Lec 2 空间平面与直线

2.1 平面 (plane) 的五种表示形式

定义 2.1 (平面的五种表示形式)

1. 向量式: 设平面 π 过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且与已知的非零向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 垂直, 则平面 π 唯一确定. 设 $P(x, y, z)$ 为 π 上任一点, 则有 $\overrightarrow{M_0P} \perp \boldsymbol{n}$, 于是有
$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{M_0P} = 0$$
称为平面 π 的向量式方程.
2. 点法式: 由向量式, 有 $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{M_0P} = 0$, 即
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
, 称为平面 π 的向量式方程.
3. 一般式: 设 $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, 则有
$$Ax + By + Cz + D = 0$$
称为平面 π 的一般式方程.
4. 截距式: 一般式中, 设 $d \triangleq -D \neq 0$, 令 $\dfrac{d}{A} = a, \dfrac{d}{B} = b, \dfrac{d}{C} = c$, 则
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$
称为平面 π 的截距式方程.
5. 三点式: 设 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ 为 π 上不共线的三点, 则由 A, B, C 三点确定唯一的平面 π, 设 $P(x, y, z)$ 为 π 上任一点, 则有 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 共面, 即
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$
称为平面 π 的三点式方程.

♣

2.2 空间直线 (line) 的五种表示形式

定义 2.2 (空间直线的五种表示形式)

1. 向量式: 设直线 l 过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且与已知的非零向量 $\boldsymbol{\tau} = (l, m, n)$ 平行, 则直线 l 唯一确定. 设 $P(x, y, z)$ 为 l 上任一点, 则有 $\overrightarrow{M_0P} /\!/ \boldsymbol{n}$, 于是有
$$\overrightarrow{M_0P} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$
称为直线 l 的向量式方程.
2. 点向式: 由向量式, 有 $\overrightarrow{M_0P} /\!/ \boldsymbol{\tau}$, 则有
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$
, 称为直线 l 的点向式方程.
3. 参数式, 在点向式中, 令 $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$, 则有
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$
称为直线 l 的参数式方程.
4. 交面式: 设平面 $p_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和平面 $p_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 不平行, 则 π_1 与 π_2 有交线 l,l 上的点 $P(x, y, z)$ 满足
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$
称为直线 l 的交面式方程.
5. 两点式: 设 $Q_1(x_1, y_1, z_1), Q_2(x_2, y_2, z_2)$ 为直线 l 上的两点, 则由 Q_1, Q_2 确定唯一的直线 l, 设 $P(x, y, z)$ 为 l 上任一点, 则有 $\overrightarrow{Q_1P}, \overrightarrow{Q_1Q_2}$ 共线, 即
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$
称为直线 l 的两点式方程.

♣

2.3 面面, 线线, 线面之间的关系

命题 2.1

设

$$\begin{cases} \pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & \boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1) \\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & \boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2) \\ L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}, & \boldsymbol{\tau}_1=(l_1,m_1,n_1) \\ L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}, & \boldsymbol{\tau}_2=(l_2,m_2,n_2) \end{cases}$$

则

1. $\pi_1/\!/\pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{0}$.
2. $\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$.
3. π_1 与 π_2 的夹角 $\alpha(0<\alpha\leqslant\pi), \cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\boldsymbol{n}_1^0\cdot\boldsymbol{n}_2^0$, 即得 $\alpha=\arccos\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$.
4. $L_1/\!/L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}/\!/\boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.
5. $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\perp\boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2=0 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.
6. L_1 与 L_2 的夹角 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi), \cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2}{|\boldsymbol{\tau}_1|\cdot|\boldsymbol{\tau}_2|}=\boldsymbol{\tau}_1^0\cdot\boldsymbol{\tau}_2^0$, 即得 $\alpha=\arccos\dfrac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2}{|\boldsymbol{\tau}_1|\cdot|\boldsymbol{\tau}_2|}$.
7. $L_1\perp\pi_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1/\!/\boldsymbol{n}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{l_1}=\dfrac{B_1}{m_1}=\dfrac{C_1}{n_1}$.
8. $L_1/\!/\pi_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\perp\boldsymbol{n}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{n}_1=0 \Leftrightarrow A_1l_1+B_1m_1+C_1n_1=0$.
9. L_1 与 π_1 的夹角 $\beta(0\leqslant\beta\leqslant\dfrac{\pi}{2}), \cos(\dfrac{\pi}{2}-\beta)=\left|\dfrac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{\tau}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_1|}\right|=\left|\boldsymbol{\tau}_1^0\cdot\boldsymbol{n}_1^0\right|$, 故 $\sin\beta=\left|\boldsymbol{\tau}_1^0\cdot\boldsymbol{n}_1^0\right|0$, 即得 $\beta=\arcsin\left|\boldsymbol{\tau}_1^0\cdot\boldsymbol{n}_1^0\right|$.

2.4 例题

例 2.1 分别求已知点 $M(1,-1,-2)$ 关于点 $A(1,0,1)$, 平面 $\pi: 3x+4y-5z-1=0$, 直线 $L: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{0}$ 的对称点 $Q(x,y,z)$.

解

1. $A(1,0,1)$ 是线段 MQ 的中点, 有 $\begin{cases} \dfrac{1+x}{2}=1 \\ y=\dfrac{-1+y}{2}=0 \\ z=\dfrac{-2+z}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$, 即 $Q(1,1,4)$.
2. $\boldsymbol{n}=(3,4,-5)$, 则有 $\begin{cases} \overrightarrow{MQ}/\!/\boldsymbol{n} \\ MQ\text{中点}N(\dfrac{x+1}{2},\dfrac{y-1}{2},\dfrac{z-2}{2})\text{在}\pi\text{上} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+4t \\ z = -2-5t \\ 3(\frac{x+1}{2}) + 4(\frac{y-1}{2}) - 5\frac{z-2}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow t = \frac{12}{25}$, 带回 x, y, z 可知 $Q(\frac{61}{25}, \frac{23}{25}, -\frac{10}{25})$.

3. $\boldsymbol{\tau} = (-1, 2, 0)$, 则有 $\begin{cases} \overrightarrow{MQ} \perp \boldsymbol{\tau} \\ MQ\text{中点}N(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z-2}{2})\text{在}L\text{上} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} = 1-t \\ \frac{y-1}{2} = 1+2t \\ \frac{z-2}{2} = 1 \\ -1(x-1) + 2(y+1) + 0(z+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1-2t \\ \boldsymbol{y} = 3+4t \\ \boldsymbol{z} = 4 \\ -1(x-1) + 2(y+1) + 0(z+2) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow t = -\frac{5}{3}$, 带回 x, y, z 可知 $Q(\frac{13}{3}, -\frac{1}{5}, 4)$.

例 2.2 设 $A(1,0,1), B(0,1,1), C(2,0,3), D(1,1,1)$ 为已知的四点, 求

1. 求四面体 $\Omega : A - BCD$ 的体积 $V(\Omega)$.
2. 求 B, C, D 三点确定的三角形 $\triangle$ 的面积 $S_\triangle$.
3. 求 B, C, D 三点确定的平面方程.

解

1. $V(\Omega) = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$.
2. $S_\triangle = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|0\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{0^2+2^2+1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
3. 设 $P(x,y,z)$ 为 π 中的任一点, 则 $\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ 共面, 即 $\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, 解得

   $\pi : 2y + z - 3 = 0$ 为所求平面方程.

✍ **作业** ex8.2:1,2,3,6,7,14(1),15(1),16.