Лабораторная работа №1.

1. Построить численное решение задачи Коши на отрезке с различными шагами методом Эйлера (см. пример), модифицированным методом Эйлера (выбираем любую формулу) и разложением в ряд Тейлора.

2. Построить точное решение

3. Оценить погрешность вычислений.

ПРИМЕР

Рассмотрим задачу Коши

$$u' = \frac{1}{2}u + x, \tag{1}$$

$$u(0) = 0. \tag{2}$$

Построить ее численное решение на отрезке $[0,2]$ *по схеме Эйлера с шагами* $h_1 = 0.25$, $h_2 = 0.05$, $h_3 = 0.01$. *Сравнить результаты расчетов между собой и с аналитическим решением задачи*

$$u(x) = -2(x+2) + 4e^{\frac{1}{2}x}. \tag{3}$$

Результаты расчетов приведены в таблице 1.

Таблица 1

x_i	$h_1 = 0.25$	$h_2 = 0.05$	$h_3 = 0.01$	$u(x_i)$
0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,25	0,000000	0,025633	0,031182	0,032594
0,50	0,062500	0,120338	0,132903	0,136102
0,75	0,195313	0,293193	0,314530	0,319966
1,00	0,407227	0,554466	0,586674	0,594885
1,25	0,708130	0,915776	0,961355	0,972984
1,50	1,109146	1,390270	1,452190	1,468000
1,75	1,622789	1,992821	2,074604	2,095501
2,00	2,263138	2,740255	2,846068	2,873127

Здесь в первом столбце выписаны значения независимой переменной x с шагом $h_1 = 0.25$, в трех следующих столбцах - решения разностной задачи с шагами h_1, h_2, h_3. При этом результаты расчетов с шагами h_2 и h_3 в промежуточных точках x_i, которые не вошли в первый столбец, опущены. В последнем пятом столбце приведены для сравнения значения функции $u(x)$ (3), дающей аналитическое решение задачи. Из таблицы видно, как по мере уменьшения шага повышается точность. В то же время следует отметить, что даже при маленьком шаге $h_3 = 0.01$ метод не может обеспечить решению хорошую точность: ошибка в последней точке $x = 2$ составляет $z =$ -0.027059.

Результаты проведенных расчетов представлены также на рис. 1. На нем приведены три кривые, соответствующие численному решению задачи по схеме Эйлера с шагами h_1, h_2, h_3. При выбранном масштабе кривая III практически совпадает с графиком аналитического решения задачи (3) (пунктирная линия). Рисунок наглядно показывает повышение точности приближенного решения по мере уменьшения шага h.

Мы подробно разобрали метод Эйлера, поскольку на примере простой разностной схемы **Ошибка! Источник ссылки не найден.** он позволяет поставить и обсудить все основные вопросы численного решения задачи Коши методом конечных разностей. Однако следует отметить, что полученные в этом разделе результаты представляют прежде всего теоретический интерес. Для решения реальных задач разностную схему Эйлера обычно не применяют из-за ее низкой точности: погрешность с уменьшением h убывает как $O(h)$. В следующих разделах мы обсудим пути построения разностных схем более высокого порядка точности.

1.1. Повышение точности разностного метода.

Оценка погрешности решения через погрешность аппроксимации уравнения в методе Эйлера **Ошибка! Источник ссылки не найден.** приводит к вполне естественному выводу: чтобы повысить точность метода, нужно улучшить аппроксимацию дифференциального уравнения разностным. Рассмотрим возможные пути реализации этой идеи.

Предположим, что решение дифференциального уравнения $u(x)$ имеет производные достаточно высокого порядка и напишем для него разложение по формуле Тейлора

$$u_{i+1} = u(x_i + h) = u_i + u'(x_i)h + \frac{1}{2}u''(x_i)h^2 + \frac{1}{6}u'''(x_i)h^3 + \cdots. \quad (4)$$

Если его оборвать на члене порядка h и положить в соответствии с дифференциальным уравнением **Ошибка! Источник ссылки не найден.** $u'(x_i) = f(x_i, u_i)$, то мы придем к схеме Эйлера.

Сделаем следующий шаг. Оборвем разложение (4) на члене порядка h^2 и воспользуемся для вычисления производной $u''(x_i)$ формулой **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. В результате получим новое рекуррентное соотношение, более сложное чем **Ошибка! Источник ссылки не найден.**,

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\, f(x_i, y_i)\right\}h^2, \quad (5)$$

которое можно также записать в виде разностного уравнения

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i) + \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\, f(x_i, y_i)\right\}h. \quad (6)$$

Здесь, как и в предыдущем разделе, мы обозначили искомую функцию в разностном уравнении (6) буквой y, а не u, чтобы подчеркнуть, что **Ошибка! Источник ссылки не найден.** и (6) – это два разных уравнения.

Уравнение (5), дополненное начальным условием **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, дает явную разностную схему численного решения рассматриваемой задачи Коши. По рекуррентной формуле можно последовательно рассчитать все значения сеточной функции $y_i, 0 \le i \le n$ и получить таким образом приближенное решение задачи **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, **Ошибка! Источник ссылки не найден.**. Исследование показывает, что такая усложненная схема имеет второй порядок точности относительно h как для аппроксимации уравнения, так и для погрешности решения. Существенно то, что основная идея данного подхода допускает дальнейшее развитие. Если оборвать разложение (4) на члене порядка h^3, h^4 и т. д., то получатся разностные схемы третьего, четвертого и более высоких порядков точности.

Однако у данного подхода есть существенный недостаток. При расчетах по схеме Эйлера требуется вычислять только значения функции $f(x_i, y_i)$. В схеме же (5) на каждом шаге приходится вычислять не только функцию f, но и ее первые производные $\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)$. Если мы, оставив в разложении (4) члены до h^4 включительно, построим схему четвертого порядка точности, то на каждом шаге придется вычислять десять величин: функцию $f(x_i, y_i)$, две ее первых производных, три вторых производных и четыре третьих производных. Это существенно усложнит разработку программы и нарушит важный принцип вычислительной математики – использовать в расчетах только те величины, которые задаются условиями задачи. Формулировка задачи Коши предполагает, что известен алгоритм вычисления функции $f(x,u)$ по значениям ее аргументов. Если этот алгоритм сводится к расчету по простой формуле, то вычисление производных не составляет труда. Однако возможны и такие варианты представления алгоритма, при которых вычисление производных функции $f(x,u)$ либо очень сложно, либо практически невозможно. Поэтому при разработке разностных схем высокого порядка точности стремятся заменить вычисление производных функции $f(x,u)$ вычислением самой функции в нескольких точках. В следующих разделах мы рассмотрим, как это удается сделать.