Глава 1. Элементы Динамического программирования (ДП)

Тема 1.1. Модель и общая постановка математической задачи ДП. Метод решения на основе принципа оптимальности Беллмана.

§1. Примеры типичных экономических задач, решаемых с использованием метода ДП.

Пример 1 ("Задача о заготовке и продаже леса")

Участок леса объёма V_0 сдаётся в аренду для полной вырубки леса в течении n периодов (лет). В каждом периоде вырубленный лес сразу продаётся, а выручка кладётся в банк под q % годовых.. При этом цена зависит от объёма так, что выручка от продажи Vм^3 леса равна $P(V)$. Объём древесины растущего леса увеличивается за период на C %. В каждом периоде рубка осуществляется в начале периода.

Определить объёмы рубки и продажи леса в каждом периоде так, чтобы общая сумма денег на банковском счёте - после n периодов эксплуатации участка - была максимальной.

Пример 2 ("Задача о распределении средств между предприятиями").

Для каждого из N промышленных предприятий известна его функция отдачи $g_k(x)$ - зависимость прибыли от вложенных средств x .

Распределить S_0 единиц инвестиционных средств между этими предприятиями так, чтобы их суммарная прибыль была максимальной.

Пример 3 ("Задача о продаже актива").

Актив выставлен на продажу и должен быть продан в течении *n* временных периодов. Известно, что в каждыё период может поступить одно из *m* возможных предложений о покупке по цене C_i с вероятностью P_i . Множества возможных значений цен $\{C_1 \ldots C_m\}$ и их вероятностей $\{P_1 \ldots P_m\}$ известны.

Рассчитать и описать оптимальную стратегию продажи, которой должен придерживаться продавец в течении всего периода продаж.

Пример 4 ("Задача об эксплуатации оборудования ").

Оборудование эксплуатируется в течение *n* лет, после этого продается. В начале каждого года можно принять решение об одном из нескольких возможных действий: сохранить оборудование; произвести ремонт; заменить его новым; и т.д.. После *t* лет эксплуатации оборудование можно продать за *g (t)* рублей (ликвидная стоимость). Затраты на эксплуатацию, на ремонт и доходы от эксплуатации в течение любого года зависят от возраста *t* оборудования к началу этого года и равны, соответственно, *r(t), p(t) и s(t)* .

Определить оптимальную стратегию эксплуатации оборудования в течении *n* лет , чтобы суммарные затраты с учетом начальной покупки по цене P_0 и заключительной продажи были минимальны. (Или, чтобы была максимальной суммарная прибыль).

§ 2. Описание математической модели типичных динамических экономических процессов, оптимизируемых с помощью ДП.

Структура, элементы, переменные, условия и особенности модели ДП.

1) Управляемый экономический процесс оптимизируется на временном интервале, разбитом на **n** периодов (шагов) с номерами i = 1,2,...,k,...,n-1,n. Задача оптимизации формулируется как конечный многошаговый процесс управления экономической системой на временном интервале длины **n**.

2) На каждом шаге *k* состояние экономической системы (ЭС) характеризуется вектором $\vec{x}_k$, состоящим из p переменных состояния:

$$\vec{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^j, \dots x_k^p), \; k = 1, 2,\dots n; \quad j = 1, 2,\dots p$$

3) На каждом шаге *k* осуществляется управляющее воздействие, которое задаётся управляющим вектором (управлением) $\vec{u}_k$, состоящим из m переменных управления:

$$\vec{u}_k = (u_k^1, u_k^2, \dots, u_k^j, \dots u_k^m), \; k = 1, 2,\dots n; \quad j = 1, 2,\dots m \;;$$

$\vec{u}_k \in U_k$, U_k - множество всех допустимых управлений $\vec{u}_k$ на *k*-м шаге.

4) На каждом шаге *k* задано правило (функция) $\boldsymbol{\varphi_k}$, которое вычисляет состояние $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}}$ на *k*-м шаге в зависимости от предыдущего состояния $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k-1}}$ и управления $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{k}}$:

$$\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k}} = \varphi_k\,(\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k-1}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{k}}), \qquad (1)$$

это равенство называется уравнением состояния на *k*-м шаге, *k* = 1, 2....n-1, n.

5) На каждом шаге *k* имеем "результат" F_k работы системы на этом шаге. "Результат" рассчитывается с помощью заданной "целевой функции *k*-го шага", $\boldsymbol{f_k}(\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k-1}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{k}})$, зависящей от управления $\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{k}}$ на *k*-м шаге и состояния $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k-1}}$ на предыдущем шаге:

$$\mathbf{F_k} = \boldsymbol{f_k}(\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k-1}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{k}}), \quad \boldsymbol{k} = \mathbf{1, 2,...n.} \qquad (2)$$

6) В модели задана целевая функция $\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}}, \mathbf{u})$ процесса на всём интервале из n шагов. Для любых конкретных начального состояния $\vec{x}_0$ и допустимого набора управлений $\mathbf{u}$ целевая функция вычисляет суммарный результат всего процесса, как сумму результатов отдельных шагов:

$$\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}}, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{f_k}(\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{k-1}}, \vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{k}})$$

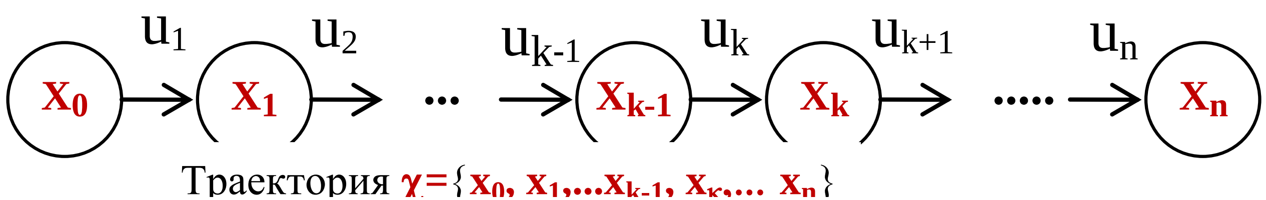
$$\boldsymbol{F}(\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{0}}, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F_k} \qquad (3)$$

Целевая функция процесса является аддитивной и равна сумме целевых функций каждого шага.

7) Для любого набора допустимых управлений **u** $= (\vec{\boldsymbol{u}}_1, \vec{\boldsymbol{u}}_2, .\, \vec{\boldsymbol{u}}_k \,.\,.\,, \vec{\boldsymbol{u}}_n)$**,** **u**$\in$ **U,** последовательность χ векторов состояний

$$\chi = \{ \vec{\boldsymbol{x}}_0,\ \vec{\boldsymbol{x}}_1, \vec{\boldsymbol{x}}_2, \ldots \vec{\boldsymbol{x}}_k, \ldots, \vec{\boldsymbol{x}}_n\},$$

вычисленных с помощью уравнений состояния (1), называется фазовой траекторией из начальной "точки" $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ в конечную точку $\vec{\boldsymbol{x}}_n$, соответствующей набору управлений **u** (или просто, управлению **u**). При этом говорим, что " управление **u** переводит ЭС из состояния $\vec{\boldsymbol{x}}_0$ в состояние $\vec{\boldsymbol{x}}_n$**.**



§ 3. Постановка задачи динамического программирования (ДП).

Пусть заданы объекты, функции, условия и предположения из рассмотренных пунктов **1) - 6),** § 2.

Задача ДП (пошаговой оптимизации) формулируется следующим образом:

"определить такой оптимальный допустимый набор управлений u^*, переводящий ЭС из заданного начального состояния $\vec{x}_0$ в конечное состояние $\vec{x}_n$, при котором целевая функция $F(\vec{x}_0, u)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение."

Символическая математическая запись:

$$\max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} F(\vec{x}_0, \mathbf{u}) = \max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x}_{k-1}, \vec{u}_k), \qquad \textbf{(Задача ДП)}$$

или

$$F(\vec{x}_0, \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x}_{k-1}, \vec{u}_k) \to \max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} \qquad \textbf{(Задача ДП)}$$

Обозначим **функцию максимума** ***F*****($\vec{x}_0$)**, зависящую от начального состояния ЭС:

$$F^*(\vec{x}_0) = \max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} F(\vec{x}_0, \mathbf{u}). \qquad \textbf{(4)}$$

Т.е. ***F*****($\vec{x}_0$) -** равна максимальному значению целевой функции (на всём интервале), которое можно получить при оптимальном наборе управлений, и если в начале, перед 1-м шагом, система находилась в состоянии $\vec{x}_0$. Тогда:

$$F^*(\vec{x}_0) = F(\vec{x}_0, \mathbf{u}^*),$$

где $\mathbf{u}^* = \{\vec{u}_1^*, \ldots \vec{u}_k^*, \ldots \vec{u}_n^*\}$, - оптимальный набор управлений в задаче;

$\vec{u}_1^*, \ldots, \vec{u}_k^*, \ldots \vec{u}_n^*$ - оптимальные управления на соответствующих отдельных шагах 1, 2, ..., k,..., n.

Обозначают: $$\mathbf{u}^* = \arg \max_{\mathbf{u}\in\mathbf{U}} F(\vec{x}_0, \mathbf{u}).$$

Запись означает:

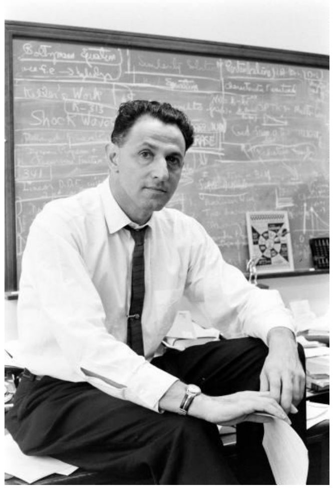
" $\mathbf{u}^*$ - такой набор управлений из всех возможных наборов $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, при котором $F(\vec{x}_0, \mathbf{u})$ принимает наибольшее значение (равное $F(\vec{x}_0, \mathbf{u}^*) = F^*(\vec{x}_0)$)"

Оптимальной фазовой траекторией называется такая траектория

$$\chi^* = \{\vec{x}_1^*, \vec{x}_2^*, \ldots, \vec{x}_k^*, \ldots \vec{x}_n^*\},$$

состояния которой соответствуют оптимальному набору управлений $\mathbf{u}^* = \{\vec{u}_1^*, \ldots \vec{u}_k^*, \ldots \vec{u}_n^*\}$.

§ . Решение Задач ДП.
Принцип оптимальности и уравнения Беллмана.



Принцип оптимальности впервые был сформулирован Р. Беллманом в 1953 г. :

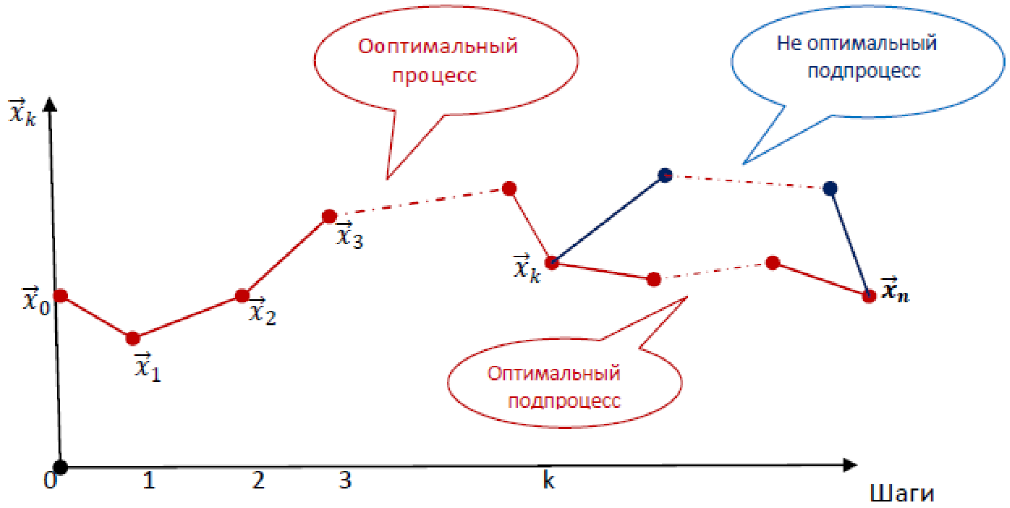
*" Каково бы ни было состояние **X** системы в результате какого-либо числа шагов, на ближайшем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный."*

Основное требование для справедливости ***Принциа оптимальности*** - следующее условие **"отсутствия обратной связи "** :

"*Выбор оптимального управления на любом k-м шаге зависит только от состояния системы к этому шагу и не влияет на предшествующие шаги.*"

Принцип оптимальности означает, что *для любого процесса оптимальное управление таково, что оно является оптимальным и для любого подпроцесса по отношению к исходному состоянию этого подпроцесса.*

Если изобразить геометрически оптимальную фазовую траекторию в виде ломаной линии, то любая часть этой ломаной будет являться оптимальной траекторией относительно начала и конца.



Для выражения ***Принципа оптимальности*** в математической форме введём следующие обозначения, объекты и конструкции:

Функции Беллмана

Обозначим через функцию $\mathbf{Z_k^*}\ (\vec{x})$ следующий показатель:

" *наилучший суммарный результат, который может быть получен при оптимальном управлении на n-k+1 шагах, начиная с k -го до конца (до n-го) , при условии, что к началу k-го шага система находится в состоянии* $\vec{x}$ *(т.е. можно считать, что* $\vec{x}$ *есть состояние системы на k-1 шаге,* $\vec{x} = \vec{x}_{k-1}$*)."*

$\mathbf{Z_k^*}\ (\vec{x})$ называется: " **k-я функция Беллмана".**

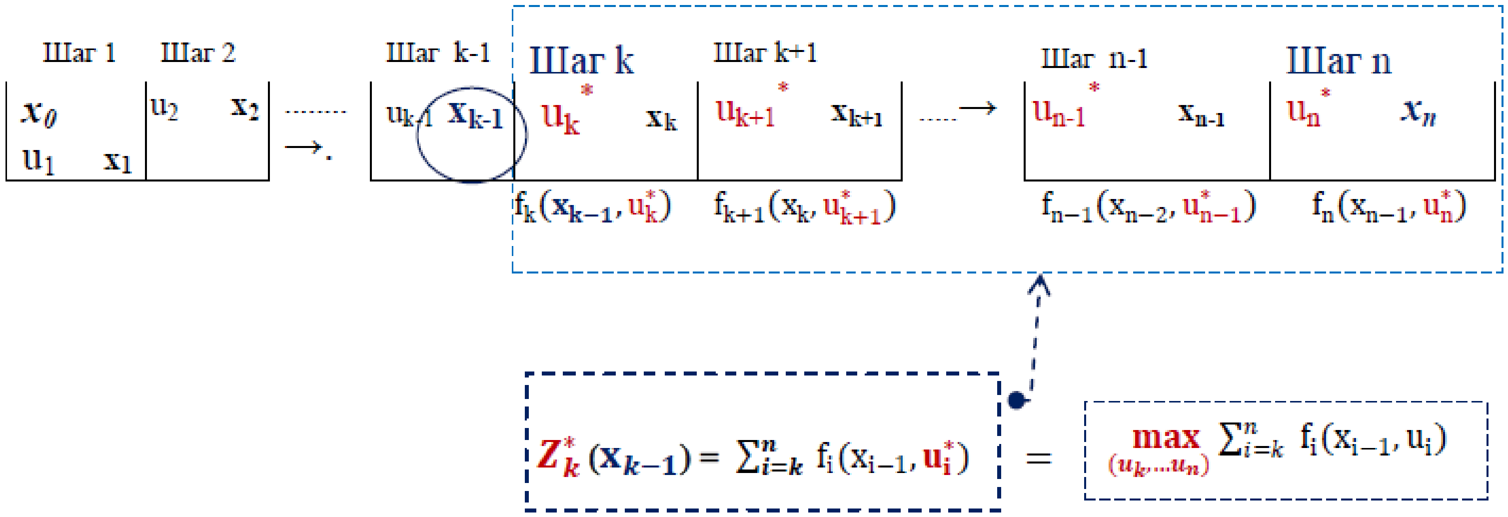
$\mathbf{Z_k^*}\ (\vec{x})$ называется так же: " **k-й условный максимум целевой функции".**

$\mathbf{Z_k^*}\ (\vec{x})$ фактически равна:

$$\mathbf{Z_k^*}\ (\vec{x}) = \max_{(u_k,\dots u_n)} \sum_{i=k}^{n} f_i(\vec{x}_{i-1}, \vec{u}_i), \quad \text{при} \quad \vec{x}_{k-1} = \vec{x}$$

Итак, для каждого k-го Шага динамического процесса определена своя " k-я функция Беллмана": $\mathbf{Z_k^*}\ (\vec{x})$, k = 1, 2, ..., k, ..., n-1, n.

$\mathbf{Z_1^*}\ (\vec{x})$, $Z_2^*\ (\vec{x})$, ..., $Z_k^*\ (\vec{x})$, ... , $Z_{n-1}^*\ (\vec{x})$, $\mathbf{Z_n^*}\ (\vec{x})$.



Заметим **важный факт**:

$Z_1^*(\vec{x}_0)$ совпадает с $F^*(\vec{x}_0)$ **,** оптимальным значением целевой функции на всём интервале задачи !!! :

$$Z_1^*(\vec{x}_0) = F^*(\vec{x}_0)$$

Поэтому нам особенно важно уметь находить *__первую__* "1-ю функцию Беллмана" $Z_1^*(\vec{x}_0)$.

Уравнения Беллмана

Можно показать, что из ***Принципа оптимальности*** вытекает следующая связь между k-ой и k+1-ой функциями Беллмана, для каждого k = 1, 2, ..., k, ..., n-1:

$$\boldsymbol{Z_k^*(\vec{x}_{k-1}) = \max_{\vec{u}_k \in U_k} \{f_k(\vec{x}_{k-1}, \vec{u}_k) + Z_{k+1}^*(\vec{x}_k)\}} - (\textbf{k-е уравнение Беллмана})$$

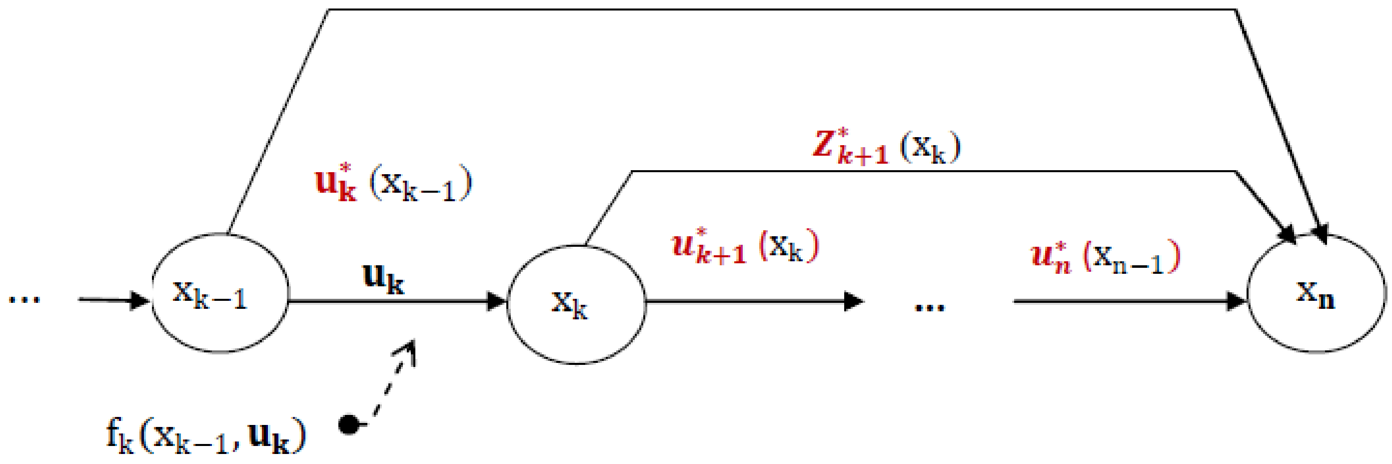
где $\boldsymbol{\vec{x}_k = \varphi_k(\vec{x}_{k-1}, \vec{u}_k)}$, (*уравнение состояния на* k - *шаге*)

k = n, n-1,..., k,..., 2, 1, 0.

k-тое уравнение Беллмана - есть соотношение между функциями Беллмана $\boldsymbol{Z_k^*(\vec{x}_{k-1})}$ **и** $\boldsymbol{Z_{k+1}^*(\vec{x}_k)}$, и позволяет вычислить $\boldsymbol{Z_k^*(\vec{x}_{k-1})}$ **зная** $\boldsymbol{Z_{k+1}^*(\vec{x}_k)}$.

"Графическая иллюстрация смысла **k-го уравнения Беллмана"**

$$Z_k^*(x_{k-1}) = \max_{\mathbf{u_k} \in U_k} \{f_k(x_{k-1}, \mathbf{u_k}) + Z_{k+1}^*(x_k)\}$$



$$\mathbf{u_k^*}(x_{k-1}) = \arg\max_{\mathbf{u_k} \in U_k} \{f_k(x_{k-1}, \mathbf{u_k}) + Z_{k+1}^*(x_k)\}$$

Что значит "***решить k-е уравнение Беллмана*" ?**

Это значит решить его как задачу оптимизации, с учётом *уравнения состояния на k - шаге.* При этом мы должны найти:

1) Управление $\boldsymbol{u_k^*}$ как функцию $\boldsymbol{u_k^*}(x_{k-1})$, зависящую от x_{k-1}. Эта функция называется "***условным оптимальным управлением на k -ом шаге.***"

2) *k-ю функцию Беллмана* $Z_k^*(x_{k-1})$ (*k-й условный максимум целевой функции*).

$Z_k^*(x_{k-1})$ находим по формуле **(**)** , подставляя $u_k^*(x_{k-1})$ в уравнение Беллмана и с учётом уравнения состояния:

$$Z_k^*(x_{k-1}) = f_k(x_{k-1}, u_k^*(x_{k-1})) + Z_{k+1}^*(\varphi_k(x_{k-1}, u_k^*(x_{k-1}))) \qquad (**)$$

Отсюда следует, что:

начиная с $Z_n^*(\vec{x}_{n-1})$, используя **уравнения Беллмана,** можно вычислить последовательно все другие функции Беллмана:

$$Z_{n-1}^*(\vec{x}_{n-2}),\ Z_{n-2}^*(\vec{x}_{n-3}),\dots,\ Z_k^*(\vec{x}_{k-1}),\dots,\ Z_2^*(\vec{x}_1) \text{ и заканчивая } Z_1^*(\vec{x}_0).\ !!!$$

Общий Алгоритм решения Задачи ДП

I. Рекуррентное нахождение функций Беллмана.

"Обратная схема итераций"

"Обратная схема итераций" - это следующая совокупность этапов вычисления (отсчёт обратный):

Этап Bn. Вычисляем *n*-ю функцию Беллмана $Z_n^*(x_{n-1})$, –

" *условный максимумом целевой функции на n-ом шаге*".

Поскольку это этап на последнем, *n-м,* шаге, то очевидно, что

$$\boldsymbol{Z_n^*}\,(x_{n-1}) = \max_{\mathbf{u_n}\in U_\mathbf{n}} f_{\boldsymbol{n}}(x_{\boldsymbol{n}-1}, \mathrm{u}_\mathbf{n}). \qquad (\text{Э } 1.1)$$

Решая эту задачу оптимизации мы находим

"*условное оптимальное управление на п -ом шаге*", $\boldsymbol{u_n^*}$, зависящее от x_{n-1}.

Т.е. как функцию $\boldsymbol{u_n^*}\,(x_{n-1})$.

Далее, подставляя $\boldsymbol{u_n^*}\,(x_{n-1})$ в $f_{\boldsymbol{n}}(x_{\boldsymbol{n}-1}, \mathrm{u}_\mathbf{n})$ мы находим $Z_n^*\,(x_{n-1})$:

$$\boldsymbol{Z_n^*}\,(x_{n-1}) = f_n(x_{\boldsymbol{n}-1}, \boldsymbol{u_n^*}\,(x_{n-1})) \qquad (\text{Э } 1.2)$$

Таким образом находим пару условных функций на п -ом шаге :

$$\{\, \boldsymbol{u_n^*}\,(x_{n-1}), \boldsymbol{Z_n^*}\,(x_{n-1})\}.$$

Этап В n-1. Вычисляем *n-1* -ю функцию Беллмана $\boldsymbol{Z_{n-1}^*}\,(x_{n-2})$, –

" *условный максимумом целевой функции на n-1 -ом шаге*".

Записываем *n-1 -е* уравнение Беллмана для шага *n-1:*

$$\boldsymbol{Z_{n-1}^*}\,(x_{k-2}) = \max_{\mathbf{u_{n-1}}\in \boldsymbol{U_{n-1}}} \{f_{n-1}(x_{n-2}, \mathrm{u}_{\mathrm{n}-1}) + \boldsymbol{Z_n^*}\,(x_{n-1})\} \qquad (\text{Э } 2.1)$$

$$\text{где} \quad x_{n-1} = \varphi_{n\text{-}1}(x_{n-2}, \mathrm{u}_{\mathrm{n}-1}) \qquad (\text{Э } 2.2)$$

Решая (Э 2.1) как задачу оптимизации, с учётом (Э 2.2) мы находим

"*условное оптимальное управление на n-1 -ом шаге*", $\boldsymbol{u_{n-1}^*}$, зависящее от x_{n-2}.

Т.е. как функцию $\boldsymbol{u_{n-1}^*}\,(x_{n-2})$.

Далее, подставляя $\boldsymbol{u}^*_{\boldsymbol{n-1}}\,(x_{n-2})$ в Уравнение (Э 2.1) , с учётом (Э 2.2), по формуле **(**)** мы находим $\boldsymbol{Z}^*_{\boldsymbol{n-1}}\,(x_{k-2})$.

Таким образом находим пару условных функций на п-1 -ом шаге :

$$\{\, \boldsymbol{u}^*_{\boldsymbol{n-1}}\,(x_{n-2}), \boldsymbol{Z}^*_{\boldsymbol{n-1}}\,(x_{n-2})\} \qquad (Э\ 2.3)$$

• • •

Предположим, что осуществили **Этап n, Этап n-1, ..., Этап k+1:**

Этап Вk. Вычисляем *k* -ю функцию Беллмана $\boldsymbol{Z}^*_{\boldsymbol{k}}\,(x_{k-1})$, –
" *условный максимумом целевой функции на k -ом шаге*".
Записываем *k-е* уравнение Беллмана для шага *k:*

$$\boldsymbol{Z}^*_{\boldsymbol{k}}\,(x_{k-1}) = \max_{\mathrm{u_k} \in U_k} \{f_k(x_{k-1}, \mathrm{u_k}) + \boldsymbol{Z}^*_{\boldsymbol{k+1}}\,(x_k)\} \qquad (Э\ 3.1)$$

где $x_k = \varphi_k(x_{k-1}, \mathrm{u_k}) \qquad (Э\ 3.2)$

Решая (Э 3.1) как задачу оптимизации, с учётом (Э 3.2) мы находим
"*условное оптимальное управление на k -ом шаге*", $\boldsymbol{u}^*_{\boldsymbol{k}}$, зависящее от x_{k-1} .
Т.е. как функцию $\boldsymbol{u}^*_{\boldsymbol{k}}\,(x_{k-1})$.
Далее, подставляя $\boldsymbol{u}^*_{\boldsymbol{k}}\,(x_{k-1})$ в Уравнение (Э 3.1), с учётом (Э 3.2), по формуле **(**)** мы находим $\boldsymbol{Z}^*_{\boldsymbol{k}}\,(x_{k-1})$.

Таким образом находим пару условных функций на k-ом шаге:

$$\{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}^{*}(x_{k-1}),\ \ \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{k}}^{*}(x_{k-1})\} \qquad (Э\ 3.3)$$

• • •

Этап В1. На последнем **Этап В1 ,** аналогично решая 1-е уравнение Беллмана

$$\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{1}}^{*}(x_0) = \max_{\mathrm{u}_1 \in U_1} \{f_1(x_0, \mathrm{u}_1) + \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{2}}^{*}(x_1)\} \qquad (Э\ 4.1)$$

где $x_1 = \varphi_1(x_0, \mathrm{u}_1)$ (Э 4.2)

находим последнюю пару :

$$\{\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{1}}^{*}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}}),\ \ \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{k}}^{*}(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{0}})\} \qquad (Э\ 4.3)$$

Последовательность **Этапов Bn, B n-1, ...,Bk,... , B2, B1** называется

"***обратной схемой итераций***".

Процесс рекуррентного (последовательного) решения уравнений (Э 1.1), (Э 2.1),..., (Э 3.1), ..., (Э 4.1) и нахождение *условных оптимальных управлений*

$$\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n}}^{*}(x_{n-1}),\ \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{n-1}}^{*}(x_{n-2}),\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{k}}^{*}(x_{k-1}),\ \ldots,\ \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{1}}^{*}(x_0)$$

называется ***условной оптимизацией*** в соответствии с "***обратной схемой итераций***".

$Z_1^* (x_0)$ есть искомое максимальное значение целевой функции на всём интервале из шагов:

$$Z_1^* (x_0) = F^* (\vec{x}_0).$$

Теперь найдём весь набор оптимальных управлений $\mathbf{u}^* = \{u_1^*, \ldots u_k^*, \ldots u_n^*\}$.

Для этого осуществляется следующая

"прямая схема итераций",

с **Этапами A1, A2, ...Ak,....An-1, An**.

I *I. Нахождение оптимальных управлений и оптимальной траектории. Прямая схема итераций.*

Этап A1. Зная начальное x_0 и функцию *условного оптимального управления на 1 -ом шаге* $u_1^* (x_0)$, определяем

$$u_1^* = u_1^* (x_0).$$

Далее находим x_1^* , зная x_0 и u_1^* , и используя уравнение состояния на Шаге 1:

$$x_1^* = \varphi_1 (x_0, u_1^*).$$

Таким образом, находим оптимальную пару (u_1^*, x_1^*) **Шага 1**.

Этап А2. Далее, зная $\boldsymbol{x_1^*}$ и функцию *условного оптимального управления на 2 -ом шаге* $\boldsymbol{u_2^*}(x_1)$, определяем значение

$$\boldsymbol{u_2^* = u_2^*(x_1^*)}.$$

Далее находим $\boldsymbol{x_2^*}$, зная $\boldsymbol{x_1^*}$ и функцию $\boldsymbol{u_2^*}$, и используя уравнение состояния на Шаге 2**:**

$$\boldsymbol{x_2^*} = \varphi_2(\boldsymbol{x_1^*}, \boldsymbol{u_2^*}).$$

Таким образом находим оптимальную пару $(\boldsymbol{u_2^*}, \boldsymbol{x_2^*})$ **Шага 2**.

• • •

Этап А k . Далее, зная $\boldsymbol{x_{k-1}^*}$ и функцию *условного оптимального управления на k -ом шаге* $\boldsymbol{u_k^*}(x_{k-1})$, определяем

$$\boldsymbol{u_k^* = u_k^*(x_{k-1}^*)}.$$

Далее находим $\boldsymbol{x_k^*}$, зная $\boldsymbol{x_{k-1}^*}$ и функцию $\boldsymbol{u_k^*}$, и используя уравнение состояния на Шаге k **:**

$$\boldsymbol{x_k^*} = \varphi_k(\boldsymbol{x_{k-1}^*}, \boldsymbol{u_k^*}).$$

Находим оптимальную пару $(\boldsymbol{u_k^*}, \boldsymbol{x_k^*})$ **Шага k.**

• • •

Этап An На последнем **Этапе An** зная x_{n-1}^* и функцию *условного оптимального управления на n-1 -ом шаге ,* $u_k^*(x_{n-1})$, определяем

$$u_n^* = u_k^*(x_{k-1}^*).$$

Находим x_n^* , зная x_{n-1}^* и функцию u_n^* , и используя уравнение состояния на Шаге k **:**

$$x_n^* = \varphi_n(x_{n-1}^*, u_n^*).$$

Т.о., находим **последнюю** оптимальную пару (u_n^*, x_n^*) **Шага n.**

Последовательность действий **Этапов A1, ..., Ak, ..., An** называется ***"прямая схема итераций"***, и её можно представить в виде условной цепочки:

$$x_0 \to u_1^* = u_1^*(x_0) \Rightarrow x_1^* = \varphi_1(x_0, u_1^*) \to \ldots\ldots\ldots \to u_k^* = u_k^*(x_{k-1}^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_k^* = \varphi_k(x_{k-1}^*, u_k^*) \to \ldots\ldots \to u_n^* = u_n^*(x_{n-1}^*) \Rightarrow x_n^* = \varphi_n(x_{n-1}^*, u_n^*)$$

Или, кратко:

$$x_0 \to u_1^* \Rightarrow x_1^* \to u_2^* \Rightarrow x_2^* \to \ldots \to u_k^* \Rightarrow x_k^* \to \ldots\ldots \to u_n^* \Rightarrow x_n^*$$

Таким образом, в результате последовательного осуществления операций по "***обратной схеме итераций***" и по "***прямой схеме итераций***", находим:

1. Набор оптимальных управлений $\mathbf{u^*} = \{u_1^*, \ldots u_k^*, \ldots u_n^*\}$.

2. Оптимальную траекторию, соответствующую оптимальному набору :

$$\chi = \{x_0, x_1^*, x_2^*, \ldots x_k^*, \ldots x_n^*\},$$

3. Максимальное значение целевой функции на всём интервале из n **шагов:**

$$F^*(\vec{x}_0) = Z_k^*(x_0)$$

Конец Темы 1.1.

Тема 1.2. Примеры решения типичных экономических задач с использованием метода ДП.

§1. *"Задача об оптимальной эксплуатации лесного ресурса".*