Lec 5 空间解析几何综述

,

5.1 坐标系的平移与旋转

例 5.1 设有二次曲面 $\Sigma: 4x^2+25y^2+4z^2-16x-50y-16z-4z=0$,

1. 指出 Σ 是何种二次曲面;
2. 将 Σ 一般化为参数式.

解

1. 配方得,$4(x-2)^2+25(y-1)^2+4(z-2)^2=100$, 即
$$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}+\frac{(z-2)^2}{5^2}=1$$
故 Σ 是一个旋转椭球面.
若令 $\begin{cases} x-2=x' \\ y-1=y' \\ z-2=z' \end{cases}$, $M_0=(2,1,2)=O'$, 即是将坐标系的原点平移到 M_0 点, 记作 O', 新的经过平行移动得到的坐标系为 $O'-x'y'z'$. 在新坐标系下,Σ 的方程为
$$\frac{x'^2}{5^2}+\frac{y'^2}{2^2}+\frac{z'^2}{5^2}=1$$
2. 若令 $\begin{cases} \dfrac{x'}{5}=\sin\theta\cos\varphi \\ \dfrac{y'}{2}=\sin\theta\sin\varphi \\ \dfrac{z'}{5}=\cos\theta \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x'=5\sin\theta\cos\varphi \\ y'=2\sin\theta\sin\varphi \\ z'=5\cos\theta \end{cases}$, $\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$ 即 Σ 的参数方程为
$$\begin{cases} x=2+5\sin\theta\cos\varphi \\ y=1+2\sin\theta\sin\varphi \\ z=2+5\cos\theta \end{cases}, \theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$$
其中 $\begin{cases} x'=5\sin\theta\cos\varphi \\ y'=2\sin\theta\sin\varphi \\ z'=5\cos\theta \end{cases}$, $\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$ 是在新坐标系下的参数式, $\begin{cases} x=2+5\sin\theta\cos\varphi \\ y=1+2\sin\theta\sin\varphi \\ z=2+5\cos\theta \end{cases}$ $[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$ 是在原坐标系下的参数式.

注 曲面 Σ 的参数式都是双参数的, 但是参数式不是唯一的, 例如

$$\begin{cases} x = 2 + 5\cos\theta\cos\varphi \\ y = 1 + 2\cos\theta\sin\varphi \\ z = 2 + 5\sin\theta \end{cases}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi]$$

也是 Σ 的参数式.

例 5.2 设有二次曲面 $\Sigma : xy = z$.

1. 指出 Σ 是何种二次曲面;
2. 求 Σ 的参数式.

解 若保持坐标系的原点不动, 让坐标系进行旋转变化. 设 $O - xyz$ 坐标系中, 基向量为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, 在 $O - x'y'z'$ 坐标系中, 基向量为 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$, 且 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ 与 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的夹角如下表所示:

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\boldsymbol{k}'$	α_3	β_3	γ_3

表 5.1

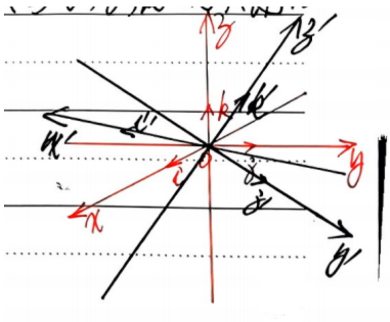

图 5.1

设 $\overrightarrow{OM} = (a, b, c) \neq \theta$, 则 $\overrightarrow{OM}^\circ = \frac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = (\frac{a}{|\overrightarrow{OM}|}, \frac{b}{|\overrightarrow{OM}|}, \frac{c}{|\overrightarrow{OM}|}) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \cos\boldsymbol{i} + \cos\boldsymbol{j} + \cos\boldsymbol{k}$. 即单位向量 $\overrightarrow{OM}^\circ$ 可以用他的三个方向余弦作为坐标, 由表 5.1 得

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \cos\alpha_1\boldsymbol{i} + \cos\beta_1\boldsymbol{j} + \cos\gamma_1\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}' = \cos\alpha_2\boldsymbol{i} + \cos\beta_2\boldsymbol{j} + \cos\gamma_2\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k}' = \cos\alpha_3\boldsymbol{i} + \cos\beta_3\boldsymbol{j} + \cos\gamma_3\boldsymbol{k} \end{cases}$$

现设点 Q 在 $O - xyz$ 坐标系的坐标为 $Q(x, y, z)$, 在 $O - x'y'z'$ 坐标系的坐标为 $Q'(x', y', z')$, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}' \\ &= x'(\cos\alpha_1\boldsymbol{i} + \cos\beta_1\boldsymbol{j} + \cos\gamma_1\boldsymbol{k}) + y'(\cos\alpha_2\boldsymbol{i} + \cos\beta_2\boldsymbol{j} + \cos\gamma_2\boldsymbol{k}) + z'(\cos\alpha_3\boldsymbol{i} + \cos\beta_3\boldsymbol{j} + \cos\gamma_3\boldsymbol{k}) \\ &= (x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\boldsymbol{i} + (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\boldsymbol{j} + (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma \end{aligned}$$

也就是得到了

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos alpha_3 \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{cases}$$

若令 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{X}'$, 即 $\boldsymbol{X}' = A^{-1}\boldsymbol{X}$, 其中 A 的各行各列都是单位向量, 且任意两行 (列) 正交; 在线性代数中, 称 A 这样的矩阵为正交矩阵, 即 $AA^T = A^TA = I$, 其中 I 是单位矩阵. 称 **??** 为正交线性变化, 简称正交变换.

不难验证,$AA^T = A^TA = I$, 即便几何中的旋转或物理中刚体的旋转, 在代数中对应正交变换.**??**表明旋转之后, 原坐标 x, y, z 与新坐标 x', y', z' 之间的对应关系是正交变换关系.

1. 若保持 Oz 轴不便, 让 Oxy 坐标平面绕 z 轴逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{4}$, 得到了新坐标系 $O - x'y'z'$, 则有

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$
$\boldsymbol{j}'$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$
$\boldsymbol{k}'$	$\pi/2$	$\pi/2$	0

即有

$$\begin{cases} x = x'\cos\dfrac{\pi}{4} + y'\cos\dfrac{3\pi}{4} + z'\cos\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = x'\cos\dfrac{\pi}{4} + y'\cos\dfrac{\pi}{4} + z'\cos\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ z = x'\cos\dfrac{\pi}{2} + y'\cos\dfrac{\pi}{2} + z'\cos 0 = z' \end{cases}$$

利用此正交变换, 可以将 $\Sigma : xy = z$ 化为 $\Sigma : \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') = z'$, 即 $z' = \dfrac{x'^2}{2} - \dfrac{y'^2}{2}$, 即 Σ 是一个双曲抛物面.

2. $\Sigma : xy = z$ 在原坐标系中的参数式为 $\begin{cases} x = x + 0y \\ y = 0x + y \\ z = xy \end{cases}$,x, y 为参数, 则 Σ 在新坐标系中的参数式为:$\begin{cases} x' = x' + 0y' \\ y' = 0x' + y' \\ z' = \dfrac{1}{2}(x'^2 - y'^2) \end{cases}$,x', y' 为参数.

5.2 柱面坐标系与球面坐标系

5.2.1 柱面坐标系

$\mathbb{R}^3$ 空间中任一点 $Q(x,y,z)$ 都可以看作是在半径为 r 的某个圆柱面:$x^2+y^2=r^2$ 上. 而圆柱面 $x^2+y^2=r^2$ 上的点都可以用 r,θ,z 这三个参数来确定, 称 (r,θ,z) 为点 Q 的柱面坐标.

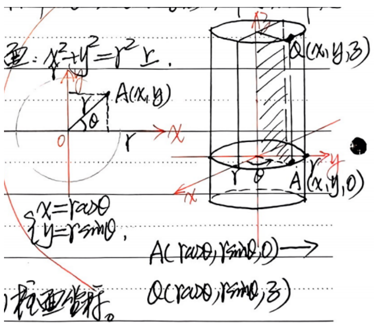

图 5.2

5.2.2 球面坐标系

$\mathbb{R}^3$ 空间中任一点 $Q(x,y,z)$ 都位于某个半径为 r 的球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 上, 其中 $r=|\overrightarrow{OQ}|$,$\overrightarrow{OQ}$ 与 Oz 轴的正向的夹角设为 θ,$\overrightarrow{OQ}$ 在 Oxy 平面中的投影与 Ox 轴正向夹角为 φ,$0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. 则 $y=|\overrightarrow{OA}|\sin\varphi=r\sin\theta\sin\varphi$, 而 $z=r\cos\theta$.

称 (r,θ,φ) 为点 Q 的球面坐标. 球面坐标 r,θ,φ 与直角坐标 x,y,z 之间的关系为

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases},\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi],r\geqslant 0$$

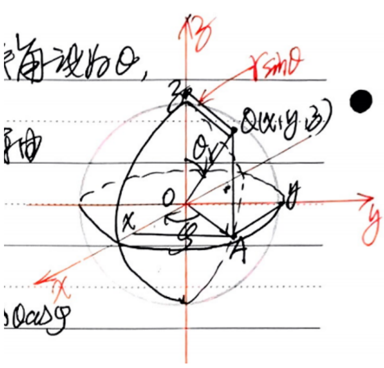

图 5.3

直角坐标系下的球面方程:$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 在柱面坐标系下 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ 化为 $\Sigma: r^2+z^2=R^2$, 即 $\Sigma: r=R$.

在球面坐标系中,$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$ 下, 化为 $x^2+y^2+z^2=r^2=R^2$, 即 $\Sigma: r=R$.

双叶双曲面 $\Sigma: x^2-y^2-z^2=1$ 在柱面坐标系中化为 $r^2\cos 2\theta-z^2=1$, 在球面坐标系中化为 $2x^2-(x^2+y^2+z^2)=2(r\sin\theta\cos\varphi)^2-r^2=r^2(2\sin^2\theta\cos^2\varphi-1)=1$.

5.3 空间曲线的参数式

空间曲线可以写为交线方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, 他可以改写为参数式.

例 5.3 将空间 $\mathbb{R}^3$ 中的大圆周 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, a>0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 化为参数式.

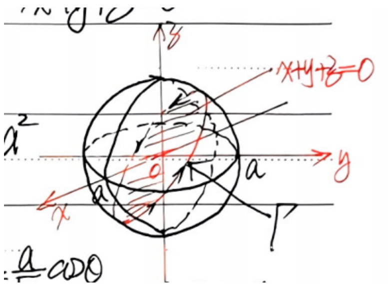

图 5.4

解 从 $z=-(x+y) \Rightarrow x^2+y^2+(x+y)^2=a^2 \Rightarrow x^2+xy+y^2=\dfrac{a^2}{2} \Rightarrow \left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2=\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$. 令 $\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}y=\dfrac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases}$, $\theta\in[0,2\pi]$. 则 $y=\dfrac{2}{\sqrt{6}}a\sin\theta \Rightarrow x=\dfrac{a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta) \Rightarrow z=-(x+y)=\dfrac{-a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)$. 即圆周 Γ 的参数式为 $\begin{cases} x=\dfrac{a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta) \\ y=\dfrac{2}{\sqrt{6}}a\sin\theta \\ z=\dfrac{-a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta) \end{cases}$, $\theta\in[0,2\pi]$.

若将 x 视为参数, 则从 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 中可以解出 $\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}, x\in I.$

例 5.4 空间中的直线 $\Gamma:\begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x-y-2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3=-x-5 \\ -y-2z=-x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=-3x-9 \\ z=2x+4 \end{cases}.$

注 空间的曲线 Γ 的参数式中只有一个参数, 且 Γ 的参数式不是唯一的.

例 5.5 $\Gamma:\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}, \theta\in[0,+\theta), a,b>0$ 所表示的空间光滑曲线, 称之为螺旋线. 并称 $k=2\pi b$ 为一个螺距.

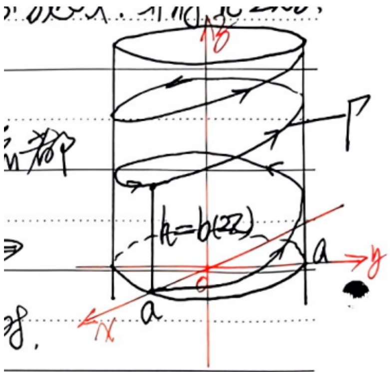

图 5.5

此题中 $x^2+y^2\equiv a^2$, 因此 Γ 上的点都在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上, 而从 $z=b\theta\Rightarrow z'_\theta\equiv b$, 即质点在作圆周运动的同时如果向上作匀速运动, 则综合的结果是沿螺旋线作运动.

无论是在物理中, 还是在几何中, 参数增加的方向被认为是曲线 Γ 的正向, 相反的方向是曲线的负向.

✍ **作业** ex8.4:1,2,4(4)(5)(6)(10),8,9,11.