

## Lec 24 重积分的计算与证明

### 24.1 对称性

三重积分  $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$  具有奇偶对称性, 其中  $f \in C^1(\Omega)$ ,  $\Omega$  是有界区域, 则有:

1. 若  $f(x, y, z)$  是关于  $z$  的奇函数, 即  $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ , 且  $\Omega$  关于  $z = 0$  的坐标面对称, 则  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0$ .
2. 若  $f(x, y, z)$  是关于  $z$  的偶函数, 即  $f(x, y, -z) = f(x, y, z)$ , 且  $\Omega$  关于  $z = 0$  的坐标面对称, 则  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 2 \iiint_{\Omega^+} f(x, y, z) dx dy dz$ , 其中  $\Omega^+$  是  $\Omega$  在  $z = 0$  上方的部分.
3. 若  $f(x, y, z)$  是关于  $x, y, z$  分别都是偶函数, 且  $\Omega$  关于  $x = 0, y = 0, z = 0$  的坐标面对称, 则  $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = 8 \iiint_{\Omega^+} f(x, y, z) dx dy dz$ , 其中  $\Omega^+$  是  $\Omega$  在第一卦限的部分.

### 24.2 例题

**例 24.1** 再次计算椭球体:  $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的体积.

**解** 设  $f(x, y, z) = 1$ , 则

$$f(x, y, z) = f(-x, y, z) = f(x, -y, z) = f(x, y, -z)$$

即  $f(x, y, z) = 1$  是关于  $x, y, z$  的偶函数, 且  $\Omega$  关于  $x = 0, y = 0, z = 0$  的坐标面对称, 因此有

$$V = \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz = 8 \iiint_{\Omega^+} 1 dx dy dz$$

其中  $\Omega^+$  是  $\Omega$  在第一卦限的部分.

作坐标变换  $x = ar \sin \theta \cos \varphi, y = br \sin \theta \sin \varphi, z = cr \cos \theta$ , 则

$$\Omega^+ = \{(r, \theta, \varphi) | r \leq 1, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

且  $dx dy dz = abcr^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ , 因此有

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 abcr^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4abc\pi}{3}$$

**例 24.2** 计算曲面  $\Sigma: (x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$  围成的区域  $\Omega$  的体积  $V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1 dx dy dz$ .

**解**

1. 从  $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y \geq 0$  可知, 区域  $\Omega$  仅在半空间  $y \geq 0$  中存在

## 2. 由于曲面

$$\Sigma: (x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$$

与曲面

$$\Sigma': ((-x)^2 + y^2)^2 + z^4 = y$$

$$\Sigma'': (x^2 + y^2)^2 + (-z)^4 = y$$

表示的曲面是同一个, 因此围成的区域  $\Omega$  也是同一个. 因此  $\Omega$  关于  $x = 0, z = 0$  的坐标面对称;

3. 由  $f(x, y, z) = 1$  关于  $x, z$  都是偶函数.

故有

$$V(\Omega) = 4 \iiint_{\Omega^+} 1 \, dx \, dy \, dz$$

其中  $\Omega^+$  是  $\Omega$  在第一卦限的部分.

作球坐标变换

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (r^2 \sin^2 \theta)^2 + (r^2 \cos^2 \theta)^2 \leq y = r \sin \theta \sin \varphi \Rightarrow 0 \leq r \leq \left( \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta} \right)^{\frac{1}{3}} \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\left(\frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}\right)^{\frac{1}{3}}} r^2 \sin \theta \, dr \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3} \left( \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta} \right) \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta} \, d\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 \theta \sec^2 \theta}{1 + \tan^4 \theta} \, d\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{1 + u^4} \, du \quad (u = \tan \theta) \\ &= \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u - \frac{1}{u}}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3} \end{aligned}$$

**例 24.3** 设  $(a, b, c) \neq \theta = (0, 0, 0)$  为常向量,  $f(x)$  为连续函数.  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . 证明:

$$\iiint_{\Omega} f(ax + by + cz) \, dx \, dy \, dz = \pi \int_{-R}^R f(\lambda u) (R^2 - u^2) \, du, \lambda = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} > 0$$

**证明** 设  $A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} & \frac{c}{\lambda} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  为正交矩阵, 即满足  $AA^T = I$ , 作正交变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} & \frac{c}{\lambda} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

则  $u = \frac{a}{\lambda}x + \frac{b}{\lambda}y + \frac{c}{\lambda}z$ , 且由

$$|AA^T| = |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = 1$$

知道 **Jacobian** 行列式

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \pm 1$$

且  $u^2 + v^2 + w^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ , 从而

$$\begin{aligned} & \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(ax + by + cz) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{-R}^R f(\lambda u) \, du \iint_{v^2+w^2 \leq R^2-u^2} dv \, dw \\ &= \pi \int_{-R}^R f(\lambda u) (R^2 - u^2) \, du \end{aligned}$$

**例 24.4**  $(a, b) \neq \theta = (0, 0)$ ,  $\lambda = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ , 证明:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax + by + c) \, dx \, dy = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} f(\lambda t + c) \, dt$$

**证明** 设  $A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$  为正交矩阵, 即  $A^T = A^{-1} \Rightarrow |A| = \pm 1$ , 于是

$$dx \, dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv = |A^{-1}| du \, dv = du \, dv$$

作正交变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

则  $u^2 + v^2 = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} AA^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 \leq 1$

从而

$$\begin{aligned}
 & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by+c) dx dy \\
 &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f(\lambda u+c) du dv \\
 &= \int_{-1}^1 f(\lambda u+c) du \iint_{v^2 \leq 1-u^2} dv \\
 &= 2 \int_{-1}^1 f(\lambda u+c) \sqrt{1-u^2} du
 \end{aligned}$$

**例 24.5** 证明:

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{x^2+y^2} dx dy < \left( \int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{t^2} dt \right)^2$$

**证明** 由奇偶对称性可知

$$\begin{aligned}
 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} e^{x^2+y^2} dx dy &= 4 \iint_{D_{11}} e^{x^2+y^2} dx dy \\
 \iint_{D_2} e^{x^2+y^2} dx dy &= 4 \iint_{D_{21}} e^{x^2+y^2} dx dy
 \end{aligned}$$

其中

$$D_1 : x^2 + y^2 \leq 1, D_2 : |x|, |y| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$D_{11}$  为  $D_1$  在第一象限的部分,  $D_{21}$  为  $D_2$  在第一象限的部分. 取  $D_0 = D_{11} \cap D_{21}$ , 则

$$S(D_1) = \pi = S(D_2) \Rightarrow S(D_{11}) = S(D_{21}) \Rightarrow S(D_{11} - D_0) = S(D_{21} - D_0)$$

而

$$\iint_{D_{11}-D_0} e^{x^2+y^2} dx dy < \iint_{D_{11}-D_0} e^1 dx dy = \iint_{D_{21}-D_0} e^1 dx dy < \iint_{D_{21}-D_0} e^{x^2+y^2} dx dy$$

因此

$$\iint_{D_{11}} e^{x^2+y^2} dx dy < \iint_{D_{21}} e^{x^2+y^2} dx dy$$

由此可知

$$\iint_{D_1} e^{x^2+y^2} dx dy < \iint_{D_2} e^{x^2+y^2} dx dy$$

### 作业

1. 用五种方法计算  $\Omega : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的体积  $V(\Omega)$ .
2. 计算  $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \cos(ax+by+c) dV$  与  $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} (ax+by+cz)^m dV$  其中  $(a, b, c) \neq \theta$  为常向量  $m \in N^*$ .
3. CH10:5,6,8.