Swappa : Uni / Ricerca Operativa - Analisi post-ottimale

Torna alla pagina di Ricerca Operativa

:: Ricerca Operativa - Analisi post-ottimale ::

Quasi tutte le immagini di questa pagina sono prese dalle slide del prof Giovanni Righini

Cos'è

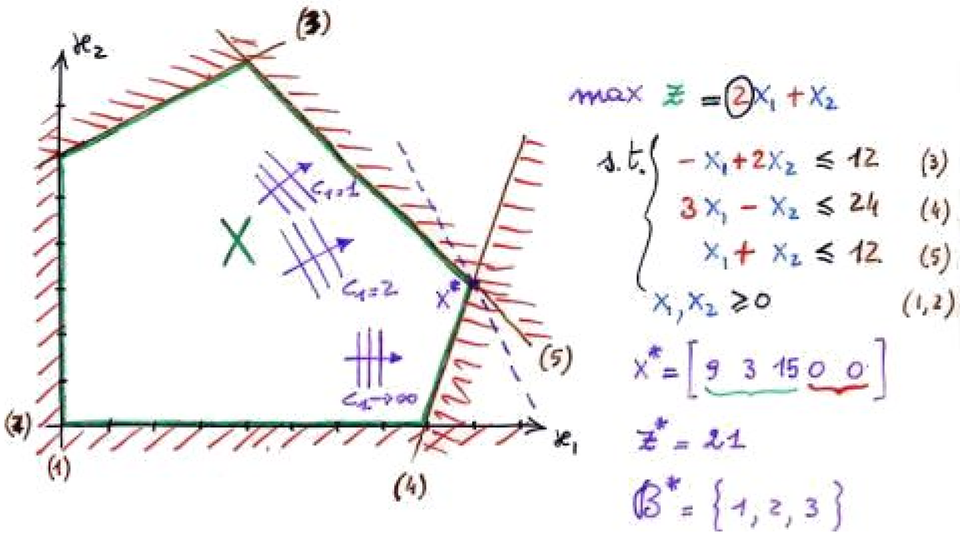
Il nome lascia poco all'immaginazione: l' **analisi post-ottimale** viene effettuata solo dopo aver trovato la soluzione ottima. Ma se l'abbiamo già trovata che altro dobbiamo calcolare a fare? Perché prima di tradurre la soluzione ottima in una decisione (assumendoci dunque una responsabilità) è opportuno studiare la *robustezza del modello*, ovvero valutare quanto cambierebbero i risultati se cambiassero i dati. Ricordiamo infatti che questi ultimi derivano da misurazioni, stime o previsioni, che dunque nel tempo potrebbero diventare più accurate o rivelarsi errate. I dati sono la matrice `A`, il vettore dei termini noti `b` e i coefficienti di costo ridotto C^T.

Andando al sodo, quello che vogliamo studiare con l'analisi post-ottimale sono gli intervalli di variazione dei costi ridotti c_j o dei termini noti b_i entro cui la soluzione ottima rimane tale. Questo studio prende il nome di **analisi di sensitività**.
Perché la soluzione rimanga ottima dobbiamo garantire due condizioni:

- *ammissibilità* (variabili di base non negative). Dipende solo dai termini noti `b`
- *ottimalità* (costi ridotti opposti in segno alla direzione di ottimizzazione). Dipende solo dai costi ridotti `c`

Esempio

Consideriamo il seguente problema:



Cambiamo uno dei coefficienti della funzione obiettivo e facciamolo variare finché non cambia la base ottima `B = {1,2,3}`. Interveniamo ad esempio sul "`2`" di x_1, portandolo progressivamente a "`2,1`", "`2,2`", "`2,3`", e così via. La prima cosa che notiamo è che i valori dei coefficienti non influenzano in alcun modo il sistema dei vincoli, mentre hanno grande impatto sull'orientamento delle curve di livello: se il valore aumenta la curva ruota in senso orario, e viceversa.
Tornando al nostro caso, potremo continuare ad incrementare il coefficiente di x_1 finché ci pare, dato che all'infinito la curva di livello assume una posizione verticale e dunque la base non cambia (il vincolo di x_4 è infatti leggermente inclinato verso destra). Nota bene però: la base ottima e le x non cambiano, ma la soluzione sì! Non dimentichiamo che stiamo modificando i coefficienti della funzione obiettivo!
Continuiamo a considerare il coefficiente di x_1 e proviamo stavolta a diminuirlo. Possiamo andare avanti finché vogliamo? No, perché ruotando in senso antiorario arriveremo ad un punto in cui le curve di livello

diventeranno parallele al vincolo di x_5 (esattamente quando $C_1 = 1$), e se ruotassero anche solo di un millimetro la base cambierebbe perché diventerebbe ottimo il vertice in alto.

Variazione dei costi ridotti

Distinguiamo ora le conseguenze della variazione dei costi ridotti e di quelle dei termini noti.
Cominciamo dai primi.
Se *j* appartiene alla base B, allora la variazione dei valori del coefficiente C_j è compresa tra i valori minimi e massimi riportati nella seguente formula:

$$\max\left\{-\infty, \max_{j\in N}\left\{\frac{-c_j^*}{a^*_{r_j j}\,(+)}\right\}\right\} \leq \Delta c_j \leq \min\left\{\infty, \min_{j\in N}\left\{\frac{-c_j^*}{a^*_{r_j j}\,(-)}\right\}\right\}$$

SOLO QUELLI >0

SOLO QUELLI <0

Dove:
- i valori con asterisco sono quelli che si leggono dal tableau corrispondente alla soluzione ottima
- r_j indica la riga su cui è in base la variabile j
- la parte sinistra della formula concorre a definire il valore minimo, e considera solo le colonne che hanno coefficiente strettamente positivo
- la parte destra concorre invece a definire il valore massimo, e considera solo le colonne con coefficienti strettamente negativi

Riportiamo l'esempio presente sulle slide:

$$\max z = -x_1 - x_2 - x_3$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = -8 \\ -x_2 + x_5 = -2 \\ x_1 + 4x_3 + x_6 = 8 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**->
tableau
->**

$-\frac{3}{2}$	$\frac{7}{8}$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0
2	$\frac{1}{2}$	0	0	1	-1	1
2	0	1	0	0	-1	0
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0

Cosa succede quando cambiamo x_1?
Ragioniamo: j = 1 appartiene a B? No! Quindi $\Delta c_1 \leq 7/8$.

Cosa succede se invece provo a cambiare il coefficiente di x_2?
j = 2 appartiene a B? Sì, e in particolare $r_j = 2$.
Quali sono i coefficienti strettamente positivi della riga 2 delle colonne fuori base?

$$\{j\in N : a^*_{r_j j} > 0\} = \emptyset$$

Nessuno.
E quali sono invece i coefficienti strettamente negativi della riga 2 delle colonne fuori base?

$$\{j\in N : a^*_{r_j j} < 0\} = \{5\}$$

Solo l'elemento della quinta colonna, che ha valore -1.

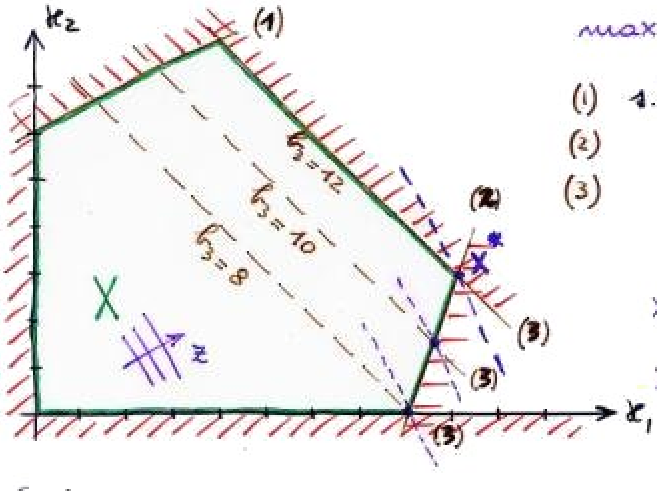
Quindi ho scoperto che:

$$-\infty \leq \Delta c_2 \leq -\frac{3/4}{-1} = \frac{3}{4}$$

cioè che il coefficiente di x_2 può decrescere finché vuole, ma può aumentare al massimo fino a 3/4 se non vogliamo cambiare basi.

Variazione del termine noto

Considerando il seguente caso di riferimento:



$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{array}{ll} (1) & \text{s.t.} \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 - x_2 \leq 24 \\ x_1 + x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \right. \\ (2) & \\ (3) & \end{array}$$

$$x^* = [9\ 3\ 15\ 0\ 0]$$

$$z^* = 21$$

$$B^* = \{1, 2, 3\}$$

Da un punto di vista geometrico, cambiare il termine noto b_3 significa traslare il vincolo x_3 verso il basso o verso l'alto a seconda che - rispettivamente - diminuiamo o aumentiamo il suo valore. La base ottima rimane sempre nell'intersezione tra i vincoli x_4 e x_5, ma spostando il vincolo 3 spostiamo anche lei, che continua a rimanere ottima finché non incontriamo una nuova intersezione.
Nell'esempio: se b_3 diminuisce, il vincolo 3 trasla verso il basso finché non incontra l'intersezione tra l'asse x e il vincolo di x_2, facendo diventare quest'ultimo attivo. Se invece b_3 aumenta, allora il vincolo 3 trasla verso l'alto finché non si arriva all'intersezione tra x_2 e x_1, attivando quest'ultimo.

Per quanto riguarda i valori, nel nostro caso la base rimane ottima per $8 <= b_3 <= 24$, ma la soluzione ottima cambia e insieme ad essa anche il sistema dei vincoli, quindi la regione ammissibile.

Spostando questi ragionamenti nel tableau otterremo qualcosa di simile a quanto avevamo visto per le variazioni dei costi ridotti. Abbiamo due casi: o spostiamo un vincolo che in quel momento è attivo, o ne spostiamo un altro che in quel momento non lo è. Consideriamoli separatamente:

- se b_i non è attivo, allontanandolo dalla regione ammissibile non cambia nulla, mentre se lo avviciniamo a un certo punto diventerà attivo. In formule:

$$\Delta b_i \geq -x^*_{c_i} \qquad c_i \text{ È LA COLONNA DELLA VAR. DI SLACK DEL VINCOLO } i.$$

dove c_i è la colonna della variabile di slack del vincolo i su cui sto facendo l'analisi

- se b_i è attivo avrò che:

$$\max\left\{-\infty, \max_i \left\{ \frac{-b^*_i}{a^*_{ic_i}} \right\}\right\} \leq \Delta b_i \leq \min\left\{\infty, \min_i \left\{ \frac{-b^*_i}{a^*_{ic_i}} \right\}\right\}$$

SOLO QUELLI >0   SOLO QUELLI <0

Partiamo dallo stesso tableau di prima:

$-3/2$	$7/8$	0	0	$1/4$	$3/4$	0
2	$1/2$	0	0	1	-1	1
2	0	1	0	0	-1	0
$3/2$	$1/8$	0	1	$-1/4$	$1/4$	0

- consideriamo la riga 3. La variabile di slack della riga è x_6, che è in base e dunque il vincolo non è attivo. Per capire di quanto posso variarlo senza che diventi attivo devo guardare il valore della variabile, quindi $\Delta b_3 >= -2$
- consideriamo ora il primo vincolo, che corrisponde alla variabile di slack x_4. Essendo questa fuori base allora il vincolo è attivo, quindi per avere informazioni sulle variazioni permesse noti dovrò guardare sulla quarta colonna gli elementi positivi e negativi del tableau:

$$\{i : a^*_{ic_i} > 0\} = \{1\}$$

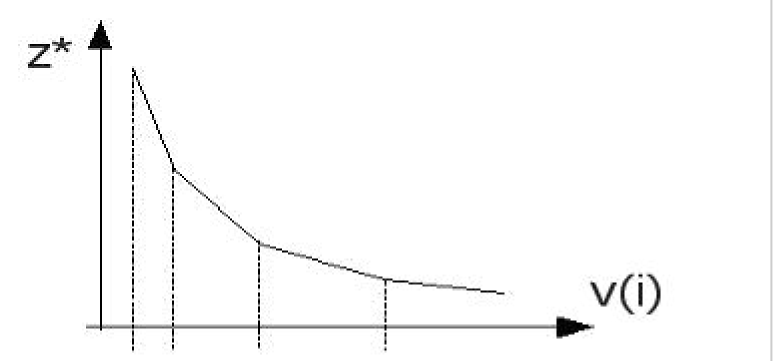
$$\{i : a^*_{ic_i} < 0\} = \{3\}$$

$$-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-b^*_1}{a^*_{14}} \leq \Delta b_1 \leq \frac{-b^*_3}{a^*_{34}} = \frac{-3/2}{-1/4} = 6$$

Analisi parametrica

L'analisi di sensitività ci dice qual è il range di variazione di coefficienti o termini noti entro cui non varia la base ottima, ma come facciamo a sapere cosa succede al di fuori di tale intervallo? Eseguiamo un' **analisi parametrica**, che ci permette di calcolare quanto varia il valore ottimo della funzione obiettivo al variare dei dati. Il risultato di questa attività è quasi sempre una funzione che lega il valore ottimo a un termine noto o a un coefficiente di costo ridotto. Con l'analisi parametrica potremo perciò identificare e modificare un vincolo e osservare come cambia la soluzione.

Come è fatta la funzione? Dato che il legame tra soluzione e coefficienti è di tipo lineare e che rimane tale indipendentemente dalla base, ne ricaviamo che a ogni range corrisponde un segmento di retta e quindi la funzione sarà lineare a tratti.



v(i) è il vincolo che stiamo facendo variare; z è l'ottimo*

Altre due considerazioni sulla funzione:

- ha la concavità rivolta sempre dalla stessa parte, proprio per come è realizzato il poliedro
- la proiezione di ogni tratto sull'asse x ha una sua base ottima, sempre diversa dalle altre

Ovviamente anche l' **analisi parametrica** è un tipo di analisi post-ottimale

---

Torna alla pagina di Ricerca Operativa