Pasquale Mainolfi

Appunti per il corso di Musica Elettronica

Convoluzione discreta

La convoluzione è un'operazione matematica che svolge un ruolo fondamentale nell'elaborazione dei segnali audio. In pratica, il procedimento permette di generare un terzo segnale come combinazione di due segnali, rispettivamente definiti, *segnale di input* e *kernel* (si pensi ad esempio all'applicazione di filtri, riverberi, etc...).

Matematicamente, la convoluzione è una semplice operazione tra due funzioni f e h, che consiste nell'integrare il prodotto tra la prima e, la seconda traslata di un certo valore: un'operazione matematica (simbolo $$) che, date due funzioni, ne produce una terza calcolata come segue:

$$(f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(\tau - t)dt$$

$f(t) =$ input

$g(t) =$ kernel

$\tau =$ variabile di integrazione

Nel dominio dei segnali digitali, parliamo, invece di convoluzione discreta, espressa come una sommatoria finita anzichè un integrale.

$$(f * h)(t) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)f(t - n)$$

La sequenza generata y dalla convoluzione tra f e h avrà lunghezza $N_y = (N_f + N_h) - 1$.

Convoluzione lineare e convoluzione circolare

La convoluzione lineare è il tipo più comune e si applica a segnali non periodici. La sequenza generata da $(x * h)$, di lunghezze rispettivamente N ed M, sarà $(N + M) - 1$.

$$(x * h)[n] = \sum_{m=0}^{(N+M)-2} x[m]h[m - n]$$

Si parla di utilizzo di convoluzione circolare, quando ad essere trattati sono segnali periodici, che hanno una certa struttura ciclica. La lunghezza di x deve coincidere con la lunghezza di h: $N = M$.

$$(x * h)[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[m-n]$$

Entrambe le procedure equivalgono ad un prodotto tra matrici $A \times B$, dove:

$$A = n \times 1, \quad B = n \times n$$

$n = (N + M) - 1$ con convoluzione lineare
$n = N$ con convoluzione circolare

Nota bene: tutte le celle della matrice che eccedono la lunghezza del segnale in questione (come ad esempio per la convoluzione lineare) saranno riempite con valore zero (*zero padding*).

Trasformata di Fourier e convoluzione: teorema della convoluzione
Il teorema della convoluzione afferma che la trasformata di Fourier della convoluzione di due funzioni è il prodotto delle trasformate delle funzioni stesse.

Se indichiamo con $\mathcal{F}$ l'operatore trasformata di Fourier, allora:

$\mathcal{F}\{f * h\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{h\}$
$\mathcal{F}\{f \cdot h\} = \mathcal{F}\{f\} * \mathcal{F}\{h\}$
$(f * h) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{h\}\}$

Nel dominio dei segnali discreti (Discrete Fourier Trasform DFT)

$(x * h) = DFT^{-1}[DFT\{x\} \cdot DFT\{h\}]$