Week 2

2.1 Mar 3 ex8.3:1,2,3.

✍ **习题 8.3.1** 指出下列方程中那些是旋转曲面, 并说明他们是怎样产生的.

1. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$;

   解 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1,\\ z=0.\end{cases}$ 绕 x 轴旋转.

2. $x^2+y^2+z^2=1$;

   解 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=0.\end{cases}$ 绕 x 轴旋转 (其他类似的任意情况合理即可).

3. $x^2+2y^2+34z^2=1$;

   解 非旋转曲面, 是椭球.

4. $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$;

   解 $\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{4}=1,\\ z=0.\end{cases}$ 绕 y 轴旋转.

5. $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=1$;

   解 非旋转曲面, 是双叶双曲面.

6. $x^2-y^2-z^2=1$;

   解 $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ z=0.\end{cases}$ 绕 x 轴旋转.

7. $x^2+y^2=4z$;

   解 $\begin{cases}x^2=4z,\\ y=0.\end{cases}$ 绕 z 轴旋转.

8. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=3z$.

   解 非旋转曲面, 是双曲抛物面.

✍ **习题 8.3.2** 指出下列方程在平面直角坐标系 Oxy 和空间直角坐标系 $Oxyz$ 中分别表示怎样的几何图形.

1. $x=2$;

   解

   (a). Oxy 平面上的一条直线; (b). $Oxyz$ 空间中的一个平面.

2. $y=x+1$;

解

(a). Oxy 平面上的一条直线;　　(b). $Oxyz$ 空间中的一个平面.

3. $x^2+y^2=4$;

解

(a). Oxy 平面上的一个圆;　　(b). $Oxyz$ 空间中的一个圆柱面.

4. $x^2-y^2=1$;

解

(a). Oxy 平面上的一条双曲线;　　(b). $Oxyz$ 空间中的一个双曲柱面.

5. $y=x^2+1$;

解

(a). Oxy 平面上的一条抛物线;　　(b). $Oxyz$ 空间中的一个抛物柱面.

6. $\begin{cases} 5x-y+1=0, \\ 2x-y-3=0. \end{cases}$;

解

(a). Oxy 平面上的点 $(-\frac{4}{3},-\frac{11}{3})$;　　(b). $Oxyz$ 空间中的直线.

7. $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \\ y=2. \end{cases}$;

解

(a). Oxy 平面上的两点 $(\pm\frac{2\sqrt{5}}{3},2)$;　　(b). $Oxyz$ 空间中的两条直线.

8. $\begin{cases} \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1, \\ x=4. \end{cases}$.

解

(a). Oxy 平面上的两点 $(4,\pm3\sqrt{3})$;　　(b). $Oxyz$ 空间中的两条直线.

✍ **习题 8.3.3** 求下列旋转曲面的方程, 并指出他们的名称.

1. 曲线 $\begin{cases} y^2-\frac{z^2}{4}=1, \\ x=0. \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周;

   解 方程为 $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=1$, 是单叶双曲面.

2. 曲线 $\begin{cases} y=\sin x(0\leqslant x\leqslant \pi), \\ z=0. \end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周;

解 方程为 $y^2+z^2=\sin^2 x$, 非二次曲面.

3. 曲线 $\begin{cases} 4x^2+9y^2=36, \\ z=0. \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周;

解 方程为 $4x^2+9y^2+4z^2=36$, 是椭球.

2.2 Mar 5 ex8.4:1,2,4(4)(5)(6)(10),8,9,11.

✍ **习题 8.4.1** 通过坐标系的平移, 化简方程 $x^2-y^2-z^2-2x+2y+z-1=0$. 并指出曲面的类型.

解 令 $\begin{cases} x'=x-1, \\ y'=y+1, \\ z'=z+\dfrac{1}{2}. \end{cases}$ 则原方程化为 $x'^2-y'^2-z'^2=\dfrac{3}{4}$, 是双叶双曲面.

✍ **习题 8.4.2** 通过坐标变换, 化简方程 $xy-x+y+z+1=0$. 并指出曲面的类型.

解 令 $\begin{cases} x=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \\ y=\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \\ z=z'. \end{cases}$ 带入原式整理得 $x'^2-y'^2-2\sqrt{2}y'+2z'+2=0$. 再令 $\begin{cases} x''=x', \\ y''=y'+\sqrt{2}, \\ z''=z'+2. \end{cases}$

带入得 $x''^2-y''^2=-2z''$, 是双曲抛物面.

✍ **习题 8.4.4** 将下列方程按要求做相应的变换:

(4) $x^2+y^2-z^2=1$ 转化为球面坐标系方程;

解 令 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\theta. \end{cases}$ 带入原式整理得 $r^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi-\sin^2\theta\sin^2\varphi-\cos^2\theta)=r^2(2\sin^2\theta\cos^2\varphi-1)=1$.

(5) 柱面坐标系方程 $r^2+2z^2=4$ 转化为球面坐标系方程;

解 利用柱面坐标系和球面坐标系的关系 $r^2=x^2+y^2, z=z$. 带入原式整理得 $x^2+y^2+2z^2=4$. 然后再令令 $\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\theta. \end{cases}$ 带入得 $r^2(\sin^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos^2\theta)=r^2(1+\cos^2\theta)=4$.

(6) 球面坐标系方程 $r=2\cos\varphi$ 转化为柱面坐标系方程;

解 $r(r\sin\theta)=2r\sin\theta\cos\varphi$, 即化为平面直角坐标系 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}=2x$, 再转化为柱面坐标系 $\sqrt{r^2+z^2}r=2r\cos\theta$, 化简得到 $\sqrt{r^2+z^2}=2\cos\theta$

(10) 柱面坐标系方程 $r^2\cos 2\theta = z$ 转化成直角坐标系方程.

解 $r^2\cos 2\theta = r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = x^2 - y^2 = z$, 即 $x^2 - y^2 = z$.

✍ **习题 8.4.8** 已知 $Oxyz$ 空间中以原点为球心,a 为半径的球面的参数方程表示为

$$\begin{cases} x = a\sin u\cos v, \\ y = a\sin u\sin v, & u\in[0,\pi], v\in[0,2\pi) \\ z = a\cos u, \end{cases}$$

求 $Oxyz$ 空间中以点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为球心,a 为半径的球面的一个参数方程表示.

解

$$\begin{cases} x = x_0 + a\sin u\cos v, \\ y = y_0 + a\sin u\sin v, & u\in[0,\pi], v\in[0,2\pi) \\ z = z_0 + a\cos u, \end{cases}$$

✍ **习题 8.4.9** 求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的一个参数方程表示.

解

$$\begin{cases} x = a\sin u\cos v, \\ y = b\sin u\sin v, & u\in[0,\pi], v\in[0,2\pi) \\ z = c\cos u, \end{cases}$$

✍ **习题 8.4.11** 分别求单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

和双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

的一个参数方程表示.

解 给出四种方案

1. 利用双曲函数

单叶 $$\begin{cases} x = a\cosh u\cos v, \\ y = b\cosh u\sin v, \\ z = c\sinh u, \end{cases}$$
$u\in(-\infty,+\infty), v\in[0,2\pi)$

双叶 $$\begin{cases} x = a\sinh u\cos v, \\ y = b\sinh u\sin v, \\ z = \pm c\cosh u, \end{cases}$$
$u\in(-\infty,+\infty), v\in[0,2\pi)$

2. 利用 $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

单叶 $\begin{cases} x = a\sec u\cos v, \\ y = b\sec u\sin v, \\ z = c\tan u, \end{cases}$
$u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), v \in [0, 2\pi)$

双叶 $\begin{cases} x = a\tan u\cos v, \\ y = b\tan u\sin v, \\ z = \pm c\sec u, \end{cases}$
$u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), v \in [0, 2\pi)$

3. 利用 $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

单叶 $\begin{cases} x = a\csc u\cos v, \\ y = b\csc u\sin v, \\ z = c\cot u, \end{cases}$
$u \in (0, \pi), v \in [0, 2\pi)$

双叶 $\begin{cases} x = a\cot u\cos v, \\ y = b\cot u\sin v, \\ z = \pm c\csc u, \end{cases}$
$u \in (0, \pi), v \in [0, 2\pi)$

4. 利用类似柱坐标系的形式

单叶 $\begin{cases} x = a\sqrt{1+u^2}\cos v, \\ y = b\sqrt{1+u^2}\sin v, \\ z = cu, \end{cases}$
$u \in (-\infty, +\infty), v \in [0, 2\pi)$

双叶 $\begin{cases} x = a\sqrt{u^2-1}\cos v, \\ y = b\sqrt{u^2-1}\sin v, \\ z = cu, \end{cases}$
$|u| \geqslant 1, v \in [0, 2\pi)$

2.3 Mar 7 ex9.1:12,13,14(2)(7)(9)(10),15,17(1),18

习题 9.1.12 设 $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2 (x \neq 0)$, 求 $f(2,3), f(x,y)$.

解 令

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = \frac{y}{x}, \end{cases} \quad x \neq 0$$

注意到 $\frac{y}{x} = -1 \Leftrightarrow x + y = 0$, 因此 $f(u,v)$ 的定义域应为 $\{(u,v)|u \neq 0, v \neq -1\} \cup \{(0,-1)\}$

对于 $u \neq 0, v \neq -1$ 时可解得

$$\begin{cases} x = \frac{u}{v+1}, \\ y = \frac{uv}{v+1}, \end{cases} \quad u \neq 0, v \neq -1$$

因此 $f(u,v) = \frac{u^2(1-v^2)}{(v+1)^2} = \frac{u^2(1-v)}{1+v}$.

而对于 $u = 0, v = -1$ 时令 $x = t \neq 0, y = -t$, 可得 $f(0,-1) = 0$ 综上

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(1-y)}{1+y}, & x \neq 0, y \neq -1; \\ 0, & x = 0, y = -1; \end{cases}$$

计算 $f(2,3)=\dfrac{2^2(1-3)}{1+2}=-2.$

✍ **习题 9.1.13** 设 $f(x,y)=x^y$,$\varphi(x,y)=x+y$,$\psi(x,y)=x-y$, 求 $f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$,$\varphi[f(x,y),\psi(x,y)]$, $\psi[\varphi(x,y),f(x,y)]$.

解

$f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]=(x+y)^{x-y}$,

$\varphi[f(x,y),\psi(x,y)]=x^y+x-y$,

$\psi[\varphi(x,y),f(x,y)]=x+y-x^y$.

✍ **习题 9.1.14**

(2) $\lim\limits_{x\to0,y\to a}\dfrac{\sin xy}{x}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0,y\to a}\frac{\sin xy}{x}&=\lim_{x\to0,y\to a}\frac{y\sin xy}{xy}\\&=\lim_{x\to0,y\to a}y\lim_{x\to0,y\to a}\frac{\sin xy}{xy}\\&=a\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}\\&=a\end{aligned}$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty,y\to+\infty}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$

解

$$\begin{aligned}0\leqslant\lim_{x\to+\infty,y\to+\infty}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}&\leqslant\lim_{x\to+\infty,y\to+\infty}\frac{6(x^2+y^2)}{(x+y)^3}\\&\leqslant\lim_{x\to+\infty,y\to+\infty}\frac{6(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\lim_{x\to+\infty,y\to+\infty}\frac{6}{\sqrt{x^2+y^2}}\\&=\lim_{r\to+\infty}\frac{6}{r}\\&=0\end{aligned}$$

(9) $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0,y\to0}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}&=\lim_{u\to0}\frac{u}{\sqrt{u+1}-1}\\&=\lim_{u\to0}\frac{u}{\frac{u}{2}}\\&=2\end{aligned}$$

(10) $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$

解

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} &= \lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{xy}{2(x+y)}\\
&= \lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{1}{\frac{2(x+y)}{xy}}\\
&= \lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{1}{\frac{2}{x}+\frac{2}{y}}\\
&= \frac{1}{\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{2}{x}+\frac{2}{y}}
\end{aligned}
$$

但 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\frac{2}{x}+\frac{2}{y}$ 并不存在，当 $y=\frac{x}{kx-1}$ 时，$\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=k$. 因此原极限不存在.

习题 9.1.15 若 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，问沿怎样的方向 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$，下列极限存在?

1. $\lim\limits_{r\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-y^2}}$,
2. $\lim\limits_{r\to +\infty}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy$.

解

1.

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2-y^2}} &= \lim_{r\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}}\\
&= \lim_{r\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{r^2\cos 2\theta}}\\
&= \begin{cases} +\infty, & \cos 2\theta>0\\ 0, & \cos 2\theta<0\end{cases}
\end{aligned}
$$

其中，由于 $x^2-y^2\neq 0$，可得 $\cos 2\theta\neq 0$.
因此当 $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$ 时极限存在.

2.

$$
\begin{aligned}
\lim_{r\to +\infty}\mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin 2xy &= \lim_{r\to +\infty}\mathrm{e}^{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}\sin(2r^2\sin\theta\cos\theta)\\
&= \lim_{r\to +\infty}\mathrm{e}^{r^2\cos 2\theta}\sin(r^2\sin 2\theta)\\
&= \begin{cases} \text{不存在}, & \cos 2\theta\geqslant 0\text{且}\sin 2\theta\neq 0\\ 0, & \cos 2\theta<0\text{或}\sin 2\theta=0\end{cases}
\end{aligned}
$$

因此当 $\theta\in(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4})\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4})\cup\{0,\pi,2\pi\}$ 时极限存在.

习题 9.1.17(1) 研究下列函数的连续性 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x-y}, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$

解

1. 对于满足 $x-y\neq 0$ 的点处显然连续.
2. 对于 $x=y=a\neq 0$ 的点，当 $k\neq 0$ 时，则有 $\lim\limits_{t\to 0,x=a+t,y=a+kt}\frac{xy}{x-y}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{(a+t)(a+kt)}{(1-k)t}$

不存在.

3. 对于 $(0,0)$ 点, 考虑 $\lim\limits_{t\to 0,x=t^2+t,y=t^2-t}\dfrac{xy}{x-y}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^4-t^2}{2t^2}=-\dfrac{1}{2}$ 与 $\lim\limits_{t\to 0,x=t,y=t}0=0$ 可知极限也不存在.

综上, 在 $x\neq y$ 处连续.

习题 9.1.18 证明: 函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 沿着过此点的每一射线 $x=t\cos\alpha, y=t\sin\alpha(0\leqslant t\leqslant+\infty)$ 连续, 即 $\lim\limits_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)$, 但此点在点 $(0,0)$ 处并不连续.

证明

$$\lim_{t\to 0}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to 0}\frac{t^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^4\cos^4\alpha+t^2\sin^2\alpha}=\lim_{t\to 0}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0$$

$$\lim_{x\to 0,y=kx^2}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}$$

这表明在点 $(0,0)$ 处并不连续.