Lec 21 微积分基本定理及其应用

21.1 微积分基本定理

定理 21.1 (微积分基本定理)

1. 设 $f(x) \in C[a,b]$,$x \in [a,b]$, $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 可微, 且 $\dfrac{\mathrm{d}\,\Phi(x)}{\mathrm{d}x} = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x), x \in [a,b]$.
2. 设 $f(x) \in C[a,b]$,$x \in [a,b]$, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) := F(x)\Big|_a^b$.

♡

证明 设 $x + \Delta x \in [a,b]$, 则

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由积分中值定理, 存在 $\xi \in [x, x+\Delta x]$, 使得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\Delta x.$$

故有 $x \leqslant \xi \leqslant x + \Delta x$, 使得 $\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = f(\xi)\Delta x \Rightarrow \dfrac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = f(\xi) \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}\,\Phi(x)}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x} = f(x)$. 即 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

例 21.1 设 $f(x) = e^{x^2}$, 得 $\left(\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)' = e^{x^2}$, 即 $\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 是 e^{x^2} 在 $[0,x]$ 上的一个原函数.

但是, 我们无法用初等函数表示 $\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$, 就像我们无法用有限个 x 的幂函数表示 $\sin x$ 一样, 我们也可以像用 sin 一样, 找一个符号将 $\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ 记为一个新的函数, 并继续研究它的性质.

证明 $F'(x) = f(x) \in C[a,b]$, 则 $F(x)$ 与 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 都是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数, 故存在 $C \in \mathbb{R}$, 使得 $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + C$. 取 $x = a$, 得 $F(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t + C = C$, 取 $x = b$, 得 $F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + C$. 故 $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. 即 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

我们将 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 记为 $F(x)\Big|_a^b$. 即 $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

注 助教注: 非常不建议将 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 写成 $\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$. 尽管我们知道对于后者, 被积上限与积分变量符号相同, 意义不同 (有点像写 C++ 时定义的函数的传入参数与局部变量的关系). 但是为了避免复杂公式中的混淆, 请养成习惯使用前者. 我们通常管后者叫作符号的滥用 (abuse of notation).

例 21.2 计算

1. $\displaystyle\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\Big|_a^b = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3, \int_a^b x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4\Big|_a^b = \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{4}a^4;$
2. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2;$
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = 0;$
4. $\displaystyle\int_0^1 \arctan x dx = \left(x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$
5. $\displaystyle\int_1^3 x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}\right)\Big|_1^3 = 9\ln 3 - 3 + \frac{1}{9}.$

21.2 例题

例 21.3 设 $f(x)\in C[a,b], a\leqslant f(x)\leqslant b$, 且 $\varphi(x)$ 可微, 则 $\displaystyle\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(\varphi(x))\varphi'(x).$

证明 令 $\displaystyle F(u)=\int_a^u f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $\displaystyle\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(x))$. 由复合函数求导法则, 有 $(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$. 即 $\displaystyle\left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(\varphi(x))\varphi'(x).$

例 21.4 设 $f\in C[a,b], a\leqslant\alpha(x)<\beta(x)\leqslant b$, 且 $\alpha(x),\beta(x)$ 可微, 则

$$\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

证明 任取 $A\in[a,b]$, $\displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha(x)}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. 由上一例题, 有 $\displaystyle\left(\int_{\alpha(x)}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -\left(\int_A^{\alpha(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(\alpha(x))\alpha'(x)$. 同理, 有 $\displaystyle\left(\int_A^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(\beta(x))\beta'(x)$. 故 $\displaystyle\left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(\beta(x))\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x)$.

例 21.5 设 $f,g\in C[a,b]$, 则有 Cauchy 不等式:

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

当且仅当 $f(t)=kg(t)$ 时取等号.

证明 $(f(x)-tg(x))^2\geqslant 0, \forall t\in\mathbb{R}$. 即 $\displaystyle\int_a^b (f(x)-tg(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0$. 展开得 $\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2t\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + t^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$. 即 $\displaystyle\Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0$. 即 $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant$

$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$

例 21.6 设 $f,g\in C[a,b]$, 则有 Minkowski 不等式:

$$\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明 $0\leqslant\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x+2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$. 而 $2\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 2\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$. 故 $0\leqslant\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x+2\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$. 即 $\left(\int_a^b (f(x)+g(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$.

例 21.7 设 $f(x)\in C[a,b], f(x)\geqslant 0\forall x\in[a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0\Rightarrow f(x)=0,\forall x\in[a,b]$.

证明 若存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)>0$, 则由 $f(x)\in C[a,b]$, 存在 $\delta>0$, 使得 $f(x)\geqslant\frac{f(x_0)}{2}>0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[a,b]$. 故 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 2\delta\frac{f(x_0)}{2}>0$. 矛盾. 故 $f(x)=0,\forall x\in[a,b]$.

例 21.8 证明:$\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}<\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2$.

证明 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-x}$, 则 $f'(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x}=\mathrm{e}^{x^2-x}(2x-1)$. 由 $f'(x)$ 的符号, 可知 $f(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上递减, 在 $[\frac{1}{2},2]$ 上递增. 故 $f(2)>f(x)>f(\frac{1}{2})$. 两边积分得 $\int_0^2 f(2)\,\mathrm{d}x>\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x>\int_0^2 f(\frac{1}{2})\,\mathrm{d}x$. 即 $2\mathrm{e}^2>\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x>2\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}$. 即 $\frac{2}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}<\int_0^2 \mathrm{e}^{x^2-x}\,\mathrm{d}x\leqslant 2\mathrm{e}^2$.

例 21.9 计算: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\tan t}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}t}$.

解

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\tan t}\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}t}\\=&\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan(\sin x)}\cos x}{\sqrt{\sin(\tan x)}\sec^2 x}\\=&\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\tan x}\cos x}{\sqrt{\sin x}\sec^2 x}\\=&\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\cos x}{\sqrt{x}\sec^2 x}=1.\end{aligned}$$

定理 21.2 (积分中值定理)

如若 $f\in C[a,b], g\in\mathbb{R}[a,b]$ 且在 $[a,b]$ 上不变号, 则有 $m,M=f([a,b])$ 使得成立公式

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \eta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

而且一定存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = \eta$.

在证明积分中值定理前我们先证明一个引理:

引理 21.1

设 $f \in R[a,b]$, 且 $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$, 则有子区间 $[c,d] \subset [a,b]$ 和 $\mu > 0$, 使在区间 $[c,d]$ 上成立 $f(x) \geqslant \mu$.

证明 证 1

从积分定义可知, 存在 $[a,b]$ 的一个分划 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 使得对从属于 P 的任何介点集 ξ, 成立

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > \frac{I}{2} > 0.$$

记 $m_i = \inf\limits_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), i = 1, 2, \cdots, n$, 并对于上面的和式取下确界, 就得到

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \geqslant \frac{I}{2} > 0.$$

显然在和式中至少有一项大于 0. 设这一项是第 k 项, 则就可取 $\mu = m_k, [c,d] = [x_{k-1}, x_k]$.

证明 证 2

用反证法. 若结论不成立, 则（由对偶法则）对于每个 $\mu > 0$ 和每个子区间 $[c,d]$, 存在 $\xi \in [c,d]$, 满足 $f(\xi) < \mu$. 在 f 的 Riemann 和式中对于任何分划都取满足这个要求的介点集, 这样就得到

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \mu(b-a).$$

由于 $\mu > 0$ 是任意的, 因此只能得到

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0,$$

与条件矛盾.

$\xi \in [a,b]$ 的证明在教材上已经给出, 这里仅证明 $\xi \in (a,b)$.

证明 下列三种情况是平凡的, 不需要多加讨论:

(1) 如果积分 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 0$, 则积分第一中值定理可以通过不等式左边也等于 0, 于是 ξ 可取, 结论已成立.

(2) 如果 f 在 $[a,b]$ 的最小值和最大值相等, 即 $m = M$, 则 f 为常值函数, 因此 ξ 也可取.

(3) 如果 $m < M$, 且 $\eta \in (m, M)$ 时, 连续函数的介值性可知存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = \eta$.

要讨论的只是以上三种情况之外的问题. 不妨设 g 在区间 $[a,b]$ 上非负, 且有 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx >$

0. 又由于 $f(x)-m$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均非负, 因此得到

$$0=\int_a^b (f(x)-m)g(x)dx \geqslant \int_c^d (f(x)-m)dx > 0,$$

可以上式右边的积分仍等于 0. 由于 $f\in C[c,d]$, 这只能导致在区间 $[c,d]$ 上成立 $f(x)\equiv m$.

因此在 $c,d\in(a,b)$ 中任取一点作为中值点即可.

✍ **作业** ex5.1:13,14,15,18(1)(2);CH5:18.