Lec 22 定积分习题课

22.1 定积分的计算

定理 22.1 (积分的换元法则)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，而函数 $x=\varphi(t)$ 满足下面条件：

1° $\varphi(\alpha)=a$ 及 $\varphi(\beta)=b$，且当 t 从 α 变到 β 时,$x=\varphi(t)$ 所确定的值全部含于区间 $[a,b]$；

2° 函数 $\varphi(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上有连续的微商 $\varphi'(t)$. 则有下面的换元公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明 首先设 $\alpha<\beta$. 由定理中的条件可知，上式两端的积分都存在，且函数 $f(x)$ 和 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 分别在区间 $[a,b]$ 及 $[\alpha,\beta]$ 上有原函数. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$（在 $[a,b]$ 上）的一个原函数，则根据复合函数的求导法则可知,$F(\varphi(t))$ 是 $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上的一个原函数. 由 Newton-Leibniz 公式，我们有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a),$$

以及

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t=F[\varphi(\beta)]-F[\varphi(\alpha)]=F(b)-F(a).$$

这就证明了所说的等式.

当 $\alpha>\beta$ 时证明可类似地进行.

定理 22.2 (积分的分部积分法)

设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续的微商 $u'(x)$ 与 $v'(x)$，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

或者写成

$$\int_a^b u(x)dv(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x).$$

证明 由微分中的求导法则可得

$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

由已知条件可知，上式的两边都是连续的，因此可积. 对上述两边进行积分，并用 Newton-Leibniz 公式，就可得出定理结果.

定理 22.3 (奇函数与偶函数)

设 $f \in C[-a,a]$,

1. 若 f 为偶函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$;
2. 若 f 为奇函数, 则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

定理 22.4 (周期函数的积分)

设 $f(x) \in C(-\infty,+\infty)$, 且 $f(x)$ 以 T 为周期, 则 $\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$.

证明 存在 $c \in [x_0, x_0+T]$, 使得 $f(c) = f(0) = f(T)$. 则 $\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{x_0+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{x_0+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0-c+T}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{x_0-c+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\,\mathrm{d}x$.

22.2 例题

例 22.1 设 $f(x) \in C[a,b], f(x) > 0, \forall x \in [a,b], F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$, 证明 $F(x) = 0$ 在 $[a,b]$ 上有唯一解.

证明 由题意可知, $F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0, \forall x \in [a,b]$. 故 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 且 $F(a) = \int_{a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b}^{a} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} < 0, F(b) = \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} > 0$. 由零值定理, 存在唯一的 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $F(x_0) = 0$.

例 22.2 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$,$\Phi(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, 求 $\Phi(x)$ 的表达式.

解 $\Phi(x) = \begin{cases} \int_{-1}^{x} (-1)\,\mathrm{d}t = -x-1, & -1 \leqslant x < 0, \\ \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} (-1)\,\mathrm{d}t = -1, & x = 0, \\ \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} (-1)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 1\,\mathrm{d}t = -1+x, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$

注 这个例子告诉我们, 对于这个例子 $x = 0$ 的取值不会影响可积性与积分结果. 进一步的, 改变有限个点的函数值, 不会影响函数的可积性与积分结果.

定理 22.5 (点火公式)

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}. \end{cases}$$

证明 两个积分相等可以由换元 $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ 得到. 由定积分的分部积分法,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \, d(-\cos x) = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, d(\sin^{n-1} x)$$

$$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

移项后得递推公式:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

重复使用上述公式, 由于

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \,\mathrm{d}x = 1,$$

就得到

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}. \end{cases}$$

例 22.3 求极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x$;
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^4}$.

解

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-nx^2} \,\mathrm{d}x \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b \mathrm{e}^{-nb^2} \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-nb^2}(b-a) = 0$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\displaystyle\int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+a} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \int_n^{n+a} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{n+a}{n} = 0$;
3. 不可积. 后面讲述反常积分时会详细讲述, 现在可以思考一下为什么不可积.

✍ **作业** ex5.1:11,12,19,21,22(1)(3)(5)(7)(11)(12),23.