Lec 6 多元函数的极限与连续性

6.1 多元函数的例子

多元函数形如 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是自变量,u 是因变量.

1. $z=ax+by+c,(x,y)\in\mathbb{R}^2=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},x^2+y^2\leqslant+\infty\}$: 平面方程;
2. $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},(x,y)\in D:x^2+y^2\leqslant R^2$: 上半球面;
3. $f(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$: 二元正态分布概率密度函数;
4. $u=\ln(a^2-x^2-y^2-z^2),x^2+y^2+z^2<a^2,\Omega:x^2+y^2+z^2<a^2$ 为开球体;
5. $B(x,y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t,x,y>0$: 贝塔函数.
6. $u=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$: n 元线性函数.
7. $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j,a_{ij}=a_{ji}$: $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数.

多元函数中, 最简单的是二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$. 且 $z=f(x,y)$ 有直观图像 — 空间的曲面. 因此, 二元函数是今后的重点讨论的多元函数.

6.2 平面点集的若干概念

二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集.

1. 点 M_0 的 δ 邻域 $\overline{U}(M_0,\delta):=\{M:|MM_0|=\rho(M,M_0)<delta\}$, 即 $\overline{U}(M_0,\delta)=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}\subset D$.
2. D 的内点 $M_0:M_0\in D$, 且 $\exists\delta>0$, 使得 $\overline{U}(M_0,\delta)\subset D$.
3. D 的外点 $M_0:M_0\notin D$, 且 $\exists\delta>0$, 使得 $\overline{U}(M_0,\delta)\cap D=\varnothing$.
4. D 的边界点 $M_0:M_0$ 的任意 δ 邻域中都同时含有 D 中点与 D^c 中点. 点集 D 的边界点全体记作 $\partial D:D$ 的边界.
5. 由全体内殿组成的点集称为开集, 开集 D 的余集 D^c 称为闭集. 闭集的余集是开集.
6. 连通性: 若 D 中任意两点 A,B 都可以用 D 中连续曲线连接, 则称 D 是联通的.
7. 开集若是联通的, 称之为开区域, 简称为区域, 开区域 D 与 D 的边界 ∂D 之并, 称之为闭区域, 记作 $\overline{D}=D\cup\partial D$. 注 讲义上此处写为 $\overline{D}=D+\partial D$. 两种写法是等价的.
8. 若 $\exists R>0$, 使得 $D\subset\overline{U}(0,R)$, 则称 D 是有界集.

例 6.1 $\overline{U}(M_0,\delta),\mathbb{R}^2,x^2+y^2+z^2<a^2$ 都是开集,$\overline{U}(M_0,\delta)^c,x^2+y^2+z^2<a^2$ 是有界集,$\mathbb{R}^2$ 是无界集. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\geqslant\delta^2,(R^2)^c=\varnothing,x^2+y^2+z^2\geqslant a^2$ 是闭集. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta^2,x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 是有界闭集.

例 6.2 空集 $\varnothing$ 由零个内点组合, 因此是开集;$\varnothing^c=\mathbb{R}^2$ 开, 因此 $\varnothing$ 是闭集. 在所有点集之中, 只有空集和全集是既开又闭的.

6.3 二元函数 $f(x,y)$ 的极限与连续性

1. 若 $\forall\delta>0, \overline{U}(M_0,\delta)$ 都有点集 D 中点, 则称 M_0 是 D 原点 (极限点),M_0 这个原点可以属于 D, 也可以不属于 D.
2. 设点 $M_0\in D$, 且 $\exists\delta>0$, 使得 $\overline{U}(M_0,\delta)$ 中除 M_0 无 D 中点, 则称 M_0 是 D 的孤立点.

定义 6.1

设 $z=f(x,y)$ 是定义在平面点集 D 上的二维函数，$M_0=(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，又设 a 是一个数。如果对任意给定的 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $M=(x,y)\in D$ 满足

$$0<\rho(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

或者

$$0<|x-x_0|<\delta,\quad 0<|y-y_0|<\delta$$

时，有

$$|f(M)-a|<\epsilon,$$

那么称当 M 趋于 M_0 时 $f(M)$ 以 a 为极限，记作

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=a.$$

也可以写成

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0,y\to y_0} f(x,y)=a.$$

♣

由于多元函数的极限与一元函数的极限定义的方式相同. 因此, 一元函数极限中的四则运算法则, 夹逼准则, 及极限的唯一性, 局部有界性, 保号性, 保序性等都可以推广到多元函数的极限之中来.

定义 6.2

设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的领域 $B(M_0,r)=\{M\mid\rho(M,M_0)<r\}$ 有定义, 如

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,$$

或者

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta$$

时, 就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$$

也就是说极限

$$\lim_{x\to x_0,y\to y_0} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0),$$

那么称 f 在 (x_0,y_0) 连续。如果 f 在区域 D 的每一个点连续，就称 f 在 D 上连续。♣

注 多元函数的一致连续性指的是 δ 与 ε 与点 M_0 无关, 具体而言, 若 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 使得 $\forall M_1, M_2 \in D$, 当 $\rho(M_1,M_2) < \delta$ 时, 有 $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon$, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续.

从定义可知, 若 M_0 是.

Lec 7 空间解析几何综述

,

7.1 坐标系的平移与旋转

例 7.1 设有二次曲面 $\Sigma: 4x^2+25y^2+4z^2-16x-50y-16z-4z=0$,

1. 指出 Σ 是何种二次曲面;
2. 将 Σ 一般化为参数式.

解

1. 配方得,$4(x-2)^2+25(y-1)^2+4(z-2)^2=100$, 即
$$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}+\frac{(z-2)^2}{5^2}=1$$
故 Σ 是一个旋转椭球面.
若令 $\begin{cases} x-2=x' \\ y-1=y' \\ z-2=z' \end{cases}$, $M_0=(2,1,2)=O'$, 即是将坐标系的原点平移到 M_0 点, 记作 O', 新的经过平行移动得到的坐标系为 $O'-x'y'z'$. 在新坐标系下,Σ 的方程为
$$\frac{x'^2}{5^2}+\frac{y'^2}{2^2}+\frac{z'^2}{5^2}=1$$
2. 若令 $\begin{cases} \dfrac{x'}{5}=\sin\theta\cos\varphi \\ \dfrac{y'}{2}=\sin\theta\sin\varphi \\ \dfrac{z'}{5}=\cos\theta \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x'=5\sin\theta\cos\varphi \\ y'=2\sin\theta\sin\varphi \\ z'=5\cos\theta \end{cases}$, $\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$ 即 Σ 的参数方程为
$$\begin{cases} x=2+5\sin\theta\cos\varphi \\ y=1+2\sin\theta\sin\varphi \\ z=2+5\cos\theta \end{cases},\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$$
其中 $\begin{cases} x'=5\sin\theta\cos\varphi \\ y'=2\sin\theta\sin\varphi \\ z'=5\cos\theta \end{cases}$, $\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$ 是在新坐标系下的参数式, $\begin{cases} x=2+5\sin\theta\cos\varphi \\ y=1+2\sin\theta\sin\varphi \\ z=2+5\cos\theta \end{cases}$ $[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$ 是在原坐标系下的参数式.

注 曲面 Σ 的参数式都是双参数的, 但是参数式不是唯一的, 例如

$$\begin{cases} x = 2 + 5\cos\theta\cos\varphi \\ y = 1 + 2\cos\theta\sin\varphi \\ z = 2 + 5\sin\theta \end{cases}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi]$$

也是 Σ 的参数式.

例 7.2 设有二次曲面 $\Sigma : xy = z$.

1. 指出 Σ 是何种二次曲面;
2. 求 Σ 的参数式.

解 若保持坐标系的原点不动, 让坐标系进行旋转变化. 设 $O - xyz$ 坐标系中, 基向量为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, 在 $O - x'y'z'$ 坐标系中, 基向量为 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$, 且 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ 与 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的夹角如下表所示:

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\boldsymbol{k}'$	α_3	β_3	γ_3

表 7.1

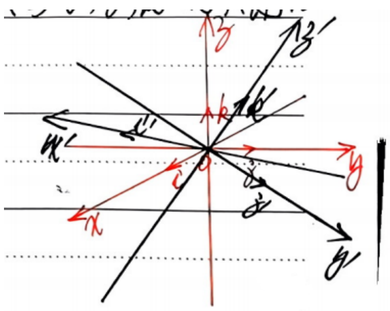

图 7.1

设 $\overrightarrow{OM} = (a, b, c) \neq \theta$, 则 $\overrightarrow{OM}^{\circ} = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = (\frac{a}{|\overrightarrow{OM}|}, \frac{b}{|\overrightarrow{OM}|}, \frac{c}{|\overrightarrow{OM}|}) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \cos\boldsymbol{i} + \cos\boldsymbol{j} + \cos\boldsymbol{k}$. 即单位向量 $\overrightarrow{OM}^{\circ}$ 可以用他的三个方向余弦作为坐标, 由表 5.1 得

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \cos\alpha_1\boldsymbol{i} + \cos\beta_1\boldsymbol{j} + \cos\gamma_1\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}' = \cos\alpha_2\boldsymbol{i} + \cos\beta_2\boldsymbol{j} + \cos\gamma_2\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k}' = \cos\alpha_3\boldsymbol{i} + \cos\beta_3\boldsymbol{j} + \cos\gamma_3\boldsymbol{k} \end{cases}$$

现设点 Q 在 $O-xyz$ 坐标系的坐标为 $Q(x, y, z)$, 在 $O-x'y'z'$ 坐标系的坐标为 $Q'(x', y', z')$, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}' \\ &= x'(\cos\alpha_1\boldsymbol{i} + \cos\beta_1\boldsymbol{j} + \cos\gamma_1\boldsymbol{k}) + y'(\cos\alpha_2\boldsymbol{i} + \cos\beta_2\boldsymbol{j} + \cos\gamma_2\boldsymbol{k}) + z'(\cos\alpha_3\boldsymbol{i} + \cos\beta_3\boldsymbol{j} + \cos\gamma_3\boldsymbol{k}) \\ &= (x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\boldsymbol{i} + (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\boldsymbol{j} + (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma \end{aligned}$$

也就是得到了

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos alpha_3 \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{cases}$$

若令 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{X}'$, 即 $\boldsymbol{X}' = A^{-1}\boldsymbol{X}$, 其中 A 的各行各列都是单位向量, 且任意两行 (列) 正交; 在线性代数中, 称 A 这样的矩阵为正交矩阵, 即 $AA^T = A^TA = I$, 其中 I 是单位矩阵. 称 **??** 为正交线性变化, 简称正交变换.

不难验证,$AA^T = A^TA = I$, 即便几何中的旋转或物理中刚体的旋转, 在代数中对应正交变换.**??**表明旋转之后, 原坐标 x, y, z 与新坐标 x', y', z' 之间的对应关系是正交变换关系.

1. 若保持 Oz 轴不便, 让 Oxy 坐标平面绕 z 轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, 得到了新坐标系 $O - x'y'z'$, 则有

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$
$\boldsymbol{j}'$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$
$\boldsymbol{k}'$	$\pi/2$	$\pi/2$	0

即有

$$\begin{cases} x = x'\cos\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{3\pi}{4} + z'\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = x'\cos\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} + z'\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ z = x'\cos\frac{\pi}{2} + y'\cos\frac{\pi}{2} + z'\cos 0 = z' \end{cases}$$

利用此正交变换, 可以将 $\Sigma : xy = z$ 化为 $\Sigma : \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') = z'$, 即 $z' = \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}$, 即 Σ 是一个双曲抛物面.

2. $\Sigma : xy = z$ 在原坐标系中的参数式为 $\begin{cases} x = x + 0y \\ y = 0x + y \\ z = xy \end{cases}$,x, y 为参数, 则 Σ 在新坐标系中的参数式为:$\begin{cases} x' = x' + 0y' \\ y' = 0x' + y' \\ z' = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) \end{cases}$,x', y' 为参数.

7.2 柱面坐标系与球面坐标系

7.2.1 柱面坐标系

$\mathbb{R}^3$ 空间中任一点 $Q(x,y,z)$ 都可以看作是在半径为 r 的某个圆柱面:$x^2+y^2=r^2$ 上. 而圆柱面 $x^2+y^2=r^2$ 上的点都可以用 r,θ,z 这三个参数来确定, 称 (r,θ,z) 为点 Q 的柱面坐标.

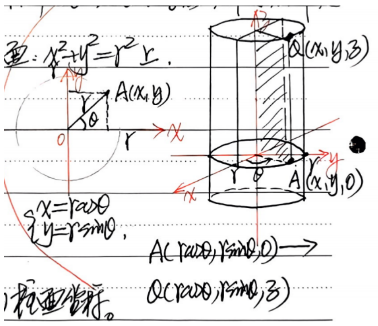

图 7.2

7.2.2 球面坐标系

$\mathbb{R}^3$ 空间中任一点 $Q(x,y,z)$ 都位于某个半径为 r 的球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 上, 其中 $r=|\overrightarrow{OQ}|$,$\overrightarrow{OQ}$ 与 Oz 轴的正向的夹角设为 θ,$\overrightarrow{OQ}$ 在 Oxy 平面中的投影与 Ox 轴正向夹角为 φ,$0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. 则 $y=|\overrightarrow{OA}|\sin\varphi=r\sin\theta\sin\varphi$, 而 $z=r\cos\theta$.

称 (r,θ,φ) 为点 Q 的球面坐标. 球面坐标 r,θ,φ 与直角坐标 x,y,z 之间的关系为

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases},\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi],r\geqslant 0$$

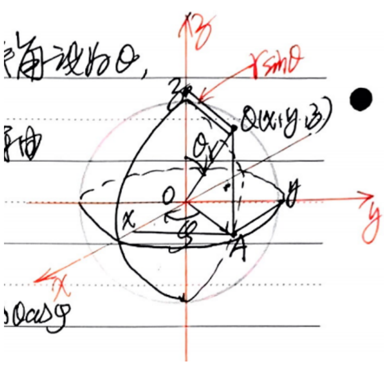

图 7.3

直角坐标系下的球面方程:$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 在柱面坐标系下 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ 化为 $\Sigma: r^2+z^2=R^2$, 即 $\Sigma: r=R$.

在球面坐标系中,$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$ 下, 化为 $x^2+y^2+z^2=r^2=R^2$, 即 $\Sigma: r=R$.

双叶双曲面 $\Sigma: x^2-y^2-z^2=1$ 在柱面坐标系中化为 $r^2\cos 2\theta-z^2=1$, 在球面坐标系中化为 $2x^2-(x^2+y^2+z^2)=2(r\sin\theta\cos\varphi)^2-r^2=r^2(2\sin^2\theta\cos^2\varphi-1)=1$.

7.3 空间曲线的参数式

空间曲线可以写为交线方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, 他可以改写为参数式.

例 7.3 将空间 $\mathbb{R}^3$ 中的大圆周 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, a>0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 化为参数式.

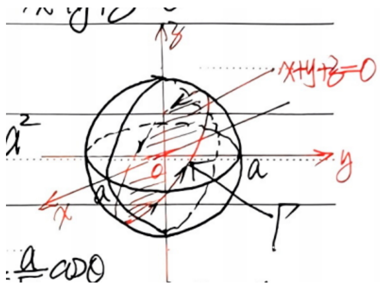

图 7.4

解 从 $z=-(x+y) \Rightarrow x^2+y^2+(x+y)^2=a^2 \Rightarrow x^2+xy+y^2=\frac{a^2}{2} \Rightarrow \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$. 令 $\begin{cases} x+\frac{y}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases}$,$\theta\in[0,2\pi]$. 则 $y=\frac{2}{\sqrt{6}}a\sin\theta \Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta) \Rightarrow z=-(x+y)=\frac{-a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)$. 即圆周 Γ 的参数式为 $\begin{cases} x=\frac{a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta) \\ y=\frac{2}{\sqrt{6}}a\sin\theta \\ z=\frac{-a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta) \end{cases}$,$\theta\in[0,2\pi]$.

若将 x 视为参数, 则从 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 中可以解出 $\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}, x\in I$.

例 7.4 空间中的直线 $\Gamma:\begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x-y-2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3=-x-5 \\ -y-2z=-x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=-3x-9 \\ z=2x+4 \end{cases}$.

注 空间的曲线 Γ 的参数式中只有一个参数, 且 Γ 的参数式不是唯一的.

例 7.5 $\Gamma:\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}, \theta\in[0,+\theta), a,b>0$ 所表示的空间光滑曲线, 称之为螺旋线. 并称 $k=2\pi b$ 为一个螺距.

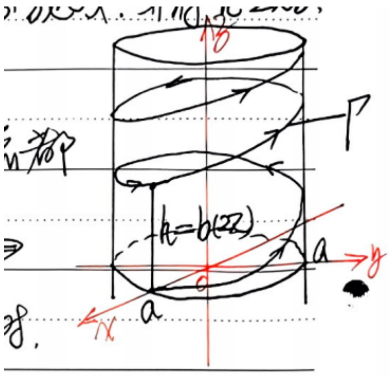

图 7.5

此题中 $x^2+y^2\equiv a^2$, 因此 Γ 上的点都在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上, 而从 $z=b\theta\Rightarrow z'_\theta\equiv b$, 即质点在作圆周运动的同时如果向上作匀速运动, 则综合的结果是沿螺旋线作运动.

无论是在物理中, 还是在几何中, 参数增加的方向被认为是曲线 Γ 的正向, 相反的方向是曲线的负向.

✍ **作业** ex8.4:1,2,4(4)(5)(6)(10),8,9,11.