I testi scolastici.

Una casa editrice ha stampato alcune copie del suo “Manuale di Ricerca Operativa” utilizzato in alcune scuole italiane e le ha lasciate date quantità nei suoi magazzini (Tabella 1).

Sono note le quantità richieste da alcuni distributori in alcune altre città (Tabella 2).

Per effettuare le consegne, la casa editrice utilizza un corriere chiamato “Tutto Trasporti A” che rende disponibile sui propri furgoncini uno spazio diverso per ciascuna coppia di città poiché la capacità rimanente del furgoncino è già stata assegnata ad altri servizi. Le quantità di libri che è possibile spedire tra ciascuna coppia di città sono indicate nella Tabella 3.

Il costo unitario di spedizione è indicato nella Tabella 4 (prezzi espressi in Euro per ogni libro).

Si vuole soddisfare il massimo numero di ordini, minimizzando i costi di spedizione.

Formulare il problema, classificarlo e risoolvere l’esempio descritto dai dati nel file `TESTI.TXT`.

Variante. Considerare una seconda società di trasporti “Tutto Trasporti B” che lavora con le stesse capacità precedenti ma attua una politica di prezzo che tende a scoraggiare il massimo utilizzo della capacità secondo la funzione di costo seguente:

$$C = P/(1 - q/Q),$$

dove per ogni coppia origine-destinazione C è il costo unitario di spedizione di un libro, P è il prezzo-base indicato nella Tabella 5, q è la quantità spedita e Q è la capacità riportata nella Tabella 3.

Anche in questo caso, formulare il problema, classificarlo e risolvere l’esempio descritto dai dati nel file `TESTI.TXT`.

Dati.

Magazzini	Copie stampate
TO	1200
NA	1400
PA	800

Tabella 1: Disponibilità.

Distributori	Copie richieste
MI	1000
BO	1200
RM	700
BA	500

Tabella 2: Richieste dei distributori.

Capacità	MI	BO	RM	BA
TO	500	1000	1000	1000
NA	500	800	800	800
PA	800	600	600	600

Tabella 3: Capacità disponibili per il trasporto.

Costi unitari	MI	BO	RM	BA
TO	7,5	2,6	1,7	1,6
NA	6,4	2,2	2,0	1,5
PA	5,8	2,4	1,8	1,4

Tabella 4: Costi unitari di spedizione.

Prezzo-base	MI	BO	RM	BA
TO	3,9	1,4	1,1	1,4
NA	2,7	0,9	1,2	0,9
PA	2,4	1,4	1,7	1,3

Tabella 5: Prezzi-base del trasportatore "Tutto Trasporti B".

Soluzione.

Dati. Sono dati:

- un insieme di origini O (i magazzini);
- un insieme di destinazioni D (i distributori);
- un'offerta o_i per ogni origine $i \in O$;
- una domanda d_j per ogni destinazione $j \in D$;
- una capacità massima Q_{ij} per ogni tratta origine-destinazione;
- dei costi unitari di spedizione c_{ij} su ciascuna tratta origine-destinazione.

Variabili. Le variabili decisionali indicano il numero x_{ij} di libri che vengono trasportati da ogni origine $i \in O$ ad ogni destinazione $j \in D$.

Vincoli. I vincoli del problema impongono che:

- la quantità complessiva in partenza da ogni origine $i \in O$ non sia superiore all'offerta o_i:

$$\sum_{j \in D} x_{ij} \leq o_i \ \forall i \in O;$$

- la quantità totale in arrivo in ogni destinazione $j \in D$ sia almeno pari alla domanda d_j:

$$\sum_{i \in O} x_{ij} \geq d_j \ \forall j \in D;$$

- la quantità trasportata su ogni tratta (i, j) non ecceda il limite Q_{ij}:

$$x_{ij} \leq Q_{ij} \ \ \forall i \in O, \forall j \in D.$$

Obiettivo. L'obiettivo è quello di minimizzare i costi, che sono dati dall'espressione

$$z_A = \sum_{i \in O} \sum_{j \in D} c_{ij} x_{ij}.$$

In questo primo caso, relativo all'azienda "TuttoTrasporti A" si ottiene quindi un problema di programmazione lineare.

Poiché tutti i dati sono interi, grazie alla particolare struttura dei vincoli del problema, si ottiene una soluzione ottima con valori interi anche senza bisogno di imporre esplicitamente le condizioni di integralità sulle variabili x.

Dalla soluzione si ricava che è possibile soddisfare tutta la domanda ed il costo minimo è pari a 10670 Euro.

L'ottimalità è garantita. Poiché tutte le variabili fuori base hanno costo ridotto diverso da zero, la soluzione ottima è unica.

In un secondo scenario, relativo all'azienda "TuttoTrasporti B", la formula per il calcolo del costo dà luogo ad un modello di programmazione non-lineare, poiché le quantità trasportate figurano al denominatore. E' necessario aggiungere un ulteriore dato, che è il prezzo-base b_{ij} per ogni tratta. In questo caso se non vengono imposte le condizioni di integralità sulle quantità trasportate si ottengono in generale soluzioni (localmente) ottime con valori frazionari delle variabili.

Imponendo che le variabili x assumano valori interi, si ottiene una soluzione di costo 11354,07 Euro.

E' interessante notare che in questa variante, tutte le tratte O/D vengono utilizzate.

E' garantita l'ottimalità globale, perché i vincoli sono lineari e la funzione obiettivo è convessa. Infatti, detto p_{ij} il prezzo di traporto sulla tratta da $i \in O$ a $j \in D$, si ha $p_{ij} = \dfrac{b_{ij} Q_{ij}}{Q_{ij} - x_{ij}}$ con le seguenti proprietà, facilmente verificabili:

- $p_{ij}(x_{ij}) = \dfrac{b_{ij} Q_{ij}}{Q_{ij} - x_{ij}} \geq 0 \;\; \forall x_{ij} \geq 0$;
- $p'_{ij}(x_{ij}) = \dfrac{b_{ij} Q_{ij}}{(Q_{ij} - x_{ij})^2} \geq 0 \;\; \forall x_{ij} \geq 0$;
- $p''_{ij}(x_{ij}) = \dfrac{2 b_{ij} Q_{ij}}{(Q_{ij} - x_{ij})^3} \geq 0 \;\; \forall x_{ij} \geq 0$.

La funzione obiettivo è data dalla somma di tanti contributi, ciascuno relativo ad una delle tratte. Ciascuno di essi ha la forma $p_{ij}(x_{ij}) x_{ij}$. Tale funzione ha come derivata seconda $2p'_{ij}(x_{ij}) + x_{ij} p''_{ij}(x_{ij})$, che è sempre non-negativa per ogni $x_{ij} \geq 0$.