

Lec 1 三维向量的五种运算

1.1 三维直角坐标系与三维向量的线性运算

定义 1.1 (空间直角坐标系)

从空间一点 O 出发, 作三条两两垂直 (正交) 的射线, 并确定单位与方向, 构成 $O - xyz$ 直角坐标系.

命题 1.1

1. xOy 坐标面, zOy 坐标面, zOx 坐标面两两正交并将整个空间分割成八个卦限.
2. 点 M : 设 M 为空间任一点, 过 M 点分别作 Ox, Oy, Oz 轴的垂面. 可得三个垂足 A, B, C , 设 A, B, C 代表的实数为 a, b, c . 则点, 则点 M 与有序数组 (a, b, c) 一一对应, 记作 $M(a, b, c)$. 坐标原点为 $O(0, 0, 0)$.
3. 向量 \overrightarrow{OM} : 在 Ox, Oy, Oz 轴正向上分别取三个单位向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, 则 $\overrightarrow{OA} = a\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OB} = b\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OC} = c\mathbf{k}$, 依照平面向量的加法法则 (平行四边形法则, 三角形法则) $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \triangleq (a, b, c)$. 同时可得 $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, 零向量 $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.
4. 如上定义的 M, \overrightarrow{OM} 与有序数组 (a, b, c) 一一对应.
5. $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}, \mathbf{i} \perp \mathbf{k}, \mathbf{j} \perp \mathbf{k}$.

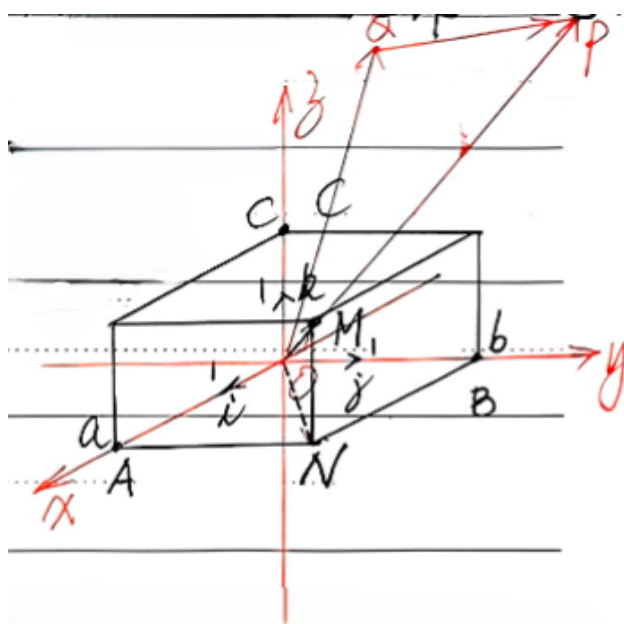


图 1.1: 空间直角坐标系

定义 1.2

$\overrightarrow{OM} = (a, b, c)$, 称 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 为向量 \overrightarrow{OM} 的模, 记为 $|\overrightarrow{OM}|$.

模长为 0 的向量为零向量 $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, 模长为 1 的向量称为单位向量.



命题 1.2

设向量 $\alpha = (a, b, c) \neq \mathbf{0}$, 则 $|\alpha| \neq 0$.

此时, $\alpha^0 \triangleq \frac{\alpha}{|\alpha|} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right)$ 是单位向量.



注

1. 这种定义方式较为依赖直观的几何性质, 且可能存在一些循环定义的问题, 当然针对这一阶段这样大概就足够了.
2. 这种方式可以想见, 是可以从三维向量 (three-dimensional vector) 推广至 n 维的, 对应的向量就是 n 维向量 (n-dimensional vector).

设 $P = (x_1, y_1, z_1), Q = (x_2, y_2, z_2)$ 是空间的任意两点, $\overrightarrow{OP} = (x_1, y_1, z_1), \overrightarrow{OQ} = (x_2, y_2, z_2)$. 则 $\overrightarrow{PQ} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. 即空间的任一个向量 $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

空间中的向量有无数个, 但每一个都可用单位向量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 的线性组合来表示, 称之前定义的 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 为三维向量空间的标准正交基.

在任一个有限维的向量空间中, 一旦选定了基向量, 则“无限的问题便可有限化表示”了.

命题 1.3 (三维数组向量的线性运算法则)

设 $\alpha = (a_1, b_1, c_1), \beta = (a_2, b_2, c_2), \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, 则

1. 加、减法: $\alpha \pm \beta = (a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}) \pm (a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}) = (a_1 \pm a_2)\mathbf{i} + (b_1 \pm b_2)\mathbf{j} + (c_1 \pm c_2)\mathbf{k} = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2, c_1 \pm c_2)$.

2. 数乘: $\lambda_1\alpha = \lambda_1(a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}) = (\lambda_1a_1)\mathbf{i} + (\lambda_1b_1)\mathbf{j} + (\lambda_1c_1)\mathbf{k} = (\lambda_1a_1, \lambda_1b_1, \lambda_1c_1)$.

向量的加法、减法及数乘三种运算统称为向量的线性运算. 统一为

$\lambda_1\alpha + \lambda_2\beta = (\lambda_1a_1, \lambda_1b_1, \lambda_1c_1) + (\lambda_2a_2, \lambda_2b_2, \lambda_2c_2) = (\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2, \lambda_1b_1 + \lambda_2b_2, \lambda_1c_1 + \lambda_2c_2)$.



1.2 向量的内积与外积

定义 1.3 (内积与外积)

设 $\alpha = (a_1, b_1, c_1), \beta = (a_2, b_2, c_2)$. 则

1. 内积: $\alpha \cdot \beta = |\alpha| |\beta| \cos(\widehat{\alpha, \beta})$

2. 外积: $\alpha \times \beta$, 满足
$$\begin{cases} |\alpha \times \beta| = |\alpha| |\beta| \sin(\widehat{\alpha, \beta}) \\ \alpha \times \beta \perp \alpha, \alpha \times \beta \perp \beta, \text{ 且 } \alpha, \beta, \alpha \times \beta \text{ 构成右手系.} \end{cases}$$



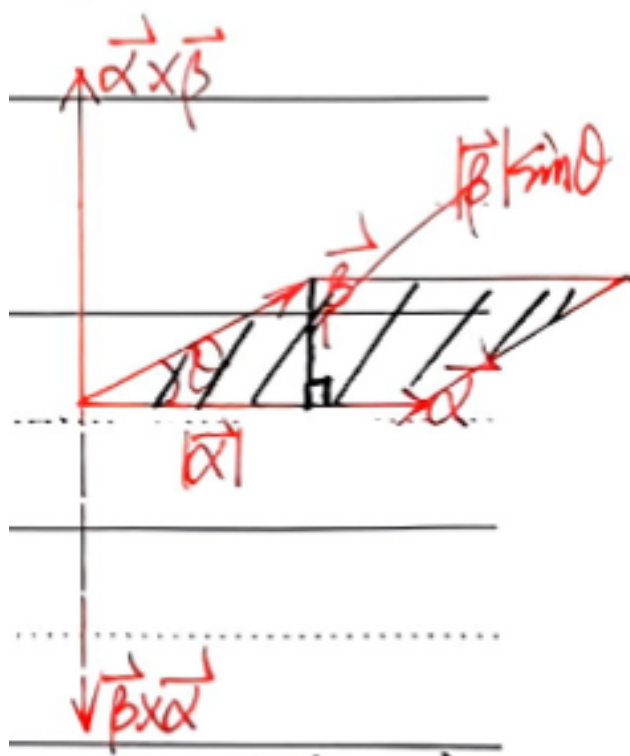


图 1.2: 外积的图示

注

1. $\alpha \cdot \beta$ 的规定来源于物理中里做功的运算, $\alpha \cdot \beta$ 是一个数, 故称内积 $\alpha \cdot \beta$ 为 α 与 β 的数量积, 或者称为点乘.
2. $\alpha \times \beta$ 的规定来源于物理中的力矩的运算, $\alpha \times \beta$ 是一个向量, 故称外积 $\alpha \times \beta$ 为 α 与 β 的向量积, 或者称为叉乘.

定理 1.1

1. $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.
2. $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \alpha \times \beta = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow \alpha = \lambda \beta$



证明

1.
 - 1) 若 $\alpha \perp \beta$, 则 $\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \beta = |\alpha| |\beta| \cos(\widehat{\alpha, \beta}) = 0$.
 - 2) 反之, 若 $\alpha \cdot \beta = 0$, 则 $|\alpha| |\beta| \cos(\widehat{\alpha, \beta}) = 0$, 若 $|\alpha| |\beta| \neq 0$, 则 $\cos(\widehat{\alpha, \beta}) = 0$, 从而 $\alpha \perp \beta$. 若 $|\alpha| |\beta| = 0$, 则 $\alpha = 0$ 或 $\beta = 0$, 由于零向量 0 垂直于任意向量, 故 $\alpha \perp \beta$.
 - 3) $\alpha \cdot \beta = (a_1 \mathbf{i} + b_1 \mathbf{j} + c_1 \mathbf{k}) \cdot (a_2 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + c_2 \mathbf{k}) = a_1 a_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_1 b_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_1 c_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + b_1 a_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + b_1 b_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + b_1 c_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + c_1 a_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + c_1 b_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + c_1 c_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$. 而 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}| |\mathbf{i}| \cos(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{i}}) = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1 = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$, 且由于 $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}, \mathbf{i} \perp \mathbf{k}, \mathbf{j} \perp \mathbf{k}$, 故 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$, 故 $\alpha \cdot \beta = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$.
2.
 - 1) 若 $\alpha \parallel \beta$, 则 $\sin(\widehat{\alpha, \beta}) = 0 \Rightarrow |\alpha \times \beta| = |\alpha| |\beta| \sin(\widehat{\alpha, \beta}) = 0 \Rightarrow \alpha \times \beta = 0$.
 - 2) 反之, 若 $\alpha \times \beta = 0$, 则 $|\alpha \times \beta| = |0| = 0 = |\alpha| |\beta| \sin(\widehat{\alpha, \beta})$, 若 $|\alpha| |\beta| \neq 0$, 则 $\sin(\widehat{\alpha, \beta}) = 0$, 从而 $\alpha \parallel \beta$. 若 $|\alpha| |\beta| = 0$, 则 $\alpha = 0$ 或 $\beta = 0$, 由于零向量 0 平行于任意向量, 故 $\alpha \parallel \beta$.

$$\begin{aligned}
3) \quad & \begin{cases} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = (a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}) \times (a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}) \\
& = a_1a_2\mathbf{i} \times \mathbf{i} + a_1b_2\mathbf{i} \times \mathbf{j} + a_1c_2\mathbf{i} \times \mathbf{k} + b_1a_2\mathbf{j} \times \mathbf{i} + b_1b_2\mathbf{j} \times \mathbf{j} + b_1c_2\mathbf{j} \times \mathbf{k} + \\
& c_1a_2\mathbf{k} \times \mathbf{i} + c_1b_2\mathbf{k} \times \mathbf{j} + c_1c_2\mathbf{k} \times \mathbf{k} = a_1b_2\mathbf{k} - a_1c_2\mathbf{j} - b_1a_2\mathbf{k} + b_1c_2\mathbf{i} + c_1a_2\mathbf{j} - c_1b_2\mathbf{i} = \\
& (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} - (a_1c_2 - c_1a_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}. \text{ 由 } bf\boldsymbol{\alpha} // \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \\
& \mathbf{0} = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} b_1c_2 - c_1b_2 = 0 \\ c_1a_2 - a_1c_2 = 0 \\ a_1b_2 - b_1a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \triangleq \lambda. \text{ 因此可得 } \boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\beta}.
\end{aligned}$$

注

- 在上述证明中, 不加证明地使用了点乘与叉乘的分配率等性质.
- 与证明中提到的类似, 点乘有坐标表达 $\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$, 叉乘有坐标表达 $\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, 这也是最常用的计算公式.

1.3 例题

设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, b_1, c_1), \boldsymbol{\beta} = (a_2, b_2, c_2), \boldsymbol{\gamma} = (a_3, b_3, c_3)$.

例 1.1 证明: 柯西不等式 $|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2| \leq \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$.

证明 $|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2| = |\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\alpha}| |\boldsymbol{\beta}| \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}) \leq |\boldsymbol{\alpha}| |\boldsymbol{\beta}| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}$.

注 在 n 维向量空间中, 设 $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, 则 $|\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\alpha}| |\boldsymbol{\beta}| \cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}) \leq |\boldsymbol{\alpha}| |\boldsymbol{\beta}|$, 即 $|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$.

例 1.2 证明: $|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}|^2 |\boldsymbol{\beta}|^2 - |\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2$.

证明 $|\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}|^2 = |\boldsymbol{\alpha}|^2 |\boldsymbol{\beta}|^2 \sin^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}) = |\boldsymbol{\alpha}|^2 |\boldsymbol{\beta}|^2 (1 - \cos^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}})) = |\boldsymbol{\alpha}|^2 |\boldsymbol{\beta}|^2 - |\boldsymbol{\alpha}|^2 |\boldsymbol{\beta}|^2 \cos^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}) = |\boldsymbol{\alpha}|^2 |\boldsymbol{\beta}|^2 - |\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}|^2$.

例 1.3 证明: $(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}) \cdot \boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\beta}$.

证明 $(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdot (a_3\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) = ((b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 -$

$$a_2b_1)\mathbf{k}) \cdot (a_3\mathbf{i} + b_3\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) = (b_1c_2 - c_1b_2)a_3 + (c_1a_2 - a_1c_2)b_3 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$(\beta \times \gamma) \cdot \alpha = (\gamma \times \alpha) \cdot \beta.$$

例 1.4 证明: 三个向量 α, β, γ 共面的充要条件是 $(\alpha \times \beta) \cdot \gamma = 0$.

证明 是如下结论的结果: 如图所示, 根据计算公式, $|\alpha \times \beta|$ 是以 α 和 β 为两边的平行四边形的面积, 而 $|\gamma| |\cos(\widehat{\alpha \times \beta, \gamma})|$ 是 γ 在垂直于平行四边形方向上的投影, 即 $h = |\gamma| |\cos(\widehat{\alpha \times \beta, \gamma})|$, 因此 $(\alpha \times \beta) \cdot \gamma$ 是以 α, β 和 γ 为三边的平行六面体的体积, 于是 α, β, γ 共面 \Leftrightarrow 平行六面体

$$\text{的体积为 } 0 \Leftrightarrow (\alpha \times \beta) \cdot \gamma = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

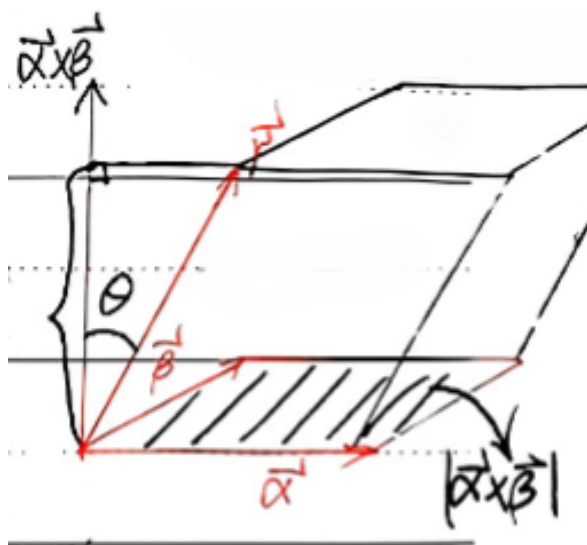



图 1.3: 混合积与平行六面体

例 1.5 $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ 总有 $\alpha, \beta, \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta$ 共面.

证明 利用 $\alpha \perp \alpha \times \beta, \beta \perp \alpha \times \beta$, 则 $(\alpha \times \beta) \cdot \alpha = 0, (\alpha \times \beta) \cdot \beta = 0$, 从而 $(\alpha \times \beta) \cdot (\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta) = 0$, 因此可得 $\alpha, \beta, \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta$ 共面.

 **作业** ex8.1:6,9,10,12,14,17,23,26.