Programmazione lineare intera: undici esercizi commentati e risolti

Giovanni Righini

6 agosto 2010

Di tutti gli esercizi presentati nel seguito è disponibile il modello con relativa soluzione anche sotto forma di foglio elettronico.

Prima di affrontare gli esercizi consiglio di dare un'occhiata alla guida allo svolgimento degli esercizi di programmazione matematica e all'introduzione alla PLI, entrambe disponibili su questo sito.

1 Problema n.1: Lo zaino

Dato uno zaino di capacità nota ed un insieme di oggetti di dato volume e valore, selezionare il sottinsieme di oggetti di massimo valore che può essere inserito nello zaino.

Oggetto	Volume	Valore
1	8	4
2	9	6
3	13	40
4	24	15
5	28	20
6	36	20
7	41	21
8	57	38
9	68	46
10	70	56

Tabella 1: Volume e valore degli oggetti.

Lo zaino ha capacità pari a 100.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $N = 10$ oggetti. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, N$ ogni oggetto. Indichiamo con c_i il valore di ogni oggetto $i = 1, \ldots, N$. Indichiamo con a_i il volume dell'oggetto $i = 1, \ldots, N$. Indichiamo con b la capacità dello zaino.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *quali* oggetti inserire nello zaino. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni oggetto: la variabile asssume valore 1 se e solo se l'oggetto viene inserito nello zaino. Abbiamo quindi le variabili x_i con $i = 1, \ldots, N$.

Vincoli. Esiste un solo vincolo di capacità, che impone che la somma dei volumi degli oggetti scelti non può eccedere la capacità dello zaino: $\sum_{i=1}^{N} a_i x_i \leq b$.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare il valore complessivo degli oggetti scelti. Quindi: max $z = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad z = & \sum_{i=1}^{N} c_i x_i \\
\text{subject to} & \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \leq b \\
& x_i \in \{0, 1\} \qquad\qquad \forall i = 1, \ldots, N
\end{aligned}$$

2 Problema n.2: Assegnamento lineare

Dato un insieme di N persone e un insieme di N mansioni, conoscendo il costo di attribuzione di ogni mansione ad ogni persona, decidere come attribuire una mansione ad ogni persona per minimizzare il costo complessivo.

Persone	Mansioni									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	35	24	62	57	81	34	36	12	63	24
2	72	25	42	25	64	14	24	74	84	15
3	48	37	62	14	56	94	51	76	11	21
4	26	26	73	83	15	89	89	21	44	53
5	62	26	37	26	15	37	24	61	54	13
6	37	37	76	3	47	52	25	38	61	50
7	59	98	84	26	47	73	51	54	51	48
8	60	54	95	50	45	6	82	33	61	72
9	62	42	68	74	73	12	36	37	38	50
10	2	52	62	38	95	60	88	25	26	84

Tabella 2: Matrice dei costi di assegnamento.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono date $N = 10$ persone e altrettante mansioni. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, N$ ogni persona e con un indice $j = 1, \ldots, N$ ogni mansione. Indichiamo con c_{ij} il costo di assegnare la mansione $j = 1, \ldots, N$ alla persona $i = 1, \ldots, N$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *quali* mansioni assegnare ad ogni persona (e viceversa). Definiamo quindi una variabile binaria per ogni possibile abbinamento tra una mansione ed una persona: la variabile asssume valore 1 se e solo se la mansione viene assegnata alla persona. Abbiamo quindi le variabili x_{ij} con $i, j = 1, \ldots, N$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che ogni persona sia assegnata ad una mansione e viceversa. Esiste pertanto un vincolo per ogni persona del tipo $\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 \;\; \forall i = 1, \ldots, N$ ed analogamente un vincolo per ogni mansione del tipo $\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 \;\; \forall j = 1, \ldots, N$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il costo complessivo degli assegnamenti scelti. Quindi: min $z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij}$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \;\; & z = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} x_{ij} \\
\text{subject to} \; & \sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1 & \forall i = 1, \ldots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 & \forall j = 1, \ldots, N \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i = 1, \ldots, N \;\forall j = 1, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

Per la natura del problema la condizione di integralità sulle variabili può essere rimossa senza alterare la soluzione ottima.

3 Problema n.3: Set covering

Dati un insieme di luoghi da cui si può erogare un servizio, ciascuno con un dato costo corrispondente, ed un insieme di utenti che possono ricevere il servizio ciascuno da alcuni dei luoghi, decidere da dove erogare il servizio in modo da minimizzare il costo complessivo.

Utente	Luoghi									
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
2	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
5	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1

Tabella 3: Matrice delle coperture tra 5 utenti e 10 luoghi.

Luogo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Costo	205	311	450	274	321	469	327	631	750	400

Tabella 4: Costi dei luoghi.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $M = 10$ luoghi e $N = 5$ utenti. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, N$ ogni utente e con un indice $j = 1, \ldots, M$ ogni luogo. Indichiamo con c_j il costo di ogni luogo $j = 1, \ldots, M$. Indichiamo con a_{ij} se il luogo $j = 1, \ldots, M$ copre o no l'utente $i = 1, \ldots, N$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *quali* luoghi usare. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni luogo: la variabile asssume valore 1 se e solo se il luogo viene usato. Abbiamo quindi le variabili x_j con $j = 1, \ldots, M$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che ogni utente sia coperto da almeno uno dei luoghi possibili. Esiste pertanto un vincolo per ogni utente: $\sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, N$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il costo complessivo dei luoghi scelti. Quindi: min $\sum_{j=1}^{M} c_j x_j$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad z = & \sum_{j=1}^{M} c_j x_j \\
\text{subject to} & \sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_j \geq 1 && \forall i = 1, \ldots, N \\
& x_j \in \{0, 1\} && \forall j = 1, \ldots, M.
\end{aligned}
$$

4 Problema n.4: Localizzazione di depositi

Il problema. Dato un insieme di potenziali depositi, ciascuno con un dato costo corrispondente, ed un insieme di utenti da rifornire, dato il costo di trasporto della merce tra ogni utente ed ogni deposito, decidere da dove erogare il servizio in modo da minimizzare il costo complessivo.

Variante con capacità: come sopra, ma ogni deposito ha una data capacità ed ogni utente ha una data domanda. Ogni utente può essere rifornito anche da più depositi diversi.

Deposito	Utente									
1	35	24	62	57	81	34	36	12	63	24
2	72	25	42	25	64	14	24	74	84	15
3	48	37	62	14	56	94	51	76	11	21
4	26	26	73	83	15	89	89	21	44	53
5	62	26	37	26	15	37	24	61	54	13

Tabella 5: Costi di trasporto da 5 depositi a 10 utenti.

Deposito	Costo	Capacità
1	35	175
2	32	126
3	38	110
4	38	92
5	41	155

Tabella 6: Costi di esercizio e capacità dei depositi.

Utente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Domanda	35	28	49	37	40	26	31	48	28	36

Tabella 7: Domanda degli utenti.

Il modello matematico. Esaminiamo il primo caso proposto.

Dati. Sono dati $M = 5$ depositi e $N = 10$ utenti. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, N$ ogni utente e con un indice $j = 1, \ldots, M$ ogni deposito. Indichiamo con f_j il costo fisso di esercizio di ogni deposito $j = 1, \ldots, M$. Indichiamo con c_{ij} il costo di trasporto della merce dal deposito $j = 1, \ldots, M$ all'utente $i = 1, \ldots, N$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *quali* depositi usare e *quali* utenti assegnare ad ogni deposito usato. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni deposito, la quale assume valore 1 se e solo se il deposito viene usato. Abbiamo quindi le variabili binarie y_j con $j = 1, \ldots, M$. Inoltre definiamo una variabile binaria per ogni coppia utente-deposito, la quale assume valore 1 se e solo se l'utente viene assegnato al deposito. Abbiamo quindi le variabili binarie x_{ij} $\forall i = 1, \ldots, N$ $\forall j = 1, \ldots, M$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che ogni utente sia assegnato ad uno dei depositi. Esiste pertanto un vincolo per ogni utente: $\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1 \quad \forall i = 1, \ldots, N$. Inoltre è necessario imporre che gli assegnamenti indicati dalle variabili x vengano fatti solo per i depositi aperti. Questa condizione si può esprimere in forma disaggregata con un vincolo per ogni coppia utente-deposito: $x_{ij} \leq y_j$ $\forall i = 1, \ldots, N$ $\forall j = 1, \ldots, M$, oppure con un insieme di vincoli surrogati, ottenibili dai precedenti sommando su i per ogni deposito j: $\sum_{i=1}^{N} x_{ij} \leq N y_j \quad \forall j = 1, \ldots, M$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il costo complessivo, che è dato da due contributi, no dovuto ai costi fissi di esercizio e l'altro ai costi di trasporto: min $\sum_{j=1}^{M} f_j y_j + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} x_{ij}$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = \sum_{j=1}^{M} f_j y_j + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} c_{ij} x_{ij} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1 && \forall i = 1, \ldots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} x_{ij} \leq N y_j && \forall j = 1, \ldots, M \\
& y_j \in \{0, 1\} && \forall j = 1, \ldots, M \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall i = 1, \ldots, N \quad \forall j = 1, \ldots, M.
\end{aligned}
$$

La condizione di integralità sulle variabili x è superflua: la soluzione ottima si ottiene sempre per valori binari delle variabili x, qualunque sia la scelta delle variabili y.

Il modello matematico. Esaminiamo ora il secondo caso. Il modello matematico è simile, ma con le seguenti variazioni.

Dati. Indichiamo con c_{ij} il costo di trasporto della merce dal deposito $j = 1, \dots, M$ all'utente $i = 1, \dots, N$.
È data una capacità q_j per ogni deposito $j = 1, \dots, M$. È data una domanda d_i per ogni utente $i = 1, \dots, N$. I costi di trasporto c sono sostiuiti in questo caso da costi *unitari* di trasporto, cioè costi per unità di merce trasportata. Indichiamo tali costi con p_{ij} per ogni trasporto dal deposito $j = 1, \dots, M$ all'utente $i = 1, \dots, N$.

Variabili. Il problema decisionale ora consiste nel decidere *quali* depositi usare e *quanta* merce trasportare da ogni deposito ad ogni utente. Pertanto, a differenza del caso precedente, le variabili x_{ij} sono ora continue e non-negative e rappresentano la quantità di merce trasportata all'utente $i = 1, \dots, N$ dal deposito $j = 1, \dots, M$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che la domanda di ogni utente sia soddisfatta, sommando i contributi provenienti dai diversi depositi. Esiste pertanto un vincolo per ogni utente: $\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = d_i \quad \forall i = 1, \dots, N$. Inoltre è necessario imporre che i trasporti avvengano solo utilizzando i depositi aperti e che da ogni deposito non esca una quantità di merce superiore alla sua capacità. Questa condizione si può esprimere con l'insieme di vincoli seguenti, uno per ogni deposito: $\sum_{i=1}^{N} x_{ij} \leq q_j y_j \quad \forall j = 1, \dots, M$. Si noti che per effetto di questi vincoli un deposito chiuso equivale ad un deposito di capacità nulla.

Funzione obiettivo. Anche in questo caso si vuole minimizzare il costo complessivo, che è dato da due contributi, uno dovuto ai costi fissi di esercizio e l'altro ai costi di trasporto: min $\sum_{j=1}^{M} f_j y_j + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p_{ij} x_{ij}$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = \sum_{j=1}^{M} f_j y_j + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} p_{ij} x_{ij} & \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{M} x_{ij} = d_i & \forall i = 1, \dots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} x_{ij} \leq q_j y_j & \forall j = 1, \dots, M \\
& y_j \in \{0, 1\} & \forall j = 1, \dots, M \\
& x_{ij} \geq 0 & \forall i = 1, \dots, N \quad \forall j = 1, \dots, M.
\end{aligned}
$$

newpage

5 Problema n.5: Antitrust

Il problema. Per effetto di una nuova normativa antitrust, una grande azienda deve dividersi in due aziende di dimensioni minori. Naturalmente i dirigenti designati al vertice di entrambe le aziende minori competono per accaparrarsi la maggior parte del mercato dell'azienda-madre. Per dirimere la controversia, bisogna formulare matematicamente il problema e trovare quindi la spartizione più equa. L'azienda-madre vende un dato numero di prodotti tramite un dato insieme di filiali sparse per il mondo e si conosce quanto fattura ciascuna filiale per ciascun tipo di prodotto. Ciascuna delle filiali è indivisibile e deve essere assegnata ad una sola delle due aziende-figlie. Si vuole che entrambe le aziende-figlie abbiano quote il più uniformi possibili di mercato per tutti i prodotti; si vuole quindi minimizzare la massima differenza tra il fatturato di un'azienda figlia e quello dell'altra rispetto ad uno stesso prodotto.

Come cambierebbe il problema e come cambierebbe la soluzione ottima se si volesse minimizzare la differenza di fatturato *complessivo* tra le due aziende-figlie?

Filiali	Prodotti		
	1	2	3
1	83	14	42
2	38	63	56
3	28	24	12
4	59	7	53
5	25	35	83
6	52	86	85
7	59	64	25

Tabella 8: Matrice dei fatturati di 7 filiali per 3 prodotti.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono date $F = 7$ filiali e $P = 3$ prodotti. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, F$ ogni filiale e con un indice $j = 1, \ldots, P$ ogni prodotto. L'azienda-madre si divide in $A = 2$ aziende-figlie. Indichiamo con un indice $k = 1, \ldots, A$ ciascuna azienda-figlia. Indichiamo con v_{ij} il fatturato di ogni filiale $i = 1, \ldots, F$ relativamente al prodotto $j = 1, \ldots, P$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *a quale* azienda-figlia deve essere assegnata ogni filiale. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni possibile abbinamento tra una filiale ed un'azienda-figlia: abbiamo quindi le variabili x_{ik} con $i = 1, \ldots, F$ e $k = 1, \ldots, A$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che ogni filiale sia assegnata ad'azienda-figlia. Esiste pertanto un vincolo per ogni filiale del tipo $\sum_{k=1}^{A} x_{ik} = 1 \ \ \forall i = 1, \ldots, F$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare la massima in un insieme di grandezze, ciacuna delle quali è il valore assoluto di una differenza. Si applicano quindi le tecniche modellistiche già viste nel caso della programmazione lineare, ottenendo: min z con i vincoli $z \geq \sum_{i=1}^{F} v_{ij}x_{i1} - \sum_{i=1}^{F} v_{ij}x_{i2} \ \forall j = 1, \ldots, P$ e $z \geq \sum_{i=1}^{F} v_{ij}x_{i2} - \sum_{i=1}^{F} v_{ij}x_{i1} \ \forall j = 1, \ldots, P$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{array}{lll}
\text{minimize} & z & \\
\text{subject to} & z \geq \displaystyle\sum_{i=1}^{F} v_{ij}x_{i1} - \sum_{i=1}^{F} v_{ij}x_{i2} & \forall j = 1, \ldots, P \\
& z \geq \displaystyle\sum_{i=1}^{F} v_{ij}x_{i2} - \sum_{i=1}^{F} v_{ij}x_{i1} & \forall j = 1, \ldots, P \\
& \displaystyle\sum_{k=1}^{A} x_{ik} = 1 & \forall i = 1, \ldots, F \\
& x_{ik} \in \{0, 1\} & \forall i = 1, \ldots, F \ \forall k = 1, \ldots, A.
\end{array}
$$

Nel secondo caso indicato l'obiettivo è ancora la minimizzazione di un valore assoluto, ma stavolta invece di considerare ogni prodotto singolarmente, si considera il fatturato totale di ogni azienda figlia. Quindi: min z con i vincoli $z \geq \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{P} v_{ij}x_{i1} - \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{P} v_{ij}x_{i2}$ e $z \geq \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{P} v_{ij}x_{i2} - \sum_{i=1}^{F} \sum_{j=1}^{P} v_{ij}x_{i1}$.

6 Problema n.6: Containers

Il problema. Dato un insieme di oggetti da trasportare tramite containers ed un insieme di containers di capacità nota, decidere come assegnare gli oggetti ai containers in modo da trasportare tutti gli oggetti, senza eccedere la capacità dei containers.

Caso 1: ogni oggetto ha un peso associato e tutti i containers sono uguali ed hanno una data capacità. Minimizzare il numero di containers usati.

Caso 2: ogni oggetto ha due valori associati, peso e volume, ed i containers hanno due corrispondenti capacità.

Caso 3: come nel caso 1, ma ogni container ha un diverso costo e una diversa capacità e si vuole minimizzare il costo complessivo dei containers usati.

Numero di containers disponibili = 4. Capacità in peso di ogni container (casi 1 e 2)= 50. Capacità in volume di ogni container (caso 2) = 1000.

Oggetto	Peso	Volume
1	10	260
2	24	140
3	18	190
4	7	220
5	7	180
6	6	250
7	16	170
8	11	200
9	8	140
10	11	170
11	1	190
12	6	230
13	15	230
14	8	180
15	2	250

Tabella 9: Peso e volume degli oggetti.

Container	Costo	Capacità (peso)
1	900	45
2	1000	50
3	1200	60
4	1300	80

Tabella 10: Costi e capacità dei containers (caso 3).

Il modello matematico (caso 1). Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $M = 4$ containers e $N = 15$ oggetti. Indichiamo con un indice $i = 1, \dots, N$ ogni oggetto e con un indice $j = 1, \dots, M$ ogni container. Indichiamo con p_i il peso di ogni oggetto $i = 1, \dots, N$. Indichiamo con P la capacità in peso dei containers.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *quali* containers usare e *quali* oggetti assegnare ad ogni container usato. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni container, la quale assume valore 1 se e solo se il container viene usato. Abbiamo quindi le variabili binarie y_j con $j = 1, \dots, M$. Inoltre definiamo una variabile binaria per ogni coppia oggetto-container, la quale assume valore 1 se e solo se l'oggetto viene assegnato al container. Abbiamo quindi le variabili binarie x_{ij} $\forall i = 1, \dots, N$ $\forall j = 1, \dots, M$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che ogni oggetto sia assegnato ad uno dei containers. Esiste pertanto un vincolo per ogni oggetto: $\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1$ $\forall i = 1, \dots, N$. Inoltre è necessario imporre che gli assegnamenti indicati dalle variabili x vengano fatti solo per i containers usati e che i vincoli di capacità siano soddisfatti. Queste due condizioni si possono esprimere contemporaneamente con i vincoli: $\sum_{i=1}^{N} p_i x_{ij} \leq P y_j$ $\forall j = 1, \dots, M$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il numero complessivo di containers usati: min $\sum_{j=1}^{M} y_j$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = \sum_{j=1}^{M} y_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1 && \forall i = 1, \dots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} p_i x_{ij} \leq P y_j && \forall j = 1, \dots, M \\
& y_j \in \{0, 1\} && \forall j = 1, \dots, M \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall i = 1, \dots, N \;\; \forall j = 1, \dots, M.
\end{aligned}
$$

Il modello matematico (caso 2). Il modello matematico è simile con l'unica differenza che i vincoli di capacità sono due per ogni container.

Dati. È data un ingombro v_i per ogni oggetto $i = 1, \dots, N$. È data una capacità in volume dei containers, V.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = \sum_{j=1}^{M} y_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1 && \forall i = 1, \ldots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} p_i x_{ij} \leq P y_j && \forall j = 1, \ldots, M \\
& \sum_{i=1}^{N} v_i x_{ij} \leq V y_j && \forall j = 1, \ldots, M \\
& y_j \in \{0, 1\} && \forall j = 1, \ldots, M \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall i = 1, \ldots, N \;\; \forall j = 1, \ldots, M.
\end{aligned}
$$

Il modello matematico (caso 3). Il modello matematico è simile a quello del caso 1 con le seguenti variazioni.

Dati. Indichiamo con c_j il costo di ogni container $j = 1, \ldots, M$. Indichiamo con P_j la capacità di ogni container $j = 1, \ldots, M$.

Vincoli. Nel secondo membro dei vincoli di disuguaglianza che impongono il rispetto delle capacità si ha ora un coefficiente P_j per ogni container: $\sum_{i=1}^{N} p_i x_{ij} \leq P_j y_j \;\; \forall j = 1, \ldots, M$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il costo complessivo dei containers usati: min $\sum_{j=1}^{M} c_j y_j$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = \sum_{j=1}^{M} c_j y_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1 && \forall i = 1, \ldots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} p_i x_{ij} \leq P_j y_j && \forall j = 1, \ldots, M \\
& y_j \in \{0, 1\} && \forall j = 1, \ldots, M \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall i = 1, \ldots, N \;\; \forall j = 1, \ldots, M.
\end{aligned}
$$

7 Problema n.7: Sentinelle

Il problema. Per pattugliare la città in piena guerra civile, il comandante della polizia deve disporre delle sentinelle in modo da sorvegliare tutti gli incroci. Ogni sentinella può essere posta in un incrocio. Poichè le strade sono tutte rettilinee, ogni incrocio può essere sorvegliato anche da una sentinella posta in un incrocio adiacente. Siccome il personale è scarso, il problema deve essere risolto impiegando il minor numero possibile di sentinelle.

La città ha 30 tra piazze e incroci, collegati dalle vie elencate nella tabella. Si noti che alcune piazze possono avere una sola via incidente ad esse.

Vie			
Da	A	Da	A
1	2	11	23
1	3	11	29
1	4	12	13
2	30	12	18
3	13	12	19
3	16	12	27
4	5	13	14
4	6	14	15
4	24	14	18
5	6	15	16
5	8	15	17
5	13	18	19
6	7	18	28
7	9	19	20
7	10	19	28
8	9	20	21
8	12	20	22
8	13	20	29
8	27	24	25
9	10	24	26
9	27	27	29
10	11		

Tabella 11: Elenco delle strade.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $N = 30$ incroci. È data la connessione tra gli incroci: indichiamo con un dato binario a_{ij} se l'incrocio i e l'incrocio j sono collegati da una strada o no. Poniamo $a_{ii} = 1$ per indicare che un incrocio i può essere sorvegliato da una sentinella posta nello stesso incrocio.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere in *quali* incroci collocare una sentinella. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni incrocio, la quale assume valore 1 se e solo se l'incrocio ospita una sentinella. Abbiamo quindi le variabili binarie x_i con $i = 1, \ldots, N$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che ogni incrocio sia coperto o da una sentinella collocata nell'incrocio stesso o da una sentinella collocata in un incrocio adiacente. Esiste pertanto un vincolo per ogni incrocio. Esso impone che il numero di sentinelle che coprono l'incrocio sia maggiore o uguale ad 1: $\sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, N$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare il numero complessivo di sentinelle usate: min $\sum_{i=1}^{N} x_i$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = \sum_{i=1}^{N} x_i \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \geq 1 && \forall i = 1, \ldots, N \\
& x_i \in \{0, 1\} && \forall i = 1, \ldots, N
\end{aligned}
$$

8 Problema n.8: Scaffali

Il problema. Si vogliono allineare alcuni volumi di larghezze e altezze diverse e note in una libreria composta da vari scaffali. La larghezza della libreria è data. L'altezza di ogni scaffale invece non è fissata, ma può essere scelta in modo che sia sufficiente a contenere tutti i libri che si vogliono mettere nello scaffale. Più lo scaffale è alto e più costa. Si vogliono minimizzare i costi di costruzione della libreria, cioè l'altezza complessiva degli scaffali.

Libri	Larghezza	Altezza
1	10	2
2	22	20
3	20	10
4	5	10
5	8	8
6	7	12
7	15	18
8	11	9
9	9	15
10	10	13
11	2	8
12	3	7
13	12	7
14	5	10
15	1	5

Tabella 12: Dimensioni dei libri.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $N = 15$ libri ed un numero imprecisato M di scaffali possibili. Possiamo supporre che gli scaffali siano al massimo tanti quanti i libri. Indichiamo con un indice $i = 1, \ldots, N$ ogni libro e con $j = 1, \ldots, M$ ogni scaffale. Indichiamo con w_i la larghezza e con h_i l'altezza di ogni libro. $i = 1, \ldots, N$. Indichiamo con W la larghezza della libreria.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *quali* libri allocare ad ogni scaffale e *quanto* deve essere alto ogni scaffale. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni coppia libro-scaffale, la quale assume valore 1 se e solo se il libro viene assegnato allo scaffale. Abbiamo quindi le variabili binarie x_{ij} con $i = 1, \ldots, N$ e $j = 1, \ldots, M$. Inoltre definiamo una variabile continua non-negativa H_j per ogni scaffale, che indica l'altezza dello scaffale.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che ogni libro sia assegnato ad uno degli scaffali. Esiste pertanto un vincolo per ogni libro: $\sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1 \ \ \forall i = 1, \ldots, N$. Inoltre è necessario imporre l'altezza di ogni scaffale sia sufficiente ad ospitare i libri ad esso assegnati: $H_j \geq h_i x_{ij} \ \ \forall i = 1, \ldots, N \ \forall j = 1, \ldots, M$. Infine i libri assegnati ad uno scaffale non possono eccedere in larghezza la dimensione della libreria: $\sum_{i=1}^{N} w_i x_{ij} \leq W \ \ \forall j = 1, \ldots, M$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare l'altezza complessiva degli scaffali: $\min \sum_{j=1}^{M} H_j$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

Qui non devo fare la sommatoria dato che l'ho già calcolata direttamente nella definizione di H

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = \sum_{j=1}^{M} H_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{M} x_{ij} = 1 && \forall i = 1, \ldots, N \\
& H_j \geq h_i x_{ij} && \forall i = 1, \ldots, N \ \forall j = 1, \ldots, M \\
& \sum_{i=1}^{N} w_i x_{ij} \leq W && \forall j = 1, \ldots, M \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall i = 1, \ldots, N \ \forall j = 1, \ldots, M \\
& H_j \geq 0 && \forall j = 1, \ldots, M.
\end{aligned}
$$

9 Problema n.9: Cifre vaganti

Tratto da "La Settimana Enigmistica" n.3718 del 28 Giugno 2003, enigma n. 18109.

Il problema. Il signor Gedeone sta riflettendo su un intrigante quesito di cui gli ha parlato un amico. Dunque, si ha un numero di quattro cifre, tutte diverse l'una dall'altra e fra le quali non c'è lo zero. Queste cifre vengono fatte... vagare, spostandole così: quella delle migliaia va al posto delle decine, quella delle centinaia va al posto delle unità, quelle delle decine va al posto delle centinaia e quella delle unità va al posto delle migliaia. Fatto ciò ne risulta ovviamente un numero diverso che, sommato a quello iniziale, dà come totale 8612. E al signor Gedeone è stato precisato un ultimo dato: due delle cifre che formano questo totale compaiono anche nei numeri sommati. Qual è allora quel numero iniziale?

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. È dato un insieme di $N = 9$ cifre (lo zero non compare) e un insieme di $P = 4$ posizioni (il numero da trovare ha 4 cifre). Indichiamo con un indice i le cifre e con un indice j le posizioni. Si supponga che i valori di j crescano dalla cifra meno significativa alla cifra più significativa. È data inoltre la somma $S = 8612$.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *quale* sia ciascuna delle quattro cifre del numero iniziale. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni coppia cifra-posizione: abbiamo quindi le variabili binarie x_{ij} con $i = 1, \dots, N$ e $j = 1, \dots, P$. La variabile x_{ij} vale 1 se e solo se la cifra i compare in posizione j. Lo stesso si può fare per il numero modificato, con variabili binarie y_{ij}. Per comodità introduciamo anche una variabile X e una variabile Y, che assumono il valore del numero originale e del numero modificato.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che in ogni posizione di X e du Y compaia esattamente una cifra. Esiste pertanto un vincolo per ogni posizione: $\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, P$ e $\sum_{i=1}^{N} y_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, P$. Poichè tutte le cifre sono diverse tra loro, un altro vincolo deve imporre che nessuna cifra compaia più di una volta. $\sum_{j=1}^{P} x_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, N$. Le espressioni dei numeri X e Y in funzione delle variabili x e y sono: $X = \sum_{j=1}^{P} \sum_{i=1}^{N} x_{ij} i 10^{j-1}$ e $Y = \sum_{j=1}^{P} \sum_{i=1}^{N} y_{ij} i 10^{j-1}$. Non resta che imporre $X + Y = S$ e la relazione tra i due numeri data dallo scambio di cifre descritto. Le migliaia in X sono le decine in Y: $\sum_{i=1}^{N} i x_{i4} = \sum_{i=1}^{N} i y_{i2}$; le centinaia in X sono le unità in Y: $\sum_{i=1}^{N} i x_{i3} = \sum_{i=1}^{N} i y_{i1}$; le decine in X sono le centinaia in Y: $\sum_{i=1}^{N} i x_{i2} = \sum_{i=1}^{N} i y_{i3}$; le unità in X sono le migliaia in Y: $\sum_{i=1}^{N} i x_{i1} = \sum_{i=1}^{N} i y_{i4}$.

Funzione obiettivo. Il problema non ha funzione obiettivo: è un problema di esistenza, non di ottimizzazione.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{subject to } & \sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1 && \forall j = 1, \ldots, P \\
& \sum_{i=1}^{N} y_{ij} = 1 && \forall j = 1, \ldots, P \\
& \sum_{j=1}^{P} x_{ij} \leq 1 && \forall i = 1, \ldots, N \\
& \sum_{i=1}^{N} i x_{i4} = \sum_{i=1}^{N} i y_{i2} \\
& \sum_{i=1}^{N} i x_{i3} = \sum_{i=1}^{N} i y_{i1} \\
& \sum_{i=1}^{N} i x_{i2} = \sum_{i=1}^{N} i y_{i3} \\
& \sum_{i=1}^{N} i x_{i1} = \sum_{i=1}^{N} i y_{i4} \\
& X = \sum_{j=1}^{P} \sum_{i=1}^{N} x_{ij} i 10^{j-1} \\
& Y = \sum_{j=1}^{P} \sum_{i=1}^{N} y_{ij} i 10^{j-1} \\
& X + Y = S \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && \forall i = 1, \ldots, N \ \forall j = 1, \ldots, P \\
& y_{ij} \in \{0, 1\} && \forall i = 1, \ldots, N \ \forall j = 1, \ldots, P \\
& X, Y \geq 0.
\end{aligned}
$$

10 Problema n.10: Arbitri

Il problema. In seguito allo scandalo sulle designazioni arbitrali truccate, la Lega Calcio ha deciso di inaugurare un nuovo sistema, affidando ad un algoritmo di ottimizzazione le designazioni degli arbitri per i campionati di calcio. Noto il calendario delle partite e noto un insieme di arbitri disponibili, si vuole assegnare un arbitro ad ogni partita. Ovviamente lo stesso arbitro non può arbitrare più di una partita nella stessa giornata di campionato; inoltre ogni partita ha bisogno di un solo arbitro (non si considerano qui i guardalinee ed il "quarto uomo"). Per garantire equità si vuole che il numero complessivo di volte che ogni arbitro viene assegnato ad ogni squadra sia il più uniforme possibile. In altri termini si vuole minimizzare la differenza tra il massimo ed il minimo numero di volte che uno degli arbitri viene assegnato ad una delle squadre nell'arco di tutto il campionato.

Considerare un mini-campionato giocato da 6 squadre in un unico girone all'italiana secondo il calendario riportato sotto. Si consideri il caso con 3 arbitri e con 4 arbitri.

Giornata	Partite	
1	Senilitas 1	Ammogliati 4
	Intercomunale 2	Scapoli 5
	SPQR 3	Bar Sport 6
2	Senilitas	Bar Sport
	Intercomunale	Ammogliati
	SPQR	Scapoli
3	Senilitas	Intercomunale
	SPQR	Ammogliati
	Bar Sport	Scapoli
4	Senilitas	Scapoli
	Intercomunale	SPQR
	Bar Sport	Ammogliati
5	Senilitas	SPQR
	Intercomunale	Bar Sport
	Scapoli	Ammogliati

Partita n 1

P := 2

P := 3

Tabella 13: Calendario del campionato.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono dati $A = 4$ arbitri, $G = 5$ giornate, $P = 3$ partite per ogni giornata e $S = 6$ squadre. Indichiamo con indici a, g, p e s gli arbitri, le giornate, le partite e le squadre, rispettivamente. È dato un calendario, in cui si assegna ad ogni giornata e ad ogni partita una coppia di squadre. Lo indichiamo con una matrice a tre dimensioni che contiene valori binari: $c_{gps} = 1$ se e solo se la squadra s gioca la partita p nella giornata g.

Variabili. Il problema decisionale consiste nel decidere *quale* arbitro assegnare ad ogni partita di ogni giornata. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni terna arbitro-giornata-partita. Abbiamo quindi le variabili binarie x_{agp} che assumono valore 1 se e solo se l'arbitro a viene assegnato alla partita p della giornata g.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che ogni partita in ogni giornata sia arbitrata da un arbitro. Esiste pertanto un vincolo per ogni giornata e partita: $\sum_{a=1}^{A} x_{agp} = 1 \quad \forall g = 1, \ldots, G \quad \forall p = 1, \ldots, P$. Inoltre nessun arbitro può dirigere più di una partita nella stessa giornata. Esiste quindi un vincolo per ogni giornata e ogni arbitro: $\sum_{p=1}^{P} x_{agp} \leq 1 \ \ \forall a = 1, \ldots, A \ \ \forall g = 1, \ldots, G$.

Funzione obiettivo. Si vuole minimizzare la differenza tra il massimo ed il minimo numero di volte che uno stesso arbitro viene assegnato ad una stessa squadra. Si tratta quindi di una funzione obiettivo min-max. Introduciamo quindi due variabili ausiliarie z' e z'', che indicano rispettivamente il minimo ed il massimo numero di assegnamenti di uno stesso arbitro ad una stessa squadra. La funzione obiettivo si esprime semplicemente come min $z'' - z'$ con i vincoli seguenti per ogni coppia arbitro-squadra: $z' \leq \sum_{g=1}^{G} \sum_{p=1}^{P} c_{gps} xagp \quad \forall a = 1, \ldots, A \quad \forall s = 1, \ldots, S$ e $z'' \geq \sum_{g=1}^{G} \sum_{p=1}^{P} c_{gps} xagp \quad \forall a = 1, \ldots, A \quad \forall s = 1, \ldots, S$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & z = z'' - z' \\
\text{subject to} \quad & \sum_{a=1}^{A} x_{agp} = 1 && \forall g = 1, \ldots, G \ \ \forall p = 1, \ldots, P \\
& \sum_{p=1}^{P} x_{agp} \leq 1 && \forall a = 1, \ldots, A \ \ \forall g = 1, \ldots, G \\
& z' \leq \sum_{g=1}^{G} \sum_{p=1}^{P} c_{gps} x_{agp} && \forall a = 1, \ldots, A \ \ \forall s = 1, \ldots, S \\
& z'' \geq \sum_{g=1}^{G} \sum_{p=1}^{P} c_{gps} x_{agp} && \forall a = 1, \ldots, A \ \ \forall s = 1, \ldots, S \\
& x_{agp} \in \{0, 1\} && \forall a = 1, \ldots, A \ \forall g = 1, \ldots, G \ \forall p = 1, \ldots, P \\
& z', z'' \geq 0.
\end{aligned}
$$

11 Problema n.11: Gioco coi numeri

Tratto da "La Settimana Enigmistica" n.3929, Luglio 2007, Quesito con la Susi n.856.

Il problema. Su una lavagna sono scritte le cifre da 9 a 1, in ordine decrescente. Si possono inserire dei segni + tra una cifra e l'altra oppure mantenere le cifre consecutive, formando così una somma: ad esempio 9+8+7+65+4+3+2+1 è una possibile soluzione, mentre 98+76+54+3+21 è un'altra soluzione. Il valore di ogni soluzione è dato dal numero che si ottiene come somma: ad esempio nel primo caso sopra indicato la somma è pari a 99, mentre nel secondo caso è pari a 252. Si vuole ottenere la somma maggiore possibile, purché non superiore a 1000.

Il modello matematico. Il modello matematico è il seguente.

Dati. Sono date $N = 9$ cifre in ordine prestabilito. Indichiamo con a_i il valore della cifra in posizione i.

Variabili. Il problema decisionale può essere formulato in vari modi. Quello che porta in modo più semplice alla formulazione di un modello matematico consiste nell'usare variabili binarie per ogni posizione $i = 1, \ldots, N$ e per ogni possibile peso (unità, decine, centinaia) che la cifra i può assumere. Poiché i pesi da considerare sono solo tre (unità, decine, centinaia) possiamo definire un indice $j = 0, \ldots, 2$ per indicarli. Definiamo quindi una variabile binaria per ogni coppia posizione-peso. Abbiamo quindi le variabili binarie x_{ij} che assumono valore 1 se e solo se la cifra in posizione i ha peso 10^j.

Funzione obiettivo. Si vuole massimizzare la somma dei numeri ottenuti, che è la somma delle N cifre, ciascuna moltiplicata per il suo peso. La funzione obiettivo si esprime quindi semplicemente come max $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{2} 10^j x_{ij}$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che ogni cifra abbia esattamente un peso. Esiste pertanto un vincolo per ogni posizione $i = 1, \ldots, N$: $\sum_{j=0}^{2} x_{ij} = 1 \;\; \forall i = 1, \ldots, N$. Inoltre se la cifra in posizione i ha peso 100, allora la cifra in posizione $i+1$ deve avere necessariamente peso 10, ed analogamente se la cifra in posizione i ha peso 10, allora la cifra in posizione $i+1$ deve avere necessariamente peso 1. Ciò si può esprimere facilmente come condizione logica sulle variabili binarie: ad esempio $x_{53} = 1$ implica $x_{62} = 1$, che a sua volta implica $x_{71} = 1$. Si hanno perciò i vincoli: $x_{ij} \leq x_{i+1,j-1} \;\; \forall i = 1, \ldots, N-1 \;\; \forall j = 1, 2$. Dalla facilità con cui si esprimono questi vincoli si può apprezzare il motivo della scelta delle variabili. Un ultimo vincolo impone che la somma sia non superiore a 1000: $\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{2} 10^j x_{ij} \leq 1000$.

Il modello matematico completo risulta quindi:

$$
\begin{array}{lll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{2} 10^j x_{ij} & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{j=0}^{2} x_{ij} = 1 & \forall i = 1, \ldots, N \\
& x_{ij} \leq x_{i+1,j-1} & \forall i = 1, \ldots, N-1 \;\; \forall j = 1, 2 \\
& \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{2} 10^j x_{ij} \leq 1000 & \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall i = 1, \ldots, N \;\; \forall j = 0, \ldots, 2.
\end{array}
$$