考研数学

徐白玉

January 2024

目录

1　中值定理

一、极限的保号性

我们从一道题目入手：

例：（《接力题典 1800》P14，选择题 4）设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{e^{x^2}-1}=2$，则有（　）。

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点　　B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点　　D. $(0,2)$ 是 $f(x)$ 的拐点

解析：由题意，$f(x)$ 在 $x\to 0$ 处的左右导数均存在，则有 $f(0)=2$。又由洛必达法则得：$f^{'}(0)=0$，考察 $x\to 0^+$ 和 $x\to 0^-$ 的情况，可知，$x\to 0^+$ 时，$e^{x^2}-1>0$，故 $f(x)>2$；$x\to 0^-$ 时，$e^{x^2}-1>0$，故 $f(x)>2$。所以 $x=0$ 为极小值点。

上述问题的最后一步（分析其值为极大值还是极小值）使用了极限的**保号性**。上述的解题步骤相当于做这种题的模板。类似的还有《接力题典 1800》P15 的 5，6 题。

二、如何求渐近线

水平渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，则 $y=A$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线。

铅直渐近线：若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ 或 $f(a-0)=f(a+0)=\infty$，则 $x=a$ 为 $f(x)$ 的铅直渐近线。

斜渐近线：若 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a(a\neq 0,a\neq\infty)$，$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b$，则 $y=ax+b$ 为 $y=f(x)$ 的斜渐近线。

当某个曲线有了水平渐近线或铅直渐近线，则其不可能再有斜渐近线。

三、中值定理的证明问题

中值定理的证明题大多数都是构造函数的问题，但是也存在少数的需要泰勒等技巧的隔路题。

- 欲证 $f^{(n)}(\xi)=0$，一般是罗尔定理和拉格朗日定理的综合应用。只需找 $f^{(n-1)}(a)=f^{(n-1)}(b)$ 或 $\frac{a+b}{2}$ 即可。
- 欲证只含有中值 ξ 的结论，一般要构造函数后使用拉格朗日定理。构造的过程中可能涉及添项。一般地，对于跨阶导数出现时，都需要添中间项，如 $f^{''}(x)+f(x)=f^{''}(x)+f^{'}(x)+f(x)-f^{'}(x)$，随后可使用 e^x 与 $f(x)$ 的复合完成还原。
- 欲证中值 ξ 和端点值同时出现的结论，一般要么是拉格朗日定理，要么是柯西定理。如果能构造出 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 则是前者，构造出 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 则是后者。
- 欲证含有多个中值 ξ,η,ζ 的结论，一般需要构造函数后使用两次拉格朗日或一次柯西。
- 如果题目中出现了三个点的同阶函数，如 $f(a),f(b),f(c)$ 或 $f^{'}(a),f^{'}(b),f^{'}(c)$，一般不考虑泰勒定理，只考虑拉格朗日；但若出现三个点的非同阶函数，如 $f(a),f^{'}(b),f(c)$，一般就需要考虑泰勒定理，且定理要求在 $x=b$ 处展开。

上述内容的例题可分别参照《接力题典 1800》的如下题目：

- P19 解答题 1，2，3.
- P19 解答题 6，7，8.
- P19 解答题 9，11，13.
- P20 解答题 14，15，16.

- P20 解答题 18，20，21.

2 不定积分

一、常用不定积分结论

- $\int \sin 2x \, \mathrm{d}x = \sin^2 x + C$
- $\int \frac{1}{1+\cos x} \, \mathrm{d}x = \tan \frac{x}{2} + C$
- $\int (\sqrt{x})^{-1} \, \mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C$
- $\int \frac{1}{1+\sin x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\cos(x-\frac{\pi}{2})} \, \mathrm{d}(x - \frac{\pi}{2}) = \tan(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}) + C$
- $\int \tan^2 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \tan x - x + C$

二、徐氏口诀

加常切比常[1]，
减常对上减[2]。
常减对上加[3]，
顺序不要变[4]。

$1: \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$
$2: \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} + C$
$3: \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$
4: 显然 2、3 中的“ln”函数为分母的平方差形式。因此，a 和 x 的顺序不能变。

加减常根形式同，
取对出和分母容[12]。
常减根是 arcsin[3]，

积分表里一条龙。

$1: \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C$
$2: \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$
$3: \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}+C$

3 定积分

一、定积分的本质是求极限

根据定义，定积分的本质是

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $\lambda = \max(\Delta x_i)$ 。

因此，对于这道题：计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$，

其做法是：原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(\frac{i}{n})^2 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. 也就是说，对于这种题，我们要根据以下步骤来做：

- 提一个 $\frac{1}{n}$ 出来。
- 化成带 $\sum\limits_{i=1}^{n}$ 的求和形式。
- 令 $x=\frac{i}{n}$，判断积分的上下限。
- 列出积分式并计算。

那么现在你已经知道了该如何计算这类题目，我们来做这道题：计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n})$.

解：原式 =

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{1+\frac{i}{n}})=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2.$$

有时，这种问题还要和夹逼定理联系在一起，例如：求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\sin^2\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}).$$

对分母使用夹逼定理，有：

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{i\pi}{n}\le\sum_{i=1}^{n}(\frac{\sin^2\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}})\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{i\pi}{n}.$$

又因为当 $n\to\infty$ 时，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin^2\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin^2\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

二、定积分的几个重要性质

- $f(x)$ 连续，则 $\int_{-a}^{a}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a(f(x)+f(-x))\,\mathrm{d}x$.
- $f(x)$ 连续，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

  证明：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$ 即可。
- $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$，且有：设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x$，则 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$，$I_0=\frac{\pi}{2},I_1=1$.

  证明：将一个 $\sin x$ 挪到 d 的后边，然后分部积分即可。

  通过上述公式可得：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}x=I_{10}=\frac{9}{10}\times\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}I_0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x = I_9 = \frac{8}{9} \times \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times I_1$$

- $f(x)$ 连续，则 $\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$

  证明： 令 $x = \frac{\pi}{2} - t$ 即可。

- $f(x)$ 连续,则 $\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$

  证明： 令 $x = \pi - t$ 即可。

三、广义积分敛散性的判别

1. 基本判别法（定义法）

基本法分三步走。即，对于一个反常积分 $\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$，

- 求 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$；
- 计算 $A = \lim\limits_{b\to\infty} F(b) - F(a)$，**注意**，要把该式当作以 b 为参数的函数；
- 如果 A 为有限数，则反常积分收敛于 A；反之则发散。

2. 区域判别法