Lec 25 第一类曲线积分

第一类曲线积分形如

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}s$$

其中 Γ 是空间曲线,$f(x, y, z)$ 是定义在 Γ 上的连续函数,$\mathrm{d}s$ 是曲线元素.

25.1 定义与主要性质

定义 25.1

设 Γ 是三维空间中一条光滑（或逐段光滑）曲线段，$f(x, y, z)$ 是定义在曲线 Γ 上的数量场（或函数）。作 Γ 的任意分割：$M_0, M_1, \cdots, M_n$，并记每段 $M_{i-1}M_i$ 的弧长为 Δs_i，最大长度为 $\lambda = \max\{|\Delta s_i| \mid i = 1, \cdots, n\}$。在每段弧上 $M_{i-1}M_i$ 任取一点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$。如果下列和式的极限

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta s_i$$

是一个有限数，且与点 $N_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ 的选择无关，则称函数 $f(x, y, z)$ 在曲线 Γ 上可积，极限值称为数量场在曲线上的积分，或称为第一型曲线积分，记为

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}s$$

♣

若 L 为 Oxy 平面中的一段光滑曲线, 且 L 的参数方程为 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)), t \in [\alpha, \beta]$, 则 L 的第一类曲线积分为

$$\int_{L} \varphi(x, y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i)\Delta s_i$$

我们也将此称为数量场 $z = \varphi(x, y)$ 在曲线 L 上的线积分. 不难证明, 当 $\varphi \in C(L)$ 时, 必有 $\varphi \in R(L)$, 即 φ 在曲线 L 上可积.

事实上, 当 L 恰好位于 ox 轴上的直线段 $[\alpha, \beta]$ 时,$\varphi(x, y)$ 在 L 上的线积分即为定积分 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x, 0)\,\mathrm{d}x$. 由此可以看出, 第一类曲线积分是定积分的推广.

由于第一类线积分的定义与定积分的定义相同, 因此第一型的线积分也有十大性质, 如

命题 25.1 (线性性质)

$$\int_{L} (c_1 f + c_2 g)\,\mathrm{d}s = c_1 \int_{L} f\,\mathrm{d}s + c_2 \int_{L} g\,\mathrm{d}s$$

其中 c_1, c_2 为常数,f, g 为定义在 L 上的连续函数.

♠

命题 25.2 (积分中值定理)

当 $\varphi(x,y)\in C(L)$ 时, 必有 $M_0\in L$, 使得

$$\int_L \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s=\varphi(M_0)S(L)$$

也可以写为

$$f(M_0)=\frac{1}{S(L)}\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

其中 $S(L)$ 为曲线 L 的长度.$f(M_0)$ 表示了函数 $f(x,y)$ 在 L 上的平均值.

命题 25.3 (积分区域可加性)

设 L_1,L_2 是两条不相交的光滑曲线, 且 $L=L_1\cup L_2$, 则有

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

线积分积分区域可加性是定积分的积分区域可加性的推广, 这条性质说明当 $\varphi(x,y)$ 在分段光滑的曲线 L 上连续时, 也是可积的. 具体而言, 设 L 是由光滑曲线 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 组成的分段光滑曲线, 即 $L=L_1\cup L_2\cup\cdots\cup L_n$, 则有

$$\int_L \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_{L_1}\varphi(x,y)\,\mathrm{d}s+\int_{L_2}\varphi(x,y)\,\mathrm{d}s+\cdots+\int_{L_n}\varphi(x,y)\,\mathrm{d}s$$

25.2 第一型线积分的计算方法

设曲线 L 的参数方程表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\quad t\in[\alpha,\beta]$$

其中 $x(t),y(t),z(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的一阶微商 $x'(t),y'(t),z'(t)$，且 $|\boldsymbol{r}'(t)|\neq 0$，$\phi(x,y,z)$ 在 L 上连续，因此 $\phi(x(t),y(t),z(t))$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续。那我们有一下定理:

定理 25.1 (第一类线积分的计算)

设 Γ 是空间中一条光滑曲线，其参数方程表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k},\quad t\in[\alpha,\beta]$$

若函数 $f(x,y,z)$ 在 Γ 上连续，则 $f(x,y,z)$ 在曲线 Γ 上可积，且

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s&=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t\\&=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

证明 作 $[\alpha,\beta]$ 的分割

$$T:\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$$

由此对应曲线 L 上的 $M_i(x(t_i),y(t_i),z(t_i))$，$i=0,\cdots,n$ 为分割点的分割。由弧长的计算

公式与积分中值定理，得到弧段 $M_{i-1}M_i$ 的长度为

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} |\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t = |\boldsymbol{r}'(\theta_i)|\Delta t_i,$$

其中 $t_{i-1} \le \theta_i \le t_i$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$。

取弧段上任意一点 $N_i(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))$，$t_{i-1} \le \tau_i \le t_i$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$，于是

$$\sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\Delta s_i = \sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))|\boldsymbol{r}'(\theta_i)|\Delta t_i$$

等式右边还不是一个函数的 Riemann 和，但我们可作如下修正

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\Delta s_i &= \sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))|\boldsymbol{r}'(\tau_i)|\Delta t_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))(|\boldsymbol{r}'(\theta_i)| - |\boldsymbol{r}'(\tau_i)|)\Delta t_i.\end{aligned}$$

使得右端的第一项正是函数 $\phi(x(t), y(t), z(t))|\boldsymbol{r}'(t)|$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上标准的 Riemann 和，而第二项将被证明在 $|T| \to 0$ 时的极限为零。

为此，对于任意的 $\varepsilon > 0$，由 $\phi(x(t), y(t), z(t))|\boldsymbol{r}'(t)|$ 的连续性可知，它在 $[\alpha, \beta]$ 上可积，因此存在 $\delta_1 > 0$，使得当分割满足 $|T| < \delta_1$ 时，有

$$\left|\sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))|\boldsymbol{r}'(\tau_i)|\Delta t_i - \int_\alpha^\beta \phi(x(t), y(t), z(t))|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

由 $\phi(x(t), y(t), z(t))$ 的连续性，可知它在 $[\alpha, \beta]$ 上有界，设 $|\phi| \le M$，由 $\boldsymbol{r}'(t)$ 的连续性推出在 $[\alpha, \beta]$ 上一致连续，因此存在 $\delta_2 > 0$，对任意的 $t, t' \in [\alpha, \beta]$，只要 $0 < |t - t'| < \delta_2$，就有

$$\|\boldsymbol{r}'(t) - \boldsymbol{r}'(t')\| < \varepsilon.$$

这样当 $|T| < \delta_2$ 时，对于任意的 $\theta_i, \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$，有 $|\theta_i - \tau_i| \le \Delta t_i \le |T| < \delta_2$，因此

$$\left|\sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\left(|\boldsymbol{r}'(\theta_i)| - |\boldsymbol{r}'(\tau_i)|\right)\Delta t_i\right| < M(\alpha - \beta)\varepsilon.$$

综上所述，当分割满足 $|T| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ 时，有

$$\left|\sum_{i=1}^n \phi(x(\tau_i), y(\tau_i), z(\tau_i))\Delta s_i - \int_\alpha^\beta \phi(x(t), y(t), z(t))|\boldsymbol{r}'(t)|\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon + M(\beta - \alpha)\varepsilon.$$

由此得证.

推论 25.1

若 L 为 $y = f(x) \in C^1([a, b])$ 的光滑曲线, 则有 $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$, 因此有

$$\int_L \varphi(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \varphi(x, f(x))\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

若 L 为 $\rho = \rho(\theta) \in C^1([\alpha, \beta])$ 的光滑曲线, 则有 $\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$, 因此有

$$\int_L \varphi(\rho, \theta)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta \varphi(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

特别地

推论 25.2

当被积函数 $\varphi(x,y)$ 或者 $\varphi(x,y,z)=1$ 时, 第一类线积分即为曲线 L 的长度 $S(L)$, 即

$$S(L)=\int_L 1\,\mathrm{d}s$$

25.3 例题

例 25.1 设 L 为 $\begin{cases} z^2=2ax \\ qy^2=16xz \end{cases}$, 求从点 $O(0,0,0)$ 到点 $A(2a,\dfrac{8a}{3},2a)$ 的 L 的弧长 $S(L)$.

解 设 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=\dfrac{4}{3}\sqrt{x\sqrt{2ax}} \\ z=\sqrt{2ax} \end{cases}$, 则有

$$\begin{aligned} x'_x&=1 \\ y'_x&=\sqrt[4]{2a}x^{-\frac{1}{4}} \\ z'_x&=\frac{1}{2}\sqrt{2a}x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} S(L)&=\int_0^{2a}\mathrm{d}s \\ &=\int_0^{2a}\sqrt{1+y'^2_x+z'^2_x}\,\mathrm{d}x \\ &=\int_0^{2a}\sqrt{1+\sqrt{2a}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{a}{2x}}\,\mathrm{d}x \\ &=\int_0^{2a}1+\sqrt{\frac{a}{2x}}\,\mathrm{d}x=4a \end{aligned}$$

例 25.2 求线积分 I,

1. $\displaystyle\int_L(x+y+z)\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为由 $A(1,1,0)$ 到 $B(1,0,0)$ 的直线, 再由螺线 $BC: x=\cos t, y=\sin t, z=t$,$t\in[0,2\pi]$ 组成的分段光滑曲线.

解

$$\int_{AB}(x+y+z)\,\mathrm{d}s=\int_0^1(1+(1-t)+0)\,\mathrm{d}t=\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_{BC}(x+y+z)\,\mathrm{d}s&=\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t+t)\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+1}\,\mathrm{d}t \\ &=\int_0^{2\pi}(\cos t+\sin t+t)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t \\ &=2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

因此有

$$I=\int_L (x+y+z)\,\mathrm{d}s=\frac{3}{2}+2\sqrt{2}\pi$$

2. $\displaystyle\int_L x\,\mathrm{d}s$,$L$ 为对数螺线 $r=a\mathrm{e}^{k\varphi}(k>0)$ 在圆 $r\leqslant a$ 内的部分

解 设 L 的参数方程为 $\begin{cases} r=\rho(\varphi)=a\mathrm{e}^{k\varphi} \\ \theta=\varphi \end{cases}$, 则

$$\rho'(\varphi)=ak\mathrm{e}^{k\varphi}$$

$$\begin{aligned}
\int_L x\,\mathrm{d}s &= \int_{-\infty}^{0} \rho\cos\theta\sqrt{\rho^2+\rho'^2}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{-\infty}^{0} a\mathrm{e}^{k\varphi}\cos\varphi\sqrt{a^2\mathrm{e}^{2k\varphi}+a^2k^2\mathrm{e}^{2k\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= a^2\sqrt{1+k^2}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2k\varphi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= a^2\sqrt{1+k^2}\frac{2k}{1+4k^2}
\end{aligned}$$

25.4 线积分 I 的轮换对称性

若 $(x,y,z)\to(y,z,x)\to(z,x,y)$ 时,L 的方程不便, 则称 L 具有轮换对称性. 则

$$\begin{aligned}
I &= \int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s=\int_L f(y,z,x)\,\mathrm{d}s=\int_L f(z,x,y)\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{3}\left(\int_L [f(x,y,z)+f(y,z,x)+f(z,x,y)]\,\mathrm{d}s\right)
\end{aligned}$$

对重积分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 以及面积分

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

也有类似的轮换对称性.

✍ **作业** ex11.1:1(1)(3)(4),2(2)(3)(10)(11)(12),3,4.