

Lec 3 向量, 平面, 直线习题课

3.1 距离与投影

例 3.1 证明: 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

证明 在 π 中任取点 $Q(a, b, c)$, 则

$$\begin{aligned} d &= \left| |\overrightarrow{QM_0}| \cos \alpha \right| \\ &= \left| \frac{|\overrightarrow{QM_0}| |\mathbf{n}| \cos \alpha}{|\mathbf{n}|} \right| \\ &= \frac{|\overrightarrow{QM_0} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} \\ &= \frac{|(x_0 - a, y_0 - b, z_0 - c) \cdot (A, B, C)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (aA + bB + cC)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

由 $Q(a, b, c) \in \pi, aA + bB + cC + D = 0 \Rightarrow -(aA + bB + cC) = D$, 代入上式得证.

例 3.2 证明: 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $l: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ 的距离为

$$d = \frac{|l(x_0 - x_1) + m(y_0 - y_1) + n(z_0 - z_1)|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

其中 $M_1(x_1, y_1, z_1), \boldsymbol{\tau} = (l, m, n)$

证明 $d = |\overrightarrow{M_1M_0}| \sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0}| |\boldsymbol{\tau}| \sin \alpha}{|\boldsymbol{\tau}|} = \frac{|\overrightarrow{M_1M_0} \times \boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{\tau}|}$.

例 3.3 求直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ 在平面 $\pi: x - 2y + 3z + 1 = 0$ 中的投影直线 L_1 的方程.

解

过 L 上已知点 $M_1(1, -1, 2)$ 作 π 的垂面 π_1 , 则 π_1 的法向量 $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}$, 其中 $\mathbf{n} = (1, -2, 3), \boldsymbol{\tau} = (1, 1, 2)$, 所以

$$\mathbf{n}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -7\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = (-7, 1, 3)$$

由平面的点法式方程知, π_1 的方程为 $\pi_1: -7(x-1) + 1(y+1) + 3(z-2) = 0 \Rightarrow 7x - y -$

$3z + 2 = 0$. 而所求的投影直线 L_1 正是平面 π 与垂面 π_1 的交线, 所以 L_1 的方程为

$$L_1: \begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0 \\ 7x - y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$$

3.2 异面直线

例 3.4 证明: $L_1: \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$ 与 $L_2: \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x + 2y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ 为异面直线.

证明 设 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 δ_1, δ_2 , 则 $\delta_1 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (0, -1, -1), \delta_2 = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$(6, -3, 0)$. 取 $\delta_1 = (0, 1, 1), \delta_2 = (2, -1, 0)$, 在 L_1 中令 $z = 0$, 从 $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 0, z = 0$, 即 L_1 的方向向量为 $\delta_1 = (0, 1, 1)$, 且 $M_1(1, 0, 0) \in L_1$.

在 L_2 中令 $y = 0$, 从 $\begin{cases} x - z = 2 \\ x + 2z = -2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3}, y = 0, z = -\frac{4}{3}$, 即从 $M_2(\frac{2}{3}, 0, -\frac{4}{3}) \in L_2$.

由 $\overrightarrow{M_1M_2} = (\frac{2}{3}, 0, -\frac{4}{3}) - (1, 0, 0) = (-\frac{1}{3}, 0, -\frac{4}{3})$, 所以 $\delta_1 \times \delta_2 \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} =$

$\frac{7}{3} \neq 0$, 所以 L_1 与 L_2 异面.

例 3.5 设 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{0}; L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1}$.

1. 证明 L_1 与 L_2 异面;
2. 求 L_1 与 L_2 的公垂线段之长 d ;
3. 求公垂线段 L 的方程;
4. 求一个平面使得 $L_1 // \pi, L_2 // \pi$, 且 π 与 L_1, L_2 等距.

证明

解

1. 设两直线的方向向量分别为 $s_1 = (2, -1, 0), s_2 = (1, 0, 1), M_1(1, 0, 3), M_2(-1, 2, 1) \Rightarrow \overrightarrow{M_2M_1} = (2, -2, 2) \Rightarrow$

$$(s_1 \times s_2) \cdot \overrightarrow{M_2M_1} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 2 + 0 - 0 + 4 + 2 = 4 \neq 0$$

所以 L_1 与 L_2 异面.

2. 设公垂线为 L , 则 $L \perp L_1, L \perp L_2$, 设 L 的方向向量为 s , 则 $s \perp s_1, s \perp s_2 \Rightarrow s =$

$$\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 1). \text{ 设公垂线段为 } CD, \text{ 则 } C, D \text{ 是两个垂足, 向量 } \overrightarrow{M_2M_1}$$

在公垂线方向向量 \mathbf{s} 上的投影: $\overrightarrow{M_2M_1} \cos(\overrightarrow{M_2M_1}, \mathbf{s})$, 再取绝对值即为公垂线段的长. 即

$$d = \left| \overrightarrow{M_2M_1} \cos(\overrightarrow{M_2M_1}, \mathbf{s}) \right| = \left| \overrightarrow{M_2M_1} \cdot \frac{\overrightarrow{M_2M_1} \cdot \mathbf{s}}{|\overrightarrow{M_2M_1}| |\mathbf{s}|} \right| = \frac{|\overrightarrow{M_2M_1} \cdot \mathbf{s}|}{|\mathbf{s}|} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

注 两异面直线的距离在两直线上各取一点 M_1, M_2 , 设两直线的方向向量分别为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, 则距离为

$$\frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|}$$

3. 已知公垂线 L 的方向向量为 $\mathbf{s} = (-1, -2, 1)$, L_1 的方向向量为 $\mathbf{s}_1 = (2, -1, 0)$, 设 L_1 与 L

所在的平面为 π_2 , 则 π_2 的法向量 $\mathbf{n}_2 = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, -5)$, 且 L_1 上

的点 $M_1(1, 0, 3) \in \pi_2$. 依点法式 π_2 方程为:

$$\pi_2: -1(x-1) - 2(y-0) - 5(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 16 = 0$$

同理, 设 L_2 与 L 所在的平面为 π_3 , 则 π_3 的法向量 $\mathbf{n}_3 = \mathbf{s}_2 \times \mathbf{s} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$

$(2, -2, -2)$, 且 L_2 上的点 $M_2(-1, 2, 1) \in \pi_3$. 依点法式 π_3 方程为:

$$\pi_3: 2(x+1) - 2(y-2) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 4 = 0.$$

显然平面 π_2, π_3 的交线是公垂线 L , 所以 L 的方程为

$$L: \begin{cases} x + 2y + 5z - 16 = 0 \\ x - y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

4. 因 $\pi // L_1, \pi \perp L_2$, 所以 π 的法向量 $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -2, 1)$, 又 π 与 L_1, L_2

等距, 故 M_2, M_1 的中点 $O(0, 1, 2)$ 必在 π 上, 即 $O(0, 1, 2) \in \pi$, 依点法式, 得 π 的方程为

$$\pi: -1(x-0) - 2(y-1) + 1(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - z = 0$$

为 π 的方程.

3.3 二重外积公式与 Lagrange 恒等式

命题 3.1

1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}$;
2. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$;



证明

1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta)^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$;
2. 我们称这条命题为 **Lagrange 恒等式**, 称 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ 为二重向量积, 且有 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$, 我们先来证明这个引理.

引理 3.1 (二重外积公式)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$



证明 设 $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$. 我们已知

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)\mathbf{e}_1 + (b_3c_1 - b_1c_3)\mathbf{e}_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)\mathbf{e}_3.$$

设 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = d_1\mathbf{e}_1 + d_2\mathbf{e}_2 + d_3\mathbf{e}_3$, 则

$$\begin{aligned} d_1 &= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ &= b_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - a_1c_1) - c_1(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - a_1b_1) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_1. \end{aligned}$$

同理

$$d_2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_2, \quad d_3 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})b_3 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})c_3.$$

因此

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

命题 3.2

证明 Jacobi 等式:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$



证明 利用二重外积公式, 我们有

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c},$$

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a},$$

$$\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}.$$

将上述三等式相加即得 Jacobi 等式.

3.4 习题

例 3.6

1. 求数 λ , 使得直线 $L_1: \frac{x-1}{\lambda} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-3}{-3}$ 与直线 $L_2: \frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-4} = \frac{z+4}{7}$ 相交.
2. 求 L_1 与 L_2 的交点.
3. 求 L_1 与 L_2 确定的平面方程.

解

1. 设 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\mathbf{s}_1 = (\lambda, 5, -3)$, $\mathbf{s}_2 = (3, -4, 7)$, $M_1(1, -4, 3)$, $M_2(-3, 9, -4)$, 则 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-4, 13, -7)$.

当 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 共面时, 两直线可能相交, 即

$$(\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \cdot \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \lambda & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -4 & 13 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

解得 $\lambda = 2$, 此时 $\begin{cases} \mathbf{s}_1 = (2, 5, -3) \\ \mathbf{s}_2 = (3, -4, 7) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{s}_1 \nparallel \mathbf{s}_2$, 所以两直线相交.

2. 由 $L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-3}{-3}$, 得 L_1 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 + 5t \\ z = 3 - 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

从 $L_2: \frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-4} = \frac{z+4}{7}$, 得 L_2 的参数方程为

$$\begin{cases} x = -3 + 3s \\ y = 9 - 4s \\ z = -4 + 7s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为 L_1 与 L_2 的交点, 则

$$\begin{cases} x_0 = 1 + 2t = -3 + 3s \\ y_0 = -4 + 5t = 9 - 4s \\ z_0 = 3 - 3t = -4 + 7s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 1, s = -1 \\ x_0 = -1, y_0 = 1, z_0 = 0 \end{cases}$$

所以 L_1 与 L_2 的交点为 $M_0(-1, 1, 0)$.

3. 设 L_1 与 L_2 确定的平面为 π , 则 π 的法向量 $\mathbf{n} = \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = (23, -23, -23)$,

取 $\mathbf{n} = (1, -1, -1)$, 且交点 $M_0(3, 1, 0) \in \pi$, 所以 π 的方程为

$$\pi: 1 \cdot (x - 3) - 1 \cdot (y - 1) - 1 \cdot z = 0 \Leftrightarrow x - y - z - 2 = 0$$

例 3.7 求直线 $L: \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + z + 1 = 0 \end{cases}$ 在平面 $\pi: x + y + z = 0$ 上的投影直线方程 L_1 .

解 L 的方向向量 $\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, -2)$, 令 $z = 0$, 从 $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 得到 L 上点 $M_0(0, 1, 0)$.


设过 L 且垂直于平面 π 的平面为 π_1 , 则 π_1 的法向量 $\mathbf{n}_0 = \mathbf{s} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$(0, -2, 2)$, 且 $M_0(0, 1, 0) \in \pi_1$, 所以 π_1 的方程为

$$\pi_1: 0 \cdot (x - 0) - 2 \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z - 0) = 0 \Leftrightarrow -y + z + 1 = 0$$

此时投影直线 L_1 的方程为

$$L_1: \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ -y + z + 1 = 0 \end{cases}.$$

 **作业** ex8.2:18(1),19(1),20(2),21(1),22(1),23(1),29,30.