Capitolo 2

Temperamento equabile

In questo capitolo approfondiremo la costruzione delle scale e il temperamento equabile. Quindi, facendo un passo indietro, contrariamente a quanto abbiamo visto nel capitolo precedente, le note ancora non corrispondono a delle precise frequenze. Analizzeremo le considerazioni che hanno portato al sistema già descritto, che viene detto temperamento equabile.

2.1 Consonanza e dissonanza

Il termine consonanza, che deriva dal latino *consonare*, cioè suonare insieme, è usato per indicare suoni che ascoltati insieme producono un effetto gradevole. Al contrario il termine dissonanza, che deriva dal latino *dissonare*, cioè suonare con separazione, è usato per indicare suoni che ascoltati insieme producono un effetto sgradevole.

Il grado di consonanza o dissonanza può avere delle giustificazioni fisico-matematiche, come vedremo in seguito, ma può anche dipendere da cultura, abitudini e gusto soggettivo.

Ma cosa rende due suoni consonanti oppure dissonanti? La teoria dei suoni armonici e quella dei rapporti matematici semplici cercano di spiegare questo aspetto.

2.2 Suoni armonici e ottave

I suoni sono prodotti da corpi in vibrazione. L'altezza del suono, o della nota che associamo a quel suono, dipende dalla frequenza f con la quale vibra il corpo che lo produce. Quando un corpo (ad esempio una corda di un violino) vibra con una frequenza f, oltre al suono con frequenza f, chiamato fondamentale, vengono prodotti anche altri suoni, molto più deboli quindi molto più difficili da percepire, che hanno frequenze multiple di f:

$$f, 2f, 3f, 4f, 5f, 6f, 7f, ...$$

Il primo suono armonico corrisponde al suono fondamentale con frequenza f, il secondo armonico corrisponde alla frequenza $2f$ e così via (l'n-esimo armonico corrisponde alla frequenza $n \cdot f$). L'intensità degli armonici decresce rapidamente al crescere del numero armonico: di fatto l'orecchio percepisce il suono fondamentale, anche se sono presenti i suoni armonici. Il fatto che mediamente si percepisce solo il suono fondamentale è dovuto in primo luogo all'intensità degli altri armonici che, a partire già dal secondo, è molto più bassa. In secondo luogo è dovuto anche al fatto che i suoni armonici, poichè prodotti dalla vibrazione del corpo che produce il suono fondamentale, sono in sostanza "parte" del suono fondamentale. Quindi, se consideriamo le singole frequenze, possiamo dire che il suono con frequenza $2f$ è molto consonante rispetto al suono con frequenza f, in quanto $2f$ è il secondo armonico di f.

Questo dato di fatto fornisce un modo per definire la consonanza. Basandoci sui suoni armonici possiamo dire che i due suoni più consonanti rispetto a un suono con frequenza f sono quelli corrispondenti ai suoi armonici, nell'ordine della serie degli armonici. Quindi i due suoni più consonanti corrispondono al suono fondamentale (frequenza f) e al secondo suono armonico (frequenza $2f$). Il successivo suono nella serie corrisponde alla frequenza $3f$, che rispetto al secondo armonico ha frequenza $3/2f'$, dove $f' = 2f$. Considerando ancora il successivo suono armonico, il quarto, con frequenza $4f$, si ha che la sua frequenza è $4/3f''$ dove $f'' = 3f$ è la frequenza del terzo armonico.

Una prospettiva diversa ma con conlcusioni simili è quella pitagoriana secondo la quale i suoni più consonanti sono quelli i cui rapporti fra le rispettive frequenze possono essere espressi come rapporti di numeri interi piccoli, come $2/1$, $3/2$ e $4/3$. Tale punto di vista è giustificato dalle seguenti considerazioni empiriche: se una corda di una certa lunghezza produce un suono con frequenza f, allora (*i*) facendo vibrare solo metà ($1/2$) della corda si ottiene un suono consonante che ha frequenza $2f$; (*ii*) facendo vibrare $2/3$ della corda si ottiene un suono consonante che ha frequenza $3/2f$; (*iii*) facendo vibrare $3/4$ della corda si ottiene un suono consonante che ha frequenza $4/3f$. Questi rapporti corrispondono proprio ai rapporti fra i primi suoni armonici.

L'intervallo definito dal rapporto $2/1$ viene chiamato *ottava*[1]. Due suoni distanti un'ottava sono talmente consonanti che vengono in pratica considerati "uguali". Infatti le note le cui frequenze sono una il doppio dell'altra hanno lo stesso nome. La Figura 2.1 mostra tutte le note `Do` del pianoforte.

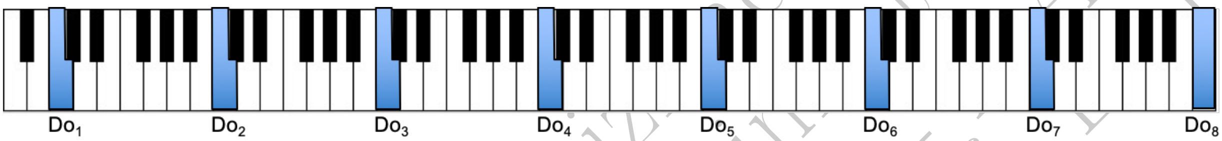


Figura 2.1: Le note `Do` di un pianoforte

[1] Come abbiamo spiegato nel capitolo precedente, il termine *ottava* deriva dal fatto che le scale hanno 7 suoni e quindi l'ottavo corrisponde alla nota di partenza. Per lo stesso motivo gli intervalli fra note della scala prendono i nomi di seconda, terza, etc. in funzione della "distanza" in termini di note della scala.

Tipo	Intervallo	Rapporto	Somma
Intervalli perfetti	Unisono	1/1	1+1=2
	Ottava	2/1	2+1=3
	Quinta	3/2	3+2=5
	Quarta	4/3	4+3=7
Intervalli imperfetti	Sesta maggiore	5/3	5+3=8
	Terza maggiore	5/4	5+4=9
	Terza minore	6/5	6+5=11
	Sesta minore	8/5	8+5=13
Intervalli dissonanti	Seconda maggiore	9/8	9+8=17
	Settima maggiore	15/8	15+8=23
	Settima minore	16/9	16+9=25
	Seconda minore	16/15	16+15=31
	Tritono	64/45	64+45=109

Tabella 2.1: Classificazione degli intervalli fra suoni armonici

L'eccezionale consonanza delle ottave viene presa come un *assioma* musicale: note con frequenze una doppia dell'altra sono la "stessa nota" anche se una più acuta e l'altra più grave.

Sfruttando questo assioma musicale, possiamo in qualche modo restringere la nostra attenzione a una singola ottava. Tutto ciò che succede in questa singola ottava potrà essere ripetuto nelle altre ottave con una semplice proporzione per cambiare le frequenze. In realtà questo è possibile nell'attuale sistema musicale, denominato temperamento equabile, mentre in altri sistemi questa corrispondenza non è così semplice, come cercheremo di spiegare in questo capitolo.

La Tavola 2.1 riporta una classificazione di alcuni intervalli che compaiono nei suoni armonici. L'ordine va dagli intervalli più consonanti a quelli meno consonanti.

2.3 Quali suoni utilizziamo all'interno di un'ottava?

All'interno di un'ottava ci sono infiniti suoni (ognuno corrispondente ad una frequenza fra f e $2f$). Infiniti suoni sono un po' troppi per essere usati in pratica. Quali scegliamo per costruire la nostra "scala"? La scala è appunto l'insieme dei suoni che utilizziamo per comporre musica. Nel capitolo precedente abbiamo identificato una scala con un insieme di intervalli misurati in semitoni la cui somma è 12; questa definizione si basa sul concetto di semitono che ora non abbiamo (ancora). Quindi più genericamente la scala è una successione di suoni il cui primo suono ha frequenza f e il cui ultimo suono ha frequenza $2f$.

> ⚠ Nel prosieguo del capitolo useremo i nomi delle note `Do`, `Re`, etc. Tuttavia il loro uso è solo indicativo, nel senso che le esatte frequenze non sono quelle definite nel capitolo precedente. L'obiettivo di questo capitolo è proprio quello di individuare quali sono le migliori frequenze da utilizzare per le note. Vari criteri portano a scelte diverse. La conclusione finale porterà al sistema del temperamento equabile che fornisce le frequenze già descritte. Prima di arrivare alla conclusione però i nomi delle note sono da intendersi "approssimati".

2.4 L'aritmetica degli intervalli

Prima di proseguire con la discussione sulla costruzione delle scale è oppurtuno ricordare "l'aritmetica degli intervalli" che ci sarà molto utile per la costruzione delle scale. Per comodità di scrittura rappresenteremo un intervallo fra due suoni con frequenza a e b, con $a < b$, usando la notazione $[a, b]$ in analogia con gli intervalli numerici. Come sappiamo, l'intervallo $[f_1, f_2]$ è rappresentato dal rapporto delle frequenze $i_1 = f_2/f_1$. In realtà i_1 è l'*ampiezza* dell'intervallo. Supponiamo ora di avere un secondo intervallo, contiguo al precedente, $[f_2, f_3]$, la cui ampiezza è $i_2 = f_3/f_2$. Poichè gli intervalli sono contigui la loro "somma" è l'intervallo $[f_1, f_3]$ la cui ampiezza è $i_3 = f_3/f_1$. Non è difficile verificare che $i_3 = i_1 \cdot i_2$. Quindi per sommare due intervalli contigui è necessario *moltiplicare* le loro ampiezze. Analogamente, per sottrarre un intervallo da un altro è necessario dividere l'ampiezza del primo per l'ampiezza del secondo.

Si noti che le operazioni di somma e sottrazione degli intervalli sono intuitive quando si sommano due intervalli contigui o quando si sottrae da un dato intervallo un'altro intervallo più piccolo il cui inizio o la cui fine coincide con il primo. Facendo riferimento alla Figura 2.2 si ha che $i_3 = i_1 \cdot i_2$ e ovviamente che $i_1 = i_3/i_2$ e anche $i_2 = i_3/i_1$.

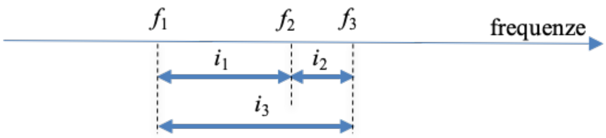


Figura 2.2: Somma e sottrazione di intervalli

Consideriamo un esmepio numerico. Se $f_1 = 200, f_2 = 300$ e $f_4 = 400$, si ha che $i_1 = 3/2$ e $i_2 = 4/3$. La somma di i_1 e i_2 è $i_3 = \frac{3}{2}\frac{4}{3} = 2$ che corrisponde all'intervallo fra la frequenza 200 e la frequenza 400. Infatti mettendo insieme $[200, 300]$ e $[300, 400]$ si ottiene $[200, 400]$ che è un'ottava.

Analogamente se dall'intervallo $[400, 700]$ che corrisponde alla frazione $7/4$ vogliamo sottrarre l'intervallo $[400, 500]$, che corrisponde alla frazione $5/4$, dobbiamo dividere $7/4$ per $5/4$ ottenendo $7/5$ che corrisponde all'intervallo $[500, 700]$.

Si noti come gli intervalli usati siano contigui. Tuttavia, da un punto di vista matematico, la definizione di somma e sottrazione degli intervalli è sempre valida, anche se operare su intervalli non contigui non ha molto senso da un punto di vista musicale. Per cui useremo sempre intervalli contigui.

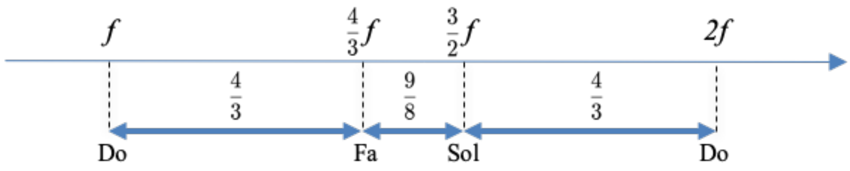
Per calcolare l'ampiezza di un intervallo divideremo la frequenza maggiore per la frequenza minore in modo che il risultato sia sempre maggiore o al più uguale a 1. In realtà, anche per questo aspetto, da un punto di vista matematico possiamo senza problemi dividere la frequenza minore per quella maggiore ottenendo un intervallo minore di 1. Dal punto di vista pratico si potrebbe pensare che gli intervalli maggiori di 1 vanno verso destra, cioè verso frequenze più alte, mentre gli intervalli minori di 1 vanno verso sinistra cioè verso frequenze più basse.

La somma di intervalli può essere usata per spostarsi di un dato intervallo da una frequenza di riferimento. Ad esempio partendo da una frequenza di riferimento f, se si somma ad f un intervallo i si ottiene una nuova frequenza $f' = f \cdot i$ che è a distanza i da f.

Per rendere più concreto il discorso facciamo un esempio. Assumiamo di partire dalla frequenza di riferimento $f = 440Hz$. Per "salire" di un intervallo di ampiezza $3/2$ basterà moltiplicare f per $3/2$ ottenenedo $660Hz$. Per "scendere" dello stesso intervallo basterà dividere per $3/2$, ottenendo $229, \bar{3}Hz$.

2.5 Scala pitagorica

Questa scala di 7 note nasce dall'idea, della scuola pitagoriana, che le consonanze migliori sono date dai rapporti che usano numeri interi piccoli. In particolare, l'ottava corrisponde al rapporto 2/1, la quinta al rapporto 3/2 e la quarta al rapporto 4/3. Partiamo dall'ottava all'interno della quale vengono selezionate delle frequenze che corrispondono ai rapporti d 3/2 e 4/3:



L'intervallo fra `Fa` e `Sol`, corrispondente al rapporto $\frac{9}{8}$, può essere usato per selezionare altre note. Ad esempio partendo dal `Do`, con frequenza f, si può selezionare la frequenza $\frac{9}{8}f$ (`Re`) e la frequenza $\frac{81}{64}f$ (`Mi`). Analogamente partendo dal `Sol`, con frequenza $\frac{3}{2}f$ si possono ottenere le note con frequenza $\frac{3}{2}\frac{9}{8}f = \frac{27}{16}f$ (`La`) e $\frac{27}{16}\frac{9}{8}f = \frac{243}{128}f$ (`Si`).

Si ottiene così la scala scala pitagorica i cui intervalli sono mostrati nella Figura 2.3.

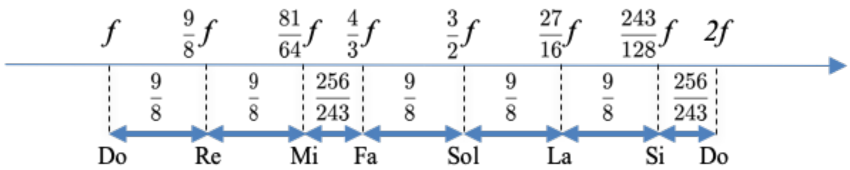


Figura 2.3: Scala pitagorica

Nella scala pitagorica esistono due intervalli fra suoni successivi, uno definito dal rapporto 9/8, chiamato tono pitagorico, e l'altro definita dal rapporto 256/243 chiameto semitono pitagorico. È evidente che un semitono pitagorico non è metà di un tono pitagorico; infatti sommando due semitoni pitagorici non si ottiene un tono pitagorico perchè $\left(\frac{256}{243}\right)^2 \simeq 1.10985$ che è diverso da $\frac{9}{8} = 1.125$. E ovviamente, la metà di un tono pitagorico non corrisponde a un semitono pitagorico in quanto il tono corrisponde a $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{8}} \simeq \frac{3}{2.8284} \simeq 1.0606$, mentre un semitono corrisponde a $\frac{256}{243} = 1.0534$. La differenza è molto piccola, ma come vedremo fra poco ha delle conseguenze molto importanti.

2.6 Scala Naturale

Sebbene la scala pitagorica parta dall'idea di usare degli intervalli consonanti espressi da rapporti che coinvologno numeri interi piccoli e che in effetti corrispondono ai primi suoni armonici (2:1 all'ottava, 3:2 alla quinta e 4:3 alla quarta), alcuni degli altri intervalli della scala, in particolare 81/64, 27/16 e 243/128 sono abbastanza diversi dagli intervalli che ritroviamo fra i suoni armonici. Fra i vari tentativi di modificare la scala pitagorica per avere intervalli più consonanti, quello più noto è la scala Zarliniana o Naturale, sviluppata nel XVI secolo dal teorico musicale Giuseppe Zarlino. Poichè i suoni armonici sono consonanti, una scelta che in qualche modo corrisponda ai suoni armonici sembra quella più "naturale". La scala naturale si basa appunto sulle consonanze dei suoni armonici.

Il primo e il secondo suono armonico secondo, dato il nostro assioma musicale dell'ottava, rappresentano la quintessenza della consonanza. I suoni armonici non si fermano al secondo armonico che abbiamo sfruttato per definire l'intervallo di ottava. Ad esempio possiamo considerare l'intervallo fra il secondo e il terzo armonico. Il secondo armonico ha frequenza $2f$ mentre il terzo armonico ha frequenza $3f$, pertanto l'intervallo che intercorre fra questi due suoni è descritto dal rapporto 3/2. Analogamente l'intervallo che intercorre fra il terzo e il quarto armonico è descritto dal rapporto 4/3. L'intervallo descritto dal rapporto 3/2 viene detto intervallo di quinta, mentre quello descritto dal rapporto 4/3 viene detto intervallo di quarta. L'intervallo descritto dal rapporto 5/4 viene dette intervallo di terza.

Usando gli intervalli fra i suoni armonici possiamo costruire la scala naturale: La costruzione matematica di questa scala è basata sul rapporto 5/4 (terza maggiore) e sul rapporto 3/2 (quinta). Per costruire la scala si parte dalla nota fondamentale (prendiamo come esempio il `Do`) e si aggiungono la terza e la quinta (`Do-Mi-Sol`) ottenendo così la triade maggiore. A questo punto si parte da `Sol` e si ripete il procedimento ottenendo un'altra triade maggiore (`Sol-Si-Re`). La nota (`Re`) che va oltre l'ottava viene riportata nell'ottava di riferimento. Per ottenere le altre due note (`Fa` e `La`) si procede in modo simile considerando il `Do` come la quinta della triade `Fa-La-Do` e quindi si scende di una quinta dal `Do` con frequenza $2f$ per ottenere il `Fa` dal quale si ottiene il `La`. La scala che ne deriva è riportata nella Figura 2.4.

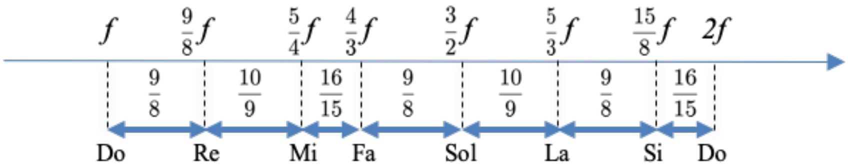


Figura 2.4: Scala Naturale

In questa scala naturale l'intervallo di seconda è fornito dall'intervallo fra l'8^o e il 9^o suono armonico, quello di terza fra il 4^o e il 5^o suono armonico, quello di quarta fra il 3^o e il 4^o suono armonico, dello di quinta fra il 2^o e il 3^o suono armonico, quello di sesta fra il 3^o e il 5^o suono armonico e quello di settima fra l'8^o e il 15^o suono armonico.

Come si può facilmente verificare, gli intervalli fra i gradi della scala sono 3: un tono naturale grande (9/8) un tono naturale piccolo (10/9) e un semitono naturale (16/15). La differenza fra tono naturale grande e tono naturale piccolo, pari a 81/80, viene detta *comma sintonico*.

Sebbene la scala naturale utilizzi degli intervalli che corrispondono a rapporti fra numeri interi più piccoli rispetto alla scala pitagorica, nella scala naturale le distanze fra note successive sono di tre tipi: 9/8, che è uguale al tono pitagorico, 10/9 chiamato tono zarliniano ed è leggermente più grande di un tono pitagorico, e infine 16/15 chiamato semitono zarliniano (leggermente più grande del semitono pitagorico 256/243). Anche in questo caso come per la scala pitagorica l'intervallo chiamato semitono non è la metà di un tono; inoltre abbiamo due diversi intervalli di tono.

2.7 Scala delle quinte

L'intervallo di quinta armonico, cioè l'intervallo rappresentato dalla frazione 3/2, può essere utilizzato per costruire una scala con 12 suoni: la scala cromatica pitagorica. Tale scala si basa solo sull'intervallo di quinta armonico. Per costruire tale scala si parte dalla nota di riferimento che come al solito supponiamo essere un `Do` e si selezionano altre frequenze moltiplicando (o dividendo) per 3/2.

Ad esempio, alzando di una quinta il `Do`, $f = 1$, si ottiene il `Sol` che corrisponde 3/2, mentre alzando il `Sol` di un'altra quinta si ottiene un `Re` dell'ottava successiva: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Tale nota appartiene all'ottava successiva in quanto $2 < \frac{9}{4} < 4$. Per riportare questo `Re` nell'ottava di riferimento potremmo dividere la frazione che lo rappresenta per 2 ottenendo $\frac{9}{4}/2 = \frac{9}{8}$.

Per ottenere altre note si può continuare ad alzare la frequenza di un intervallo di quinta. Alzando il `Re` di una quinta si ottiene un `La`: $\frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{8}$. Alzando il `La` di un'altra quinta si ottiene un Mi dell'ottava successiva: $\frac{27}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{16}$. Il Mi si colloca nella terza ottava in quanto $4 < \frac{81}{16} < 8$. Continuando a moltiplicare per $3/2$ si ottengono altre note; la sequenza "completa" è:

Do, Sol, Re, La, Mi, Si, Fa♯, Do♯, Sol♯, Re♯, La♯, Mi♯≃Fa, Si♯≃Do.

La Figura 2.5 mostra gli intervalli, rispetto al Do iniziale di ognuna di queste note. Per riportare ogni nota nell'ottava di riferimento, cioè la prima, è necessario dividere per l'opportuna potenza di 2. La Figura 2.6 mostra il risultato. Come si può notare il Do all'ottava non corrisponde al rapporto 2/1, come invece dovrebbe essere l'ottava. Se si divide ulteriormente per 2 non si ottiene, ovviamente, 1 che corrisponde al Do iniziale, ma una nota leggermente più alta rappresentata dal rapporto $\frac{531441}{524288} \simeq 1.0136$, che viene detto *comma* pitagorico.

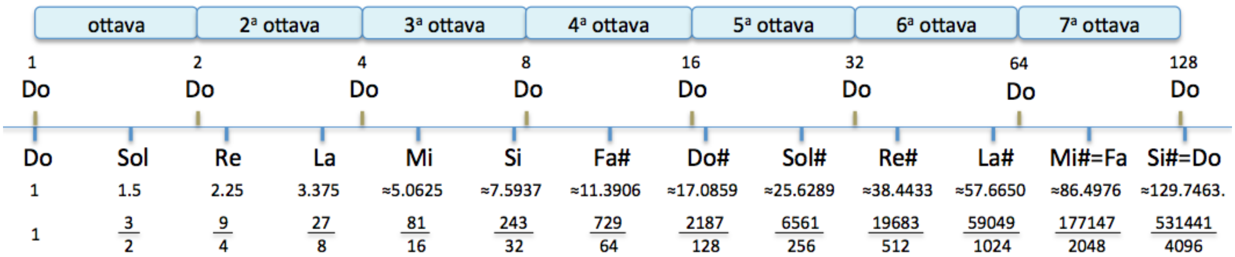


Figura 2.5: Quinte su sette ottave

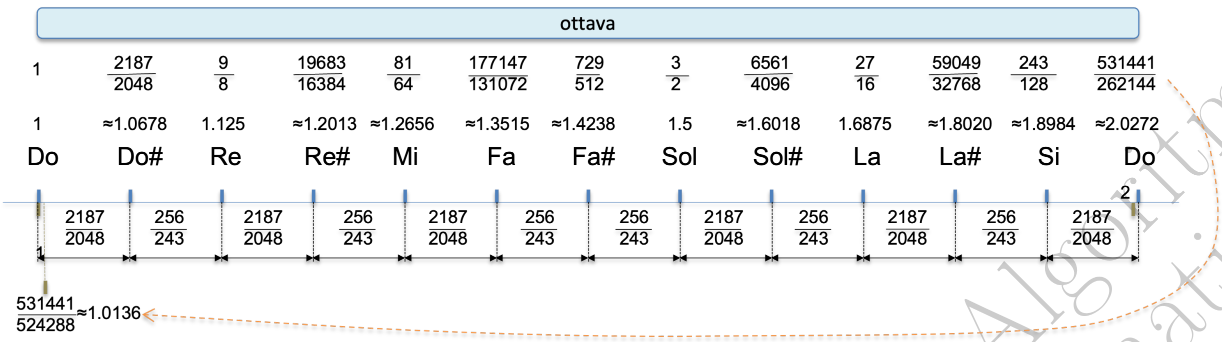


Figura 2.6: Scala cromatica delle quinte

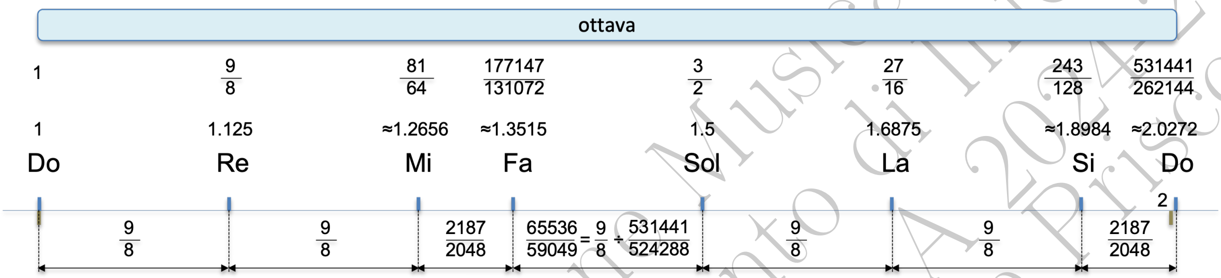


Figura 2.7: Scala delle quinte

2.8 Trasposizione

Trasporre un brano musicale significa traslare tutte le note (frequenze) verso l'alto o verso il basso in modo tale da mantenere inalterati gli intervalli. Dall'aritmetica degli intervalli sappiamo che tale operazione è molto semplice: basta scegliere l'ampiezza x dell'intervallo di trasposizione e moltiplicare (o dividere) tutte le frequenze per x. Il problema che sorge con la trasposizione riguarda la corrispondenza delle note trasposte con quelle già esistenti. Tale problema è particolarmente cruciale per gli strumenti a tasti: per essi è necessario associare un tasto ad ogni possibile nota (frequenza) che si deve suonare.

Per rendere concreto il discorso, supponiamo di usare la scala pitagorica. Per tale scala abbiamo bisogno di 7 tasti per ogni ottava. Supponiamo ora di voler trasporre un brano musicale traslando verso le frequenze alte di un intervallo pari all'intervallo esistente fra il `Do` e il `Re`, cioè di un intervallo pari a 9/8.

Dunque, costruiamo una scala pitagorica a partire dal `Re`. Se chiamiamo f la frequenza di riferimento per la costruzione della scala pitagorica a partire dalla nota `Do` (appunto identificata dalla frequenza f) e chiamiamo $f' = \frac{9}{8}f$ la frequenza del `Re` possiamo sfruttare la scala costruita precedentemente per ottenere le frequenze della nuova scala che parte dal `Re`., come mostrato nella seguente tabella.

nota / scala	Do	Re	Mi	Fa	Fa♯	Sol	La	Si	Do	Do♯	Re
Do	f	$\frac{9}{8}f$	$\frac{81}{64}f$	$\frac{4}{3}f$		$\frac{3}{2}f$	$\frac{27}{16}f$	$\frac{243}{128}f$	$2f$		
Re		$\frac{9}{8}f$	$\frac{81}{64}f$		$\frac{729}{512}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{27}{16}f$	$\frac{243}{128}f$		$\frac{2187}{1024}f$	$\frac{9}{4}$

Come si può vedere, mentre il `Re`, il `Mi`, il `Sol`, il `La` e il `Si` hanno esattamente la stessa frequenza nelle due scale, il `Fa` e il `Do` invece corrispondono a due rapporti diversi. Nella scala di `Do`, il `Fa` corrisponde al rapporto $4/3 \simeq 1.3333$, nella scala di `Re` il `Fa` corrisponde al rapporto $729/512 \simeq 1.4238$. Nella scala di `Do`, il `Do` (all'ottava) corrisponde al rapporto $2/1 = 2$, nella scala di `Re` il `Do` corrisponde al rapporto $2187/1024 \simeq 2.1357$.

Questo significa che il "`Fa`" e il "`Do`" della nuova scala sono in realtà due nuove note da includere nel sistema. Queste due note corrispondono più o meno al `Fa`♯ e al `Do`♯. Ovviamente per queste due nuove note avremo bisogno di 2 nuovi tasti, pertanto il fabbisogno di tasti è passato da 7 a 9 per ogni ottava. Sebbene si potrebbe pensare che questo non sia un problema visto che in effetti il `Fa`♯ e il `Do`♯ effettivamente esisteranno (come sappiamo l'ottava verrà divisa in 12 note), queste due nuove note non corrispondono esattamente a quelli che saranno il `Fa`♯e il `Do`♯. Più precisamente, proseguendo con la costruzione di altre scale a partire dalle note esistenti si creeranno altre note che in toeria dovrebbero essere uguali a note già esistenti ma che non lo sono.

Per capire meglio costruiamo altre scale pitagoriche, a partire dalle altre note, come mostrato nella Tabella 2.2. Con la scala che parte dal `Mi` vengono create due nuove note che dovrebbero corrispondere a `Sol`♯ e `Re`♯. Si noti come questa scala usa il `Fa`♯ e il `Do`♯ creati con la scala di `Re`; infatti le frequenze combaciano perfettamente. Poi la scala di `Fa` crea la nuova nota `La`♯ (che musicalmente sarebbe un `Si`♭), mentre le altre note combaciano con quelle esistenti. La scala di `Sol` non crea nuove note, tutte le note combaciano con quelle esistenti. Lo stesso accade per la scala di `La`. Arriviamo ora alla scala costruita a partire dal `Si`. Questa scala genera una nota che dovrebbe corrispondere al `La`♯. La frazione che descrive la frequenza è $\frac{59049}{16834}$. Tuttavia un `La`♯ era già stato creato nell'ottava più bassa dalla scala di `Fa`, e questo `La`♯ corrisponde alla frazione $\frac{16}{9}$. E $\frac{59049}{16834}$ non è il doppio di $\frac{16}{9}$. Quindi questi 2 suoni non sono uno l'ottava dell'altro. In altre parole sono 2 `La`♯ diversi! Non moltissimo. Infatti $\frac{16}{9} = 1.\bar{7}$ e $\frac{59049}{16834} \simeq 3.51$ che è quasi il doppio di $1.\bar{7}$. Quasi, ma non il doppio.

E non è un problema isolato. Ad esempio considerando che abbiamo un `Do`♯ corrispondente a $\frac{2187}{1024}$, che riportato nell'ottava più bassa diventa $\frac{2187}{2048}$, possiamo costruire una nuova scala a partire da questa nota.

scala \ nota	Do	Do♯	Re	Re♯	Mi	Fa	Fa♯	Sol	Sol♯	La	La♯	Si	Do	Do♯	Re	Re♯	Mi	Fa	Fa♯	Sol	Sol♯	La	La♯	Si
Do	f		$\frac{9}{8}f$		$\frac{81}{64}f$	$\frac{4}{3}f$		$\frac{3}{2}f$		$\frac{27}{16}f$		$\frac{243}{128}f$	$2f$											
Re			$\frac{9}{8}f$		$\frac{81}{64}f$		$\frac{729}{512}f$	$\frac{3}{2}f$		$\frac{27}{16}f$		$\frac{243}{128}f$		$\frac{2187}{1024}f$	$\frac{9}{4}f$									
Mi					$\frac{81}{64}f$		$\frac{729}{512}f$		$\frac{6561}{4096}f$	$\frac{27}{16}f$		$\frac{243}{128}f$		$\frac{2187}{1024}f$		$\frac{19683}{8192}f$	$\frac{81}{32}f$							
Fa						$\frac{4}{3}f$		$\frac{3}{2}f$		$\frac{27}{16}f$	$\frac{16}{9}f$		$2f$		$\frac{9}{4}f$		$\frac{81}{32}f$	$\frac{8}{3}f$						
Sol								$\frac{3}{2}f$		$\frac{27}{16}f$		$\frac{243}{128}f$	$2f$		$\frac{9}{4}f$		$\frac{81}{32}f$		$\frac{729}{256}f$	$3f$				
La										$\frac{27}{16}f$		$\frac{243}{128}f$		$\frac{2187}{1024}f$	$\frac{9}{4}f$		$\frac{81}{32}f$		$\frac{729}{256}f$		$\frac{6561}{2048}f$	$\frac{27}{8}f$		
Si												$\frac{243}{128}f$		$\frac{2187}{1024}f$		$\frac{19683}{8192}f$	$\frac{81}{32}f$		$\frac{729}{256}f$		$\frac{6561}{2048}f$		$\frac{59049}{16384}f$	$\frac{243}{64}f$
Do♯		$\frac{2187}{2048}f$		$\frac{19683}{16384}f$		$\frac{177147}{131072}f$	$\frac{729}{512}f$		$\frac{6561}{4096}f$		$\frac{59049}{32768}f$		$\frac{531441}{262144}f$	$\frac{2187}{1024}f$										

Tabella 2.2: Frequenze derivanti dalle trasposizioni della scala pitagorica

Questa nuova scala genera un `Fa` corrispondente alla frazione $\frac{177147}{131072}$ che è diverso dal `Fa` che già avevamo corrispondente alla frazione $\frac{4}{3}$. Anche in questo caso i suoni sono molto vicini ($\frac{177147}{131072} \simeq 1.35$ e $\frac{4}{3} =\simeq 1.33$) ma non sono uguali!

Si può facilmente intuire che costruendo altre scale (a partire dalle altre note) si avranno incongruenze simili. Ovviamente nulla vieta di considerare anche le nuove note come punto di partenza di nuove scale. Tuttavia poichè nuove scale produrranno sempre nuove note e da nuove note si possono costruire altre scale, in pratica non finiremo mai di introdurre nuove note nel nostro sistema musicale. Pertanto avremo bisogno di troppe note e troppi tasti!

Il problema appena descritto non è specifico della scala pitagorica. Anche la scala naturale e la scala delle quinte lo generano.

2.9 Temperamento

Il temperamento (dal latino *temperare*, cioè *mescolare nelle giuste proporzioni*) musicale fa riferimento alle soluzioni adottate per risolvere il problema della trasposizione. L'idea di base è quella di alterare gli intervalli presenti nelle scale. Occorre, infatti, che la distanza (cioè l'ampiezza degli intervalli) fra le note sia costante in modo tale che le trasposizioni non creino nuove note! Ostinarsi però a voler usare intervalli descritti da frazioni porta a distanze simili ma diverse fra le note. Poiché sommando due intervalli si ottiene un intervallo che è il prodotto, per dividere l'ottava in 12 suoni equidistanti fra loro occorre scegliere come distanza fra una nota e quella successiva il valore x tale che

$$x^{12} = 2.$$

Pertanto si ha che la distanza fra due note successive deve essere

$$x = \sqrt[12]{2} \simeq 1.059463094.$$

Quindi la soluzione al problema mette in gioco i numeri irrazionali, che non possono essere espressi come frazioni.

Senza i numeri irrazionali la soluzione era impossibile da trovare. In realtà la scuola Pitagoriana era già arrivata alla soluzione[2], ma, non fu adottata, probabilmente a causa del burrascoso rapporto dei pitagoriani con i numeri irrazionali. Un'altra motivazione è dovuta alla difficoltà di accordare gli strumenti su intervalli non "naturali". L'adozione del sistema equabile sì è avuta solo nel XVI secolo.

[2] In [2] la divisione dell'ottava in parti uguali è attribuita a Archita da Taranto (428 a.C.-360 a.C.).

Prima del temperamento equabile, nel corso della storia, vari "temperamenti" (imperfetti) sono stati proposti. Un tentativo fu proposto da Vincenzo Galilei, padre del più famoso Galileo. Vincenzo Galilei (1520-1591) propose di usare un semitono costante, ma razionale, pari a

$$18/17 \simeq 1.05882353 \simeq \sqrt[12]{2}.$$

Ovviamente il problema non viene risolto, tuttavia è un passo verso la risoluzione in quanto contiene l'intuizione della distanza costante fra le note del sistema.

La soluzione adottata da Galilei fu criticata da Simone Stevino (ingegnere, fisico e matematico fiammingo, 1548-1620) che invece sostenne la suddivisione con semitono pari a $\sqrt[12]{2}$; ormai i numeri irrazionali non erano più eresia. Questo temperamento, detto *equabile*, tuttavia non venne adottato subito principalmente perchè poneva dei problemi per l'accordatura degli strumenti data la mancanza di intervalli naturali.

Pertanto altri temperamenti sono stati utilizzati. Fra questi di particolare rilevanza è quello introdotto da Adreas Werckmeister (1645-1706) che propose un temperamento basato su 5 quinte *mesotoniche* e 7 quinte naturali. Una quinta mesotonica è un intervallo usato in un precedente temperamento, detto mesotonico, in cui l'intervallo di quinta è pari a $\sqrt[4]{5} \simeq 1.495$ che è sufficientemente vicino a 3/2, che è la quinta giusta (o naturale), presente nei suoni armonici. Come già sappiamo l'intervallo di quinta naturale è di 3/2. Il temperamento proposto da Werkmesiter, detto *temperamento buono*, non corrisponde ovviamente al temperamento equabile e infatti se si prova a salire per quinte, come abbiamo fatto per il circolo delle quinte, usando 5 quinte mesotoniche e 7 quinte naturali, si ottiene

$$(\sqrt[4]{5})^5(3/2)^7 \simeq 127.75$$

che differisce, anche se di poco, dal valore 128 necessario per far chiudere il circolo delle quinte (il valore $128 = 2^7$ corrisponde a 7 ottave).

Dunque il temperamento buono di Werckmesiter da un lato approssima sufficientemente bene il temperamento equabile, dall'altro utilizza intervalli di quinte naturali che rendono l'accordatura più semplice, visto che secoli fa non c'erano strumenti di ausilio per accordare gli strumenti musicali. Per tali caratteristiche il temperamento buono fu molto apprezzato e gli strumenti accordati con tale tecnica venivano detti *ben temperati*. Il temperamento buono è stato anche apprezzato da Joahn Sebastian Bach (1685-1750), autore del *Clavicembalo ben temperato*, una pietra miliare della musica, ancora oggi utilizzata per la didattica nei Conservatori. Nel Clavicembalo ben temperato Bach ha incluso preludi e fughe in tutte le possibili tonalità, maggiori e minori. Il nome dell'opera, deciso da Bach, fa riferimento al temperamento buono in uso in quell'epoca; la cosa probabilmente indica l'approvazione di Bach per questo temperamento. Anche se il temperamento buono non è proprio quello equabile, andava nella direzione di rendere tutte le tonalità equivalenti.

I moderni sistemi di accordatura rendono facile accordare gli strumenti secondo il temperamento equabile che è quindi diventano lo standard. Per concludere, la Figura 2.8 mostra le frequenze delle note, relativamente a una singola ottava, che si ottengono con il temperamento equabile.

Le frequenze delle 12 note sono state espresse nella forma compatta $f_k = (\sqrt[12]{2})^k f$. La scala è ovviamente sempre costituita dalle sole 7 note `Do`, `Re`, `Mi`, `Fa`, `Sol`, `La` e `Si`: Come si può vedere in questa scala esistono solo due tipi di intervalli fra una nota e quella successiva: l'intervallo corrispondente a $\left(\sqrt[12]{2}\right)^2$, che è un tono, e l'intervallo corrispondente a $\sqrt[12]{2}$ che è un semitono. Un semitono è esattamente la metà di un tono. Se si prova adesso a costruire la stessa scala a partire dalla nota `Re`, o da una qualsiasi altra nota, non sarà necessario introdurre nuove note.

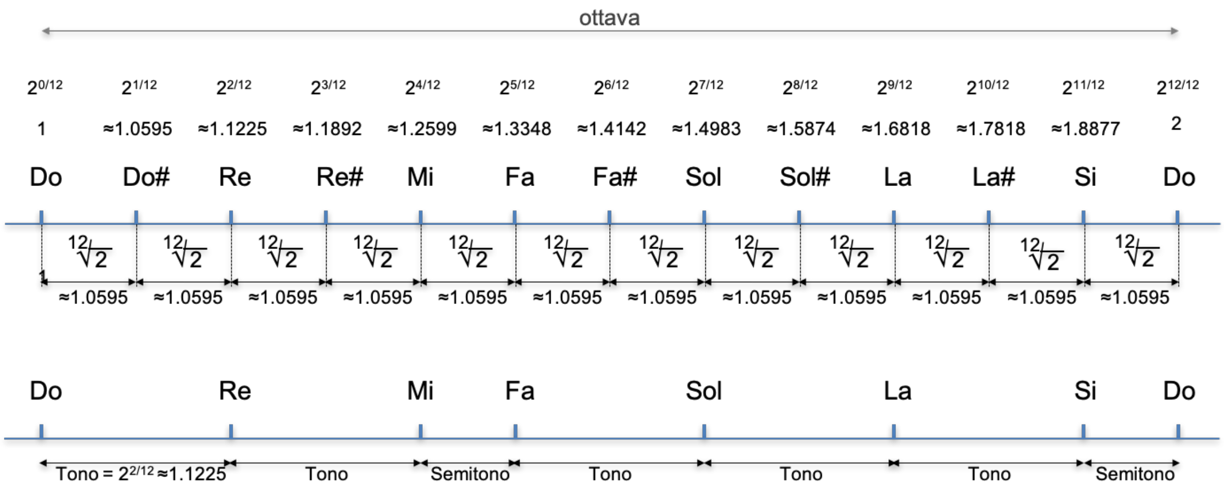


Figura 2.8: Temperamento equabile

Esercizi

1. Se un corpo vibra a una frequenza f, Quali frequenze hanno i suoni armonici prodotti dalla vibrazione?
2. Come si sommano due intervalli di frequenze contigui?
3. Come si costruisce la scala pitagorica a partire da una frequenza f?
4. Un semitono pitagorico è la metà di un tono pitagorico?
5. Come si costruisce la scala naturale a partire da una frequenza f?
6. Quali sono gli intervalli di tono e semitono nella scala naturale?
7. Il semitono della scala naturale, $\frac{16}{15}$, è la meta del tono naturale grande, $\frac{9}{8}$, o del tono naturale piccolo, $\frac{10}{9}$?
8. Come si costruisce la scala delle quinte a partire da una frequenza f?
9. Quale è il problema delle scale pitagoriche, naturali e delle quinte che viene risolto con il temperamento equabile?
10. Quanto vale un semitono nel temperamento equabile? Si può esprimere come frazione?
11. Costruisci un sistema musicale equabile, basato sull'assioma dell'ottava, ma con 10 note (al posto di 12).
12. Costruisci un sistema musicale equabile, cambiando l'assioma di partenza: non più il rapporto $\frac{2}{1}$, ma $\frac{3}{1}$. Usa 20 note.
13. Scrivere un programma che partendo dalla scala pitagorica costruisce tutte le altre scale partendo dalle frequenze generate dalle note della scala pitagorica e da tutte quelle che vengono generate di conseguenza. Quando si ferma il programma?
14. Ripetere l'esercizio 13 partendo dalla scala naturale.

15. Scrivere un programma che genera le note usando l'intervallo di quinta, cioè $3/2$. Quando si ferma il programma?

16. Ripetere l'esercizio 15 usando l'intervallo di quarta, cioè $3/2$. Quando si ferma il programma?

17. La scala cromatica delle quinte costruisce le 12 note sfruttando esclusivamente l'intervallo di una quinta ($3/2$). È possibile fare un procedimento simile con l'intervallo di quarta? Motivare e discutere la risposta.