Lec 26 第一类曲面积分

第一类曲面积分 (Surface Integral) 形如

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

其中 Σ 是空间曲面,$f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的连续函数,$\mathrm{d}S$ 是曲面元.

26.1 第一型曲面积分

设 Σ 为光滑曲面,$\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in C^1(D_{uv})$ 且 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v \neq \theta, \forall (u, v) \in D_{uv}$, 称这样的曲面 Σ 为正则曲面,$\varphi(x, y, z)$ 是曲面 Σ 上的连续函数,

定义 26.1

我们如此定义第一类曲面积分:

$$\iint_{\Sigma} \varphi(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

1. 分割:$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_n$, 设 Σ_i 的面积为 ΔS_i, 直径为 $d_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 记 $\lambda = \max\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$.
2. 近似: 在 Σ_i 上任取一点
$$(x(\xi_i, \eta_i), z(\xi_i, \eta_i)),$$
取
$$\varphi(x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i), z(\xi_i, \eta_i)) \cdot \Delta s_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$$
3. 求和, 记
$$I = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i), z(\xi_i, \eta_i)) \cdot \Delta S_i$$
4. 极限, 当 $\lambda \to 0$ 时, 如果
$$\lim_{\lambda \to 0} I = \iint_{\Sigma} \varphi(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$
存在且唯一, 则称 $\varphi(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上可积, 并称
$$\iint_{\Sigma} \varphi(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \varphi(x(\xi_i, \eta_i), y(\xi_i, \eta_i), z(\xi_i, \eta_i)) \cdot \Delta S_i$$
为第一类曲面积分.

♣

当 $\varphi(x, y, z)$ 是在 Σ 上的有界函数时, 上述极限可能存在唯一, 也可能不存在唯一. 但当 $\varphi(x, y, z)$ 在 Σ 上连续时, 上述极限存在唯一, 即 $\varphi(x, y, z)$ 在 Σ 上可积.

26.2 第一类曲面积分的主要性质

命题 26.1 (线性性质)

$$\iint_{\Sigma}(c_1 f+c_2 g)\,\mathrm{d}S=c_1\iint_{\Sigma} f\,\mathrm{d}S+c_2\iint_{\Sigma} g\,\mathrm{d}S$$

其中 c_1,c_2 为常数,f,g 为定义在 Σ 上的连续函数.

命题 26.2

曲面 Σ 的面积 $S(\Sigma)$ 为

$$S(\Sigma)=\iint_{\Sigma} 1\,\mathrm{d}S$$

命题 26.3 (积分中值定理)

设 Σ 为光滑曲面,$\varphi(x,y,z)\in C(\Sigma)$, 则存在 $M_0\in\Sigma$, 使得

$$\iint_{\Sigma}\varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\varphi(M_0)S(\Sigma)$$

也可以写为

$$\varphi(M_0)=\frac{1}{S(\Sigma)}\iint_{\Sigma}\varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

其中 $S(\Sigma)$ 为曲面 Σ 的面积.$\varphi(M_0)$ 表示了函数 $\varphi(x,y,z)$ 在 Σ 上的平均值.

命题 26.4 (积分区域可加性)

设 $\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_m$ 是两条不相交的光滑曲面, 且

$$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2\cup\cdots\cup\Sigma_m$$

此时有

$$\iint_{\Sigma}\varphi\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma_1}\varphi\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma_2}\varphi\,\mathrm{d}S+\cdots+\iint_{\Sigma_m}\varphi\,\mathrm{d}S$$

26.3 第一型曲面积分的计算

由

$$\mathrm{d}S=|\boldsymbol{r}_u'\,\mathrm{d}u\times\boldsymbol{r}_v'\,\mathrm{d}v|=|\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v'|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\sqrt{|\boldsymbol{r}_u'|^2\,|\boldsymbol{r}_v'|^2-(\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_v')^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

我们记

$$E=|\boldsymbol{r}_u'|^2=|(x_u',y_u',z_u')|^2=x_u'^2+y_u'^2+z_u'^2$$

$$G=|\boldsymbol{r}_v'|^2=|(x_v',y_v',z_v')|^2=x_v'^2+y_v'^2+z_v'^2$$

$$F=\boldsymbol{r}_u'\cdot\boldsymbol{r}_v'=x_u'x_v'+y_u'y_v'+z_u'z_v'$$

得

$$I=\iint_{\Sigma}\varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{uv}}\varphi(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

即第一型曲面积分是通过化为参数域 D_{uv} 上的二重积分来计算的, 证明方法域第一型线积分证明方法类似. 特别地, 当 Σ 为显式曲面 $z=z(x,y)\in C(D_{xy})$ 时, 可以将 x,y 作为参变量, 因此有

$$\boldsymbol{r}(x,y)=(x,y,z(x,y))\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{r}'_x=(1,0,z'_x)\\ \boldsymbol{r}'_y=(0,1,z'_y)\end{cases}$$

$$E=\left|\boldsymbol{r}'_x\right|^2=1+z'^2_x$$

$$G=\left|\boldsymbol{r}'_y\right|^2=1+z'^2_y$$

$$F=\boldsymbol{r}'_x\cdot\boldsymbol{r}'_y=z'_xz'_y$$

因此

$$\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{(1+z'^2_x)(1+z'^2_y)-(z'_xz'_y)^2}=\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}$$

故

$$I=\iint_{\Sigma}\varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\varphi(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

注 助教注: 不建议硬背 $\sqrt{EG-F^2}$, 而建议理解 $\mathrm{d}S$ 是如何变为 $\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ 的, 有时候计算叉乘 $\boldsymbol{r}'_u\times\boldsymbol{r}'_v$ 会比计算 $\sqrt{EG-F^2}$ 更简单.

例 26.1 计算球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$ 的面积 $S(\Sigma)$.

解 利用球面参数方程

$$\boldsymbol{r}(u,v)=(a\sin u\cos v,a\sin u\sin v,a\cos u),u\in[0,\pi],v\in[0,2\pi],$$

我们有

$$E=\left|\boldsymbol{r}'_u\right|^2=x'^2_u+y'^2_u+z'^2_u=a^2\cos^2u+a^2\sin^2u=a^2$$

$$G=\left|\boldsymbol{r}'_v\right|^2=x'^2_v+y'^2_v+z'^2_v=a^2\sin^u\sin^2v+a^2\sin^2u=a^2\sin^2u$$

$$F=\boldsymbol{r}'_u\cdot\boldsymbol{r}'_v=x'_ux'_v+y'_uy'_v+z'_uz'_v=0$$

因此

$$\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{a^2a^2\sin^2u}=a^2\sin u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

于是

$$S(\Sigma)=\iint_{\Sigma}1\,\mathrm{d}S=\iint_{D_{uv}}1\cdot a^2\sin u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\int_0^{\pi}\sin u\,\mathrm{d}u=4\pi a^2$$

解 事实上这里计算叉乘也未必麻烦, 我们有

$$\boldsymbol{r}'_u=(a\cos u\cos v,a\cos u\sin v,-a\sin u)$$

$$\boldsymbol{r}'_v = (-a\sin u\sin v, a\sin u\cos v, 0)$$

因此

$$\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a\cos u\cos v & a\cos u\sin v & -a\sin u \\ -a\sin u\sin v & a\sin u\cos v & 0 \end{vmatrix} = (a^2\sin^2 u\cos v, a^2\sin^2 u\sin v, a^2\sin u\cos u)$$

于是

$$\mathrm{d}S = |\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v| = \sqrt{(a^2\sin^2 u\cos v)^2 + (a^2\sin^2 u\sin v)^2 + (a^2\sin u\cos u)^2} = a^2\sin u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

其余计算同上.

解 我们也可以使用显式曲面, 设 Σ_1 为上半球面:$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 则有

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}$$

因此

$$\begin{aligned} S(\Sigma) &= 2\iint_{\Sigma_1} 1\,\mathrm{d}S \\ &= 2\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\overset{x=r\cos\theta, y=r\sin\theta}{=} 2\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - r^2}} r\,\mathrm{d}r \\ &= 4\pi a^2. \end{aligned}$$

例 26.2 设 Σ 是球面 $\Sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 被柱面 $\Sigma_2 : x^2 + y^2 = ax$ 截下的部分, 求 Σ 的面积 $S(\Sigma)$.

解 像上题最后一种解法一样, 我们设 Σ_{11} 为上半球面被柱面截下的部分. 还是有

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}$$

因此

$$\begin{aligned} S(\Sigma_1) &= 2\iint_{\Sigma_{11}} 1\,\mathrm{d}S \\ &= 2\iint_{x^2+y^2\leqslant ax} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\underset{r\leqslant a\cos\theta}{\overset{x=r\cos\theta, y=r\sin\theta}{=}} 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - r^2}} r\,\mathrm{d}r \\ &= 4a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right). \end{aligned}$$

26.4 对称性

第一型曲线积分 $\int_L \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s$, $\int_L \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}s$ 的奇偶对称性与轮换对称性:

1. 若 $\varphi(x,y) \in C(L)$, 且 $\varphi(x,y)$ 关于 y 为奇函数, 则当 L 关于坐标轴 $y=0$ 对称时, 有 $\int_L \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s = 0$.
2. 若 $\varphi(x,y) \in C(L)$, 且 $\varphi(x,y)$ 关于 x 为偶函数, 则当 L 关于坐标轴 $x=0$ 对称时, 有 $\int_L \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s$, 其中 L_1 为 L 在 $x=0$ 的对称部分.
3. 若 $\varphi(x,y) \in C(L)$ 且当 x,y 互换时 $\varphi(x,y)$ 不变, 则当 L 关于 $x=y$ 对称时, 有 $\int_L \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_L \varphi(y,x)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_L (\varphi(x,y)+\varphi(y,x))\,\mathrm{d}s$.

1. 若 $\varphi(x,y,z) \in C(L)$, 且 $\varphi(x,y,z)$ 关于 z 为奇函数, 则当 L 关于坐标面 $z=0$ 对称时, 有 $\int_L \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}s = 0$.
2. 若 $\varphi(x,y,z) \in C(L)$, 且 $\varphi(x,y,z)$ 关于 y 为偶函数, 则当 L 关于坐标面 $y=0$ 对称时, 有 $\int_L \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}s$, 其中 L_1 为 L 在 $y=0$ 的对称部分.
3. 若 $\varphi(x,y,z) \in C(L)$ 且当 $(x,y,z) \to (y,z,x) \to (z,x,y)$ 时,L 的方程不变, 则有第一型线积分的轮换对称性

$$\begin{aligned} I &= \int_L \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_L \varphi(y,z,x)\,\mathrm{d}s = \int_L \varphi(z,x,y)\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{3}\int_L [\varphi(x,y,z)+\varphi(y,z,x)+\varphi(z,x,y)]\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

第一型曲面积分 $\iint_\Sigma \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 也有类似的奇偶对称性与轮换对称性:

1. 若 $\varphi(x,y,z) \in C(\Sigma)$, 且 $\varphi(x,y,z)$ 关于 z 为奇函数, 则当 Σ 关于坐标面 $z=0$ 对称时, 有 $\iint_\Sigma \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S = 0$.
2. 若 $\varphi(x,y,z) \in C(\Sigma)$, 且 $\varphi(x,y,z)$ 关于 y 为偶函数, 则当 Σ 关于坐标面 $y=0$ 对称时, 有 $\iint_\Sigma \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S = 2\iint_{\Sigma_1} \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ_1 为 Σ 在 $y=0$ 的对称部分.
3. 若 $\varphi(x,y,z) \in C(\Sigma)$ 且当 $(x,y,z) \to (y,z,x) \to (z,x,y)$ 时,Σ 的方程不变, 则有第一型曲面积分的轮换对称性

$$\begin{aligned} I &= \iint_\Sigma \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma \varphi(y,z,x)\,\mathrm{d}S = \iint_\Sigma \varphi(z,x,y)\,\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{3}\iint_\Sigma [\varphi(x,y,z)+\varphi(y,z,x)+\varphi(z,x,y)]\,\mathrm{d}S \end{aligned}$$

例 26.3 计算 $I = \iint_\Sigma (x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在第一卦限内的部分.

解 由奇偶对称性, 设 Σ' 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 则

$$I=\frac{1}{8}\iint_{\Sigma}'(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

再由轮换对称性, 我们有

$$I=\frac{1}{8}\iint_{\Sigma}'\frac{1}{3}(2x^2+2y^2+2z^2)\,\mathrm{d}S=\frac{1}{12}\iint_{\Sigma}'(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\pi a^4$$

✍ **作业** ex11.2:1(1)(4)(6)(7),2(2)(3),3(1)(2).