Volo internazionale.

Durante un volo internazionale, un aeromobile deve sorvolare il territorio di diversi stati. Ogni stato concede l'accesso al proprio spazio aereo in cambio del pagamento di una tariffa, che varia da stato a stato.

Si supponga che l'itinerario, cioè la sequenza di stati da sorvolare, sia già stato deciso e che il costo per ogni stato sorvolato sia direttamente proporzionale alla distanza percorsa nel corrispondente spazio aereo; il coefficiente di proporzionalità, cioè il costo unitario (espresso ad esempio in euro per miglio), è dato. Sono note anche le posizioni degli aeroporti di partenza e di arrivo.

I confini tra gli stati da attraversare sono approssimati da linee rette spezzate, di cui sono noti i punti di discontinuità (coordinate Cartesiane). L'attraversamento del confine tra stati adiacenti può avvenire in qualsiasi punto. Si supponga che la distanza minima tra due punti sia quella percorsa in linea retta, trascurando la curvatura della superficie della Terra.

Il problema consiste nel trovare la rotta di minimo costo.

Formulare il problema e classificarlo. Risolvere l'esempio descritto dai dati riportati nel file VOLO.TXT. Discutere ottimalità e unicità delle soluzioni ottenute.

Versione semplificata: supporre che ogni confine sia descritto da un unico segmento.

Dati.

Aeroporto	x	y
Partenza	5	20
Arrivo	25	8

Tabella 1: Posizione aeroporti (coordinate Cartesiane).

Stato	Costo unitario di sorvolo
1	1.5
2	0.8
3	1.4

Tabella 2: Costi di sorvolo per ogni stato.

Confini	Vertici
1	$(0,14)$ $(8,14)$ $(15,19)$ $(17,23)$ $(17,30)$
2	$(10,0)$ $(30,20)$

Tabella 3: Vertici lungo i confini (versione generale).

Confini	Vertici
1	$(1,9)$ $(22,24)$
2	$(10,0)$ $(30,20)$

Tabella 4: Vertici lungo i confini (versione semplificata).

Soluzione

Si presenta qui la soluzione del caso più generale.

Definiamo anzitutto i dati del problema. Il numero di stati è ovviamente uno in più del numero dei confini. Quindi nell'esempio descritto ci sono 3 stati da sorvolare e 2 confini da attraversare. Una possibilità è definire n come il numero di confini da attraversare e due insiemi, $R = \{0, \dots, n\}$ e $C = \{1, \dots, n\}$ per indicare rispettivamente gli stati e i confini.

I costi unitari di sorvolo sono un vettore π con una componente π_r per ogni stato $r \in R$.

Ogni confine è composto da una sequenza di segmenti, di cui sono noti gli estremi. Anche in questo caso, il numero dei vertici è uno in più del numero dei segmenti. Ad, esempio tra i primi due stati il confine è composto da 4 segmenti. Dato che il numero di segmenti non è lo stesso per tutti i confini, bisogna definire anzitutto il numero S_c di segmenti per ogni confine $c \in C$. Quindi ad ogni confine $c \in C$ è associato un insieme di S_c segmenti e $S_c + 1$ vertici. Indichiamo l'insieme dei vertici dati con $P_c = \{0, \dots, S_c\}$. Di ciascuno di questi vertici sono note l'ascissa e l'ordinata, che possiamo quindi indicare con $(\overline{x}_{cp}, \overline{y}_{cp})$ $\forall c \in C, \forall p \in P_c$.

Analogamente, indichiamo le coordinate degli aeroporti di partenza e arrivo con $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ e $(\overline{x}_n, \overline{y}_n)$, rispettivamente.

Le variabili del problema sono le posizioni in cui ogni confine viene attraversato, cioè punti che devono appartenere ad uno dei segmenti di ciascun confine. Indichiamo la posizione di tali punti con (x_c, y_c) per ogni confine $c \in C$. Sono variabili continue e libere in segno.

Per vincolare tali punti ad appartenere al confine, è necessario anzitutto selezionare quale segmento viene attraversato. Ciò richiede l'introduzione di una variabile binaria w_{cp} che vale 1 se e solo se il confine $c \in C$ viene attraversato lungo il segmento tra il punto di indice $p-1$ e il punto di indice p in P_c. Per vincolare un punto (x_c, y_c) ad appartenere ad un segmento di estremi $(\overline{x}_{cp-1}, \overline{y}_{cp-1})$ e $(\overline{x}_{cp}, \overline{y}_{cp})$, un modo semplice è quello di imporre che le coordinate del punto siano una combinazione convessa delle coordinate degli estremi. Per ogni confine $c \in C$ introduciamo quindi un coefficiente $0 \leq \lambda_c \leq 1$ (variabile continua), che definisce la combinazione convessa.

I vincoli impongono quindi che uno sia il segmento attraversato per ogni confine:

$$\sum_{p \in P_c : p > 0} w_{cp} = 1.$$

Inoltre, le coordinate del punto di attraversamento devono essere una combinazione convessa secondo un peso λ_c degli estremi del segmento attraversato:

$$x_c = \lambda_c \sum_{p \in P_c : p > 0} w_{cp} \overline{x}_{cp-1} + (1 - \lambda_c) \sum_{p \in P_c : p > 0} w_{cp} \overline{x}_{cp}.$$

$$y_c = \lambda_c \sum_{p \in P_c : p > 0} w_{cp} \overline{y}_{cp-1} + (1 - \lambda_c) \sum_{p \in P_c : p > 0} w_{cp} \overline{y}_{cp}.$$

L'obiettivo da minimizzare è il costo totale, cioè la somma pesata con i coefficienti π_r delle distanze percorse in ogni stato $r \in R$. Per esprimerla può essere comodo eventualmente introdurre tante variabili ausiliarie d_r quanti gli stati, per indicare tali distanze.

Si ha quindi nel primo stato (con indice 0)

$$d_0^2 = (\overline{x}_0 - x_1)^2 + (\overline{y}_0 - y_1)^2,$$

nell'ultimo stato (con indice n)

$$d_n^2 = (\overline{x}_n - x_n)^2 + (\overline{y}_n - y_n)^2,$$

e negli stati intermedi (con indice da 1 a $n-1$)

$$d_r^2 = (x_r - x_{r+1})^2 + (y_r - y_{r+1})^2 \ \forall r \in R : r > 0 \wedge r < n.$$

Scrivere i vincoli in questo modo ha il vantaggio di evitare l'uso della radice quadrata. Implica, tuttavia, l'accortezza di definire le variabili ausiliarie d come non-negative.

La funzione obiettivo risulta quindi

$$\text{minimize } z = \sum_{r \in R} \pi_r d_r.$$

Il problema è di programmazione non-lineare con variabili binarie. Nella versione semplificata non sono necessarie le variabili binarie per selezionare il segmento attraversato e quindi il problema è di PNL nel continuo.

Tutti i vincoli e anche l'obiettivo sono convessi. Quindi, nella versione semplificata il problema è convesso e la soluzione è globalmente ottima.

La soluzione calcolata dai solutori (anche nella versione semplificata) attraversa il confine 1 nel punto $(10.3225, 15.6589)$ e il confine 2 nel punto $(20.7986, 10.7986)$ con un costo complessivo pari a 26.6088.