Lec 1 三维向量的五种运算

1.1 三维直角坐标系与三维向量的线性运算

定义 1.1 (空间直角坐标系)

从空间一点 O 出发, 作三条两两垂直 (正交) 的射线, 并确定单位与方向, 构成 $O-xyz$ 直角坐标系. ♣

命题 1.1

1. xOy 坐标面,zOy 坐标面,zOx 坐标面两两正交并将整个空间分割成八个卦限.
2. 点 M: 设 M 为空间任一点, 过 M 点分别作 Ox,Oy,Oz 轴的垂面. 可得三个垂足 A,B,C, 设 A,B,C 代表的实数为 a,b,c. 则点, 则点 M 与有序数组 (a,b,c) 一一对应, 记作 $M(a,b,c)$. 坐标原点为 $O(0,0,0)$.
3. 向量 $\overrightarrow{OM}$: 在 Ox,Oy,Oz 轴正向上分别取三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, 则 $\overrightarrow{OA}=a\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OB}=b\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OC}=c\boldsymbol{k}$, 依照平面向量的加法法则 (平行四边形法则, 三角形法则)$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}\triangleq(a,b,c)$. 同时可得 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$, 零向量 $\mathbf{0}=(0,0,0)$.
4. 如上定义的 M,$\overrightarrow{OM}$ 与有序数组 (a,b,c) 一一对应.
5. $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}$. ♠

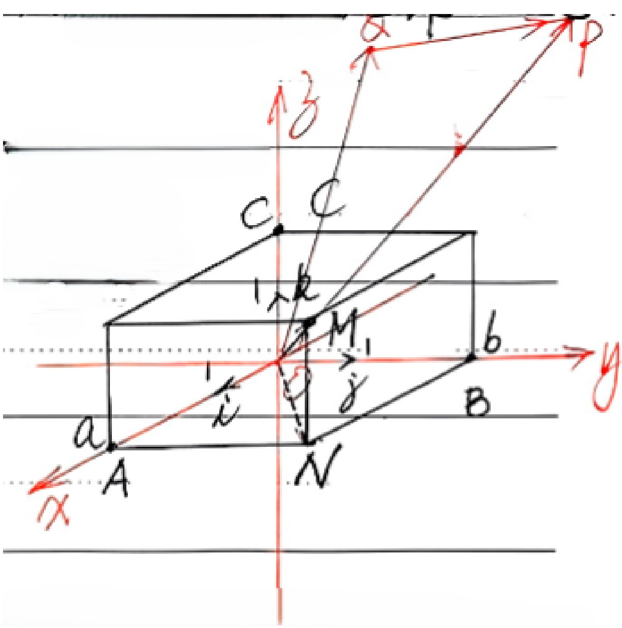

图 1.1: 空间直角坐标系

定义 1.2

$\overrightarrow{OM}=(a,b,c)$, 称 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模, 记为 $\left|\overrightarrow{OM}\right|$.

模长为 0 的向量为零向量 $\mathbf{0}=(0,0,0)$, 模长为 1 的向量称为单位向量.

命题 1.2

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b,c)\neq\mathbf{0}$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}|\neq 0$.

此时,$\boldsymbol{\alpha}^0\triangleq\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}=\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ 是单位向量.

注

1. 这种定义方式较为依赖直观的几何性质, 且可能存在一些循环定义的问题, 当然针对这一阶段这样大概就足够了.
2. 这种方式可以想见, 是可以从三维向量 (three-dimensional vector) 推广至 n 维的, 对应的向量就是 n 维向量 (n-dimensional vector).

设 $P=(x_1,y_1,z_1),Q=(x_1,y_1,z_1)$ 是空间的任意两点,$\overrightarrow{OP}=(x_1,y_1,z_1)$,$\overrightarrow{OQ}=(x_2,y_2,z_2)$. 则 $\overrightarrow{PQ}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. 即空间的任一个向量 $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

空间中的向量有无数个, 但每一个都可用单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的线性组合来表示, 称之前定义的 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为三维向量空间的标准正交基.

在任一个有限维的向量空间中, 一旦选定了基向量, 则” 无限的问题便可有限化表示” 了.

命题 1.3 (三维数组向量的线性运算法则)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,b_1,c_1),\boldsymbol{\beta}=(a_2,b_2,c_2),\lambda_1\in\mathbb{R},\lambda_2\in\mathbb{R}$, 则

1. 加、减法:$\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})\pm(a_2\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+c_2\boldsymbol{k})=(a_1\pm a_2)\boldsymbol{i}+(b_1\pm b_2)\boldsymbol{j}+(c_1\pm c_2)\boldsymbol{k}=(a_1\pm a_2,b_1\pm b_2,c_1\pm c_2)$.
2. 数乘:$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})=(\lambda_1a_1)\boldsymbol{i}+(\lambda_1b_1)\boldsymbol{j}+(\lambda_1c_1)\boldsymbol{k}=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)$.

向量的加法、减法及数乘三种运算统称为向量的线性运算. 统一为

$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)+(\lambda_2a_2,\lambda_2b_2,\lambda_2c_2)=(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,\lambda_1b_1+\lambda_2b_2,\lambda_1c_1+\lambda_2c_2)$.

1.2 向量的内积与外积

定义 1.3 (内积与外积)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,b_1,c_1),\boldsymbol{\beta}=(a_2,b_2,c_2)$. 则

1. 内积: $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$
2. 外积: $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$, 满足 $\begin{cases}|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})\\ \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\beta},\text{且}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\text{构成右手系}.\end{cases}$

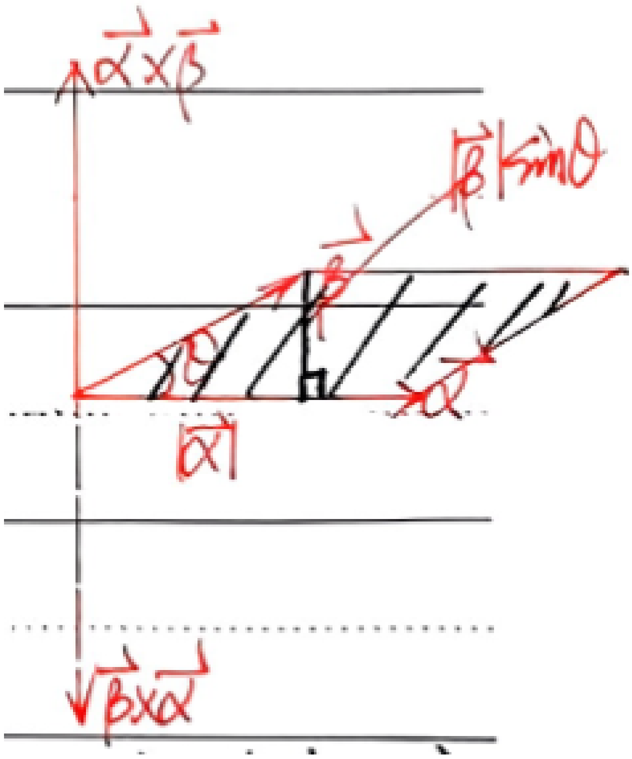

图 **1.2:** 外积的图示

注

1. $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 的规定来源于物理中里做功的运算,$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 是一个数, 故称内积 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的数量积, 或者称为点乘.
2. $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 的规定来源于物理中的力矩的运算,$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 是一个向量, 故称外积 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的向量积, 或者称为叉乘.

定理 1.1

1. $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0.$
2. $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\Leftrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$

♡

证明

1. 1) 若 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$, 则 $\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0.$
   2) 反之, 若 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0$, 若 $|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\neq0$, 则 $\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$. 若 $|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|=0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 由于零向量 $\mathbf{0}$ 垂直于任意向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.
   3) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})\cdot(a_2\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+c_2\boldsymbol{k})=a_1a_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1c_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+b_1a_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+b_1b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+b_1c_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+c_1a_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+c_1b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+c_1c_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$.而$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|\,|\boldsymbol{i}|\cos(\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}})=1\times1\times\cos0=1=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$, 且由于$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}$, 故$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$, 故$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$.
2. 1) 若 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$, 则 $\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0\Rightarrow|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$
   2) 反之, 若 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=|\mathbf{0}|=0=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$, 若 $|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\neq0$, 则 $\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$. 若 $|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|=0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 由于零向量 $\mathbf{0}$ 平行于任意向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$.

3) $\begin{cases} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})\times(a_2\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+$ $c_2\boldsymbol{k}) = a_1a_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_1c_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+b_1a_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+b_1b_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+b_1c_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+$ $c_1a_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+c_1b_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+c_1c_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=a_1b_2\boldsymbol{k}-a_1c_2\boldsymbol{j}-b_1a_2\boldsymbol{k}+b_1c_2\boldsymbol{i}+c_1a_2\boldsymbol{j}-c_1b_2\boldsymbol{i}=$ $(b_1c_2-c_1b_2)\boldsymbol{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$. 由 $bf\alpha /\!/ \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=$ $\boldsymbol{0}=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}b_1c_2-c_1b_2=0\\c_1a_2-a_1c_2=0\\a_1b_2-b_1a_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\triangleq\lambda$. 因此可得 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$.

注

1. 在上述证明中, 不加证明地使用了点乘与叉乘的分配率等性质.
2. 与证明中提到的类似, 点乘有坐标表达 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$, 叉乘有坐标表达 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$, 这也是最常用的计算公式.

1.3 例题

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,b_1,c_1),\boldsymbol{\beta}=(a_2,b_2,c_2),\boldsymbol{\gamma}=(a_3,b_3,c_3)$.

例 1.1 证明: 柯西不等式 $|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|\leqslant\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

证明 $|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|=|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

注 在 n 维向量空间中, 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})\leqslant$ $|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|$, 即 $|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$.

例 1.2 证明:$|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2-|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|^2$.

证明 $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2\sin^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2\,(1-\cos^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}))=|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2-|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2\cos^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=$ $|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2-|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|^2$.

例 1.3 证明:$(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})\cdot\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}$.

证明 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}\cdot(a_3\boldsymbol{i}+b_3\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k})=((b_1c_2-c_1b_2)\boldsymbol{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-$ $a_2b_1)\boldsymbol{k})\cdot(a_3\boldsymbol{i}+b_3\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k})=(b_1c_2-c_1b_2)a_3+(c_1a_2-a_1c_2)b_3+(a_1b_2-a_2b_1)c_3=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=$

$(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})\cdot\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}$.

例 1.4 证明: 三个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充要条件是 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=0$.

证明 是如下结论的结果: 如图所示, 根据计算公式,$|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为两边的平行四边形的面积, 而 $\boldsymbol{\gamma}\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}})\right|$ 是 $\boldsymbol{\gamma}$ 在垂直于平行四边形方向上的投影, 即 $h=|\boldsymbol{\gamma}|\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}})\right|$, 因此 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}$ 是以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 为三边的平行六面体的体积, 于是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 平行六面体的体积为 $0\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=0$.

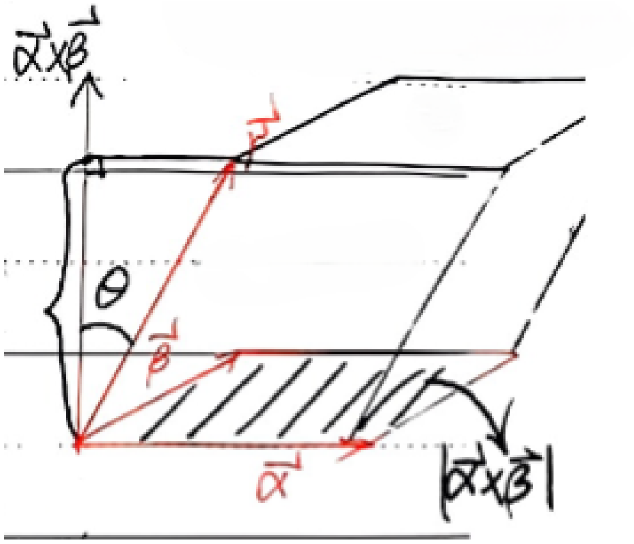

图 1.3: 混合积与平行六面体

例 1.5 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ 总有 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}$ 共面.

证明 利用 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$, 则 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\alpha}=0,(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\beta}=0$, 从而 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta})=0$, 因此可得 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}$ 共面.

✍ **作业** ex8.1:6,9,10,12,14,17,23,26.