Lec 30 第二类曲面积分

莫比乌斯环 (Möbius strip) 是一个不可定向的曲面

$$x = (1 + v\cos\theta)\sin 2\theta$$

$$y = (1 + v\cos\theta)\cos 2\theta$$

$$z = v\sin\theta$$

我们仅讨论可定向的曲面 S,S 也叫有向曲面. 对于 S 上任意一点 M_0, 我们可以取出两个单位法向量 $\boldsymbol{n}(M_0)$ 和 $-\boldsymbol{n}(M_0)$. 通过连续滑动可以确定曲面上所有的点 M 处的法向量 $\boldsymbol{n}(M)$, 并且可以使得 $\boldsymbol{n}(M)$ 是连续的. 我们称这样的法向量为**正向法向量**, 而 $-\boldsymbol{n}(M)$ 为**负向法向量**.

我们不会遇到可微性过于复杂的曲面, 大家仅用掌握一个光滑曲面, 或者退而求其次的, 分区域光滑曲面上的第二类曲面积分. 甚至说, 我们几乎只讨论可以参数化为形如

$$\boldsymbol{r} = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j} + z(u,v)\boldsymbol{k} \quad (u,v) \in D$$

的光滑曲面, 因此通常还要求 $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ 的可微性还非常好.

在实际问题中, 我们通常先指定定向 $\boldsymbol{n}$ 为正向, 然后比较 $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的方向, 如果两者相同, 我们称 $\boldsymbol{r}'_u \times \boldsymbol{r}'_v$ 指向曲面的正向, 称 (u,v) 为正向参数.

设 $\boldsymbol{v}$ 是一个不可压缩流体的速度场,S 是一张可定向的曲面. 确定方向的单位法向量为 $\boldsymbol{n}$, 取 S 上一小块面积元 $\mathrm{d}S$, 因此" 有向面积元" 为 $\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$.

因此我们定义第二类曲面积分为

$$\iint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S$$

称之为 $\boldsymbol{v}$ 在曲面 S 上的**第二类曲面积分**. 当曲面 S 是一个封闭曲面时, 称积分为向量场通过封闭曲面的通量, 记为

$$\oiint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

向量场的曲面积分有如下性质

1. 对向量场的线性性: 若 $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$, 则
$$\iint_S \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = c_1\iint_S \boldsymbol{v}_1\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} + c_2\iint_S \boldsymbol{v}_2\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
2. 积分区域可加性: 若 $S = S_1 + S_2$, 则
$$\iint_S \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{S_1} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{S_2} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
3. 对曲面的方向性: 若用 S^+ 和 S^- 分别表示曲面 S 的正向和负向,$\boldsymbol{n}^+$ 和 $\boldsymbol{n}^-$ 分别表示正向和负向的单位法向量, 则
$$\iint_{S^+} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{S^-} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

30.1 第二类曲面积分的计算

设 S 是一张定向光滑曲面, 具有正向参数表示

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k}$$

此时有向面积元 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\boldsymbol{r}_u'\times\boldsymbol{r}_v')\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

因此我们第二类曲面积分可以变为 D_{uv} 上的二重积分

$$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint_{D_{uv}}(\boldsymbol{v}\cdot r_u'\times\boldsymbol{r}_v')\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

注 上面的公式就已经是给出 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{n},S$ 时的计算式了, 但是我们在现实生活中有时候会只测量各点处平行于 Oxy 平面的流量 P, 平行于 Oxz 平面的流量 R, 平行于 Oyz 平面的流量 Q, 用这三个流量最终形成形如

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$

的计算形式.

在此之前, 我们要给出 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 的形式化定义.

我们已知 x,y,z 是光滑的, 以参数 (u,v) 为自变量的函数. 我们记

$$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$$

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$$

不难验证, 此时测量出的流速恰好就是 $\boldsymbol{v}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$. 具体而言我们有

$$I=\iint_S P\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+Q\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+R\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=\iint_S\begin{vmatrix}P&Q&R\\x_u'&y_u'&z_u'\\x_v'&y_v'&z_v'\end{vmatrix}\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$$

也就是说下面两个问题是等价的:

例 30.1 设 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$,$z\geq 0$, 取正向为上侧,

1. 给定 $\boldsymbol{v}=(x^2,y^2,z^2)$, 计算
$$\iint_S\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S};$$
2. 计算
$$\iint_S x^2\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

解 将曲面参数化为

$$\begin{cases} x = a\sin\theta\cos\varphi \\ y = a\sin\theta\sin\varphi \\ z = a\cos\theta \end{cases}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi]$$

因此

$$\boldsymbol{r}'_\theta = \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\varphi \\ a\cos\theta\sin\varphi \\ -a\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} -a\sin\theta\sin\varphi \\ a\sin\theta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_\varphi = \begin{pmatrix} a^2\sin^2\theta\cos\varphi \\ a^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ a^2\sin\theta \end{pmatrix}$$

注意到 $\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_\varphi \cdot (0,0,1) = a^2\sin\theta > 0, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, 因此 (u, v) 是正向参数, 而 $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_\varphi}{|\boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_\varphi|}$ 是正向法向量.

又

$$\boldsymbol{v} = (x^2, y^2, z^2) = (a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi, a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi, a^2\cos^2\theta)$$

因此

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{r}'_\theta \times \boldsymbol{r}'_\varphi = a^4\cos^3\theta\sin\theta + a^4\sin^4\theta(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)$$

故

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{D_{uv}} (\boldsymbol{v} \cdot r'_u \times \boldsymbol{r}'_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} (a^4\cos^3\theta\sin\theta + a^4\sin^4\theta(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi))\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^4\cos^3\theta\sin\theta)2\pi\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}a^4. \end{aligned}$$

解 将曲面参数化为

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \end{cases} \qquad x^2 + y^2 \le a^2$$

因此

$$\boldsymbol{r}'_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}'_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\dfrac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \boldsymbol{r}'_x \times \boldsymbol{r}'_y = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ \dfrac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

又

$$\boldsymbol{v} = (x^2, y^2, z^2) = (x^2, y^2, a^2 - x^2 - y^2)$$

故

$$I = \iint_{D_{xy}} \left[a^2 - x^2 - y^2 + \frac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y^3}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

由奇偶性

$$\iint_{D_{xy}} \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} \frac{y^3}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

故

$$I = \iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} (a^2-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}a^4$$

我们由法二获得了一点灵感, 因为这道题里面 z 可以显式的写为 x, y 的函数 (而不是隐函数), 因此我们可以将曲面 S 的参数化为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + \sqrt{a^2-x^2-y^2}\boldsymbol{k}$$

我们不妨考虑以下问题: 如果 S 是显式曲面

$$z = f(x,y), \quad (x,y)\in D,$$

且不妨设曲面的正向为曲面的上侧，这时 (x,y) 是曲面的正向参数，那么

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D (-Pf_x' - Qf_y' + R)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

注 助教注: 这里的 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 是平面上的面积元, 而不是有向面积元 $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$. 也就是说 $\iint_D (-Pf_x' - Qf_y' + R)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 是一个二重积分, 而不是一个第二型曲面积分.

注 这里定向的逻辑具体是这样的:

1. 计算 $\boldsymbol{r}_x' \times \boldsymbol{r}_y'$ 的方向
2. 发现恰好是朝曲面上侧
3. 而正向定义为上侧
4. 因此 $\boldsymbol{r}_x' \times \boldsymbol{r}_y'$ 就是正向法向量
5. 因此 (x,y) 是正向参数
6. 因此 $I = (\boldsymbol{+1}) \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f_x' \\ 0 & 1 & f_y' \end{vmatrix}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

30.2 第二类曲面积分的对称性

我们考虑第二型曲面积分

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

其具有偶零奇倍律, 即

1. 当 $P(x,y,z)$ 是关于 x 的偶函数, 且 S 关于 $x=0$, 即 Oyz 平面对称, 时
$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=0$$
,
2. 当 $P(x,y,z)$ 是关于 x 的奇函数, 且 S 关于 $x=0$, 即 Oyz 平面对称, 时
$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=2\iint_{S_1} P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$
其中 Σ_1 是 $x\geqslant 0$ 部分的 Σ.
3. 当 $Q(x,y,z)$ 是关于 y 的偶函数, 且 S 关于 $y=0$, 即 Oxz 平面对称, 时
$$\iint_S Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=0$$
,
4. 当 $Q(x,y,z)$ 是关于 y 的奇函数, 且 S 关于 $y=0$, 即 Oxz 平面对称, 时
$$\iint_S Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x=2\iint_{S_1} Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$$
其中 Σ_1 是 $y\geqslant 0$ 部分的 Σ.
5. 当 $R(x,y,z)$ 是关于 z 的偶函数, 且 S 关于 $z=0$, 即 Oxy 平面对称, 时
$$\iint_S R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0$$
,
6. 当 $R(x,y,z)$ 是关于 z 的奇函数, 且 S 关于 $z=0$, 即 Oxy 平面对称, 时
$$\iint_S R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=2\iint_{S_1} R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$
其中 Σ_1 是 $z\geqslant 0$ 部分的 Σ.

✍ 作业 ex11.4:1(1)(2)(4)(5)(6)(7),2.