Ordini. L'ufficio marketing di un'azienda ha ricevuto diversi ordini dai suoi clienti. Ogni ordine implica un certo tempo di lavorazione noto. Gli ordini possono essere prodotti solo uno per volta. La produzione di ciascun ordine una volta iniziata non può essere interrotta. Si vuole determinare quale sia la sequenza migliore in cui effettuare la produzione dei vari ordini in modo da minimizzare: (a) il ritardo complessivo (cioè la somma di tutti gli eventuali ritardi rispetto alle scadenze richieste); (b) il ritardo massimo.

Formulare e classificare il problema e risolverlo con in dati del file ORDINI.TXT riportati nella tabella.

Discutere unicità e ottimalità della soluzione ottenuta.

Ordine	Tempo di lavorazione	Scadenza
1	24	50
2	12	50
3	30	90
4	15	70
5	18	50
6	7	80
7	8	100
8	15	90
9	14	120
10	22	150

Soluzione. Si tratta di un problema di scheduling su singola macchina. Per imporre che le lavorazioni non si sovrappongano si possono utilizzare vincoli disgiuntivi. Indicando con la variabile t_i l'istante di inizio della lavorazione $i = 1..N$ e con il dato p_i il tempo di lavorazione per la lavorazione $i = 1..N$, si ha:

$$t_i + p_i \leq t_j + Mx_{ji} \quad \forall i \neq j,$$

dove M indica una costanze abbastanza grande da rendere ridondanti i vincoli, mentre ogni variabile binaria x_{ij} indica se la lavorazione i precede (1) o no (0) la lavorazione j.

Per ogni coppia di ordini esattamente una delle due precedenze possibili si deve verificare:

$$x_{ij} + x_{ji} = 1 \quad \forall i \neq j.$$

Il ritardo di ogni ordine $i = 1..N$ è indicato da una variabile r_i non-negativa. I vincoli impongono

$$r_i \geq t_i + p_i - d_i \quad \forall i = 1..N,$$

dove d_i indica la scadenza (*due date*) dell'ordine $i = 1..N$.

Il primo obiettivo è la minimizzazione del ritardo complessivo:

$$\text{minimize } z_1 = \sum_{i=1}^{N} r_i.$$

Il secondo obiettivo è la minimizzazione del ritardo massimo:

$$\text{minimize } z_2 = R \quad \text{s.t. } R \geq r_i \quad \forall i = 1..N.$$

Il modello è contenuto nel file Ordini.mod.

Un secondo modo di formulare il problema, senza necessità di ricorrere a costanti per attivare e disattivare vincoli, è quello di usare una matrice binaria di assegnamento tra l'insieme degli ordini e quello delle posizioni. Si usano quindi variabili binarie y_{jk} per indicare che il job j è schedulato in posizione k.

In questo modello bisogna imporre anzitutto i vincoli di assegnamento:

$$\sum_{k=1}^{N} y_{jk} = 1 \quad \forall j = 1..N$$

$$\sum_{j=1}^{N} y_{jk} = 1 \quad \forall k = 1..N.$$

Quindi lo start time di ogni job in posizione k può essere calcolato come segue:

$$t_k = \sum_{j=1}^{N} \sum_{h=1}^{k-1} p_j y_{jh} \quad \forall k = 1, \ldots, N.$$

Il suo completion time è

$$c_k = t_k + \sum_{j=1}^{N} y_{jk} p_j \quad \forall k = 1, \ldots, N$$

mentre la sua due date è

$$d'_k = \sum_{j=1}^{N} y_{jk} d_j \quad \forall k = 1, \ldots, N.$$

Quindi il ritardo del job in posizione k è dato da

$$r_k \geq c_k - d'_k$$

e i due obiettivi sono

$$\text{minimize } z_1 = \sum_{k=1}^{N} r_k$$

e

$$\text{minimize } z_2 = R \quad \text{s.t. } R \geq r_k \quad \forall k = 1..N.$$

In entrambi i casi il modello risultante è di PLI. La soluzione è garantita essere ottima, non necessariamente unica.