Lec 13 多元函数的 Taylor 公式及其应用

13.1 二元函数的 Taylor 公式

设 $D \subset \mathbb{R}^2$, 且 D 是凸区域, 即

$$\forall x, y \in D, \lambda x + (1-\lambda) y \in D, \forall \lambda \in [0,1]$$

或者说 D 中任两点都可以用 D 中的直线连接起来. 设 $z = f(x,y) \in C^{n+1}(D)$,$M_0(x_0,y_0) \in D$,$M(x,y) = M(x_0+h, y_0+k) \in D$, 点 $Q(x_1,y_1)$ 在 M_0 和 M 之间, 即 Q 在 M_0 和 M 的连线上.

由 $\overrightarrow{M_0Q} /\!/ \overrightarrow{M_0M}$, 即

$$(x_1-x_0, y_1-y_0) /\!/ (h,k) \Leftrightarrow \frac{x_1-x_0}{h} = \frac{y_1-y_0}{k} := t \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + th, \\ y_1 = y_0 + tk. \end{cases}, t \in [0,1]$$

得

$$f(Q) = f(x_1,y_1) = f(x_0+th, y_0+tk) := \varphi(t) \in C^{n+1}[0,1]$$

利用 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处的 n 阶 Taylor 公式

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{n+1}, \quad t \in [0,1], \theta \in (0,1)$$

取 $t=1$, 得到

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x,y) = \varphi(1) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

其中

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= f(M_0) \\
\varphi'(0) &= \left(f'_x(x_0+ht, y_0+kt)h + f'_y(x_0+th, y_0+kt)k\right)_{t=0} \\
&= \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} := \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(M_0) \\
\varphi''(0) &= \left(\frac{\partial^2 f(x_0+ht, y_0+kt)}{\partial x} h^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x_0+ht, y_0+kt)}{\partial y} k^2\right)_{t=0} \\
&= \left(h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} hk + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(M_0) \\
:&= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(M_0)
\end{aligned}$$

以此类推, 得到

$$\varphi^{(m)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(M_0), m = 0, 1, 2, \cdots, n$$

代入 Taylor 公式, 得到

$$f(x,y)=f(x_0+h,y_0+k)=\varphi(1)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(M_0)+R_n$$

其中

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

其中 $\theta\in(0,1),\begin{cases}h=x-x_0,\\ k=y-y_0.\end{cases}$.

这即为二元函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的 n 阶 Taylor 公式.

例 13.1 可微函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的 0 阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(x_0,y_0)+f'_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k+f'_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h\\&=f(x_0,y_0)+f'_x\left(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)\right)(x-x_0)\\&+f'_y\left(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)\right)(y-y_0)\end{aligned}$$

也就是我们可以得到二元函数 $z=f(x,y)$ 的微分中值定理

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)&+f'_x\left(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)\right)(x-x_0)\\&+f'_y\left(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)\right)(y-y_0)\end{aligned}$$

例 13.2 设 $z=f(x,y)\in C^3(D)$, 则 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的二阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\&+\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)+o(\rho^2)\end{aligned}$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{h^2+k^2}$.

设 $f'_x(M_0)=0=f'_y(M_0),''_{xx}(M_0)=A,f''_{xy}(M_0)=B,f''_{yy}(M_0)=C$, 则

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)&=\frac{1}{2}\left(A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2\right)+o(\rho^2)\\&=\frac{A}{2}\left[\left(x-x_0+\frac{B}{A}(y-y_0)\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}(y-y_0)^2\right]+o(\rho^2)\end{aligned}$$

由此进行分析

1. 当 $\begin{cases}A>0,\\ AC-B^2>0\end{cases}$ 时,$f(x,y)-f(x_0,y_0)\geqslant 0$ 恒成立, 此时 $f(x,y)$ 在 M_0 处取得极小值.
2. 当 $\begin{cases}A<0,\\ AC-B^2>0\end{cases}$ 时,$f(x,y)-f(x_0,y_0)\leqslant 0$ 恒成立, 此时 $f(x,y)$ 在 M_0 处取得极大值.
3. 当 $\begin{cases}AC-B^2<0\end{cases}$ 时,$f(x_0,y_0)$ 不是 f 的极值.

定理 13.1

设 $z=f(x,y)\in C^2(D)$,D 是凸区域,$M_0(x_0,y_0)\in D$ 且 M_0 是 f 的一个驻点, 即

$$f_x'(M_0)=0=f_y'(M_0)$$

令 $1+f(M_0)=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 称之为 f 在驻点 M_0 处的 Hessian 矩阵, 则

1. 当 $Hf(M_0)>0$, 即矩阵正定, 一切顺序主子式均大于 0, 则 f 在 M_0 处取得极小值.
   即 $\begin{cases} A>0, \\ AC-B^2>0 \end{cases}$ 时,f 在 M_0 处取得极小值.
2. 当 $Hf(M_0)<0$, 即矩阵负定, 一切顺序主子式交替正负, 则 f 在 M_0 处取得极大值.
   即 $\begin{cases} A<0, \\ AC-B^2>0 \end{cases}$ 时,f 在 M_0 处取得极大值.
3. $\Delta=AC-B^2<0$ 时,f 在 M_0 处不取得极值.
4. 当 $Hf(M_0)=0$, 即矩阵不定, 则 f 在 M_0 处是否取得极值不确定. 要使用更高阶的 Taylor 公式进行讨论.

♡

例 13.3

1. 设 $f(x,y)=x^4+y^4, f(0,0)=0.$

$$f_x'(0,0)=4x^3\Big|_{(0,0)}=0, quad f_y'(0,0)=4y^3\Big|_{(0,0)}=0$$

$$f_{xx}''(0,0)=12x^2\Big|_{(0,0)}=0, quad f_{xy}''(0,0)=0, quad f_{yy}''(0,0)=12y^2\Big|_{(0,0)}=0$$

   则 $\Delta=AC-B^2=0$, 但是不难看出 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取得极小值.

2. 设 $f(x,y)=x^3+y^3, f(0,0)=0.$

$$f_x'(0,0)=3x^2\Big|_{(0,0)}=0, quad f_y'(0,0)=3y^2\Big|_{(0,0)}=0$$

$$f_{xx}''(0,0)=6x\Big|_{(0,0)}=0, quad f_{xy}''(0,0)=0, quad f_{yy}''(0,0)=6y\Big|_{(0,0)}=0$$

   则 $\Delta=AC-B^2=0$, 但是不难看出 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不取得极值.

13.2 例题

例 13.4 将 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$ 在点 $M_0(0,0)$ 处分别展成零阶, 一阶, 二阶 Taylor 公式.

解

1. 零阶 Taylor 公式

$$f(x,y)=f(0,0)+(x-0)f_x'(0+\theta(x-0),0+\theta(y-0))+(y-0)f_y'(0+\theta(x-0),0+\theta(y-0))$$
$$1+xf_x'(\theta x,\theta y)+yf_y'(\theta x,\theta y),\theta\in(0,1)$$

而 $f(x,y)=\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$, 则

$$f'_x(\theta x,\theta y)=\frac{1}{(1-\theta x)^2(1-\theta y)}, quad f'_y(\theta x,\theta y)=\frac{1}{(1-\theta x)(1-\theta y)^2}$$

代入得零阶 Taylor 公式为

$$f(x,y)=1+\frac{x}{(1-\theta x)^2}\frac{1}{1-\theta y}+\frac{y}{1-\theta x}\frac{1}{(1-\theta y)^2}$$

2. 高阶 Taylor 公式

利用

$$\frac{1}{1-x}=1+x+o(x)=1+x+x^2+o(x^2)=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-y}=1+y+o(y)=1+y+y^2+o(y^2)=1+y+y^2+y^3+o(y^3)$$

得到 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处的一阶, 二阶, 三阶 Taylor 公式为

$$f(x,y)=(1+x+o(x))(1+y+o(y))=1+x+y+R_1=1+\frac{x^2-y^2}{x-y}+R_1$$

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(1+x+x^2+o(x^2))(1+y+y^2+o(y^2))\\&=1+x+y+x^2+xy+y^2+R_2=1+\frac{x^2-y^2}{x-y}+\frac{x^3-y^3}{x-y}+R_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(1+x+x^2+x^3+o(x^3))(1+y+y^2+y^3+o(y^3))\\&=1+x+y+x^2+xy+y^2+x^3+x^2y+xy^2+y^3+R_3\\&=1+\frac{x^2-y^2}{x-y}+\frac{x^3-y^3}{x-y}+\frac{x^4-y^4}{x-y}+R_3\end{aligned}$$

以此类推可以得到 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处的 n 阶 Taylor 公式为

$$f(x,y)=1+(x+y)+\frac{x^3-y^3}{x-y}+\frac{x^4-y^4}{x-y}+\cdots+\frac{x^n-y^n}{x-y}+R_n$$

例 13.5 求 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的所有极值.

解 先求 $f(x,y)$ 的驻点, 即求 $f'_x(x,y)=0=f'_y(x,y)$, 得到

$$\begin{cases}f'_x(x,y)=3x^2+6x-9=0,\\ f'_y(x,y)=-3y^2+6y=0.\end{cases}$$

解得 $f(x,y)$ 的驻点为 $M_1(1,0),M_2(1,2),M_3(-3,0),M_4(-3,2)$. 对每个驻点, 计算 $f(x,y)$ 的 Hessian 矩阵, 根据 Hessian 矩阵的正定性, 负定性, 不定性来判断极值.

由

$$f''_{xx}=6x+6, f''_{xy}=0, f''_{yy}=-6y+6$$

1. 在 $M_1(1,0)$ 处,

$$A=12,\quad B=0,\quad C=6$$

由此得到 $\Delta=AC-B^2=72>0, A>0$, 故 $f(M_1)=f(1,0)=-5$ 为极小值.

2. 在 $M_2(1,2)$ 处,
$$A=12,\quad B=0,\quad C=-6$$
由此得到 $\Delta=AC-B^2=-72<0$, 故 $f(M_2)=f(1,2)=5$ 不是极值.
3. 在 $M_3(-3,0)$ 处,
$$A=-12,\quad B=0,\quad C=6$$
由此得到 $\Delta=AC-B^2=-72<0$, 故 $f(M_3)=f(-3,0)=45$ 不是极值.
4. 在 $M_4(-3,2)$ 处,
$$A=-12,\quad B=0,\quad C=-6$$
由此得到 $\Delta=AC-B^2=72>0, A<0$, 故 $f(M_4)=f(-3,2)=31$ 为极大值.

13.3 对称矩阵 A 的正定性与负定性

定义 13.1 (对称矩阵)

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 且 $a_{12}=a_{21}, a_{13}=a_{31}, a_{23}=a_{32}$, 则 A 称之为对称矩阵, 此时 $A=A^T$. ♣

定义 13.2 (正定矩阵与负定矩阵)

A 为 n 阶对称矩阵, 则

1. 若 A 的顺序主子式全大于零, 即 $|a_{11}|=a_{11}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=|A|>0$, 则称 A 为正定矩阵.
2. 若 A 的奇数阶顺序主子式全小于零, 偶数阶顺序主子式全大于零, 即 $|a_{11}|=a_{11}<0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}<0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=|A|>0$, 则称 A 为负定矩阵.

更高阶的对称矩阵的正定性与负定性的定义类似. ♣

✍ 作业 ex9.5:2(2),3,4(1)(3)(7),7(1)(3)(4).