Spirale di Archimede.

Una spirale di Archimede è il luogo dei punti P del piano Cartesiano la cui distanza dall'origine varia linearmente con l'angolo formato dalla retta OP con il semiasse positivo delle ascisse (in senso orario o antiorario). La curva può anche essere ruotata, traslata o ribaltata, restando comunque una spirale di Archimede.

Si vuole trovare una spirale di Archimede che interpoli nel modo migliore un insieme di punti dati, sapendo che essa (i) ha origine nell'origine degli assi, (ii) si sviluppa in senso antiorario e (iii) non compie più di due giri completi.

Si assuma come misura della qualità dell'interpolazione l'errore quadratico medio, cioè il valor medio dei quadrati delle distanze tra ciascuno dei punti e la spirale. Per distanza tra un punto P e la spirale si intende la distanza tra il punto P e l'intersezione tra la spirale e la retta OP dove O è l'origine degli assi.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio con i dati del file SPIRALE.TXT in una delle due versioni: la versione semplificata in cui si assume di avere in ingresso le posizioni dei punti dati in coordinate polari o la versione più complessa in cui si assume di avere in ingresso le posizioni dei punti dati in coordinate cartesiane.

Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Dati.

	x	y
1	0,07	0,10
2	-0,05	0,25
3	-0,49	0,31
4	-0,66	0,00
5	0,07	-1,37
6	0,61	-1,15
7	1,75	0,26
8	-1,01	2,16
9	-2,78	-0,20
10	-0,07	-3,05

Tabella 1: Insieme dei punti dati (coordinate cartesiane).

	ρ	θ
1	0,122	0,960
2	0,255	1,768
3	0,580	2,578
4	0,660	3,142
5	1,372	4,763
6	1,302	5,200
7	1,769	6,431
8	2,384	8,291
9	2,787	9,497
10	3,051	10,973

Tabella 2: Insieme dei punti dati (coordinate polari).

Soluzione commentata.

Il problema si riconduce ad un'interpolazione lineare da risolvere con il metodo dei minimi quadrati, una volta che tutto viene espresso in coordinate polari (θ, ρ), indicando con θ l'angolo e con ρ la distanza dall'origine. Infatti, la distanza tra ogni punto dato P e la spirale va calcolata lungo la retta OP, e quindi è la differenza tra i valori di ρ a parità di θ.

Supponiamo di utilizzare i dati in coordinate cartesiane. Questi implica la loro trasformazione in coordinate polari.

Dati. Sono dati un insieme indicizzato N di n punti in posizione $x_i, y_i)$ per ogni $i \in N$. Tali posizioni vanno trasformate in cooordinate polari (θ_i, ρ_i) per ogni punto $i \in N$.

Variabili. Della spirale restano da determinare il coefficiente k che lega raggio e angolo e l'angolo iniziale θ_0. Essa ha equazione $\rho = k(\theta - \theta_0)$. Entrambe le variabili sono continue; k è anche non-negativa.

Obiettivo. L'obiettivo è quello dei minimi quadrati.

$$\text{minimize } z = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} (\rho_i - k(\theta_i - \theta_0))^2.$$

Vincoli. Il problema non ha altri vincoli.

Partendo dalle coordinate polari si ha quindi un problema quadratico convesso che ha soluzione ottima unica pari a $k = 0,3008$ e $\theta_0 = 0,730$.

Partendo invece dalle coordinate cartesiane, è necessario convertirle in coordinate polari.

Il raggio per ogni punto si calcola facilmente:

$$\rho_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}.$$

L'angolo, invece, va calcolato tenendo conto che la spirale compie fino ad un massimo di due giri. Ogni angolo θ_i, quindi, deve essere compreso tra 0 e 4π. Bisogna inoltre imporre $\theta_i \geq \theta_{i-1}$ per ogni $i \in N, i > 1$ e $\sin \theta_i = y_i/\rho_i$ e $\cos \theta_i = x_i/\rho_i$ per ogni $i \in N$.

Risolvendo questo ulteriore problema di PNL in fase di pre-processing (senza funzione obiettivo), è possibile ottenere le coordinate polari corrette per ogni punto (quelle indicate nella tabella 2).