

Esercizio 4: Caramelle

Le variabili ($x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$) sono le quantità di caramelle di ciascuno dei 7 tipi che devono essere prodotte ogni giorno. Poiché si tratta di una quantità media giornaliera e poiché i numeri in gioco sono molto più grandi di 1, non occorre vincolare le variabili ad assumere valori interi.

La **funzione obiettivo** da massimizzare è la somma pesata delle sette variabili, moltiplicate ciascuna per il prezzo di vendita della corrispondente caramella.

$$\max 5 x_1 + 4 x_2 + 8 x_3 + 5 x_4 + 6 x_5 + 7.5 x_6 + 4.5 x_7$$

I vincoli del problema sono soltanto uno per ogni ingrediente e impongono che il totale di ingredienti richiesti per ogni tipo di caramelle prodotte non ecceda la quantità giornaliera di ingrediente disponibile, che è data.

```
!Vincoli sulle risorse disponibili [Kg/giorno]
Frut) 0.3  x1 + 0 x2 + 0.05 x3 + 0.05 x4 + 0.05 x5 + 0.1  x6 + 0.1  x7 <= 9
Sacc) 0.2  x1 + 0.3  x2 + 0 x3 + 0.05 x4 + 0.05 x5 + 0.05 x6 + 0.1  x7 <= 5
Gluc) 0.15 x1 + 0.2  x2 + 0.3  x3 + 0 x4 + 0.05 x5 + 0.05 x6 + 0.05 x7 <= 20
Dest) 0.1  x1 + 0.15 x2 + 0.2  x3 + 0.3  x4 + 0    x5 + 0.05 x6 + 0.05 x7 <= 18
Es_e) 0.1  x1 + 0.10 x2 + 0.15 x3 + 0.2  x4 + 0.3  x5 + 0 x6 + 0.05 x7 <= 20
Es_f) 0.05 x1 + 0.1  x2 + 0.1  x3 + 0.15 x4 + 0.2  x5 + 0.3  x6 + 0 x7 <= 17
Colo) 0.05 x1 + 0.05 x2 + 0.1 x3 + 0.1 x4 + 0.15 x5 + 0.2  x6 + 0.3  x7 <= 18.4
Cons) 0.05 x1 + 0.05 x2 + 0.05 x3 + 0.1  x4 + 0.1 x5 + 0.15 x6 + 0.2  x7 <= 12.5
Arom) 0 x1 + 0.05 x2 + 0.05 x3 + 0.05 x4 + 0.1  x5 + 0.1  x6 + 0.15 x7 <= 10
```

(Nel file CAMEL.LTX è contenuta la formulazione del problema, nel file CAMEL.OUT il corrispondente output fornito da LINDO)

RISPOSTE:

1) Dall'analisi dei risultati si vede che la caramella **Delizia** non è conveniente mentre gli altri sei tipi lo sono.

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
x1	3.701265	0.000000
x2	0.000000	3.135080
x3	56.014454	0.000000
x4	16.578197	0.000000
x5	23.739008	0.000000
x6	13.263200	0.000000
x7	15.807267	0.000000

Affinché diventi conveniente produrre anche la Delizia, il suo prezzo di mercato dovrebbe aumentare: dall'analisi post-ottimale dei coefficienti della funzione obiettivo, si vede che si avrebbe un cambiamento di base se il valore del coefficiente aumentasse di circa 3.135 Euro al Kg, passando quindi da 4 Euro/Kg a circa 7.135 Euro/Kg.

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
x1	5.000000	5.749129	0.940942
x2	4.000000	3.135080	INFINITY
x3	8.000000	1.892456	4.908046
x4	5.000000	6.653881	1.268689
x5	6.000000	1.741005	0.682990

2) Se a causa di oscillazioni del cambio i prezzi variano tutti simultaneamente, la soluzione ottima non cambia: cambia solo il suo valore (domanda trabocchetto).

Avrebbe senso invece domandarsi quale diminuzione di prezzo è tollerabile per ogni tipo di caramella, nell'ipotesi che gli altri prezzi restino costanti. In tal caso si procede come segue (esempio per la caramella Dolce): prezzo attuale = 5 Euro / Kg. Massima diminuzione del prezzo prima che cambi la base ottima = 0.94 Euro / Kg (si vede dall'analisi post-ottimale sui coefficienti della funzione obiettivo). Oscillazione percentuale ammessa = $0.94 / 5 = 0.1888 = 18.88\%$.

Dolce $\rightarrow 0.94/5 = 0.1888 = 18.88\%$

Bacetto $\rightarrow 4.90/8 = 61.25\%$

Golosa $\rightarrow 1.26/5 = 25.20\%$

Sfizio $\rightarrow 0.68/6 = 11.33\%$

Slurp $\rightarrow 4.66/7.5 = 62.13\%$

Sweety $\rightarrow 2.92/4.5 = 64.88\%$

La caramella più robusta alle diminuzioni di prezzo è la Sweety, che può sopportare una diminuzione del 64.88% (circa) del proprio prezzo senza diventare diseconomica. La meno robusta è invece la caramella Sfizio con l'11.33% circa.

3) I costi di approvvigionamento si possono ridurre perchè alcuni ingredienti hanno eccedenze: crescono 166 g/giorno di fruttosio, 331.5 g/giorno di conservanti e 299 g/giorno di aromatizzanti.

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
FRUT)	0.165991	0.000000
SACC)	0.000000	4.733989
GLUC)	0.000000	14.859132
DEST)	0.000000	3.918223
ES_E)	0.000000	2.128087
ES_F)	0.000000	14.456267
COLO)	0.000000	9.937763
CONS)	0.331560	0.000000
AROM)	0.299056	0.000000

Moltiplicando il costo di ciascuno dei tre ingredienti (dato) per la quantità eccedente (slack del vincolo corrispondente), si ottiene il risparmio possibile, pari a circa 4.116 Euro/giorno.

Fruttosio $\rightarrow 4 * 0.166 = 0.664$

Conservanti $\rightarrow 5 * 0.3315 = 1.6575$

Aromatizzanti $\rightarrow 6 * 0.299 = 1.794$

4) Il costo attuale dei coloranti è di 2 Euro/Kg, quello dei conservanti è di 5 Euro/Kg. Poiché i conservanti sono in eccedenza, non è mai conveniente acquistarne in più.

CONS)	0.331560	0.000000
-------	----------	----------

Per quanto riguarda i coloranti invece bisogna confrontare il loro costo con il prezzo ombra: il costo di ulteriori coloranti sarebbe la metà di quello corrente, ossia 1 Euro/Kg; il prezzo-ombra dei coloranti è di 0.009938 Euro/grammo, ossia 9.938 Euro/Kg. Quindi l'acquisto di ulteriori coloranti sarebbe molto conveniente, poiché si tradurrebbe in un profitto di 8.938 Euro/giorno per ogni Kg/giorno di coloranti in più. Tuttavia ciò è garantito solo finché non cambia la base ottima, cioè per un aumento massimo di 524.70 grammi/giorno.

Oltre tale quantità, bisogna ricorrere all'analisi parametrica per conoscere il prezzo-ombra dei coloranti e poter rifare il confronto.

RIGHTHANDSIDE PARAMETRICS REPORT FOR ROW: COLO

VAR		VAR		PIVOT	RHS	DUAL PRICE	OBJ
OUT		IN		ROW	VAL	BEFORE PIVOT	VAL
					18.4000	9.93776	862.554
SLK	9	SLK	8	9	18.9247	9.93776	867.768
					19.0000	-0.444089E-15	867.768

Dall'analisi parametrica si ricava che dopo l'incremento di 524.7 grammi/giorno, il prezzo-ombra dei coloranti si azzerà e quindi non conviene comprarne di più.