# Lec 20 二重

# Lec 21 多元函数微分学复习小结

## 21.1 多元函数与一元函数

多元函数微分学相较于一元函数微分学, 不同之处在于多元函数的极限动点区域定点有无穷多种方式, 而一元函数的极限只有左右极限两种方式. 其他不同的性质基本由上述性质引申而来.

**例 21.1** 设 $z=f(x,y)$ 在区域 $D$ 中偏导数存在且有界, 即 $\exists M>0$, 使得 $\forall(x,y)\in D, |f_x'(x,y)|\leqslant M, |f_y'(x,y)|\leqslant M$, 则 $f$ 在 $D$ 中是连续的.

**证明** $\forall M_0(x_0,y_0)\in D$, 设 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$, 则

$$\begin{aligned}
\Delta z =& f(M)-f(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\
=&\left(f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\right)+\left(f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right)\\
=&f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y'(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\\
\leqslant& M\left(|\Delta x|+|\Delta y|\right)
\end{aligned}$$

当 $\Delta x,\Delta y\to 0$ 时, 有 $\Delta z\to 0$, 即 $f$ 在 $M_0$ 处连续.

## 21.2 例题

**例 21.2** 证明: 一切二次曲面 $\Sigma$

$$\Sigma: ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g=0$$

在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$ax_0x+by_0y+cz_0z+d\frac{x_0+x}{2}+e\frac{y_0+y}{2}+f\frac{z_0+z}{2}+g=0$$

其中 $a,b,c,d,e,f,g$ 为常数, 且 $a^2+b^2+c^2>0$.

**证明** 令 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g$, 则 $F$ 在 $M_0$ 处的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\nabla F\Big|_{M_0}=\left(F_x',F_y',F_z'\right)\Big|_{M_0}=(2ax_0+d,2by_0+e,2cz_0+f)$$

因此由点法式方程, 有切平面方程为

$$(2ax_0+d)(x-x_0)+(2by_0+e)(y-y_0)+(2cz_0+f)(z-z_0)=0$$

整理后可得

$$ax_0x+by_0y+cz_0z+d\frac{x_0+x}{2}+e\frac{y_0+y}{2}+f\frac{z_0+z}{2}+g=0$$

**例 21.3** 设有函数 $z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)$, 曲线

$$L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

其中 $M_0\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 为 $L$ 上的点, 记 $\boldsymbol{n}$ 为 $L$ 在 $M_0$ 处的法向量,$\boldsymbol{l}$ 为任意方向向量.

求 $\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{M_0}$, 并求 $\left(\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}\right)_{\max}$, $\left(\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}\right)_{\min}$.

**解** 设 $F(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$, 则 $F$ 在 $M_0$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{N}=\nabla F\Big|_{M_0}=\left(F_x',F_y'\right)\Big|_{M_0}=\frac{\sqrt{2}}{ab}(b,a)$$

取 $\boldsymbol{N}=(b,a)$, 则 $L$ 在 $M_0$ 处的内法向为 $\boldsymbol{n}=-bmN=(-b,-a)$, 则方向向量为 $\boldsymbol{n}^\circ=\left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. 又

$$\nabla z\Big|_{M_0}=\left(-\frac{2x}{a^2},-\frac{2y}{b^2}\right)\Big|_{M_0}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}\right)$$

且

$$\left(\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}\right)_{\max}=|\nabla z|_{M_0}=\left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}\right)\right|=\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}$$

$$\left(\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}\right)_{\min}=|\nabla z\cdot\boldsymbol{n}^\circ|_{M_0}=\left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}\right)\right|=\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}$$

**例 21.4** 在椭球面 $\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 求 $M_0$ 处的切平面方程与三个坐标面围成的四面体 $\Omega$ 的体积的最小值.

**解** 设 $M_0$ 位于第一卦限, 则 $\pi$ 为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

则 $V(\Omega)=\frac{1}{6}\left(\frac{a^2}{x_0}\right)\left(\frac{b^2}{y_0}\right)\left(\frac{c^2}{z_0}\right)=\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}}$ 再利用平均值不等式, 得到

$$\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}}\geqslant\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

故 $V(\Omega)$ 的最小值为 $\frac{abc}{6\sqrt{3}}$. 此时切平面方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\sqrt{3}$.

**例 21.5** 设 $(r_0,\theta_0,\varphi_0)$ 为点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的球坐标系, 即

$$\begin{cases}x_0=r_0\sin\theta_0\cos\varphi_0,\\ y_0=r_0\sin\theta_0\sin\varphi_0,\\ z_0=r_0\cos\theta_0.\end{cases}$$

其中 $r_0\in[0,+\infty)$, $\theta_0\in[0,\pi]$, $\varphi_0\in[0,2\pi)$. 证明:

1. 三个球坐标曲面 $\Sigma_1: r=r_0, \Sigma_2: \theta=\theta_0, \Sigma_3: \varphi=\varphi_0$ 在 $M_0$ 处两两正交
2. 三条球坐标曲线 $\Gamma_1: \begin{cases}\Sigma_1, \\ \Sigma_2\end{cases}, \Gamma_2: \begin{cases}\Sigma_1, \\ \Sigma_3\end{cases}, \Gamma_3: \begin{cases}\Sigma_2, \\ \Sigma_3\end{cases}$ 在 $M_0$ 处两两正交

证明

1. 实际上要验证的是, 三张曲面的法向量在 $M_0$ 处两两正交. $\Sigma_1$ 在球坐标系下的方程为 $r=r_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r_0$$

设 $F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-r_0^2$, 则 $F_1$ 在 $M_0$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\nabla F_1\Big|_{M_0}=(2x_0,2y_0,2z_0)$$

$\Sigma_2$ 在球坐标系下的方程为 $\theta=\theta_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos\theta_0$$

设 $F_2(x,y,z)=z^2-(x^2+y^2)\cos^2\theta_0$, 则 $F_2$ 在 $M_0$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2=\nabla F_2\Big|_{M_0}=\left(-2x_0\cos^2\theta_0,-2y_0\cos^2\theta_0,2z_0\right)$$

$\Sigma_3$ 在球坐标系下的方程为 $\varphi=\varphi_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\frac{y}{x}=\tan\varphi_0$$

设 $F_3(x,y,z)=y-x\tan\varphi_0$, 则 $F_3$ 在 $M_0$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_3=\nabla F_3\Big|_{M_0}=(-\tan\varphi_0,1,0)$$

而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2&=(2x_0,2y_0,2z_0)\cdot\left(-2x_0\cos^2\theta_0,-2y_0\cos^2\theta_0,2z_0\right)\\
&=-4x_0^2\cos^2\theta_0-4y_0^2\cos^2\theta_0+4z_0^2=0\\
\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_3&=(2x_0,2y_0,2z_0)\cdot(-\tan\varphi_0,1,0)\\
&=-2x_0\tan\varphi_0+2y_0=2\left(y_0-x_0\tan\varphi_0\right)=0\\
\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_3&=\left(-2x_0\cos^2\theta_0,-2y_0\cos^2\theta_0,2z_0\right)\cdot(-\tan\varphi_0,1,0)\\
&=2x_0\cos^2\theta_0\tan\varphi_0-2y_0\cos^2\theta_0=2\left(x_0\cos^2\theta_0\tan\varphi_0-y_0\cos^2\theta_0\right)\\
&=2\left(x_0\cos^2\theta_0\tan\varphi_0-y_0\cos^2\theta_0\right)=0
\end{aligned}$$

2. 要验证的是, 三条曲线的切向量 $\tau_1,\tau_2,\tau_3$ 在 $M_0$ 处两两正交. 其中

$$\tau_1 /\!/ \boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$$

因此又 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3$ 两两正交, 所以

$$\tau_1 /\!/ \boldsymbol{n}_3$$

同理可得 $\tau_2 /\!/ \boldsymbol{n}_2$,$\tau_3 /\!/ \boldsymbol{n}_1$, 所以 $\tau_1,\tau_2,\tau_3$ 两两正交.

**例 21.6** 设 $(r_0,\theta_0,z_0)$ 为点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的圆柱坐标系, 即

$$\begin{cases} x_0=r_0\cos\theta_0, \\ y_0=r_0\sin\theta_0, \\ z_0=z_0. \end{cases}$$

证明:

1. 三个圆柱坐标曲面 $\Sigma_1:r=r_0, \Sigma_2:\theta=\theta_0, \Sigma_3:z=z_0$ 在 $M_0$ 处两两正交
2. 三条圆柱坐标曲线 $\Gamma_1:\begin{cases}\Sigma_1,\\ \Sigma_2\end{cases}, \Gamma_2:\begin{cases}\Sigma_1,\\ \Sigma_3\end{cases}, \Gamma_3:\begin{cases}\Sigma_2,\\ \Sigma_3\end{cases}$ 在 $M_0$ 处两两正交

**证明**

1. 实际上要验证的是, 三张曲面的法向量在 $M_0$ 处两两正交. $\Sigma_1$ 在圆柱坐标系下的方程为 $r=r_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\sqrt{x^2+y^2}=r_0$$

设 $F_1(x,y,z)=x^2+y^2-r_0^2$, 则 $F_1$ 在 $M_0$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\nabla F_1\Big|_{M_0}=(2x_0,2y_0,0)$$

$\Sigma_2$ 在圆柱坐标系下的方程为 $\theta=\theta_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\frac{y}{x}=\tan\theta_0$$

设 $F_2(x,y,z)=y-x\tan\theta_0$, 则 $F_2$ 在 $M_0$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2=\nabla F_2\Big|_{M_0}=(-\tan\theta_0,1,0)$$

$\Sigma_3$ 在圆柱坐标系下的方程为 $z=z_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$z=z_0$$

设 $F_3(x,y,z)=z-z_0$, 则 $F_3$ 在 $M_0$ 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_3=\nabla F_3\Big|_{M_0}=(0,0,1)$$

而

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2&=(2x_0,2y_0,0)\cdot(-\tan\theta_0,1,0)\\ &=-2x_0\tan\theta_0+2y_0=2\left(y_0-x_0\tan\theta_0\right)=0\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_3&=(2x_0,2y_0,0)\cdot(0,0,1)=0\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_3&=(-\tan\theta_0,1,0)\cdot(0,0,1)=0 \end{aligned}$$

故三张曲面在 $M_0$ 处两两正交.

2. 曲线的正交同上述球坐标系中的正交.

**例 21.7** 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 确定的隐函数, 且 $x=1,y=1$ 时 $z=1$. 试将 $z(x,y)$ 在点 $M_0(1,1)$ 处展开为二阶 Taylor 公式.

**解** $z(x,y)$ 在 $M_0$ 处的二阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned}z(x,y)&=z(1,1)+(x-1)z'_x(1,1)+(y-1)z'_y(1,1)\\&+\frac{(x-1)^2}{2}z''_{xx}(1,1)+(x-1)(y-1)z''_{xy}(1,1)+\frac{(y-1)^2}{2}z''_{yy}(1,1)+o(\rho^2)\end{aligned}$$

对 $z^3-2xz+y=0$ 两边求微分, 得

$$3z^2\,\mathrm{d}z-2\left(x\,\mathrm{d}z+z\,\mathrm{d}x\right)+\mathrm{d}y=0$$

整理得

$$\mathrm{d}z=\frac{2z}{3z^2-2x}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{3z^2-2x}\,\mathrm{d}y$$

因此

$$z'_x=\frac{2z}{3z^2-2x},z'_y=\frac{1}{3z^2-2x}$$

对于 $z'_x,z'_y$ 求偏导数, 得

$$z''_{xx}=\frac{1}{(3z^2-2x)^2}\left(2z'_x(3z^2-2x)-2z(6zz'_x-2)\right)$$

$$z''_{xy}=\frac{1}{(3z^2-2x)^2}\left(2z'_y(3z^2-2x)-2z(6zz'_y)\right)$$

$$z''_{yy}=\frac{1}{(3z^2-2x)^2}\left(-(6zz'_y)\right)$$

代入 $x=1,y=1,z=1$ 得

$$z'_x=2,z'_y=-1$$

$$z''_{xx}=16,z''_{xy}=10,z''_{yy}=-6$$

故 $z(x,y)$ 在 $M_0(1,1)$ 处的二阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned}z(x,y)&=1+2(x-1)-(y-1)+\frac{16}{2}(x-1)^2+10(x-1)(y-1)-\frac{6}{2}(y-1)^2+o(\rho^2)\\&=1+2(x-1)-(y-1)+8(x-1)^2+5(x-1)(y-1)-3(y-1)^2+o(\rho^2)\end{aligned}$$

**例 21.8** 求旋转椭球面 $\Sigma:\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2=1$ 上距平面 $\pi:x+y+2z=9$ 最远和最近的点.

**解** 这是一个条件极值问题, 取 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$, 则 $M_0$ 到 $\pi$ 的距离 $d=\dfrac{|x_0+y_0+2z_0-9|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{|x_0+y_0+2z_0-9|}{\sqrt{6}}$. 取目标函数

$$f(x,y,z)=(x+y+2z-9)^2$$

条件为

$$g(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+y^2+z^2-1=0$$

作 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} L'_x = 2(x+y+2z-9)+\lambda\dfrac{x}{2}=0 \\ L'_y = 2(x+y+2z-9)+\lambda 2y=0 \\ L'_z = 4(x+y+2z-9)+\lambda 2z=0 \\ L'_\lambda = \dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\pm\dfrac{4}{3} \\ y_0=\pm\dfrac{1}{3} \\ z_0=\pm\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$M_1(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 为最近点,$d=\sqrt{6}$,

$M_2(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ 为最远点,$d=2\sqrt{6}$.

✍ **作业** ex9.5:5,7(5),8,10(3),11(2),16,17,19.