第7讲：偏导数与全微分(total differential)

(一)多元函数的偏导数(partial derivative)

在多元函数 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 中，设 $M_0(x_0,y_0)$，$M_1(x_0+\Delta x,y_0)$，$M_2(x_0,y_0+\Delta y)\in D$。则 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 是固定 y，仅让 x 发生变化，而使 z 产生的增量，而 $f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)$ 则是固定 x，只由 y 变动，从而使 z 产生的增量。

记 $\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，$\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$。

分别称作因变量 z 关于 x、y 的偏增量，并称极限：

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$、$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 分别为因变量 z 关于 x、y 的偏导数(在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的)，记作：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=f'_x(M_0)=f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\left.\left(f(x,y_0)\right)'_x\right|_{x_0}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=f'_y(M_0)=f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\left.\left(f(x_0,y)\right)'_y\right|_{y_0}$$

$f'_x(M_0)$、$f'_y(M_0)$ 实际上就是在点 M_0 处，因变量 z 分别关于 x、y 的相对自变量的变化率。

即：

$$f'_x(x_0,y_0)=\frac{df(x,y_0)}{dx}\Big|_{x_0},\quad f'_y(x_0,y_0)=\frac{df(x_0,y)}{dy}\Big|_{y_0}$$

同理，设 $u=f(x,y,z)$ 在 $U(M_0,\delta)$ 中有定义，则

$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=\frac{df(x,y_0,z_0)}{dx}\Big|_{x_0},\quad f'_y(x_0,y_0,z_0)=\frac{df(x_0,y,z_0)}{dy}\Big|_{y_0},$$

$$f'_z(x_0,y_0,z_0)=\frac{df(x_0,y_0,z)}{dz}\Big|_{z_0},$$ 余类推。

总之，多元函数的偏导数，就是将多元函数中其余的自变量固定，当把因变量对一个自变量求导的结果。

例1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，(1) 证明 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处不连续；(2) 证明 $f'_x(0,0)=0=f'_y(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处可偏导；(3) 求 $f'_x(1,1)$，$f'_y(2,1)$。

例2. 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，证明：(1) $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处连续；(2) $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处偏导数 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 不存在，即 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处不可偏导。

证例1(1). ∵ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在(见第1讲)，∴ $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处不连续；

证例1(2)：证法(1)：$f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-0}{\Delta x}$
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2\cdot 0}{(\Delta x)^4+0^2}\Big/\Delta x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$，同理 $f'_y(0,0)=0$.

证法(2)：$f'_x(0,0)=\left(f(x,0)\right)'_x\Big|_{x=0}=\left(\dfrac{x^2\cdot 0}{x^4+0^2}\right)'_x\Big|_{x=0}=(0)'_x\Big|_{x=0}=0$.

$f'_y(0,0)=\left(f(0,y)\right)'_y\Big|_{y=0}=\left(\dfrac{0^2 y}{0^4+y^2}\right)'_y\Big|_{y=0}=(0)'_y\Big|_{y=0}=0$.

解例1(3)：$f'_x(1,1)=\left(f(x,1)\right)'_x\Big|_{x=1}=\left(\dfrac{x^2\cdot 1}{x^4+1^2}\right)'_x\Big|_{x=1}=\dfrac{2x(x^4+1)-4x^3\cdot x^2}{(x^4+1)^2}\Big|_{x=1}$
$=0$；$f'_y(2,1)=\left(f(2,y)\right)'_y\Big|_{y=1}=\left(\dfrac{2^2 y}{2^4+y^2}\right)'_y\Big|_{y=1}=\dfrac{4(16+y^2)-2y(4y)}{(16+y^2)^2}\Big|_{y=1}=\dfrac{60}{17^2}$

证例2(1). ∵ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0,0)$，∴ $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处连续；

证例2(2)：∵ $f'_x(0,0)=\left(f(x,0)\right)'_x\Big|_{x=0}=\left(\sqrt{x^2+0^2}\right)'_x\Big|_{x=0}=(|x|)'_x\Big|_{x=0}$ 不存在，由对称性知，$f'_y(0,0)$ 也不存在。∴ $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处不可偏导。从上述例1、例2可知，二元函数的连续性与可偏导性之间没有关系。

(三) 多元函数全微分(total differential)与可微性：

设 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D\subset R^2$，D是区域，$M_0(x_0,y_0)$，$M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ $\in D$. 若存在常数 A，B，使 $z=f(x,y)$ 在 M_0 处的全增量可表为

$$\Delta z=f(M)-f(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=(A\Delta x+B\Delta y)+o(\rho),$$

其中，$\rho=\rho(M,M_0)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 是可微的，并称 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数：$A\Delta x+B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在 M_0 处的全微分，记作 $dz|_{M_0}=A\Delta x+B\Delta y=A(x-x_0)+B(y-y_0)$.

即在 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 可微的条件下，有

$$\Delta z=dz|_{M_0}+o(\rho)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho) \quad (*_1)$$

同理，若三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的全增量可表为：

$$\Delta u(\Delta z)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z+o(\rho)$$

其中，A，B，C为常数，$\rho=\rho(M_0,M)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$，则称 $u=f(x,y,z)$ 在点 M_0 处可微，且 $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$

称 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的全微分，记作

$du|_{M_0}=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$，即

$\Delta u=du|_{M_0}+o(\rho)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)+o(\rho)$ (续)

由二元以上的多元函数的可微性可类似地定义。

若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 中每一点可微，则称 $f(x,y)$ 在区域 D 上可微。

Th1：若 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $f(x,y)$ 在 M_0 处必连续，但反之未必。即连续是可微的必要条件。

Th2：若 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，则 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$ 必存在，且 $f'_x(x_0,y_0)=A$，$f'_y(x_0,y_0)=B$。即可偏导是可微的必要条件。

证Th1：(1) 若 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处 d，则有：

$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，当 $\begin{cases}\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0\end{cases}$ 时，

$A\Delta x+B\Delta y\to 0$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0\Rightarrow o(\rho)\to 0$，从而

$\Delta z \to 0$，即 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta z = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0)$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，即 $f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处 C；

(2°). 反例：函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $O(0,0)$ 处 C，但在 $O(0,0)$ 处不可微。（若可微，则 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $O(0,0)$ 处可偏导，矛盾！）

证 Th2：(1°) 已知 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微，从而

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

令 $\Delta y=0$，则 $f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) = \Delta z_x = A\Delta x + o(|\Delta x|) \Rightarrow$

$$\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A + \frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|}\cdot\frac{|\Delta x|}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x\to 0} A$$

即 $f'_x(x_0,y_0)$ 存在且 $f'_x(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x} = A$.

同理 $f'_y(x_0,y_0)$ 存在，且 $f'_y(x_0,y_0) = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y} = B$.

(2°). 反例：函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $O(0,0)$ 处可偏导，

且 $f'_x(x_0,y_0)=0$，$f'_y(x_0,y_0)=0$，但 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处不可微。

（理由：$f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处不连续，从而不可微）。

例3. 证明：$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $O(0,0)$ 处连续且可偏导，但 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处不可微。（ex9.2/16）

证(1)：$\because f(0,0)=0$，$x^2+y^2\geq 2|x||y| \Rightarrow 0\leq\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\dfrac{|x|^2|y|}{x^2+y^2}\leq\dfrac{|x|}{2}$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}0=0=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{2}|x|$，$\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=0\Leftrightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$，$\therefore f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处 C；

证(2)：$\because f_x(0,0)=f(x,0)'_x\big|_{x=0}=(0)'_x\big|_{x=0}=0$，$f_y(0,0)=f(0,y)'_y\big|_{y=0}$

$=(0)'_y\big|_{y=0}=0$，$\therefore f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处可偏导。

证(3). 反证法：若 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处可微，则全增量

$f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

即 $f(\Delta x,\Delta y)-0=0\Delta x+0\Delta y+o(\rho)=o(\rho)$，即

$\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=o(\rho)\Leftrightarrow\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{o(\rho)}{\rho}=0$

即 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}}=0$．但 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}}$ 不存在．

理由如下，若令$\Delta y=k\Delta x$，$k\neq 0$，k为常数，

则 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2 k\Delta x}{((\Delta x)^2+k^2(\Delta x)^2)^{\frac{3}{2}}}\xlongequal{\Delta x>0}\dfrac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$

与极限的结果不是唯一矛盾！故 $\lim\limits_{\rho\to 0}\dfrac{(\Delta x)^2\Delta y}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}}\neq 0$

即 $f(x,y)$ 在$O(0,0)$处不可微。

(三) 作业：ex9.2

3/(2)，(5)，(8)；3；4；6；13/(4)，(6)；16.

思考题：

设 $u=f(x,y,z)=x^{y^z}+x^{a^z}+a^{y^z}+x^{y^a}+a^{a^z}$ ($a>0$，常数)

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}$，及$u=f(x,y,z)$在点$M(1,1,1)$处的全微分。

注：思考题可不做在作业本上，可发表在课程群中。