Lec 28 第二类曲线积分

28.1 第二类曲线积分的定义与性质

第二类曲线积分形如

$$\int_L \boldsymbol{v}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

定义 28.1

设 $\boldsymbol{v}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 是空间区域 D 中的向量场，L_{AB} 是 D 中定向曲线，在 L_{AB} 上从 A 到 B 依次选取任意的分割点：

$$A=M_0,M_1,\ldots,M_n=B,$$

其中分割点的坐标是 $M_i(x_i,y_i,z_i),i=0,\ldots,n$，则

$$\Delta\boldsymbol{r}_i=\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\Delta x_i\boldsymbol{i}+\Delta y_i\boldsymbol{j}+\Delta z_i\boldsymbol{k}$$

在每一段弧 $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$ 上任选一点 $N_i(\xi_i,\zeta_i,\chi_i)$，当分割的最大长度 $|T|\to 0$ 时，如果下列和式

$$\sum_{i=1}^n \boldsymbol{v}(\xi_i,\zeta_i,\chi_i)\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\zeta_i,\chi_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\zeta_i,\chi_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\zeta_i,\chi_i)\Delta z_i$$

的极限存在且有限，那么极限值称为向量场 $\boldsymbol{v}$ 沿曲线（或路径）L_{AB} 的积分（也称为第二型曲线积分），记为

$$\int_{L_{AB}}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

定向曲线 L_{AB} 被称为积分路径. 当 L 是封闭曲线时, 积分称为向量场 $\boldsymbol{v}$ 沿环路 L 的环量, 通常记为

$$\oint_L \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

♣

命题 28.1

设 $\boldsymbol{v}_1(x,y,z)$,$\boldsymbol{v}_2(x,y,z)$ 是定义在区域 D 上的连续向量场,$L\subset D$ 是定向曲线,c_1,c_2 是常数, 则有

1. 线性性质:

$$\int_L (c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=c_1\int_L\boldsymbol{v}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+c_2\int_L\boldsymbol{v}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

2. 积分区域可加性:

$$\int_{L_1+L_2} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{L_1} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{L_2} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

3. 积分路径方向性:

$$\int_{L_{AB}} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int_{L_{BA}} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

特别地, 设 L 是有向直线段, 且位于 x 轴上的 $[a,b]$ 上, 给定正向为 x 轴正方向, 则有

$$\int_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_L P(x,0,0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,0,0)\,\mathrm{d}x$$

其中在积分路径上 y,z 为常值, 因此 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}z=0$.

考虑一个闭合路径上的积分 $\oint_L \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, 记 D 为路径 L 所围成的区域, 即 $L=\partial D$, 我们常常有

1. 当区域 D 在 L 的左侧时, 称 L 为 D 的正向边界. 当 D 是单连通区域, 即 D 中任意闭路径都可以在 D 中收缩为一个点时,$L=\partial D$ 的正向即为逆时针方向,
2. 当 D 是多连通区域, 即 D 为有洞的区域时,$L=\partial D$ 的正向为外边界的逆时针, 内边界顺时针方向.

28.2 第二类曲线积分的计算

设向量场 $\boldsymbol{v}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 在区域 D 内连续，曲线 $L_{AB}\subset D$ 具有参数方程表示

$$L_{AB}:\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\quad \alpha\le t\le\beta,$$

且有连续的导函数，参数 t 是正向参数，则向量场在 L_{AB} 上可积，且可化为下列定积分

$$\begin{aligned}\int_{L_{AB}} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_\alpha^\beta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_\alpha^\beta (Px'+Qy'+Rz')\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

证明 对参数所在的区间 $[\alpha,\beta]$ 进行的任意分割 $T:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$，则对应曲线上沿方向从 A 到 B 的任意分割 $A=M_0,M_1,\ldots,M_n=B$，根据曲线参数方程表示的连续性可知，关于 t 的分割最大长度趋于零等价于曲线上对应的分割最大长度趋于零。此时

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r}_i &= \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \boldsymbol{r}(t_i)-\boldsymbol{r}(t_{i-1})\\ &= \Delta x_i\boldsymbol{i}+\Delta y_i\boldsymbol{j}+\Delta z_i\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

根据微分中值定理有

$$\Delta x_i = x'(\lambda_i)\Delta t_i, \quad \Delta y_i = y'(\mu_i)\Delta t_i, \quad \Delta z_i = z'(\nu_i)\Delta t_i,$$

其中 $t_{i-1} \le \lambda_i, \mu_i, \nu_i \le t_i$。取第 i 段曲线上任意一点

$$(\xi_i, \zeta_i, \chi_i) = (x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)), \quad t_{i-1} \le \tau_i \le t_i$$

这里 $i = 1, 2, \dots, n$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}(\xi_i, \zeta_i, \chi_i) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) x'(\lambda_i)\Delta t_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} Q(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) y'(\mu_i)\Delta t_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} R(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) z'(\nu_i)\Delta t_i\end{aligned}$$

注意到上述式最后一个等式中，虽然三个求和项都不是严格的 Riemann 和，但可以采取函数在曲线上积分时的处理方法，进行必要的修正，使得每个求和都能表示成严格的 Riemann 和与一个修正项之和。当 $|T| \to 0$ 时，修正项的极限为零，所以有

$$\begin{aligned}\lim_{|T|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i)) \cdot \Delta \boldsymbol{r}_i &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \boldsymbol{r}'(t) \, \mathrm{d}t\end{aligned}$$

例 28.1 设 L 为三角形 OAB 的正向边界:

$$L = L_1 + L_2 + L_3, \quad \begin{cases} L_1 : 0 \leqslant x \leqslant 1, y \equiv 0, x = x \\ L_2 : 0 \leqslant y \leqslant 2, x \equiv 1, y = y \\ L_3 : \begin{cases} y = 2x, \\ x = x \end{cases}, x : 1 \to 0 \end{cases}$$

计算

$$I = \oint_L xy \, \mathrm{d}x + x^2 \, \mathrm{d}y$$

解 我们逐段计算:

1. 在 L_1 上,$y \equiv 0 \Rightarrow \mathrm{d}y = 0$, 因此

$$I_1 = \int_{L_1} xy \, \mathrm{d}x = \int_0^1 0 \cdot \mathrm{d}x = 0$$

2. 在 L_2 上,$x \equiv 1 \Rightarrow \mathrm{d}x = 0$, 因此

$$I_2 = \int_{L_2} x^2 \,\mathrm{d}y = \int_0^2 1 \,\mathrm{d}y = 2$$

3. 在 L_3 上, 参数化为

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2(1-t) \end{cases}, \quad x : 1 \to 0 \Rightarrow t : 0 \to 1$$

因此

$$\mathrm{d}y = -2\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$$

$$I_3 = \int_{L_3} xy \,\mathrm{d}x + x^2 \,\mathrm{d}y = \int_0^1 (1-t)(2-2t)(-\,\mathrm{d}t) + (1-t)^2(-2\,\mathrm{d}t) = -\frac{4}{3}$$

综上所述

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 0 + 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

例 28.2 计算平面向量场 $\boldsymbol{v} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 沿一个局限 $D = [a,b] \times [c,d]$ 的边界 $L = \partial D$ 的环量, 方向为逆时针方向.

解 将矩形的边界分为四段, 则

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{L_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{L_3} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{L_4} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

其中 L_1,L_2,L_3,L_4 分别为矩形的四条边界, 即

$$\begin{cases} L_1 : y = c, x : a \to b \\ L_2 : x = b, y : c \to d \\ L_3 : y = d, x : b \to a \\ L_4 : x = a, y : d \to c \end{cases}$$

其中在 L_1 和 L_3 上，$dy = 0$，注意到线段 L_1 和 L_3 分别的取向，有

$$\begin{aligned} \int_{L_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{L_3} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y &= \int_a^b P(x,c)\,\mathrm{d}x - \int_a^b P(x,d)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b (P(x,c) - P(x,d))\,dx \\ &= -\int_a^b \int_c^d \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= -\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

同理，沿 L_2 和 L_4，有 $dx = 0$，同时注意到 L_2 和 L_4 分别的取向，有

$$\int_{L_2} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + \int_{L_4} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

所以，平面向量场沿矩形边界的环量为

$$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right) dx\,\mathrm{d}y.$$

例 28.3 计算

$$I = \oint_L \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

其中 L 是正向圆周,$x^2+y^2=a^2(a>0)$.

解 令

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \end{cases}, \quad \theta : 0 \to 2\pi$$

则有

$$\mathrm{d}x = -a\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad \mathrm{d}y = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin^2\theta - a\cos^2\theta}{a^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

✍ **作业** ex11.3:1(1)(3)(4),2,3,4(1),5(1)(2).