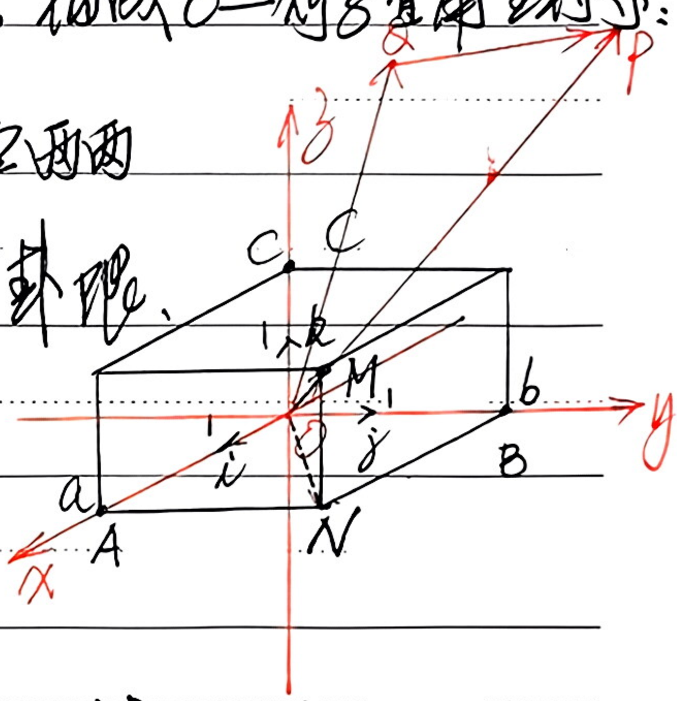
数分B2 第1讲：三维向量的五种运算

(一) 三维直角坐标系与三维向量的线性运算：

(1) 直角坐标系：从空间一点O出发，作三条两两垂直(正交)的射线，并确定单位与方向，构成O—xyz直角坐标系。



xOy坐标面，yOz坐标面，xOz坐标面两两正交，并将整个空间分割成八个卦限。

设M为空间任一点，过M点分别作Ox，Oy，Oz轴的垂面，可得三个垂足A，B，C，设A，B，C代表的数分别为a，b，c，则点M与有序数组(a，b，c)一一对应，记作M(a，b，c)。坐标原点为O(0，0，0)，在Ox，Oy，Oz轴正向上分别取三个单位向量$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$，则$\overrightarrow{OA}=a\vec{i}$，$\overrightarrow{OB}=b\vec{j}$，$\overrightarrow{OC}=c\vec{k}$，依平面向量加法的平行四边形法则，$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=a\vec{i}+b\vec{j}$

n维向量：N-dimensional Vector

再由平面向量的三角形法则，$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OC}$

$=ai+bj+ck \triangleq (a,b,c)$，从而，点M与向径$\overrightarrow{OM}$及向量

(a,b,c)三位一体，一一对应。显然有：$i=(1,0,0)$，$j=(0,1,0)$，

$k=(0,0,1)$ 且 $i\perp j$，$i\perp k$，$j\perp k$。且$|\overrightarrow{OM}|^2=|\overrightarrow{ON}|^2+|\overrightarrow{NM}|^2=a^2+b^2+c^2$

$\Rightarrow |\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，称$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=|(a,b,c)|$为向量$\overrightarrow{OM}$的模。

模为零的向量记作$\theta=(0,0,0)$，模为1的向量称为单位向量。

设向量$\alpha=(a,b,c)\neq\theta$，则$|\alpha|\neq 0$，此时$\frac{\alpha}{|\alpha|}\triangleq\alpha^0=\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$

必是单位向量。

设$Q(x_1,y_1,z_1)$，$P(x_2,y_2,z_2)$是空间的任意两点，则

$\overrightarrow{OP}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{OQ}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)$

$=(x_2i+y_2j+z_2k)-(x_1i+y_1j+z_1k)=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$

即空间的任一个向量$\overrightarrow{QP}=(x_2-x_1)i+(y_2-y_1)j+(z_2-z_1)k$，

空间中的向量有无数个，但每一个都可用单位向量i,j,k线性表示出来，因此，称i,j,k为三维向量空间的标准正交基。

三维向量：three-dimensional Vector

(2).

在一个有限维的向量空间中，一旦选定了基向量，则无限的问题便可有限地表示了。

(二) 三维数组向量的线性运算法则：设 $\begin{cases}\vec{\alpha}=(a_1,b_1,c_1),\\ \vec{\beta}=(a_2,b_2,c_2),\end{cases}$

$\lambda_1,\lambda_2\in R$，则 $\vec{\alpha}\pm\vec{\beta}=(a_1i+b_1j+c_1k)\pm(a_2i+b_2j+c_2k)=$

$(a_1\pm a_2)i+(b_1\pm b_2)j+(c_1\pm c_2)k=(a_1\pm a_2,b_1\pm b_2,c_1\pm c_2)$；$\lambda_1\vec{\alpha}=$

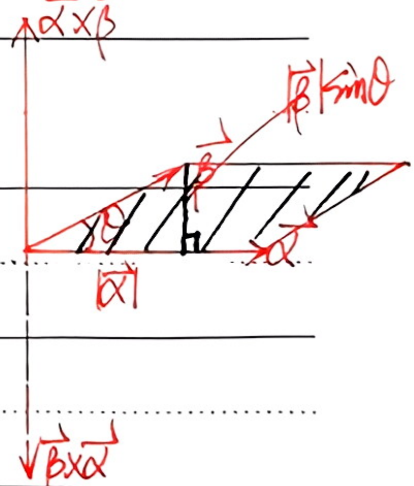
$\lambda_1(a_1i+b_1j+c_1k)=\lambda_1a_1i+\lambda_1b_1j+\lambda_1c_1k=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)$，称 $\lambda_1\vec{\alpha}$

为数 λ_1 与向量 $\vec{\alpha}$ 的数乘：$\lambda_1(a_1,b_1,c_1)=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)$.

向量的加法、减法与数乘三种运算统称为向量的线性运算.

统一为：$\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)+(\lambda_2a_2,\lambda_2b_2,\lambda_2c_2)=$

$(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,\lambda_1b_1+\lambda_2b_2,\lambda_1c_1+\lambda_2c_2)$.



(三) 向量 $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的内积与外积.

设 $\vec{\alpha}=(a_1,b_1,c_1)$，$\vec{\beta}=(a_2,b_2,c_2)$. 定义：

(1) $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的内积为 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\hat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$

(2) $\vec{\alpha}$ 与 $\vec{\beta}$ 的外积为 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 且 $\begin{cases}\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\perp\vec{\alpha},\ \vec{\alpha}\times\vec{\beta}\perp\vec{\beta},\ \vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\text{ 右手系}\\ |\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sin(\hat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})\end{cases}$

(3).

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ 的规定来源于物理中力作功的运算，

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ 是一个数，故称内积 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ 为数量积，或者称为点乘。

$|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sin(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ 且 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}$，$\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\perp\vec{\beta}$，$\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 成右手系

的规定来源于物理中的力矩的运算. $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 是一个新向量、

故称 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$ 为向量积，或者称为叉乘。

Th1: (1). $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Longleftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

(2). $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Longleftrightarrow\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=0\Leftrightarrow\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$.

证(1): 若 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$，则 $\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=0$，$\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=0$

且 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=(a_1i+b_1j+c_1k)\cdot(a_2i+b_2j+c_2k)=a_1a_2i\cdot i+a_1b_2i\cdot j+a_1c_2i\cdot k$

$+b_1a_2j\cdot i+b_1b_2j\cdot j+b_1c_2j\cdot k+c_1a_2k\cdot i+c_1b_2k\cdot j+c_1c_2k\cdot k$.

而 $i\cdot i=|i||i|\cos(\widehat{i,i})=1\times1\times\cos0=1=j\cdot j=k\cdot k$，由 $i\perp j$，$i\perp k$，$j\perp k$

$\Rightarrow i\cdot j=0=i\cdot k=j\cdot k$，从而 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$，故

$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$

若已知 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$，则 $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=0$，若 $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\neq0$ 则

$\cos(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$，从而 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$；若 $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|=0$，则 $|\vec{\alpha}|=0$ 或 $|\vec{\beta}|=0$，

此时 $\vec{\alpha}=\theta$ 或 $\vec{\beta}=\theta$，而零向量 θ 垂直于任意向量，故 $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$，

于是：$\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0\Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

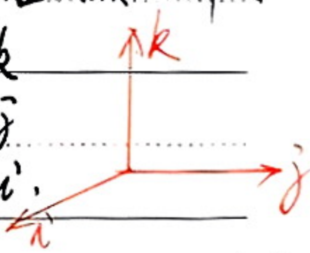
证(2)：若 $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$，则 $\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0\Rightarrow|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$

$\Rightarrow\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\theta$. 反之，若 $\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\theta$，则 $|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|=|\theta|=0=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta})$

若 $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\neq0$，则 $\sin(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0\Leftrightarrow\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$，若 $|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|=0$，则 $|\vec{\alpha}|=0$ 或

$|\vec{\beta}|=0\Rightarrow\vec{\alpha}=\theta$ 或 $\vec{\beta}=\theta$，而零向量 θ 平行于任意向量，故 $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$.

再记 $i\times i=\theta$, $j\times j=\theta=k\times k$, $\begin{cases}i\times j=k\\ k\times i=j\\ j\times k=i\end{cases}$, $\begin{cases}j\times i=-k\\ i\times k=-j\\ k\times j=-i\end{cases}$.



$\Rightarrow\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=(a_1i+b_1j+c_1k)\times(a_2i+b_2j+c_2k)=a_1a_2\,i\times i+a_1b_2\,i\times j+a_1c_2\,i\times k+$

$b_1a_2\,j\times i+b_1b_2\,j\times j+b_1c_2\,j\times k+c_1a_2\,k\times i+c_1b_2\,k\times j+c_1c_2\,k\times k=$

$a_1a_2\theta+a_1b_2k+a_1c_2(-j)+b_1a_2(-k)+b_1b_2\theta+b_1c_2i+c_1a_2j+c_1b_2(-i)+c_1c_2\theta$

$=(b_1c_2-c_1b_2)i+(c_1a_2-a_1c_2)j+(a_1b_2-a_2b_1)k\triangleq\begin{vmatrix}i&j&k\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$

由 $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\theta=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}b_1c_2-c_1b_2=0\\ c_1a_2-a_1c_2=0\\ a_1b_2-a_2b_1=0\end{cases}$,

$\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\triangleq\lambda$

$\Rightarrow a_1=\lambda a_2,\ b_1=\lambda b_2,\ c_1=\lambda c_2\Rightarrow\vec{\alpha}=(a_1,b_1,c_1)=(\lambda a_2,\lambda b_2,\lambda c_2)=\lambda\vec{\beta}$. (5).

(三) 例题：设 $\vec{\alpha}=(a_1,b_1,c_1)$，$\vec{\beta}=(a_2,b_2,c_2)$，$\vec{\gamma}=(a_3,b_3,c_3)$.

(1) 证明 Cauchy 不等式：$|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|\le\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

(2). 证明：$|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|^2=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2$（曲面积分中要用到此式）

(3) 证明：$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\cdot\vec{\alpha}=(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$.

(4) 证明：三个向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 共面 $\Longleftrightarrow\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=0$.

(5). $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 与 $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}$ 必是共面的，$\forall\lambda_1,\lambda_2\in R$.

证(1). 利用：$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\vec{\alpha},\hat{\vec{\beta}})\Rightarrow|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cdot1\Rightarrow$

$|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|\le\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

推广，在 n 维向量空间中，设 $\vec{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\vec{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，

则 $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}\triangleq(\vec{\alpha},\vec{\beta})\triangleq|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\vec{\alpha},\hat{\vec{\beta}})\Rightarrow|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\Rightarrow|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\le$

$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$ —— Cauchy 不等式。

证(2)：$\because|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|^2=(|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\sin(\vec{\alpha},\hat{\vec{\beta}}))^2=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2(1-\cos^2(\vec{\alpha},\hat{\vec{\beta}}))$

$=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-(|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\cos(\vec{\alpha},\hat{\vec{\beta}}))^2=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})^2$. $\therefore$ 命题成立.

证(3). ∵ $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\cdot(a_3 i+b_3 j+c_3 k)=$

$((b_1c_2-c_1b_2)i+(c_1a_2-a_1c_2)j+(a_1b_2-b_1a_2)k)\cdot(a_3 i+b_3 j+c_3 k)$

$=(b_1c_2-c_1b_2)a_3+(c_1a_2-a_1c_2)b_3+(a_1b_2-b_1a_2)\cdot c_3=\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

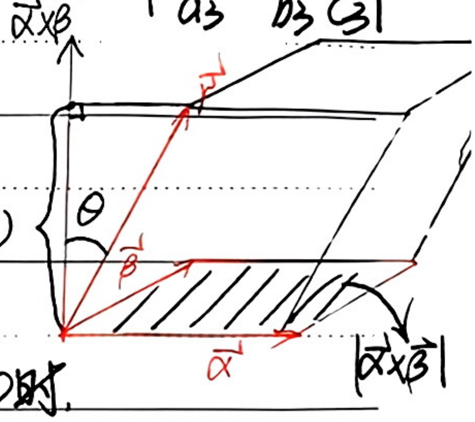
$=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, 同理, $(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})\cdot\vec{\alpha}=(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha})\cdot\vec{\beta}$

$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

证(4): 利用 $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}||\vec{\gamma}|\cos(\widehat{\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\vec{\gamma}})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

而 $|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}|$ 是以 $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ 为邻边的□面积,

$|\vec{\gamma}|\cos(\widehat{\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\vec{\gamma}})$ 是以 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 为 $h=|\vec{\gamma}|\cos(\widehat{\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\vec{\gamma}})$



棱的平行六面体的高", 当 $\cos(\widehat{\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\vec{\gamma}})>0$ 时,

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 即是以 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 为棱的平行六面体的体积.

于是, $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 共面 $\Longleftrightarrow$ 平行六面体体积为零 $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$

当 $\cos(\widehat{\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\vec{\gamma}})<0$ 时, $-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 是以 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 为棱的平行六面体的体积, 当 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 共面时, $-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$. □

同样有：$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$，即 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 共面 $\Leftrightarrow (\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=0$.

通常将 $(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}$ 称向量 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 的混合积，于是混合积的绝对值：$|(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right|$ 就是以 $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ 为棱的平行六面体的体积。

证(5)：利用 $\vec{\alpha}\perp\vec{\alpha}\times\vec{\beta}$，$\vec{\beta}\perp\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})=(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}=0$

$\vec{\beta}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})=(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}=0\Rightarrow(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot(\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta})=\lambda_1(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\alpha}+$

$\lambda_2(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot\vec{\beta}=\lambda_1 0+\lambda_2 0=0$ 由(4)可知，$\vec{\alpha},\vec{\beta}$，与 $\lambda_1\vec{\alpha}+\lambda_2\vec{\beta}$ 是共面向量。

(四)作业：EX8.1

6；9；10；12；14；17；23；26.

(五)教学参考书：

(1). 华东师大数学系编《数学分析》上、下册；(中科大数分A)

(2). 陈纪修等编《数分》上、下册(复旦数分A)

(3). 吉米多维奇《数学分析习题集》及其学习指导；

(4). [illegible]《数学分析学习指导》上册；

(5). 裴礼文《数学分析中的典型问题与方法》；

(6). 华东师《数学分析》第1、2册（第四版）

(七). 2024级数学分析B2教学团队：

(1). 主讲：汪琥庭, wanght@ustc.edu.cn / 13855104751;

(2). 助教：刘越, liuyue22@mail.ustc.edu.cn / 13662076150;

(3). 助教：邓嘉骏, dengjiajun@mail.ustc.edu.cn / 19870607382;

(4). 助教：张逸曦 zyx_5mingluren@mail.ustc.edu.cn / 18503632567.

(八). 从第2周起，每周一交作业，作业成绩与随堂测验成绩分别占总评成绩的20%，10%；期中成绩与期终成绩分别占总评成绩的30%，40%左右。且作业要按时交。