Lec 3

3.1 上周作业

✍ 练习 3.1 9.1.12 设 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2(x\neq 0)$, 求 $f(2,3), f(x,y)$.

解 令

$$\begin{cases} u=x+y, \\ v=\frac{y}{x}, \end{cases} \quad x\neq 0$$

注意到 $\frac{y}{x}=-1\Leftrightarrow x+y=0$, 因此 $f(u,v)$ 的定义域应为 $\{(u,v)|u\neq 0, v\neq -1\}\cup\{(0,-1)\}$

对于 $u\neq 0, v\neq -1$ 时可解得

$$\begin{cases} x=\frac{u}{v+1}, \\ y=\frac{uv}{v+1}, \end{cases} \quad u\neq 0, v\neq -1$$

因此 $f(u,v)=\frac{u^2(1-v^2)}{(v+1)^2}=\frac{u^2(1-v)}{1+v}$.

而对于 $u=0, v=-1$ 时令 $x=t\neq 0, y=-t$, 可得 $f(0,-1)=0$ 综上

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2(1-y)}{1+y}, & x\neq 0, y\neq -1; \\ 0, & x=0, y=-1; \end{cases}$$

计算 $f(2,3)=\frac{2^2(1-3)}{1+2}=-2$.

✍ 练习 3.2 9.1.14(9) $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} &= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\sqrt{u+1}-1} \\ &= \lim_{u\to 0}\frac{u}{\frac{u}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

✍ 练习 3.3 9.1.15 若 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 问沿怎样的方向 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$, 下列极限存在?

1. $\lim\limits_{r\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-y^2}}$,
2. $\lim\limits_{r\to +\infty}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy$.

解

1.

$$\begin{aligned}\lim_{r\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-y^2}}&=\lim_{r\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}}\\&=\lim_{r\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{r^2\cos2\theta}}\\&=\begin{cases}+\infty, & \cos2\theta>0\\0, & \cos2\theta<0\end{cases}\end{aligned}$$

其中，由于 $x^2-y^2\neq0$，可得 $\cos2\theta\neq0$.

因此当 $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$ 时极限存在.

2.

$$\begin{aligned}\lim_{r\to+\infty}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin2xy&=\lim_{r\to+\infty}\mathrm{e}^{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\sin(2r^2\sin\theta\cos\theta)\\&=\lim_{r\to+\infty}\mathrm{e}^{r^2\cos2\theta}\sin(r^2\sin2\theta)\\&=\begin{cases}\text{不存在}, & \cos2\theta\geqslant0\text{且}\sin2\theta\neq0\\0, & \cos2\theta<0\text{或}\sin2\theta=0\end{cases}\end{aligned}$$

因此当 $\theta\in\{0\}\cup(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})\cup\{\pi\}\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4})\cup\{2\pi\}$ 时极限存在.

练习 3.4 8.4.11 分别求单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

和双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

的一个参数方程表示.

解 给出四种方案

1. 利用双曲函数

$$\text{单叶}\begin{cases}x=a\cosh u\cos v,\\y=b\cosh u\sin v,\\z=c\sinh u,\end{cases}\quad u\in(-\infty,+\infty),v\in[0,2\pi)$$

$$\text{双叶}\begin{cases}x=a\sinh u\cos v,\\y=b\sinh u\sin v,\\z=\pm c\cosh u,\end{cases}\quad u\in(-\infty,+\infty),v\in[0,2\pi)$$

2. 利用 $\sec^2x-\tan^2x=1$

$$\text{单叶}\begin{cases}x=a\sec u\cos v,\\y=b\sec u\sin v,\\z=c\tan u,\end{cases}\quad u\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),v\in[0,2\pi)$$

$$\text{双叶}\begin{cases}x=a\tan u\cos v,\\y=b\tan u\sin v,\\z=\pm c\sec u,\end{cases}\quad u\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}),v\in[0,2\pi)$$

3. 利用 $\csc^2x-\cot^2x=1$

单叶 $\begin{cases} x = a\csc u\cos v, \\ y = b\csc u\sin v, \\ z = c\cot u, \end{cases}$ $u \in (0,\pi), v \in [0,2\pi)$

双叶 $\begin{cases} x = a\cot u\cos v, \\ y = b\cot u\sin v, \\ z = \pm c\csc u, \end{cases}$ $u \in (0,\pi), v \in [0,2\pi)$

4. 利用类似柱坐标系的形式

单叶 $\begin{cases} x = a\sqrt{1+u^2}\cos v, \\ y = b\sqrt{1+u^2}\sin v, \\ z = cu, \end{cases}$ $u \in (-\infty,+\infty), v \in [0,2\pi)$

双叶 $\begin{cases} x = a\sqrt{u^2-1}\cos v, \\ y = b\sqrt{u^2-1}\sin v, \\ z = cu, \end{cases}$ $|u| \geqslant 1, v \in [0,2\pi)$

练习 3.5 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在

错误做法 1

解 取对数, 有

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \frac{\ln(1+xy)}{x+y} &\leqslant \frac{xy}{x+y} \\
&\leqslant \frac{xy}{2\sqrt{xy}} \\
&= \frac{\sqrt{xy}}{2}
\end{aligned}
$$

因此可得取对数后极限为 0, 原极限为 1.

注意 $x+y$ 有正有负.

错误做法 2

解 取对数, 有

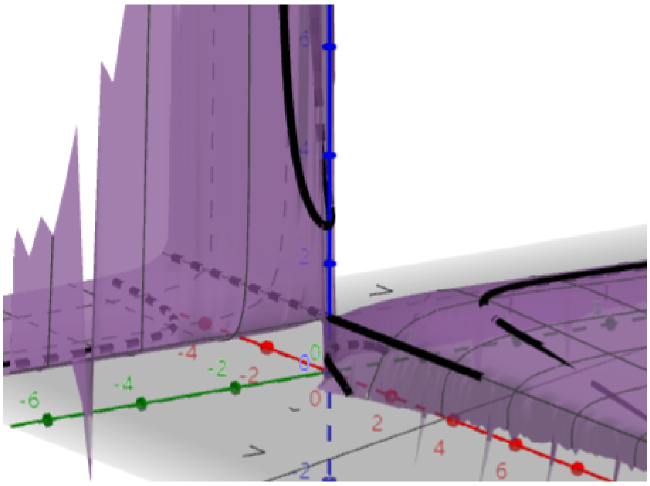
$$
\begin{aligned}
0 \leqslant \left|\frac{\ln(1+xy)}{x+y}\right| &\leqslant \frac{|xy|}{|x+y|} \\
&\leqslant \frac{|xy|}{2\sqrt{|xy|}} \\
&= \frac{\sqrt{|xy|}}{2}
\end{aligned}
$$

因此可得取对数后极限为 0, 原极限为 1.

注意 $ln(1+x) \leqslant x$, 但有正有负, 取绝对值不保不等号.

正确做法

解 沿着 $xy = k(x+y)$ 路径, 即 $y = \dfrac{kx}{x-k}, x \to 0$ 路径, 有 $\lim\limits_{\substack{y=\frac{kx}{x-k}\\ x\to 0}}(1+\dfrac{kx^2}{x-k})^{\frac{x-k}{x^2}} = \mathrm{e}^k$



3.2 连续性, 可导性, 可微性专题

总结与一些常见技巧

对于历年期中的这类题, 他们大多为简单的 x, y 的多项式函数的商复合上 $\sqrt{t}$,$\sin t$,$\ln t$,e^t, 并且一般给出了原点处函数值为 0, 然后求在原点的连续, 可导, 可微性, 因此一定程度上有迹可循.

常见函数类型

1. 形如 $\dfrac{uv}{u^2+v^2}$ 的函数.

   例 3.1 $\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \dfrac{x^3y}{x^6+y^2}, \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

   这种相对常见, 而且这也是教材上的例子, 这种函数通常有两种使用方式,

   (a). 利用它在原点不连续, 即取 $v = ku$ 的路径上, 有

   $$\lim_{u\to 0, v=ku} \frac{uv}{u^2+v^2} = \lim_{u\to 0} \frac{ku^2}{u^2+k^2u^2} = \frac{k}{1+k} \tag{3.1}$$

   与 k 有关, 因此不连续.

   (b). 利用 $u^2+v^2 \geqslant 2|u||v|$, 得到

   $$\left|\frac{uv}{u^2+v^2}\right| \leqslant \frac{1}{2} \tag{3.2}$$

   即有界性.

2. 分子分母的次数一致.

   例 3.2 $\dfrac{xy}{x^2+y^2}, \dfrac{x^3-y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

   典型的手法只有一个, 就是用 $y = kx$ 这一路径得到在沿着不同路径的极限和 k 有关,

   $$\lim_{x\to 0, y=kx} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = h(k). \tag{3.3}$$

   因此没有极限.

3. $\sin t$.

例 3.3 $\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.
也是两种手法:
(a).

$$|\sin t| \leqslant 1. \tag{3.4}$$

即有界.
(b). 当 $x \to 0, y \to 0$ 时, 如果 $\sin t$ 里的 t 也趋于零, 那么可以用等价无穷小替换

$$t \sim \sin t. \tag{3.5}$$

例如第一个例子 $\frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}$.

4. $\ln t$ 核心几乎只有一个, 就是

$$\lim_{t\to 0} t^n \ln t = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.6}$$

5. 特殊形式, 如

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2 \leqslant x^4+y^4 \leqslant (x^2+y^2)^2 \tag{3.7}$$

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) \tag{3.8}$$

6. e^t 没考过, 但可以转成 ln, 更有可能为 $\frac{x^m+\cdots+y^n}{e^{x+y}}$ 在无穷处的极限这种.

连续性一般用上述方法确定极限即可,
可导性通常情况下是各个偏导都为 0, 建议带入确认一下.
可微性, 在偏导, 原点函数值都为零的时候, 可以化为证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

练习 3.6 历年真题 研究下列函数在原点的连续性, 偏导数, 可微性

2012-2013.1(1)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

解 不连续: $\frac{x^3y}{(x^3)^2+y^2}$, 利用3.1
偏导均为 0,
不可微: 不连续即得.

2012-2013.1(2)

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

解 连续: 利用3.4$\sin t$ 有界,$xy \to 0$, 因此 $\left|xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \to 0$.
偏导均为 0,

可微:$\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\dfrac{(x^2+y^2)}{2\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\to 0.$

2013-2014.2

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

解 连续:$\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界,$x^2+y^2\to 0$, 故 $(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0$

偏导均为 0

可微 $\dfrac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 与连续性类似,

$\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 有界,$\sqrt{x^2+y^2}\to 0$, 故 $\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\to 0.$

2019-2020.2

$$f(x,y)=\begin{cases}(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2+b)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a,b 取值何时连续, 何时可微

解 连续: 利用 $\sin(xy^2)\sim xy^2$, 同3.2$\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 有界. 因此 $(a\sqrt{|x|}+x^2+y^2)\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}\to 0$, 当

$b=0$ 时显然原极限存在, 为 0;$b\neq 0$ 时由于3.1可得原极限不存在, 故

$b=0\Leftrightarrow$ 连续

可微: 导函数均为 0, 且需要连续, 即 $b=0$.

$a\neq 0$ 时, 由于 $\dfrac{\sqrt{|x|}}{x^2+y^2}\dfrac{\sin(xy^2)}{x^2+y^4}$ 不存在, 可取 $x=ky^2$ 即得;

$\sqrt{x^2+y^2}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 也是趋于零乘有界故极限为 0, 因此

$a=0,b=0\Leftrightarrow$ 可微

2017-2018.3

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

解 连续, 偏导均为 0, 可微. 同 2013-2014.2.

2020-2021.1(1)

$$\lim_{x^2+y^2\to 0+\infty}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

解 利用 $2(x^4+y^4)\geqslant(x^2+y^2)^2$ 放缩即得.

2021-2022.4

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$n\in\mathbb{N}$ 为何值连续, 何值可微.

解 连续: 利用 $|(x+y)^n| \leqslant (2\rho)^n$ 与 $\lim\limits_{\rho\to 0}(2\rho)^n \ln\rho^2 = 0$ 可得. $n \in \mathbb{N}$ 连续.

可微: 偏导存在, 即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n \ln x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x^{n-1}\ln x^2$ 在 $n \geqslant 2$ 时才存在, 为 0.

同时 $\left|\dfrac{(x+y)^n \ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant 2^n\rho^{n-1}\ln\rho^2$, 因此 $n \geqslant 2$ 时可得可微.

2022-2023.3

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

解 连续:$\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \dfrac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{x^2+y^2} = (x-y)(1+\dfrac{xy}{x^2+y^2})$,$x-y \to 0$,$1+\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 有界, 得原极限存在为 0.

偏导均为 0.

不可微: 齐次, 取 $y = kx$.

2023-2024.3

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

方向导数 (先不管) 与可微性.

解 连续:$x^2y^2 \leqslant r^4$, 即得 $\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \dfrac{r^4}{r^3} = r \to 0$.

偏导均为 0.

不可微: 齐次, 取 $y = kx$.