第5讲：空间解析几何综述（summarize）

(一) 坐标系的平移与旋转

例1、设有二次曲面Σ：$4x^2+25y^2+4z^2-16x-50y-16z-43=0$

(1). 指出Σ是何种二次曲面？

(2). 将Σ上述的一般式化成参数式.

解(1). 配方得：$4(x-2)^2+25(y-1)^2+4(z-2)^2=100$ 即

$$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}+\frac{(z-2)^2}{5^2}=1 \quad (式1)$$

Σ是中心在$M_0(2,1,2)$的旋转椭球面.

若令 $\begin{cases} x-2=x' \\ y-1=y' \\ z-2=z' \end{cases}$，$M_0=O'$，即是将坐标系的原点移到椭球面的中心$M_0$处，记作$O'$，新的经过平行移动的坐标系$O'-x'y'z'$，在新坐标系下，旋转椭球面Σ化为

$$\frac{x'^2}{5^2}+\frac{y'^2}{2^2}+\frac{z'^2}{5^2}=1 \quad 或 \quad \left(\frac{x'}{5}\right)^2+\left(\frac{y'}{2}\right)^2+\left(\frac{z'}{5}\right)^2=1 \quad (式2)$$

解(2)：若令 $\begin{cases} \frac{x'}{5}=\sin\theta\cos\varphi \\ \frac{y'}{2}=\sin\theta\sin\varphi \\ \frac{z'}{5}=\cos\theta \end{cases}$，则 $\begin{cases} x'=5\sin\theta\cos\varphi & \theta\in[0,\pi] \\ y'=2\sin\theta\sin\varphi, & \varphi\in[0,2\pi]. \\ z'=5\cos\theta \end{cases}$ (式3)

即 $\begin{cases} x-2=5\sin\theta\cos\varphi \\ y-1=2\sin\theta\sin\varphi \\ z-2=5\cos\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+5\sin\theta\cos\varphi \\ y=1+2\sin\theta\sin\varphi \\ z=2+5\cos\theta \end{cases}$ $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in[0,2\pi]$ (*4)

(*3)是Σ在直角坐标系中的参数式，(*4)则是它在球坐标系中的参数式

注1：曲面Σ的参数式都是双参数的，但参数式不唯一。例如，

$\begin{cases} x'=5\cos\theta\cos\varphi \\ y'=2\cos\theta\sin\varphi \\ z'=5\sin\theta \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=2+5\cos\theta\cos\varphi \\ y=1+2\cos\theta\sin\varphi \\ z=2+5\sin\theta \end{cases}$ $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\varphi\in[-\pi,\pi]$ (*5)

也是例1中的椭球面Σ的参数式表示。

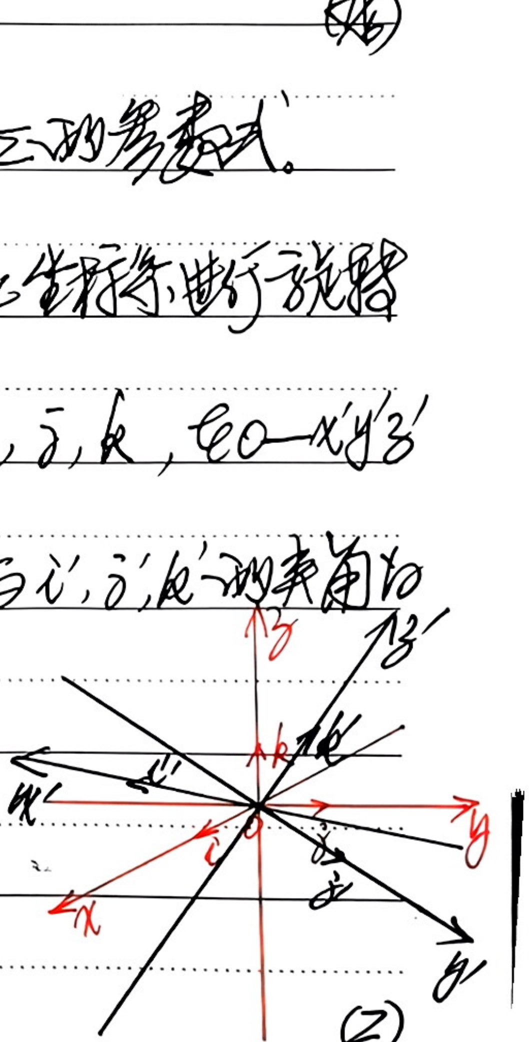
例2. 设有二次曲面Σ: $xy=z$. (*6)

(1) 指出Σ是何种二次曲面？ (2) 求Σ的参数式。

解(1)：若保持坐标系的原点不动，让坐标系进行旋转变换，设$O-xyz$坐标系中，基向量为$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$，在$O-x'y'z'$坐标系中，基向量为$\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$且$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$与$\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'$的夹角如下表所示：

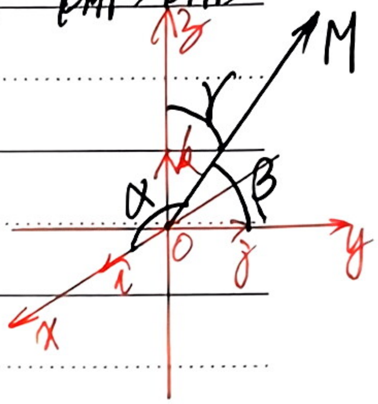
	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\vec{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\vec{k}'$	α_3	β_3	γ_3

表(I)



(2)

设 $\overrightarrow{OM}=(a,b,c)\neq 0$ 则 $\overrightarrow{OM}^{0}=\frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}=\left(\frac{a}{|\overrightarrow{OM}|},\frac{b}{|\overrightarrow{OM}|},\frac{c}{|\overrightarrow{OM}|}\right)$



$=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\cos\alpha\, i+\cos\beta\, j+\cos\gamma\, k$

即单位向量 $\overrightarrow{OM}^{0}$ 可用它的三个方向余弦作为坐标. 由表(1)知

$$\begin{cases} i'=\cos\alpha_1 i+\cos\beta_1 j+\cos\gamma_1 k \\ j'=\cos\alpha_2 i+\cos\beta_2 j+\cos\gamma_2 k \\ k'=\cos\alpha_3 i+\cos\beta_3 j+\cos\gamma_3 k \end{cases} \quad (※7)$$

现设点 ~~$Q(x,y,z)$~~ 在 $O\text{-}xyz$ 中的坐标为 $Q(x,y,z)$，在 $O\text{-}x'y'z'$ 中为 $Q(x',y',z')$，则 $\overrightarrow{OQ}=xi+yj+zk=x'i'+y'j'+z'k'$

$=x'(\cos\alpha_1 i+\cos\beta_1 j+\cos\gamma_1 k)+y'(\cos\alpha_2 i+\cos\beta_2 j+\cos\gamma_2 k)+z'(\cos\alpha_3 i+\cos\beta_3 j+\cos\gamma_3 k)$

$=(x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3)i+(x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3)j+(x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3)k$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3 \\ y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3 \\ z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3. \end{cases} \quad (※8)$$

若令 $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3\\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3\\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ 是三个列矩阵.

则(※8)为 $X=AX'$ 或 $X'=A^{-1}X$ (※9)

其中 A 的各行各列都是单位向量且两两行(列)正交.

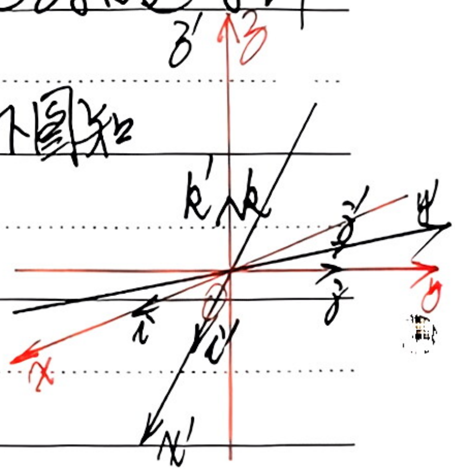
在线性代数中，称A这样的矩阵为正交矩阵.

称(式8)或(式9)为正交线性变换，简称正交变换.

不难验证，正交矩阵A满足：$A^T=A^{-1}$ 或 $AA^T=E=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\ \cdots&&&&\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$

即几何中的旋转或物理中刚体的旋转，在代数中对应正交变换。(式8)表明了旋转后，老坐标x,y,z与新坐标x',y',z'之间的对应关系是正交变换关系。

若保持z轴不变，让xOy坐标平面绕z轴逆时针旋转$\frac{\pi}{4}$，得新坐标系$O-x'y'z'$，则从下图知



	i	j	k
i'	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$
j'	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$
k'	$\pi/2$	$\pi/2$	0

依(式8)有：
$$\begin{cases}x=x'\cos\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{3\pi}{4}+z'\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt2}{2}(x'-y')\\ y=x'\cos\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}+z'\cos\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt2}{2}(x'+y')\\ z=x'\cos\frac{\pi}{2}+y'\cos\frac{\pi}{2}+z'\cos 0=z'\end{cases}\quad(式10)$$

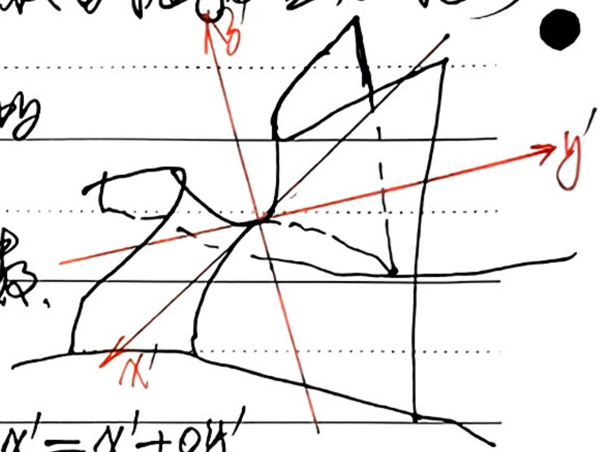
利用正交变换(式10)可将 $\Sigma: xy=z$ 化为：

$\frac{\sqrt2}{2}(x'-y')\frac{\sqrt2}{2}(x'+y')=z'$ 即 $z'=\frac12(x'^2-y'^2)=\frac{x'^2}{(\sqrt2)^2}-\frac{y'^2}{(\sqrt2)^2}$. (式)

在新坐标系 $O-x'y'z'$ 中，Σ是双曲抛物面（马鞍面）

例(2). $\Sigma: xy=z$ 在老坐标系中的

参数式为 $\begin{cases} x=x+0y \\ y=0x+y \\ z=xy \end{cases}$，$x,y$ 为参数。



Σ在新坐标系中的参数式为：$\begin{cases} x'=x'+0y' \\ y'=0x'+y' \\ z'=\frac{1}{2}(x'^2-y'^2) \end{cases}$，$x',y'$ 为参数

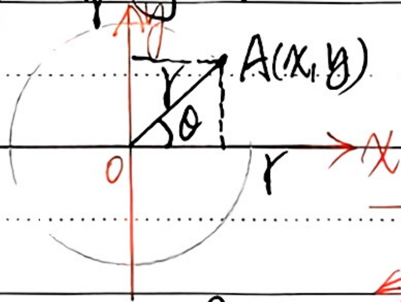
(三) 柱面坐标系与球面坐标系；

$\begin{cases} x=r\cos\theta, & \theta\in[0,2\pi] \\ y=r\sin\theta, & r\in[0,+\infty) \\ z=z, & z\in(-\infty,+\infty) \end{cases}$ 式(1)

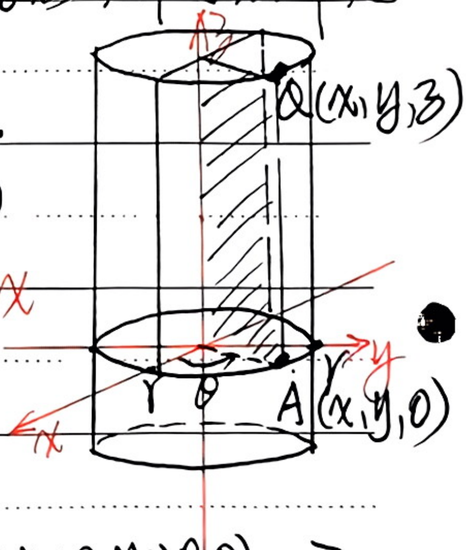
(1) 柱面坐标系：空间 R^3 中任一点 $Q(x,y,z)$ 都可看作是在半径为 r 的某个圆柱面：$x^2+y^2=r^2$ 上，

而圆柱面 $x^2+y^2=r^2$ 上的点，都可用 r,θ,z 这三个有序数组表示，

称 (r,θ,z) 为点Q的柱面坐标。



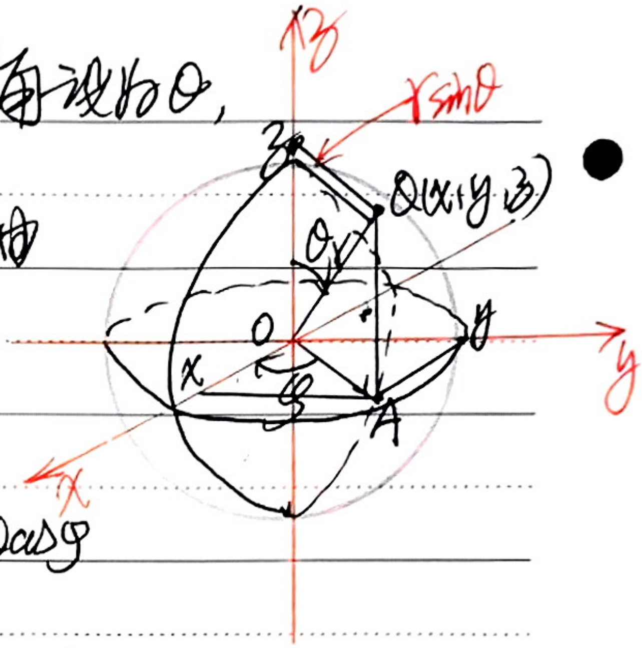
$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，



$A(r\cos\theta, r\sin\theta, 0) \longrightarrow Q(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

(2). 球面坐标系：空间中任一点 $Q(x,y,z)$ 都位于某个半径为 r 的球面Σ上：$x^2+y^2+z^2=r^2$，$(r>0)$

$|\vec{OQ}|=r$，$\vec{OQ}$与Oz轴正向的夹角设为θ，



$\vec{OQ}$在xOy平面中的投影与Ox轴正向的夹角为φ，$\begin{cases}0\le\theta\le\pi\\ 0\le\varphi\le2\pi\end{cases}$，

则$|\vec{OA}|=r\sin\theta$，$\Rightarrow x=|\vec{OA}|\cos\varphi=r\sin\theta\cos\varphi$

$y=|\vec{OA}|\sin\varphi=r\sin\theta\sin\varphi$，而$z=r\cos\theta$，

称(θ,φ,r)或(r,θ,φ)为球面坐标，球面坐标r,θ,φ

与直角坐标x,y,z之间的转换关系为$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$，$\theta\in[0,\pi]$，$\varphi\in[0,2\pi]$，$r\in[0,+\infty)$

直角坐标系下的球面方程： (其它)

$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 在柱面坐标系下$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=z\end{cases}$

化成$\Sigma: r^2+z^2=R^2$，在球面坐标系：

$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}$下，化为：$x^2+y^2+z^2=r^2=R^2$ 即$\Sigma: r=R$.

双叶双曲面$\Sigma: x^2-y^2-z^2=1$在柱面坐标系中化为

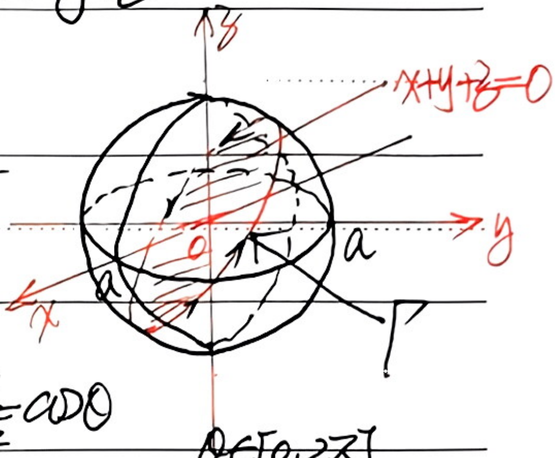
$r^2\cos2\theta-z^2=1$，在球面坐标系中化为：$2x^2-(x^2+y^2+z^2)=1$

即$2(r\sin\theta\cos\varphi)^2-r^2=1\Leftrightarrow r^2(2\sin^2\theta\cos^2\varphi-1)=1$.

(三) 空间曲线 Γ: $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 的参数式表示:

例1. 将空间 R^3 中的大圆周 Γ: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-a^2=0 \quad (a>0) \\ x+y+z=0 \end{cases}$

化成参数式:



解: 从 $z=-(x+y) \Rightarrow x^2+y^2+(-(x+y))^2=a^2$

$\Rightarrow x^2+xy+y^2=\frac{a^2}{2} \Rightarrow$

$\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$ 令 $\begin{cases} x+\frac{y}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta, \end{cases}$ $\theta\in[0,2\pi]$.

则 $y=\frac{2}{\sqrt{6}}a\sin\theta \Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta) \Rightarrow z=-(x+y)=\frac{-a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)$

即空中圆周 Γ 的参数式为 $\begin{cases} x=\frac{a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta) \\ y=\frac{2}{\sqrt{6}}a\sin\theta \\ z=\frac{-a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta) \end{cases}$, $\theta\in[0,2\pi]$.

若将 x 视为参数, 则从 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 可解出 $\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$, $x\in I$.

例2. 空间的直线 Γ: $\begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x-y-2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z=-x-5 \\ -y-2z=-x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=-3x-9 \\ z=2x+4 \end{cases}$

注: 空间的曲线 Γ 的参数式中只有一个参数, 且 Γ 的参数式表示不唯一。

例3. $\Gamma:\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$，$(\theta\in[0,+\infty)$ $a>0,b>0$ 为常数)

所表示的空间光滑曲线，称之为螺旋线，并称 $h=2\pi b$ 为一个螺距。

此题中，$x^2+y^2=a^2$，因此 Γ 上的点都在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上，而从 $z=b\theta\Rightarrow$ $z_\theta\equiv b$，即质点在作圆周运动的同时，如果向上作匀速运动，则综合的结果是沿螺旋线的运动。

无论是在物理中，还是在几何中，参数 θ 增加的方向都认定为曲线 Γ 的正向。相反的方向是 Γ 的负向。

(四) 作业：P×8.4 / 1；2；4/(4),(5),(6),(10)；8；9；11.