Esercizio 1: Gironi eliminatori

Il problema richiede di calcolare le distanze euclidee *d(i,j)* tra ogni coppia di città. Tali distanze comunque sono da classificare come dati del problema, non come variabili, poiché dipendono solo dalle posizioni date e non da decisioni.

Le variabili invece sono variabili binarie di assegnamento di ogni squadra ad ogni gruppo. Ne servono quindi 24 x 6, cioè 144.

I vincoli devono imporre che venga assegnato esattamente un gruppo ad ogni squadra e vengano assegnate esattamente 4 squadre ad ogni gruppo.

L'unica difficoltà dell'esercizio consiste nell'esprimere la funzione obiettivo. Si può fare un due modi, lineare e non-lineare. Un modo consiste nel sommare nella funzione obiettivo gli addendi *d(i,j)* in corrispondenza delle coppia per cui si ha *x(i,g)=1* e *x(j,g)=1* per uno stesso gruppo *g*. La congiunzione logica di queste due condizioni si traduce in modo naturale nel prodotto tra le corrispondenti variabili, cioè *x(i,g)*x(j,g)*. Infatti il prodotto vale 1 se e solo se entrambe le variabili valgono 1. In questo modo la funzione obiettivo risulta

$$Min \sum_{g} \sum_{i,j} d(i,j) * x(i,g) * x(j,g)$$

Scritta così la funzione obiettivo è non-lineare e quindi richiede un solutore di PNL, come ad esempio Lingo. Tuttavia l'esempio proposto è troppo grande per essere risolto dalla versione gratuita di Lingo.

Un secondo modo di formulare l'obiettivo è di inserire una variabile binaria *z(i,j)* per ogni coppia di squadre. Questa variabile vale 1 se e solo se le due squadre sono assegnate allo stesso gruppo. In questo modo la funzione obiettivo si semplifica e si formula in modo lineare:

$$Min \sum_{i,j} d(i,j) * z(i,j)$$

Affinché le variabili *z* assumano i valori corretti, è necessario inserire dei vincoli che le colleghino alle variabili *x*. Tali vincoli devono costringere ogni variabile *z(i,j)* ad assumere valore 1 se esiste un gruppo *g* tale che *x(i,g)* e *x(j,g)* valgono entrambe 1. Altrimenti *z(i,j)* deve poter valere 0. Questo effetto si ottiene tramite i vincoli

$$z(i,j) \geq x(i,g) + x(j,g) - 1 \; \forall g, \forall i,j$$

In questo secondo modo si ottiene un modello di programmazione lineare con variabili binarie.

Il modello MathProg è nel file GIRONI.MOD e la soluzione ottima è nel file GIRONI.OUT.

E' garantita l'ottimalità della soluzione, non la sua unicità.