

Lec 1 空间平面与直线

1.1 平面 (plane) 的五种表示形式

定义 1.1 (平面的五种表示形式)

1. 向量式: 设平面 π 过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且与已知的非零向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 垂直, 则平面 π 唯一确定. 设 $P(x, y, z)$ 为 π 上任一点, 则有 $\overrightarrow{M_0P} \perp \mathbf{n}$, 于是有

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0P} = 0$$

称为平面 π 的向量式方程.

2. 点法式: 由向量式, 有 $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0P} = 0$, 即

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

, 称为平面 π 的向量式方程.

3. 一般式: 设 $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, 则有

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

称为平面 π 的一般式方程.

4. 截距式: 一般式中, 设 $d \triangleq -D \neq 0$, 令 $\frac{d}{A} = a, \frac{d}{B} = b, \frac{d}{C} = c$, 则

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

称为平面 π 的截距式方程.

5. 三点式: 设 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ 为 π 上不共线的三点, 则由 A, B, C 三点确定唯一的平面 π , 设 $P(x, y, z)$ 为 π 上任一点, 则有 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 共面, 即

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

称为平面 π 的三点式方程.



1.2 空间直线 (line) 的五种表示形式

定义 1.2 (空间直线的五种表示形式)

1. 向量式: 设直线 l 过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且与已知的非零向量 $\tau = (l, m, n)$ 平行, 则直线 l 唯一确定. 设 $P(x, y, z)$ 为 l 上任一点, 则有 $\overrightarrow{M_0P} \parallel \tau$, 于是有

$$\overrightarrow{M_0P} \times \tau = \mathbf{0}$$

称为直线 l 的向量式方程.

2. 点向式: 由向量式, 有 $\overrightarrow{M_0P} \parallel \tau$, 则有

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

, 称为直线 l 的点向式方程.

3. 参数式, 在点向式中, 令 $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t$, 则有

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

称为直线 l 的参数式方程.

4. 交面式: 设平面 $p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和平面 $p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 不平行, 则 π_1 与 π_2 有交线 l , l 上的点 $P(x, y, z)$ 满足

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

称为直线 l 的交面式方程.

5. 两点式: 设 $Q_1(x_1, y_1, z_1), Q_2(x_2, y_2, z_2)$ 为直线 l 上的两点, 则由 Q_1, Q_2 确定唯一的直线 l , 设 $P(x, y, z)$ 为 l 上任一点, 则有 $\overrightarrow{Q_1P}, \overrightarrow{Q_1Q_2}$ 共线, 即

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

称为直线 l 的两点式方程.



1.3 面面, 线线, 线面之间的关系

命题 1.1

设

$$\begin{cases} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & \mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1) \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, & \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2) \\ L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}, & \boldsymbol{\tau}_1 = (l_1, m_1, n_1) \\ L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}, & \boldsymbol{\tau}_2 = (l_2, m_2, n_2) \end{cases}$$

则

1. $\pi_1 // \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{0}$.
2. $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$.
3. π_1 与 π_2 的夹角 $\alpha (0 < \alpha \leq \pi)$, $\cos \alpha = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \mathbf{n}_1^0 \cdot \mathbf{n}_2^0$, 即得 $\alpha = \arccos \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}$.
4. $L_1 // L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 // \boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.
5. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 \perp \boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 = 0 \Leftrightarrow l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.
6. L_1 与 L_2 的夹角 $\alpha (0 \leq \alpha \leq \pi)$, $\cos \alpha = \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2}{|\boldsymbol{\tau}_1| \cdot |\boldsymbol{\tau}_2|} = \boldsymbol{\tau}_1^0 \cdot \boldsymbol{\tau}_2^0$, 即得 $\alpha = \arccos \frac{\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2}{|\boldsymbol{\tau}_1| \cdot |\boldsymbol{\tau}_2|}$.
7. $L_1 \perp \pi_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 // \mathbf{n}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 \times \mathbf{n}_1 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \frac{A_1}{l_1} = \frac{B_1}{m_1} = \frac{C_1}{n_1}$.
8. $L_1 // \pi_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 \perp \mathbf{n}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \Leftrightarrow A_1l_1 + B_1m_1 + C_1n_1 = 0$.
9. L_1 与 π_1 的夹角 $\beta (0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2})$, $\cos(\frac{\pi}{2} - \beta) = \frac{|\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n}_1|}{|\boldsymbol{\tau}_1| \cdot |\mathbf{n}_1|} = |\boldsymbol{\tau}_1^0 \cdot \mathbf{n}_1^0|$, 故 $\sin \beta = |\boldsymbol{\tau}_1^0 \cdot \mathbf{n}_1^0|$, 即得 $\beta = \arcsin |\boldsymbol{\tau}_1^0 \cdot \mathbf{n}_1^0|$.



1.4 例题

例 1.1 分别求已知点 $M(1, -1, -2)$ 关于点 $A(1, 0, 1)$, 平面 $\pi: 3x + 4y - 5z - 1 = 0$, 直线 $L: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{0}$ 的对称点 $Q(x, y, z)$.

解

1. $A(1, 0, 1)$ 是线段 MQ 的中点, 有
$$\begin{cases} \frac{1+x}{2} = 1 \\ y = \frac{-1+y}{2} = 0 \\ z = \frac{-2+z}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}, \text{ 即 } Q(1, 1, 4).$$
2. $\mathbf{n} = (3, 4, -5)$, 则有
$$\begin{cases} \overrightarrow{MQ} // \mathbf{n} \\ MQ \text{ 中点 } N(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z-2}{2}) \text{ 在 } \pi \text{ 上} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = -2 - 5t \\ 3(\frac{x+1}{2}) + 4(\frac{y-1}{2}) - 5\frac{z-2}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = \frac{12}{25}, \text{ 带回 } x, y, z \text{ 可知 } Q(\frac{61}{25}, \frac{23}{25}, -\frac{10}{25}).$$

3. $\tau = (-1, 2, 0)$, 则有 $\begin{cases} \overrightarrow{MQ} \perp \tau \\ MQ \text{ 中点 } N(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z-2}{2}) \text{ 在 } L \text{ 上} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{2} = 1-t \\ \frac{y-1}{2} = 1+2t \\ \frac{z-2}{2} = 1 \\ -1(x-1) + 2(y+1) + 0(z+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 3+4t \\ z = 4 \\ -1(x-1) + 2(y+1) + 0(z+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t = -\frac{5}{3}, \text{ 带回 } x, y, z \text{ 可知 } Q(\frac{13}{3}, -\frac{1}{5}, 4).$$

例 1.2 设 $A(1, 0, 1), B(0, 1, 1), C(2, 0, 3), D(1, 1, 1)$ 为已知的四点, 求

1. 求四面体 $\Omega: A-BCD$ 的体积 $V(\Omega)$.
2. 求 B, C, D 三点确定的三角形 \triangle 的面积 S_{\triangle} .
3. 求 B, C, D 三点确定的平面方程.


解

$$1. V(\Omega) = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{BA}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}.$$

$$2. S_{\triangle} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k}| = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$3. \text{ 设 } P(x, y, z) \text{ 为 } \pi \text{ 中的任一点, 则 } \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD} \text{ 共面, 即 } \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ 解得}$$

$\pi: 2y + z - 3 = 0$ 为所求平面方程.

 作业 ex8.2: 1, 2, 3, 6, 7, 14(1), 15(1), 16.