Esercizio 2: Botanica al Polo

Le variabili del problema sono 7 (*xa, xb, xc, xd, xe, xf, xg)* e corrispondono alla quantità di piante da coltivare per ciascuno dei 7 tipi. Tale quantità è misurata dall'area dedicata alla coltivazione di ogni pianta (variabile continua).
Le risorse sono anch'esse variabili (*A, S, C, L, V*) e sono rappresentate dai 5 fattori nutritivi necessari (è anche possibile non usare le 5 variabili e esprimere le quantità di risorse direttamente in funzione della quantità di piante).
Nel file BOTANICA.LTX è contenuta una formulazione con 12 variabili, 7 per le quantità di piante e 5 per le quantità di risorse.

La **funzione obiettivo** rappresenta il profitto da massimizzare ed è data dalla differenza tra ricavi e costi. I ricavi sono dati da una combinazione lineare delle 7 variabili relative alle piante, mentre i costi sono dati da una combinazione lineare delle 5 variabili relative alle risorse.

```
max 6000 xa + 4000 xb + 2000 xc + 18000 xd + 100 xe + 500 xf + 7000 xg - 1 A - 4 S -
1 C - 1.5 L - 3.6 V
```

Ci sono 5 **vincoli** di disuguaglianza che mettono in relazione ciascuna delle 5 quantità di risorse con il fabbisogno complessivo delle piante.

```
Acqua)15 xa + 32 xb + 1 xc + 20 xd + 1.5 xe + 4 xf + 14 xg - A <= 0  !litri
Sali)600 xa + 120 xb + 50 xc + 9000 xd + 150 xe + 300 xf + 0 xg - S <= 0 !grammi
Calore)300 xa + 480 xb + 50 xc + 5000 xd + 0 xe + 100 xf + 500 xg - C <= 0 !calorie
Luce)3000 xa + 120 xb + 50 xc + 45000 xd + 250 xe + 200 xf + 3000 xg - L <= 0 !minuti
Vitamine)45 xa + 20 xb + 24 xc + 300 xd + 0 xe + 7.5 xf + 180 xg - V <= 0  !grammi
```

I vincoli potrebbero anche essere di uguaglianza dato che ovviamente non conviene usare più risorse di quanto richiesto.
Il fabbisogno si ricava dalla tabella piante/sostanze del file BOTANICA.TXT, con l'accorgimento di moltiplicare i coefficienti relativi ad ogni pianta per il numero di giorni necessari al tipo di pianta per crescere. Infatti i coefficienti della tabella indicano il fabbisogno giornaliero, non il fabbisogno totale.

Un altro vincolo di disuguaglianza limita l'area complessiva.

```
sup_tot) xa + xb + xc + xd + xe + xf + xg <= 500  ! mq
```

I vincoli sulla minima e massima superficie da assegnare ad ogni tipo di pianta sono espressi come limiti superiori e inferiori alle 7 variabili corrispondenti.

```
slb xa 5
sub xa 100
slb xb 5
sub xb 100
slb xc 5
sub xc 100
slb xd 5
sub xd 100
slb xe 5
sub xe 100
slb xf 5
sub xf 100
slb xg 5
sub xg 100
```

Questi vincoli possono anche essere scritti in questo modo :

```
xa <= 100
xb <= 100
xc <= 100
xd <= 100
xe <= 100
xf <= 100
xg <= 100

xa >= 5
xb >= 5
xc >= 5
xd >= 5
xe >= 5
xf >= 5
xg >= 5
```

Si tratta quindi di un problema di PL con 12 variabili continue e solo 6 vincoli (più i 14 limiti inferiori e superiori).

All'ottimo si può facilmente *prevedere* che i 12 vincoli attivi (tanti quante le variabili del problema) saranno i 5 vincoli sulle risorse (che infatti potrebbero essere di uguaglianza) e il vincolo sull'area totale, se esistono almeno 5 piante convenienti, più altri 6 vincoli: perciò 6 piante saranno coltivate in misura massima o minima e un tipo sarà coltivato in quantità intermedia. Se invece sono meno di 5 le piante convenienti, la superficie totale non sarà usata tutta (vincolo non attivo) e saranno attivi 7 vincoli sui limiti superiori e inferiori (almeno 5 saranno inferiori).

La soluzione (file BOTANICA.OUT) mostra che solo tre piante (Begonia, Carota e Giaggiolo) sono convenienti e quindi ne viene coltivata l'estensione massima possibile, mentre delle altre 4, non convenienti, viene coltivata l'estensione minima possibile.

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
XA	5.000000	1377.000000
XB	100.000000	-2756.000000
XC	100.000000	-1587.599976
XD	5.000000	91600.000000
XE	5.000000	876.500000
XF	5.000000	1131.000000
XG	100.000000	-1338.000000

In tale condizione il vincolo sull'area totale non è attivo (infatti c'è uno scarto di 180 mq).

```
SUP_TOT)        180.000000          0.000000
```

RISPOSTE:

1) Nella formulazione non si è tenuto conto del costo fisso iniziale di 50mila Euro. Poichè il valore ottimo è pari a 93237.5 Euro, l'esperimento dà un profitto maggiore di 50K Euro e quindi è vantaggioso.

```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE
1)      93237.50
```

2) Non conviene espandere l'area coltivabile oltre i 500 mq poichè non si tratta di una risorsa scarsa (la variabile di surplus non è uguale a zero).

```
SUP_TOT)        180.000000           0.000000
```

3) La convenienza o meno delle piante si vede dai coefficienti di costo ridotto. Essi dicono di quanto diminuirebbe la funzione obiettivo (problema di massimizzazione) all'aumentare della coltivazione della pianta corrispondente. Le piante con costo ridotto positivo sono quindi non convenienti (e infatti sono coltivate al minimo), mentre quelle con costo ridotto negativo sono convenienti (e infatti sono coltivate al massimo). La più conveniente è la Begonia, la meno conveniente è il Dattero.

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
XA	5.000000	1377.000000
XB	**100.000000**	**-2756.000000**
XC	100.000000	-1587.599976
XD	5.000000	91600.000000
XE	5.000000	876.500000
XF	5.000000	1131.000000
XG	100.000000	-1338.000000

4) La proposta del botanico giapponese è ovviamente vantaggiosa, ma deve essere valutata quantitativamente. Per semplicità, invece di considerare il nuovo sale come se costasse un quarto ma rendesse la metà, lo si può considerare come se costasse la metà e avesse lo stesso rendimento. La quantità di sale richiesta è pari a 67250 grammi.

```
S      67250.000000          0.000000
```

Il risparmio sarebbe di 2 Euro al grammo (2 Euro/g anziché 4). Perciò il risparmio complessivo sarebbe di 134500 Euro.

5) Per rispondere all'ultima domanda, occorre sapere quale variazione dovrebbe subire il coefficiente della variabile *xf* nella funzione obiettivo per provocare un cambio di base ottima: ovviamente il cambio di base consisterà nel coltivare le fragoline di bosco in quantità massima anziché minima, poiché ci saranno quattro piante convenienti (anziché le attuali tre) e quindi tutte e quattro potranno essere coltivate in quantità massima. L'analisi di sensitività mostra che il coefficiente suddetto, che vale 500, dovrebbe subire un incremento pari a 1131 unità (Euro/mq).

```
XF        500.000000        1131.000000          INFINITY
```

Perciò il valore richiesto è 1631 Euro/mq.

N.B. Se le piante convenienti fossero già state 4, al cambiamento di base non sarebbe diventato attivo il vincolo *xf<=100*, bensì il vincolo sul totale di area coltivabile. Perciò la soluzione ottima sarebbe diventata quella con 4x100mq di piante convenienti, 2x5mq di piante non convenienti e i rimanenti 90mq di Fragoline di bosco. Perché sia ottima una soluzione che preveda la coltivazione di 100 mq di Fragoline di bosco sarebbe necessario un secondo cambio di base (cioè un ulteriore incremento del prezzo delle Fragoline di bosco), per far diventare le Fragoline di bosco più convenienti della meno conveniente delle altre 4 piante convenienti.