Week 1

1.1 Feb 24 ex8.1:6,9,10,12,14,17,23,26.

✍ **习题 8.1.6** 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 的单位向量, 试求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 的值.

解 由

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0,$$

可得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})=-\frac{3}{2}.$$

✍ **习题 8.1.9** 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=\frac{2\pi}{3}$, 又 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2$, 试计算:

1. $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2$;
2. $|(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|^2$.

解

1. $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta=1$, $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta=3$.
2. $|(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|^2=|3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}|^2=|-10\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=100|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=300$.

✍ **习题 8.1.10** 已知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, 试证

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

解

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Rightarrow-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\Rightarrow 0=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

✍ **习题 8.1.12** 求证: $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$.

解

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta)^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\sin^2\theta=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

✍ **习题 8.1.14** 已知 $\boldsymbol{a}=(3,-5,8),\boldsymbol{b}=(-1,1,-4)$, 求 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的模和方向余弦.

解 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(4,-6,12)$, $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=14$,

$$\cos\alpha=\frac{4}{14}=\frac{2}{7},\quad\cos\beta=\frac{-6}{14}=-\frac{3}{7},\quad\cos\gamma=\frac{12}{14}=\frac{6}{7}.$$

例 1.1 8.1.17 已知 $\overrightarrow{OA}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\overrightarrow{OB}=3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k},\overrightarrow{OC}=4\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$, 问 A,B,C 是否共线?

解 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=6\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}+10\boldsymbol{k}=2\overrightarrow{OB}$, 故 A,B,C 共线.

✍ **习题 8.1.23** 已知点 $A(1,2,0),B(3,0,-3),C(5,2,6)$, 求三角形 ABC 的面积.

解 $\overrightarrow{AB}=2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k},\overrightarrow{AC}=4\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{k}$,, 故

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-2&-3\\4&0&6\end{vmatrix}|=14.$$

✍ **习题 8.1.26** 下列四点:$A(1,2,-1), B(0,1,5), C(-1,2,1), D(2,1,3)$. 是否在一个平面上.

解 $\overrightarrow{AB} = -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}, \overrightarrow{AC} = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{k}, \overrightarrow{AD} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$, 计算以 AB, AC, AD 为棱的平行六面体的体积为:

$$V = |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

故 A, B, C, D 在一个平面上.

1.2 Feb 26 ex8.2:1,2,3,6,7,14(1),15(1),16

✍ **习题 8.2.1** 指出下列平面位置的特点, 并作图.

1. $2x - 2y + 2z = -1$;
2. $2x - 3y + 2 = 0$;
3. $y - 3z = 0$;
4. $3x - 2 = 0$.

解

1. $2x - 2y + 2z = -1$ 与 Ox, Oy, Oz 轴的夹角角度相等, 与 Oxy, Oyz, Ozx 平面的夹角角度相等.
2. $2x - 3y + 2 = 0$ 与 Oz 轴平行, 与 Oxy 平面垂直;
3. $y - 3z = 0$ 与 Ox 轴平行, 与 Oyz 平面垂直;
4. $3x - 2 = 0$ 与 Ozy 平面平行, 与 Ox 轴垂直.

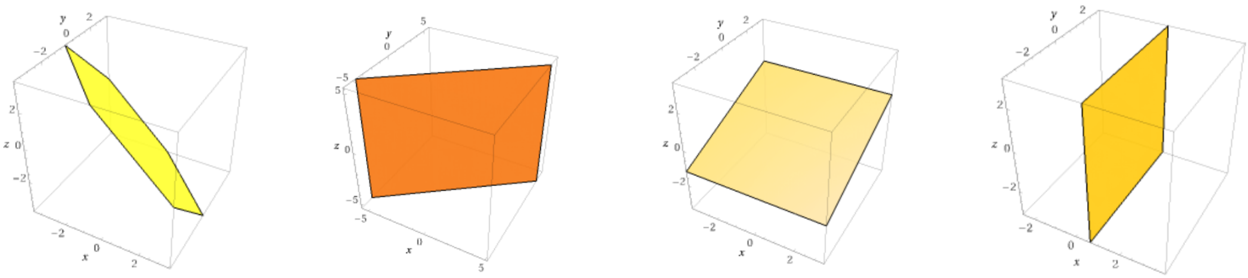

图 1.1: 习题 8.2.1

✍ **习题 8.2.2** 试求通过点 $M_1(2,-1,3)$ 和 $M_2(3,1,2)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{v} = (3,-1,4)$ 的平面方程.

解 (法一)

平面平行于 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1,2,-1), \boldsymbol{v} = (3,-1,4)$, 故平面的一个法向量为 $\overrightarrow{M_1M_2} \times \boldsymbol{v} = (1,-1,-1)$, 故平面方程可以写为

$$x - y - z = D.$$

代入 M_1 得 $D = 0$, 故平面方程为 $x - y - z = 0$.

(法二) 设平面方程为 $ax + bx + c + d = 0$, 则

$$\begin{cases} 2a-b+3c+d=0 \\ 3a+b+2c+d=0 \\ 3a-b+4c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ b=c \\ d=0 \end{cases}$$

故平面方程为 $x-y-z=0$.

✍ **习题 8.2.3** 设平面过点 $(5,-7,4)$ 且在 x,y,z 三轴上的截距相等, 求平面方程.

解 设平面方程为 $Ax+By+Cz=D$.

当 $D=0$ 时, 平面过点 $(5,-7,4)$, 故 $5A-7B+4C=0$, 解得 $A=4t, B=4s, C=-5t+7s$, 平面方程有无穷多个, 形如 $4tx+4sy-(5t-7s)z=0$, 其中 t,s 为不全为 0 的任意实数.

当 $D\neq 0$ 时, 截距相等推出平面的一个法向量为 $(1,1,1)$, 代入点 $(5,-7,4)$, 得平面方程为

$$x+y+z=2.$$

✍ **习题 8.2.6** 求通过点 $M(-5,2,-1)$ 且平行于坐标平面 Oyz 的平面方程.

解 平行于坐标平面 Oyz, 故目标平面的一个法向量为 $(1,0,0)$, 设平面方程为 $Ax+D=0$, 代入 M 点即得平面方程为

$$x=-5.$$

✍ **习题 8.2.7** 求下列各平面的夹角:

1. $2x-y+z-7=0$ 和 $x+y+2z-11=0$;
2. $4x+2y+4z-7=0$ 和 $3x-4y=0$.

解

1. 法向量 $\mathbf{n_1}=(2,-1,1)$, $\mathbf{n_2}=(1,1,2)$, 因此
$$\theta=\arccos\left(\frac{\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2}}{|\mathbf{n_1}||\mathbf{n_2}|}\right)=\arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$$
2. 法向量 $\mathbf{n_1}=(2,1,2)$, $\mathbf{n_2}=(3,-4,0)$, 因此
$$\theta=\arccos\left(\frac{\mathbf{n_1}\cdot\mathbf{n_2}}{|\mathbf{n_1}||\mathbf{n_2}|}\right)=\arccos\left(\frac{2}{15}\right)$$

✍ **习题 8.14.(1)** 分别按下列各组条件求平面方程.

1. 平分两点 $A(1,2,3)$ 和 $B(2,-1,4)$ 之间的线段且垂直于线段 AB;

解 该平面有法向量 $\overrightarrow{AB}=(1,-3,1)$, 因此, 可设方程为 $x-3y+z+d=0$. 再带入中点 $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$, 得到

$$2x-6y+2z-7=0$$

✍ **习题 8.15.(1)** 分别求出满足下列各条件的直线方程.

1. 过点 $(0,2,4)$ 且与平面 $x+2z=1$, $y-3z=2$ 平行;

解 两平面的法向量为 $\mathbf{n_1}=(1,0,2), \mathbf{n_2}=(0,1,-3)$, 则

$$\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}=(-2,3,1)$$

设直线的参数方程为 $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+(-2,3,1)t$, 代入点 $(0,2,4)$ 可解出 $x_0=0, y_0=$

$2, z_0 = 4$. 因此直线方程为

$$(x, y, z) = (0, 2, 4) + (-2, 3, 1)t$$

✍ **习题 8.16** 求直线

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

的参数方程.

解 两平面的法向量为 $\mathbf{n_1} = (2, 3, -1)$, $\mathbf{n_2} = (3, -5, 2)$, 则

$$\mathbf{n_1} \times \mathbf{n_2} = (1, -7, -19)$$

为其方向量. 进一步, 可求得直线上一点 $(1, 0, -2)$. 因此, 参数方程为:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -7t \\ z = -2 - 19t \end{cases}$$

或者写为

$$(x, y, z) = (1, 0, -2) + (1, -7, -19)t.$$

1.3 Feb 28 ex8.2:18(1),19(1),20(2),21(1),22(1),23(1),29,30

✍ **习题 ex8.2,18(1)** 求下列直线的夹角:

1. $\begin{cases} 5x - 3y + 3z - 9 = 0, \\ 3x - 2y + z - 1 = 0. \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 2x + 2y - z + 23 = 0, \\ 3x + 8y + z - 18 = 0. \end{cases}$

解 两条直线的方向量分别为

$$\boldsymbol{a} = (5, -3, 3) \times (3, -2, 1) = (3, 4, -1)$$
$$\boldsymbol{b} = (2, 2, -1) \times (3, 8, 1) = (10, -5, 10)$$

因此夹角为

$$\theta = \arccos \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{\pi}{2}$$

✍ **习题 ex8.2,19(1)** 证明下列各组直线互相平行, 并求他们之间的距离.

1. $\dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = -z$ 和 $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

解 两条直线的方向向量分别为

$$\boldsymbol{a} = (-2, 3, -1)$$

和

$$\boldsymbol{b} = (1, 1, 1) \times (1, -1, -5) = (-4, 6, -2).$$

两方向向量平行, 故两直线平行.

两直线各取一点 $M(-2,1,0), N(4,-4,0)$, 则两直线距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{MN}\times \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{|(5,6,8)|}{|(-2,3,-1)|}=\sqrt{\frac{125}{14}}$$

✍ **习题 8.2.20(2)** 证明下列各组直线垂直相交, 并求它们的交点.

1. $\begin{cases}4x+y-3z+24=0,\\ z-5=0.\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x+y+3=0.\\ x+2=0.\end{cases}$

解 两条直线的方向量分别为

$$\boldsymbol{a}=(4,1,-3)\times(0,0,1)=(1,-4,0)$$
$$\boldsymbol{b}=(1,1,0)\times(1,0,0)=(0,0,-1).$$

得到 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$, 因此垂直. 进一步, 联立两个方程式, 存在交点 $(-2,-1,5)$.

✍ **习题 8.2.21(1)** 求直线和平面的夹角 φ.

1. $\begin{cases}3x-2y=24,\\ 3x-z=-4,\end{cases}$ $6x+15y-10z+31=0;$

解 直线的方向向量为

$$\boldsymbol{a}=(3,-2,0)\times(3,0,-1)=(2,3,6)$$

平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(6,15,-10)$, 因此夹角为

$$\varphi=\arccos\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}|}=\arcsin\frac{3}{133}.$$

✍ **习题 8.2.22(1)** 求点到直线的距离 d.

1. $P_0(1,0,-1),\quad \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1};$

解 直线的方向向量为 $\boldsymbol{a}=(1,2,-1)$. 取直线上的点 $P(0,1,0)$, 则线段 PP_0 在直线上的投影长为

$$\left|\frac{\overrightarrow{PP_0}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=0.$$

因此 PP_0 就是垂线段, 长度为 $\left|\overrightarrow{PP_0}\right|=\sqrt{3}$.

✍ **习题 8.2.23(1)**

✍ **习题 证** 明下列各直线是异面直线, 并求它们的距离（即两直线垂线长）.

1. $\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 和 $\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2};$

解 两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{a}=(4,-3,1), \boldsymbol{b}=(-2,9,2)$, 分别取两直线上一点 $A(9,-2,0), B(0,-7,2)$,

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\overrightarrow{AB}=245\neq 0$$

知两直线异面. 因此, 两直线距离为

$$d=\frac{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=7.$$

✍ **习题 8.2.29** 求原点关于平面 $6x+2y-9z+121=0$ 对称的点的坐标.

解 设对称点为 O', 则 $\overrightarrow{OO'} \perp \pi : 6x + 2y - 9z$, 故 $\overrightarrow{OO'}$ 平行于平面的法向量 $(6, 2, -9)$, 故设 $O' = (6t, 2t, -9t)$.

将中点坐标 $(3t, t, -, \frac{9}{2}t)$ 代入平面方程, 解得 $t = -2$, 因此对称点的坐标为 $O'(-12, -4, 18)$.

✍ **习题 8.2.30** 求点 $(1, 2, 3)$ 关于直线 $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$ 对称的点的坐标.

解 设所求点的坐标为 (a, b, c), 将它与 $(1, 2, 3)$ 连线的中点坐标代入直线方程, 得到

$$b = -3a + 3, \quad c = -2a + 1.$$

直线的方向向量为 $(1, -3, -2)$, 故进一步地有

$$0 = (1, -3, -2) \cdot ((a, b, c) - (1, 2, 3)) = 14a \Rightarrow a = 0.$$

因此所求对称点为 $(0, 3, 1)$.