

## Week 2

### 2.1 Mar 3 ex8.3:1,2,3.

🔥 习题 8.3.1 指出下列方程中那些是旋转曲面, 并说明他们是怎样产生的.

1.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1;$

解  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$  绕  $x$  轴旋转.

2.  $x^2 + y^2 + z^2 = 1;$

解  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$  绕  $x$  轴旋转 (其他类似的任意情况合理即可).

3.  $x^2 + 2y^2 + 34z^2 = 1;$

解 非旋转曲面, 是椭球.

4.  $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1;$

解  $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转.

5.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1;$

解 非旋转曲面, 是双叶双曲面.

6.  $x^2 - y^2 - z^2 = 1;$

解  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$  绕  $x$  轴旋转.

7.  $x^2 + y^2 = 4z;$

解  $\begin{cases} x^2 = 4z, \\ y = 0. \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转.

8.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 3z.$

解 非旋转曲面, 是双曲抛物面.

🔥 习题 8.3.2 指出下列方程在平面直角坐标系  $Oxy$  和空间直角坐标系  $Oxyz$  中分别表示怎样的几何图形.

1.  $x = 2;$

解

(a).  $Oxy$  平面上的一条直线;

(b).  $Oxyz$  空间中的一个平面.

2.  $y = x + 1;$

解

(a).  $Oxy$  平面上的一条直线;(b).  $Oxyz$  空间中的一个平面.

3.  $x^2 + y^2 = 4$ ;

解

(a).  $Oxy$  平面上的一条圆;(b).  $Oxyz$  空间中的一个圆柱面.

4.  $x^2 - y^2 = 1$ ;

解

(a).  $Oxy$  平面上的一条双曲线;(b).  $Oxyz$  空间中的一个双曲柱面.

5.  $y = x^2 + 1$ ;

解

(a).  $Oxy$  平面上的一条抛物线;(b).  $Oxyz$  空间中的一个抛物柱面.

6. 
$$\begin{cases} 5x - y + 1 = 0, \\ 2x - y - 3 = 0. \end{cases};$$

解

(a).  $Oxy$  平面上的点  $(-\frac{4}{3}, -\frac{11}{3})$ ;(b).  $Oxyz$  空间中的直线.

7. 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \\ y = 2. \end{cases};$$

解

(a).  $Oxy$  平面上的两点  $(\pm\frac{\sqrt{20}}{3}, 2)$ ;(b).  $Oxyz$  空间中的两条直线.

8. 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1, \\ x = 4. \end{cases}.$$

解

(a).  $Oxy$  平面上的两点  $(4, \pm 3\sqrt{3})$ ;(b).  $Oxyz$  空间中的两条直线. 习题 8.3.3 求下列旋转曲面的方程, 并指出他们的名称.

1. 曲线 
$$\begin{cases} y^2 - \frac{z^2}{4} = 1, \\ x = 0. \end{cases}$$
 绕  $z$  轴旋转一周;

解 方程为  $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ , 是单叶双曲面.

2. 曲线  $\begin{cases} y = \sin x (0 \leq x \leq \pi), \\ z = 0. \end{cases}$  绕  $x$  轴旋转一周;

解 方程为  $y^2 + z^2 = \sin^2 x$ , 非二次曲面.

3. 曲线  $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36, \\ z = 0. \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转一周;

解 方程为  $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$ , 是椭圆.

## 2.2 Mar 5 ex8.4:1,2,4(4)(5)(6)(10),8,9,11.

- 习题 8.4.1 通过坐标系的平移, 化简方程  $x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 2y + z - 1 = 0$ . 并指出曲面的类型.

解 令  $\begin{cases} x' = x - 1, \\ y' = y + 1, \\ z' = z + \frac{1}{2}. \end{cases}$  则原方程化为  $x'^2 - y'^2 - z'^2 = \frac{3}{4}$ , 是双叶双曲面.

- 习题 8.4.2 通过坐标变换, 化简方程  $xy - x + y + z + 1 = 0$ . 并指出曲面的类型.

解 令  $\begin{cases} x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \\ z = z'. \end{cases}$  带入原式整理得  $x'^2 - y'^2 - 2\sqrt{2}y' + 2z' + 2 = 0$ . 再令  $\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' + \sqrt{2}, \\ z'' = z' + 2. \end{cases}$

带入得  $x''^2 - y''^2 = -2z''$ , 是双曲抛物面.

- 习题 8.4.4 将下列方程按要求做相应的变换:

- (4)  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  转化为球面坐标系方程;

解 令  $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$  带入原式整理得  $r^2(\sin^2 \theta \cos^2 \varphi - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \cos^2 \theta) = r^2(2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi - 1) = 1$ .

- (5) 柱面坐标系方程  $r^2 + 2z^2 = 4$  转化为球面坐标系方程;

解 利用柱面坐标系和球面坐标系的关系  $r^2 = x^2 + y^2, z = z$ . 带入原式整理得  $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ . 然后再令  $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$  带入得  $r^2(\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \theta) = r^2(1 + \cos^2 \theta) = 4$ .

- (6) 球面坐标系方程  $r = 2 \cos \varphi$  转化为柱面坐标系方程;

解  $r(r \sin \theta) = 2r \sin \theta \cos \varphi$ , 即化为平面直角坐标系  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2} = 2x$ , 再转化为柱面坐标系  $\sqrt{r^2 + z^2} r = 2r \cos \theta$ , 化简得到  $\sqrt{r^2 + z^2} = 2 \cos \theta$

(10) 柱面坐标系方程  $r^2 \cos 2\theta = z$  转化成直角坐标系方程.

解  $r^2 \cos 2\theta = r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = x^2 - y^2 = z$ , 即  $x^2 - y^2 = z$ .

习题 8.4.8 已知  $Oxyz$  空间中以原点为球心,  $a$  为半径的球面的参数方程表示为

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v, \\ y = a \sin u \sin v, \\ z = a \cos u, \end{cases} \quad u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi)$$

求  $Oxyz$  空间中以点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  为球心,  $a$  为半径的球面的一个参数方程表示.

解

$$\begin{cases} x = x_0 + a \sin u \cos v, \\ y = y_0 + a \sin u \sin v, \\ z = z_0 + a \cos u, \end{cases} \quad u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi)$$

习题 8.4.11 求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

的一个参数方程表示.

解

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v, \\ y = b \sin u \sin v, \\ z = c \cos u, \end{cases} \quad u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi)$$

习题 8.4.9 分别求单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

和双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

的一个参数方程表示.

解 给出四种方案

1. 利用双曲函数

$$\begin{array}{ll} \text{单叶} & \begin{cases} x = a \cosh u \cos v, \\ y = b \cosh u \sin v, \\ z = c \sinh u, \\ u \in (-\infty, +\infty), v \in [0, 2\pi) \end{cases} \\ \text{双叶} & \begin{cases} x = a \sinh u \cos v, \\ y = b \sinh u \sin v, \\ z = c \cosh u, \\ u \in (-\infty, +\infty), v \in [0, 2\pi) \end{cases} \end{array}$$

2. 利用  $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

$$\text{单叶} \begin{cases} x = a \sec u \cos v, \\ y = b \sec u \sin v, \\ z = c \tan u, \\ u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), v \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

$$\text{双叶} \begin{cases} x = a \tan u \cos v, \\ y = b \tan u \sin v, \\ z = c \sec u, \\ u \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), v \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

3. 利用  $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

$$\text{单叶} \begin{cases} x = a \csc u \cos v, \\ y = b \csc u \sin v, \\ z = c \cot u, \\ u \in (0, \pi), v \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

$$\text{双叶} \begin{cases} x = a \cot u \cos v, \\ y = b \cot u \sin v, \\ z = c \csc u, \\ u \in (0, \pi), v \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

4. 利用类似柱坐标系的形式

$$\text{单叶} \begin{cases} x = a\sqrt{1+u^2} \cos v, \\ y = b\sqrt{1+u^2} \sin v, \\ z = cu, \\ u \in (-\infty, +\infty), v \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

$$\text{双叶} \begin{cases} x = a\sqrt{u^2-1} \cos v, \\ y = b\sqrt{u^2-1} \sin v, \\ z = cu, \\ |u| \geq 1, v \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

## 2.3 Mar 7 ex9.1:12,13,14(2)(7)(9)(10),15,17(1),18

习题 9.1.12 设  $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2 (x \neq 0)$ , 求  $f(2, 3)$ ,  $f(x, y)$ .

解 令

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = \frac{y}{x}, \end{cases} \quad x \neq 0$$

注意到  $\frac{y}{x} = -1 \Leftrightarrow x + y = 0$ , 因此  $f(u, v)$  的定义域应为  $\{(u, v) | u \neq 0, v \neq -1\} \cup \{(0, -1)\}$   
对于  $u \neq 0, v \neq -1$  时可解得

$$\begin{cases} x = \frac{u}{v+1}, \\ y = \frac{uv}{v+1}, \end{cases} \quad u \neq 0, v \neq -1$$

$$\text{因此 } f(u, v) = \frac{u^2(1-v^2)}{(v+1)^2} = \frac{u^2(1-v)}{1+v}.$$

而对于  $u = 0, v = -1$  时令  $x = t \neq 0, y = -t$ , 可得  $f(0, -1) = 0$  综上

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(1-y)}{1+y}, & x \neq 0, y \neq -1; \\ 0, & x = 0, y = -1; \end{cases}$$

计算  $f(2, 3) = \frac{2^2(1-3)}{1+2} = -2$ .

习题 9.1.13 设  $f(x, y) = x^y, \varphi(x, y) = x+y, \psi(x, y) = x-y$ , 求  $f[\varphi(x, y), \psi(x, y)], \varphi[f(x, y), \psi(x, y)], \psi[\varphi(x, y), f(x, y)]$ .

解

$$f[\varphi(x, y), \psi(x, y)] = (x+y)^{x-y},$$

$$\varphi[f(x, y), \psi(x, y)] = x^y + x - y,$$

$$\psi[\varphi(x, y), f(x, y)] = x + y - x^y.$$

习题 9.1.14

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow a} \frac{\sin xy}{x}$

解

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow a} \frac{\sin xy}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow a} \frac{y \sin xy}{xy} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow a} y \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow a} \frac{\sin xy}{xy} \\ &= a \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} \\ &= a \end{aligned}$$

(7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$

解

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty} \frac{6(x^2 + y^2)}{(x+y)^3} \\ &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty} \frac{6(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty} \frac{6}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{6}{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$

解


$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sqrt{u+1}-1} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\frac{u}{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$

(10)  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$

解

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} &= \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{xy}{2(x+y)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2(x+y)}{xy}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{2}{y}} \\
 &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{2}{x} + \frac{2}{y}}
 \end{aligned}$$

但  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{2}{x} + \frac{2}{y}$  并不存在, 当  $y = \frac{x}{kx-1}$  时,  $\frac{2}{x} + \frac{2}{y} = k$ . 因此原极限不存在.

 **习题 9.1.15** 若  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 问沿怎样的方向  $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ , 下列极限存在?

1.  $\lim_{r \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^2-y^2}},$
2.  $\lim_{r \rightarrow +\infty} e^{x^2-y^2} \sin 2xy.$

解

1.

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^2-y^2}} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{r^2 \cos 2\theta}} \\
 &= \begin{cases} +\infty, & \cos 2\theta > 0 \\ 0, & \cos 2\theta < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$


其中, 由于  $x^2 - y^2 \neq 0$ , 可得  $\cos 2\theta \neq 0$ .

因此当  $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$  时极限存在.

2.

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow +\infty} e^{x^2-y^2} \sin 2xy &= \lim_{r \rightarrow +\infty} e^{r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)} \sin(2r^2 \sin \theta \cos \theta) \\
 &= \lim_{r \rightarrow +\infty} e^{r^2 \cos 2\theta} \sin(r^2 \sin 2\theta) \\
 &= \begin{cases} \text{不存在}, & \cos 2\theta \geq 0 \\ 0, & \cos 2\theta < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

因此当  $\theta \in (\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$  时极限存在.

 **习题 9.1.17(1)** 研究下列函数的连续性  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x-y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

解

1. 对于满足  $x - y \neq 0$  的点处显然连续.

2. 对于  $x = y = a \neq 0$  的点, 当  $k \neq 0$  时, 则有  $\lim_{t \rightarrow 0, x=a+t, y=a+kt} \frac{xy}{x-y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(a+t)(a+kt)}{(1-k)t}$

不存在.

3. 对于  $(0,0)$  点, 考虑  $\lim_{t \rightarrow 0, x=t^2+t, y=t^2-t} \frac{xy}{x-y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 - t^2}{2t^2} = -\frac{1}{2}$  与  $\lim_{t \rightarrow 0, x=t, y=t} 0 = 0$  可知极限也不存在.

综上, 在  $x \neq y$  处连续.

 习题 9.1.18 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在点  $(0,0)$  沿着过此点的每一射线  $x = t \cos \alpha, y = t \sin \alpha (0 \leq t \leq +\infty)$  连续, 即  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0,0)$ , 但此点在点  $(0,0)$  处并不连续.

证明

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^4 \cos^4 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y=kx^2} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^4}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}$$

这表明在点  $(0,0)$  处并不连续.