Cammino minimo con archi abbinati.

Su un dato grafo orientato e pesato si vuole risolvere il problema di calcolare il cammino minimo da un dato nodo origine ad un dato nodo destinazione. Rispetto al classico problema di cammino minimo su grafo, tuttavia, bisogna tenere conto del fatto che sono anche date in ingresso due insiemi E e P che comprendono alcune coppie di archi. Per ogni coppia di archi nell'insieme E, il cammino non può contenere entrambi gli archi. Per ogni coppia di archi nell'insieme P, il costo del cammino viene aumentato di una data penalità (costante) se il cammino non contiene nessuno dei due archi.

Formulare il problema, classificarlo e risolvere l'esempio descritto dai dati nel file `CAMMINO.TXT`.

Dati.

Il grafo contiene 8 nodi e i seguenti 16 archi: $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, $(2,5)$, $(2,6)$, $(3,2)$, $(3,5)$, $(3,6)$, $(3,7)$, $(4,3)$, $(4,6)$, $(4,7)$, $(5,6)$, $(5,7)$, $(5,8)$, $(6,8)$, $(7,6)$, $(7,8)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	.	10	15	18	.	.	.	.
2	.	.	.	.	20	19	.	.
3	.	4	.	.	17	11	10	.
4	.	.	5	.	.	23	18	.
5	.	.	.	.	.	3	18	14
6	.	.	.	.	.	.	.	9
7	.	.	.	.	.	10	.	4
8	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabella 1: Matrice di adiacenza con i costi degli archi.

$(1,3)$	$(3,7)$
$(1,2)$	$(5,8)$
$(1,4)$	$(7,8)$

Tabella 2: Coppie di archi incompatibili (insieme E).

$(5,8)$	$(7,8)$
$(1,2)$	$(1,4)$
$(5,6)$	$(7,6)$

Tabella 3: Coppie di archi che possono dare origine a penalità (insieme P).

Nodo origine: 1.
Nodo destinazione: 8.
Penalità: 5.

Soluzione.

Dati.

Sia n il numero di nodi e N l'insieme dei nodi. Sia A l'insieme degli archi dati. Sia c_{ij} il costo del generico arco $(i,j) \in A$. Siano s e t i nodi origine e destinazione. Sia p la penalità.

Variabili.

Sia x_{ij} la variabile binaria che indica se l'arco $(i,j) \in A$ appartiene al cammino o no. Sia y_{ijkl} la variabile binaria che indica se la soluzione viene penalizzata a causa della coppia di archi $((i,j),(k,l))$ nell'insieme P.

Vincoli.

Grado uscente del nodo s e grado entrante del nodo t devono essere pari a 1:

$$\sum_{j \in N : (s,j) \in A} x_{sj} = 1$$

$$\sum_{i \in N : (i,t) \in A} x_{it} = 1$$

Conservazione del flusso negli altri nodi:

$$\sum_{j \in N : (j,i) \in A} x_{ji} = \sum_{j \in N : (i,j) \in A} x_{ij} \quad \forall i \in N : i \notin \{s,t\}$$

Vincoli di elementarità: il cammino non può visitare nessun nodo più di una volta:

$$\sum_{j \in N : (j,i) \in A} x_{ji} \leq 1 \quad \forall i \in N.$$

Vincoli di incompatibilità tra archi nell'insieme E:

$$x_{ij} + x_{kl} \leq 1 \quad \forall ((i,j),(k,l)) \in E.$$

Penalità dovute alle coppie in P:

$$y_{ijkl} \geq 1 - (x_{ij} + x_{kl}) \quad \forall ((i,j),(k,l)) \in P.$$

Obiettivo.

Si richiede di minimizzare la funzione obiettivo

$$z = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + p \sum_{((i,j),(k,l)) \in P} y_{ijkl}.$$

Dai vincoli di penalità e dall'obiettivo si desume che la condizione di integralità sulle variabili y si può anche rilassare in $0 \leq y \leq 1$. Infatti, se le x sono binarie, il valore ottimo delle y (il minimo possibile per ogni y) è certamente binario. La condizione di integralità sulle x, invece non si può rilassare: potrebbe risultare ottima una soluzione frazionaria.

Il modello risultante è di PLI. Quindi la soluzione calcolata dai solutori è garantita essere ottima, ma non unica.