

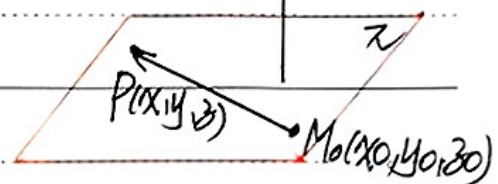
第2讲: 空间的平面与直线.

(一) 平面(plane)的五种表示形式:

(1) 向量式: 设平面 π 过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与已知非零向量 $\vec{n}=(A, B, C)$ 垂直, 则 π 唯一确定.

$$\vec{n}=(A, B, C)$$

设 $P(x, y, z)$ 为 π 中任意一点, 则 $\vec{M_0P} \perp \vec{n}$



$$\text{于是, } \vec{n} \cdot \vec{M_0P} = 0$$

(1)

即是平面 π 的向量式方程.

(2) 点法式: 垂直于平面 π 的非零向量 \vec{n} , 称之为 π 的法

向量. 若 π 有法向量 \vec{n} 且过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 时, 由(1)有

$\vec{n} \cdot \vec{M_0P} = 0$ 而 $\vec{M_0P} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, 即有点法式方程:

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0 \quad (2)$$

(3) 一般式: 设 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, 则由(2)有一般式:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

法向量: normal vector

(1)

(4) 截距式: 在(3)中, 设 $-D \equiv d \neq 0$, 令 $\begin{cases} d/A = a \\ d/B = b \\ d/C = c \end{cases}$ (4)

则有截距式: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

a, b, c 称之为在 ox, oy, oz 轴上的截距.

(5) 三点式: 设 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ 是不共线的三点, 则由 A, B, C 三点所确定的平面方程为:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

其中 $P(x, y, z)$ 是平面的动点坐标. 由 $\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AC}$ 共面可知,

$$(\vec{AP} \times \vec{AB}) \cdot \vec{AC} = 0 \quad \text{且} \quad \begin{cases} \vec{AP} = (x-x_1, y-y_1, z-z_1) \\ \vec{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \\ \vec{AC} = (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1) \end{cases},$$

由向量混合积的行列式表示, 即得(5).

(三) 空间直线(line)的五种表示形式:

(1) 向量式: 设 $\vec{\tau} = (l, m, n) \neq 0$ 为已知向量, 直线 $L \parallel \vec{\tau}$, 且

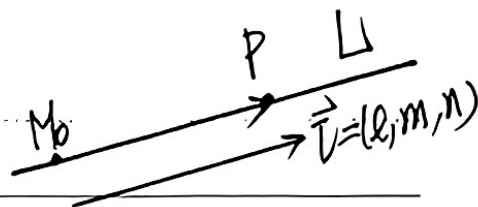
L 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 则有 L 的向量式方程:

$$\vec{\tau} \times \overrightarrow{M_0P} = 0 \quad (1)$$

其中, $P(x, y, z)$ 是 L 上的动点坐标.

(2)

$$\text{由 } \vec{M_0P} \parallel \vec{l} \Leftrightarrow \vec{l} \times \vec{M_0P} = 0$$



即知(1)式的正确性。

(2). 点向式: 平行于直线L的任意非零向量, 都称为L的方向向量. 设 $P(x, y, z)$ 为L上任意一点, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为L上已知点.

$$\text{则 } \vec{M_0P} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0), \text{ 由 (1) } \vec{l} \times \vec{M_0P} = 0 \Leftrightarrow \vec{l} \parallel \vec{M_0P} \Leftrightarrow \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \quad (2). \text{ (点向式)}$$

(3). 参数式: 在(2)中, 令比值为 t , 则得L的参数式:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3).$$

(4). 交面式: 设平面 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 与平面 $\pi_2:$

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 不平行, 则 π_1 与 π_2 的交线L为空间直线:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (4).$$

(5). 两平面式: 设 $Q_1(x_1, y_1, z_1), Q_2(x_2, y_2, z_2)$ 为不同两平面.

则 Q_1, Q_2 所确定的空间直线L为:

方向向量: direction vector

(5).

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} \quad (5).$$

其中, $P(x, y, z)$ 为 L 上的动点坐标.

从 $Q_1P \parallel Q_1Q_2 \Leftrightarrow (5)$ 成立.

(三). 面面、线线、线面间的关系:

设 $\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \neq 0$

$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \neq 0$,

$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$, $\vec{t}_1 = (l_1, m_1, n_1) \neq 0$,

$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$, $\vec{t}_2 = (l_2, m_2, n_2) \neq 0$.

则

(1). $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$

(2). $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$.

(3). π_1 与 π_2 的夹角 α ($0 \leq \alpha \leq \pi$), $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \vec{n}_1^0 \cdot \vec{n}_2^0 \Rightarrow \alpha$

(4). $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \vec{t}_1 \parallel \vec{t}_2 \Leftrightarrow \vec{t}_1 \times \vec{t}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

(5). $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \vec{t}_1 \perp \vec{t}_2 \Leftrightarrow \vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2 = 0 \Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

(6). L_1 与 L_2 的夹角 α ($0 \leq \alpha \leq \pi$), $\cos \alpha = \frac{|\vec{t}_1 \cdot \vec{t}_2|}{|\vec{t}_1| |\vec{t}_2|} = \vec{t}_1^0 \cdot \vec{t}_2^0 \Rightarrow \alpha$

(7). $L_1 \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{t}_1 \parallel \vec{n}_1 \Leftrightarrow \vec{t}_1 \times \vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{l_1} = \frac{B_1}{m_1} = \frac{C_1}{n_1}$

(8). $L_1 \parallel \pi_1 \Leftrightarrow \vec{t}_1 \perp \vec{n}_1 \Leftrightarrow \vec{t}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow A_1l_1 + B_1m_1 + C_1n_1 = 0$

(A).

(9). L 与 π 的夹角 β ($0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}$): $\cos(\frac{\pi}{2} - \beta) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{d}|}{|\vec{n}| |\vec{d}|} = |\vec{n} \cdot \vec{d}|$

即 $\sin \beta = |\vec{n} \cdot \vec{d}| \Rightarrow \beta = \arcsin(|\vec{n} \cdot \vec{d}|)$

四) 例题:

例 1. 分别求点 $M(1, -1, 2)$ 关于点 $A(1, 0, 1)$, 平面 π :

$3x + 4y - 5z - 1 = 0$ 及直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{0}$ 的对称点 Q .

解 (1). 设 $Q(x, y, z)$ 为 $M(1, -1, 2)$ 关于 $A(1, 0, 1)$ 的对称点,

则 $A(1, 0, 1)$ 是线段 MQ 的中点, 依中点坐标表示, 有

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} = 1 \\ \frac{y-1}{2} = 0 \\ \frac{z+2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases} \quad \text{即 } Q(1, 1, 4) \text{ 为所求的对称点.}$$

解 (2). 设 $Q(x, y, z)$ 为 $M(1, -1, 2)$ 关于 π 的对称点, $\vec{n} = (3, 4, -5)$.

则 $\overrightarrow{MQ} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-5} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+3t \\ y=-1+4t \\ z=2-5t \end{cases} \quad (*)$

而 MQ 的中点 $N(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+2}{2})$ 在平面 $\pi: 3x + 4y - 5z - 1 = 0$ 上,

$\therefore 3(\frac{x+1}{2}) + 4(\frac{y-1}{2}) - 5(\frac{z+2}{2}) - 1 = 0 \quad (**)$

将 (*) 代入 (**) 可得 $t = \frac{12}{5}$, 再代入 (*) 可知,

(5)

$M(1, -1, -2)$ 关于对称面 Ω 为 $Q(\frac{61}{25}, \frac{23}{25}, -\frac{10}{25})$.

解③: 设 $Q(x, y, z)$ 为 $M(1, -1, -2)$ 关于 L : $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{0}$

的对称点, 则线段 MQ 中点 $N(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z-2}{2})$ 在

直线 L 上, 从而有 $\frac{\frac{x+1}{2}-1}{-1} = \frac{\frac{y-1}{2}-1}{2} = \frac{\frac{z-2}{2}-1}{0} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y=5 \\ z=4 \end{cases}$

另外, 由 $\overrightarrow{MQ} \perp \vec{r}$, $\vec{r} = (-1, 2, 0) \Rightarrow \overrightarrow{MQ} \cdot \vec{r} = 0$

$-1(x-1) + 2(y+1) + 0(z+2) = 0 \Rightarrow -x + 2y = -3$. 联立 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ -x+2y=-3 \\ z=4 \end{cases}$

解出 $x = \frac{13}{5}$, $y = \frac{1}{5}$, $z = 4$. 即 $Q(\frac{13}{5}, \frac{1}{5}, 4)$ 为所求对称点.

例2. 设 $A(1, 0, 1)$, $B(0, 1, 1)$, $C(2, 0, 3)$, $D(1, 1, 1)$ 为已知

的点. (1) 求四面体 Ω : $A-BCD$ 的体积 $V(\Omega)$;

(2) 求 B, C, D 三点确定的三角形 \triangle 面积 S_{\triangle} ;

(3) 求 B, C, D 三点确定的平面方程.

解①: $V(\Omega)$ 是以 BC, BD, BA 为棱的平行六面体体积

的 $\frac{1}{6}$. 而 $\overrightarrow{BC} = (2, -1, 2)$, $\overrightarrow{BD} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{BA} = (1, -1, 0)$.

(b).

$$V(\Omega) = \frac{1}{6} |(\vec{BC} \times \vec{BD}) \cdot \vec{BA}| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3};$$

解(2). 以 B, C, D 为端点构成的 \triangle 面积 $S_{\triangle} = \frac{1}{2} |\vec{BC} \times \vec{BD}|$

$$\text{而 } \vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0i + 2j + k = (0, 2, 1) \Rightarrow$$

$$|\vec{BC} \times \vec{BD}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}, \text{ 故 } S_{\triangle} = \frac{1}{2} \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

解(3). 设 $P(x, y, z)$ 为所求平面上的任意一点, 则 $\vec{BP}, \vec{BC}, \vec{BD}$

$$\text{共面} \Leftrightarrow (\vec{BP} \times \vec{BC}) \cdot \vec{BD} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ 即}$$

$2y + z - 3 = 0$ 为所求的平面方程。

(五). 4 (4): EX 8.2

1; 2; 3; 6; 7; 14/11; 15/11; 16.

(六). 向量 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的线性运算: $\lambda_1 \vec{\alpha} + \lambda_2 \vec{\beta}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r}$ 的

混合积: $(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \cdot \vec{r} = (\vec{\beta} \times \vec{r}) \cdot \vec{\alpha} = (\vec{r} \times \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta}$; $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{r}$ 的三重向量

$$\text{积 } (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \times \vec{r} + (\vec{\beta} \times \vec{r}) \times \vec{\alpha} + (\vec{r} \times \vec{\alpha}) \times \vec{\beta} = \vec{0} = (0, 0, 0).$$

(7)