Pasquale Mainolfi

Appunti per il corso di Musica Elettronica

INTRODUZIONE SEMPLICE AI NUMERI COMPLESSI ($i^2 = -1$)

È bene partire subito col dire che l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è un'estensione dell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.
Perchè, ad un certo punto, i matematici hanno avuto la necessità di dover estendere $\mathbb{R}$? La risposta è, perchè, si presentano problemi che non hanno soluzione in $\mathbb{R}$.
Tutti gli insiemi numerici, dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, ai numeri interi $\mathbb{Z}$, razionali $\mathbb{Q}$ e, reali $\mathbb{R}$, nascono allo stesso fine.

$$\mathbb{N} \in \mathbb{Z} \in \mathbb{Q} \in \mathbb{R}$$

E, se l'esigenza per cui si è dovuto pensare ad un'estensione di $\mathbb{Q}$ è stata dover dare una soluzione a problemi del tipo $x^2 = 3$, ovvero, introdurre un ulteriore insieme che contenesse tutti quei numeri che oggi conosciamo come irrazionali,

$$x^2 = 3 \qquad x \pm \sqrt{3}$$

l'esigenza per cui si è dovuto pensare ad un'estensione di $\mathbb{R}$ è stata dover dare soluzione ad equazioni del tipo

$$x^2 = -1$$

In $\mathbb{R}$ non esistono numeri il cui quadrato restituisce un numero negativo!

Dal punto di vista geometrico, se immagino tutti i numeri reali disposti su una retta orizzontale, mi rendo conto che un'estensione non è possibile, semplicemente perchè non c'è spazio (i numeri reali occupano tutti gli spazi a disposizione). L'unico modo è spostarsi ed occupare un'altra dimensione. Definisco in questo modo una ulteriore retta disposta verticalmente sulla retta dei numeri reali. Ciò che ottengo è un piano cartesiano: ad ogni punto della retta reale posso associare un altro punto di una retta verticale che rappresenta un altro numero reale.
Tale rappresentazione permette di formare infinite coppie ordinate di numeri reali (a, b) che posso identificare come punti sul piano.

Tale nuovo insieme è il risultato del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$,

$$(a, b) \in \mathbb{R}^2$$

($\mathbb{R}^2$ si legge R *due*)

in cui definiamo la retta orizzontale come asse della parte *Reale Re* e la retta verticale, che rappresenta la vera e propria estensione, come asse della parte *Immaginaria* Im (la parte immaginaria sono sempre numeri reali!). Un numero complesso è una coppia di numeri reali

$$(a, b) \rightarrow (Re, Im)$$

la parte immaginaria Im *è l'estensione con altri numeri reali rispetto alla retta reale. I numeri complessi per poter vivere necessitano di due dimensioni.*

In realtà, però, ciò che conferisce una vera e propria struttura al nuovo insieme sono le operazioni matematiche poste in essere tra le coppie di numeri (o numeri complessi).
Cosa succede se sommiamno $(a, b) + (c, d)$? In modo particolarmente intuitivo, otterremo un nuovo numero complesso la cui parte reale sarà la somma delle parti reali e, la parte immaginaria la somma delle parti immaginarie

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

E, se moltiplichiamo $(a, b) \cdot (c, d)$? In questo caso la soluzione è un pò più complessa e affatto intuitiva. Il prodotto tra due numeri complessi, per definizione, è dato da

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Potremmo, allora, proprio alla luce di questa nuova struttura scrivere il numero complesso (a, b) come la somma di due numeri complessi

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

e, ancora, $(0, b)$ come il prodotto di due numeri complessi

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$$

di fatto, $(0, 1) \cdot (b, 0) = (0 \cdot b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) = (0, b)$.

Un numero complesso con parte immaginaria zero semplicemente è un numero reale e, quindi, potremo ancora riscrivere $(a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0)$ come

$$a + (0, 1) \cdot b$$

in cui definiamo $(0, 1)$ un particolare numero complesso che prende il nome di *unità immaginaria* i:

$$a + ib$$

dove $i^2 = -1$

$$\begin{aligned} i^2 &= (0,1) \cdot (0,1) \\ &= (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= (0 - 1, 0 + 0) \\ &= (-1, 0) \\ &= -1 \end{aligned}$$