ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
по теме "Обыкновенные дифференциальные уравнения"

Задание 1. Подготовить программу для численного решения задачи Коши вида

$$y' = f(x, y), \qquad y(0) = y_0$$

на отрезке $[0, 1]$ методом, указанным ниже. В программе предусмотреть сравнение значений $y(x)$, полученных с шагом h и $\frac{h}{2}$.

1. Методом Рунге-Кутта третьей степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}\big(k_{1,n} + 3k_{3,n}\big),$$
$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{1,n}\Big), \quad k_{3,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{2,n}\Big).$$

2. Методом Рунге-Кутта четвертой степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}\big(k_{1,n} + 4k_{3,n} + k_{4,n}\big),$$
$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{4}, u_n + \frac{h}{4}k_{1,n}\Big), \quad k_{3,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{2,n}\Big),$$
$$k_{4,n} = f(x_{n+1}, u_n + hk_{1,n} - 2hk_{2,n} + 2hk_{3,n}).$$

3. Методом Рунге-Кутта четвертой степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}\big(k_{1,n} + 2k_{2,n} + 2k_{3,n} + k_{4,n}\big),$$
$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\Big), \quad k_{3,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{2,n}\Big),$$
$$k_{4,n} = f(x_n + h, u_n + hk_{3,n}).$$

4. Усовершенствованным методом ломаных

$$u_{n+1} = u_n + hk_{2,n},$$
$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\Big).$$

5. Неявным методом Рунге-Кутта второй степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{2}\big(k_{1,n+1} + k_{2,n+1}\big),$$
$$k_{1,n+1} = f_{n+1}, \quad k_{2,n+1} = f(x_{n+1}, u_{n+1} - hk_{1,n+1}).$$

В качестве экстраполяционного значения использовать полученное по явной формуле Эйлера

$$u_{n+1} = u_n + hf_n.$$

6. Методом Рунге-Кутта третьей степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{9}\big(2k_{1,n} + 3k_{2,n} + 4k_{3,n}\big),$$

$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\Big), \quad k_{3,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{4}, u_n + \frac{h}{4}k_{2,n}\Big).$$

7. Методом Рунге-Кутта второй степени

$$u_{n+1} = u_n + hk_{2,n},$$

$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\Big).$$

8. С помощью неявной формулы трапеций

$$u_{n+1} = u_n + hf\Big(x_n + \frac{h}{2}, \frac{u_n + u_{n+1}}{2}\Big).$$

В качестве экстраполяционного значения использовать полученное по явной формуле

$$u_{n+1} = u_n + hf\Big(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}f_n\Big).$$

9. Методом Рунге-Кутта третьей степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}\big(k_{1,n} + 4k_{2,n} + k_{3,n}\big),$$

$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{h}{2}k_{1,n}\Big), k_{3,n} = f(x_n + h, u_n - hk_{1,n} + 2hk_{2,n}).$$

10. Методом Рунге-Кутта четвертой степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{8}\big(k_{1,n} + 3k_{2,n} + 3k_{3,n} + k_{4,n}\big),$$

$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{1,n}\Big), \quad k_{3,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{2,n}\Big),$$

$$k_{4,n} = f(x_{n+1}, u_n + hk_{1,n} - hk_{2,n} + hk_{3,n}).$$

11. Неявным методом Рунге-Кутта третьей степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}(r_{1,n+1} + 3r_{3,n+1}),$$

$$r_{1,n+1} = f_{n+1}, \quad r_{2,n+1} = f\Big(x_n + \frac{2h}{3}, u_{n+1} - \frac{h}{3}r_{1,n+1}\Big),$$

$$k_{3,n+1} = f\Big(x_n + \frac{h}{3}, u_{n+1} - \frac{2h}{3}r_{2,n+1}\Big).$$

В качестве экстраполяционного значения использовать полученное по явной формуле Рунге-Кутта третьей степени

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{4}\big(k_{1,n} + 3k_{3,n}\big),$$

$$k_{1,n} = f_n, \quad k_{2,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{1,n}\Big), \quad k_{3,n} = f\Big(x_n + \frac{h}{3}, u_n + \frac{h}{3}k_{2,n}\Big).$$

12. Методом Адамса второй степени

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n).$$

Значение u_1вычислить по формуле Эйлера-Коши

$$u_2 = u_1 + \frac{h}{2}\big(f_1 + f(x_2, u_1 + hf_1)\big).$$

13. Неявным методом Рунге-Кутта

$$u_{n+1} = u_n + hk_{2,n+1},$$
$$k_{1,n+1} = f_{n+1}, \quad k_{2,n+1} = f\Big(x_{n+1} - \frac{h}{2}, u_{n+1} - \frac{h}{2}k_{1,n+1}\Big).$$

В качестве экстраполяционного значения использовать полученное по явной формуле Эйлера

$$u_{n+1} = u_n + hk_{1,n}.$$

14. По схеме Куртиса-Хиршфельда второй степени

$$u_{n+2} = \frac{4}{3}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}hf_{n+2},$$

в качестве экстраполяционного значения использовать полученное по явной формуле Адамса второй степени

$$u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n).$$

Значение u_1 вычислить по формуле Эйлера-Коши

$$u_1 = y_0 + \frac{h}{2}\big(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + hf(x_0, y_0))\big).$$

Задание 2. Решение конечно-разностным методом краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка.

Дано уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x),$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} &\alpha_0 u(0) + \beta_0 u'(0) = \gamma_0, \qquad && \alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0, \\ &\alpha_1 u(1) + \beta_1 u'(1) = \gamma_1, && \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты уравнения, вид краевых условий, а также точное решение приведены в таблице 1.

Решить краевую задачу с помощью трёхточечной разностной схемы

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = f_i, \quad i = 0, ..., N, \tag{0.1}$$

$$a_0 = c_N = 0, \quad b_i = q_i - a_i - c_i, \quad i = 1, ..., N-1,$$

где $p_i = p(x_i),\ q_i = q(x_i),\ f_i = f(x_i),\ x_i = ih,\ h = \dfrac{1}{N}$.

Коэффициенты $a_i,\ c_i$ заданы в таблице 2.

Разностные уравнения при $i = 0$ и $i = N$ получаются при аппроксимации краевых условий.

Если $\beta_0 = 0$, то $c_0 = 0$, а b_0 определяется с помощью α_0 и γ_0.

Если $\beta_0 \neq 0$, то при аппроксимации левого граничного условия можно воспользоваться соотношением

$$u'(0) \cong \frac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h}.$$

Исключая в разностном уравнении с номером $i = 1$ неизвестное y_0, получаем новые выражения для b_1 и c_1, при этом $a_1 = 0$. Таким образом, если $\beta_0 \neq 0$, нулевое уравнение системы нужно только для вычисления y_0, и это уравнение в системе (0.1) не учитывается.

Аналогична методика рассмотрения правого граничного условия.

Если $\beta_2 \neq 0$, то для аппроксимации правого граничного условия можно воспользоваться соотношением

$$u'(1) \cong \frac{3y_N - 4y_{N-1} + y_{N-2}}{2h}.$$

Далее действуем так же, как и при рассмотрении левого граничного условия.

Исключая из $N-1$-ого уравнения y_N, получаем новые выражения для a_{N-1} и b_{N-1}, а $c_{N-1} = 0$. N-ное уравнение системы (0.1) используется для вычисления y_N через y_{N-1} и y_{N-2}.

Таким образом, имеем систему вида (0.1) для $i = l, l+1, ..., m$, где $l = 0$ или 1 и $m = N$ или $N-1$, в зависимости от вида граничных условий исходного дифференциального уравнения.

Систему (0.1) решать методом монотонной прогонки.

Ответить на следующие вопросы:

1. Каков порядок аппроксимации разностной схемы?

2. Что можно сказать об устойчивости разностной схемы?

3. Устойчив ли метод прогонки решения трехточечной системы?

Таблица 1. Варианты коэффициентов уравнения и краевых условий.

№	$p(x)$	$q(x)$	$f(x)$	α_0	β_0	γ_0	α_1	β_1	γ_1	Точное решение
1	$-x+1$	-1	$\frac{2}{(x+1)^3}$	1	0	1	1	0	0.5	$\frac{1}{x+1}$
2	$\frac{2}{x-2}$	$x-2$	1	1	0	-0.5	1	0	-1	$\frac{1}{x-2}$
3	$\frac{4x}{x^2+1}$	$-\frac{1}{x^2+1}$	$-\frac{3}{(x^2+1)^2}$	0	1	0	1	0	0.5	$\frac{1}{x^2+1}$
4	$x+1$	-1	$\frac{x^2+2x+2}{x+1}$	1	0	0	1	0	1.38294	$(x+1)\ln(x+1)$
5	$-(x^2+1)$	$-2x$	$2\frac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$	1	-2	1	1	0	0.5	$\frac{1}{x^2+1}$
6	0	$-\frac{2}{(x+1)^2}$	$\frac{9}{2(x+1)^{\frac{3}{2}}}$	1	-2	0	0	1	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$-2\sqrt{x+1}$
7	$\frac{3}{2(x+1)}$	0	$\frac{2}{\sqrt{x+1}}$	3	-1	1	0	1	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$
8	$\frac{1}{2(x+1)}$	-1	$-\sqrt{x+1}$	0	1	0.5	1	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{x+1}$
9	0	$-\frac{3}{(x+1)^2}$	$-\frac{15}{\sqrt{x+1}}$	3	-1	1	0	1	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$
10	$\frac{1}{2(x+1)}$	0	$\frac{1}{\sqrt{x+1}}$	3	-2	1	0	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{3}\big((x+1)^{\frac{3}{2}}+1\big)$
11	$-(x+1)^2$	$-\frac{2}{(x+1)^2}$	1	1	-1	2	1	0	0.5	$\frac{1}{x+1}$
12	$\frac{3}{2}(x+1)$	$-(x+1)$	$-2\sqrt{x+1}+x+1$	1	-1	2	0	1	$-2^{\frac{3}{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{x+1}}-1$
13	$x+1$	1	$-\frac{2}{(x+1)^3}$	0	1	1	1	0	0.5	$\frac{x}{x+1}$
14	$-(x+1)$	1	$-\frac{2x^3+4x^2+2x-2}{(x+1)^3}$	1	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{x^2}{x+1}$
15	$2\sqrt{x+1}$	$-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$	$-\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+1}}+2$	1	0	0	1	0	0.98025	$\sqrt{x+1}\ln(x+1)$
16	0	$\frac{1}{(x+1)^2}$	$\frac{\sqrt{x+2}}{8(x+2)^3}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{8}$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{\sqrt{x+2}}{2(x+2)}$
17	-2	-1	$\frac{2}{(x+1)^3}e^x$	1	0	1	0	1	$\frac{e}{4}.$	$\frac{e^x}{x+1}$
18	$\frac{1}{x^2+x+1}$	0	$-2\frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$	1	0	0	0	1	1	$\ln(x^2+x+1)$
19	-1	0	$\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$	0	1	1	0	1	$\frac{1}{\cos^2 1}$	$\operatorname{tg} x-1$
20	$-\sin x$	0	$-\frac{1}{2\sin 2x}$	1	0	0	-1	1	$\cos 1-\sin 1$	$\sin x-x$
21	$\sqrt{x+1}$	$\frac{1}{4}$	$\sqrt{x+1}+\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$	1	0	4	1	0	$2(\sqrt{2}+1)$	$2\sqrt{x+1}+x+1$
22	$-\frac{1}{\cos x}$	1	$\frac{2-\sin x}{\cos^3 x}-1$	0	1	0	1	0	$\frac{1}{\cos 1}-1$	$\frac{1}{\cos x}-1$

Таблица 2. Варианты разностных схем $\left(r = \dfrac{p_i}{2}h\right)$

№	a_i	c_i
1	$\frac{1}{h^2}\left(1 - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + r\right)$ — классическая трёхточечная схема
2	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \lvert r\rvert - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \lvert r\rvert + r\right)$ — схема направленных разностей
3	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{r^2}{1+\lvert r\rvert} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{r^2}{1+\lvert r\rvert} + r\right)$ — схема Самарского
4	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{\lvert r\rvert^3}{1+\lvert r\rvert+r^2} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{\lvert r\rvert^3}{1+\lvert r\rvert+r^2} + r\right)$ — схема Булеева–Тимухина
5	$\frac{1}{h^2}\left(\lvert r\rvert + e^{-\lvert r\rvert} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(\lvert r\rvert + e^{-\lvert r\rvert} + r\right)$ — экспоненциальная схема
6	$\frac{1}{h^2}\left(\operatorname{ch} r - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(\operatorname{ch} r + r\right)$
7	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \lvert r\rvert\ln(1+\lvert r\rvert) - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \lvert r\rvert\ln(1+\lvert r\rvert) + r\right)$ — логарифмическая схема
8	$\frac{1}{h^2}\left(\frac{\operatorname{arctg} r}{r} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(\frac{\operatorname{arctg} r}{r} + r\right)$
9	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{r^2}{1+\lvert r\rvert+\sin^2 r} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{r^2}{1+\lvert r\rvert+\sin^2 r} + r\right)$
10	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{r^2}{2} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{r^2}{2} + r\right)$
11	$\frac{1}{h^2}\left(1 + 2\lvert r\rvert - \sin 2\lvert r\rvert - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + 2\lvert r\rvert - \sin 2\lvert r\rvert + r\right)$
12	$\frac{1}{h^2}\left(\lvert r\rvert + \frac{r^2+1}{\lvert r\rvert+1} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(\lvert r\rvert + \frac{r^2+1}{\lvert r\rvert+1} + r\right)$
13	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \lvert r\rvert - \frac{\sin\lvert r\rvert}{\sin\lvert r\rvert+1} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \lvert r\rvert - \frac{\sin\lvert r\rvert}{\sin\lvert r\rvert+1} + r\right)$
14	$\frac{1}{h^2}\left(1 + r^2 - \frac{r^2}{\sin\lvert r\rvert+1} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + r^2 - \frac{r^2}{\sin\lvert r\rvert+1} + r\right)$
15	$\frac{1}{h^2}\left(1 + r\sin r - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + r\sin r + r\right)$
16	$\frac{1}{h^2}\left(\operatorname{tg}\lvert r\rvert + \frac{1}{\lvert r\rvert+1} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(\operatorname{tg}\lvert r\rvert + \frac{1}{\lvert r\rvert+1} + r\right)$
17	$\frac{1}{h^2}\left(\frac{e^{\lvert}r\rvert}{\lvert r\rvert+1} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(\frac{e^{\lvert}r\rvert}{\lvert r\rvert+1} + r\right)$
18	$\frac{1}{h^2}\left(2\lvert r\rvert + \frac{(2-e^r-e^{-r})^2}{2+e^r+e^{-r}} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(2\lvert r\rvert + \frac{(2-e^r-e^{-r})^2}{2+e^r+e^{-r}} + r\right)$
19	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \lvert r\rvert - \operatorname{th}\lvert r\rvert - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(1 + \lvert r\rvert - \operatorname{th}\lvert r\rvert + r\right)$
20	$\frac{1}{h^2}\left(\lvert r\rvert + \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh}\lvert r\rvert+1} - r\right)$	$\frac{1}{h^2}\left(\lvert r\rvert + \frac{\operatorname{ch} r}{\operatorname{sh}\lvert r\rvert+1} + r\right)$

Таблица 2. Варианты разностных схем $\left(r = \dfrac{p_i}{2}h\right)$ **(продолжение)**

№	a_i	c_i
21	$\dfrac{1}{h^2}\left(1 + \dfrac{r^2}{\sin^2 r + \lvert r\rvert + 1} - r\right)$	$\dfrac{1}{h^2}\left(1 + \dfrac{r^2}{\sin^2 r + \lvert r\rvert + 1} + r\right)$
22	$\dfrac{1}{h^2}\left(a^{\lvert r\rvert} - r\right)$	$\dfrac{1}{h^2}\left(a^{\lvert r\rvert} + r\right),\ a > 1$