Pasquale Mainolfi

Appunti per il corso di Musica Elettronica

# Modeling Sound (part 1)

## Table lookup oscillator

La forma di sintesi sonora più elementare consiste nel produrre un segnale periodico mediante la continua ripetizione di una certa forma d'onda.
Realizzare un oscillatore complesso o reale, però, è possibile solo in un contesto analogico. Nel dominio discreto dei numeri, la tipologia di oscillatore più diffusa è quello a forma d'onda tabulata (*table look-up* oscillator): una serie di punti equidistanti memorizzati in una tabella esplorata sequenzialmente.
In altre parole, un approccio assai efficiente che consiste nel calcolare preventivamente i campioni della forma d'onda, memorizzarli in una tabella di solito implementata come buffer circolare e accedervi ogni volta che è necessario. Se memorizziamo nella tabella una copia di un periodo della forma d'onda desiderata, quando cicliamo sulla wavetable con l'ausilio di un puntatore circolare, generiamo una forma d'onda periodica. Quando il puntatore raggiunge la fine della tabella, torna indietro e punta di nuovo all'inizio della tabella.

Se consideriamo una tabella di lunghezza $N$

$$n = (n+1)modN \rightarrow s[n] = x[n]$$

Il periodo della forma d'onda generata è dato da $T = \frac{N}{f_s}$, e la sua frequenza naturale di oscillazione $f = \frac{f_s}{N}$. Se vogliamo, però, cambiare la frequenza, avremmo bisogno di memorizzare più tabelle. Una soluzione migliore è memorizzare molti punti equidistanti della forma d'onda nella tabella, e poi leggere il valore in corrispondenza dell'ascissa desiderata (più numerosi sono i punti nella tabella, migliore sarà l'approssimazione). L'oscillatore ricerca ciclicamente nella tabella il punto più vicino a quello richiesto. generando una forma d'onda con diversa frequenza.
La distanza (in campioni) tra due campioni della tabella prelevati in istanti successivi si dice *Sampling Increment* $i$ ed è proporzionale alla frequenza $f$ del suono generato:

$$f = \frac{i \cdot f_s}{N}$$

Ne consegue che, per generare una forma d'onda ad una certa frequenza è necessario variare l'incremento $i$ in base alla frequenza desiderata, ad $N$ e $f_s$.

$$i = \frac{f \cdot N}{f_s}$$

Cosa succede se $i$ non è un intero (l'indice deve essere un intero)? In questo caso è necessario *interpolare*, ovvero, provare a stimare un valore intermedio tra quelli presenti. Un esempio è l'interpolazione lineare:

Ponendo:
$k = \{i\} = i - \lfloor i \rfloor$ parte decimale dell'incremento

$$y = (1 - k) \cdot x[\lfloor i \rfloor] + k \cdot x[\lfloor i \rfloor + 1]$$

Inoltre, è bene specificare che spostare il punto di partenza nella tabella corrisponde a far variare la fase della forma d'onda. Ciò significa che, un offset $p\pi$ in radianti, corrisponde all'indice

$$\frac{pN}{2}$$

Ad un offset di $\frac{\pi}{2}$, corrisponde l'indice:

$$index = \frac{1}{4}\frac{N}{2} = \frac{N}{8}$$

## Sintesi additiva

La sintesi additiva (famiglia delle sintesi a trasformazione lineare) è una metodologia di elaborazione sonora basata sul principio delle serie di Fourier: *sommare artificialmente onde elementari e fondamentali al fine di ottenere una risultante spettrale complessa.*

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k(t) \sin(\omega_k t)$$

Ogni componente $F$

$$F = A \sin(2\pi f + \phi)$$

deve essere definita in ampiezza $A$, frequenza $f$ e costante di fase $\phi$.

Un sistema si dice statico, quando le grandezze caratteristiche del sistema stesso non mutano nel tempo. Allo stesso modo, si parla di *sintesi additiva a spettro statico* quando la risultante complessa è data dalla sovrapposizione per addizione di componenti tempo-invarianti. È un sistema cosiddetto istantaneo in cui frequenza, ampiezza e fase di ciascuna formante appaiono ferme nel tempo, fisse

per l'intera durata dell'evento.
Un modello dinamico è, invece, un sistema che evolve nel tempo secondo una legge deterministica. Allo stesso modo, ma non necessariamente secondo una legge deterministica, un modello di *sintesi additiva a spettro dinamico* vuole essere la rappresentazione di un sistema che evolve nel tempo: ampiezza e frequenza tempo-varianti.

$$y(t) = \sum_{k=1}^{N} \Delta A_k(t) \sin\left(\Delta\omega_k t\right)$$

## Sintesi sottrattiva

La *sintesi sottrattiva* è un metodo di elaborazione attraverso cui, a partire da una sorgente a spettro complesso, si attenuano specifiche aree spettrali in modo da poterne selettivamente alterare delle altre. Anch'essa, come la sintesi additiva, appartiene alla famiglia delle sintesi per trasformazioni lineari e, opera per mezzo di un sistema più o meno complesso di filtri in modo tale da modellare miratamente l'anatomia spettrale di una sorgente a spettro complesso: sottrarre anziché sommare.

Si definisce *filtro*, un dispositivo basato su una rete di ritardi capace di produrre partendo da una sorgente a cui è applicato una trasformazione in funzione della frequenza, nel profilo dell'ampiezza e di fase del segnale: il termine *filtro* è usato per descrivere un dispositivo che discrimina, in accordo ad alcune caratteristiche degli oggetti applicati in ingresso, cosa può passare attraverso di esso e cosa no. Amplifica o attenua, dunque, parti spettrali ritardando i segnali di una piccola quantità di campioni e, combinando questi con valori diversi di guadagno (sistema lineare tempo-invariante LTI: lineare, perchè l'uscita generata dalla combinazione lineare di due o più ingressi è uguale alla combinazione lineare delle uscite generate dai singoli ingressi; tempo-invariante, perché l'uscita generata da un segnale ritardato è uguale all'uscita generata dal segnale originale, ritardata della stessa quantità).

Sono due le principali categorie di filtri:

1. Filtri non ricorsivi: **FIR (Finite-Impulse-Response)** o feedforward, in cui il circuito risponde ad una storia di segnali brevi e finiti

   $$y[n] = x[n] + b_0 x[n-1]$$

   Sono circuiti cosiddetti ad anello aperto, senza interazione tra ingresso ed uscita, con uscita sempre lineare e stabile e, risposta lineare in fase. Il procedimento consiste nel sommare il segnale originale ad una copia di sé stesso ritardata di un certo valore e moltiplicata per il relativo coefficiente $b_k$.

2. Filtri ricorsivi: **IIR (Infinite-Impulse-Response)** o feedback, il circuito è continuamente in relazione alla sua storia precedente che dall'uscita del filtro rientra nel circuito

   $$y[n] = b_0 x[n] + a_1 y[n-1]$$

   L'uscita è ottenuta come media pesata in cui sono presenti termini che tengono conto sia degli ingressi che delle uscite a tempi precedenti. In questo caso, i coefficienti in $y$ devono essere $< 1$ (retroazione negativa) onde evitare una eccessiva instabilità del sistema. La funzione di trasferimento è data da un FIR a cui si aggiunge un blocco ricorsivo.

La quantità di ritardo (in campioni) ed il fattore di guadagno applicati, determinano il comportamento del filtro (risposta in frequenza) e, quindi, la classe di appartenenza del filtro, generalmente associata alla curva di risposta. In termini di ampiezza, le principali categorie di filtri sono:

- **filtro passa basso LPF**: lascia passare le componenti al di sotto di una certa soglia e, attenua quelle al di sopra;
- **filtro passa alto LPF**: lascia passare le componenti al di sopra di una certa soglia e attenua quelle al di sotto;
- **filtro passa banda LPF**: attenua le componenti al di fuori di una certa banda;
- **filtro stop banda LPF**: lascia passare le componenenti al di fuori di una certa banda

Si definisce ordine del filtro (numero di poli), invece, la lunghezza in campioni del ritardo applicato: ad un ritardo di un campione corrisponde un filtro del I ordine, ad un ritardo di due campioni, di II ordine e così via (aumentare l'ordine del filtro, significa, generare un roll-off o, tasso di attenuazione, sempre più rapido).

Da un punto di vista matematico, il comportamento nel dominio della frequenza di un filtro digitale è del tutto descritto dalle relazioni che legano tra loro tutte le variabili coinvolte nel suo funzionamento. Tali relazioni definiscono la cosiddetta funzione di trasferimento $H(z)$ di un filtro digitale: rapporto tra segnale in ingresso e segnale in uscita, ovvero, il rapporto tra due polinomi ad $N$ zeri ed $M$ poli, con $M > N$.

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \qquad Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

In linea di principio, è possibile progettare qualunque sistema LTI a tempo discreto ponendo poli e zeri della funzione di trasferimento in modo appropriato nel piano complesso.
Intuitivamente, i poli di $H(z)$ devono essere posizionati in prossimità del cerchio unitario nelle pulsazioni complesse $z$ corrispondenti alle componenti armoniche

nel segnale d'ingresso $x[n]$ che devono essere enfatizzate. Gli zeri, invece, devono essere posizionati vicino ai punti $z$ del cerchio di raggio unitario, corrispondenti alle componenti armoniche del segnale in ingresso che devono essere attenuate dal filtro. Inoltre, tutti i poli del filtro devono cadere all'interno del cerchio unitario perché possa esserci stabilità, mentre gli zeri possono essere posizionati in qualunque punto del piano $z$.

Le funzioni di trasferimento dei circuiti LTI sono funzioni razionali, rapporti tra due polinomi a coefficienti reali della variabile complessa $z$. Sappiamo, inoltre, che l'ordine di una funzione di trasferimento corrisponde al numero dei poli e, quindi al grado $M$ del denominatore. Vediamo da vicino una tipica funzione di trasferimento di un filtro passa-basso e un filtro passa-alto di I ordine.

**Low Pass One Pole(IIR)**

$$H_{lp}(z) = \frac{y[n]}{x[n]} = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1}}$$

Da cui ricaviamo la relativa *equazione alle differenze*

$$y[n] = b_0 x[n] + a_1 y[n-1]$$

$\alpha = e^{-2\pi \frac{f_c}{f_s}}$
$b_0 = 1 - \alpha$
$a_1 = \alpha$

**High Pass (IIR)**

$$H_{hp}(z) = \frac{y[n]}{x[n]} = \frac{1+\alpha}{2} \frac{1 - z^{-1}}{1 - \alpha z^{-1}}$$

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + a_1 y[n-1]$$

where:
$\alpha = e^{-2\pi \frac{f_c}{f_s}}$
$b_0 = \frac{1+\alpha}{2}$
$b_1 = -b_0$
$a_1 = \alpha$

### Configurazioni di filtri a cascata e in parallelo

*Configurazione a cascata*
Prevede che più filtri siano collegati in serie tra di loro: *si parla di sistemazione in cascata quando due o più unità filtro sono poste una di seguito all'altra (l'outup del filtro che precede è collegato all'input dell'unità che segue), in modo da formare un unico percorso per la sorgente sonora che li attraversa.*

$$x \rightarrow f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3 ... \rightarrow f_n \rightarrow y$$

$$Y(s) = X(s) \cdot \prod_{n=1}^{N} H_n(s)$$

$Y(s) =$ uscita del sistema
$X(s) =$ input
$H_n(s) =$ funzione di trasferimento del filtro $n$

L'ordine complessivo della configurazione posta in essere è dato dalla somma degli ordini delle singole unità filtro, a meno che il collegamento non provochi cancellazioni polo-zero. La funzione di trasferimento del sistema corrisponde al prodotto delle funzioni di trasferimento parziali.

*Configurazione in parallelo*
Si parla, invece, di sistemazione in *parallelo quando due o più unità filtro hanno solo ed esclusivamente gli estremi in comune.* Sono tutte collegate alla stessa sorgente ma disposte una di fianco all'altra, con gli output che si sommano algebricamente a determinare l'uscita del sistema risultante.

$$Y(s) = \sum_{n=1}^{N} X(s) \cdot H_n(s)$$

$Y(s) =$ uscita del sistema
$X(s) =$ input
$H_n(s) =$ funzione di trasferimento del filtro $n$