Week 5

5.1 Mar 24 ex9.5:2(2),3,4(1)(3)(7),7(1)(3)(4).

✍ **习题 9.5.2(2)** 求下列函数由点 (x_0, y_0) 变到 (x_0+h, y_0+k) 时函数的增量.

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - 2xy, (x_0, y_0) = (1, -1)$$

解 可知

$$f(x,y) = (x+y-2)xy$$

因此增量为

$$\begin{aligned}
&f(1+h, -1+k) - f(1,-1)\\
=&(1+h-1+k-2)(1+h)(-1+k) - (1-1-2)(1)(-1)\\
=&(h+k-2)(1+h)(-1+k) - 2\\
=&(h+k-2)(hk-h+k-1) - 2\\
=&h^2k + hk^2 - h^2 - 2hk + hk - hk + k^2 + 2h - h - 2k - k + 2 - 2\\
=&h^2k + hk^2 - h^2 - 2hk + k^2 + h - 3k
\end{aligned}$$

或

依次求得一二三阶偏导数利用 Taytor 公式可得上式.

✍ **习题 9.5.3** 对于函数 $f(x,y) = \sin \pi x + \cos \pi y$, 用微分中值定理证明, 存在一个数 $\theta \in (0,1)$, 使得

$$\frac{4}{\pi} = \cos\frac{\pi\theta}{2} + \sin[\frac{\pi(1-\theta)}{2}]$$

解 在线段 $\begin{cases} x = \dfrac{t}{2}, \\ y = \dfrac{1-t}{2}; \end{cases} \quad t \in [0,1]$ 上, 有

$$g(t) = f(\frac{t}{2}, \frac{1-t}{2}) = \sin\frac{\pi t}{2} + \cos\frac{\pi(1-t)}{2}, t \in [0,1]$$

$$g'(t) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi(1-t)}{2}$$

$$g(0) = 0, g(1) = 2$$

利用微分中值定理可得 $g(1) - g(0) = 1 \cdot g'(\theta)$ 即

$$2 = \frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi\theta}{2} + \sin\frac{\pi(1-\theta)}{2}\right)$$

可得

$$\frac{4}{\pi} = \cos\frac{\pi\theta}{2} + \sin[\frac{\pi(1-\theta)}{2}]$$

✍ **习题 9.5.4** 求下列函数的 Taylor 公式, 并指出展开式成立的区域.

(1) $f(x,y)=\mathrm{e}^x\ln(1+y)$ 在 $(0,0)$ 展开到三阶为止.

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$ 在 $(0,0)$ 展开到 n 阶为止.

(7) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在 $(1,-2)$ 的 Taylor 公式.

解

(1) 我们避开暴力计算的方式, 尽管这样做也不复杂. 利用

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3),x\to 0$$

$$\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3),y\to 0$$

立刻可得

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\mathrm{e}^x\ln(1+y)\\&=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)\right)\\&=y+xy-\frac{y^2}{2}+\frac{xy^2}{2}+\frac{x^2y}{2}-\frac{xy^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(\rho^3)\end{aligned}$$

在 $x\in\mathbb{R},y>-1$ 时成立.

(3) $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}=\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$ 此时无论是像 (1) 一样分别带入两部分的 Taylor 公式, 或者直接带入二元 Taylor 公式都可以计算.

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n),x\to 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m\partial y^n}&=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(m)}_x\left(\frac{1}{1-y}\right)^{(n)}_y\\&=\frac{m!}{(1-x)^{m+1}}\frac{n!}{(1-y)^{n+1}}\end{aligned}$$

因此在 $(0,0)$ 处, $\left.\dfrac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m\partial y^n}\right|_{(0,0)}=m!n!$ 故

$$\begin{aligned}f(x,y)&=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\sum_{i+j=k}\frac{k!}{i!j!}x^iy^j\left.\frac{\partial^kf}{\partial x^i\partial y^j}\right|_{(0,0)}+o(\rho^n)\\&=1+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i+j=k}\frac{1}{i!j!}x^iy^ji!j!+o(\rho^n)\\&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k}x^iy^j+o(\rho^n)\end{aligned}$$

在 $x<1,y<1$ 时成立.

(7) 可以直接带入 $(1+x,-2+y)$ 计算, 当然也依次计算在 $(1,-2)$ 处

$$f=5,f_1'=0,f_2'=0,f_{11}''=4,f_{12}''=-1,f_{22}''=-2$$

因此 $f(1+x,-2+y)=5+2x^2-xy-y^2$

代换成

$$f(x,y)=5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2$$

在 $\mathbb{R}^2$ 上成立.

✍ **习题 9.5.7** 求下列函数的极值.

(1) $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}(x>0,y>0)$;

(3) $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+2y+y^2)$;

(4) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, 求隐函数 $y(x)$ 的极值.

解

(1) $f(x,y)=xy+\dfrac{50}{x}+\dfrac{20}{y}$, 则 $\nabla f(x,y)=(y-\dfrac{50}{x^2},x-\dfrac{20}{y^2})$

令 $\nabla f(x,y)=(0,0)$, 可得可得 $x=5,y=2$.

计算 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix}\dfrac{4}{5} & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ 正定, 因此 $(5,2)$ 为极小值点, 极小值 $f(5,2)=30$.

(3) $f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+2y+y^2)$, 则 $\nabla f(x,y)=(\mathrm{e}^{2x}(2x+4y+2y^2+1),\mathrm{e}^{2x}(2+2y))$

令 $\nabla f(x,y)=(0,0)$, 可得 $x=\dfrac{1}{2},y=-1$.

计算 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix}2\mathrm{e} & 0\\ 0 & 2\mathrm{e}\end{pmatrix}$ 正定, 因此 $(\dfrac{1}{2},-1)$ 为极小值点, 极小值 $f(\dfrac{1}{2},-1)=-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

(4) $F(x,y;\lambda)=y-\lambda((x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2))$,

$$\begin{cases}F'_x=-\lambda(4(x^2+y^2)x-2a^2x)=0,\\ F'_y=1-\lambda(4(x^2+y^2)y+2a^2y)=0,\\ (x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0.\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases}-x\lambda(2(x^2+y^2)-a^2)=0,\\ F'_y=1-y\lambda(4(x^2+y^2)+2a^2)=0,\\ (x^2+y^2)^2-a^2(x^2-y^2)=0.\end{cases}$$

对第一个式子,$x=0$ 时由第三个式子,$y=0$, 此时第二个式子矛盾, 因此一定是

$$\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2},\\ x^2-y^2=\dfrac{a^2}{4},\\ \lambda=\dfrac{1}{4a^2y},\end{cases}$$

解得

$$(x,y)=\left(\pm\frac{\sqrt{6}a}{4},\pm\frac{\sqrt{2}a}{4}\right)$$

对应了极大值 $\dfrac{\sqrt{2}a}{4}$ 和极小值 $-\dfrac{\sqrt{2}a}{4}$.

5.2 Mar 26 ex9.5:7(2)(5),8,11(2)(4),17;ch9:6,14.

✍ **习题 9.5.7** 求下列函数的极值.

(2) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$;

(5) $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$, 求隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

解

(2) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$, 则 $\nabla f(x,y)=(4-2x,-4-2y)$ 令 $\nabla f(x,y)=(0,0)$, 可得可得 $x=2,y=-2$.

计算 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ 负定, 因此 $(2,-2)$ 为极大值点, 极大值 $f(2,-2)=8$.

(5) $F(x,y,z;\lambda)=z-\lambda(x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10)$,

$$\begin{cases} F'_x=-\lambda(2x-2)=0,\\ F'_y=-\lambda(2y+2)=0,\\ F'_z=1-\lambda(2z-4)=0,\\ x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0; \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x=1,\\ y=-1,\\ z=-2\mathrm{or}6,\\ \lambda=-\dfrac{1}{8}\mathrm{or}\dfrac{1}{8}; \end{cases}$$

对应极大值 6, 极小值 -2.

另: 注意到这是一个椭球面 $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=4^2$, 可验证该结果 $z=2\pm4$ 为最大最小值.

✍ **习题 9.5.8** 求一个三角形, 使得它的三个角的正弦乘积最大.

解 即求 $f(x,y,z)=\sin x\sin y\sin z$ 在约束 $x+y+z=\pi;x,y,z>0$ 上的最大值. 令 $F(x,y,z;\lambda)=\sin x\sin y\sin z-\lambda(x+y+z-\pi)$

$$\begin{cases} F'_x=\cos x\sin y\sin z-\lambda=0,\\ F'_y=\sin x\cos y\sin z-\lambda=0,\\ F'_z=\sin x\sin y\cos z-\lambda=0,\\ x+y+z-\pi=0; \end{cases}$$

前三个式子轮换相减可得

$$\begin{cases} \sin z\sin(y-x)=0\\ \sin x\sin(z-y)=0\\ \sin y\sin(x-z)=0 \end{cases}$$

从而由于 $\sin x, \sin y, \sin z > 0$, 有 $x = y = z = \dfrac{\pi}{3}$,

并验证 Hesse 矩阵为 $\begin{pmatrix} -\dfrac{3\sqrt{3}}{8} & \dfrac{\sqrt{3}}{8} & \dfrac{\sqrt{3}}{8} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{8} & -\dfrac{3\sqrt{3}}{8} & \dfrac{\sqrt{3}}{8} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{8} & \dfrac{\sqrt{3}}{8} & -\dfrac{3\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ 负定.

因此在等边三角形时有最大值 $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

此外, 这类题想要说清是极大值也是最大值还是比较麻烦的, 除了用积化和差之类的手段放缩, 也可以这样解释为什么这个极大值是最大值.

注意到在闭集 $\bar{D} = \{(x,y,z)|x+y+z=\pi; x,y,z \geqslant 0\}$ 上,f 可以取到最大最小值, 而最大值一定是极值点, 且由于在 $D = \{(x,y,z)|x+y+z=\pi; x,y,z > 0\}$ 范围内,$f > 0$,∂D 上 $f = 0$. 因此 $\bar{D}$ 最大值一定取在 D 中, 这也是我们要求的 D 中最大值, 这一定是极值点, 因此上述所求的唯一极大值一定是该最大值点.

习题 9.5.11 求下列函数在指定范围内的最大值和最小值.

(2) $z = x^2 - xy - y^2$,$\{(x,y)||x|+|y| \leqslant 1\}$.

(4) $z = x^2y(4-x-y)$,$\{(x,y)|x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant 6\}$.

解

(2) 在内部,

$\nabla z = (2x-y, 2y-x) = (0,0)$, 即 $(x,y) = (0,0)$.

计算 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ 正定, 因此 $(0,0)$ 为极小值点, 极小值 $z(0,0) = 0$.

在边界,

由于该函数关于原点对称, 因此不妨只考虑 $x+y=1, x-y=1$ 两个边界:

在 $x+y=1$ 上,$f(t,1-t) = t^2+t^2-2t+1-t+t^2 = 3t^2-3t+1, t \in [0,1]$, 因此最大最小值为 $f(1,0) = f(0,1) = 1, f(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

在 $x-y=1$ 上,$f(t,t-1) = t^2+t^2-2t+1+t-t^2 = t^2-t+1, t \in [0,1]$, 因此最大最小值为 $f(1,0) = f(0,-1) = 1, f(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$.

综上, 最小值 $f(0,0) = 0$, 最大值在 $(\pm1,0),(0,\pm1)$ 处取得, 为 1.

(4) 在内部,

$\nabla z = (8xy-3x^2y-2xy^2, 4x^2-x^3-2x^2y) = (xy(8-3x-2y), x^2(4-x-2y)) = 0$ 即 $(x,y) = (2,1)$,

计算 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$ 负定, 因此 $(2,1)$ 为极大值点, 极大值 $f(2,1) = 4$.

在边界,

$x = 0, f(0,y) = 0$;

$y = 0, f(x,0) = 0$;

$x+y = 6, g(t) = f(t,6-t) = -2(6t^2-t^3), t \in [0,6]$,

$g'(t) = -2(12t-3t^2)$, 因此可知 $g(4) = f(4,2) = -64$ 是这一边界上最小值,$g(6,0) = g(0,6) = 0$ 是这一边界上最大值.

综上, 最小值 $f(4,2) = -64$, 最大值 $f(2,1) = 4$.

✍ **习题 9.5.17** 在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上求一点 $M(x,y)(x,y\geqslant 0)$, 使椭圆在该点的切线与坐标轴构成的三角形面积最小, 并求其面积.

解 在点 (x_0,y_0) 处切线为 $\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.

因此围成的三角形的三个顶点为 $(0,0)(\frac{a^2}{x_0},0)(0,\frac{b^2}{y_0})$, $S=\frac{1}{2}\frac{a^2}{x_0}\frac{b^2}{y_0}=\frac{a^2b^2}{2x_0y_0}$

因此所求为 $f(x,y)=\frac{a^2b^2}{2xy}$ 在约束 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; x,y\geqslant 0$ 上的最小值.

构造 $F(x,y;\lambda)=\frac{a^2b^2}{2xy}-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1)$

$$\begin{cases} F'_x = -\dfrac{a^2b^2}{2x^2y}-2\lambda\dfrac{x}{a^2}=0 \\ F'_y = -\dfrac{a^2b^2}{2xy^2}-2\lambda\dfrac{y}{b^2}=0 \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

可得 $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{2}$.

因此 $(x,y)=(\frac{\sqrt{2}a}{2},\frac{\sqrt{2}b}{2})$,$S=\frac{a^2b^2}{2\frac{\sqrt{2}a}{2}\frac{\sqrt{2}b}{2}}=ab$

✍ **习题 ch9.6** 证明: 不等式 $\frac{x^2+y^2}{4}\leqslant \mathrm{e}^{x+y-2}$

解 $\mathrm{e}^t\geqslant \mathrm{e}t$, 因此

$$\mathrm{e}^{x+y-2}=\frac{\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^2}=\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}}{\mathrm{e}}\right)^2\geqslant\left(\frac{\mathrm{e}\frac{x+y}{2}}{\mathrm{e}}\right)^2=\frac{(x+y)^2}{4}\geqslant\frac{x^2+y^2}{4}$$

✍ **习题 ch9.14** 求函数 $f(x,y)=x^2+xy^2-x$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2\}$ 上的最大值和最小值.

解 在内部,

$\nabla f=(2x+y^2-1,2xy)=(0,0)$, 解得 $(x,y)=(0,\pm1)$ 或 $(x,y)=(\frac{1}{2},0)$

分别计算 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$

分别为 $\begin{pmatrix} 2 & \pm2 \\ \pm2 & 0 \end{pmatrix}$ 不定, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 正定,

因此其中 $(\frac{1}{2},0)$ 为极小值点, 极小值 $f(\frac{1}{2},0)=-\frac{1}{4}$.

在边界, $F(x,y;\lambda)=x^2+xy^2-x-\lambda(x^2+y^2-2)$,

$$\begin{cases} F'_x=2x+y^2-1-\lambda(2x)=0,\\ F'_y=2xy-\lambda(2y)=0,\\ x^2+y^2-2=0; \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{2},\\ y=0; \end{cases} \quad 或 \begin{cases} x=1,\\ y=\pm 1; \end{cases} \quad 或 \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3},\\ y=\pm\dfrac{\sqrt{17}}{3}; \end{cases}$$

分别计算得 $f(\pm\sqrt{2},0)=2\mp\sqrt{2}$, $f(1,\pm1)=1$, $f(-\frac{1}{3},\pm\frac{\sqrt{17}}{3})=\frac{29}{27}$

最小值 $-\frac{1}{4}$, 最大值 $\frac{29}{27}$

5.3 Mar 28 ex9.5:10(1)(4),12,15,18,19,20

习题 9.5.10 求下列函数在指定条件下的极值.

(1) $u=x^2+y^2$, 若 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$;

(4) $u=xyz$, 若 $x+y+z=0$ 且 $x^2+y^2+z^2=1$.

解

(1) 考虑 $F(x,y;\lambda)=x^2+y^2-\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)$

$$\begin{cases} F'_x=2x-\dfrac{\lambda}{a}=0,\\ F'_y=2y-\dfrac{\lambda}{b}=0,\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1=0; \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x=\dfrac{\lambda}{2a},\\ y=\dfrac{\lambda}{2b},\\ \dfrac{\lambda}{2a^2}+\dfrac{\lambda}{2b^2}=1; \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \lambda=\dfrac{2a^2b^2}{a^2+b^2},\\ x=\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\\ y=\dfrac{a^2b}{a^2+b^2}; \end{cases}$$

计算 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ 正定,

因此该点为极小值点, 有极小值 $u=\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

(10) 考虑 $F(x,y,;\lambda,\mu)=xyz-\lambda\,(x+y+z)-\mu(x^2+y^2+z^2-1)$

$$\begin{cases} F'_x=yz-\lambda-2\mu x=0,\\ F'_y=xz-\lambda-2\mu y=0,\\ F'_z=xy-\lambda-2\mu z=0,\\ x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1; \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} xy+yz+zx-3\lambda-2\mu(x+y+z)=0\\ 3xyz-\lambda(x+y+z)-2\mu(x^2+y^2+z^2)=0\\ xyz(x+y+z)-\lambda(x^2+y^2+z^2)-2\mu(x^3+y^3+z^3)=0\\ x+y+z=0,\\ x^2+y^2+z^2=1; \end{cases}$$

其中 $(x^3+y^3+z^3)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-xz)+3xyz=3xyz, 2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)$ 因此

$$\begin{cases} \lambda=-\frac{1}{6},\\ \mu=\pm\frac{\sqrt{6}}{12},\\ xyz=\pm\frac{\sqrt{6}}{18},\\ x^2+y^2+z^2=1,\\ x+y+z=0; \end{cases}$$

该条件下的最值存在且为对应为大小极值, 因此极大值 $\frac{\sqrt{6}}{18}$, 极小值 $-\frac{\sqrt{6}}{18}$.

✍ **习题 9.5.12** 在平面 $3x-2z=0$ 上求一点, 使它与点 $A(1,1,1)$ 和 $B(2,3,4)$ 的距离平方和最小.

解 设 $P(x,y,z)$ 为所求点, 则所求为 $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2$ 在约束 $3x-2z=0$ 上的最小值. 令 $F(x,y,z;\lambda)=f(x,y,z)-\lambda(3x-2z)$, 则

$$\begin{cases} F'_x=2(x-1)+2(x-2)-3\lambda=0\\ F'_y=2(y-1)+2(y-3)=0\\ F'_z=2(z-1)+2(z-4)+2\lambda=0\\ 3x-2z=0; \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x = \dfrac{21}{13}, \\ y = 2, \\ z = \dfrac{63}{26}, \\ \lambda = -\dfrac{2}{13}; \end{cases}$$

因此点 $P(\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26})$ 为所求点.

✍ **习题 9.5.15** 一帐篷的下部为圆柱形, 上部盖以圆锥形的顶篷, 设帐篷的容易为一定数 V_0. 试证: 当 $R = \sqrt{5}H, h = 2H$ 时 (R, H 为圆柱底半径和高,h 为圆锥形的高), 所用篷布最省.

解 设圆柱底半径为 R, 高为 H, 圆锥形的高为 h, 则所用篷布面积为 $S(R, H, h) = 2\pi RH + \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$, 约束为 $\pi R^2 H + \frac{\pi}{3}R^2 h = V_0$.

设 $F(R, H, h) = 2\pi RH + \pi R\sqrt{R^2 + h^2} - \lambda(\pi R^2 H + \frac{\pi}{3}R^2 h - V_0)$

$$\begin{cases} F'_R = 2\pi H + \pi\dfrac{2R^2 + h^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \lambda(2\pi RH + \dfrac{2\pi}{3}Rh) = 0 \\ F'_H = 2\pi R - \lambda(\pi R^2) = 0 \\ F'_h = \dfrac{\pi Rh}{\sqrt{R^2 + h^2}} - \lambda(\dfrac{\pi}{3}R^2) = 0 \\ \pi R^2 H + \dfrac{\pi}{3}R^2 h - V_0 = 0; \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} \lambda = \dfrac{2}{R} \\ R = \sqrt{5}H \\ h = 2H \end{cases}$$

✍ **习题 9.5.18** 求平面上一点, 使其到 n 个点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ 的距离平方和最小.

解 设所求点为 (x, y), 则所求为 $f(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n}((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)$, 即

$$\begin{cases} F'_x = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(x - x_i) = 0 \\ F'_y = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(y - y_i) = 0 \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ y = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}$$

并验证可知 Hesse 矩阵为 $\begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}$ 正定, 因此该点为极小值点. 同时由于对于上述函数 $F \geqslant 0$ 且连续, 因此该函数在 $\mathbb{R}^2$ 上有最小值, 因此该点为极小值, 因此可知求出的点为最小值点.

也可以配方, 但相对没有求驻点过程这样简单, 实际上算起来差不多.

习题 9.5.19 在椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ 的内接长方体中, 求体积最大的长方体的体积.

解 我们不加证明的给出如下结果, 也就是内接长方体一定是" 横平竖直" 的, 各个面总是与两条坐标轴平行 (或者等效于该情形).

因此问题变成了过椭球面上 (x,y,z) 的长方体最大体积 $V(x,y,z)=8|xyz|$. 构造 $F(x,y,z;\lambda)=x^2y^2z^2-\lambda(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1)$

$$\begin{cases} F'_x = 2xy^2z^2-\lambda\frac{2x}{a^2}=0, \\ F'_y = 2x^2yz^2-\lambda\frac{2y}{b^2}=0, \\ F'_z = 2x^2y^2z-\lambda\frac{2z}{c^2}=0, \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0; \end{cases}$$

可得

$$\begin{cases} x^2=\frac{a^2}{3}, \\ y^2=\frac{b^2}{3}, \\ z^2=\frac{c^2}{3}; \end{cases} \quad \text{或} \quad xyz=0$$

可知对应最大值的恰好为极大值, 也就是对应前一组解的情况, 因此

$$V=8\sqrt{x^2y^2z^2}=\frac{8\sqrt{3}}{9}abc$$

喜欢不等式放缩的同学也可以采用

$$\sqrt[3]{\frac{x^2}{a^2}\cdot\frac{y^2}{b^2}\cdot\frac{z^2}{c^2}} \leqslant \frac{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}{3}=\frac{1}{3}$$

可得 $|xyz| \leqslant \frac{abc}{3\sqrt{3}}$, 因此 $V=8|xyz| \leqslant \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$, 并验证取等条件可以取到即可.

习题 9.5.20 在旋转椭球面 $\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$ 上, 求距平面 $x+y+2z=9$ 最远和最近的点.

解 对于点 (x,y,z), 到平面 $x+y+2z=9$ 的距离为 $D=\frac{|x+y+2z-9|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{|x+y+2z-9|}{3}$, 因此可以转化为求 $f(x,y,z)=(x+y+2z-9)^2$ 在约束 $\frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$ 上的最大值和最小值.

令 $F(x,y,z;\lambda)=f(x,y,z)-\lambda(\frac{x^2}{4}+y^2+z^2-1)$, 则

$$\begin{cases} F'_x=2(x+y+2z-9)-\lambda\frac{2x}{4}=0,\\ F'_y=2(x+y+2z-9)-\lambda(2y)=0,\\ F'_z=4(x+y+2z-9)-\lambda(2z)=0,\\ \frac{x^2}{4}+y^2+z^2-1=0; \end{cases}$$

可得 $x+y+2z=\pm3$ 可解得

$$\begin{cases} x=\pm\frac{4}{3},\\ y=\pm\frac{1}{3},\\ z=\pm\frac{2}{3}; \end{cases}$$

由于最大最小值可以取到, 一定对应算出的极大极小值点. 因此对应最大值点 $(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 和最小值点 $(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$, 对应的最大值和最小值分别为 $D=\frac{1}{3}$ 和 $D=-\frac{1}{3}$.

这种做法解复杂方程还是太吃操作了, 有没有更简单的方法? 有的, 兄弟, 有的. 我们直接构造切平面使得切平面与已知平面平行即可. 过椭球面上点 (x,y,z) 的切平面法向量为 $(\frac{x}{2},2y,2z)$, 与平面 $x+y+2z=9$ 平行, 因此我们有

$$\begin{cases} \frac{x}{2}=t,\\ 2y=t,\\ 2z=2t,\\ \frac{x^2}{4}+y^2+z^2=1; \end{cases}$$

立刻可得 $t=\pm\frac{2}{3}$, 因此 (x,y,z) 立刻可得.