Programmazione non lineare: dodici esercizi commentati e risolti

Giovanni Righini

6 agosto 2010

Di tutti gli esercizi presentati nel seguito è disponibile il modello con relativa soluzione anche sotto forma di foglio elettronico.

Prima di affrontare gli esercizi consiglio di dare un'occhiata alla guida allo svolgimento degli esercizi di programmazione matematica e all'introduzione alla PNL, entrambe disponibili su questo sito.

1 Problema n.1: Atomi

Il problema. Nell'intorno di un atomo l'energia di interazione tra l'atomo stesso e un altro atomo sonda che gli viene avvicinato è dato dalla formula

$$E = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}$$

dove A e B sono parametri caratteristici dell'atomo mentre r è la distanza Euclidea tra l'atomo e la sonda. È data una configurazione tridimensionale di alcuni atomi, supposti puntiformi e si vuole trovare il punto di minima energia a cui la sonda (anch'essa supposta puntiforme) tende a stabilizzarsi per effetto delle interazioni con gli atomi stessi.

Atomo	x	y	z	A	B
1	3.2	2.5	4.8	1.0	200
2	2.1	3.7	8.4	1.1	400
3	7.5	2.5	5.0	2.1	320
4	6.6	1.2	4.5	3.0	250
5	0.8	5.1	5.6	0.5	400
6	6.3	8.8	3.5	0.2	200
7	2.4	1.0	3.1	0.8	120
8	1.2	4.6	9.0	1.1	300
9	8.5	7.8	1.5	1.5	100
10	4.1	9.3	0.9	1.7	500

Tabella 1: Posizioni e parametri degli atomi.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $N = 10$ atomi, indicati da un indice i. Di ciascuno sono note le coordinate (x_i, y_i, z_i) e i coefficienti A_i e B_i.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *dove* localizzare il punto di minima energia. Si possono introdurre quindi tre variabili continue e libere, $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, che indicano la posizione del punto di minima energia; È comodo introdurre anche variabili continue e non-negative r_i, che indicano la distanza della sonda da ogni atomo i e variabili continue libere e_i, che indicano l'energia di interazione tra la sonda e l'atomo i .

Vincoli. Introduciamo anzitutto i vincoli che legano i valori delle variabili r_i alle variabili $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$:

$$r_i = \sqrt{(x_i - \overline{x})^2 + (y_i - \overline{y})^2 + (z_i - \overline{z})^2} \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Esprimiamo poi i valori delle variabili e_i in funzione delle r_i:

$$e_i = \frac{A_i}{r_i^{12}} - \frac{B_i}{r_i^6} \forall i = 1, \ldots, N.$$

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo da minimizzare è data dall'energia di interazione complessiva tra la sonda e gli atomi, cioè da $\sum_{i=1}^{N} e_i$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{array}{lll}
\text{minimize} & v = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} e_i & \\
\text{subject to} & r_i = \sqrt{(x_i - \overline{x})^2 + (y_i - \overline{y})^2 + (z_i - \overline{z})^2} & \forall i = 1, \ldots, N \\
& e_i = \dfrac{A_i}{r_i^{12}} - \dfrac{B_i}{r_i^6} & \forall i = 1, \ldots, N \\
& \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \text{ libere} & \\
& r_i \geq 0 & \forall i = 1, \ldots, N \\
& e_i \text{ libere} & \forall i = 1, \ldots, N.
\end{array}$$

2 Problema n.2: Circonferenza

Il problema. Caso 1: Data una circonferenza trovare il punto su di essa che ottimizza una funzione obiettivo lineare.
Caso 2: Data una retta trovare il punto su di essa che minimizza la distanza da un punto dato.

Caso 1: Centro = (2,3). Raggio = 5. Obj: 3x + 4y.
Caso 2: Retta: 3x + 4y = 20. Punto = (2,3).

Il modello matematico. Distinguiamo i due casi proposti.

Caso 1.

Dati. È data una circonferenza di centro $C = (x_C, y_C)$ e raggio r. È dato un fascio di rette parallele di equazione $ax + by = z$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel trovare una retta appartenente al fascio di rette dato. Perciò, essendo dati a e b si tratta di determinare il valore del parametro z che identifica la retta. Equivalentemente si tratta di determinare il punto P in cui la retta e la circonferenza sono tangenti. Assumiamo quindi le variabili (continue e libere) (x_P, y_P) e z, che sono legate tra loro dalle relazioni $d(C, P) = r$ poiché P appartiene alla circonferenza e $ax_P + by_P = z$ poiché P appartiene alla retta. Abbiamo quindi introdotto 3 variabili e due vincoli di uguaglianza, cioè un solo grado di libertà.

Vincoli. Il problema non ha altri vincoli.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare il valore di z.

Il modello matematico completo (caso 1) risulta quindi:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \;\; z = ax_P + by_P \\ &\text{subject to} \; ((x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2)^{1/2} = r. \end{aligned}$$

Caso 2.

Dati. È dato un punto $C = (x_C, y_C)$. È data una retta di equazione $ax + by = c$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel determinare un punto P appartenente alla retta data. Assumiamo quindi le variabili (continue e libere) (x_P, y_P), che sono legate tra loro dalla relazione $ax_P + by_P = c$ poiché P appartiene alla retta. Abbiamo quindi introdotto 2 variabili e un vincolo di uguaglianza, cioè un solo grado di libertà.

Vincoli. Il problema non ha altri vincoli.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare la distanza tra C e P.

Il modello matematico completo (caso 2) risulta quindi:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \;\; z = ((x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2)^{1/2} \\ &\text{subject to} \; ax_P + by_P = c. \end{aligned}$$

3 Problema n.3: Acceleratore di particelle

Il problema. Per promuovere il finanziamento per la costruzione di un nuovo gigantesco acceleratore di particelle, un consorzio di fisici deve presentare un progetto. La regione in cui si vuole costruire l'acceleratore è abitata solo in corrispondenza di agglomerati urbani ben delimitati. Ciò è molto importante perché per motivi tecnici è opportuno che l'area occupata dall'acceleratore sia interamente disabitata. L'acceleratore è a forma di 8, essendo costituito da due anelli di uguale raggio tangenti tra loro. L'efficacia del sistema è tanto maggiore quanto maggiore è il raggio di curvatura degli anelli, quindi i fisici vorrebbero un sistema il più grande possibile, ma all'aumentare delle dimensioni naturalmente risulta difficile rispettare il vincolo di non sovrapposizione con le aree abitate. Perciò i fisici si rivolgono speranzosi ad un ricercatore operativo che li aiuti.

La regione è rettangolare, compresa tra i punti di ascissa -100 km e 100 km e di ordinata -50 km e 50 km.

Le città sono 16 e sono descritte da aree circolari di cui sono noti i centri e i raggi (espressi in km), come riportato nella tabella.

Città	x	y	r
A	-80	30	5
B	-87	-15	2
C	-81	-35	4
D	-59	25	4
E	-25	-30	4
F	-33	-15	2
G	-12	1	5
H	- 6	43	5
I	0	-24	8
J	10	10	9
K	20	-15	2
L	30	25	2
M	41	-31	10
N	55	15	5
O	69	-10	10
P	80	28	9

Tabella 2: Posizione e raggi delle città.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. È data una regione rettangolare nel piano cartesiano, identificata dai valori limite x_{min}, x_{max}, y_{min}, y_{max}. Sono date $N = 16$ città. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, N$ ciascuna di esse. Di ciascuna sono date le coordinate del centro (x_i, y_i) ed il raggio r_i. È dato un numero $A = 2$ di anelli da localizzare. Usiamo un indice $j = 1, \ldots, A$ per indicare gli anelli.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *dove* localizzare i due anelli uguali e tangenti, di centro C_1 e C_2 e raggio R_1 ed R_2. Per ciascun anello definiamo quindi due variabili continue libere, che rappresentano le coordinate cartesiane del suo centro, ed un'altra variabile continua non-negativa che rappresenta il suo raggio. Abbiamo quindi le variabili x_{C_j}, y_{C_j} ed R_j per $j = 1, \ldots, A$.

Vincoli. Un primo insieme di vincoli impone che nessun anello sia sovrapposto alle città. Esiste quindi un vincolo per ogni coppia (i, j) con $i = 1, \ldots, N$ e $j = 1, \ldots, A$. Il vincolo si esprime imponendo che la distanza tra il centro della città i ed il centor dell'anello j sia maggiore o uguale alla somma dei rispettivi raggi:

$$d(i, C_j) \geq r_i + R_j \quad \forall i = 1, \ldots, N \quad \forall j = 1, \ldots, A.$$

Un secondo insieme di vincoli impone che i due anelli siano tangenti, ossia che la distanza tra i loro centri sia pari alla somma dei due raggi:

$$d(C_1, C_2) = R_1 + R_2.$$

Inoltre i due anelli devono essere uguali, cioè deve essere $R_1 = R_2$. Infine bisogna imporre che ciascun anello sia contenuto nella regione specificata:

$$x_{C_j} - R_j \geq x_{min} \quad \forall j = 1, \ldots, A$$

$$x_{C_j} + R_j \leq x_{max} \quad \forall j = 1, \ldots, A$$

$$y_{C_j} - R_j \geq x_{min} \quad \forall j = 1, \ldots, A$$

$$y_{C_j} - R_j \geq x_{min} \quad \forall j = 1, \ldots, A.$$

Funzione obiettivo. È richiesto di massimizzare il raggio dell'acceleratore, cioè R_1 (o R_2 indifferentemente).

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & z = R_1 & \\
\text{subject to} & ((x_i - x_{C_j})^2 + (y_i - y_{C_j})^2)^{1/2} \geq r_i + R_j & \forall i = 1, \ldots, N \quad \forall j = 1, \ldots, A. \\
 & ((x_{C_1} - x_{C_2})^2 + (y_{C_1} - y_{C_2})^2)^{1/2} = R_1 + R_2 & \\
 & R_1 = R_2 & \\
 & x_{C_j} - R_j \geq x_{min} & \forall j = 1, \ldots, A \\
 & x_{C_j} + R_j \leq x_{max} & \forall j = 1, \ldots, A \\
 & y_{C_j} - R_j \geq x_{min} & \forall j = 1, \ldots, A \\
 & y_{C_j} - R_j \geq x_{min} & \forall j = 1, \ldots, A.
\end{array}
$$

Le condizioni di non-negatività sulle variabili R_j non sono necessarie.

4 Problema n.4: Cerchi impaccati

Il problema. Sono dati N cerchi nel piano cartesiano. Di ogni cerchio è dato il raggio. Trovare la disposizione dei (centri dei) cerchi nel piano tale per cui:

1. i cerchi non siano sovrapposti
2. i cerchi siano tutti contenuti in un cerchio più grande
3. il raggio del cerchio che li contiene sia minimo.

Cerchio	Raggio
1	2,00
2	4,00
3	7,00
4	6,00
5	1,00

Tabella 3: Raggi dei cerchi dati.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $N = 5$ cerchi. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, N$ ciascuno di essi. Di ciascuno è dato il raggio r_i. Poichè ogni soluzione del problema è invariante per traslazione e rotazione, possiamo fissare il centro del cerchio contenente in un punto arbitrario, ad esempio nell'origine degli assi $(0, 0)$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *dove* localizzare ciascun cerchio dato. Per ciascun cerchio definiamo quindi due variabili continue libere, che rappresentano le coordinate cartesiane del suo centro. Abbiamo quindi le variabili x_i e y_i per $i = 1, \dots, N$. Un'ulteriore variabile z rappresenta il raggio del cerchio contenente, che deve essere minimizzato.

Vincoli. Un primo insieme di vincoli impone che ogni cerchio sia interno al cerchio contenente. Esiste quindi un vincolo per ogni cerchio $i = 1, \dots, N$, che impone che la distanza tra il centro del cerchio e l'origine sia minore o uguale alla differenza tra il raggio del cerchio contenente ed il raggio del cerchio contenuto.

$$d(i, O) \leq z - r_i \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Un secondo insieme di vincoli impone che i cerchi siano non sovrapposti, ossia che comunque scelti due cerchi i e j distinti tra di loro, la distanza tra i loro centri sia non inferiore alla somma dei loro due raggi:

$$d(C_i, C_j) \geq r_i + r_j \quad \forall i, j = 1, \dots, N, \ \imath \neq j.$$

Funzione obiettivo. È richiesto di minimizzare il raggio z del cerchio contenente.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{array}{lll}
\text{minimize} & z & \\
\text{subject to} & (x_i^2 + y_i^2)^{1/2} \leq z - r_i & \forall i = 1, \dots, N \\
& ((x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2)^{1/2} \geq r_i + r_j & \forall i, j = 1, \dots, N \quad i \neq j.
\end{array}$$

Tutte le variabili sono libere. La condizione di non negatività su z è superflua.

5 Problema n.5: Localizzazione

Il problema. È dato un insieme di punti in posizione nota nel piano cartesiano. Si vogliono localizzare tre punti: la mediana, il centro e il baricentro dei punti dati. La mediana è il punto che minimizza la somma delle distanze dai punti dati; il centro è il punto che minimizza la massima distanza dai punti dati; il baricentro è il punto che minimizza il quadrato delle distanze dai punti dati.

Punto	X	Y
1	342	456
2	456	54
3	342	45
4	435	768
5	432	435
6	345	234
7	45	546
8	765	56
9	234	87

Tabella 4: Posizioni dei punti dati.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $N = 9$ punti. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, N$ ciascuno di essi. Di ciascuno sono date le coordinate (x_i, y_i).

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *dove* localizzare i tre punti richiesti, indicati da M (mediana), C (centro) e B (baricentro). Per ciascuno di essi definiamo quindi due variabili continue libere, che ne rappresentano le coordinate cartesiane. Abbiamo quindi le variabili x_M, y_M, x_C, y_C, x_B e y_B.

Vincoli. Il problema non ha vincoli.

Funzione obiettivo. Sono date tre funzioni obiettivo, una per ogni punto da localizzare. Nel caso della mediana si vuole minimizzare la quantità $z_M = \sum_{i=1}^{N} d(i, M)$, dove $d(i, M)$ indica la distanza euclidea tra il punto i e il punto M. Nel caso del centro si vuole minimizzare la quantità $z_C = \max_{i=1}^{N} d(i, C)$, dove $d(i, C)$ indica la distanza euclidea tra il punto i e il punto C. Nel caso del baricentro si vuole minimizzare la quantità $z_B = \sum_{i=1}^{N} d(i, B)^2$, dove $d(i, B)$ indica la distanza euclidea tra il punto i e il punto B. È importante notare che i tre problemi descritti sono del tutto indipendenti tra loro. Pertanto è possibile ottimizzare simultaneamentre le tre funzioni obiettivo, considerando ad esempio la loro somma.

La seconda funzione obiettivo, che è di tipo min-max si esprime come segue: min z_C con i vincoli $z_C \geq d(i, C) \ \ \forall i = 1, \ldots, N$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = z_M + z_C + z_B \\
\text{subject to} \quad & z_M = \sum_{i=1}^{N} d(i, M) \\
& z_C \geq d(i, C) && \forall i = 1, \ldots, N \\
& z_B = \sum_{i=1}^{N} d(i, B)^2 \\
& d(i, P) = ((x_i - x_P)^2 + (y_i - y_P)^2)^{1/2} && \forall i = 1, \ldots, N \ \ \forall P = M, C, B.
\end{aligned}
$$

6 Problema n.6: Artiglieria

Il problema. Un reparto di artiglieria deve schierarsi su un pianoro dal quale deve battere un altopiano posto oltre una cresta rocciosa. È noto che la traiettoria dei proietti è una parabola, la cui equazione dipende dalla posizione del reparto, dalla velocità iniziale del proietto e dall'angolo di tiro. La velocità iniziale è costante mentre l'angolo di tiro può essere scelto a piacimento (entro certi limiti). L'obiettivo del reparto è di trovare la localizzazione ottimale per poter battere la maggior area possibile oltre la cresta rocciosa. Si consideri per semplicità il problema in una sola dimensione.

Suggerimento: assumendo che il reparto tiri dal punto (x_0, y_0) l'equazione della traiettoria sarebbe la seguente

$$y - y_0 = tg(\alpha)(x - x_0) - \frac{g}{2\ v^2\ cos^2(\alpha)}(x - x_0)^2,$$

dove α è l'angolo di tiro, g è l'accelerazione di gravità e v è la velocità iniziale.

Rispetto al sistema di riferimento scelto:

- il pianoro su cui può schierarsi il reparto di artiglieria è rappresentato dai punti sull'asse delle ascisse con ascissa non superiore a 8500;
- la vetta della cresta rocciosa ha coordinate (10000,400);
- l'altopiano da battere è orizzontale ed ha ordinata pari a 200 ed ascissa da 10000 in su.

La velocità iniziale del proietto è pari a 175 m/sec. L'accelerazione di gravità è pari a 9.81 m/sec^2.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. I dati del problema sono i seguenti:

- massima ascissa del punto di tiro $p = 8500$ (espressa in m);
- la velocità iniziale del proietto $v = 175$ (espressa in m/sec);
- l'accelerazione di gravità $g = 9.81$ (espressa in m/sec^2;
- l'altitudine dell'altopiano $h = 200$ (espressa in m;
- l'altezza della cresta rocciosa $M = 400$ (espressa in m);
- l'ascissa della cresta rocciosa $D = 10000$ (espressa in m).

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *dove* localizzare la batteria. È quindi naturale introdurre una variabile x_0, continua e libera, per indicarne l'ascissa. È poi opportuno introdurre due variabili continue, x_1 e x_2, per indicare l'ascissa minima e massima del punto su cui può cadere il proietto. Alle due ascisse corrispondono due diversi valori dell'alzo, indicati da altre due variabili continue e non-negative α_1 e α_2.

Vincoli. I vincoli devono legare i valori di x_1 e x_2 ai parametri della traiettoria, che sono la posizione di tiro x_0 e l'alzo α_1 e α_2. Il legame tra queste grandezze è dato dalla formula indicata nel testo, nella quale si deve sostituire ad x l'ascissa del punto di caduta e ad y la quota dell'altopiano. Si hanno perciò per le due traiettorie, corrispondenti ad x_1 e x_2, i vincoli:

$$h = \tan(\alpha_1)(x_1 - x_0) - \frac{g}{2\ v^2\ \cos^2(\alpha_1)}(x_1 - x_0)^2$$

$$h = \tan(\alpha_2)(x_2 - x_0) - \frac{g}{2\ v^2\ \cos^2(\alpha_2)}(x_2 - x_0)^2.$$

Trattandosi di equazioni di secondo grado, è possibile scrivere direttamente il valore di x_1 e di x_2, avendo cura di scegliere in entrambi i casi il valore più grande tra i due possibili, cioè quello che corrisponde al ramo discendente della parabola. Ad esempio, dopo aver posto per semplicità di notazione $a_1 = -\frac{g}{2v^2cos^2(\alpha_1)}$ e $b_1 = tg(\alpha_1)$ si ha:

$$x_1 = x_0 + \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 + 4a_1h}}{2a_1}$$

e analogamente per x_2.

Per imporre che entrambe le traiettorie considerate scavalchino la cresta rocciosa bisogna introdurre altri due vincoli, sfruttando la stessa equazione di cui sopra: l'ordinata nel punto di ascissa D deve essere non inferiore alla quota M.

$$a_1(D - x_0)^2 + b_1(D - x_0) \geq M$$

$$a_2(D - x_0)^2 + b_2(D - x_0) \geq M.$$

Infine bisogna imporre alcuni limiti inferiori e superiori alle variabili: in particolare l'ascissa della posizione di tiro ha un limite superiore, indicato nei dati del problema $x_0 \leq p$; le ascisse dei punti di caduta hanno un limite inferiore $x_1 \geq D$; gli angoli di tiro devono essere compresi tra 0 e $\pi/2$: $0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2$ e $0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2$.

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo si esprime semplicemente come massimizzazione della differenza tra la massima e la minima ascissa del punto di caduta del proietto, ossia $x_2 - x_1$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & z = x_2 - x_1 \\
\text{subject to} \quad & \tan(\alpha_1)(x_1 - x_0) - \frac{g}{2\ v^2\ \cos^2(\alpha_1)}(x_1 - x_0)^2 = h \\
& \tan(\alpha_2)(x_2 - x_0) - \frac{g}{2\ v^2\ \cos^2(\alpha_2)}(x_2 - x_0)^2 = h \\
& -\frac{g}{2v^2 cos^2(\alpha_1)}(D - x_0)^2 + tg(\alpha_1)(D - x_0) \geq M \\
& -\frac{g}{2v^2 cos^2(\alpha_2)}(D - x_0)^2 + tg(\alpha_2)(D - x_0) \geq M \\
& x_0 \leq p \\
& x_1 \geq D \\
& 0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2 \\
& 0 \leq \alpha_2 \leq \pi/2
\end{aligned}$$

7 Problema n.7: Scorte

Il problema. Un'azienda alimentare si rifornisce di un certo numero di prodotti agricoli. Di ogni prodotto è nota la quantità necessaria che occorre comprare ogni anno per produrre cibo. Poiché i viaggi per i rifornimenti costano (ogni viaggio costa 10000 Euro), l'azienda ha acquistato un magazzino in cui stoccare le scorte di prodotti agricoli in attesa di lavorazione. A periodi stabiliti un rifornitore visita l'azienda e scarica una quantità concordata di prodotti agricoli presso il suo magazzino. L'andamento della quantità di merce immagazzinata in funzione del tempo è quindi rappresentato come in figura.

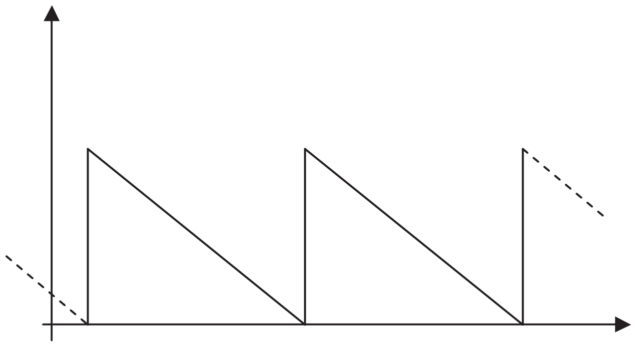

Figura 1: Andamento delle scorte nel tempo.

È noto il costo di ogni viaggio ed è noto il costo di stoccaggio dei prodotti agricoli (si noti che la quantità media presente in magazzino è la metà della quantità scaricata ad ogni rifornimento). In azienda si discute se sia meglio avere grandi quantità rifornite raramente (per ridurre il numero di viaggi e quindi i costi di rifornimento) oppure rifornirsi spesso di quantità piccole (per ridurre i costi di stoccaggio). Si vuole quindi determinare in modo scientifico quale sia la quantità ottimale di prodotti agricoli da ricevere ad ogni rifornimento e di conseguenza la frequenza ottimale per i rifornimenti.

Prodotto	Domanda
1	1300
2	1500
3	2600

Tabella 5: Domanda annuale [Kg/anno]

1. Si faccia inizialmente l'ipotesi che ogni prodotto agricolo venga rifornito indipendentemente dagli altri.

Prodotto	Costi
1	250
2	500
3	750

Tabella 6: Costi di stoccaggio [Euro/(Kg*anno)]

2. Si consideri l'ipotesi alternativa, in cui i rifornimenti vengono raggruppati insieme in modo da pagare il costo del viaggio una volta sola, anche se questo comporta lo svantaggio di dover ricevere tutti i prodotti con la stessa frequenza. È più o meno conveniente rispetto al caso 1?

3. Partendo dal più conveniente tra i due casi precedenti, si faccia l'ulteriore ipotesi che il mezzo che porta i rifornimenti abbia una capacità limitata, pari a 350 Kg. Quanto incide negativamente questa ipotesi sui costi?

4. Si aggiunga infine l'ulteriore ipotesi che i prodotti agricoli non vengano trasportati sciolti ma confezionati in sacchi: ciò comporta di conseguenza che le quantità ricevute ad ogni rifornimento debbano essere multipli interi della quantità contenuta in un sacco (la capacità di un sacco è di 5 Kg). Quanto incide negativamente questa limitazione sui costi?

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $N = 3$ prodotti, indicati da un indice i. Di ciascuno sono noti la domanda d_i e il costo di stoccaggio unitario s_i. Inoltre è dato il costo fisso di ogni viaggio, k. È data poi la capacità del veicolo, Q, e la capacità di ogni sacco S.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *quanto* rifornire di ogni prodotto o in modo equivalente *quanto spesso* effettuare il rifornimento. Si possono introdurre quindi variabili q_i che indicano la quantità di prodotto i rifornita ogni volta, oppure le variabili T_i che indicano per ogni prodotto i il periodo che intercorre tra due rifornimenti successivi. È comodo introdurre entrambi gli insiemi di variabili, ricordando però che esiste un legame tra di essi (v. sotto). Per considerare il caso n.4 è necessario introdurre condizioni di integralità su variabili che rappresentano il numero di sacchi riforniti per ogni prodotto. Usiamo perciò variabili $y_i = q_i/S$.

Vincoli. I vincoli legano i valori delle variabili q e T per ogni prodotto: : $q_i = d_iT_i$ per ogni i. Nel caso n.3 è necessario inserire nel modello un vincolo sulla somma delle tre quantità q_i rifornite, che non deve superare la capacità Q del veicolo.

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo richeide di minimizzare i costi complessivi. I costi da minimizzare sono dati da due termini: i costi di rifornimento e i costi di stoccaggio. L'espressione dei costi di rifornimento è data dal prodotto tra il costo k di ogni viaggio (dato) ed il numero di viaggi. Il numero di viaggi, a sua volta, è dato dalla frequenza di rifornimenti (n. viaggi / anno) o dall'inverso del periodo T di rifornimento. Nel caso n.1 i viaggi sono indipendenti per i diversi prodotti e si hanno quindi tanti diversi termini di costo k/T_i , uno per ogni prodotto $i = 1, \ldots, 3$. Nel caso 2 invece si ha un unico termine di costo k/T, dal momento che il periodo di rifornimento è uno solo ed il viaggio si paga una volta sola per tutti i prodotti. I costi di stoccaggio sono dati dal prodotto tra il costo unitario dato s_i e la quantità di prodotto mediamente presente in magazzino, cioè la metà della quantità q_i rifornita ad ogni viaggio. I costi di stoccaggio sono quindi dati da $s_iq_i/2$ per ogni prodotto $i = 1, \ldots, 3$.

Il modello matematico completo risulta quindi:
Caso 1.

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize } \; z = \sum_{i=1}^{N} k/T_i + \sum_{i=1}^{N} s_iq_i/2 \\
&\text{subject to } q_i = d_iT_i \qquad\qquad \forall i = 1, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Caso 2.

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = k/T + \sum_{i=1}^{N} s_i q_i/2 \\
\text{subject to} \quad & q_i = d_i T && \forall i = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Caso 3.

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = k/T + \sum_{i=1}^{N} s_i q_i/2 \\
\text{subject to} \quad & q_i = d_i T && \forall i = 1, \dots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} q_i \leq Q.
\end{aligned}$$

Caso 4.

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = k/T + \sum_{i=1}^{N} s_i q_i/2 \\
\text{subject to} \quad & q_i = d_i T && \forall i = 1, \dots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} q_i \leq Q \\
& q_i = S y_i && \forall i = 1, \dots, N \\
& y_i \in \{0, 1\} && \forall i = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Poiché entrambi i termini di costo sono funzioni convesse delle variabili, la funzione obiettivo è convessa e quindi, poiché i vincoli sono tutti lineari, il problema è di programmazione convessa e quindi le soluzioni trovate sono ottime globalmente e non solo localmente.

8 Problema n.8: Il servizio da tè

Il problema. Un artigiano deve produrre un servizio da tè in metallo prezioso. Il servizio consiste in un vassoio ovale (ellittico per la precisione) e in un certo numero di piattini e tazzine che il vassoio deve poter contenere. Ogni piattino ha forma quadrata di lato pari a 10 cm. L'artigiano deve rispettare alcuni vincoli nel progettare il servizio da tè e deve anche cercare di massimizzare il proprio guadagno. I vincoli di natura estetica impongono che l'ellisse del vassoio abbia un rapporto tra semiasse maggiore e semiasse minore non inferiore a 1.5 e non superiore a 2.5. Un ulteriore vincolo è che il numero di piattini con tazzina deve essere almeno pari a 6 e non superiore a 24. Il vassoio deve poter contenere tutti piattini con tazzina disposti a rettangolo con i lati paralleli agli assi dell'ellisse. I costi di fabbricazione del vassoio sono proporzionali all'area dello stesso (l'area dell'ellisse è pari al prodotto dei due semiassi per π). Il costo di fabbricazione dei piattini per le tazzine è proporzionale alla loro area e ovviamente al loro numero. Il ricavo che si otterrà dalla vendita del servizio da tè sarà proporzionale al numero di piattini con tazzina che il vassoio può contenere.

La vendita del servizio da tè rende 250 Euro per ogni tazzina con piattino. Il costo del materiale per il vassoio è di 0,5 Euro per cm quadrato. Il costo del materiale per i piattini è di 1,5 Euro per cm quadrato.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati il lato dei piattini ($L = 10cm$), i limiti minimo e massimo al rapporto tra i semiassi dell'ellisse ($k_{min} = 1.5$ e $k_{max} = 2.5$), il numero minimo e massimo di piattini ($n_{min} = 6$ e $n_{max} = 24$), il valore del servizio da tè ($v = 250 Euro/tazzina$), il costo del materiale del vassoio ($c_v = 0,5\ Euro/cm^2$)) e il costo del materiale per i piattini ($c_p = 1,5\ Euro/cm^2$).

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere la forma dell'ellisse, cioè la lunghezza dei sue semiassi a e b e la dimensione del rettangolo formato dai piattini, cioè le sue due dimensioni w e h misurate in numero di piattini. Le variabili a e b sono continue non-negative, mentre le variabili w e h sono intere non-negative.

Vincoli. Il problema ha i seguenti vincoli:

- vincoli sul rapporto tra i semiassi dell'ellisse: $k_{min} \leq a/b \leq k_{max}$;
- vincoli sul numero di piattini complessivo: $n_{min} \leq w * h \leq n_{max}$;
- Contenimento del rettangolo nell'ellisse. Questo vincolo si esprime imponendo che il vertice del rettangolo, che ha coordinate $(Lw/2, Lh/2)$ non cada fuori dall'ellisse:
$$\frac{(Lw/2)^2}{a^2} + \frac{(Lh/2)^2}{b^2} \leq 1.$$

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo richiede di massimizzare il profitto dell'artigiano, che è dato dalla differenza tra ricavi e costi. I ricavi sono dati da: $R = v * h * w$; i costi di fabbricazione del vassoio, che ha area $a * b * \pi$, sono dati da $c_v * a * b * \pi$ e i costi di fabbricazione dei piattini, che hanno area L^2 e sono $w * h$, sono dati da $c_p * L^2 * w * h$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned}
\text{maximize } & z = v * h * w - c_v * \pi * a * b - c_p * L^2 * w * h \\
\text{subject to } & k_{min} \leq a/b \leq k_{max} \\
& n_{min} \leq w * h \leq n_{max} \\
& \frac{(Lw/2)^2}{a^2} + \frac{(Lh/2)^2}{b^2} \leq 1 \\
& a, b \geq 0 \\
& w, h \text{ intere.}
\end{aligned}$$

9 Problema n.9: Il tunnel del metro

Il problema. Nel sottosuolo della città bisogna scavare un tunnel rettilineo per la nuova linea della metropolitana. Esso dovrà essere poi collegato tramite altri tunnel secondari alle uscite, collocate in alcune piazze già identificate, che ovviamente non sono tutte perfettamente allineate. Si vuole definire la posizione del tunnel in modo da minimizzare la lunghezza degli scavi dei tunnel secondari, cioè in modo da minimizzare la somma delle distanze tra il tunnel principale e le uscite.

Suggerimento: la distanza di un punto $(x0, y0)$ da una retta di equazione $ax + by + c = 0$ è data da $\mid ax_0 + by_0 + c \mid / \sqrt{a^2 + b^2}$.

Piazza	x	y
1	-10	14
2	-8	7
3	-5	10
4	-3	10
5	0	9
6	2	8
7	5	8
8	8	7
9	9	5
10	11	6
11	14	7
12	16	5

Tabella 7: Localizzazione delle piazze.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $N = 12$ punti che rappresentano le piazze, indicati da un indice i. Di ciascuno sono note le coordinate (x_i, y_i).

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *dove* localizzare un segmento di retta. Si possono introdurre quindi usare tre variabili continue e libere, a, b e c, che determinano l'equazione della retta cercata in forma generale $ax + by + c = 0$. È comodo introdurre anche variabili continue e non-negative d_i, che indicano la distanza di ogni piazza i dalla retta.

Vincoli. I vincoli legano i valori delle variabili d alle variabili a, b e c, secondo la formula riportata nel testo (distanza di un punto da una retta).

$$d_i = \mid ax_i + by_i + c \mid / \sqrt{a^2 + b^2} \quad \forall i = 1, \ldots, N.$$

Il problema non ha altri vincoli.

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo richiede di minimizzare la somma delle distanze tra i punti e la retta, cioè la sommma dellle variabili d_i:

$$minimize \sum_{i=1}^{N} d_i.$$

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = \sum_{i=1}^{N} d_i \\
\text{subject to} \quad & d_i = \mid ax_i + by_i + c \mid / \sqrt{a^2 + b^2} && \forall i = 1, \ldots, N \\
& d_i \geq 0 && \forall i = 1, \ldots, N \\
& a, b, c \text{libere}
\end{aligned}$$

Può essere utile per evitare problemi numerici imporre un'ulteriore condizione per normalizzare i valori di a e b: ad esempio $a^2 + b^2 = 1$.

Domanda: come cambierebbe il modello se si volesse minimizzare la distanza dalla piazza più lontana?

10 Problema n.10: Localizzazione di magazzini di interscambio

Il problema. Si vuole localizzare in un dato territorio un insieme di magazzini per l'interscambio nel trasporto di merci. Per motivi di budget è possibile coostruire solo 3 magazzini. Ogni magazzino ha una capacità massima di merce che può essere movimentata ogni giorno. Lo scopo è quello di offrire un servizio di trasporto efficiente ad un insieme di utenti, rappresentati da punti nel piano in posizioni note. Ogni utente ha associata una domanda e la somma delle domande degli utenti assegnati allo stesso magazzino non può eccedere la capacità del magazzino. L'assegnamento di un utente ad un magazzino comporta un costo di trasporto che si può ritenere proporzionale alla distanza Euclidea (cioè misurata in linea d'aria) tra l'utente e il magazzino. Per vincoli contrattuali ogni utente deve essere assegnato ad un solo magazzino e la sua domanda deve essere interamente soddisfatta. L'obiettivo è di minimizzare i costi di trasporto totali.

Variante: si consideri che i costi di trasporto siano proporzionali al *quadrato* della distanza tra utente e magazzino.

Cliente	x	y	domanda
1	-20	45	300
2	-30	56	350
3	-10	-29	400
4	0	-18	150
5	40	3	200
6	30	40	200
7	15	12	250
8	18	-6	400
9	23	24	100
10	-2	-30	250

Tabella 8: Posizione e domanda [tonn/g] dei clienti.

I tre magazzini hanno capacità di movimentazione di merci pari a 1400 $tonn/g$ ciascuno.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $N = 10$ punti che rappresentano i clienti, indicati da un indice i. Di ciascuno sono note le coordinate (x_i, y_i) e la domanda q_i.
Sono noti inoltre il numero di magazzini $P = 3$ e la capacità dei magazzini $Q = 1400$ *tonn/g*.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *dove* localizzare i tre magazzini e *come assegnare loro la domanda.* Si possono introdurre quindi:

- P coppie di variabili continue e libere, $(\overline{x}_j, \overline{y}_j)$, che indicano la posizione del magazzino j;
- una matrice di variabili binarie w_{ij} che indica se l'utente i è assegnato al magazzino j o no.

È comodo introdurre anche variabili continue e non-negative d_{ij}, che indicano la distanza Eucliedea di ogni utente i da ogni magazzino j.

Vincoli. Introduciamo anzitutto i vincoli che legano i valori delle variabili d_{ij} alle variabili $(\overline{x}_j, \overline{y}_j)$:

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - \overline{x}_j)^2 + (y_i - \overline{y}_j)^2} \quad \forall i = 1, \ldots, N \ \forall j = 1, \ldots, P.$$

Imponiamo poi che ogni utente sia assegnato ad uno e un solo magazzino:

$$\sum_{j=1}^{P} w_{ij} = 1 \ \forall i = 1, \ldots, N.$$

Imponiamo ora che la quantità di merce complessiva per ogni magazzino non superi la capacità:

$$\sum_{i=1}^{N} w_{ij} q_i \leq Q \ \forall j = 1, \ldots, P.$$

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo è data dai costi di trasporto tra utenti e magazzini, cioè da $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{P} d_{ij} w_{ij}$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & v = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{P} d_{ij} w_{ij} & \\
\text{subject to} & d_{ij} = \sqrt{(x_i - \overline{x}_j)^2 + (y_i - \overline{y}_j)^2} & \forall i = 1, \dots, N \ \forall j = 1, \dots, P \\
& \sum_{j=1}^{P} w_{ij} = 1 & \forall i = 1, \dots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} w_{ij} q_i \leq Q & \forall j = 1, \dots, P \\
& \overline{x}_j, \overline{y}_j \text{ libere} & \forall j = 1, \dots, P \\
& w_{ij} \text{ binarie} & \forall i = 1, \dots, N \ \forall j = 1, \dots, P.
\end{array}
$$

Variante: In questo caso basta modificare la funzione obiettivo in $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{P} d_{ij}^2 w_{ij}$.

11 Problema n.11: Robot

Il problema. In una nuova linea di produzione robotizzata sono integrati 6 robot, ciascuno dei quali può ruotare a 360^o attorno ad un asse verticale. Le aree di lavoro di ciascun robot non devono sovrapporsi, per evitare possibili collisioni tra di essi. Il coordinamento tra i robot impone che ciascuno sia collegato con tutti gli altri con cavi in fibra ottica. Poiché i cavi sono costosi, è necessario che il progetto sia fatto in modo tale da minimizzarne la lunghezza totale di fibre ottiche impiegate.

Robot	Raggio d'azione
1	120
2	80
3	100
4	70
5	45
6	120

Tabella 9: Raggio d'azione dei robot [cm].

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $N = 6$ robot, indicati da un indice i. Di ciascuno è noto il raggio d'azione r_i.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *dove* localizzare i robot nel piano Cartesiano. Si possono introdurre quindi: N coppie di variabili continue e libere, (x_i, y_i), che indicano la posizione di ogni robot i. È comodo introdurre anche variabili continue e non-negative d_{ij}, che indicano la distanza Eucliedea tra ogni coppia di robot i e j.

Vincoli. I vincoli devono imporre che le circonferenze corrispondenti alle aree d'azione dei robot non si sovrappongano. Di conseguenza bisogna imporre che la distanza tra due robot sia sempre maggiore o uguale alla somma dei loro raggi d'azione:

$$d_{ij} \geq r_i + r_j \quad \forall i, j = 1, \ldots, N \quad i \neq j.$$

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo è data dalla somma di tutte le distanze per tutte el coppie di robot, cioè da $\sum_{i=1}^{N} -1 \sum_{j=i+1}^{N} d_{ij}$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad z = \sum_{i=1}^{N} -1 \sum_{j=i+1}^{N} d_{ij} \\
&\text{subject to } d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} && \forall i = 1, \ldots, N \ \forall j = 1, \ldots, N \\
&\qquad d_{ij} \geq r_i + r_j && \forall i = 1, \ldots, N-1 \ \forall j = i+1, \ldots, N \\
&\qquad x_i, y_i \text{ libere} && \forall i = 1, \ldots, N
\end{aligned}$$

12 Problema n.12: Ragno

Il problema. Un ragno, esperto in ottimizzazione, deve costruire la struttura portante della sua nuova ragnatela ed ha a disposizione tre appigli A, B e C in posizione fissa e nota. La struttura portante della ragnatela sarà perciò un triangolo e ognuno dei suoi vertici dovrà essere collegato con un filo ad uno dei tre appigli. Il triangolo portante deve avere area non inferiore a 100 centimetri quadrati, altrimenti la ragnatela costruita in esso non sarebbe abbastanza utile per catturare alcun insetto. Poiché il ragno è vecchio e stanco, vuole minimizzare la quantità di filo necessaria a costruire i tre lati del triangolo portante e a unire ciascuno di essi con un appiglio.

[Suggerimento (formula di Erone): l'area di un triangolo con lati a, b e c è pari a $\sqrt{p * (p - a) * (p - b) * (p - c)}$, dove p indica il semiperimetro del triangolo, ossia $p = (a + b + c)/2$.]

Appiglio	x	y	z
A	30	50	50
B	60	10	45
C	40	30	10

Tabella 10: Posizioni degli appigli in un dato sistema di riferimento tridimensionale [cm].

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $N = 3$ appigli, indicati da un indice i. Di ciascuno è nota la posizione (x_i, y_i, z_i). E' data inoltre l'area minima A che la ragnatela deve avere.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *dove* localizzare i vertici del triangolo che definisce la struttura della ragnatela. Si possono introdurre quindi: 3 terne di variabili continue e libere, $(\overline{x}_j, \overline{y}_j), \overline{z}_j$, che indicano la posizione di ogni vertice $j = 1, \ldots, 3$. E' utile indicare con d_i la distanza tra il vertice i del triangolo e il corrispondente appiglio i e con l_{ij} la lunghezza del lato del triangolo tra il vertice i e il vertice j.

Vincoli. Si ha anzitutto $l_{ij} = \sqrt{(\overline{x}_i - \overline{x}_j)^2 + (\overline{y}_i - \overline{y}_j)^2 + (\overline{z}_i - \overline{z}_j)^2}$ $\forall i \neq j = 1, \ldots, 3$ e $d_i = \sqrt{(x_i - \overline{x}_i)^2 + (y_i - \overline{y}_i)^2 + (z_i - \overline{z}_i)^2}$ $\forall i = 1, \ldots, 3$. Inoltre il vincolo sull'area impone che $\sqrt{p * (p - l_{12}) * (p - l_{13}) * (p - l_{23})} \geq A$, dove $p = (l_{12} + l_{13} + l_{23})/2$.

Funzione obiettivo. La funzione obiettivo da minimizzare è data dalla lunghezza complessiva dei 6 segmenti che il ragno deve produrre: tre servono a collegare i vertici del triangolo con i corrispondenti appigli e hanno lunghezze d_i e altri tre sono i lati del triangolo e hanno lunghezze l_{ij}. La lunghezza totale + quindi data da $\sum_{i=1}^{3} d_i + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} l_{ij}$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & v = \sum_{i=1}^{3} d_i + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} l_{ij} \\
\text{subject to} \quad & l_{ij} = \sqrt{(\overline{x}_i - \overline{x}_j)^2 + (\overline{y}_i - \overline{y}_j)^2 + (\overline{z}_i - \overline{z}_j)^2} \quad && \forall i = 1, \ldots, 2 \ \forall j = 2, \ldots, 3 \\
& d_i = \sqrt{(x_i - \overline{x}_i)^2 + (y_i - \overline{y}_i)^2 + (z_i - \overline{z}_i)^2} && \forall i = 1, \ldots, 3 \\
& p = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} l_{ij}/2 \\
& \sqrt{p * (p - l_{12}) * (p - l_{13}) * (p - l_{23})} \geq A \\
& \overline{x}_i, \overline{y}_i, \overline{z}_i \ \text{libere} && \forall i = 1, \ldots, 3.
\end{aligned}
$$

Che tipo di triangolo avete ottenuto?