Esercizio 1: Tripartizione

Il problema richiede di determinare tre rette nel piano ed il loro punto comune di intersezione. Servono quindi 3 variabili continue e libere *a(r)*, *b(r)* e *c(r)* che rappresentano i coefficienti dell'equazione *ax+by+c=0* per ogni retta *r*. Affinché tali variabili assumano valori che rappresentano effettivamente l'equazione di una retta, occorre che non siano tutti e tre nulli. Ciò si può imporre con la condizione di normalizzazione *a(r)^2 + b(r)^2 = 1* per ogni retta *r*.

Per rappresentare il punto *P* di intersezione usiamo altre due variabili continue e libere, x_P e y_P e imponiamo che $a(r)\ x_P + b(r)\ y_P + c(r) = 0$ per ogni retta *r*.

Per imporre che le tre rette partizionino come richiesto i tre sottinsiemi di punti, bisogna poi imporre che le coordinate dei punti, sostituiti nell'equazione delle rette producano alori sempre non positivi in un caso e sempre non negativi nell'altro, il che equivale ad imporre che tutti i punti di un sottinsieme cadano da un lato della retta e tutti i punti dell'altro sottinsieme cadano dall'altro lato. Per ogni retta sono solo due i sottinsiemi interessati; i punti dle terzo sottinsieme possono quindi cadere da entrambe i lati indifferentemente. Imponiamo quindi per ogni retta *r* i vincoli:

a(r) x(i) + b(r) y(i) + c(r) <= 0 per tutti i punti *(x(i),y(i))* del sottinsieme *r*
a(r) x(i) + b(r) y(i) + c(r) >= 0 per tutti i punti *(x(i),y(i))* del sottinsieme *r+1*

L'indice *r+1* nell'espressione precedente va calcolato modulo 3, ossia *r mod 3 + 1*, in modo che il suo valore sia sempre compreso tra 1 e 3.

Per quanto riguarda la funzione obiettivo, ne vengono proposte due:

a) il più possibile vicino all'origine degli assi Cartesiani: si tratta in tal caso di minimizzare la funzione x_P^2 + y_P^2
b) il più lontano possibile dall'origine degli assi Cartesiani: in tal caso bisogna massimizzare la stessa funzione.

I casi indicati dalle lettere (c) e (d) non sono funzioni obiettivo, bensì vincoli sul dominio consentito per le variabili x_P e y_P:

c) all'interno di un quadrato di lato 2 con lati paralleli agli assi e centrato nell'origine degli assi. Questa condizione si traduce nei vincoli $-1<=x_P<=1$ e $-1<=y_P<=1$.
d) all'esterno del quadrato suddetto. Questa condizione crea un "buco" nella regione ammissibile, che diviene perciò non convessa. E' possibile imporre questi vincoli disgiuntivi con opportune variabili binarie z, una per ciascun dei 4 vincoli elencati al punto (c):

$x_P<=-1 +M\ z1$
$x_P>= 1 \ -M\ z2$
$y_P<=-1 +M\ z3$
$y_P>= 1 \ -M\ z4$

Ognuno dei vincoli impone che il punto *P* sia fuori dal quadrato in una delle 4 direzioni possibili, quando la corrispondente variabile binaria *z* vale 0. Quando invece *z=1* il vincolo è sempre soddisfatto indipendentemente dalla posizione di *P*, se *M* è una costante abbastanza grande. La condizione aggiuntiva che almeno uno dei 4 vincoli deve risultare vero senza il termine con *M* è quindi: *z1+z2+z3+z4 <= 3.*

Il problema è chiaramente di programmazione non-lineare. Tranne che nel caso (b) e (d), è convesso. Nel caso (b) non è convesso a causa della funzione obiettivo, nel caso (d) non è convesso a causa dei vincoli.

Il modello è nel file Lingo PUNTI.LG4. Le soluzioni sono nei files PUNTI A.LGR e PUNTI B.LGR per le due distinte funzioni obiettivo. I files PUNTI C.LGR e PUNTI D.LGR contengono le soluzioni con i vincoli (c) e (d) rispettivamente calcolate in entrambi i casi usando la funzione obiettivo (b).