

Lec 5 空间解析几何综述

5.1 坐标系的平移与旋转

例 5.1 设有二次曲面 $\Sigma: 4x^2 + 25y^2 + 4z^2 - 16x - 50y - 16z - 4z = 0$,

1. 指出 Σ 是何种二次曲面;
2. 将 Σ 一般化为参数式.

解

1. 配方得, $4(x-2)^2 + 25(y-1)^2 + 4(z-2)^2 = 100$, 即

$$\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} + \frac{(z-2)^2}{5^2} = 1$$

故 Σ 是一个旋转椭球面.

若令 $\begin{cases} x-2 = x' \\ y-1 = y' \\ z-2 = z' \end{cases}$, $M_0 = (2, 1, 2) = O'$, 即是将坐标系的原点平移到 M_0 点, 记作 O' , 新

的经过平行移动得到的坐标系为 $O' - x'y'z'$. 在新坐标系下, Σ 的方程为

$$\frac{x'^2}{5^2} + \frac{y'^2}{2^2} + \frac{z'^2}{5^2} = 1$$

2. 若令 $\begin{cases} \frac{x'}{5} = \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{y'}{2} = \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{z'}{5} = \cos \theta \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x' = 5 \sin \theta \cos \varphi \\ y' = 2 \sin \theta \sin \varphi \\ z' = 5 \cos \theta \end{cases}$, $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$ 即 Σ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + 5 \sin \theta \cos \varphi \\ y = 1 + 2 \sin \theta \sin \varphi \\ z = 2 + 5 \cos \theta \end{cases}, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$$

其中 $\begin{cases} x' = 5 \sin \theta \cos \varphi \\ y' = 2 \sin \theta \sin \varphi \\ z' = 5 \cos \theta \end{cases}$, $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$ 是在新坐标系下的参数式, $\begin{cases} x = 2 + 5 \sin \theta \cos \varphi \\ y = 1 + 2 \sin \theta \sin \varphi \\ z = 2 + 5 \cos \theta \end{cases}$, $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$ 是在原坐标系下的参数式.

注 曲面 Σ 的参数式都是双参数的, 但是参数式不是唯一的, 例如

$$\begin{cases} x = 2 + 5 \cos \theta \cos \varphi \\ y = 1 + 2 \cos \theta \sin \varphi \\ z = 2 + 5 \sin \theta \end{cases}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi]$$

也是 Σ 的参数式.

例 5.2 设有二次曲面 $\Sigma: xy = z$.

1. 指出 Σ 是何种二次曲面;
2. 求 Σ 的参数式.

解 若保持坐标系的原点不动, 让坐标系进行旋转变换. 设 $O-xyz$ 坐标系中, 基向量为 i, j, k , 在 $O-x'y'z'$ 坐标系中, 基向量为 i', j', k' , 且 i', j', k' 与 i, j, k 的夹角如下表所示:

	i	j	k
i'	α_1	β_1	γ_1
j'	α_2	β_2	γ_2
k'	α_3	β_3	γ_3

表 5.1

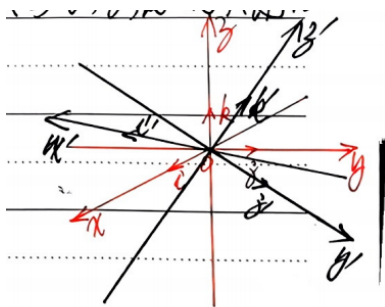


图 5.1

设 $\overrightarrow{OM} = (a, b, c) \neq \theta$, 则 $\overrightarrow{OM}^\circ = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = (\frac{a}{|\overrightarrow{OM}|}, \frac{b}{|\overrightarrow{OM}|}, \frac{c}{|\overrightarrow{OM}|}) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \cos i + \cos j + \cos k$. 即单位向量 $\overrightarrow{OM}^\circ$ 可以用他的三个方向余弦作为坐标, 由表 5.1 得

$$\begin{cases} i' = \cos \alpha_1 i + \cos \beta_1 j + \cos \gamma_1 k \\ j' = \cos \alpha_2 i + \cos \beta_2 j + \cos \gamma_2 k \\ k' = \cos \alpha_3 i + \cos \beta_3 j + \cos \gamma_3 k \end{cases}$$

现设点 Q 在 $O-xyz$ 坐标系的坐标为 $Q(x, y, z)$, 在 $O-x'y'z'$ 坐标系的坐标为 $Q'(x', y', z')$, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= xi + yj + zk = x'i' + y'j' + z'k' \\ &= x'(\cos \alpha_1 i + \cos \beta_1 j + \cos \gamma_1 k) + y'(\cos \alpha_2 i + \cos \beta_2 j + \cos \gamma_2 k) + z'(\cos \alpha_3 i + \cos \beta_3 j + \cos \gamma_3 k) \\ &= (x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3)i + (x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3)j + (x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3)k \end{aligned}$$

也就是得到了

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \alpha_2 + z' \cos \alpha_3 \\ y = x' \cos \beta_1 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \beta_3 \\ z = x' \cos \gamma_1 + y' \cos \gamma_2 + z' \cos \gamma_3 \end{cases}$$

若令 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, 则有 $\mathbf{X} = A\mathbf{X}'$, 即 $\mathbf{X}' =$

$A^{-1}\mathbf{X}$, 其中 A 的各行各列都是单位向量, 且任意两行(列)正交; 在线性代数中, 称 A 这样的矩阵为正交矩阵, 即 $AA^T = A^T A = I$, 其中 I 是单位矩阵. 称 ?? 为正交线性变化, 简称正交变换.

不难验证, $AA^T = A^T A = I$, 即便几何中的旋转或物理中刚体的旋转, 在代数中对应正交变换. ?? 表明旋转之后, 原坐标 x, y, z 与新坐标 x', y', z' 之间的对应关系是正交变换关系.

1. 若保持 Oz 轴不便, 让 Oxy 坐标平面绕 z 轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, 得到了新坐标系 $O-x'y'z'$, 则有

	i	j	k
i'	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$
j'	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$
k'	$\pi/2$	$\pi/2$	0

即有

$$\begin{cases} x = x' \cos \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{3\pi}{4} + z' \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = x' \cos \frac{\pi}{4} + y' \cos \frac{\pi}{4} + z' \cos \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ z = x' \cos \frac{\pi}{2} + y' \cos \frac{\pi}{2} + z' \cos 0 = z' \end{cases}$$

利用此正交变换, 可以将 $\Sigma: xy = z$ 化为 $\Sigma: \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = z'$, 即 $z' = \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}$, 即 Σ 是一个双曲抛物面.

2. $\Sigma: xy = z$ 在原坐标系中的参数式为 $\begin{cases} x = x + 0y \\ y = 0x + y \\ z = xy \end{cases}$, x, y 为参数, 则 Σ 在新坐标系中的

$$\text{参数式为: } \begin{cases} x' = x' + 0y' \\ y' = 0x' + y' \\ z' = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) \end{cases}, x', y' \text{ 为参数.}$$

5.2 柱面坐标系与球面坐标系

5.2.1 柱面坐标系

\mathbb{R}^3 空间中任一点 $Q(x, y, z)$ 都可以看作是在半径为 r 的某个圆柱面: $x^2 + y^2 = r^2$ 上. 而圆柱面 $x^2 + y^2 = r^2$ 上的点都可以用 r, θ, z 这三个参数来确定, 称 (r, θ, z) 为点 Q 的柱面坐标.

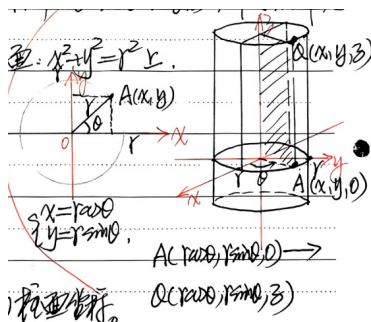


图 5.2

5.2.2 球面坐标系

\mathbb{R}^3 空间中任一点 $Q(x, y, z)$ 都位于某个半径为 r 的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 上, 其中 $r = |\overrightarrow{OQ}|$, \overrightarrow{OQ} 与 Oz 轴的正向的夹角设为 θ , \overrightarrow{OQ} 在 Oxy 平面中的投影与 Ox 轴正向夹角为 φ , $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. 则 $y = |\overrightarrow{OA}| \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi$, 而 $z = r \cos \theta$.

称 (r, θ, φ) 为点 Q 的球面坐标. 球面坐标 r, θ, φ 与直角坐标 x, y, z 之间的关系为

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi], r \geq 0$$

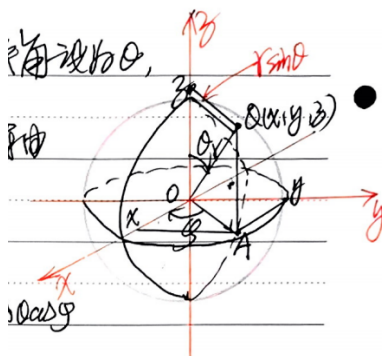


图 5.3

直角坐标系下的球面方程: $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 在柱面坐标系下 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$ 化为

$\Sigma: r^2 + z^2 = R^2$, 即 $\Sigma: r = R$.

在球面坐标系中, $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$ 下, 化为 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = R^2$, 即 $\Sigma: r = R$.

双叶双曲面 $\Sigma: x^2 - y^2 - z^2 = 1$ 在柱面坐标系中化为 $r^2 \cos 2\theta - z^2 = 1$, 在球面坐标系中化为 $2x^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(r \sin \theta \cos \varphi)^2 - r^2 = r^2(2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1) = 1$.

5.3 空间曲线的参数式

空间曲线可以写为交线方程组 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 他可以改写为参数式.

例 5.3 将空间 \mathbb{R}^3 中的大圆周 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, a > 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 化为参数式.

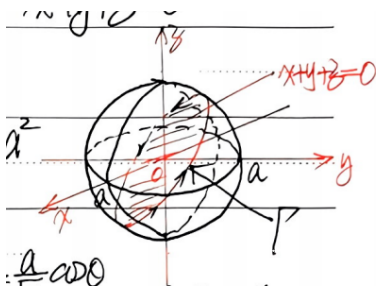


图 5.4

解 从 $z = -(x + y) \Rightarrow x^2 + y^2 + (x + y)^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 =$

$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$. 令 $\begin{cases} x + \frac{y}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi]$. 则 $y = \frac{2}{\sqrt{6}}a \sin \theta \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) \Rightarrow$

$z = -(x + y) = \frac{-a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta)$. 即圆周 Γ 的参数式为 $\begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta) \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}}a \sin \theta \\ z = \frac{-a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta) \end{cases}, \theta \in$

$[0, 2\pi]$.

若将 x 视为参数, 则从 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ 中可以解出 $\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}, x \in I.$

例 5.4 空间中的直线 $\Gamma: \begin{cases} x + y + z + 5 = 0 \\ x - y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3 = -x - 5 \\ -y - 2z = -x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -3x - 9 \\ z = 2x + 4 \end{cases}.$

注 空间的曲线 Γ 的参数式中只有一个参数, 且 Γ 的参数式不是唯一的.

例 5.5 $\Gamma: \begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = b\theta \end{cases}, \theta \in [0, +\infty), a, b > 0$ 所表示的空间光滑曲线, 称之为螺旋线. 并称 $k = 2\pi b$ 为一个螺距.

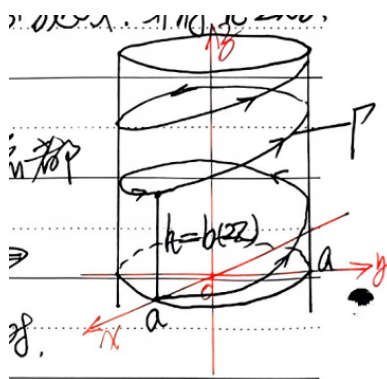



图 5.5

此题中 $x^2 + y^2 \equiv a^2$, 因此 Γ 上的点都在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上, 而从 $z = b\theta \Rightarrow z'_\theta \equiv b$, 即质点在作圆周运动的同时如果向上作匀速运动, 则综合的结果是沿螺旋线作运动.

无论是在物理中, 还是在几何中, 参数增加的方向被认为是曲线 Γ 的正向, 相反的方向是曲线的负向.

 **作业** ex8.4:1,2,4(4)(5)(6)(10),8,9,11.