Тема 1.2. Примеры решения типичных экономических задач с использованием метода ДП.

§1. *"Задачи об оптимальной эксплуатации лесного ресурса".*

Задача1 *("Задача о заготовке и продаже леса", без дисконта)*

Участок леса объёма V_0 сдаётся в аренду для полной вырубки леса в течении n периодов (лет). В каждом периоде вырубленный лес сразу продаётся. При этом цена зависит от объёма так, что выручка от продажи u м^3 леса равна $f(u)$. Объём древесины растущего леса увеличивается за период на C %. В каждом периоде рубка осуществляется в начале периода.

Определить объёмы рубки и продажи леса в каждом периоде так, чтобы общая сумма вырученных от продажи леса денег за n периодов, - была максимальной.

Построим динамическую модель нашей **Задачи1** для решения её методом *Динамического программирования.*

1. Число периодов (шагов) = **n**. Шаг = год

2. На каждом шаге $\boldsymbol{k}$ состояние $\boldsymbol{x_k}$ - это количество леса в конце этого периода (шага),
$\boldsymbol{k}$ =1, ..., n.

3. Управление $\mathbf{u_k}$ на шаге $\boldsymbol{k}$ - это количество леса, которое нужно вырубить в начале периода (шага) $\boldsymbol{k}$. k =1, ..., n.

$$\mathbf{u}_{\boldsymbol{k}} \in \boldsymbol{U_k}, \text{ из условий } \textbf{Задачи1} \text{ следует, что } \boldsymbol{U_k} = [\mathbf{0}; \boldsymbol{x_{k-1}}].$$

Обозначаем $\mathbf{u} = (\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{k}, \ldots, \mathrm{u}_\mathrm{n})$ - набор управлений, или просто *управление*, на всём интервале.

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U} = \mathbf{U_1} \times \mathbf{U_2} \times \ldots \times \mathbf{U_k} \times \ldots \times \mathbf{U_n}$$

4. Уравнение состояния на $\boldsymbol{k}$-*ом* шаге, задаёт динамику:

$$\boldsymbol{x_k} = \varphi_k(x_{k-1}, \mathrm{u_k}) = \mathbf{c}(\boldsymbol{x_{k-1}} - \mathbf{u_k}), \quad \boldsymbol{k} = 1, \ldots, \mathrm{n}$$

оно формулируется из экономического смысла условий задачи .

5. Результат $\boldsymbol{k}$-*го* шага - это количество денег, выручаемое от продажи леса сразу после его вырубки на шаге $\boldsymbol{k}$. По условию он задаётся функцией

$$f_k(x_{k-1}, \mathrm{u_k}) = \boldsymbol{A}\mathbf{u_k}^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

вид которой отражает особенности реального ценообразования на оптовые партии таких сырьевых ресурсов, как лес.

Тогда целевая функция задачи $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}, \mathbf{u})$ есть сумма результатов на всех шагах

$$\boldsymbol{F}(x_0, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} A\mathbf{u_k}^{\alpha} = A\mathbf{u_1}^{\alpha} + A\mathbf{u_2}^{\alpha} + \ldots + A\mathbf{u_n}^{\alpha}$$

6. Имеем следующую **Задачу** в математической (символической) форме

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}, \mathbf{u}) = \max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \sum_{k=1}^{n} A\mathbf{u_k}^{\alpha}$$

При $\boldsymbol{x_k} = \mathbf{c}(\boldsymbol{x_{k-1}} - \mathbf{u_k})$, $k = 1, \ldots, n$

начальное $\boldsymbol{x_0}$ задано.

Решим подробно Задачу1 для n = 3.

Общая динамическая схема с основными элементами и показателями показана в таблице ниже:

Год № 1	*Год № 2*	*Год № 3*
x_0 $\mathbf{u_1}$ $\boldsymbol{x_1}$	x_1 $\mathbf{u_2}$ $\boldsymbol{x_2}$	x_2 $\mathbf{u_3}$ $\boldsymbol{x_3}$
$\varphi_1(x_0, u_1) = c(x_0 - u_1) = \boldsymbol{x_1}$ $f_1(x_0, u_1) = Au_1{}^{\alpha}$	$\varphi_2(x_1, u_2) = c(x_1 - u_2) = \boldsymbol{x_2}$ $f_2(x_1, u_2) = Au_2{}^{\alpha}$	$\varphi_3(x_2, u_3) = c(x_2 - u_3) = \boldsymbol{x_3}$ $f_3(x_2, u_3) = Au_3{}^{\alpha}$

Вспомогательная базовая Задача

Решим отдельную вспомогательную задачу (Л1): найдём ***базовую*** функцию $\boldsymbol{Z^*(x)}$.

$$\boldsymbol{Z^*(x)} = \max_{u \in U} \{u^{\alpha} + (c(x-u))^{\alpha}\} \qquad \textbf{(Л1)}$$

$$U = [0; x]$$

Обозначим и рассмотрим функцию $\mathbf{g}\,(u) = u^{\alpha} + c(x-u)^{\alpha}$.

$\boldsymbol{Z}^*(x)$ - есть максимальное значение функции g(u) на множестве U= [0; x].

Найдём его:

$$g'(u) = \frac{dg\,(u)}{dx} = \alpha u^{\alpha-1} - \alpha c^{\alpha}(x-u)^{\alpha-1} = 0.$$

Решаем уравнение и находим $\mathbf{u}^* = \frac{x}{1+c^{\beta}}$, где $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha}$ Д/з

Убеждаемся, что : Д/з

1) $\mathbf{u}^* = \frac{x}{1+c^{\beta}} \in U = [0; x]$, $\mathbf{u}^* \in [0; x]$.

2) $\mathbf{u}^*$ - точка максимума функции g (x) на отрезке [0; x] !

(Показать, что $g'(x) \geq 0$ на отрезке (0; u^*] и $g'(x) \leq 0$ на отрезке [u^*; x]).

Подставим $\mathbf{u}^* = \frac{x}{1+c^{\beta}}$ в функцию $g\,(u) = u^{\alpha} + c(x-u)^{\alpha}$, получим

$$\boldsymbol{Z}^*(x) = g\,(u^*) = \left(\frac{x}{1+c^{\beta}}\right)^{\alpha} + \left(c\left(x - \frac{x}{1+c^{\beta}}\right)\right)^{\alpha} =$$

$$\left(\frac{x}{1+c^{\beta}}\right)^{\alpha} + \left(\mathrm{c}\left(\frac{x+xc^{\beta}-x}{1+c^{\beta}}\right)\right)^{\alpha} = \left(\frac{x}{1+c^{\beta}}\right)^{\alpha} + \left(\frac{xc^{\beta}}{1+c^{\beta}}\right)^{\alpha} \cdot c^{\alpha} =$$

$$= \left(\frac{x}{1+c^{\beta}}\right)^{\alpha} \left(1+\left(c^{\beta}\right)^{\alpha} \cdot c^{\alpha}\right) = \left(\frac{x}{1+c^{\beta}}\right)^{\alpha} \left(1+c^{\beta}\right) =$$

$$= \left(x\left(1+c^{\beta}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\right)^{\alpha} = \left(x\left(1+c^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right)^{\alpha}$$

Получили :

$$\boldsymbol{Z}^{*}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{g}\ (\mathbf{u}^{*}) = \left[x\left(1+c^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\alpha}, \quad \text{при} \quad \mathbf{u}^{*} = \frac{x}{1+c^{\beta}} \qquad \textbf{(Л2)}$$

Возвращаемся к решению нашей **Задачи1.**

Рассмотрим все действия для решения Задачи1 при n = 3.

Обратная схема итераций.

Этап В 3. $$\boldsymbol{Z_3^*}(x_2) = \max_{u_3 \in U_3} \{f_3(x_2, u_3) + \boldsymbol{Z_4^*}(x_3)\} \qquad \textbf{(Э 3.1)}$$

$U_3 = [0; x_2]$, $\boldsymbol{Z_4^*}(x_3) = 0$, потому что: **₺!**

1. Этап 3 последний. 2. Нет условий на конечное состояние $\boldsymbol{x_3}$.

$$\boldsymbol{Z_3^*}(x_2) = \max_{u_3 \in U_3} \{{u_3}^{\alpha} + 0)\} = \max_{0 \le u_3 \le x_2} {u_3}^{\alpha} = {x_2}^{\alpha}, \text{ при } \quad \mathbf{u}^* = x_2.$$

Получили: $$\boldsymbol{Z_3^*}(x_2) = \boldsymbol{x_2}^{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \text{(В 3.1)}$$

при $\boldsymbol{u_3}^*(x_2) = \boldsymbol{x_2}$. (В 3.2)

Этап В 2. $$\boldsymbol{Z_2^*}(x_1) = \max_{u_2 \in U_2} \{f_2(x_1, u_2) + \boldsymbol{Z_3^*}(x_2)\} \qquad \textbf{(Э 2.1)}$$

$$U_2 = [0; x_2], \qquad x_2 = \varphi_2(x_1, u_2) = c(x_1 - u_2)$$

$$\boldsymbol{Z}_2^*(x_1) = \max_{0 \le u_2 \le x_1} \{u_2{}^{\alpha} + \boldsymbol{Z}_3^*(c(x_1 - u_2))\} =$$

$$= \max_{0 \le u_2 \le x_1} \{u_2{}^{\alpha} + (c(x_1 - u_2))^{\alpha}\} = \text{(используя Л1 и Л2)} =$$

$$= [x_1 (1 + c^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha} , \quad \text{при} \quad \boldsymbol{u}_2^* = \frac{x_1}{1+c^{\beta}} .$$

Получили: $\boldsymbol{Z}_2^*(x_1) = [x_1 (1 + c^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha}$, (B 2.1)

при $\boldsymbol{u}_2^*(x_1) = \frac{x_1}{1+c^{\beta}}$ (B 2.2)

Этап B 1. $\boldsymbol{Z}_1^*(x_0) = \max_{u_1 \in U_1} \{f_1(x_0, u_1) + \boldsymbol{Z}_2^*(x_1)\}$ **(Э 3.1)**

$U_1 = [0; x_0],$ $x_1 = \varphi_1(x_0, u_1) = c(x_0 - u_1)$

$$\boldsymbol{Z}_1^*(x_0) = \max_{0 \le u_1 \le x_0} \{u_1{}^{\alpha} + \boldsymbol{Z}_2^*(c(x_0 - u_1))\} =$$

$$= \max_{0 \le u_1 \le x_0} \{ u_1{}^{\alpha} + [(c(x_0 - u_1)\left(1 + c^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha} \}$$

(используя Л1 и Л2 и обозначив через $\tilde{\boldsymbol{c}} = c\left(1 + c^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, получим) :

$$\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}}^{*}(x_0) = [x_0\left(1 + \tilde{\boldsymbol{c}}^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha} \qquad \text{(В 1.1)}$$

$$\text{при} \quad \boldsymbol{u}_{\mathbf{1}}^{*} = \frac{x_0}{1+\tilde{\boldsymbol{c}}^{\beta}}, \qquad \text{(В 1.2)}$$

где $\tilde{\boldsymbol{c}} = c\left(1 + c^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}$.

Подставим вместо $\tilde{\boldsymbol{c}}$ его выражение и упростим:

$$\boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}}^{*}(x_0) = [x_0\left(1 + (c\left(1 + c^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}})^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha} =$$

$$= [x_0\left(1 + c^{\beta} + c^{2\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{u}_{\mathbf{1}}^{*} = \frac{x_0}{1 + c^{\beta} + c^{2\beta}}$$

Получили: $$\boldsymbol{Z_1^*}(x_0) = [x_0(1 + c^{\beta} + c^{2\beta})^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha} \qquad \text{(В 1.3)}$$

при $$\boldsymbol{u_1^*}(x_0) = \frac{x_0}{1 + c^{\beta} + c^{2\beta}} \qquad \text{(В 1.4)}$$

Формулы (В 1.3), (В 1.4) имеют более удобный для вычислений вид, чем (В 1.1) и (В 1.2)

Важное замечание 1:

Можно строго доказать, что в этой **Задаче1**, при данных базовых условиях, но при произвольном числе периодов $\boldsymbol{n}$ и для произвольного периода (шага) $\boldsymbol{k}$, $1 \le \boldsymbol{k} < \boldsymbol{n}$**,** функции Беллмана и соответствующие условные оптимальные управления имеют следующий вид !!!!!!!!:

$$\boldsymbol{Z_k^*}(x_{k-1}) = [\,\boldsymbol{x_{k-1}}\left(\sum_{j=0}^{n-k}(c^{j\beta})\right)^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha} \qquad (*1)$$

при $$\boldsymbol{u_k^*}(x_{k-1}) = \frac{\boldsymbol{x_{k-1}}}{\sum_{j=0}^{n=k}(c^{j\beta})} \qquad (*2)$$

Эти формулы позволяют рассчитать оптимальные решения для произвольного числа лет !!!

Прямая схема итераций.

Реализуется быстро, просто и непосредственно по найденным выше формулам для

$\boldsymbol{Z_1^*}(x_0)$, $\boldsymbol{u_k^*}(x_{k-1})$ и известным уравнениям состояния на каждом шаге

$\boldsymbol{x_k} = \varphi_k(x_{k-1}, u_k) = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x_{k-1}} - \boldsymbol{u_k})$.

Этап А 1. Знаем $\boldsymbol{x_0}$, находим $\boldsymbol{u_1^*} = \boldsymbol{u_1^*}(\boldsymbol{x_0})$.

Этап А 2. Знаем $\boldsymbol{x_0}$ и $\boldsymbol{u_1^*}$, находим $\boldsymbol{x_1^*} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{u_1^*})$.

Знаем $\boldsymbol{x_1^*}$, находим $\boldsymbol{u_2^*} = \boldsymbol{u_2^*}(\boldsymbol{x_1^*})$.

Этап А 3. Знаем $\boldsymbol{x_1^*}$ и $\boldsymbol{u_2^*}$ находим $\boldsymbol{x_2^*} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x_1^*} - \boldsymbol{u_1^*})$.

Знаем $\boldsymbol{x_2^*}$, находим $\boldsymbol{u_3^*} = \boldsymbol{u_3^*}(\boldsymbol{x_2^*})$.

*** Знаем $\boldsymbol{x_2^*}$ и $\boldsymbol{u_3^*}$ находим $\boldsymbol{x_3^*} = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x_2^*} - \boldsymbol{u_3^*})$.

Ответ (какой должен быть формат ответа):

1. Оптимальное управление $\mathbf{u^*} = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$
2. Оптимальная траектория $\chi^* = \{x_0,\ x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$
3. Оптимальное (максимальное) значение целевой функции на всём интервале в $n = 3$ периодов: $F^*(x_0) = Z_1^*(x_0)$

Пример № 1, с конкретными числами (См. Практику).

$n = 4$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $x_0 = 10\,000$ м^3 , $A = 1$.

. . .

Задача 2 ***("Задача о заготовке и продаже леса",***
с дисконтом!)

К данным **Задачи**1 добавляется следующее традиционное в экономических задачах условие:

В каждом периоде выручка от продажи кладётся в банк под q % годовых.

Определить объёмы рубки и продажи леса в каждом периоде так, чтобы общая сумма денег на банковском счёте - после n периодов эксплуатации участка - была максимальной.

В разобранные выше модель и решение **Задачи1** внесём небольшие изменения, соответствующие новому условию с дисконтом. Эти изменения будут в пунктах 5 и 6 Модели и в формулах уравнений и функций Беллмана..

5. Результат *k-го* шага - это количество денег, которое образуется в банке к концу последнего, $\boldsymbol{n}$-*го,* периода в результате роста выручки от продажи леса в $\boldsymbol{k}$-*ом* периоде.

По условию он задаётся функцией

$$f_k(x_{k-1}, \mathrm{u_k}) = \boldsymbol{A}\mathbf{q}^{\mathbf{n-k+1}}\mathbf{u_k}^{\boldsymbol{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

вид которой отражает особенности реального ценообразования на оптовые партии таких сырьевых ресурсов, как лес.

Тогда целевая функция задачи $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_0}, \mathbf{u})$ есть сумма результатов на всех шагах

$$\boldsymbol{F}(x_0, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} A\mathrm{q}^{\mathrm{n-k+1}}\mathrm{u_k}^{\alpha} = A\mathrm{q}^{\mathrm{n}}\mathrm{u_1}^{\alpha} + A\mathrm{q}^{\mathrm{n-1}}\mathrm{u_2}^{\alpha} + \ldots + A\mathrm{q}^{1}\mathrm{u_n}^{\alpha}$$

6. Имеем следующую **Задачу2:**

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \boldsymbol{F}(x_0, \mathbf{u}) = \max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} A\mathrm{q}^{\mathrm{n-k+1}}\mathrm{u_k}^{\alpha}$$

При $\boldsymbol{x_k} = \mathrm{c}(x_{k-1} - \mathrm{u_k})$ **,** k= 1, ..., n

начальное $\boldsymbol{x_0}$ задано.

$\boldsymbol{F}^*(x_0) = \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \boldsymbol{F}(x_0, \mathbf{u})$ **-** максимальный суммарный результат при оптимальном управлении (при оптимальной рубке).

Рассмотрим все действия для решения Задачи 2 при n = 3.

Они аналогичны всем вычислениям выше для Задачи1.

В функции $\boldsymbol{F}(x_0, \mathbf{u})$ вынесем множитель **Aq,**

$$\boldsymbol{F}(x_0, \mathbf{u}) = \mathbf{Aq} \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} \mathrm{q}^{3-\mathrm{k}}\mathrm{u_k}^{\alpha} = \mathbf{Aq}\ \boldsymbol{\Phi}(x_0, \mathbf{u}).$$

Обозначили $\boldsymbol{\Phi}(x_0, \mathbf{u}) = \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{1}}^{\mathbf{3}} \mathrm{q}^{3-\mathrm{k}}\mathrm{u_k}^{\alpha}$ **.**

Решим следующую Задачу 2.1, эквивалентную Задаче 2.

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x_0}, \mathbf{u}) = \max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \sum_{k=1}^{3} \mathrm{q}^{3-\mathrm{k}} \mathrm{u_k}^{\alpha} \qquad \textbf{(Задача2.1)}$$

При $\boldsymbol{x_k} = \mathbf{c}(\boldsymbol{x_{k-1}} - \mathbf{u_k})$, k= 1, 2, 3 , начальное $\boldsymbol{x_0}$ задано.

Здесь результат ***k-го*** шага имеет более простой вид:

$$f_k(x_{k-1}, \mathrm{u_k}) = \boldsymbol{q^{3-k} u_k}^{\boldsymbol{\alpha}} \textbf{.}$$

$\boldsymbol{\Phi}^*(x_0) = \max\limits_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x_0}, \mathbf{u})$ **-** максимальный суммарный результат в **Задаче 2.1**

Обратная схема итераций (для Задачи 2.1).

Этап В 3. $\boldsymbol{Z_3^*}(x_2) = \max\limits_{\mathrm{u_3}\in U_3} \{f_3(x_2, \mathrm{u_3}) + 0\}$, $U_3 = [0; x_2]$.

Т.к. $f_3(x_2, \mathrm{u_3}) = u_3{}^{\alpha}$, как в **Этапе В 3 Задачи1,** то и получаем те же функции:

$$\boldsymbol{Z_3^*}(x_2) = \boldsymbol{x_2}^{\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \text{(D 1.1)}$$

при $\boldsymbol{u_3}^*(x_2) = \boldsymbol{x_2}$. (D 1.2)

Этап В 2. $\boldsymbol{Z_2^*}(x_1) = \max\limits_{u_2 \in U_2} \{f_2(x_1, u_2) + \boldsymbol{Z_3^*}(x_2)\}$ **(Э 2.1)**

$$U_2 = [0; x_2], \quad x_2 = \varphi_2(x_1, u_2) = c(x_1 - u_2)$$

$$\boldsymbol{Z_2^*}(x_1) = \max_{0 \le u_2 \le x_1} \{q u_2{}^{\alpha} + \boldsymbol{Z_3^*}(c(x_1 - u_2))\} =$$

$$= \max_{0 \le u_2 \le x_1} \{q u_2{}^{\alpha} + (c(x_1 - u_2))^{\alpha}\} = q \max_{0 \le u_2 \le x_1} \left\{u_2{}^{\alpha} + \left(\frac{c(x_1 - u_2)}{q^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha}\right\} =$$

(обозначив $\tilde{c} = \frac{c}{q^{\frac{1}{\alpha}}}$ и используя **(Л1) и (Л2),** получаем)

$$= q\left[x_1\left(1 + \tilde{c}^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\alpha}, \quad \text{при} \quad \boldsymbol{u_2^*} = \frac{x_1}{1 + \tilde{c}^{\beta}}.$$

Таким образом, получили:

$$\boldsymbol{Z_2^*}(x_1) = q\left[x_1\left(1 + \tilde{c}^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{\alpha}, \qquad \text{(D 2.1)}$$

$$\text{при} \quad \boldsymbol{u_2^*}(x_1) = \frac{x_1}{1 + \tilde{c}^{\beta}}. \qquad \text{(D 2.2)}$$

Этап В 1. $\boldsymbol{Z_1^*}(x_0) = \max\limits_{u_1 \in U_1} \{f_1(x_0, u_1) + \boldsymbol{Z_2^*}(x_1)\}$

$$U_1 = [0; x_0], \; x_1 = \varphi_1(x_0, u_1) = c(x_0 - u_1)$$

$$\boldsymbol{Z_1^*}(x_0) = \max_{0 \le u_1 \le x_0} \{q^2 u_1{}^{\alpha} + q[(c(x_0 - u_1)(1 + \tilde{c}^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha}\} =$$

$$= q^2 \max_{0 \le u_1 \le x_0} \{u_1{}^{\alpha} + \left(\frac{(x_1 - u_2)c(1+\tilde{c}^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}}{q^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\alpha}\} =$$

(обозначив $\boldsymbol{s} = \frac{c(1+\tilde{c}^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}}{q^{\frac{1}{\alpha}}} = \tilde{c}(1 + \tilde{c}^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$, и используя **(Л1)** и **(Л2),** получаем)

$$= \boldsymbol{Z_1^*}(x_0) = q^2 [x_0(1 + \boldsymbol{s}^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha}, \text{ при } \boldsymbol{u_2^*}(x_0) = \frac{x_0}{1+\boldsymbol{s}^{\beta}}. \qquad \text{(D 1.0)}$$

Или, после подстановки вместо $\boldsymbol{s}$ его выражения, получаем более удобный для вычислений вид:

$$Z_1^*(x_0) = q^2\,[x_0(1+\tilde{c}^{\beta}+\tilde{c}^{2\beta})^{\frac{1}{\beta}}]^{\alpha}\,, \qquad \text{(D 1.1)}$$

$$\text{при}\quad u_1^*(x_0) = \frac{x_0}{1+\tilde{c}^{\beta}+\tilde{c}^{2\beta}} \qquad \text{(D 1.2)}$$

$$\text{Где}\qquad \tilde{c} = \frac{c}{q^{\frac{1}{\alpha}}}\,. \qquad \text{(D 1.3)}$$

Важное замечание 2:

Можно доказать, что в этой **Задаче 2.1**, как и в **Задаче 1** при этих же условиях, но при произвольном числе периодов $\boldsymbol{n}$ и для произвольного периода (шага) $\boldsymbol{k}$, $1 \le \boldsymbol{k} < \boldsymbol{n}$, функции Беллмана и соответствующие условные оптимальные управления имеют следующий вид **!!!!!!!!**:

$$Z_k^*(x_{k-1}) = q^{n-k}\,[\,x_{k-1}\Big(\sum_{j=0}^{n-k}(\tilde{c}^{j\beta})\Big)^{\frac{1}{\beta}}\,]^{\alpha} \qquad (*3)$$

$$\text{при}\quad u_k^*(x_{k-1}) = \frac{x_{k-1}}{\sum_{j=0}^{n=k}(\tilde{c}^{j\beta})} \qquad (*4)$$

Поскольку **Задача 2.1**, как задача нахождения оптимальных управлений эквивалентна **Задаче2** , то найденные в **Задаче 2.1** оптимальные управления $\boldsymbol{u_k^*}$, k= 1, 2, 3 , оптимальны и для **Задачи 2.** Максимальный суммарный результат $\boldsymbol{F}^*(x_0)$ в **Задаче 2** получается:

$\boldsymbol{F}^*(x_0)$ = **Aq** $\boldsymbol{\Phi}^*(x_0)$ **,** где $\boldsymbol{\Phi}^*(x_0)$ - **м**аксимальный суммарный результат, найденный в решённой выше **Задаче 2.1.** $\boldsymbol{\Phi}^*(x_0)$ = $\boldsymbol{Z_1^*}(x_0)$.

Из формул (∗3) и (∗4) следует, что дополнительное условие наличия дисконта $\boldsymbol{q}$ можно интерпретировать как изменение (увеличение) скорости роста леса ***C*** в ситуации без дисконта.

И наоборот: (*сформулировать самостоятельно интерпретацию наличия коэффициента **C** скорости роста леса через наличие в условии соответствующего денежного дисконта !!!)*

Важные вопросы для самостоятельного анализа: !!!!

1. Какие важные изменения произойдут в оптимальном решении (в оптимальных объёмах рубки) если в заданной функции ценообразования $f(\boldsymbol{u})$ = $\boldsymbol{Au^{\alpha}}$ будет условие $\boldsymbol{\alpha} > 1$, например, $\boldsymbol{\alpha = 2}$ **?**

2. На сколько процентов увеличится оптимальный суммарный результат, если дисконт ***q*** увеличится на **b%** (на 20%) ?

§2. "*Задачи об оптимальной стратегии продажи экономического актива* ".

Задача3 "*О продаже актива*"

Актив выставлен на продажу и должен быть продан в течении *n* временных периодов. Известно, что в каждыё период может поступить одно из ***m*** возможных предложений о покупке по цене $\mathbf{C_i}$ с вероятностью $\mathbf{P_i}$. Множества возможных значений цен $\{\mathbf{C_1 \ldots C_m}\}$ и их вероятностей $\{\mathbf{P_1 \ldots P_m}\}$ известны.

Рассчитать и описать оптимальную стратегию продажи, которой должен придерживаться продавец в течении всего периода продаж.