第6讲：多元函数的极限与连续性

(一) 多元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $(n\geq 2)$ 的例子：

(1). $z=ax+by+c$，$(x,y)\in R^2=\{(x,y)\mid x^2+y^2<+\infty\}$：平面方程；

(2). $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，$(x,y)\in D: x^2+y^2\leq R^2$ $(R>0)$：上半球面；

(3). $f(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$，$(x,y)\in R^2$：二维正态分布概率密度函数；

(4). $u=\ln(a^2-x^2-y^2-z^2)$，$x^2+y^2+z^2<a^2$，$\Omega: x^2+y^2+z^2<a^2$ 的开球体；

(5). $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$，$(x>0,y>0)$：$\beta$（贝塔）函数。

(6). $u=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$：$n$ 元线性函数。

注：(2)、(3) 都是光滑曲面。

(7). $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2(a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n+$

$a_{23}x_2x_3+x_2x_4a_{24}+\cdots+a_{2n}x_2x_n+a_{34}x_3x_4+\cdots+a_{3n}x_3x_n+\cdots+a_{n\,n-1}x_nx_{n-1})$

$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，$(a_{ij}=a_{ji})$，$x_1,x_2,\cdots x_n$ 的二次齐次函数。

多元函数中，最简单的是二元函数：$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$.

且 $z=f(x,y)$ 有直观图形——空间的曲面，因此，二元函数

是今后的重点讨论的二元函数。

(二)、平面点集的若干概念：

二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D 是平面 R^2 的一个子集.

(1) 点 M_0 的 δ 邻域：$U(M_0,\delta) \triangleq \{M \mid |MM_0| = \rho(M,M_0) < \delta\}$

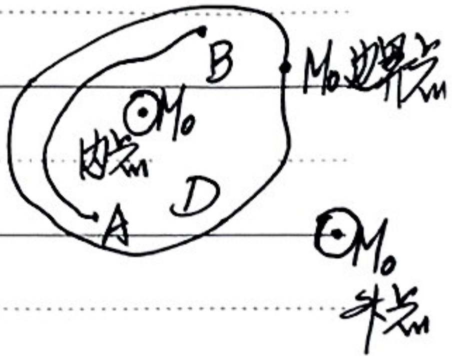
即 $U(M_0,\delta) = \{(x,y) \mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}$. $M_0(x_0,y_0)$, $M(x,y)$.

(2)、D 的内点 M_0：$M_0 \in D$，且 $\exists \delta>0$，使 $U(M_0,\delta) \subset D$.

(3)、D 的外点 M_0：$M_0 \notin D$，且 $\exists \delta>0$，使 $U(M_0,\delta) \cap D = \phi$.

(4) D 的边界点 M_0：M_0 的任意 δ 邻域中都同时含有 D 中点与 D^C 中点.

点集 D 的边界点的全体记作 ∂D：D 的边界.



(5)、全由内点组成的点集称为开集；开集 D 的余集 D^C 称为闭集. 闭集的余集是开集.

(6) 连通性：若 D 中任两点 A，B，都可用 D 中连续曲线连接，则称 D 是连通的.

(2)、

(7). 开集若是连通的，称之为开区域，简称区域；开区域D与D的边界∂D之并，称之为闭区域，记作 $\bar{D}=D+\partial D$.

(8). 若∃R>0，使 $D\subset U(O,R)$，则称D是有界集，$O=O(0,0)$.

例1：$U(M_0,\delta)$、R^2，$x^2+y^2+z^2<a^2$ 都是开集，且第1、第3个是有界集，R^2是无界集；而 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\geq\delta^2$，$(R^2)^C=\Phi$，$x^2+y^2+z^2\geq a^2$ 都是闭集；$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leq\delta^2$，$x^2+y^2+z^2\leq a^2$ 是有界闭集(区域)。

例2：空集Φ由整个内点组成，因此是开集，而$(\Phi)^C=R^2$，因此R^2又是闭集，由R^2是开集，且$(R^2)^C=\Phi$知Φ又是闭集。

在全部点集中，既开又闭的仅有Φ与R^n，$\forall n\in N$共两个。

(三). 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的极限与连续性：

(1). 若对 $\forall\delta>0$，$U(M_0,\delta)$ 都有点集D中点，则称M_0是D的聚点(极限点)，M_0的聚点可以属于D，也可不属于D。

(2). 设点 $M_0\in D$，且∃δ>0，使 $U(M_0,\delta)$ 中除M_0无D中点，则称M_0是D的孤立点。

(3).

定义1：设 $f(x,y)$ 定义在点集 D 上，$M_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，a 是一个常数，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $M\in D$，$0<|MM_0|<\delta$ 时，$|f(M)-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称 a 是 M 趋于 M_0 时，$f(x,y)$ 的极限。

记作：$\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=a$ 或 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=a$，或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=a$。

由于多元函数的极限与一元函数的极限定义的形式相同，因此，一元函数极限中的四则运算法则，夹逼准则，及极限的唯一性，局部有界性，保号性，保序性等都可推广到多元函数的极限中来。

定义2：设 $f(x,y)$ 在点集 D 上有定义，$M_0(x_0,y_0)\in D$，若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $M\in D$，$|MM_0|<\delta$ 时，$|f(M)-f(M_0)|<\varepsilon$ 恒成立，则称 $f(x,y)$ 在点 M_0 处连续（C），若 f 在 D 中每一点都 C，则称 f 在 D 中连续。若 δ 仅与 ε 有关，称 f 在 D 上一致连续。

从定义2可知，若 M_0 是 D 的聚点，则有：

$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)=f(\lim\limits_{M\to M_0} M)$，即极限号与函数符号可交换！

若$M_0(x_0,y_0)$是D的孤立点，则$f(M)$在M_0处必连续，证明如下：对$\forall\varepsilon>0$，$\because M_0$是D的孤立点，$\therefore\exists\delta>0$，使$U(M_0,\delta)$中除$M_0$外无D中点，当$M\in D$，$|MM_0|<\delta$时，$|f(M)-f(M_0)|=|f(M_0)-f(M_0)|=0<\varepsilon$恒成立，依定义，$f(M)$在孤立点$M_0$处连续。

注意：课本的定义9.8与第一册的定义2.3，都只针对聚点进行了连续性的定义，而未考虑函数在孤立点处的连续性。因此，函数的连续性定义，科学而合理的做法是用$\varepsilon-\delta$语言定义，而不应用：$\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$这种极限值等于函数值的方法定义。

例3. $f(x,y)=\sqrt{\cos^2\pi x+\cos^2\pi y-2}$的定义域D由所有的整点（格点）$M(m,n)$，$m,n\in\mathbb{Z}$组成，每个整点都是D的孤立点，也都是$f(x,y)$的连续点，从而$f(x,y)$在D上连续。

例4. 考察下列极限：（格点(Lattice point)，即整点）

(1) 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$；(2) 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在、

(3) 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在、

证(1)：$\because x^4+y^2 \geq 2x^2|y|$ $\therefore \frac{x^2|y|}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$

$0 \leq \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2}|y|$ 且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} 0 = 0 = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{2}|y|$，由夹逼准则，

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$.

证(2)：取 $y=kx^2$，k 为常数，即动点 $M(x,y)$ 沿抛物线 $y=kx^2$ 趋于 $O(0,0)$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{k}{1+k^2}$

当 k 取不同的值时，即动点以不同方式趋于 $O(0,0)$ 时，函数有不同的极限，与极限存在的唯一性矛盾！

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在、从而 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

在 $O(0,0)$ 处不连续。

证(3)：$\because \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left((1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right)^{\frac{xy}{x+y}}$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}} \xlongequal{xy=u} \lim\limits_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$，

而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y} \xlongequal{取y=-x+kx^2} \lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^2+kx^3}{kx^2}=-\frac{1}{k}$，$(k\neq 0)$

即 k 取不同的值时，$M(x,y)$ 沿 $y=-x+kx^2$ 趋于 $O(0,0)$ 时，

函数有不同的极限，与极限存在的唯一性矛盾！

$\therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x+y}$ 不存在 $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在。

再设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $O(0,0)$ 处的连续性，

可以证明：在 $O(0,0)$ 处沿着过这点的每一条射线 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$

$(0\leq t<+\infty)$，$f(x,y)$ 都连续，即 $\lim\limits_{t\to 0^+}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)=0$ ~~$=\lim\limits_{t}f(t\cos\alpha,...$~~

但 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处并不连续。

证：(1°) $\because \lim\limits_{t\to 0^+}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{(t\cos\alpha)^2(t\sin\alpha)}{(t\cos\alpha)^4+(t\sin\alpha)^2}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}$

$=0=f(0,0)$，$\therefore f(x,y)$ 沿着过 $O(0,0)$ 的射线都连续；

注：$\alpha=0$ 时，$y=0$，$x\to 0$

且 $\alpha\neq 0$、$t=x\to 0$，$t\neq 0$

$\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{0}{t^2+0}=0$

(2°) 已在上面证明了 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处的极限值：

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在，且 $O(0,0)$ 是聚点，故 $f(x,y)$

在 $O(0,0)$ 处不连续！

(四)、连续多元函数的主要性质：

(1). 连续多元函数的和、差、积、商(分母不为零)仍是连续的多元函数；

(2). 在复合有意义的前提下，连续多元函数的复合函数仍是连续函数；

(3) "有界闭区域D上的连续多元函数具有良好性"：

(1) 有界性；(2) 最值性；(3) 介值性；(4) 零值性；(5) 一致连续性。

上述性质的证明方法，与一元连续函数的良性证明方法相类似。

(五)、作业：EX9.1

12；13； 14(2),(7),(9),(10)；15；17(1)；18.

附页：

(1). $u=GPA=\dfrac{x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+\cdots+x_i\lambda_i+\cdots+x_n\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i+\cdots+\lambda_n}$. (式1)

其中，x_i,λ_i 分别是第i门课程的学分绩点与学分，$i=1,2,\cdots,n$.

因此，GPA是以课程的学分为权重(Wighted)，学分绩点 x_i

的加权算术平均值. 其中，$\lambda_1>0,\lambda_2>0,\cdots,\lambda_n>0$. 若令

$\omega_i=\lambda_i/\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}=1$.

且 $\omega_1>0,\omega_2>0,\cdots,\omega_n$. 称权重 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 为归一化~~重~~权重.

此时，$u=GPA=x_1\omega_1+x_2\omega_2+\cdots+\omega_i x_i+\cdots+x_n\omega_n$ (式2)

即GPA是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的n元线性函数，同样是超平面。

(2). $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$，$x_i\in R$ (式3)

是一个n维正态分布的概率密度函数. 满足n重反常积分：

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{n个}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n\equiv1,\ \forall n\in N^*$$ (式4)