

Campionamento e quantizzazione

segnale continuo: si definisce segnale tempo-continuo un segnale $x(t)$ tale che T sia un intervallo di \mathbb{R} .

segnale discreto: si definisce segnale tempo-discreto un segnale $x[t]$ tale che T sia una sequenza numerabile di istanti di tempo t_0, t_1, \dots, t_N . In altri termini è una funzione con valori forniti in corrispondenza ad una serie di tempi individuati nel dominio dei numeri interi. Un segnale tempo-discreto con una serie di valori in corrispondenza di intervalli di tempo equidistanti, si dice associato ad una specifica *frequenza di campionamento*.

campione: ci si riferisce al *campione* (o *sample*) come ad una singola osservazione.

Campionamento

Campionare significa, letteralmente, *prelevare da un dato segnale continuo $s(t)$ i valori che esso stesso assume in certi e determinati istanti di tempo*. Se poniamo T_c un certo intervallo di tempo (passo di campionamento), un campionamento uniforme (intervalli equidistanti) con passo T_c corrisponde all'osservazione del segnale continuo negli istanti nT_c con $(-\infty < n < +\infty)$

$$s(t) \rightarrow s[nT_c]$$

Frequenza di campionamento f_c è, invece, l'inverso del passo di campionamento

$$f_c = \frac{1}{T_c}$$

Domanda: **che valore deve assumere f_c affinché $s[nT_c]$ sia il più fedele possibile a $s(t)$?**

La risposta è nella teoria matematica alla base del procedimento di conversione ADC (Analog-to-Digital Converter), ovvero, il *teorema del campionamento*, studiato da Cauchy nel 1841 ed attribuito a H. Nyquist e C. Shannon.

il teorema afferma che: *un segnale continuo a banda limitata può essere rappresentato completamente da un insieme discreto di valori, quando la frequenza di campionamento f_c è almeno il doppio della frequenza più alta contenuta nel segnale*

$$f_c \geq 2f_{max}$$

$$f_{max} = \text{vincolo di Nyquist}$$

Se tale condizione non viene soddisfatta, si dice che il campionamento *fallisce*. In altre parole, se provassimo a campionare un segnale con f_c inferiore al vincolo di Nyquist, la sovrapposizione di alcune componenti in frequenza creerebbe distorsioni dovute dall'introduzione di nuove componenti non presenti nello spettro di partenza. Un fenomeno, questo, che prende il nome di *equivocazione* o *aliasing*: un'errata interpretazione delle singole osservazioni, a cui consegue una errata ricostruzione di $s(t)$:

$$x = |f_c - f_0|$$

Nei segnali complessi, il fenomeno dell'aliasing introduce tante componenti estranee allo spettro quante sono quelle la cui frequenza eccede il vincolo di Nyquist, con un'interazione tra frequenze proprie e frequenze estranee, in diretta relazione con il rapporto $\frac{f_c}{f}$.

se $\frac{f_c}{f} \in \mathbb{Z} \rightarrow$ distorsione armonica

se $\frac{f_c}{f} \notin \mathbb{Z} \rightarrow$ interleaving

Un sistema campionatore è, per tale ragione, dotato di un filtro passa-basso, detto per l'appunto *filtro anti-aliasing* con frequenza di taglio posta circa a $\frac{f_c}{2}$, al fine di restringere la banda del segnale stesso per soddisfare approssimativamente il teorema del campionamento di Nyquist-Shannon. Non è possibile eliminare del tutto il fenomeno dell'equivocazione e, l'ammontare di tale errata interpretazione dipende solo ed esclusivamente dalla qualità del filtro.

Quantizzazione

Quantizzare significa *assegnare un livello discreto di ampiezza scelto in una gamma di valori compresi tra zero e massimo disponibile (gamma dinamica)*.

Il campionamento, come dicevamo, genera un segnale tempo-discreto che può assumere valori di ampiezza caratterizzati da infinite cifre significative, condizione che renderebbe impossibile l'elaborazione per mezzo di calcolatore. Si necessita di un'approssimazione, una discretizzazione, è necessario associare tali valori ad infinite cifre a quantità ben definite e non-continue, in altre parole, bisogna quantizzarli.

I valori prelevati dal campionamento, dunque, vengono raggruppati in celle, anche dette *intervalli di quantizzazione*, ed associati ad un valore di riferimento che si definisce *livello di restituzione*. Individuato per ogni valore del segnale in ingresso l'intervallo di quantizzazione di appartenenza, si potrà associare ad esso il suo relativo livello di restituzione:

$$Q : x \in \mathbb{R} \rightarrow Q(x) \in x_0, x_1, \dots, x_{M-1}$$

con M = numero di livelli di quantizzazione.

A tali condizioni di approssimazione è, però, inevitabile una perdita di informazioni. Si definisce, per l'appunto, *errore di quantizzazione* o *rumore di quantizzazione*, la differenza tra la tensione ricostruita nel segnale digitale e quella in entrata del segnale analogico.

$$e = Q(x) - x$$

Un quantizzatore (in questo caso un quantizzatore uniforme) è, dunque, un sistema non-lineare che riceve in ingresso un valore reale $x[n]$ e, restituisce in uscita il valore più vicino ad $x[n]$ fra gli M livelli possibili di quantizzazione. Considerando M livelli, se il valore d'ampiezza è compreso tra $-V$ e $+V$, allora l'intervallo (passo di quantizzazione) equivale a:

$$\Delta = \frac{2V}{M}$$

solitamente, nei sistemi di conversione il numero di livelli di restituzione M è:

$$M = 2^N$$

con N = numero di bit.

Ad *8bit*, ad esempio, corrisponde una gamma dinamica distribuita in

$$2^8 = 256 \text{ livelli}$$

con

$$-2^{N-1} - 1 \leq g \leq 2^{N-1} - 1$$

e, con una risoluzione massima per ogni livello, pari a

$$r_{max} = \frac{2V_{max}}{M}$$

Tutti i valori compresi in una regione ampia r_{max} saranno rappresentati dallo stesso livello di quantizzazione.

Per quanto concerne i segnali a banda larga e con elevati valori di ampiezza, l'errore di quantizzazione è rappresentabile con una variabile aleatoria definibile rumore bianco costante. In queste condizioni se volessimo conoscere la qualità del sistema di conversione dovremmo fare riferimento alla sua gamma dinamica, ossia, al rapporto tra suono e rumore (SQNR *Signal to Noise Ratio*) con rumore additivo e costante.

$$SQNR(dB) = (6.02 \cdot bit) + 1.76$$

con 6.02 che sta ad indicare che, ad ogni raddoppio del numero di livelli di restituzione si ha un raddoppio della massima ampiezza rappresentabile.

Per ridurre al minimo l'errore di quantizzazione, si ricorre spesso all'impiego di una piccola quantità di rumore a basso livello con ampiezza tipica uguale alla metà di un livello di quantizzazione (*dither noise*), che viene sommata al segnale in modo tale da distribuire diversamente l'energia delle componenti spurie. In questo modo, l'errore non è più statico ma casuale e, la distorsione che prima era armonica si trasforma in una distorsione a banda larga (*white noise*).