Lec 23 数列极限习题课

23.1 习题

例 23.1

1. $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, n \in N^*$.
2. $(\frac{1}{n+1}) < \ln(1+\frac{1}{n}) < (\frac{1}{n}), n \in N^*$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$, 即 $\sqrt[n]{n!}e \sim n$.

注 $a_n \sim b_n$ 定义为 $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

解

1. 由例??可知,$a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ 单调递增且有上界, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e}$. 故 $\mathrm{e} = \sup a_n$, 故 $a_n < \mathrm{e}, n \in N^*$.注 编者: 我觉得这里是要结合 a_n 单调增的严格单调来说明 $(1+\frac{1}{n})^n \neq \mathrm{e}$.

   设 $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. 由平均值不等式, 有
   $$\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot 1\right)^{\frac{1}{n+2}} = \left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdots\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+2}} \leqslant \frac{\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}+1}{n+2} = \frac{n}{n+1}.$$
   故 $\Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leqslant \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \Rightarrow b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}$. 且 $b_n > 0$, 故 $\{b_n\}$ 单调递减有下界, 故有极限. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}$. 与 a_n 的推导类似, 可得 $b_n > \mathrm{e}, n \in N^*$.
2. 对 1. 中的不等式取对数, 得
   $$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$$
3. 有
   $$\begin{aligned}
   &\left(\frac{2}{1}\right)^1 < \mathrm{e} < \left(\frac{2}{1}\right)^2,\\
   &\left(\frac{3}{2}\right)^2 < \mathrm{e} < \left(\frac{3}{2}\right)^3,\\
   &\cdots,\\
   &\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < \mathrm{e} < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.
   \end{aligned}$$
   乘积得
   $$\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdots\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < \mathrm{e}^n < \left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdots\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}.$$

即

$$
\begin{aligned}
& \frac{(n+1)^n}{n!}<\mathrm{e}^n<\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \\
\Rightarrow\quad & \left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1} \\
\Rightarrow\quad & \frac{n+1}{n\mathrm{e}}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{n\mathrm{e}}\sqrt[n]{n+1}
\end{aligned}
$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n\mathrm{e}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+1}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$, 故由夹逼定理, 得证.

例 23.2 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n, n\in N^*$, 证明:

1. $\{a_n\}$ 收敛;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}=\ln 2$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1}+\cdots+\frac{1}{3n+2n}=\ln\frac{5}{3}$;
4. $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n$.

解

1. 由例**??**可知,

$$
\begin{aligned}
&\ln\frac{2}{1}<\frac{1}{1},\\
&\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2},\\
&\cdots,\\
&\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

相加得 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. 则 $a_n>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>0$. 又 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$, 故 $\{a_n\}$ 单调递减有下界, 故有极限.

2.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2n\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln 2n-\ln n\\
=&\ln 2.
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1}+\cdots+\frac{1}{3n+2n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{5n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{5n}-\ln 5n\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{3n}-\ln 3n\right)+\ln 5n-\ln 3n\\
=&\ln\frac{5}{3}.
\end{aligned}
$$

4.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n}+1
\end{aligned}
$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\gamma$, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n}=0.$

记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\gamma\approx 0.57721$ 称为 Euler 常数.

23.2 关于无穷大

定义 23.1 (无穷大)

设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 若 $\forall M>0,\exists N\in N^*,\forall n>N,|a_n|>M$, 则称 $\{a_n\}$ 是无穷大数列, 记为 $\{a_n\}\to\infty$. ♣

1. $\{a_n\}\to+\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists N\in N^*,\forall n>N,a_n>M$.
2. $\{a_n\}\to-\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists N\in N^*,\forall n>N,a_n<-M$.
3. $\{a_n\}\to\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists N\in N^*,\forall n>N,|a_n|>M$.

23.3 Stolz 定理及其应用

定理 23.1 (Stolz 定理)

设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$, 若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A,$$

其中 A 可以是有限数, 也可以是 $\pm\infty$;$\{b_n\}$ 是严格单调递增且趋于 $+\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}.$$

注 完整的利用 Stolz 定理的计算过程要求先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$ 极限存在并求得 A,

然后再利用 Stolz 定理求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$. 不过不严谨的直接写出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ 也是能接受的.

注 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\infty$ 时,Stolz 定理不一定成立. 反例可取 $a_n=(-1)^n, b_n=n$.

证明 先证明 A 是有限数 (实数) 的情况。不妨设 $\{b_n\}$ 是正项数列。假设条件成立，对任意正数 ε，存在自然数 N_1 使得

$$A-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<A+\varepsilon,\quad n>N_1.$$

由于 $\{b_n\}$ 严格单调增，所以

$$(A-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(A+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n),\quad n>N_1.$$

在上面不等式中，分别列出 $N_1+1, N_1+2, \ldots, n-1$ 并将所得不等式相加，得到

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{N_1+1})<a_n-a_{N_1+1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{N_1+1}).$$

同除以 b_n 并整理得

$$\frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}-\frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}-\varepsilon\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right)<\frac{a_n}{b_n}-A<\frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}-\frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}+\varepsilon\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right).$$

注意到 $\{b_n\}\to+\infty$，对固定的 N_1，存在自然数 N_2，使得当 $n>N_2$ 时，

$$-\varepsilon<\frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}-\frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}<\varepsilon.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，于是当 $n>N$ 时，有

$$-2\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-A<2\varepsilon.$$

若 $A=+\infty$，此时由题设及保号性 $\Rightarrow \exists N_2, N\geq N_2$, 使得

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}>1\Rightarrow a_{n+1}>a_n,\quad n>N.$$

并且 $a_{n+1}-a_n>b_{n+1}-b_n,\quad a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1},\ldots,a_{N_2+1}-a_{N_2}>b_{N_2+1}-b_{N_2}$. 从而得 $a_{n+1}-a_{N_2}>b_{n+1}-b_{N_2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=+\infty$ 且 $\{a_n\}$ 严格增加.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=+\infty.$$

23.4 例题

例 23.3 证明:

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geqslant 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.
3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a\geqslant 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

解

1. 令 $b_n = n, \alpha_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则 $b_n \uparrow +\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n-(n-1)} = a$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \exp\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n}\right) = \exp\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln a_n}{n-n-1}\right) = \mathrm{e}^{\ln a} = a$.
3. 改变有限项, 不会影响极限值, 不妨假设 $a_0 = 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a_1}{a_0}\dfrac{a_2}{a_1}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}} = a$.

例 23.4 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是 m 个常数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_1|^n + |a_2|^n + \cdots + |a_m|^n} = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_m|\}.$$

解 设 $h = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_m|\}$, 则 $h < (|a_1|^n + |a_2|^n + \cdots + |a_m|^n)^{\frac{1}{n}} < m^{\frac{1}{n}} h$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} m^{\frac{1}{n}} h = h$. 由夹逼定理**??**, 得证.

例 23.5

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2} = \dfrac{1}{2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} = \dfrac{1}{3}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4} = \dfrac{1}{4}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \dfrac{1}{k+1}$.

解 仅证 4 , $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{(k+1)n^k - \cdots}$.

$\cdots$ 中的项形如 $n^{k-1}, n^{k-2}, \cdots$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{k-1}}{n^{k+1}} = 0$. 且至多有 k 项. 有限项极限相加, 可以用极限的四则运算**??**.

故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{(k+1)n^k - \cdots} = \dfrac{1}{(k+1) + \lim_{n\to\infty}\left(C_{k+1}^2 \frac{1}{n} + \cdots + C_{k+1}^{k+1} \frac{1}{n^k}\right)} = \dfrac{1}{k+1}$.

定理 23.2

常用的平均值不等式:

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正数, 则有:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

作业 ex1.2:9,13,18(5),20,22(3),23;CH1:10(1),11.