Tut 2

2.1 上周作业

上周作业有一道题大家问题比较多, 是

例 2.1 8.2.3 过 $(-5,7,4)$ 且到三个坐标轴截距相等, 求平面方程.

很多同学假设 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$.

但有个问题, 截距式方程是不过原点的, 而这道题过原点恰好是截距相等的情况, 因此还要考虑过原点的情况

将 $(-5,7,4)$ 带入 $ax+by+cz=0$, 得到 $c=\frac{5}{4}a-\frac{7}{4}b$.

最后方程为,$ax+by+(\frac{5}{4}a-\frac{7}{4}b)z=0$,

这里还有个小问题,a,b 如果同时为零, 该方程不构成平面. 所以 a,b 取值并非是全体实数, 有一个不全为零的要求.

2.2 本周课程的“地位”

课程	名称	关于考试	关于后续相关课程
lec 4	二次曲面与旋转曲面	判断积分区域, 大体上能判断形状即可	线性代数二次型, 典型的非平面的曲面的例子, 典型积分区域.
lec 5	空间解析几何综述	常用换元考虑的手段	线性代数, 很多数学处理时常用的手法, 涉及到物理或几何可能遇到的多一些.
lec 6	多元函数的极限与连续性	期中考试常见的求多元函数某点极限与连续性	点集拓扑初步, 涉及到后续大量分析课程.

表 2.1: 课程的“地位”

如果从功利的角度出发,lec 4 与 lec 5 在考试里一般不会以习题的形式出现, 而是辅助判断的, 但 lec 6 就相对重要了, 因为会出题. 从数分 B2 本身的学习出发, 曲面与解析几何更多的是作为基础课程, 属于是需要了解的内容而不在学习重点, 更多的和线代之类的课程相关. 但多元函数的极限是整个 B2 的多变量微分和积分的基础, 所以还是 lec 6 更重要.

2.3 二次曲面分类与简单的判断

Oxy \ Oxz	椭圆	双曲线	抛物线
椭圆	椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		
双曲线	单叶双曲面/双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1/\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		
抛物线	椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=pz$	双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=pz$	
(双) 直线	椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	双曲柱面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	抛物柱面 $x^2=2py$

表 2.2: 不同的二次曲面对应的截面 (缺少二次锥面)

2.3.1 曲面分类简述

在 B2 里通常不会为难大家, 所以一般涉及到的就是很简单的椭球体, 有时也会遇到双叶双曲面, 单叶双曲面等等.

在高中范围内, 我们知道二次曲线主要有以下几种: 椭圆 (以及圆), 抛物线, 双曲线, 退化的直线. 空间中的二次曲面的截面是呈现出二次曲线的形态.

它们的对应关系大概如上表所示, 对于他们大概有一个直观地印象就可以了, 更重要地还是判断一个曲面具体对应哪种.

2.3.2 曲面的判断

对于满足如下的方程的曲面:

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0 \tag{2.1}$$

也可以写成

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+c=0$$

由于我们假设这是二次曲面, 二次项对应系数总是不全为 0 的, 否则就退化了, 也就是说 a_{ij} 不全为零.

我们按照如下步骤进行处理, 从而让这个式子总是看起来像是表格里的那些形式.

1. 对于能观察出来的方程, 那直接上观察结果就好, 比如不含交叉项的函数, 可以直接对 x,y,z 分别配方, 实际上我们在 B2 里更多遇到的是这种.

2. 对于只含有一组交叉项的, 比如只有 xy 没有 xz, yz 那直接用 $x+y$ 与 $x-y$ 处理.
3. 对于一般的复杂方程
   (a). 我们认为有其实是有四个坐标 $(x, y, z, 1)$, 其中 1 正常参与加减乘除运算, 这样圆方程可以化为完全由二次项组成的形式, 为了方便起见, 我们将 "1" 记作 w, 这样2.1就变成了.

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1xw + 2b_2yw + 2b_3zw + cw^2 = 0 \tag{2.2}$$

   同样, 也可以写成

$$\begin{pmatrix} x & y & z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

   (b). 我们归纳地处理, 如果显含二次项 x^2, 也就是 $a_{11} \neq 0$, 总是可以化为系数为 $a_{11} = 1$ 的情况, 直接对 x 配方即可,2.2化为

$$(x + a_{12}y + a_{13}z + b_1w)^2 + A_{22}y^2 + A_{33}y^2 + +2B_1xw + 2B_2yw + 2B_3zw + Cw^2 = 0 \tag{2.3}$$

   (c). 如果不显含二次项, 也就是

$$a_{12}xy + a_{13}xz + a_{23}yz + b_1xw + b_2yw + b_3zw = 0 \tag{2.4}$$

   其中 xy 系数 a_{12} 非零, 此时我们先令 $\begin{cases} u = \dfrac{x+y}{2} \\ v = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$ 也就是 $\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$ 带回后相当于添加了 u^2, v^2, 这个时候总是可以按照 (b). 中的办法进行配方, 从而令 4 个变元变成 3 个变元.

   (d). 对于三个变元的情况依次处理, 直到全都处理完毕, 最后变成比较简单的二次情形, 根据二次项个数以及系数正负关系等可以判断.

例 2.2

1. ex8.4.1 $x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 2y + z - 1 = 0$

   解 观察可得, 用 $x-1, y-1$ 配方即可.

$$(x-1)^2 - (y-1)^2 - (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

2. ex8.4.2 $xy - x + y + z + 1 = 0$

   解 只有一组交叉项, 用 $u = x+y, v = x-y$ 配方即可.

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 - 4(x-y) + 4z + 4 = u^2 - v^2 - 4v + 4z + 4 = 0$$

再对 v 配方即可.

$$u^2-(v+2)^2+4(z+2)=0$$

3. ex8.4.3 $5x^2-3y^2+3z^2+8yz-5=0$

   解 对 y 配方即可.

$$5x^2-3(y-\frac{4}{3}z)^2+\frac{25}{3}z^2-5=0$$

4. $xy+yz+zx=0$

   解 先用 $u=x+y, v=x-y$,

$$u^2-v^2+4uz=0$$

再对 u 配方.

$$(u+2z)^2-v^2-4z^2=0$$

2.4 坐标变换

坐标变换本身更多用在换元上, 也因此, 需要关注多一点的是, 有范围的图形变换后的范围.

对于平移是很好处理的, 这个基本上不会犯错, 唯一需要注意不要反向变化就行.

对于旋转, 如果非要是旋转的话一定要保持正交且不要伸缩, 但通常情况下, 我们在换元里也不是很在乎伸缩与否以及是否正交, 积分时有办法处理.

比较重要的是柱坐标系, 相对更重要的是球坐标系.

球坐标系

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases},\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi),r\geqslant 0$$

柱坐标系

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases},\theta\in[0,2\pi)$$

以及它们直接相关于参数方程.

例 2.3

1.
$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, z \geqslant \frac{1}{2}$$

转化成球坐标系和柱坐标系的范围.

解

(a). 球坐标系:
$$0 \leqslant r \leqslant 1, \frac{1}{2} \leqslant r\cos\theta \leqslant 1$$
可解得
$$\frac{1}{2\cos\theta} \leqslant r \leqslant \frac{1}{\cos\theta}, \theta \in [0, \frac{\pi}{3}], \varphi \in [0, 2\pi)$$

(b). 柱坐标系:
$$0 \leqslant r \leqslant \sqrt{1-z^2}, z \geqslant \frac{1}{2}, \varphi \in [0, 2\pi)$$

2.
$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 1$$

转化成球坐标系和柱坐标系的范围.

(a). 球坐标系:
$$0 \leqslant r \leqslant 1, r^2-2r\cos\theta \leqslant 0$$
可解得
$$0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi)$$

(b). 柱坐标系:
$$0 \leqslant r \leqslant \sqrt{1-z^2}, 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2z-z^2}, z \in [0,1], \varphi \in [0, 2\pi)$$
等价于
$$\begin{cases} 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2z-z^2}, & z \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{1-z^2}, & z \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}, \theta \in [0, 2\pi)$$

2.5 多变量极限与函数连续性

我们的学习过程会经历一个从一元, 二元, 三元,n 元的变化过程, 接下来主要会遇到二元三元的问题, 以及偶尔会遇到的 n 元推广问题.

定义 2.1

设 $z=f(x,y)$ 是定义在平面点集 D 上的二维函数,$M_0=(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点, 又设 a 是一个数. 如果对任意给定的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $M=(x,y)\in D$ 满足

$$0<\rho(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时, 有

$$|f(M)-a|<\varepsilon,$$

那么称当 M 趋于 M_0 时 $f(M)$ 以 a 为极限, 记作

$$\lim_{M\to M_0} f(M)=a.$$

也可以写成

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a \quad \text{或} \quad \lim_{x\to x_0,y\to y_0} f(x,y)=a.$$

♣

求极限常用不等式:

定理 2.1

1.
$$|a|,|b|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$$

2.
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\leqslant|a|+|b|$$

3.
$$2|ab|\leqslant a^2+b^2$$

4.
$$C_1\sqrt[n]{|a|^n+|b|^n}\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)}\leqslant C_2\sqrt[n]{|a|^n+|b|^n}, n\geqslant 3$$

其中 C_1,C_2 的选取由 n 确定而与具体的 a,b 无关.

♡

2.5.1 判定极限存在, 函数连续性等等

1. 通常情况下,f,g 是常见的连续函数 (如 xy,x^2,e^x) 等等, 组成形如 $\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ 的情况, 其中 f,g 在 $\mathbb{R}^2$ 上有定义, 且 $(x,y)\in D$ 时 $g\neq 0$, 那么在 $\mathbb{R}^2\setminus D$ 上极限存在且连续.
   证明起来大概就是利用多元函数的极限乘除法.
2. 找到具体的路径, 从而利用不同路径极限不同来判断不存在, 典型的例子是 x,y 的多项式函数的比值形式.

   例 2.4 .

   (a). (例 9.1.3) $\displaystyle\lim_{x\to0,y\to0}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在.

   解 取 $y=kx^2$

   (b). $\displaystyle\lim_{x\to0,y\to0}\frac{xy}{x+y}$ 不存在.

解

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{4}\lim_{x\to 0,y\to 0}\left((x+y)-\frac{(x-y)^2}{x+y}\right) \tag{2.1}$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{(x-y)^2}{x+y} \tag{2.2}$$

$$\tag{2.3}$$

令 $x+y=k(x-y)^2$ 即有 $\begin{cases} x-y=t \\ x+y=kt^2 \end{cases}$,$t\to 0$ 得出原极限不唯一.

注: 这么做可能比较麻烦.

给出两个常用的定理

定理 2.2

设 $f(t)$ 是一元函数在 t_0 处连续, 即

$$\lim_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)$$

.

$g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续, 且

$$\lim_{x\to x_0,y\to y_0} g(x,y)=g(x_0,y_0)=t_0$$

那么

$$\lim_{x\to x_0,y\to y_0} f(g(x,y))=\lim_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)$$

证明 $\forall\epsilon>0,\exists\delta_0>0$, 当$|t-t_0|<\delta_0$, 有 $|f(t)-f(t_0)|<\epsilon$

而对于 $\delta_0,\exists\delta_1>0$, 当$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_1$, 有 $|g(x,y)-g(x_0,y_0)|<\delta_0$, 即 $|g(x,y)-t_0|<\delta_0$

因此 $|f(g(x,y))-f(t_0)|<\epsilon$, 即可得 $\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0} f(g(x,y))=\lim\limits_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)$.

例 2.5 ex9.1.14(11) $\lim\limits_{x\to 0,y\to a}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$ 不存在

解

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}&=\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{1-\cos(x^2+y^2)}\\&=\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\\&=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0,y\to 0}(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2})\\&\to+\infty\end{aligned}$$

定理 2.3

设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续,$x(u,v),y(u,v)$ 在 (u_0,v_0) 连续, 且值分别为 x_0,y_0. 那么

$$\lim_{u\to u_0,v\to v_0} f(x(u,v),y(x,y)) = f(x_0,y_0)$$

证明 $\forall\epsilon>0,\exists\delta_0>0$, 当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta_0$, 有 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\epsilon$

而对于 $\delta_0,\exists\delta_1,\delta_2>0$,

当 $\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\delta_1$, 有 $|x(u,v)-x(u_0,v_0)|<\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_0$,

当 $\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\delta_2$, 有 $|y(u,v)-y(u_0,v_0)|<\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_0$,

因此当 当 $\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 有 $\sqrt{\left(x(u,v)-x_0\right)^2+\left(y(u,v)-y_0\right)^2}<\delta_0$,

因此 $|f(x(u,v),y(u,v))-f(x_0,y_0)|<\epsilon$, 即可得 $\lim\limits_{u\to u_0,v\to v_0} f(x(u,v),y(x,y)) = f(x_0,y_0)$.

此定理当我们取 $f(x,y)=g(x)$ 与 y 无关时就是上一个定理.

例 2.6 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\frac{xy}{x+y}$ 不存在.

解

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0,y\to0}\frac{xy}{x+y} &= \frac{1}{4}\lim_{x\to0,y\to0}\left((x+y)-\frac{(x-y)^2}{x+y}\right)\\
&= -\frac{1}{4}\lim_{x\to0,y\to0}\frac{(x-y)^2}{x+y}\\
&= -\frac{1}{4}\lim_{x-y\to0,x+y\to0}\frac{(x-y)^2}{x+y}\\
&= -\frac{1}{4}\lim_{u\to0,v\to0}\frac{u^2}{v}\text{不存在}
\end{aligned}$$

2.6 点集拓扑及拓展

后续的过程中, 可能是数分 B3 或者其他的分析课程, 我们会广泛的运用基础的点集拓扑, 也就是第九章开头的那部分, 当然在 B2 里没太大作用这套东西可以让我们暂时摆脱具体的 $\mathbb{R}^n$ 空间或者更具体的带有欧几里得距离的 $\mathbb{R}^n$ 转而取研究一些相对抽象的空间.

大概是这样一个范式, 对于某个空间 M, 我们在其上定义了距离函数 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, 这里 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 是一个具体的点, 之后可以类似于 $\mathbb{R}_2$ 圆盘去定义开球之类的, 利用开球, 我们可以仿照内点, 外点, 边界点的定义将空间根据一个集合划分成三个部分.

而对应 B1, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \forall x_n, s.t. x_n\to x_0, \lim\limits_{neq\to\infty} f(x_n)=a$, 也就是函数的极限可以转化成函数点列的极限, 所以也同样提出了聚点的概念, 就是可以被集合内逼近的点, 你可以类比成一元函数在开区间两端的值可以由这点的左 (或右) 极限补充.

据此, 同样类比 $\mathbb{R}$ 的开集和闭集的性质做推广等等.