

Esercizio 1: Sudoku

Una soluzione del gioco consiste in un assegnamento di valori interi alle celle di una matrice. Per imporre che i valori compaiano una e una sola volta è opportuno rappresentare la soluzione come un assegnamento binario tra le celle e le cifre decimali. Si usano perciò variabili binarie di assegnamento con tre indici, uno per la riga, uno per la colonna e uno per la cifra decimale.

Indichiamo con “macro-riga” e “macro-colonna” l’insieme di tre righe o tre colonne adiacenti (due nel nostro esempio su scala ridotta), le cui intersezioni definiscono i riquadri nei quali le cifre devono comparire esattamente una volta.

Non c’è funzione obiettivo poiché il problema consiste nel trovare una soluzione ammissibile, non nell’ottimizzare.

I vincoli di assegnamento impongono che:

- per ogni riga e per ogni colonna esista una cifra assegnata;
- per ogni riga e per ogni cifra esista una colonna assegnata;
- per ogni colonna e per ogni cifra esista una riga assegnata;
- per ogni riquadro (coppia macro-riga/macro-colonna) e per ogni cifra esista una posizione assegnata tra quelle comprese nel riquadro.

I primi tre insiemi di vincoli sono molto facili da scrivere. Nella sintassi di Lingo:

```
@for(riga(i): @for(colonna(j): @sum(cifra(k): x(i,j,k)) =1));  
@for(riga(i): @for(cifra(k): @sum(colonna(j): x(i,j,k)) =1));  
@for(colonna(j): @for(cifra(k): @sum(riga(i): x(i,j,k)) =1));
```

Il quarto insieme di vincoli presenta qualche piccola difficoltà tecnica in più, perché occorre identificare quali siano le righe e le colonne che appartengono rispettivamente ad ogni macro-riga e macro-colonna. L’indice i indica righe della macroriga ii (quando sia i che ii partono da 1) se cade tra $(ii-1)*N+1$ e $ii*N$, dove N vale 3 nel sudoku normale e 2 nel nostro esempio ridotto. Idem per le colonne.

```
@for(cifra(k):  
  @for(macroriga(ii):  
    @for(macrocolonna(jj):  
      @sum(riga(i) | ((ii-1)*2 #LT# i) #AND# (i #LE# ii*2):  
        @sum(colonna(j) | ((jj-1)*2 #LT# j) #AND# (j #LE# jj*2): x(i,j,k)  
          )  
      ) = 1  
    )  
  )  
);
```

Infine bisogna fissare ad 1 le variabili di assegnamento che corrispondono ai valori dati. Nel nostro caso:

$$x(1,1,3)=x(1,4,2)=x(2,2,1)=x(3,4,1)=x(4,2,3)=1$$

Il modello di PLI risultante è nel file Lingo SUDOKU.LG4 e la soluzione è nel file SUDOKU.LGR.