

Week 1

1.1 Feb 24 ex8.1:6,9,10,12,14,17,23,26.

习题 8.1.6 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是满足 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ 的单位向量, 试求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$ 的值.

解 由

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} + 2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) = 0,$$

可得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) = -\frac{3}{2}.$$

习题 8.1.9 已知向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的夹角 $\theta = \frac{2\pi}{3}$, 又 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2$, 试计算:

1. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2$;

2. $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| \times |\mathbf{3a} - \mathbf{b}|^2$.

解

1. $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta = 1, |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta = 3.$

2. $|\mathbf{a} + 3\mathbf{b}| \times |\mathbf{3a} - \mathbf{b}|^2 = |3\mathbf{a} \times \mathbf{a} + 9\mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} - 3\mathbf{b} \times \mathbf{b}|^2 = |-10\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = 100|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = 300.$

习题 8.1.10 已知 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 试证

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

解

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c} \Rightarrow 0 = -\mathbf{b} \times \mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{c} \times \mathbf{b} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

习题 8.1.12 求证: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

解

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta)^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \cos^2 \theta = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2.$$

习题 8.1.14 已知 $\mathbf{a} = (3, -5, 8), \mathbf{b} = (-1, 1, -4)$, 求 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的模和方向余弦.

解 $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (4, -6, 12), |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 14,$

$$\cos \alpha = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}, \quad \cos \beta = \frac{-6}{14} = -\frac{3}{7}, \quad \cos \gamma = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}.$$

例 1.1 8.1.17 已知 $\overrightarrow{OA} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}, \overrightarrow{OB} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \overrightarrow{OC} = 4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, 问 A, B, C 是否共线?

解 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 10\mathbf{k} = 2\overrightarrow{OB}$, 故 A, B, C 共线.

习题 8.1.23 已知点 $A(1, 2, 0), B(3, 0, -3), C(5, 2, 6)$, 求三角形 ABC 的面积.

解 $\overrightarrow{AB} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \overrightarrow{AC} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{k},$ 故

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 14.$$

习题 8.1.26 下列四点: $A(1, 2, -1), B(0, 1, 5), C(-1, 2, 1), D(2, 1, 3)$. 是否在一个平面上.

解 $\overrightarrow{AB} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \overrightarrow{AC} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}, \overrightarrow{AD} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, 计算以 AB, AC, AD 为棱的平行六面体的体积为:

$$V = |\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

故 A, B, C, D 在一个平面上.

1.2 Feb 26 ex8.2:1,2,3,6,7,14(1),15(1),16

习题 8.2.1 指出下列平面位置的特点, 并作图.

1. $2x - 2y + 2z = -1$;

3. $y - 3z = 0$;

2. $2x - 3y + 2 = 0$;

4. $3x - 2 = 0$.

解

1. $2x - 2y + 2z = -1$ 与 Ox, Oy, Oz 轴的夹角角度相等, 与 Oxy, Oyz, Ozx 平面的夹角角度相等.

2. $2x - 3y + 2 = 0$ 与 Oz 轴平行, 与 Oxy 平面垂直;

3. $y - 3z = 0$ 与 Ox 轴平行, 与 Oyz 平面垂直;

4. $3x - 2 = 0$ 与 Ozy 平面平行, 与 Ox 轴垂直.

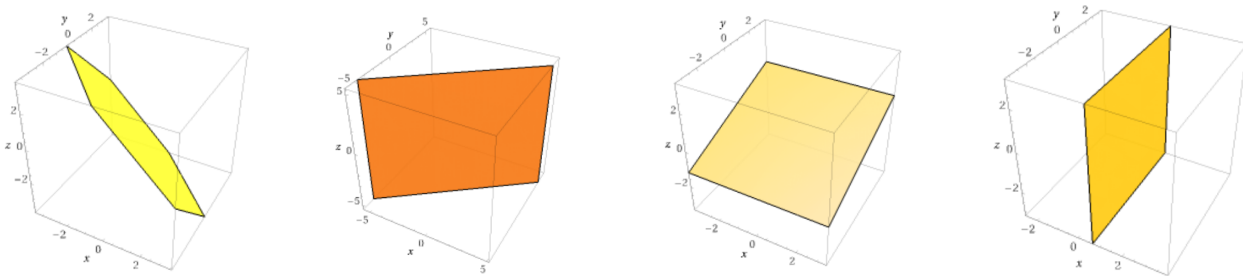


图 1.1: 习题 8.2.1

习题 8.2.2 试求通过点 $M_1(2, -1, 3)$ 和 $M_2(3, 1, 2)$ 且平行于向量 $\mathbf{v} = (3, -1, 4)$ 的平面方程.

解 (法一)

平面平行于 $\overrightarrow{M_1M_2} = (1, 2, -1), \mathbf{v} = (3, -1, 4)$, 故平面的一个法向量为 $\overrightarrow{M_1M_2} \times \mathbf{v} = (1, -1, -1)$, 故平面方程可以写为


$$x - y - z = D.$$

代入 M_1 得 $D = 0$, 故平面方程为 $x - y - z = 0$.

(法二) 设平面方程为 $ax + by + cz + d = 0$, 则

$$\begin{cases} 2a - b + 3c + d = 0 \\ 3a + b + 2c + d = 0 \\ 3a - b + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b = c \\ d = 0 \end{cases}$$

故平面方程为 $x - y - z = 0$.


 **习题 8.2.3** 设平面过点 $(5, -7, 4)$ 且在 x, y, z 三轴上的截距相等, 求平面方程.

解 设平面方程为 $Ax + By + Cz = D$.

当 $D = 0$ 时, 平面过点 $(5, -7, 4)$, 故 $5A - 7B + 4C = 0$, 解得 $A = 4t, B = 4s, C = -5t + 7s$, 平面方程有无穷多个, 形如 $4tx + 4sy - (5t - 7s)z = 0$, 其中 t, s 为任意实数.


当 $D \neq 0$ 时, 截距相等推出平面的一个法向量为 $(1, 1, 1)$, 代入点 $(5, -7, 4)$, 得平面方程为

$$x + y + z = 2.$$

 **习题 8.2.6** 求通过点 $M(-5, 2, -1)$ 且平行于坐标平面 Oyz 的平面方程.

解 平行于坐标平面 Oyz , 故目标平面的一个法向量为 $(1, 0, 0)$, 设平面方程为 $Ax + D = 0$, 代入 M 点即得平面方程为

$$x = -5.$$

 **习题 8.2.7** 求下列各平面的夹角:

1. $2x - y + z - 7 = 0$ 和 $x + y + 2z - 11 = 0$;

2. $4x + 2y + 4z - 7 = 0$ 和 $3x - 4y = 0$.


解

1. 法向量 $\mathbf{n}_1 = (2, -1, 1)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 1, 2)$, 因此

$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right) = \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}$$

2. 法向量 $\mathbf{n}_1 = (2, 1, 2)$, $\mathbf{n}_2 = (3, -4, 0)$, 因此


$$\theta = \arccos \left(\frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} \right) = \arccos \left(\frac{2}{15} \right)$$

 **习题 8.14.(1)** 分别按下列各组条件求平面方程.

1. 平分两点 $A(1, 2, 3)$ 和 $B(2, -1, 4)$ 之间的线段且垂直于线段 AB ;

解 该平面有法向量 $\overrightarrow{AB} = (1, -3, 1)$, 因此, 可设方程为 $x - 3y + z + d = 0$. 再带入中点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$, 得到

$$2x - 6y + 2z - 7 = 0$$

 **习题 8.15.(1)** 分别求出满足下列各条件的直线方程.

1. 过点 $(0, 2, 4)$ 且与平面 $x + 2z = 1$, $y - 3z = 2$ 平行;

解 两平面的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{n}_2 = (0, 1, -3)$, 则

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-2, 3, 1)$$

设直线的参数方程为 $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (-2, 3, 1)t$, 代入点 $(0, 2, 4)$ 可解出 $x_0 = 0, y_0 =$

2, $z_0 = 4$. 因此直线方程为

$$(x, y, z) = (0, 2, 4) + (-2, 3, 1)t$$

 **习题 8.16** 求直线

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

的参数方程.

解 两平面的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (2, 3, -1)$, $\mathbf{n}_2 = (3, -5, 2)$, 则

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (1, -7, -19)$$


为其方向量. 进一步, 可求得直线上一点 $(1, 0, -2)$. 因此, 参数方程为:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -7t \\ z = -2 - 19t \end{cases}$$

或者写为

$$(x, y, z) = (1, 0, -2) + (1, -7, -19)t.$$

1.3 Feb 28 ex8.2:18(1),19(1),20(2),21(1),22(1),23(1),29,30

 **习题 ex8.2,18(1)** 求下列直线的夹角:

$$1. \begin{cases} 5x - 3y + 3z - 9 = 0, \\ 3x - 2y + z - 1 = 0. \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 2x + 2y - z + 23 = 0, \\ 3x + 8y + z - 18 = 0. \end{cases}$$


解 两条直线的方向量分别为

$$\mathbf{a} = (5, -3, 3) \times (3, -2, 1) = (3, 4, -1)$$

$$\mathbf{b} = (2, 2, -1) \times (3, 8, 1) = (10, -5, 10)$$

因此夹角为

$$\theta = \arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\pi}{2}$$

 **习题 ex8.2,19(1)** 证明下列各组直线互相平行, 并求他们之间的距离.

$$1. \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = -z \quad \text{和} \quad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$$

解 两条直线的方向向量分别为

$$\mathbf{a} = (-2, 3, -1)$$

和

$$\mathbf{b} = (1, 1, 1) \times (1, -1, -5) = (-4, 6, -2).$$

两方向向量平行, 故两直线平行.

两直线各取一点 $M(-2, 1, 0), N(4, -4, 0)$, 则两直线距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{MN} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{|(5, 6, 8)|}{|(-2, 3, -1)|} = \sqrt{\frac{125}{14}}$$

习题 8.2.20(2) 证明下列各组直线垂直相交, 并求它们的交点.

$$1. \begin{cases} 4x + y - 3z + 24 = 0, \\ z - 5 = 0. \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x + y + 3 = 0. \\ x + 2. \end{cases}$$

解 两条直线的方向向量分别为

$$\mathbf{a} = (4, 1, -3) \times (0, 0, 1) = (1, -4, 0)$$

$$\mathbf{b} = (1, 1, 0) \times (1, 0, 0) = (0, 0, -1).$$

得到 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, 因此垂直. 进一步, 联立两个方程式, 存在交点 $(-2, -1, -5)$.

习题 8.2.21(1) 求直线和平面的夹角 φ .

$$1. \begin{cases} 3x - 2y = 24, \\ 3x - z = -4, \end{cases} \quad 6x + 15y - 10z + 31 = 0;$$

解 直线的方向向量为

$$\mathbf{a} = (3, -2, 0) \times (3, 0, -1) = (2, 3, 6)$$

平面的法向量为 $\mathbf{n} = (6, 15, -10)$, 因此夹角为

$$\varphi = \arccos \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{a}|} = \arcsin \frac{3}{133}.$$

习题 8.2.22(1) 求点到直线的距离 d .

$$1. P_0(1, 0, -1), \quad \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1};$$

解 直线的方向向量为 $\mathbf{a} = (1, 2, -1)$. 取直线上的点 $P(0, 1, 0)$, 则线段 PP_0 在直线上的投影长为

$$\left| \frac{\overrightarrow{PP_0} \cdot \mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right| = 0.$$

因此 PP_0 就是垂线段, 长度为 $|\overrightarrow{PP_0}| = \sqrt{3}$.

习题 8.2.23(1)

习题 证 明下列各直线是异面直线, 并求它们的距离 (即两直线垂线长).

$$1. \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1} \quad \text{和} \quad \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2};$$

解 两直线的方向向量分别为 $\mathbf{a} = (4, -3, 1), \mathbf{b} = (-2, 9, 2)$, 分别取两直线上一点 $A(9, -2, 0), B(0, -7, 2)$,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \overrightarrow{AB} = 245 \neq 0$$


知两直线异面. 因此, 两直线距离为

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} = 7.$$

习题 8.2.29 求原点关于平面 $6x + 2y - 9z + 121 = 0$ 对称的点的坐标.

解 设对称点为 O' , 则 $\overrightarrow{OO'} \perp \pi : 6x + 2y - 9z$, 故 $\overrightarrow{OO'}$ 平行于平面的法向量 $(6, 2, -9)$, 故设 $O' = (6t, 2t, -9t)$.

将中点坐标 $(3t, t, -\frac{9}{2}t)$ 代入平面方程, 解得 $t = -2$, 因此对称点的坐标为 $O'(-12, -4, 18)$.

 **习题 8.2.30** 求点 $(1, 2, 3)$ 关于直线 $\frac{x}{1} = \frac{y-4}{-3} = \frac{z-3}{-2}$ 对称的点的坐标.

解 设所求点的坐标为 (a, b, c) , 将它与 $(1, 2, 3)$ 连线的中点坐标代入直线方程, 得到

$$b = -3a + 3, \quad c = -2a + 1.$$

直线的方向向量为 $(1, -3, -2)$, 故进一步地有

$$0 = (1, -3, -2) \cdot ((a, b, c) - (1, 2, 3)) = 14a \Rightarrow a = 0.$$

因此所求对称点为 $(0, 3, 1)$.