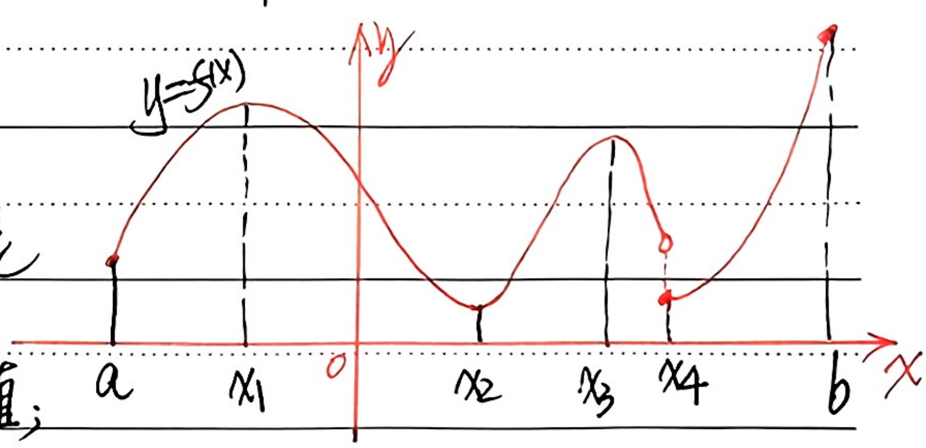
第16讲：微分中值定理 differential mean Value theorem

(一) 内点与函数的极值.

设 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，$x_0\in I$，且 $\exists\delta>0$ 使 $U(x_0,\delta)\subset I$，则称 x_0 是 I 的一个内点。若对 $\forall x\in U(x_0,\delta)$ $f(x)\le f(x_0)$ $(\ge f(x_0))$ 恒成立，则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个极大(小)值，极大值与极小值统称为极值。

注(1)：函数 $f(x)$ 的极值只能在内点处取到，在 I 的边界点上只可能有 $f(x)$ 的最值，而无极值。

注(2)：函数的极值是一个局部概念，因此，极大值也许比极小值还小。



如图所示，$f(x_1)$，$f(x_3)$ 是 $f(x)$ 在 $I=[a,b]$ 上的极大值；

$f(x_2)$，$f(x_4)$ 是 $f(x)$ 的极小值；$f(x_2)$ 同时也是 f 在 $[a,b]$ 上的最小值；

$f(b)$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的最大值，却不是极大值。

x_1，x_3 是 f 的极大值点，x_2，x_4 是 f 的极小值点。 (1)

夸克扫描王
极速扫描，就是高效

(三) 费尔马(Fermat)定理：

若 $y=f(x)$ 在区间 I 上定义，$x_0\in I$，且 $f(x_0)$ 是 f 在 I 上的一个极值，若 $f'(x_0)$ 存在，则必有 $f'(x_0)=0$，称这种使 $f'(x)=0$ 满足的 x_0 为 $f(x)$ 的驻点。

证：不妨设 $f(x_0)$ 是 f 在 I 上的一个极大值，即 $\exists\delta>0$，对 $\forall x\in U(x_0,\delta)\subset I$，$f(x)\leq f(x_0)$ 恒成立。$\Rightarrow$ 当 $x\in U(x_0,\delta)$ 且 $x<x_0$ 时，$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$ 恒成立。$\Rightarrow f'_-(x_0)=f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$；当 $x\in U(x_0,\delta)$ 且 $x>x_0$ 时，$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0\Rightarrow f'_+(x_0)=f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$，于是 $f'(x_0)=0$。

Fermat 告诉我们，可导的极值点一定是驻点。但驻点却未必是极值点。如 $y=f(x)=x^3$ 有驻点 $x=0$，但 $x=0$ 却不是 $f(x)$ 的极值点。

(三) 罗尔(Rolle)定理：若 $\begin{cases}(1)、f(x)\text{ 在 }[a,b]\text{ 上 C}\\(2)、f(x)\text{ 在 }(a,b)\text{ 中 d}\\(3)、f(a)=f(b)\end{cases}$，则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$，即曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 中必有水平的切线。

夸克扫描王
极速扫描，就是高效

证：$\because f\in[a,b]$ 中 C，$\therefore f\in[a,b]$ 上必取到最大值与最小值.

(1) 若 $f\in[a,b]$ 中为常数函数：$f(x)\equiv f(a)=f(b)$，$x\in[a,b]$. 则对 $\forall\xi\in(a,b)$，都有：$f'(\xi)=0$；

(2) 若 $f\in[a,b]$ 中不是常数函数. 则 $f\in[a,b]$ 中的最大值与最小值不可能 $\in[a,b]$ 的端点处同时取到。不妨设 $f\in[a,b]$ 上的最大值 $\in[a,b]$ 的内点 x_0 处取到，内点 x_0 处的最大值 $f(x_0)$ 必定也是 f 的极大值，且 $f'(x_0)$ 存在，依 Fermat Th，必有 $f'(x_0)=0$，取 $\xi=x_0$，则 $f'(\xi)=0$.

(四) 拉格朗日 (Lagrange) 微分中值 Th：若 $\begin{cases}(1)\ f\in[a,b] 中 C\\(2)\ f\in(a,b) 内 d\end{cases}$，则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

即曲线 $y=f(x)\in(a,b)$ 中必有平行于割线 AB 的切线。$\begin{cases}A(a,f(a))\\B(b,f(b))\end{cases}$

证：令 $F(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，$x\in[a,b]$.

则 $F\in[a,b]$ 中 C，$\in(a,b)$ 内 d，且 $F(a)=0=F(b)$，依 Rolle Th.

$\exists\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

夸克扫描王
极速扫描，就是高效

(五) 柯西(Cauchy)中值Th：若 $\begin{cases} ① f, g \in [a,b] 中C, \\ ② f, g \in (a,b) 内d, \\ ③ g'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b). \end{cases}$

则必存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证：令 $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$, $x \in [a,b]$.

则 ① $F \in [a,b]$ 中C, ② $F \in (a,b)$ 内d, ③ $F(a) = 0 = F(b)$. 由Rolle Th,

$\exists \xi \in (a,b)$, 使 $F'(\xi) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$. $\xi \in (a,b)$.

注(1). 当 $g(x) = x$, $x \in [a,b]$ 时, Cauchy中值Th 变为 Lagrange中值Th;

当 $f(a) = f(b)$ 时, Lagrange中值Th 变为 Rolle中值Th。

(六) "高阶微分求必须形式不变性"

例1. 设 $y = e^u$, $u = \sin x$, 则 $dy = de^u = e^u du = e^{\sin x} d(\sin x)$

$= e^{\sin x}\cos x dx$, $d^2y = d(dy) = d(e^{\sin x}\cos x dx) = (e^{\sin x}\cos x dx)' dx$

$= (e^{\sin x}\cos x)'(dx)^2 = (e^{\sin x}\cos^2 x - e^{\sin x}\sin x)(dx)^2 = e^{\sin x}(dx\cos x)^2 -$

$e^{\sin x}\sin x(dx)^2 = e^u(du)^2 - e^u u(dx)^2 \neq e^u(du)^2 = y''(u)(du)^2$

但当u是自变量时, 必有 $dy = y'(u)du = e^u du$, $d^2y = d(e^u du)$

$= (e^u du)' du = (e^u)'(du)^2 = e^u(du)^2 = y''(u)(du)^2$

夸克扫描王
极速扫描，就是高效

例2. 设 $y=e^u$，$u=ax+b$，a,b为常数.

(1) 当u是自变量时，$dy=(e^u)'du=e^u du$，$d^2y=d(e^u du)=(e^u du)'du$

$=(e^u)'(du)^2=e^u(du)^2=y''(u)(du)^2$；

(2) 当u是中间变量时，$y=e^{ax+b}$，$dy=(e^{ax+b})'dx=e^{ax+b}adx$

$=e^{ax+b}d(ax+b)=e^u du=y'(u)du$，

$d^2y=d(dy)=d(e^{ax+b}adx)=(e^{ax+b}adx)'dx=(e^{ax+b}a)'(dx)^2$

$=e^{ax+b}a^2(dx)^2=e^{ax+b}(adx)^2=e^u(du)^2=(e^u)''(du)^2=y''(u)(du)^2$

例2中，二阶微分的形式也具有不变性，但例1中，二阶微分的形式不具有不变性。

(2) 作业：

$EX3.3/1$；2；$4(1)$；$5(1)$；15；$19(2)$；$29(1),(2)$.

夸克扫描王
极速扫描，就是高效