

## Esercizio 1: Portavalori

Poiché il problema richiede di decidere quali furgoni e quali guardie utilizzare, il modello include una variabile binaria per ogni furgone e una variabile binaria per ogni guardia. Indichiamo con  $y(f)$  la variabile di ogni furgone  $f=1..3$  e con  $x(g)$  la variabile per ogni guardia  $g=1..3$ .

Per esprimere i costi è necessario tenere conto sia del tempo di viaggio che del tempo di caricamento. Il primo è fisso, il secondo dipende da quanto tempo impiegano le guardie a caricare i valori. Il costo dovuto al tempo di viaggio è quindi esprimibile in modo semplice con una funzione lineare, poiché è il prodotto del tempo di viaggio dato per la variabile binaria corrispondente al furgone o alla guardia. Il costo dovuto al tempo di caricamento invece sarebbe espresso dal prodotto tra la variabile binaria ed il tempo di caricamento che però è variabile. **Ciò darebbe luogo ad una funzione obiettivo non-lineare. Per evitare la non-linearità occorre quindi usare tante variabili quante le guardie e i furgoni, che rappresentano ciascuna il tempo impiegato da quella guardia e da quel furgone per le operazioni di caricamento.** Indichiamo tali variabili con  $tempof(f)$  per ogni furgone  $f=1..3$  e con  $tempog(g)$  per ogni guardia  $g=1..3$ . Detto  $time$  il tempo complessivo impiegato dalle guardie e dai furgoni impiegati, bisogna imporre che  $tempof(f)$  e  $tempog(g)$  siano uguali a  $time$  per tutti i furgoni e le guardie effettivamente impiegati e siano invece 0 per gli altri. Questo effetto si ottiene con i vincoli seguenti:

$$\begin{aligned}tempof(f) &\geq time - MaxTime(1 - y(f)) \quad \forall f \\tempog(g) &\geq time - MaxTime(1 - x(g)) \quad \forall g\end{aligned}$$

Infatti, per  $x=0$  o per  $y=0$  il vincolo diventa ridondante (scegliendo un valore di  $MaxTime$  grande abbastanza) e la corrispondente variabile  $tempof$  (o  $tempog$ ) resta vincolata inferiormente solo dalla condizione di non-negatività. Così si ottiene di consentire il valore 0 per il tempo di caricamento di furgoni e guardie non utilizzati. Quando invece  $x=1$  o  $y=1$ , allora il vincolo impone che  $tempof$  (o  $tempog$ ) sia almeno pari a  $time$ .

Un valore “abbastanza grande” di  $MaxTime$  è dato dal rapporto tra la quantità da caricare e la minima velocità di caricamento delle guardie.

Per definire  $time$  occorre considerare la capacità di caricamento totale delle guardie. Indicando con  $v(g)$  la velocità di caricamento di ogni guardia  $g=1..3$  e con  $Q$  la quantità totale da caricare, si potrebbe definire direttamente

$$time * \sum_{g=1}^3 (x(g) * v(g)) = Q$$

ma anche in questo caso otterremmo un vincolo non-lineare. Per evitarlo si può introdurre una variabile, che indichiamo con  $n(g)$ , che rappresenta la quantità caricata da ogni singola guardia, e poi imporre i vincoli “min-max”:

$$time \geq \frac{n(g)}{v(g)} \quad \forall g=1..3$$

e

$$\sum_{g=1}^3 n(g) = Q$$

L'effetto è quello di ripartire  $Q$  in tante quantità  $n(g)$  in modo da minimizzare il massimo rapporto  $n(g)/v(g)$ . Ovviamente la minimizzazione del massimo rapporto si ottiene ripartendo le quantità  $n(g)$

in modo che i rapporti  $n(g)/v(g)$  risultino tutti uguali (e tutti uguali a *time*). Il tutto si ottiene usando solo vincoli lineari.

Per evitare che sia assegnata una quantità  $n(g)$  positiva ad una guardia  $g$  non utilizzata, bisogna aggiungere vincoli del tipo:

$$n(g) \leq Q * x(g) \quad \forall g=1..3$$

Per completare il modello bisogna anche imporre che la capacità dei veicoli scelti sia sufficiente

$$\sum_{f=1}^3 (cap(f) * y(f)) \geq Q$$

e che il numero di guardie, che devono guidare, non sia inferiore al numero di veicoli:

$$\sum_{g=1}^3 x(g) \geq \sum_{f=1}^3 y(f)$$

Il modello risultante è di PLI ed è riportato nel file Lingo PORTAVAL.LG4. La soluzione ottima è nel file PORTAVAL.LGR. Nel caso di formulazione non-lineare, non si avrebbe la garanzia di ottimalità del minimo locale calcolato.