & 9 \\ & -4x_1 & -3x_2 & +3x_3 & \leq & 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

La funzione obiettivo viene posta in forma di **minimizzazione**.

Tutti i vincoli di disuguaglianza vengono posti in forma di **uguaglianza**, introducendo opportune **variabili non-negative di scarto (slack)** o di **surplus**.

$$\begin{array}{llllllll} \text{minimize } z = & -x_1 & -3x_2 & +3x_3 & & & & \\ \text{s.t.} & -3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & & = & 9 \\ & -4x_1 & -3x_2 & +3x_3 & & +x_5 & = & 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & \geq & 0 \end{array}$$

Forma standard

Mettendo in forma standard un problema alle disuguaglianze con m vincoli e n variabili si ottiene un modello con m vincoli e $n + m$ variabili, **tutte non-negative**.

Il sistema dei vincoli è un sistema di m equazioni lineari in $n + m$ variabili.

Se non ci sono vincoli ridondanti, la matrice dei coefficienti ha rango m .

Il sistema quindi ha una soluzione univocamente determinabile se eliminiamo gli n gradi di libertà in eccesso, fissando n variabili.

Ad ogni **variabile nulla** nella forma standard corrisponde un **vincolo attivo** nella forma alle disuguaglianze.

Fissare n variabili a 0 nella forma standard corrisponde a scegliere un punto in cui n vincoli sono attivi nella forma alle disuguaglianze.

Soluzioni di base

Una base è un sottinsieme di m variabili scelte tra le $n + m$ della forma standard.

$$[B \mid N]$$

Il numero di basi è combinatorio: cresce esponenzialmente con m e n .

Una volta scelta la base, il sistema si può riscrivere come

$$Bx_B + Nx_N = b$$

La soluzione del sistema $m \times m$ che si ottiene dopo aver fissato a 0 tutte le n variabili fuori base è una **soluzione di base**.

Per ottenerla bisogna invertire la matrice B formata dalla base.

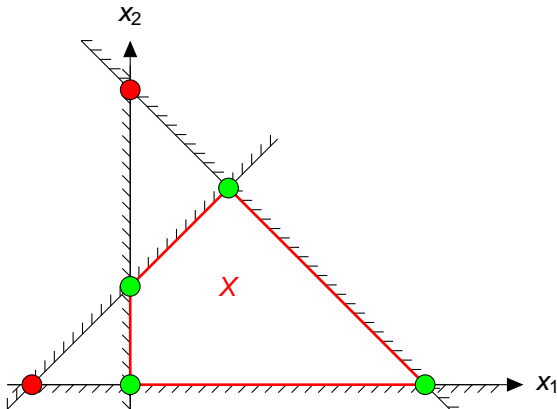
$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

da cui

$$x_N = 0 \quad x_B = B^{-1}b.$$

Soluzioni di base

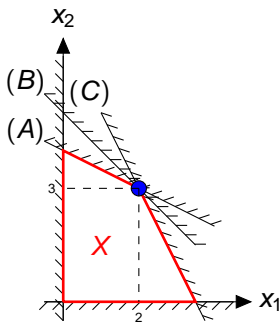
Tutti i vertici del poliedro sono soluzioni di base ma non è detto il viceversa: esistono anche soluzioni di base non ammissibili (quando $x_B \not\geq 0$).



Degenerazione

Quando una **variabile in base** risulta avere valore nullo, si ha **degenerazione**: più **soluzioni di base** coincidono.

In altri termini, più di n vincoli sono attivi nello stesso punto in uno spazio ad n dimensioni.



$$\begin{array}{llll} \text{minimize } z = & -x_1 & -x_2 & \\ \text{s.t.} & x_1 & +2x_2 & \leq 8 \quad (A) \\ & x_1 & +x_2 & \leq 5 \quad (B) \\ & 2x_1 & +x_2 & \leq 7 \quad (C) \\ & x_1, & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

La soluzione $x = [2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0]$ corrisponde alle basi $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$.

Teorema fondamentale della PL

Dato un problema lineare in forma standard

$$z = \min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

con A di rango m

- se esiste una **soluzione ammissibile**,
esiste anche una **soluzione ammissibile di base**;
- se esiste una **soluzione ottima**,
esiste anche una **soluzione ottima di base**.

Perciò un problema lineare nel **continuo** può essere risolto come problema combinatorio (**discreto**), limitandosi a considerare solo le **soluzioni di base**.

Metodi risolutivi

La complessità computazionale della programmazione lineare è **polinomiale**, tramite l'**algoritmo dell'ellissoide** (Khachiyan, 1979). Il metodo di gran lunga più diffuso per risolvere i problemi di PL però è l'**algoritmo del simplesso** (Dantzig, 1947).

L'algoritmo del simplesso non dà garanzia di terminare in un numero di iterazioni limitato da un polinomio nelle dimensioni dell'esempio, ma in pratica è molto veloce. Ne esistono diverse versioni e molte implementazioni, anche estremamente sofisticate.

L'algoritmo garantisce di terminare in un **numero finito di passi**, garantendo una di queste tre situazioni:

- la soluzione corrente è **ottima**;
- non esiste soluzione ammissibile (problema inammissibile);
- non esiste soluzione ottima finita (problema illimitato).

L'algoritmo del simplesso procede iterativamente da una **soluzione di base** ad una **adiacente**.