Lec 4 二次曲面与旋转曲面

4.1 二次曲面

球面 Σ

设 $M_0(a,b,c)$ 为球心，R 为球的半径，$Q(x,y,z)$ 为球面 Σ 上一点的. 则 $|\overrightarrow{M_0Q}|^2=R^2$，即

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

这称球面 Σ 的标准方程,$R=0$ 时，球面退化为球心 M_0 的一个点. 上式也可以写成

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

这称球面的一般方程, 一般方程为球面当且仅当 $\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2)-D=R^2\geqslant 0$.

曲面的一般方程

设 $F(x,y,z)=0$ 为隐式曲面, 若 $F(x,y,z)=0$ 可以化为 $z=f(x,y)$, 则称 $z=f(x,y)$ 为显示曲面.

例 4.1 $x^2+y^2+z^2=1$ 为隐式球面,$z=\sqrt{1-x^2-y^2}, x^2+y^2\leqslant 1$ 为显示上半球面.

当 $F(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$, 且 $(A,B,C,D,E,F)\neq(0,0,0,0,0,0)$ 时, 称 $F(x,y,z)=0$ 为二次曲面.

当 $D=E=F=0$, 且 $A^2+B^2+C^2>0$ 时, 二次曲面的对称轴都平行于坐标轴, 当 $D^2+E^2+F^2>0$ 时, 二次曲面的对称轴不平行于坐标轴.

椭球面

中心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 的椭球面的方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

经过坐标平移 $\begin{cases} x'=x-x_0 \\ y'=y-y_0 \\ z'=z-z_0 \end{cases}$ 可化为 $O'-x'y'z'$ 坐标系中的椭球面方程

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$$

因此得知,$z=z_0+c\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}}$ 为上半椭球面, $z=z_0-c\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}}$ 为下半椭球面.

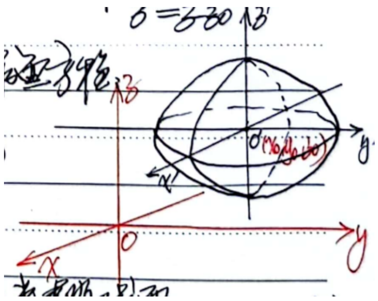

图 4.1: 椭球面

圆柱面

$$x^2 + y^2 = R^2$$

为圆柱面, 当 z 取任意值时, 圆柱面无限延伸. 或者说, 圆柱面是由直线连续移动形成的, 这类曲面称为直纹面.

若要表示 Oxy 平面中的圆 $x^2+y^2=R^2$, 则应写为 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$, 即圆柱面与 $Oxy(z=0)$ 平面的交面. 同理, $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=2 \end{cases}$ 是空间中 $z=2$ 平面上的圆.

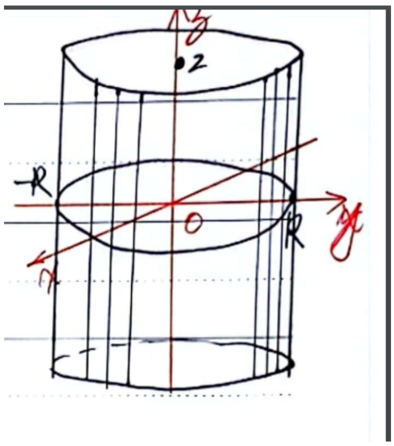

图 4.2: 圆柱面

抛物柱面

$y^2=2px$ 及 $y=ax^2(a,p\neq 0)$ 为抛物柱面.

$\begin{cases} y^2=2px \\ z=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y=ax^2 \\ z=3 \end{cases}$ 为空间中的抛物线, 这称为交面式的抛物线.

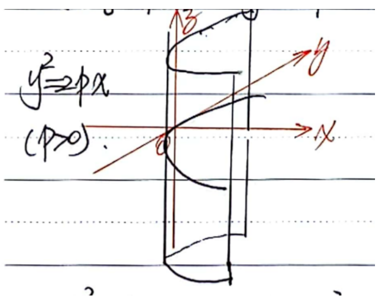

图 4.3: 抛物柱面

圆锥面

$$z^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

而 $\begin{cases} z^2 = a^2(x^2+y^2) \\ z = c \end{cases}$ 为空间中的圆; $\begin{cases} z = \pm ay \\ x = 0 \end{cases}$ 为空间中的相交直线.

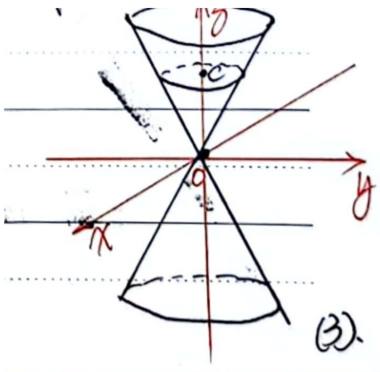

图 4.4: 圆锥面

椭圆抛物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, (a, b > 0)$$

$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = z_0 \end{cases}$ 为空间中的椭圆, 解 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z_0$ 可得所围成的面积为 $\pi(a\sqrt{z_0})(b\sqrt{z_0}) = \pi abz_0$.

双曲抛物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, (a, b > 0)$$

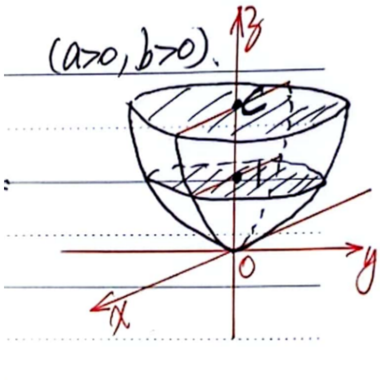

图 4.5: 椭圆抛物面

又称为马鞍面.$z=z_0>0$ 是一族实轴为 x 轴的双曲线,$z=z_0<0$ 是一族虚轴为 y 轴的双曲线.$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} \\ x=0 \end{cases}$ 是抛物线,$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} \\ y=0 \end{cases}$ 也是抛物线. 故称双曲抛物面或马鞍面. 易证, 马鞍面是直纹面.

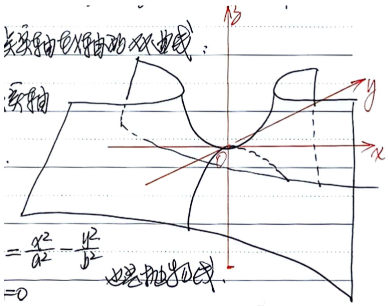

图 4.6: 双曲抛物面

双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

从 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}-1$ 可知 $|z|\geqslant c$ 时, 才有实点. 当 $z=z_0>c$ 或 $z=z_0<-c$ 时, 都是椭圆.

单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

从 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}+1\geqslant 0,\forall z$ 可知, 对 $z\in\mathbb{R}$, 都有曲面图像, 任取 $z_0\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}+1 \\ z=z_0 \end{cases}$

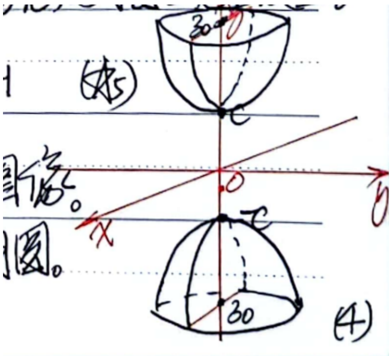

图 4.7: 双叶双曲面

都是椭圆, 即用垂直于 z 轴的平面去切单叶双曲面, 截面都是椭圆. 易证, 单叶双曲面是由直线连续移动形成的直纹面.

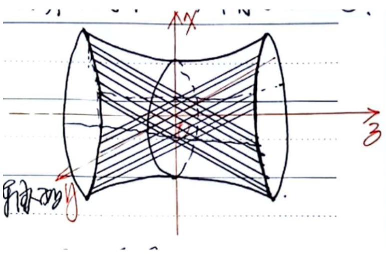

图 4.8: 单叶双曲面

4.2 旋转曲面

设 $L: z=f(y)$ 是一条平面曲线, 将 L 绕 Ox 轴旋转一周, 则所得曲面称为旋转曲面, 记为 Σ. 设 $M(x,y,z)$ 是 Σ 上一点, 过点 M 作 Oz 轴的垂面交 Oz 轴于点 $Q(0,0,z)$, 交曲线 L 于点 $A(0,y_1,z)$, 则 $|QM|^2=|QA|^2 \Rightarrow x^2+y^2=y_1^2$, 即 $y_1=\sqrt{x^2+y^2}$, 所以 Σ 的方程为 $z=f(\pm\sqrt{x^2+y^2})$.

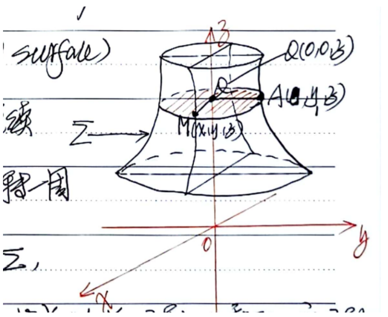

图 4.9: 旋转曲面

即曲线 $z=f(y)$ 绕 Ox 轴旋转一周所得旋转曲面中 z 保持不变, 而另一个变量用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替. 同理, 曲线 $z=f(y)$ 绕 Oy 轴旋转一周所得旋转曲面中 z 保持不变, 而另一个变量用 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替.

例 4.2 证明:

1. 马鞍面:$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 是直纹面.
2. 单叶双曲面:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 是直纹面.

证明

1. 马鞍面可以化为 $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z$, 即 $\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda}\end{cases}$ 当 $\lambda=0$ 连续变化时, 交面式的直线 $L:\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda}\end{cases}$ 连续变化, 最后形成马鞍面. 故马鞍面是直纹面.
2. 从 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}+1$ 可知, 对 $\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)$, 因此得到 $\begin{cases}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right)\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{x}{a}\right)\end{cases}$ 当 $\lambda=0$ 连续变化时, 交面式的直线即单叶双曲面是由一族直线连续移动形成的, 故单叶双曲面是直纹面.

例 4.3 球面三角形的余弦定理

设单位球面三角形 ABC, 是过球心 O 的三个平面 π_1,π_2,π_3 与球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$ 相交而成的球面上的三角形, 如图所示:

则有

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

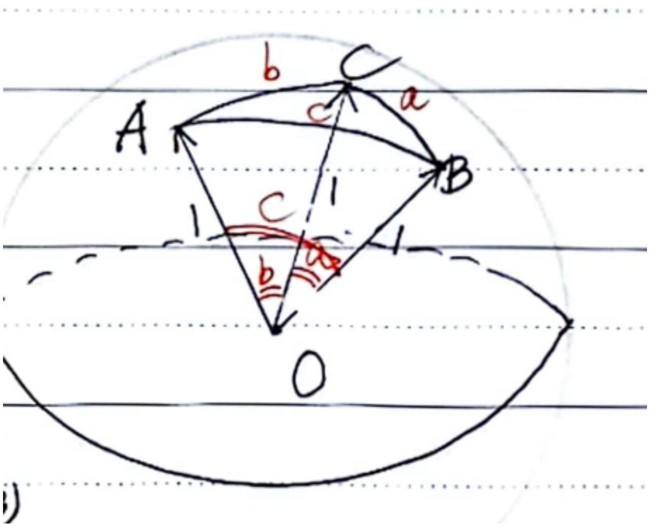

图 4.10: 球面三角形

证明 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 确定了平面 π_1, 则法向量 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}$, 同理可得 $\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}, \boldsymbol{n}_3=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

则

$$\cos A=\cos(\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)=\frac{\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_3}{|\boldsymbol{n}_2||\boldsymbol{n}_3|}=\frac{(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|}$$

依向量乘法以及 Lagrange 恒等式, 及 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\sin b$,$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sin c$, 可得 $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})=(|\overrightarrow{OA}|^2\cos 0)(|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OB}|\cos a)-(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos b)(|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|\cos c)=\cos a-\cos b\cos c$.

代入, 得

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\Rightarrow\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

同理可得 $\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$, $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$.

例 4.4 求曲线 $L:\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 绕 Oy 轴,Oz 轴旋转一周所得曲面的方程.

解

1. L 绕 Oy 轴旋转一周,y 保持不变,z 用 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替, 则所得曲面方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2+z^2}{b^2}=1$, 即 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$.
2. L 绕 Oz 轴旋转一周,z 保持不变,y 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替, 则所得曲面方程为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$, 即 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$.

例 4.5 求直线 $L:\begin{cases}y=kx,k\neq 0\\ z=0\end{cases}$ 绕 Ox,Oy 轴旋转一周所得曲面的方程.

解

1. 绕 x 轴旋转时,x 保持不变,y 用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替, 则所得曲面方程为 $y=kx\Rightarrow kx=\pm\sqrt{y^2+z^2}$, 即 $k^2x^2=y^2+z^2,k\neq 0$.
2. 绕 y 轴旋转时,y 保持不变,x 用 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替, 则所得曲面方程为 $y=kx\Rightarrow y=k\pm\sqrt{x^2+z^2}$, 即 $y^2=k^2(x^2+z^2),k\neq 0$.

两个旋转曲面都是圆锥面方程.

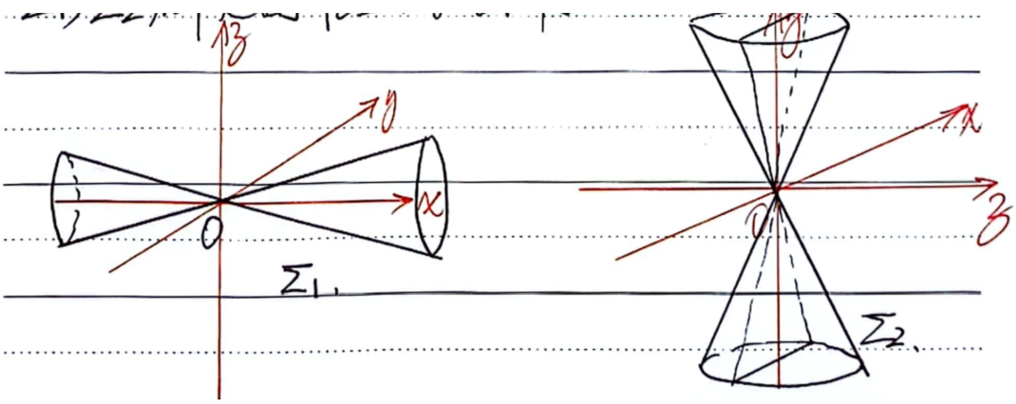

图 4.11: 圆锥面

✍ **作业** ex8.3:1,2,3.