Lec 3 向量, 平面, 直线习题课

3.1 距离与投影

例 3.1 证明: 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

证明 在 π 中任取点 $Q(a,b,c)$, 则

$$\begin{aligned}
d &= \left||\overrightarrow{QM_0}|\cos\alpha\right| \\
&= \left|\frac{|\overrightarrow{QM_0}||\boldsymbol{n}|\cos\alpha}{|\boldsymbol{n}|}\right| \\
&= \frac{|\overrightarrow{QM_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|} \\
&= \frac{|(x_0-a,y_0-b,z_0-c)\cdot(A,B,C)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\
&= \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(aA+bB+cC)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}
\end{aligned}$$

由 $Q(a,b,c)\in\pi$,$aA+bB+cC+D=0\Rightarrow -(aA+bB+cC)=D$, 代入上式得证.

例 3.2 证明: 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $l:\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ 的距离为

$$d=\frac{|l(x_0-x_1)+m(y_0-y_1)+n(z_0-z_1)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}$$

其中 $M_1(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$

证明 $d=|\overrightarrow{M_1M_0}|\sin\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_0}||\boldsymbol{\tau}|\sin\alpha}{|\boldsymbol{\tau}|}=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{\tau}|}$.

例 3.3 求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ 在平面 $\pi: x-2y+3z+1=0$ 中的投影直线 L_1 的方程.

解

过 L 上已知点 $M_1(1,-1,2)$ 作 π 的垂面 π_1, 则 π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\tau}$, 其中 $\boldsymbol{n}=(1,-2,3),\boldsymbol{\tau}=(1,1,2)$, 所以

$$\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&3\\1&1&2\end{vmatrix}=-7\boldsymbol{i}+1\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}=(-7,1,3)$$

由平面的点法式方程知,π_1 的方程为 $\pi_1: -7(x-1)+1(y+1)+3(z-2)=0\Rightarrow 7x-y-$

$3z+2=0$. 而所求的投影直线 L_1 正是平面 π 与垂面 π_1 的交线, 所以 L_1 的方程为

$$L_1:\begin{cases}x-2y+3z+1=0\\7x-y-3z+2=0\end{cases}$$

3.2 异面直线

例 3.4 证明:$L_1:\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x+2y+2z+2=0\end{cases}$ 为异面直线.

证明 设 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2$, 则 $\boldsymbol{\delta}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}=(0,-1,-1)$,$\boldsymbol{\delta}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\1&2&2\end{pmatrix}=(6,-3,0)$. 取 $\boldsymbol{\delta}_1=(0,1,1),\boldsymbol{\delta}_2=(2,-1,0)$, 在 L_1 中令 $z=0$, 从 $\begin{cases}x+y=1\\2x+y=2\end{cases}\Rightarrow x=1,y=0,z=0$, 即 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{\delta}_1=(0,1,1)$, 且 $M_1(1,0,0)\in L_1$.

在 L_2 中令 $y=0$, 从 $\begin{cases}x-z=2\\x+2z=-2\end{cases}\Rightarrow x=\dfrac{2}{3},y=0,z=-\dfrac{4}{3}$, 即从 $M_2(\dfrac{2}{3},0,-\dfrac{4}{3})\in L_2$.

由 $\overrightarrow{M_1M_2}=(\dfrac{2}{3},0,-\dfrac{4}{3})-(1,0,0)=(-\dfrac{1}{3},0,-\dfrac{4}{3})$, 所以 $\boldsymbol{\delta}_1\times\boldsymbol{\delta}_2\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&-1&0\\-\dfrac{1}{3}&0&-\dfrac{4}{3}\end{vmatrix}=\dfrac{7}{3}\neq 0$, 所以 L_1 与 L_2 异面.

例 3.5 设 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{0}$; $L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$.

1. 证明 L_1 与 L_2 异面;
2. 求 L_1 与 L_2 的公垂线段之长 d;
3. 求公垂线段 L 的方程;
4. 求一个平面使得 $L_1//\pi, L_2//\pi$, 且 π 与 L_1,L_2 等距.

证明

解

1. 设两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(2,-1,0),\boldsymbol{s}_2=(1,0,1)$,$M_1(1,0,3),M_2(-1,2,1)\Rightarrow\overrightarrow{M_2M_1}=(2,-2,2)\Rightarrow$
$$(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_2M_1}=\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\2&-2&2\end{vmatrix}=0-2+0-0+4+2=4\neq 0$$
所以 L_1 与 L_2 异面.
2. 设公垂线为 L, 则 $L\perp L_1, L\perp L_2$, 设 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$, 则 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_2\Rightarrow\boldsymbol{s}=$

$\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-2,1)$. 设公垂线段为 CD, 则 C,D 是两个垂足, 向量 $\overrightarrow{M_2M_1}$ 在公垂线方向向量 $\boldsymbol{s}$ 上的投影:$\overline{M_2M_1}\cos(\overline{M_2M_1},\boldsymbol{s})$, 再取绝对值即为公垂线段的长. 即

$$d = \left|\overrightarrow{M_2M_1}\cos(\overrightarrow{M_2M_1},\boldsymbol{s})\right| = \left||\overrightarrow{M_2M_1}| \cdot \frac{\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\boldsymbol{s}}{|\overrightarrow{M_2M_1}||\boldsymbol{s}|}\right| = \frac{|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

注 两异面直线的距离在两直线上各取一点 M_1, M_2, 设两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$, 则距离为

$$\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}$$

3. 已知公垂线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(-1,-2,1)$,L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(2,-1,0)$, 设 L_1 与 L 所在的平面为 π_2, 则 π_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_2 = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-2,-5)$, 且 L_1 上的点 $M_1(1,0,3)\in\pi_2$. 依点法式 π_2 方程为:

$$\pi_2 : -1(x-1)-2(y-0)-5(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+5z-16=0$$

同理, 设 L_2 与 L 所在的平面为 π_3, 则 π_3 的法向量 $\boldsymbol{n}_3 = \boldsymbol{s}_2 \times \boldsymbol{s} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (2,-2,-2)$, 且 L_2 上的点 $M_2(-1,2,1)\in\pi_3$. 依点法式 π_3 方程为:

$$\pi_3 : 2(x+1)-2(y-2)-2(z-1)=0 \Leftrightarrow x-y-z+4=0.$$

显然平面 π_2,π_3 的交线是公垂线 L, 所以 L 的方程为

$$L : \begin{cases} x+2y+5z-16=0 \\ x-y-z+4=0 \end{cases}$$

4. 因 $\pi//L_1, \pi L_2$, 所以 π 的法向量 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-2,1)$, 又 π 与 L_1, L_2 等距, 故 M_2, M_1 的中点 $O(0,1,2)$ 必在 π 上, 即 $O(0,1,2)\in\pi$, 依点法式, 得 π 的方程为

$$\pi : -1(x-0)-2(y-1)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow x+2y-z=0$$

为 π 的方程.

3.3 二重外积公式与 Lagrange 恒等式

命题 3.1

1. $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$;
2. $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=0$;

证明

1. $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta)^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2$;
2. 我们称这条命题为 **Lagrange** 恒等式, 称 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 为二重向量积, 且有 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$, 我们先来证明这个引理.

引理 3.1 (二重外积公式)

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

证明 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e_1}+a_2\boldsymbol{e_2}+a_3\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e_1}+b_2\boldsymbol{e_2}+b_3\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{e_1}+c_2\boldsymbol{e_2}+c_3\boldsymbol{e_3}$。我们已知

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(b_2c_3-b_3c_2)\boldsymbol{e_1}+(b_3c_1-b_1c_3)\boldsymbol{e_2}+(b_1c_2-b_2c_1)\boldsymbol{e_3}.$$

设 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=d_1\boldsymbol{e_1}+d_2\boldsymbol{e_2}+d_3\boldsymbol{e_3}$, 则

$$\begin{aligned} d_1 &= a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3) \\ &= b_1(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-a_1c_1)-c_1(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-a_1b_1) \\ &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_1. \end{aligned}$$

同理

$$d_2=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2,\quad d_3=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_3.$$

因此

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

命题 3.2

证明 Jacobi 等式:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=0.$$

证明 利用二重外积公式，我们有

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}.$$

将上述三等式相加即得 Jacobi 等式.

3.4 习题

例 3.6

1. 求数 λ, 使得直线 $L_1: \dfrac{x-1}{\lambda}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-3}{-3}$ 与直线 $L_2: \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z+4}{7}$ 相交.
2. 求 L_1 与 L_2 的交点.
3. 求 L_1 与 L_2 确定的平面方程.

解

1. 设 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(\lambda,5,-3)$, $\boldsymbol{s}_2=(3,-4,7)$,$M_1(1,-4,3)$, $M_2(-3,9,-4)$, 则 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-4,13,-7)$.
   当 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}$ 共面时, 两直线可能相交, 即
   $$(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\lambda & 5 & -3\\ 3 & -4 & 7\\ -4 & 13 & -7\end{vmatrix}=0$$
   解得 $\lambda=2$, 此时 $\begin{cases}s_1=(2,5,-3)\\ s_2=(3,-4,7)\end{cases} \Rightarrow s_1 \nparallel s_2$, 所以两直线相交.
2. 由 $L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-3}{-3}$, 得 L_1 的参数方程为
   $$\begin{cases}x=1+2t\\ y=-4+5t\\ z=3-3t\end{cases},t\in\mathbb{R}$$
   从 $L_2: \dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z+4}{7}$, 得 L_2 的参数方程为
   $$\begin{cases}x=-3+3s\\ y=9-4s\\ z=-4+7s\end{cases},s\in\mathbb{R}$$
   设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 L_1 与 L_2 的交点, 则
   $$\begin{cases}x_0=1+2t=-3+3s\\ y_0=-4+5t=9-4s\\ z_0=3-3t=-4+7s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1,s=-1\\ x_0=-1,y_0=1,z_0=0\end{cases}$$
   所以 L_1 与 L_2 的交点为 $M_0(-1,1,0)$.
3. 设 L_1 与 L_2 确定的平面为 π, 则 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 5 & -3\\ 3 & -4 & 7\end{vmatrix}=(23,-23,-23)$,

取 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$, 且交点 $M_0(3,1,0)\in\pi$, 所以 π 的方程为

$$\pi: 1\cdot(x-3)-1\cdot(y-1)-1\cdot z=0 \Leftrightarrow x-y-z-2=0$$

例 3.7 求直线 $L:\begin{cases}x+y-z-1=0\\ x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi: x+y+z=0$ 上的投影直线方程 L_1.

解 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=(0,-2,-2)$, 令 $z=0$, 从 $\begin{cases}x+y=1\\ x-y=1\end{cases}$ 得到 L 上点 $M_0(0,1,0)$.

设过 L 且垂直于平面 π 的平面为 π_1, 则 π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & -2 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(0,-2,2)$, 且 $M_0(0,1,0)\in\pi_1$, 所以 π_1 的方程为

$$\pi_1: 0\cdot(x-0)-2\cdot(y-1)+2\cdot(z-0)=0 \Leftrightarrow -y+z+1=0$$

此时投影直线 L_1 的方程为

$$L_1:\begin{cases}x+y-z-1=0\\ -y+z+1=0\end{cases}.$$

✍ **作业** ex8.2:18(1),19(1),20(2),21(1),22(1),23(1),29,30.