

## Esercizio 1: Bilanciamento containers

Il problema descritto è un problema di flusso a costo minimo definito su un grafo con tanti nodi quanti i porti e tanti archi bidirezionali quante le tratte. Le variabili sono quindi variabili di flusso, una per ogni arco e per ogni direzione (quindi  $14 \times 2 = 28$  variabili). Non è necessario imporre che siano intere poiché, trattandosi di un problema di flusso, ciò risulta automaticamente soddisfatto dalla soluzione ottima, stante il fatto che i dati del problema sono interi.

Il ribilanciamento si ottiene imponendo che la differenza tra il flusso entrante ed il flusso uscente in ogni nodo sia pari alla quantità (positiva o negativa) desiderata.

La funzione obiettivo è semplicemente la somma di tutte le variabili di flusso, pesate ciascuna con il proprio coefficiente di costo.

Il problema si risolve indipendentemente per i containers di tipo A e di tipo B, dato che le capacità e gli sbilanciamenti sono distinti e non c'è alcuna relazione tra le soluzioni dei due sottoproblemi. E' anche possibile risolvere entrambi i problemi simultaneamente minimizzando il costo complessivo, dato dalla la somma dei due termini di costo relativi ai containers dei due tipi. In questo caso il problema ha 56 variabili (28 per ogni tipo di container).

Per imporre i vincoli di capacità è possibile usare vincoli propriamente detti oppure anche *upper bounds* sul valore delle variabili di flusso. Si può osservare che il flusso su ogni arco e per ogni tipo di container può avvenire in al massimo una direzione (non sarebbe conveniente trasportare container avanti e indietro tra due porti); quindi ogni coppia di variabili di flusso può essere sostituita da una sola variabile, che può assumere valori sia positivi che negativi limitati inferiormente e superiormente dalla capacità dell'arco presa con segno negativo e positivo. Questo osservazione consente di dimezzare il numero delle variabili necessarie.

Il modello risultante è di programmazione lineare. Il modello LINDO è nel file BILANC-A.LTX e la soluzione ottima nel file BILANC-A.OUT.

- 1) Per rispondere a questa domanda è possibile inserire nel modello ulteriori variabili che rappresentano la quantità di containers noleggiati in ogni porto con carenza di containers (sbilanciamento negativo). Tutte le variabili compaiono nella funzione obiettivo con il costo di noleggio dato e ciascun compare nel vincolo del porto corrispondente, contribuendo ad aumentare il flusso entrante. Se alcuni containers vengono noleggiati, la domanda diventa inferiore all'offerta e quindi un ugual numero di containers restano in eccedenza in qualche porto. Bisogna quindi sostituire i vincoli di uguaglianza del modello precedente con vincoli di disuguaglianza: per i porti con carenza di containers bisogna imporre che il flusso netto entrante più la quantità noleggiata siano maggiore uguali al fabbisogno; per i porti con eccedenza bisogna imporre che il flusso netto uscente sia minore o uguale all'eccedenza. Il modello Lindo è nel file BILANC-B.LTX.
- 2) Anche aumentare la capacità di una tratta significa modificare il termine noto di un vincolo, per renderlo meno stringente. Le tratte su cui ciò può essere conveniente sono quelle il cui vincolo di capacità è attivo. Il costo massimo che l'impresa dovrebbe essere disposta a pagare per aumentare lo spazio è pari al prezzo-ombra del vincolo. Le uniche tratte con un vincolo di capacità attivo sono quelle da Alessandria ad Istanbul (flusso B pari a 20) e da Alessandria a Beirut (flusso B pari a 15), con prezzi-ombra pari rispettivamente a 30 e 90.