Terreno.

Si vuole destinare un appezzamento di terra ad uso agricolo. Tuttavia esso presenta dislivelli che ostacolerebbero il movimento dei mezzi agricoli e impedirebbero un omogeneo assorbimento dell'acqua piovana. Perciò, prima di ararlo e seminarlo, si vuole livellare il terreno. L'appezzamento è rettangolare ed è stato diviso in quadratini uguali, di area pari ad un metro quadrato, con lati paralleli a quelli del rettangolo. Grazie ad osservazioni satellitari, di ogni quadratino è stata rilevata l'altezza rispetto ad un dato valore di riferimento.

L'operazione di livellamento del terreno va compiuta spostando terra dai quadratini con eccesso a quelli con difetto, in modo che al termine tutti siano allo stesso livello. Il costo da pagare per questa movimentazione di terra (che si vuole minimizzare) è proporzionale alle quantità di terra spostate e alle distanze. E' noto il costo unitario, cioè il costo da sostenere per spostare un metro cubo di terra ad un metro di distanza.

Formulare il problema e classificarlo.

Risolvere l'esempio con i dati del file `TERRENO.TXT` e discutere l'ottimalità e l'unicità della soluzione ottenuta.

Variante: è consentito che rimangano nel terreno dei lievi dislivelli. Studiare come varia il costo in funzione del massimo dislivello tollerato (inteso come differenza di quota tra il punto più alto ed il punto più basso del terreno).

N.B. Eseguire solo le prime 3 o 4 iterazioni dell'analisi parametrica.

Dati.

La base del rettangolo misura 20 metri. L'altezza del rettangolo misura 10 metri.

Spostare un metro cubo di terra ad un metro di distanza costa 0.50 €.

Quota delle celle della griglia in cui il terreno è suddiviso:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	-5	-4	-3	-2	-1	0	-1	-1	-1	0	1	1	1	2	3	4	3	3	4	5
2	-5	-4	-3	-2	-1	0	0	0	0	1	2	1	0	1	2	3	2	2	3	4
3	-4	-3	-3	-2	-1	0	1	0	1	0	1	0	-1	0	1	2	1	1	2	3
4	-4	-3	-2	-2	-1	0	1	0	1	1	1	0	-1	-1	0	1	0	0	1	2
5	-3	-2	-2	-2	-1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1	0	-1	-1	0	1
6	-2	-2	-2	-1	-1	0	1	1	1	2	2	2	1	0	0	-1	-2	-2	-1	0
7	-1	-1	-1	0	0	1	2	2	2	3	3	3	2	1	0	-1	-2	-3	-2	-1
8	0	0	-1	0	1	2	3	3	3	4	4	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-2
9	1	1	0	1	2	3	4	4	4	5	5	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
10	2	2	1	2	3	4	5	5	5	6	6	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2

Soluzione.

Si tratta di un problema di trasporto a costo minimo.

I dati sono l'insieme $\{1,\ldots,H\}$ delle righe e l'insieme $\{1,\ldots,W\}$ delle colonne della griglia rettangolare corrispondente al terreno. Di ogni cella (i,j) della matrice è data una quota q_{ij} con $i=1,\ldots,H$ e $j=1,\ldots,W$. E' dato un coefficiente di costo $k=0.50e/m^4$. Si può calcolare a partire dai dati il livello medio del terreno, che è la quota a cui portare tutte le celle della matrice:

$$M=\sum_{i=1}^{H}\sum_{j=1}^{W}q_{ij}/(WH).$$

Anche la distanza tra ogni coppia di celle si può pre-calcolare:

$$d_{i'j'i''j''}=\sqrt{(i'-i'')^2+(j'-j'')^2}.$$

Le variabili del problema devono rappresentare le quantità di terra spostate da ogni cella ad ogni altra. Sono quindi variabili continue e non-negative con 4 indici: $xi',j',i'',j''>=0$ espresse in metri cubi.

I vincoli devono imporre che la differenza tra terreno ricevuto e terreno sottratto bilanci l'eccesso o disavanzo in ogni cella, in modo che il totale sia pari a M per tutte.

$$\sum_{i'=1}^{H}\sum_{j'=1}^{W}x_{i'j'i''j''}+q_{i''j''}-\sum_{i'=1}^{H}\sum_{j'=1}^{W}x_{i''j''i'j'}=M\ \ \forall i''=1,\ldots,H,\forall j''=1,\ldots,W.$$

L'obiettivo è di minimizzare le distanze complessive, ciascunna pesata per la corrispondente quantità di terra trasportata.

$$\text{minimize } z = k \sum_{i',j',i'',j''} x_{i'j'i''j''} d_{i'j'i''j''}.$$

Il modello risultante è di programmazione lineare. La soluzione fornita dal solutore è ottima. Per discuterne l'unicità bisognerebbe esaminare tutti i costi ridotti delle variabili fuori-base, per controllare se qualcuno è nullo o sono tutti strettamente positivi. In effetti, ci sono alcune variabili fuori base con costo ridotto nullo. Ad esempio:
x[5,6,1,1] NL 0 0 < eps
x[4,6,1,2] NL 0 0 < eps
Quindi la soluzione ottima non è unica.

Variante. Per studiare la variante proposta, bisogna fare l'analisi parametrica su un vincolo che limita la differenza tra quota massima e quota minima nel terreno. Si introduce quindi un opportuno parametro ϵ e non si usa più il valor medio M.

Alle variabili aggiungiamo $U \geq 0$ che rappresenta la quota massima e $L \geq 0$ che rappresenta al quota minima.

I vincoli vengono modificati come segue:

$$\sum_{i'=1}^{H} \sum_{j'=1}^{W} x_{i'j'i''j''} + q_{i''j''} - \sum_{i'=1}^{H} \sum_{j'=1}^{W} x_{i''j''i'j'} \leq U \;\; \forall i'' = 1, \ldots, H, \forall j'' = 1, \ldots, W.$$

$$\sum_{i'=1}^{H} \sum_{j'=1}^{W} x_{i'j'i''j''} + q_{i''j''} - \sum_{i'=1}^{H} \sum_{j'=1}^{W} x_{i''j''i'j'} \geq L \;\; \forall i'' = 1, \ldots, H, \forall j'' = 1, \ldots, W.$$

con il vincolo su cui fare l'analisi parametrica

$$U - L \leq \epsilon.$$

Le prime iterazioni dell'analisi parametrica danno il seguente risultato:

ϵ	z	Costo ridotto
0	577.63307	
		-142.10526
0.00521	576.89325	
		-141.96389
0.00557	576.84189	
		-141.86651
0.00573	576.81871	