Lec 12 多元函数微分学的几何应用

12.1 空间曲线的切线 (tangent) 与法平面 (normal plane)

12.1.1 向径式

定义 12.1 (光滑曲线)

设 Γ 的方程为向径式:$(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in C^1(I)$, 且 $r'(t) \neq \mathbf{0}$, 称这样的曲线 Γ 为光滑曲线.

♣

定义 12.2 (逐段光滑曲线)

由有限段光滑曲线连接而成的曲线称为逐段光滑曲线.

♣

定义 12.3 (切向量)

设 $M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)), M(x(t_0+\Delta t), y(t_0+\Delta t), z(t_0+\Delta t)) \in \Gamma$, 若极限

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t_0+\Delta t) - (t_0)}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(x(t_0+\Delta t) - x(t_0), y(t_0+\Delta t) - y(t_0), z(t_0+\Delta t) - z(t_0))}{\Delta t} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$$
$$\triangleq \boldsymbol{\tau}$$

存在, 则记 $\boldsymbol{\tau} =$ 为 Γ 在切点 M_0 处切线 T 的切向量.

♣

注 切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向恒指向参数 t 增加的方向, 即恒指向质点运动的运动方向.

由直线点向式知:Γ 上过切点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切线 T 方程为:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

而过 M_0 且垂直于 T 的 Γ 的法平面 π 为:

$$x'(t_0)(x-x_0) = y'(t_0)(y-y_0) = z'(t_0)(z-z_0) = 0,$$

其中,$M(x,y,z)$ 是法平面 π 中的动点坐标组成的点.

12.1.2 交面式

设 Γ 的交面式:$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0; \end{cases}$ 其中,$F,G\in C^1$ 且 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y\partial z)}\neq 0$, 依隐函数组存在定理,

该方程组唯一确定函数组 $\begin{cases} x=x, \\ y=y(x), \\ z=z(x); \end{cases}$ 且 $y'(x)=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x\partial z)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y\partial z)}, z'(x)=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y\partial z)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y\partial z)}$.

令 $=(x,y(x),z(x))$, 则 $\tau=' (x)=(1,y'(x),z'(x))\neq\mathbf{0}$. 此时,$\Gamma$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线下的方程为:

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

而过切点 M_0 的法平面 π 为

$$1(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$$

其中,$y'(x_0)=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x\partial z)}\right|_{M_0}\Big/\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y\partial z)}\right|_{M_0}, z'(x)=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y\partial z)}\right|_{M_0}\Big/\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y\partial z)}\right|_{M_0}$

12.2 曲面 Σ 的切平面与法线 N

12.2.1 隐式曲面

定义 12.4 (光滑曲面)

设曲面 Σ 为隐式曲面 $F(x,y,z)=0$, 而 $F\in C^1$, 且 $\nabla F=(F_x',F_y',F_z')\neq 0$. 称这样的曲面 Σ 为光滑曲面. ♣

定义 12.5 (逐片光滑曲面)

由有限段光滑曲面连接而成的曲面为逐片光滑曲面. ♣

例如长方体表面, 四面体表面均为逐片光滑曲面.

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma,\Gamma_1:1(t)=(x_1(t),y_1(t),z_1(t)),\Gamma_2:2(t)=(x_2(t),y_2(t),z_2(t))$ 是 Σ 中过点 M_0 的任意两条光滑曲线, 从而

$$\begin{cases} F(x_1(t),y_1(t),z_1(t))\equiv 0 \\ F(x_2(t),y_2(t),z_2(t))\equiv 0 \end{cases}$$

两边对 t 求导有

$$\begin{cases} F_x'(M_0)x_1'(t)+F_y'(M_0)y_1'(t)+F_z'(M_0)z_1'(t)=0 \\ F_x'(M_0)x_2'(t)+F_y'(M_0)y_2'(t)+F_z'(M_0)z_2'(t)=0 \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{\tau}_1=(x_1'(t_0),y_1'(t_0),z_1'(t_0)),\boldsymbol{\tau}_2=(x_2'(t_0),y_2'(t_0),z_2'(t_0),\boldsymbol{n}(M_0)=(F_x'(M_0),F_y'(M_0),F_z'(M_0))=$

$(F'_x, F'_y, F'_z)\Big|_{M_0} = \nabla F\Big|_{M_0}$, 则 $\boldsymbol{n}(M_0) = \nabla F\Big|_{M_0} \neq \mathbf{0}$, 且 $\boldsymbol{n}(M_t) = \boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2$. 即向量 $\boldsymbol{n}(M_0)$ 是由 $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ 确定的平面 π 的法向量. 由 Γ_1, Γ_2 在 Σ 内的任意性可知,Σ 内过点 M_0 的所有曲线 Γ 在 M_0 处的切线都共面, 由过点 M_0 的所有切线组成的平面 π 称之为曲面 Σ 在点 M_0 处的切平面, 由点法式知,π 的方程为:

$$F'_x(M_0)(x-x_0) + F'_y(M_0)(y-y_0) + F'_z(z-z_0) = 0$$

或

$$\nabla F\big|_{M_0} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$M(x,y,z)$ 是切平面 π 中的动点,$\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, 过切点 M_0 垂直于切平面 π 的直线——法线 N 的方程:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

或

$$\nabla F\Big|_{M_0} \times \overrightarrow{M_0M} = \mathbf{0}$$

12.2.2 显式曲面

当曲面为显式曲面

$$\Sigma : z = f(x,y) \in C^1(D)$$

时, 设 $M_0(x_0,y_0,z_0) \in \Sigma$, 则 $z_0 = f(x_0,y_0) = f(P_0), P_0(x_0,y_0)$. 此时

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z, \boldsymbol{n}(M_0) = (F'_x, F'_y, F'_z)\Big|_{M_0} = (f'_x(P_0), f'_y(P_0), -1) \neq \mathbf{0}$$

. 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面 $\pi : f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(p_0)(y-y_0) - (z-z_0) = 0$. 而 $f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(p_0)(y-y_0)$ 恰好是 $z = f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{P_0}$.

设 $P(x,y)$ 是 $P_0(x_0,y_0)$ 邻近的一点,$P(x,y) \in D$. 则曲面 $z = f(x,y)$ 的 $\Delta z = f(P) - f(P_0) = f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) + o(\rho), \rho = |\overrightarrow{P_0P}|$, 当 ρ 较小时, 有曲面 $\Delta z \approx f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) = \mathrm{d}z\big|_{P_0} =$ 切平面的Δz[1]. 即在点 M_0 的局部范围内, 曲面 Σ 可用点 M_0 的切平面 π 来代替. 即局部可线性化.

$$\Delta z \approx f'_x(P_0)(x-x_0)^1 + f'_y(P_0)(y-y_0)^1, \rho > 0\text{比较小时成立}$$

12.2.3 向径式

设 Σ 的向径式:

$$\Sigma : (u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,z)) \in C^1(D_{u,v1})$$

[1]正如我们所提到过的, 不建议将 $\mathrm{d}z\big|_{P_0}$ 理解成线性主部 $f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0)$, 更准确的表达应当是 $\mathrm{d}z\big|_{P_0}(x-x_0, y-y_0) = f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0)$ 类似这样的表述, 当然这里领会精神即可

且 $\boldsymbol{\tau}_u = v(u,v) = (x'_u, y'_u, z'_u) \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\tau}_v = v(u,v) = (x'_v, y'_v, z'_v) \neq \mathbf{0}$ 则过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}(M_0) = \boldsymbol{\tau}_u \times \boldsymbol{\tau}_v\Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}_{M_0} = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u\partial v)}, \frac{\partial(z,x)}{\partial(u\partial v)}, \frac{\partial(x,y)}{\partial(u\partial v)}\right)$

π 的方程:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u\partial v)}\Big|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u\partial v)}\Big|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u\partial v)}\Big|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0$$

或用向量式表示为

$$(\boldsymbol{\tau}_u \times \boldsymbol{\tau}_v)\Big|_{M_0} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$M(x,y,z)$ 是切平面 π 中的动点, 过点 M 且垂直于 π 的法线 $N : (\boldsymbol{\tau}_u \times \boldsymbol{\tau}_v)\Big|_{M_0} \times \overrightarrow{M_0M} = \mathbf{0}$

12.3 例题

例 12.1 证明: 二次曲面 $\Sigma : Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ 在其任一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面 π 的方程为

$$Ax_0x + By_0y + Cz_0z + D\frac{x_0 + x}{2} + E\frac{y_0 + y}{2} + F\frac{z_0 + z}{2} + G = 0$$

例 12.2 证明: 二次曲线 $\Gamma : Ax^2 + B^2 + Cx + Dy + E = 0$ 上点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的切线 T 的方程为

$$Ax_0x + By_0y + C\frac{x_0 + x}{2} + D\frac{y_0 + y}{2} + E = 0$$

✍ **作业** ex9.4:3,4,8(1)(4),9,11,16(1),17(2).