Lec 14 多元函数的极值与最值

14.1 多元函数极值必要条件与充分条件

定理 14.1 (可微函数有极值的必要条件) 设 $z=f(x,y)$ 在 $\overline{U}(M_0,\delta)$ 中可微, 且 $f(M_0)$ 为 f 的极值, 则 $f'_x(M_0)=f'_y(M_0)=0$.

证明 设 $M_0(x_0,y_0)$ 为 f 的极小值点. 考虑函数

$$g(x)=f(x,y_0),x\in\overline{U}(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

则 $g(x)$ 在 x_0 处取得极小值, 故 $g'(x_0)=0$, 即 $f'_x(M_0)=0$. 同理可证 $f'_y(M_0)=0$.

这表示可微函数的极值点必是驻点, 可推广到 n 元函数.

定理 14.2 (二阶连续可微函数有极值的充分条件) 设 $z=f(x,y)\in C^2(\overline{U}(M_0,\delta))$, 且 $M_0(x_0,y_0)$ 为 f 的驻点, 即 $f'_x(M_0)=f'_y(M_0)=0$, 记 $A=f''_{xx}(M_0),B=f''_{xy}(M_0),C=f''_{yy}(M_0)$,$Hf(M_0)=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$, 则

1. $Hf(M_0)>0$,Hessian 矩阵正定, 即 $A>0,AC-B^2>0$, 则 f 在 M_0 处取得极小值.
2. $Hf(M_0)<0$,Hessian 矩阵负定, 即 $A<0,AC-B^2>0$, 则 f 在 M_0 处取得极大值.
3. $AC-B^2<0$,Hessian 矩阵不定, 则 f 在 M_0 处不取得极值.

证明 $\forall(x,y)\in\overline{U}(M_0,\delta)$, 记 $\begin{cases}h=x-x_0=\Delta x,\\ k=y-y_0=\Delta y.\end{cases}$, 由二阶 Taylor 公式

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left(Ah^2+2Bhk+Ck^2\right)+o(\rho^2)$$

其中 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$.

设 h,k 不全为零, 引进变量

$$u=\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h}{\rho},\quad v=\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{k}{\rho}$$

则

$$Q(h,k)=\rho^2\varphi(u,v)=\rho^2(Au^2+2Buv+Cv^2)$$

其中 $\varphi(u,v)=Au^2+2Buv+Cv^2$ 是定义在单位圆周 $u^2+v^2=1$ 上的连续函数. 当 Q 正定时,$\varphi(u,v)>0$ 对圆周上任意点 (u,v) 成立. 而单位圆周是一个有界闭集, 所以 $\varphi(u,v)$ 在圆周上的最小值 m 也是正的, 且 $Q\geqslant m\rho^2$, 即

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+o(\rho^2)\geqslant\rho^2\left(\frac{1}{2}m+\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right)$$

注意到上式右端括号内的值当 ρ 充分小时, 一定是正的, 所以有 $f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$. 即 (x_0,y_0) 是极小值点. 对于负定的情形, 证明是完全类似的.

当 $\Delta<0$ 时, 因为 Q 是不定的, 所以存在点 $(h_1,k_1),(h_2,k_2)$ 使得

$$Q(h_1,k_1)=\rho_1^2\varphi(u_1,v_1)>0,\quad Q(h_2,k_2)=\rho_2^2\varphi(u_2,v_2)<0$$

上述条件等价于 $\varphi(u_1,v_1)>0,\quad \varphi(u_2,v_2)<0$, 所以存在一个数 m 使得

$$\varphi(u_1,v_1)>m>0,\quad \varphi(u_2,v_2)<-m<0$$

即

$$Q(h_1,k_1)>m\rho_1^2,\quad Q(h_2,k_2)<-m\rho_2^2$$

令 $h=th_1,\ k=tk_1,\ 0\leqslant t\leqslant 1$, 则 $\rho=t\rho_1,Q(h,k)=t^2Q(h_1,k_1)>mt^2\rho_1^2$,

$$f(x_0+th_1,y_0+tk_1)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}Q(th_1,tk_1)+o(t^2\rho_1^2)>t^2\left(\frac{1}{2}m+\frac{o(t^2)}{t^2\rho_1^2}\right)$$

所以对充分小的 t, 上式右端括号内大于零. 也就是说 $f(x_0+th_1,y_0+tk_1)-f(x_0,y_0)>0$. 同样的道理, 存在一个充分小的 t, 使得 $f(x_0+th_2,y_0+tk_2)-f(x_0,y_0)<0$.

综上分析, 在 (x_0,y_0) 的任意小的邻域内, 既有大于 $f(x_0,y_0)$ 的值, 又有小于 $f(x_0,y_0)$ 的值, 所以 (x_0,y_0) 不是极值点.

关于半正定情形无法判断, 在此不再讨论. 不过我们可以用几个例子来说明半正定情形无法判别极值.

例 14.1 考虑下列函数在 $O(0,0)$ 处取值的情况:

1. $z=f(x,y)=x^2+y^2$,
2. $z=f(x,y)=x^3+y^3$,
3. $z=f(x,y)=x^4+y^4$.
4. $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
5. $z=f(x,y)=xy$.

解

1. $O(0,0)$ 为 f 的驻点, 且

$$A=f''_{xx}(0,0)=2,B=f''_{xy}(0,0)=0,C=f''_{yy}(0,0)=2$$

则

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}>0$$

故 $f(0,0)=0$ 为极小值.

2.

$$\begin{cases}f'_x=3x^2=0,\\ f'_y=3y^2=0.\end{cases}$$

. 故 $O(0,0)$ 为 f 的驻点, 且

$$A=f''_{xx}(0,0)=0,B=f''_{xy}(0,0)=0,C=f''_{yy}(0,0)=0$$

则 $\Delta=AC-B^2=0$, 无法由此判断 $f(0,0)$ 是否为极值.

对于任意的 $\delta > 0$, 在 $\overline{U}(0,\delta)$ 之中, 总有 $M_1, M_2 \in U(0,\delta)$, 使得

$$f(M_1) > 0 = f(0,0) = f(M_2)$$

故 $O(0,0)$ 不是极值.

3. $O(0,0)$ 为 f 的驻点, 且

$$A = f''_{xx}(0,0) = 0, B = f''_{xy}(0,0) = 0, C = f''_{yy}(0,0) = 0$$

无法由此判断 $f(0,0)$ 是否为极值.

但是不难看出 $\forall(x,y), f(x,y) \geqslant 0 = f(0,0)$, 故 $O(0,0)$ 为最小值, 当然是极小值.

4. $f(0,0) = 0$ 为 f 的极小值, 也是 f 的最小值, 但是

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h}$$

不存在, 故 $O(0,0)$ 不是驻点.

5. 从 $\begin{cases} f'_x = y = 0, \\ f'_y = x = 0. \end{cases}$ 得到驻点 $O(0,0)$, 但 $\forall \delta > 0, \exists (\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}), (\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2}) \in U(0,\delta)$ 使得 $f(\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}) = \frac{\delta^2}{4} > 0 = f(0,0) = f(\frac{\delta}{2}, -\frac{\delta}{2})$, 故 $O(0,0)$ 不是极值.

注 由上述例子可知,

- 驻点可以是极值点, 也可以不是极值点.
- 极值点可以是驻点, 也可以不是驻点.
- $\Delta = AC - B^2 = 0$ 时, 可以有极值, 也可以没有极值.

14.2 n 元函数的极值与最值

设 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个自变量,f 是一个 n 元函数. $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in C^3(D)$, 其中 D 是凸区域.$M_0(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0}) \in D$ 且 M_0 是 f 的一个驻点, 即

$$f'_{x_1}(M_0) = f'_{x_2}(M_0) = \cdots = f'_{x_n}(M_0) = 0$$

记 $a_{ij} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{M_0} = a_{ji}, i,j = 1, 2, \cdots, n$, 记

$$Hf(M_0) := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

1. $Hf(M_0) > 0$, 即 $Hf(M_0)$ 正定时,$f(M_0)$ 为 f 的极小值.
2. $Hf(M_0) < 0$, 即 $Hf(M_0)$ 负定时,$f(M_0)$ 为 f 的极大值.
3. 若 f 在凸的开区域 D 中仅有一个极小 (大) 值, 且无极大 (小) 值. 则此极值为 f 的最小

(大) 值.

4. 若 D 是有界的闭区域. 则 f 在 D 中科同时取最大值与最小值. 可先求出 f 在 D 内的所有可能的驻点 $M_1, M_2, \cdots, M_k$, 再求出 f 在这些驻点上的函数值 $f(M_1), f(M_2), \cdots, f(M_k)$, 其中 $f(M_1), f(M_2), \cdots, f(M_k)$ 中的最大值与最小值即为 f 在 D 中的最大值与最小值.

14.3 例题

例 14.2 在椭球面 $\Sigma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上取一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 求 M_0 处的切平面方程与三个坐标面围成的四面体 Ω 的体积的最小值.

解 设 M_0 位于第一卦限, 则 π 为

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1$$

则 $V(\Omega)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{a^2}{x_0}\right)\left(\dfrac{b^2}{y_0}\right)\left(\dfrac{c^2}{z_0}\right)=\dfrac{abc}{6}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}}$ 再利用平均值不等式, 得到

$$\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}} \geqslant \frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

故 $V(\Omega)$ 的最小值为 $\dfrac{abc}{6\sqrt{3}}$. 此时切平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\sqrt{3}$.

例 14.3 证明 $z=f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(x+y)}$ 在 $D:\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{cases}$ 中的最大值为 $4\mathrm{e}^{-2}$.

解

1. 在 D 内部仅有疑点 $M_1(1,1)$,
2. 在边界 $y=0$ 上 $f(x,0)=x^2\mathrm{e}^{-x}$ 有疑点 $x_1=0, x_2=2$,
3. 在边界 $x=0$ 上 $f(0,y)=y^2\mathrm{e}^{-y}$ 有疑点 $y_1=0, y_2=2$.

且

$$f(0,0)=0, \quad f(2,0)=4\mathrm{e}^{-2}=f(0,2), \quad f(1,1)=2\mathrm{e}^{-2}$$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(x+y)}=0$, 故 $f(x,y)$ 在 D 中的最大值为 $4\mathrm{e}^{-2}$.

✍ **作业** ex9.5:7(2)(5),8,11(2)(4),17;CH9:6,14.