Marketing.

Per definire il piano di produzione del prossimo trimestre, il direttore di produzione di un'industria manifatturiera conosce l'insieme dei prodotti che può produrre, le quantità disponibili di materie prime e componenti ed i consumi unitari di materie e di componenti per ogni prodotto. Egli desidera massimizzare il valore di mercato della produzione complessiva del trimestre.

Gli analisti del settore vendite gli comunicano che il valore di mercato dei prodotti non è costante ma dipende dalle quantità prodotte. Dalle loro stime, tale valore è approssimabile con una funzione lineare a tratti: le prime unità di prodotto immesse sul mercato hanno un prezzo di vendita alto; al di sopra di una data quantità posta in vendita, il prezzo di vendita delle successive unità di prodotto assume un altro valore costante, più basso del precedente, e così via più volte. Essi gli comunicano quindi per ogni prodotto gli intervalli della quantità di produzione a cui corrisponde un prezzo costante ed il prezzo corrispondente.

Formulare il problema, classificarlo e risolvere l'esempio descritto nel file MARKETING.TXT.

Discutere ottimalità e unicità della soluzione ottenuta.

Quali risorse sono scarse, all'ottimo?

Se fosse possibile acquistare ulteriori componenti o materie prime, per quali di esse ciò sarebbe conveniente, a quale prezzo e in che quantità?

Dati.

I prodotti sono 3 (P1, P2, P3), le materie prime sono 2 (M1, M2), i componenti sono 2 (C1, C2).

Risorsa	Quantità
M1	37000
M2	32000
C1	40000
C2	47000

Tabella 1: Quantità di materie prime e componenti disponibili [Kg].

	P1	P2	P3
M1	18	12	12
M2	15	12	11
C1	18	18	13
C2	25	18	12

Tabella 2: Consumi di componenti e materie prime (Kg per unità di prodotto).

	Quantità	Prezzo
P1	0- 200	1000
	200- 500	900
	500-	750
P2	0- 150	800
	150- 600	750
	600-	500
P3	0- 50	700
	50- 150	650
	150- 300	600
	300-	400

Tabella 3: Prezzi di vendita dei prodotti [€].

Soluzione commentata.

Il problema è una variante del classico problema del mix produttivo ottimale, con un ricavo unitarioo desccritto da una funzione lineare a tratti anziché da un unico prezzo costante.

Dati.

Definiamo anzitutto un insieme indicizzato di prodotti $P = 1, \ldots, 3$ e un insieme indicizzato di risorse $R = 1, \ldots, 4$.

Indichiamo con b_i la quantità disponibile per ogni risorsa $i \in R$, e con a_{ij} il consumo unitario di ogni risorsa $i \in R$ per ogni prodotto $j \in P$.

Indichiamo con K_j l'insieme indicizzato di intervalli nei quali il prodotto $j \in P$ ha un dato prezzo: per ogni intervallo $k \in K_j$, indichiamo con q_{jk} la quantità minima e con c_{jk} il prezzo corrispondente.

Variabili.

Il problema si può formulare con una variabile non-negativa x_{jk} per ogni intervallo ed ogni prodotto: essa indica la quantità di prodotto $j \in P$ che viene venduto nell'intervallo $k \in K_j$.

Stando alla descrizione del problema, le quantità x_{jk} dovrebbero essere considerate intere. Tuttavia, visti i numeri in gioco, è evidente che approssimazioni inferiori all'unità sono perfettamente accettabili in pratica e quindi il problema si può risolvere con variabili continue, con il vantaggio di poter eseguire l'analisi post-ottimale come richiesto.

Vincoli.

Come nel problema del mix produttivo ottimale si impone un vincolo sul massimo consumo ammesso per ogni risorsa. La produzione totale di ogni prodotto $j \in P$ si ottiene sommando su tutti gli intervalli $k \in K_j$.

$$\sum_{j \in P} a_{ij} \left(\sum_{k \in K_j} x_{jk} \right) \leq b_i \quad \forall i \in R.$$

Poiché l'obiettivo consiste nel massimizzare i ricavi e poiché i prezzi sono decrescenti, l'ottimizzazione porta a saturare gli intervalli più bassi prima di quelli più alti. Perciò basta imporre che nel generico intervallo $k \in K_j$ non sia possibile vendere una quantità di prodotto $j \in P$ superiore all'ampiezza dell'intervallo stesso, cioè alla differenza $q_{jk+1} - q_{jk}$. Tale vincolo non si impone sull'ultimo intervallo per ogni prodotto.

$$x_{jk} \leq q_{jk+1} - q_{jk} \quad \forall j \in P,\ \forall k \in K_j : k < |K_j|.$$

Obiettivo.

L'obiettivo consiste nel massimizzare i ricavi che si ottengono dalle quantità di prodotto, ciascuna al suo prezzo.

$$\text{maximize } z = \sum_{j \in P} \sum_{k \in K_j} c_{jk} x_{jk}.$$

Il problema è di PL e la soluzione è ottima e unica. Infatti nessuna variabile fuori base ha costo ridotto nullo.

Analisi parametrica.

Le uniche risorse scarse sono la 3 e la 4. Sulle prime due non ha senso fare alcuna analisi, perché non è mai conveniente acquistare unità di materia prima ulteriori.

Per la risorsa 3 (C1), è conveniente acquistare fino a 397.89474 chilogrammi aggiuntivi ad un prezzo massimo di 9.17431 €/Kg. Non è conveniente acquistare di più, poiché oltre tale soglia, la risorsa non è più scarsa.

Per la risorsa 4 (C2), è conveniente acquistare fino a 2538.88889 chilogrammi aggiuntivi ad un prezzo massimo di 23.39450 €/Kg. Non è conveniente acquistare di più, poiché oltre tale soglia, la risorsa non è più scarsa.