数学分析 (B2) 课程讲义

作者：助教刘越

时间：May 3, 2025

版本：2.0

简介：本讲义为汪琥庭老师 2024 秋季学期数学分析 B2 课程讲义的 latex 整理版, 不包括复习课内容.

如有错误或疏漏请联系邮箱:liuyue22@ustc.mail.edu.cn

课程主页　往年卷汇总

目录

Lec 1 三维向量的五种运算

1.1 三维直角坐标系与三维向量的线性运算

定义 1.1 (空间直角坐标系)

从空间一点 O 出发, 作三条两两垂直 (正交) 的射线, 并确定单位与方向, 构成 $O-xyz$ 直角坐标系.

命题 1.1

1. xOy 坐标面,zOy 坐标面,zOx 坐标面两两正交并将整个空间分割成八个卦限.
2. 点 M: 设 M 为空间任一点, 过 M 点分别作 Ox,Oy,Oz 轴的垂面. 可得三个垂足 A,B,C, 设 A,B,C 代表的实数为 a,b,c. 则点, 则点 M 与有序数组 (a,b,c) 一一对应, 记作 $M(a,b,c)$. 坐标原点为 $O(0,0,0)$.
3. 向量 $\overrightarrow{OM}$: 在 Ox,Oy,Oz 轴正向上分别取三个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$, 则 $\overrightarrow{OA}=a\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OB}=b\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OC}=c\boldsymbol{k}$, 依照平面向量的加法法则 (平行四边形法则, 三角形法则)$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}\triangleq(a,b,c)$. 同时可得 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$, $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$, $\boldsymbol{k}=(0,0,1)$, 零向量 $\mathbf{0}=(0,0,0)$.
4. 如上定义的 M,$\overrightarrow{OM}$ 与有序数组 (a,b,c) 一一对应.
5. $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}$.

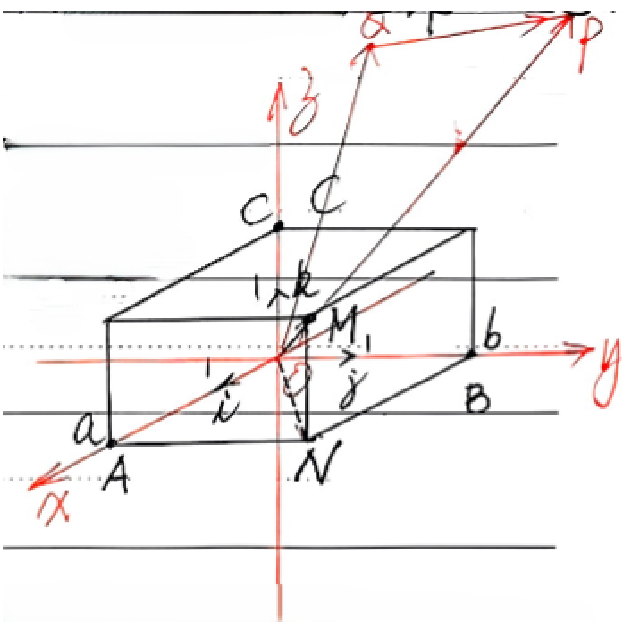

图 1.1: 空间直角坐标系

定义 1.2

$\overrightarrow{OM}=(a,b,c)$, 称 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模, 记为 $\left|\overrightarrow{OM}\right|$.
模长为 0 的向量为零向量 $\mathbf{0}=(0,0,0)$, 模长为 1 的向量称为单位向量.

命题 1.2

设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a,b,c)\neq\mathbf{0}$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}|\neq 0$.
此时,$\boldsymbol{\alpha}^0\triangleq\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{|\boldsymbol{\alpha}|}=\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$ 是单位向量.

注

1. 这种定义方式较为依赖直观的几何性质, 且可能存在一些循环定义的问题, 当然针对这一阶段这样大概就足够了.
2. 这种方式可以想见, 是可以从三维向量 (three-dimensional vector) 推广至 n 维的, 对应的向量就是 n 维向量 (n-dimensional vector).

设 $P=(x_1,y_1,z_1),Q=(x_1,y_1,z_1)$ 是空间的任意两点,$\overrightarrow{OP}=(x_1,y_1,z_1)$,$\overrightarrow{OQ}=(x_2,y_2,z_2)$. 则 $\overrightarrow{PQ}=(x_2,y_2,z_2)-(x_1,y_1,z_1)=(x\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. 即空间的任一个向量 $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

空间中的向量有无数个, 但每一个都可用单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的线性组合来表示, 称之前定义的 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为三维向量空间的标准正交基.

在任一个有限维的向量空间中, 一旦选定了基向量, 则" 无限的问题便可有限化表示" 了.

命题 1.3 (三维数组向量的线性运算法则)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,b_1,c_1),\boldsymbol{\beta}=(a_2,b_2,c_2),\lambda_1\in\mathbb{R},\lambda_2\in\mathbb{R}$, 则

1. 加、减法:$\boldsymbol{\alpha}\pm\boldsymbol{\beta}=(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})\pm(a_2\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+c_2\boldsymbol{k})=(a_1\pm a_2)\boldsymbol{i}+(b_1\pm b_2)\boldsymbol{j}+(c_1\pm c_2)\boldsymbol{k}=(a_1\pm a_2,b_1\pm b_2,c_1\pm c_2)$.
2. 数乘:$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})=(\lambda_1a_1)\boldsymbol{i}+(\lambda_1b_1)\boldsymbol{j}+(\lambda_1c_1)\boldsymbol{k}=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)$.

向量的加法、减法及数乘三种运算统称为向量的线性运算. 统一为
$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}=(\lambda_1a_1,\lambda_1b_1,\lambda_1c_1)+(\lambda_2a_2,\lambda_2b_2,\lambda_2c_2)=(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,\lambda_1b_1+\lambda_2b_2,\lambda_1c_1+\lambda_2c_2)$.

1.2 向量的内积与外积

定义 1.3 (内积与外积)

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,b_1,c_1),\boldsymbol{\beta}=(a_2,b_2,c_2)$. 则

1. 内积: $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$
2. 外积: $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$, 满足 $\begin{cases}|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})\\ \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\beta},\text{且}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}\text{构成右手系.}\end{cases}$

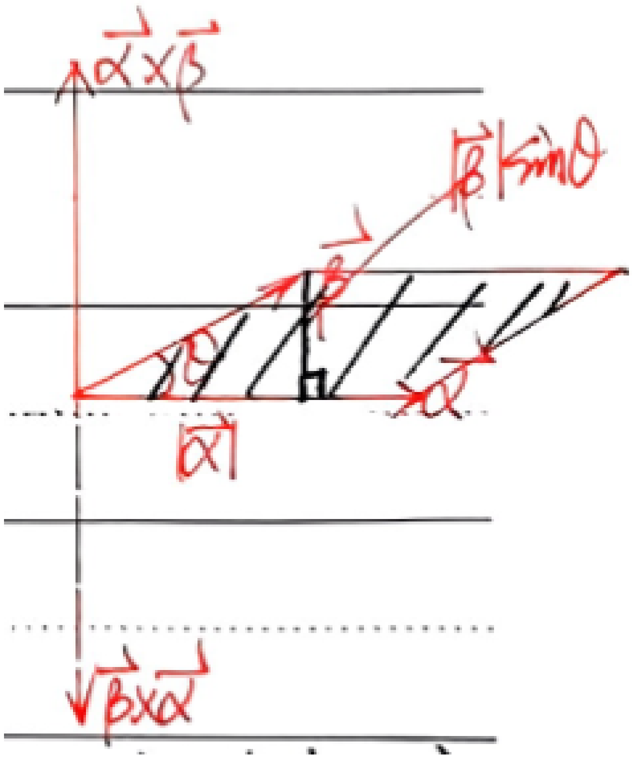

图 1.2: 外积的图示

注

1. $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 的规定来源于物理中里做功的运算,$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 是一个数, 故称内积 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的数量积, 或者称为点乘.
2. $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 的规定来源于物理中的力矩的运算,$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 是一个向量, 故称外积 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的向量积, 或者称为叉乘.

定理 1.1

1. $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0 \Leftrightarrow a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0.$
2. $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$

♡

证明

1. 1) 若 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$, 则 $\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0.$
   2) 反之, 若 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0$, 若 $|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\neq 0$, 则 $\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$. 若 $|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|=0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 由于零向量 $\mathbf{0}$ 垂直于任意向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.
   3) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})\cdot(a_2\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+c_2\boldsymbol{k})=a_1a_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_1c_2\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+b_1a_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+b_1b_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+b_1c_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+c_1a_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+c_1b_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+c_1c_2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$.而$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=|\boldsymbol{i}|\,|\boldsymbol{i}|\cos(\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}})=1\times1\times\cos 0=1=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}$, 且由于$\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}$, 故$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$, 故$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$.
2. 1) 若 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$, 则 $\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0 \Rightarrow |\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$
   2) 反之, 若 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|=|\mathbf{0}|=0=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})$, 若 $|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\neq 0$, 则 $\sin(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=0$, 从而 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$. 若 $|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|=0$, 则 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 或 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$, 由于零向量 $\mathbf{0}$ 平行于任意向量, 故 $\boldsymbol{\alpha}/\!/\boldsymbol{\beta}$.

3) $\begin{cases} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j} \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=(a_1\boldsymbol{i}+b_1\boldsymbol{j}+c_1\boldsymbol{k})\times(a_2\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+c_2\boldsymbol{k}) = a_1a_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+a_1b_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+a_1c_2\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+b_1a_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+b_1b_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+b_1c_2\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+c_1a_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}+c_1b_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}+c_1c_2\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=a_1b_2\boldsymbol{k}-a_1c_2\boldsymbol{j}-b_1a_2\boldsymbol{k}+b_1c_2\boldsymbol{i}+c_1a_2\boldsymbol{j}-c_1b_2\boldsymbol{i}=(b_1c_2-c_1b_2)\boldsymbol{i}-(a_1c_2-c_1a_2)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-b_1a_2)\boldsymbol{k}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$. 由 $bf\alpha /\!/ \boldsymbol{\beta} \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}=(0,0,0)\Leftrightarrow \begin{cases} b_1c_2-c_1b_2=0\\ c_1a_2-a_1c_2=0\\ a_1b_2-b_1a_2=0\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}\triangleq\lambda$. 因此可得 $\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\beta}$.

注

1. 在上述证明中, 不加证明地使用了点乘与叉乘的分配率等性质.
2. 与证明中提到的类似, 点乘有坐标表达 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$, 叉乘有坐标表达 $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}$, 这也是最常用的计算公式.

1.3 例题

设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,b_1,c_1),\boldsymbol{\beta}=(a_2,b_2,c_2),\boldsymbol{\gamma}=(a_3,b_3,c_3)$.

例 1.1 证明: 柯西不等式 $|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|\leqslant\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

证明 $|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|=|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$.

注 在 n 维向量空间中, 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, 则 $|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|$, 即 $|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$.

例 1.2 证明:$|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2-|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|^2$.

证明 $|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2\sin^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2\,(1-\cos^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}}))=|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2-|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2\cos^2(\widehat{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}})=|\boldsymbol{\alpha}|^2\,|\boldsymbol{\beta}|^2-|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|^2$.

例 1.3 证明:$(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})\cdot\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}$.

证明 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{vmatrix}\cdot(a_3\boldsymbol{i}+b_3\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k})=((b_1c_2-c_1b_2)\boldsymbol{i}+(c_1a_2-a_1c_2)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k})\cdot(a_3\boldsymbol{i}+b_3\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k})=(b_1c_2-c_1b_2)a_3+(c_1a_2-a_1c_2)b_3+(a_1b_2-a_2b_1)c_3=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=$

$(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\gamma})\cdot\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\gamma}\times\boldsymbol{\alpha})\cdot\boldsymbol{\beta}$.

例 1.4 证明: 三个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面的充要条件是 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=0$.

证明 是如下结论的结果: 如图所示, 根据计算公式,$|\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}|$ 是以 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 为两边的平行四边形的面积, 而 $\boldsymbol{\gamma}\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}})\right|$ 是 $\boldsymbol{\gamma}$ 在垂直于平行四边形方向上的投影, 即 $h=|\boldsymbol{\gamma}|\left|\cos(\widehat{\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}})\right|$, 因此 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}$ 是以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 和 $\boldsymbol{\gamma}$ 为三边的平行六面体的体积, 于是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 共面 $\Leftrightarrow$ 平行六面体的体积为 $0\Leftrightarrow(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\gamma}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=0$.

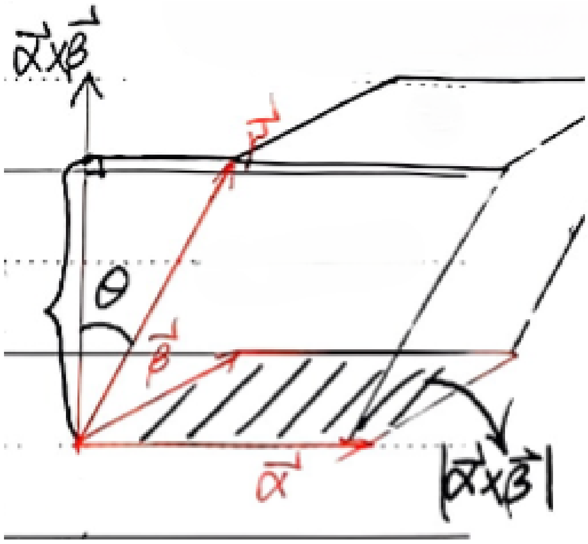

图 1.3: 混合积与平行六面体

例 1.5 $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ 总有 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}$ 共面.

证明 利用 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}\perp\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$, 则 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\alpha}=0,(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\beta}=0$, 从而 $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta})=0$, 因此可得 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta}$ 共面.

✍ **作业** ex8.1:6,9,10,12,14,17,23,26.

Lec 2 空间平面与直线

2.1 平面 (plane) 的五种表示形式

定义 2.1 (平面的五种表示形式)

1. 向量式: 设平面 π 过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且与已知的非零向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 垂直, 则平面 π 唯一确定. 设 $P(x, y, z)$ 为 π 上任一点, 则有 $\overrightarrow{M_0P} \perp \boldsymbol{n}$, 于是有
$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{M_0P} = 0$$
称为平面 π 的向量式方程.
2. 点法式: 由向量式, 有 $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{M_0P} = 0$, 即
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
, 称为平面 π 的向量式方程.
3. 一般式: 设 $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, 则有
$$Ax + By + Cz + D = 0$$
称为平面 π 的一般式方程.
4. 截距式: 一般式中, 设 $d \triangleq -D \neq 0$, 令 $\dfrac{d}{A} = a, \dfrac{d}{B} = b, \dfrac{d}{C} = c$, 则
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$
称为平面 π 的截距式方程.
5. 三点式: 设 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ 为 π 上不共线的三点, 则由 A, B, C 三点确定唯一的平面 π, 设 $P(x, y, z)$ 为 π 上任一点, 则有 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 共面, 即
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$
称为平面 π 的三点式方程.

♣

2.2 空间直线 (line) 的五种表示形式

定义 2.2 (空间直线的五种表示形式)

1. 向量式: 设直线 l 过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 且与已知的非零向量 $\boldsymbol{\tau} = (l, m, n)$ 平行, 则直线 l 唯一确定. 设 $P(x, y, z)$ 为 l 上任一点, 则有 $\overrightarrow{M_0P} /\!/ \boldsymbol{n}$, 于是有
$$\overrightarrow{M_0P} \times \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$$
称为直线 l 的向量式方程.
2. 点向式: 由向量式, 有 $\overrightarrow{M_0P} /\!/ \boldsymbol{\tau}$, 则有
$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$
, 称为直线 l 的点向式方程.
3. 参数式, 在点向式中, 令 $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n} = t$, 则有
$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$
称为直线 l 的参数式方程.
4. 交面式: 设平面 $p_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ 和平面 $p_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ 不平行, 则 π_1 与 π_2 有交线 l,l 上的点 $P(x, y, z)$ 满足
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$
称为直线 l 的交面式方程.
5. 两点式: 设 $Q_1(x_1, y_1, z_1), Q_2(x_2, y_2, z_2)$ 为直线 l 上的两点, 则由 Q_1, Q_2 确定唯一的直线 l, 设 $P(x, y, z)$ 为 l 上任一点, 则有 $\overrightarrow{Q_1P}, \overrightarrow{Q_1Q_2}$ 共线, 即
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$
称为直线 l 的两点式方程.

♣

2.3 面面, 线线, 线面之间的关系

命题 2.1

设

$$\begin{cases} \pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & \boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1) \\ \pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & \boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2) \\ L_1: \dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}, & \boldsymbol{\tau}_1=(l_1,m_1,n_1) \\ L_2: \dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}, & \boldsymbol{\tau}_2=(l_2,m_2,n_2) \end{cases}$$

则

1. $\pi_1 /\!/ \pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2} \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{0}$.
2. $\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$.
3. π_1 与 π_2 的夹角 $\alpha(0<\alpha\leqslant\pi), \cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\boldsymbol{n}_1^0\cdot\boldsymbol{n}_2^0$, 即得 $\alpha=\arccos\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}$.
4. $L_1/\!/L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}/\!/\boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.
5. $L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\perp\boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2=0 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.
6. L_1 与 L_2 的夹角 $\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi), \cos\alpha=\dfrac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2}{|\boldsymbol{\tau}_1|\cdot|\boldsymbol{\tau}_2|}=\boldsymbol{\tau}_1^0\cdot\boldsymbol{\tau}_2^0$, 即得 $\alpha=\arccos\dfrac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2}{|\boldsymbol{\tau}_1|\cdot|\boldsymbol{\tau}_2|}$.
7. $L_1\perp\pi_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1/\!/\boldsymbol{n}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{0} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{l_1}=\dfrac{B_1}{m_1}=\dfrac{C_1}{n_1}$.
8. $L_1/\!/\pi_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\perp\boldsymbol{n}_1 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{n}_1=0 \Leftrightarrow A_1l_1+B_1m_1+C_1n_1=0$.
9. L_1 与 π_1 的夹角 $\beta(0\leqslant\beta\leqslant\dfrac{\pi}{2}), \cos(\dfrac{\pi}{2}-\beta)=\left|\dfrac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{n}_1}{|\boldsymbol{\tau}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_1|}\right|=\left|\boldsymbol{\tau}_1^0\cdot\boldsymbol{n}_1^0\right|$, 故 $\sin\beta=\left|\boldsymbol{\tau}_1^0\cdot\boldsymbol{n}_1^0\right|0$, 即得 $\beta=\arcsin\left|\boldsymbol{\tau}_1^0\cdot\boldsymbol{n}_1^0\right|$.

2.4 例题

例 2.1 分别求已知点 $M(1,-1,-2)$ 关于点 $A(1,0,1)$, 平面 $\pi: 3x+4y-5z-1=0$, 直线 $L: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{0}$ 的对称点 $Q(x,y,z)$.

解

1. $A(1,0,1)$ 是线段 MQ 的中点, 有 $\begin{cases} \dfrac{1+x}{2}=1 \\ y=\dfrac{-1+y}{2}=0 \\ z=\dfrac{-2+z}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=4 \end{cases}$, 即 $Q(1,1,4)$.

2. $\boldsymbol{n}=(3,4,-5)$, 则有 $\begin{cases}\overrightarrow{MQ}/\!/\boldsymbol{n}\\ MQ\text{中点}N(\frac{x+1}{2},\frac{y-1}{2},\frac{z-2}{2})\text{在}\pi\text{上}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1+3t\\ y=-1+4t\\ z=-2-5t\\ 3(\frac{x+1}{2})+4(\frac{y-1}{2})-5\frac{z-2}{2}-1=0\end{cases}$$

$\Rightarrow t=\frac{12}{25}$, 带回 x,y,z 可知 $Q(\frac{61}{25},\frac{23}{25},-\frac{10}{25})$.

3. $\boldsymbol{\tau}=(-1,2,0)$, 则有 $\begin{cases}\overrightarrow{MQ}\perp\boldsymbol{\tau}\\ MQ\text{中点}N(\frac{x+1}{2},\frac{y-1}{2},\frac{z-2}{2})\text{在}L\text{上}\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{x+1}{2}=1-t\\ \frac{y-1}{2}=1+2t\\ \frac{z-2}{2}=1\\ -1(x-1)+2(y+1)+0(z+2)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1-2t\\ \boldsymbol{y}=3+4t\\ \boldsymbol{z}=4\\ -1(x-1)+2(y+1)+0(z+2)=0\end{cases}$$

$\Rightarrow t=-\frac{5}{3}$, 带回 x,y,z 可知 $Q(\frac{13}{3},-\frac{1}{5},4)$.

例 2.2 设 $A(1,0,1),B(0,1,1),C(2,0,3),D(1,1,1)$ 为已知的四点, 求

1. 求四面体 $\Omega:A-BCD$ 的体积 $V(\Omega)$.
2. 求 B,C,D 三点确定的三角形 $\triangle$ 的面积 $S_\triangle$.
3. 求 B,C,D 三点确定的平面方程.

解

1. $V(\Omega)=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{BA}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}2&-1&2\\1&0&0\\1&-1&0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{3}$.

2. $S_\triangle=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BD}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&2\\1&0&0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|0\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+1\boldsymbol{k}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. 设 $P(x,y,z)$ 为 π 中的任一点, 则 $\overrightarrow{BP},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$ 共面, 即 $\begin{vmatrix}x-0&y-1&z-1\\2&-1&2\\1&0&0\end{vmatrix}=0$, 解得 $\pi:2y+z-3=0$ 为所求平面方程.

✍ 作业 ex8.2:1,2,3,6,7,14(1),15(1),16.

Lec 3 向量, 平面, 直线习题课

3.1 距离与投影

例 3.1 证明: 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

证明 在 π 中任取点 $Q(a,b,c)$, 则

$$\begin{aligned}
d&=\left||\overrightarrow{QM_0}|\cos\alpha\right|\\
&=\left|\frac{|\overrightarrow{QM_0}||\boldsymbol{n}|\cos\alpha}{|\boldsymbol{n}|}\right|\\
&=\frac{|\overrightarrow{QM_0}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}\\
&=\frac{|(x_0-a,y_0-b,z_0-c)\cdot(A,B,C)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\\
&=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(aA+bB+cC)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}
\end{aligned}$$

由 $Q(a,b,c)\in\pi$,$aA+bB+cC+D=0\Rightarrow-(aA+bB+cC)=D$, 代入上式得证.

例 3.2 证明: 点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $l:\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$ 的距离为

$$d=\frac{|l(x_0-x_1)+m(y_0-y_1)+n(z_0-z_1)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}$$

其中 $M_1(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$

证明 $d=|\overrightarrow{M_1M_0}|\sin\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_0}||\boldsymbol{\tau}|\sin\alpha}{|\boldsymbol{\tau}|}=\dfrac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times\boldsymbol{\tau}|}{|\boldsymbol{\tau}|}$.

例 3.3 求直线 $L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ 在平面 $\pi: x-2y+3z+1=0$ 中的投影直线 L_1 的方程.

解

过 L 上已知点 $M_1(1,-1,2)$ 作 π 的垂面 π_1, 则 π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\tau}$, 其中 $\boldsymbol{n}=(1,-2,3),\boldsymbol{\tau}=(1,1,2)$, 所以

$$\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-2&3\\1&1&2\end{vmatrix}=-7\boldsymbol{i}+1\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}=(-7,1,3)$$

由平面的点法式方程知,π_1 的方程为 $\pi_1:-7(x-1)+1(y+1)+3(z-2)=0\Rightarrow 7x-y-$

$3z+2=0$. 而所求的投影直线 L_1 正是平面 π 与垂面 π_1 的交线, 所以 L_1 的方程为

$$L_1:\begin{cases}x-2y+3z+1=0\\7x-y-3z+2=0\end{cases}$$

3.2 异面直线

例 3.4 证明:$L_1:\begin{cases}x+y-z-1=0\\2x+y-z-2=0\end{cases}$ 与 $L_2:\begin{cases}x+2y-z-2=0\\x+2y+2z+2=0\end{cases}$ 为异面直线.

证明 设 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2$, 则 $\boldsymbol{\delta}_1=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}=(0,-1,-1)$,$\boldsymbol{\delta}_2=\begin{pmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&2&-1\\1&2&2\end{pmatrix}=(6,-3,0)$. 取 $\boldsymbol{\delta}_1=(0,1,1),\boldsymbol{\delta}_2=(2,-1,0)$, 在 L_1 中令 $z=0$, 从 $\begin{cases}x+y=1\\2x+y=2\end{cases}\Rightarrow x=1,y=0,z=0$, 即 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{\delta}_1=(0,1,1)$, 且 $M_1(1,0,0)\in L_1$.

在 L_2 中令 $y=0$, 从 $\begin{cases}x-z=2\\x+2z=-2\end{cases}\Rightarrow x=\frac{2}{3},y=0,z=-\frac{4}{3}$, 即从 $M_2(\frac{2}{3},0,-\frac{4}{3})\in L_2$.

由 $\overrightarrow{M_1M_2}=(\frac{2}{3},0,-\frac{4}{3})-(1,0,0)=(-\frac{1}{3},0,-\frac{4}{3})$, 所以 $\boldsymbol{\delta}_1\times\boldsymbol{\delta}_2\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}0&1&1\\2&-1&0\\-\frac{1}{3}&0&-\frac{4}{3}\end{vmatrix}=\frac{7}{3}\neq 0$, 所以 L_1 与 L_2 异面.

例 3.5 设 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{0}$;$L_2:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-1}{1}$.

1. 证明 L_1 与 L_2 异面;
2. 求 L_1 与 L_2 的公垂线段之长 d;
3. 求公垂线段 L 的方程;
4. 求一个平面使得 $L_1//\pi,L_2//\pi$, 且 π 与 L_1,L_2 等距.

证明

解

1. 设两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(2,-1,0),\boldsymbol{s}_2=(1,0,1)$,$M_1(1,0,3),M_2(-1,2,1)\Rightarrow\overrightarrow{M_2M_1}=(2,-2,2)\Rightarrow$

$$(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_2M_1}=\begin{vmatrix}2&-1&0\\1&0&1\\2&-2&2\end{vmatrix}=0-2+0-0+4+2=4\neq 0$$

所以 L_1 与 L_2 异面.

2. 设公垂线为 L, 则 $L\perp L_1,L\perp L_2$, 设 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}$, 则 $\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}\perp\boldsymbol{s}_2\Rightarrow\boldsymbol{s}=$

$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=(-1,-2,1)$. 设公垂线段为 CD, 则 C,D 是两个垂足, 向量 $\overrightarrow{M_2M_1}$ 在公垂线方向向量 $\boldsymbol{s}$ 上的投影:$\overrightarrow{M_2M_1}\cos(\overrightarrow{M_2M_1},\boldsymbol{s})$, 再取绝对值即为公垂线段的长. 即

$$d=\left|\overrightarrow{M_2M_1}\cos(\overrightarrow{M_2M_1},\boldsymbol{s})\right|=\left||\overrightarrow{M_2M_1}|\cdot\frac{\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\boldsymbol{s}}{|\overrightarrow{M_2M_1}||\boldsymbol{s}|}\right|=\frac{|\overrightarrow{M_2M_1}\cdot\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

注 两异面直线的距离在两直线上各取一点 M_1,M_2, 设两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$, 则距离为

$$\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}$$

3. 已知公垂线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(-1,-2,1)$,L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(2,-1,0)$, 设 L_1 与 L 所在的平面为 π_2, 则 π_2 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&0\\-1&-2&1\end{vmatrix}=(-1,-2,-5)$, 且 L_1 上的点 $M_1(1,0,3)\in\pi_2$. 依点法式 π_2 方程为:

$$\pi_2:-1(x-1)-2(y-0)-5(z-3)=0\Leftrightarrow x+2y+5z-16=0$$

同理, 设 L_2 与 L 所在的平面为 π_3, 则 π_3 的法向量 $\boldsymbol{n}_3=\boldsymbol{s}_2\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&1\\-1&-2&1\end{vmatrix}=$ $(2,-2,-2)$, 且 L_2 上的点 $M_2(-1,2,1)\in\pi_3$. 依点法式 π_3 方程为:

$$\pi_3:2(x+1)-2(y-2)-2(z-1)=0\Leftrightarrow x-y-z+4=0.$$

显然平面 π_2,π_3 的交线是公垂线 L, 所以 L 的方程为

$$L:\begin{cases}x+2y+5z-16=0\\x-y-z+4=0\end{cases}$$

4. 因 $\pi//L_1,\pi L_2$, 所以 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&0\\1&0&1\end{vmatrix}=(-1,-2,1)$, 又 π 与 L_1,L_2 等距, 故 M_2,M_1 的中点 $O(0,1,2)$ 必在 π 上, 即 $O(0,1,2)\in\pi$, 依点法式, 得 π 的方程为

$$\pi:-1(x-0)-2(y-1)+1(z-2)=0\Leftrightarrow x+2y-z=0$$

为 π 的方程.

3.3 二重外积公式与 Lagrange 恒等式

命题 3.1

1. $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2}$;
2. $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times +(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = 0$;

证明

1. $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = (|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \sin\theta)^2 = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1 - \cos^2\theta) = |\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$;
2. 我们称这条命题为 **Lagrange** 恒等式, 称 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ 为二重向量积, 且有 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$, 我们先来证明这个引理.

引理 3.1 (二重外积公式)

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

证明 设 $\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{e_1} + b_2\boldsymbol{e_2} + b_3\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{e_1} + c_2\boldsymbol{e_2} + c_3\boldsymbol{e_3}$。我们已知

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = (b_2c_3 - b_3c_2)\boldsymbol{e_1} + (b_3c_1 - b_1c_3)\boldsymbol{e_2} + (b_1c_2 - b_2c_1)\boldsymbol{e_3}.$$

设 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = d_1\boldsymbol{e_1} + d_2\boldsymbol{e_2} + d_3\boldsymbol{e_3}$, 则

$$\begin{aligned} d_1 &= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ &= b_1(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} - a_1c_1) - c_1(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} - a_1b_1) \\ &= (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b_1 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})c_1. \end{aligned}$$

同理

$$d_2 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b_2, \quad d_3 = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})b_3 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})c_3.$$

因此

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}).$$

命题 3.2

证明 Jacobi 等式:

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0.$$

证明 利用二重外积公式，我们有

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$

$$\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}.$$

将上述三等式相加即得 Jacobi 等式.

3.4 习题

例 3.6

1. 求数 λ, 使得直线 $L_1:\dfrac{x-1}{\lambda}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-3}{-3}$ 与直线 $L_2:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z+4}{7}$ 相交.
2. 求 L_1 与 L_2 的交点.
3. 求 L_1 与 L_2 确定的平面方程.

解

1. 设 L_1 与 L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(\lambda,5,-3)$, $\boldsymbol{s}_2=(3,-4,7)$,$M_1(1,-4,3)$, $M_2(-3,9,-4)$, 则 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-4,13,-7)$.
   当 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\overrightarrow{M_1M_2}$ 共面时, 两直线可能相交, 即
   $$(\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=\begin{vmatrix}\lambda & 5 & -3\\ 3 & -4 & 7\\ -4 & 13 & -7\end{vmatrix}=0$$
   解得 $\lambda=2$, 此时 $\begin{cases}s_1=(2,5,-3)\\ s_2=(3,-4,7)\end{cases}\Rightarrow s_1\nparallel s_2$, 所以两直线相交.
2. 由 $L_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{5}=\dfrac{z-3}{-3}$, 得 L_1 的参数方程为
   $$\begin{cases}x=1+2t\\ y=-4+5t\\ z=3-3t\end{cases},t\in\mathbb{R}$$
   从 $L_2:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-9}{-4}=\dfrac{z+4}{7}$, 得 L_2 的参数方程为
   $$\begin{cases}x=-3+3s\\ y=9-4s\\ z=-4+7s\end{cases},s\in\mathbb{R}$$
   设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为 L_1 与 L_2 的交点, 则
   $$\begin{cases}x_0=1+2t=-3+3s\\ y_0=-4+5t=9-4s\\ z_0=3-3t=-4+7s\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=1,s=-1\\ x_0=-1,y_0=1,z_0=0\end{cases}$$
   所以 L_1 与 L_2 的交点为 $M_0(-1,1,0)$.
3. 设 L_1 与 L_2 确定的平面为 π, 则 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 5 & -3\\ 3 & -4 & 7\end{vmatrix}=(23,-23,-23)$,

取 $\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$, 且交点 $M_0(3,1,0)\in\pi$, 所以 π 的方程为

$$\pi:1\cdot(x-3)-1\cdot(y-1)-1\cdot z=0\Leftrightarrow x-y-z-2=0$$

例 3.7 求直线 $L:\begin{cases}x+y-z-1=0\\x-y+z+1=0\end{cases}$ 在平面 $\pi:x+y+z=0$ 上的投影直线方程 L_1.

解 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=(0,-2,-2)$, 令 $z=0$, 从 $\begin{cases}x+y=1\\x-y=1\end{cases}$ 得到 L 上点 $M_0(0,1,0)$.

设过 L 且垂直于平面 π 的平面为 π_1, 则 π_1 的法向量 $\boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\0&-2&-2\\1&1&1\end{vmatrix}=(0,-2,2)$, 且 $M_0(0,1,0)\in\pi_1$, 所以 π_1 的方程为

$$\pi_1:0\cdot(x-0)-2\cdot(y-1)+2\cdot(z-0)=0\Leftrightarrow -y+z+1=0$$

此时投影直线 L_1 的方程为

$$L_1:\begin{cases}x+y-z-1=0\\-y+z+1=0\end{cases}.$$

✍ **作业** ex8.2:18(1),19(1),20(2),21(1),22(1),23(1),29,30.

Lec 4 二次曲面与旋转曲面

4.1 二次曲面

球面 Σ

设 $M_0(a,b,c)$ 为球心，R 为球的半径，$Q(x,y,z)$ 为球面 Σ 上一点的. 则 $|\overrightarrow{M_0Q}|^2=R^2$，即

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

这称球面 Σ 的标准方程,$R=0$ 时，球面退化为球心 M_0 的一个点. 上式也可以写成

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$$

这称球面的一般方程, 一般方程为球面当且仅当 $\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2)-D=R^2\geqslant 0$.

曲面的一般方程

设 $F(x,y,z)=0$ 为隐式曲面, 若 $F(x,y,z)=0$ 可以化为 $z=f(x,y)$, 则称 $z=f(x,y)$ 为显示曲面.

例 4.1 $x^2+y^2+z^2=1$ 为隐式球面,$z=\sqrt{1-x^2-y^2},x^2+y^2\leqslant 1$ 为显示上半球面.

当 $F(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Iz+J=0$, 且 $(A,B,C,D,E,F)\neq(0,0,0,0,0,0)$ 时, 称 $F(x,y,z)=0$ 为二次曲面.

当 $D=E=F=0$, 且 $A^2+B^2+C^2>0$ 时, 二次曲面的对称轴都平行于坐标轴, 当 $D^2+E^2+F^2>0$ 时, 二次曲面的对称轴不平行于坐标轴.

椭球面

中心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 的椭球面的方程为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

经过坐标平移 $\begin{cases}x'=x-x_0\\y'=y-y_0\\z'=z-z_0\end{cases}$ 可化为 $O'-x'y'z'$ 坐标系中的椭球面方程

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1$$

因此得知,$z=z_0+c\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}}$ 为上半椭球面, $z=z_0-c\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}}$ 为下半椭球面.

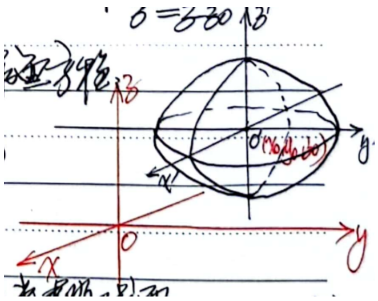

图 **4.1:** 椭球面

圆柱面

$$x^2 + y^2 = R^2$$

为圆柱面, 当 z 取任意值时, 圆柱面无限延伸. 或者说, 圆柱面是由直线连续移动形成的, 这类曲面称为直纹面.

若要表示 Oxy 平面中的圆 $x^2+y^2 = R^2$, 则应写为 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$, 即圆柱面与 $Oxy(z=0)$ 平面的交面. 同理, $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=2 \end{cases}$ 是空间中 $z=2$ 平面上的圆.

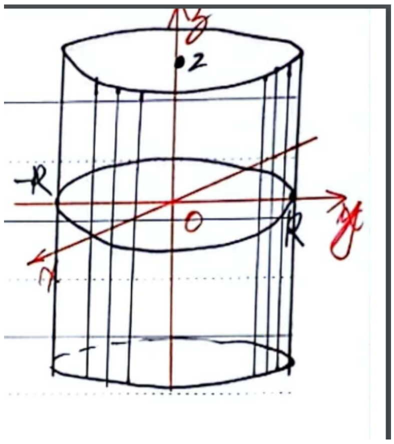

图 **4.2:** 圆柱面

抛物柱面

$y^2 = 2px$ 及 $y = ax^2 (a, p \neq 0)$ 为抛物柱面.

$\begin{cases} y^2 = 2px \\ z = 0 \end{cases}$, $\begin{cases} y = ax^2 \\ z = 3 \end{cases}$ 为空间中的抛物线, 这称为交面式的抛物线.

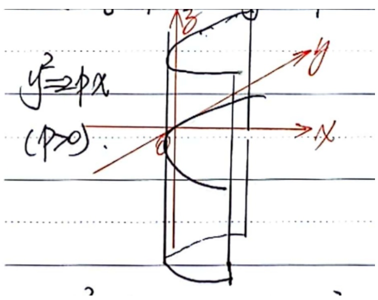

图 4.3: 抛物柱面

圆锥面

$$z^2 = a^2(x^2+y^2)$$

而 $\begin{cases} z^2 = a^2(x^2+y^2) \\ z = c \end{cases}$ 为空间中的圆;$\begin{cases} z = \pm ay \\ x = 0 \end{cases}$ 为空间中的相交直线.

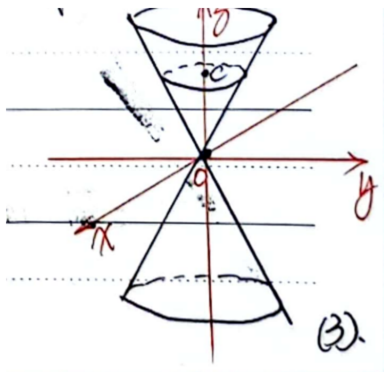

图 4.4: 圆锥面

椭圆抛物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, (a, b > 0)$$

$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \\ z = z_0 \end{cases}$ 为空间中的椭圆, 解 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z_0$ 可得所围成的面积为 $\pi(a\sqrt{z_0})(b\sqrt{z_0}) = \pi abz_0$.

双曲抛物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, (a, b > 0)$$

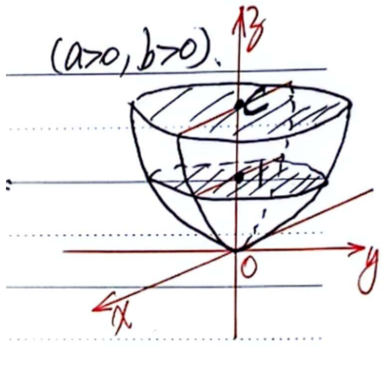

图 4.5: 椭圆抛物面

又称为马鞍面.$z=z_0>0$ 是一族实轴为 x 轴的双曲线,$z=z_0<0$ 是一族虚轴为 y 轴的双曲线.$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} \\ x=0 \end{cases}$ 是抛物线,$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} \\ y=0 \end{cases}$ 也是抛物线. 故称双曲抛物面或马鞍面. 易证, 马鞍面是直纹面.

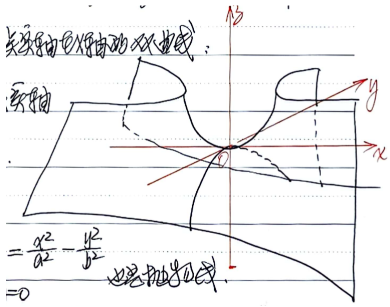

图 4.6: 双曲抛物面

双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

从 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}-1$ 可知 $|z|\geqslant c$ 时, 才有实点. 当 $z=z_0>c$ 或 $z=z_0<-c$ 时, 都是椭圆.

单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

从 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}+1\geqslant 0,\forall z$ 可知, 对 $z\in\mathbb{R}$, 都有曲面图像, 任取 $z_0\in\mathbb{R}$, $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}+1 \\ z=z_0 \end{cases}$

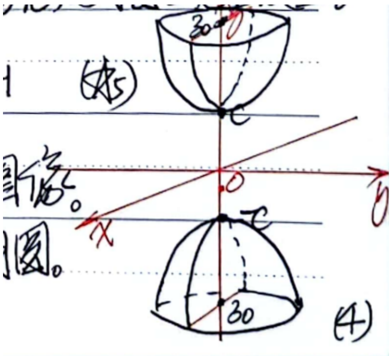

图 4.7: 双叶双曲面

都是椭圆, 即用垂直于 z 轴的平面去切单叶双曲面, 截面都是椭圆. 易证, 单叶双曲面是由直线连续移动形成的直纹面.

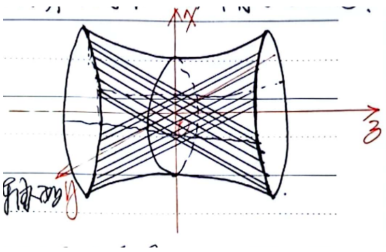

图 4.8: 单叶双曲面

4.2 旋转曲面

设 $L: z=f(y)$ 是一条平面曲线, 将 L 绕 Ox 轴旋转一周, 则所得曲面称为旋转曲面, 记为 Σ. 设 $M(x,y,z)$ 是 Σ 上一点, 过点 M 作 Oz 轴的垂面交 Oz 轴于点 $Q(0,0,z)$, 交曲线 L 于点 $A(0,y_1,z)$, 则 $|QM|^2=|QA|^2 \Rightarrow x^2+y^2=y_1^2$, 即 $y_1=\sqrt{x^2+y^2}$, 所以 Σ 的方程为 $z=f(\pm\sqrt{x^2+y^2})$.

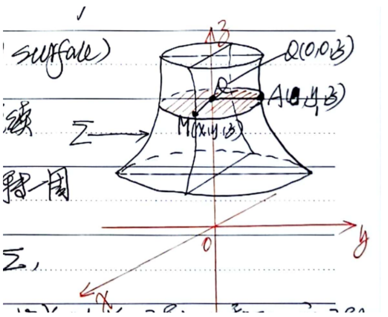

图 4.9: 旋转曲面

即曲线 $z=f(y)$ 绕 Ox 轴旋转一周所得旋转曲面中 z 保持不变, 而另一个变量用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替. 同理, 曲线 $z=f(y)$ 绕 Oy 轴旋转一周所得旋转曲面中 z 保持不变, 而另一个变量用 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替.

例 4.2 证明:

1. 马鞍面:$z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$ 是直纹面.
2. 单叶双曲面:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 是直纹面.

证明

1. 马鞍面可以化为 $\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}\right)\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)=z$, 即 $\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\lambda\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{\lambda}\end{cases}$ 当 $\lambda=0$ 连续变化时, 交面式的直线 $L:\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\lambda\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{\lambda}\end{cases}$ 连续变化, 最后形成马鞍面. 故马鞍面是直纹面.
2. 从 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}+1$ 可知, 对 $\left(\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)=\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\left(1+\dfrac{x}{a}\right)$, 因此得到 $\begin{cases}\dfrac{y}{b}-\dfrac{z}{c}=\lambda\left(1-\dfrac{x}{a}\right)\\ \dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\lambda}\left(1+\dfrac{x}{a}\right)\end{cases}$ 当 $\lambda=0$ 连续变化时, 交面式的直线即单叶双曲面是由一族直线连续移动形成的, 故单叶双曲面是直纹面.

例 4.3 球面三角形的余弦定理

设单位球面三角形 ABC, 是过球心 O 的三个平面 π_1,π_2,π_3 与球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$ 相交而成的球面上的三角形, 如图所示:

则有

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$$

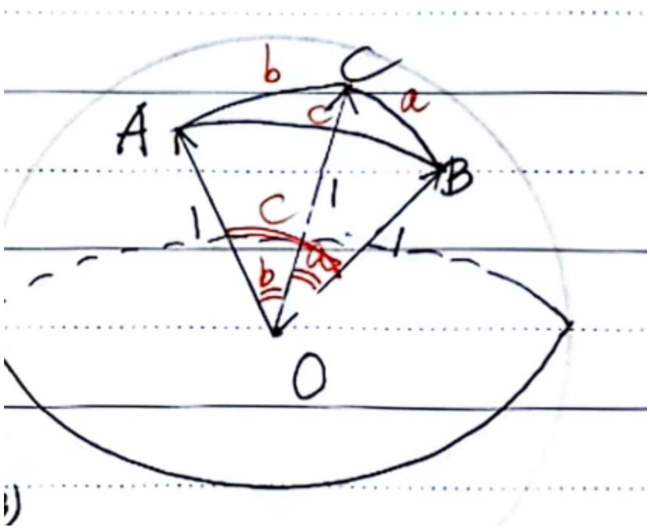

图 4.10: 球面三角形

证明 $\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ 确定了平面 π_1, 则法向量 $\boldsymbol{n}_1=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}$, 同理可得 $\boldsymbol{n}_2=\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}, \boldsymbol{n}_3=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

则

$$\cos A=\cos(\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3)=\frac{\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_3}{|\boldsymbol{n}_2||\boldsymbol{n}_3|}=\frac{(\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|}$$

依向量乘法以及 Lagrange 恒等式, 及 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\sin(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\sin b$,$|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}|=\sin c$, 可得 $(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})=(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB})-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})=(|\overrightarrow{OA}|^2\cos 0)(|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OB}|\cos a)-(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos b)(|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|\cos c)=\cos a-\cos b\cos c$.

代入, 得

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\Rightarrow\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

同理可得 $\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B$, $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C$.

例 4.4 求曲线 $L:\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 绕 Oy 轴,Oz 轴旋转一周所得曲面的方程.

解

1. L 绕 Oy 轴旋转一周,y 保持不变,z 用 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替, 则所得曲面方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2+z^2}{b^2}=1$, 即 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$.
2. L 绕 Oz 轴旋转一周,z 保持不变,y 用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替, 则所得曲面方程为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$, 即 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$.

例 4.5 求直线 $L:\begin{cases}y=kx, k\neq 0\\ z=0\end{cases}$ 绕 Ox, Oy 轴旋转一周所得曲面的方程.

解

1. 绕 x 轴旋转时,x 保持不变,y 用 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$ 代替, 则所得曲面方程为 $y=kx\Rightarrow kx=\pm\sqrt{y^2+z^2}$, 即 $k^2x^2=y^2+z^2, k\neq 0$.
2. 绕 y 轴旋转时,y 保持不变,x 用 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ 代替, 则所得曲面方程为 $y=kx\Rightarrow y=k\pm\sqrt{x^2+z^2}$, 即 $y^2=k^2(x^2+z^2), k\neq 0$.

两个旋转曲面都是圆锥面方程.

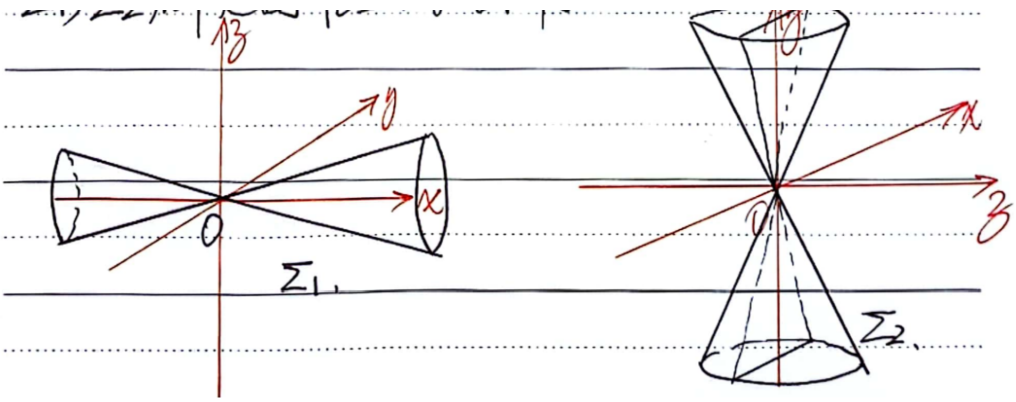

图 4.11: 圆锥面

✍ **作业** ex8.3:1,2,3.

Lec 5 空间解析几何综述

,

5.1 坐标系的平移与旋转

例 5.1 设有二次曲面 $\Sigma: 4x^2+25y^2+4z^2-16x-50y-16z-4z=0$,

1. 指出 Σ 是何种二次曲面;
2. 将 Σ 一般化为参数式.

解

1. 配方得,$4(x-2)^2+25(y-1)^2+4(z-2)^2=100$, 即
$$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}+\frac{(z-2)^2}{5^2}=1$$
故 Σ 是一个旋转椭球面.
若令 $\begin{cases} x-2=x' \\ y-1=y' \\ z-2=z' \end{cases}$ $, M_0=(2,1,2)=O'$, 即是将坐标系的原点平移到 M_0 点, 记作 O', 新的经过平行移动得到的坐标系为 $O'-x'y'z'$. 在新坐标系下,Σ 的方程为
$$\frac{x'^2}{5^2}+\frac{y'^2}{2^2}+\frac{z'^2}{5^2}=1$$
2. 若令 $\begin{cases} \dfrac{x'}{5}=\sin\theta\cos\varphi \\ \dfrac{y'}{2}=\sin\theta\sin\varphi \\ \dfrac{z'}{5}=\cos\theta \end{cases}$, 则 $\begin{cases} x'=5\sin\theta\cos\varphi \\ y'=2\sin\theta\sin\varphi \\ z'=5\cos\theta \end{cases}$ $,\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$ 即 Σ 的参数方程为
$$\begin{cases} x=2+5\sin\theta\cos\varphi \\ y=1+2\sin\theta\sin\varphi \\ z=2+5\cos\theta \end{cases},\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$$
其中 $\begin{cases} x'=5\sin\theta\cos\varphi \\ y'=2\sin\theta\sin\varphi \\ z'=5\cos\theta \end{cases}$ $,\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$ 是在新坐标系下的参数式, $\begin{cases} x=2+5\sin\theta\cos\varphi \\ y=1+2\sin\theta\sin\varphi \\ z=2+5\cos\theta \end{cases}$ $[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi]$ 是在原坐标系下的参数式.

注 曲面 Σ 的参数式都是双参数的, 但是参数式不是唯一的, 例如

$$\begin{cases} x = 2 + 5\cos\theta\cos\varphi \\ y = 1 + 2\cos\theta\sin\varphi \\ z = 2 + 5\sin\theta \end{cases}, \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, 2\pi]$$

也是 Σ 的参数式.

例 5.2 设有二次曲面 $\Sigma : xy = z$.

1. 指出 Σ 是何种二次曲面;
2. 求 Σ 的参数式.

解 若保持坐标系的原点不动, 让坐标系进行旋转变化. 设 $O - xyz$ 坐标系中, 基向量为 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, 在 $O - x'y'z'$ 坐标系中, 基向量为 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$, 且 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ 与 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 的夹角如下表所示:

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{j}'$	α_2	β_2	γ_2
$\boldsymbol{k}'$	α_3	β_3	γ_3

表 5.1

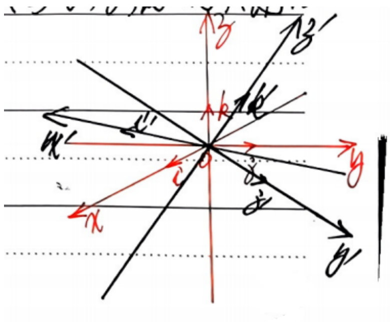

图 5.1

设 $\overrightarrow{OM} = (a, b, c) \neq \theta$, 则 $\overrightarrow{OM}^{\circ} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|} = (\dfrac{a}{|\overrightarrow{OM}|}, \dfrac{b}{|\overrightarrow{OM}|}, \dfrac{c}{|\overrightarrow{OM}|}) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \cos\boldsymbol{i} + \cos\boldsymbol{j} + \cos\boldsymbol{k}$. 即单位向量 $\overrightarrow{OM}^{\circ}$ 可以用他的三个方向余弦作为坐标, 由表 5.1 得

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \cos\alpha_1\boldsymbol{i} + \cos\beta_1\boldsymbol{j} + \cos\gamma_1\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}' = \cos\alpha_2\boldsymbol{i} + \cos\beta_2\boldsymbol{j} + \cos\gamma_2\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{k}' = \cos\alpha_3\boldsymbol{i} + \cos\beta_3\boldsymbol{j} + \cos\gamma_3\boldsymbol{k} \end{cases}$$

现设点 Q 在 $O - xyz$ 坐标系的坐标为 $Q(x, y, z)$, 在 $O - x'y'z'$ 坐标系的坐标为 $Q'(x', y', z')$, 则

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}' \\ &= x'(\cos\alpha_1\boldsymbol{i} + \cos\beta_1\boldsymbol{j} + \cos\gamma_1\boldsymbol{k}) + y'(\cos\alpha_2\boldsymbol{i} + \cos\beta_2\boldsymbol{j} + \cos\gamma_2\boldsymbol{k}) + z'(\cos\alpha_3\boldsymbol{i} + \cos\beta_3\boldsymbol{j} + \cos\gamma_3\boldsymbol{k}) \\ &= (x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3)\boldsymbol{i} + (x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3)\boldsymbol{j} + (x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma \end{aligned}$$

也就是得到了

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos alpha_3 \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 \end{cases}$$

若令 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \cos\beta_1 & \cos\beta_2 & \cos\beta_3 \\ \cos\gamma_1 & \cos\gamma_2 & \cos\gamma_3 \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, 则有 $\boldsymbol{X} = A\boldsymbol{X}'$, 即 $\boldsymbol{X}' = A^{-1}\boldsymbol{X}$, 其中 A 的各行各列都是单位向量, 且任意两行 (列) 正交; 在线性代数中, 称 A 这样的矩阵为正交矩阵, 即 $AA^T = A^TA = I$, 其中 I 是单位矩阵. 称 **??** 为正交线性变化, 简称正交变换.

不难验证,$AA^T = A^TA = I$, 即便几何中的旋转或物理中刚体的旋转, 在代数中对应正交变换.**??**表明旋转之后, 原坐标 x, y, z 与新坐标 x', y', z' 之间的对应关系是正交变换关系.

1. 若保持 Oz 轴不便, 让 Oxy 坐标平面绕 z 轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, 得到了新坐标系 $O - x'y'z'$, 则有

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	$\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$
$\boldsymbol{j}'$	$3\pi/4$	$\pi/4$	$\pi/2$
$\boldsymbol{k}'$	$\pi/2$	$\pi/2$	0

即有

$$\begin{cases} x = x'\cos\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{3\pi}{4} + z'\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = x'\cos\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} + z'\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \\ z = x'\cos\frac{\pi}{2} + y'\cos\frac{\pi}{2} + z'\cos 0 = z' \end{cases}$$

利用此正交变换, 可以将 $\Sigma : xy = z$ 化为 $\Sigma : \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y')\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') = z'$, 即 $z' = \frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2}$, 即 Σ 是一个双曲抛物面.

2. $\Sigma : xy = z$ 在原坐标系中的参数式为 $\begin{cases} x = x + 0y \\ y = 0x + y \\ z = xy \end{cases}$,x, y 为参数, 则 Σ 在新坐标系中的参数式为:$\begin{cases} x' = x' + 0y' \\ y' = 0x' + y' \\ z' = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) \end{cases}$,x', y' 为参数.

5.2 柱面坐标系与球面坐标系

5.2.1 柱面坐标系

$\mathbb{R}^3$ 空间中任一点 $Q(x,y,z)$ 都可以看作是在半径为 r 的某个圆柱面:$x^2+y^2=r^2$ 上. 而圆柱面 $x^2+y^2=r^2$ 上的点都可以用 r,θ,z 这三个参数来确定, 称 (r,θ,z) 为点 Q 的柱面坐标.

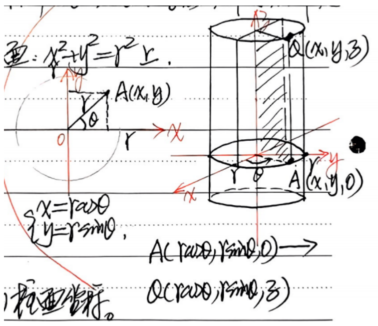

图 5.2

5.2.2 球面坐标系

$\mathbb{R}^3$ 空间中任一点 $Q(x,y,z)$ 都位于某个半径为 r 的球面 $x^2+y^2+z^2=r^2$ 上, 其中 $r=|\overrightarrow{OQ}|$,$\overrightarrow{OQ}$ 与 Oz 轴的正向的夹角设为 θ,$\overrightarrow{OQ}$ 在 Oxy 平面中的投影与 Ox 轴正向夹角为 φ,$0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$. 则 $y=|\overrightarrow{OA}|\sin\varphi=r\sin\theta\sin\varphi$, 而 $z=r\cos\theta$.

称 (r,θ,φ) 为点 Q 的球面坐标. 球面坐标 r,θ,φ 与直角坐标 x,y,z 之间的关系为

$$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases},\theta\in[0,\pi],\varphi\in[0,2\pi],r\geqslant 0$$

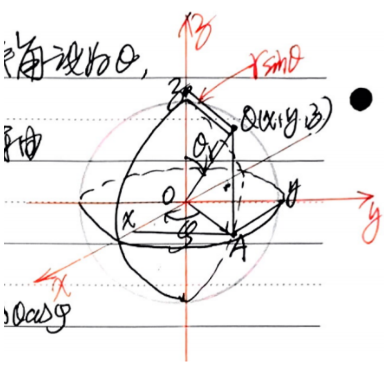

图 5.3

直角坐标系下的球面方程:$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 在柱面坐标系下 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$ 化为 $\Sigma: r^2+z^2=R^2$, 即 $\Sigma: r=R$.

在球面坐标系中,$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi \\ y=r\sin\theta\sin\varphi \\ z=r\cos\theta \end{cases}$ 下, 化为 $x^2+y^2+z^2=r^2=R^2$, 即 $\Sigma: r=R$.

双叶双曲面 $\Sigma: x^2-y^2-z^2=1$ 在柱面坐标系中化为 $r^2\cos 2\theta-z^2=1$, 在球面坐标系中化为 $2x^2-(x^2+y^2+z^2)=2(r\sin\theta\cos\varphi)^2-r^2=r^2(2\sin^2\theta\cos^2\varphi-1)=1$.

5.3 空间曲线的参数式

空间曲线可以写为交线方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$, 他可以改写为参数式.

例 5.3 将空间 $\mathbb{R}^3$ 中的大圆周 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, a>0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 化为参数式.

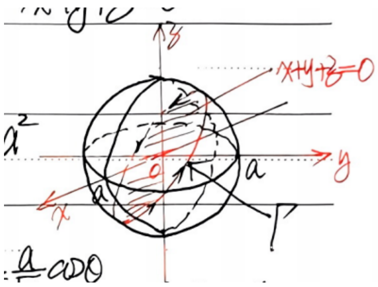

图 5.4

解 从 $z=-(x+y)\Rightarrow x^2+y^2+(x+y)^2=a^2\Rightarrow x^2+xy+y^2=\frac{a^2}{2}\Rightarrow\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2=\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$. 令 $\begin{cases} x+\frac{y}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos\theta \\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{a}{\sqrt{2}}\sin\theta \end{cases}$,$\theta\in[0,2\pi]$. 则 $y=\frac{2}{\sqrt{6}}a\sin\theta\Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)\Rightarrow$ $z=-(x+y)=\frac{-a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta)$. 即圆周 Γ 的参数式为 $\begin{cases} x=\frac{a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta) \\ y=\frac{2}{\sqrt{6}}a\sin\theta \\ z=\frac{-a}{\sqrt{6}}(\sqrt{3}\cos\theta+\sin\theta) \end{cases}$,$\theta\in[0,2\pi]$.

若将 x 视为参数, 则从 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 中可以解出 $\begin{cases} x=x \\ y=y(x) \\ z=z(x) \end{cases}$ $,x\in I.$

例 5.4 空间中的直线 Γ : $\begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x-y-2z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+3=-x-5 \\ -y-2z=-x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=x \\ y=-3x-9 \\ z=2x+4 \end{cases}.$

注 空间的曲线 Γ 的参数式中只有一个参数, 且 Γ 的参数式不是唯一的.

例 5.5 Γ : $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \\ z=b\theta \end{cases}$ $,\theta\in[0,+\theta),a,b>0$ 所表示的空间光滑曲线, 称之为螺旋线. 并称 $k=2\pi b$ 为一个螺距.

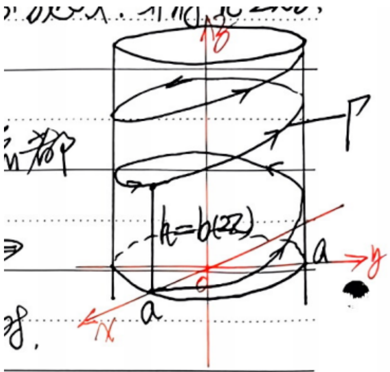

图 5.5

此题中 $x^2+y^2\equiv a^2$, 因此 Γ 上的点都在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上, 而从 $z=b\theta\Rightarrow z'_\theta\equiv b$, 即质点在作圆周运动的同时如果向上作匀速运动, 则综合的结果是沿螺旋线作运动.

无论是在物理中, 还是在几何中, 参数增加的方向被认为是曲线 Γ 的正向, 相反的方向是曲线的负向.

✍ 作业 ex8.4:1,2,4(4)(5)(6)(10),8,9,11.

Lec 6 多元函数的极限与连续性

6.1 多元函数的例子

多元函数形如 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是自变量,u 是因变量.

1. $z=ax+by+c,(x,y)\in\mathbb{R}^2=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},x^2+y^2\leqslant+\infty\}$: 平面方程;
2. $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},(x,y)\in D:x^2+y^2\leqslant R^2$: 上半球面;
3. $f(x,y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$: 二元正态分布概率密度函数;
4. $u=\ln(a^2-x^2-y^2-z^2),x^2+y^2+z^2<a^2,\Omega:x^2+y^2+z^2<a^2$ 为开球体;
5. $B(x,y)=\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t,x,y>0$: 贝塔函数.
6. $u=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$: n 元线性函数.
7. $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,a_{ij}=a_{ji}$: $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数.

多元函数中, 最简单的是二元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$. 且 $z=f(x,y)$ 有直观图像 — 空间的曲面. 因此, 二元函数是今后的重点讨论的多元函数.

6.2 平面点集的若干概念

二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集.

1. 点 M_0 的 δ 邻域 $\overline{U}(M_0,\delta):=\{M:|MM_0|=\rho(M,M_0)<\delta\}$, 即 $\overline{U}(M_0,\delta)=\{(x,y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2\}\subset D$.
2. D 的内点 $M_0:M_0\in D$, 且 $\exists\delta>0$, 使得 $\overline{U}(M_0,\delta)\subset D$.
3. D 的外点 $M_0:M_0\notin D$, 且 $\exists\delta>0$, 使得 $\overline{U}(M_0,\delta)\cap D=\varnothing$.
4. D 的边界点 M_0 : M_0 的任意 δ 邻域中都同时含有 D 中点与 D^c 中点. 点集 D 的边界点全体记作 ∂D : D 的边界.
5. 由全体内点组成的点集称为开集, 开集 D 的余集 D^c 称为闭集. 闭集的余集是开集.
6. 连通性: 若 D 中任意两点 A,B 都可以用 D 中连续曲线连接, 则称 D 是联通的.
7. 开集若是联通的, 称之为开区域, 简称为区域, 开区域 D 与 D 的边界 ∂D 之并, 称之为闭区域, 记作 $\overline{D}=D\cup\partial D$. 注 讲义上此处写为 $\overline{D}=D+\partial D$. 两种写法是等价的.
8. 若 $\exists R>0$, 使得 $D\subset\overline{U}(0,R)$, 则称 D 是有界集.

例 6.1 $\overline{U}(M_0,\delta),\mathbb{R}^2,x^2+y^2+z^2<a^2$ 都是开集,$\overline{U}(M_0,\delta)^c,x^2+y^2+z^2<a^2$ 是有界集,$\mathbb{R}^2$ 是无界集. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\geqslant\delta^2,(R^2)^c=\varnothing,x^2+y^2+z^2\geqslant a^2$ 是闭集. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\delta^2,x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 是有界闭集.

例 6.2 空集 $\varnothing$ 由零个内点组合, 因此是开集;$\varnothing^c=\mathbb{R}^2$ 开, 因此 $\varnothing$ 是闭集. 在所有点集之中, 只有空集和全集是既开又闭的.

6.3 二元函数 $f(x, y)$ 的极限与连续性

1. 若 $\forall\delta > 0, \overline{U}(M_0, \delta)$ 都有点集 D 中点, 则称 M_0 是 D 原点 (极限点),M_0 这个原点可以属于 D, 也可以不属于 D.
2. 设点 $M_0 \in D$, 且 $\exists\delta > 0$, 使得 $\overline{U}(M_0, \delta)$ 中除 M_0 无 D 中点, 则称 M_0 是 D 的孤立点.

定义 6.1

设 $z = f(x, y)$ 是定义在平面点集 D 上的二维函数,$M_0 = (x_0, y_0)$ 是 D 的聚点, 又设 a 是一个数. 如果对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $M = (x, y) \in D$ 满足

$$0 < \rho(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

或者

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad 0 < |y - y_0| < \delta$$

时, 有

$$|f(M) - a| < \varepsilon,$$

那么称当 M 趋于 M_0 时 $f(M)$ 以 a 为极限, 记作

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = a.$$

也可以写成

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = a \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x, y) = a.$$

♣

由于多元函数的极限与一元函数的极限定义的方式相同. 因此, 一元函数极限中的四则运算法则, 夹逼准则, 及极限的唯一性, 局部有界性, 保号性, 保序性等都可以推广到多元函数的极限之中来.

定义 6.2

设 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 的邻域 $B(M_0, r) = \{M \mid \rho(M, M_0) < r\}$ 有定义, 如

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

或者

$$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$$

时, 就有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

也就是说极限

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0),$$

那么称 f 在 (x_0,y_0) 连续. 如果 f 在区域 D 的每一个点连续, 就称 f 在 D 上连续. ♣

注 多元函数的一致连续性指的是 δ 与 ε 与点 M_0 无关, 具体而言, 若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得 $\forall M_1,M_2\in D$, 当 $\rho(M_1,M_2)<\delta$ 时, 有 $|f(M_1)-f(M_2)|<\varepsilon$, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续.

从定义可知, 若 M_0 是 D 是原点, 则必有 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)=f(\lim\limits_{M\to M_0} M)$, 即极限号与函数符号可交换.

若 $M_0(x_0,y_0)$ 是 D 的孤立点, 则 $f(M)$ 在 M_0 处必连续.

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得 $\overline{U}(M_0,\delta)$ 中除 M_0 外无 D 中点. 当 $M\in D,|MM_0|<\delta$ 时,$|f(M)-f(M_0)|=0<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

注 此处使用的是课本上的定义方式.

例 6.3 $f(x,y)=\sqrt{\cos^2\pi x+\cos^2\pi y-2}$ 的定义域 D 由所有的整点 (格点)$M(m,n),m,n\in\mathbb{Z}$ 组成. 每个整点都是 D 的孤立点. 也都是 $f(x,y)$ 的连续点, 从而 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

例 6.4 考察下列极限:

1. 证明: $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$;
2. 证明: $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在;
3. 证明: $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在.

证明

1. $0\leqslant\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}|y|$, 且 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}0=0=\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{1}{2}|y|$, 由夹逼准则, 得 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$;
2. 取 $y=kx^2$,k 为常数, 即动点 $M(x,y)$ 沿抛物线 $y=kx^2$ 趋于原点, 则 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^3}{x^4+k^2x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{1+k^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$. 当 k 取不同值时, 即动点以不同方式趋于 $(0,0)$ 时, 函数有不同的极限, 与极限存在的唯一性矛盾. 故 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在, 从而 $\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处不连续;
3. $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}\cdot\frac{x+y}{xy}}$. 其中
$$\lim_{x\to 0,y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$$
而取 $y=-x+kx^2$ 时, $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x+y}{xy}=\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x+y}{xy}=\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{-x^2+kx^3}{kx^2}=-\dfrac{1}{k}$. 即 k 取不同值时,$M(x,y)$ 沿 $y=-x+kx^2$ 趋于原点时, 函数有不同的极限, 与极限存在的唯一性矛盾. $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在, 从而 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在.

例 6.5 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$. 证明在 $(0,0)$ 处过此点的每一条射线 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$,$0\leqslant t<+\infty$,$f(x,y)$ 都连续, 即 $\lim\limits_{t\to\delta^+}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)=0$. 但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

证明 不连续性已在上文证明. 下证射线上的连续性.

$$\lim_{t\to 0^+}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to 0^+}\frac{(t\cos\alpha)^2(t\sin\alpha)}{(t\cos\alpha)^4+(t\sin\alpha)^3}=\lim_{t\to 0^+}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0=f(0,0).$$

因此对于任意 α, 即对于任意射线, 函数 $f(x,y)$ 在射线上连续.

6.4 连续多元函数的主要性质

1. 连续多元函数的和, 差, 积, 商 (分母不为零) 仍然是连续的多元函数;
2. 在复合有意义的前提下, 连续多元函数的复合函数仍是连续函数;
3. 有界闭区域 D 上的连续多元函数具有“五性”;
   (a). 有界性;
   (b). 最值性;
   (c). 介值性;
   (d). 零值性;
   (e). 一致连续性,

上述性质的证明方法, 与一元连续函数的“五性”证明方法类似.

✍ 作业 ex9.1:12,13,14(2)(7)(9)(10),15,17(1),18.

Lec 7 偏导数与全微分 (total differential)

7.1 多元函数的偏导数 (partial derivative)

在多元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 中, 设 $M_0(x_0,y_0),M_1(x_0+\Delta x,y_0),M_2(x_0,y_0+\Delta y)\in D$, 则

1. $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 是固定 y, 仅让 x 发生变化而使得 z 产生的增量.
2. $f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 是固定 x, 仅让 y 发生变化而使得 z 产生的增量.

记 $\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 分别称作因变量 z 关于 x,y 的偏增量, 并有如下定义:

定义 7.1

1. $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 为 z 关于 x 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的偏导数, 并记作
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=f_x'(M_0)=f_x'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\left.\big(f(x,y_0)\big)_x'\right|_{x_0}$$
2. $\displaystyle\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 为 z 关于 y 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的偏导数, 并记作
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=f_y'(M_0)=f_y'(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\left.\big(f(x_0,y)\big)_y'\right|_{y_0}$$

♣

注 我们采用的几种导数记号:

1. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$;
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$;
3. $f_x'(x_0,y_0)$;
4. $f_1'(x_0,y_0)$(一定程度上可以避免复合函数指代的问题, 推荐使用).

$f_x'(M_0),f_y'(M_0)$ 实际上就是在点 M_0 处, 因变量 z 分别关于 x,y 的相对瞬时变化率. 即
$$f_x'(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0},f_y'(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y_0}$$

同理, 设 $u=f(x,y,z)$ 在 $\bar{U}(M_0,\Delta)$ 中有定义, 则
$$f_x'(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0,z_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0},f_y'(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y,z_0)}{\mathrm{d}y}\right|_{y_0},f_z'(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y_0,z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z_0}$$
其余情形可类推.

总之, 多元函数的偏导数, 就是将多元函数中的其余自变量固定, 只把因变量对一个自变量求导的结果.

例 7.1 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y\not=0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

1. 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续;
2. 证明 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导;
3. 求 $f'_x(1,1), f'_y(2,1)$.

解

1. 沿着 $y=kx^2$ 可得在 $(0,0)$ 不连续.
2. $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{(\Delta x)^2\cdot 0}{(\Delta x)^4+0^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$, 同理 $f'_y(0,0)=0$
3. $f'_x(1,1)=\big(f(x,1)\big)'_x\Big|_{x=1}=\left(\dfrac{x^2\cdot 1}{x^4+1^2}\right)'_x\Big|_{x=1}=\dfrac{2x-2x^5}{(x^4+1)^2}\Big|_{x=1}=0$

   $f'_y(2,1)=\big(f(2,y)\big)'_y\Big|_{x=1}=\left(\dfrac{2^2y}{2^4+y^2}\right)'_y\Big|_{y=1}=\dfrac{4(16-y^2)}{(16+y^2)^2}\Big|_{y=1}=\dfrac{60}{289}$

例 7.2 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 证明:

1. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.
2. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 不存在, 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可偏导.

证明

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0,0)$
2. $f'_x(0,0)=\big(\sqrt{x^2+0}\big)'_x\Big|_{x=0}=\big(|x|\big)'_x\Big|_{x=0}$ 不存在. 同理 $f'_y(0,0)$ 不存在.

从两个例题可知, 多元函数连续性和可偏导性没有关系.

7.2 多元函数全微分 (total differential) 与可微性

定义 7.2

设 $z=f(x,y),(x,y)\in D\in\mathbb{R}^2$, 并设 $M_0(x_0,y_0), M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$, 若存在常数 A,B, 设 $z=f(x,y)$ 在 M_0 处的全增量可表示为

$$\Delta z=f(M)-f(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

q 其中,$\rho=\rho(M,M_0)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 则称 $z=f(x,y)$ 是可微的.

称 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数:$A\Delta x+B\Delta y=A(x-x_0)+B(y-y_0)$ 为 $f(x,y)$ 在 M_0 处的全微分, 记作 $\mathrm{d}z\Big|_{M_0}=A\Delta x+B\Delta y=A(x-x_0)+B(y-y_0)$

即在 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 可微的条件下, 有 $\Delta z=\mathrm{d}z\Big|_{M_0}+o(\rho)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho)$ ♣

同理, 若三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的全增量可表示为

$$\Delta u=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)+o(\rho)$$

其中 A, B, C 为常数,$\rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, 则称 $u = f(x, y, z)$ 在点 M_0 处可微, 且 $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ 称为 $f(x, y, z)$ 在点 M_0 处的全微分, 记作 $\mathrm{d}u\Big|_{M_0} = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ 即有 $\Delta u = \mathrm{d}u\Big|_{M_0} + o(\rho) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + o(\rho)$ 更高维上的可类似进行定义.

若 $z = f(x, y)$ 在区域 D 中每一点可微, 则称 $f(x, y)$ 在区域 D 上可微.

注 关于 d这个符号, 有如下几种认知,

1. 完全当做记号来用, 即只有全微分, 积分, 以及有些情况下的导数才使用, 实际上 B2 中也确实最好这么做.
2. 如上述表述中的, 作为线性主部存在,$\mathrm{d}z = A(x - x_0) + B(y - y_0)$. 但一般不用 $\mathrm{d}\mathrm{d}z$ 去直接代替做运算.
3. 特殊的线性映射, 相当于认为 $\mathrm{d}z(\Delta x, \Delta y)\Big|_{(x_0, y_0)} = A\Delta x + B\Delta y$, 这是 B3 中的定义, 了解一下即可.
4. 一种特殊算子, 在 B2 的后续选讲课程中微分形式涉及到这一部分, 也是了解即可.

我们在 B2 中实际上可以按照第二种方式去理解, 但最好不要让 $\mathrm{d}z = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ 这种形式出现, 因为这种表达方式和另外三种都有些冲突, 且容易出错. 实际上更多的当成完全的记号来使用会更好.

定理 7.1

1. 若 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处可微, 则 $f(x, y)$ 在 M_0 处连续. 反之未必.
2. 若 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处可微, 则 $f(x, y)$ 在 M_0 处可偏导. 反之未必.

♡

证明

1. (a). 当 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$, 有 $\begin{cases} \Delta x \to 0, \\ \Delta y \to 0; \end{cases}$ 而

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) = 0$$

因此

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

即有连续性.

(b). 反例:$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在原点处连续但不可微, 否则原点处可偏导.

2. (a).

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x + o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A$$

因此 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在, 且 $f'_x(x_0, y_0) = A$.

同理, 有 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在,$f'_y(x_0, y_0) = B$. 故而可得偏导存在.

(b). 反例:$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点处可偏导但不连续, 故一定不可微.

例 7.3 证明:$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点处可偏导, 连续, 但不可微.

解

1.

$$\begin{aligned}0\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|&=\frac{|x||y|\cdot|x|}{x^2+y^2}\\&\leqslant\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot|x|}{x^2+y^2}\\&=\frac{|x|}{2}\to 0\end{aligned}$$

故得连续.

2.

$$f'_x(0,0)=\left(\frac{x^2\cdot 0}{x^4+0^2}\right)'_x\bigg|_{x=0}=(0)'_x|_{x=0}=0$$

$$f'_y(0,0)=\left(\frac{0^2\cdot y}{0^4+y^2}\right)'_y\bigg|_{y=0}=(0)'_y\bigg|_{y=0}=0$$

故得可偏导.

3. 反证法: 假设在原点处可微. 则有

$$f(\Delta x,\Delta y)-0=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

结合偏导数可知上述等式可化为

$$\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=o(\rho)$$

即

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

但当

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2k\Delta x}{((\Delta x)^2+k(\Delta x)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

与 k 有关, 故与极限存在唯一性矛盾, 因此可知原函数在原点不可微.

例 7.4 思考题 设 $u=f(x,y,z)=x^{y^z}+x^{a^z}+a^{y^z}+x^{y^a}+a^{a^z}(a>0,\text{常数})$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$, 及 u 在 $M(1,1,1)$ 处的全微分.

可不做在作业中, 发在群里即可.

✍ 作业 ex9.2:2(2)(5)(8),3,4,6,13(4)(6),16.

Lec 8 可微条件与高阶偏导数

8.1 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微的条件

定理 8.1

若 $z=f(x,y)$ 在 M_0 处可微, 则 $f'_x(M_0), f'_y(M_0)$ 存在. 反之未必.

证明 已知 $z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微, 则

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = (A\Delta x + B\Delta y) + o(\rho),$$

令 $\Delta y = 0$, 则

$$\Delta z_x = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0) = A\Delta x + o(|\Delta x|),$$

由此得

$$f'_x(M_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = A.$$

同理, 令 $\Delta x = 0$, 则 $f'_y(M_0) = B$.

即 $\mathrm{d}z|_{M_0} = A\Delta x + B\Delta y = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y \Rightarrow \mathrm{d}z = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y$. 将 f'_x 记为 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, 将 f'_y 记为 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, 则

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y.$$

或者写成向量形式

$$\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix}.$$

定理 8.2

若 $f(x,y)$ 在 M_0 处可微, 则 $z=f(x,y)$ 在 M_0 处必连续, 反之未必.

证明 已知 $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + o(\rho)$, 且

$$\Delta x\to 0, \Delta y\to 0,$$

时, 有

$$f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + o(\rho) \to 0, \quad \rho\to 0,$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 因此 $\rho\to 0 \Leftrightarrow \Delta x\to 0, \Delta y\to 0$.

从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\Delta z = 0 \Leftrightarrow z=f(x,y)$ 在 M_0 处连续.

例 8.1 反例 1: $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 在 $M_0(0,0)$ 处连续. 但因 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)$ 都不存在, 所以 $f(x,y)$ 在 M_0 处不可微.

例 8.2 反例 2: $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处有 $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$, 但 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续. 由**??**可知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

定理 8.3

$z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微的充分必要条件是

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-f_x'(M_0)\Delta x-f_y'(M_0)\Delta y}{\rho}=0.$$

证明 若 $z=f(x,y)$ 在 M_0 处可微, 则

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y+o(\rho),$$

由此得

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-f_x'(M_0)\Delta x-f_y'(M_0)\Delta y}{\rho}=\lim_{\rho\to0}\frac{o(\rho)}{\rho}=0.$$

反之, 若

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\Delta z-f_x'(M_0)\Delta x-f_y'(M_0)\Delta y}{\rho}=0,$$

则

$$\Delta-(f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y)=o(\rho)\Rightarrow\Delta z=f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y+o(\rho)=(A\Delta x+B\Delta y)+o(\rho),$$

从而 $f(x,y)$ 在 M_0 处可微.

定理 8.4

$z=f(x,y)$ 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微的充分必要条件是 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 存在且连续.

证明 已知 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 在 M_0 处存在且连续, 则

$$\begin{aligned}\Delta z&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0\\&=f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y'(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y,\end{aligned}$$

其中 $\theta_1,\theta_2\in(0,1)$. 利用 $f_x'(x,y),f_y'(x,y)$ 的连续性, 得

$$\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x'(x_0,y_0)$$
$$\lim_{\Delta x\to0,\Delta y\to0}f_y'(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f_y'(x_0,y_0),$$

从而

$$f_x'(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x'(x_0,y_0)+\alpha_1,\quad \alpha_1\to0,\ (\Delta x\to0,\Delta y\to0),$$

$$f_y'(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f_y'(x_0,y_0)+\alpha_2,\quad \alpha_2\to0,\ (\Delta x\to0,\Delta y\to0),$$

即

$$\Delta z=(f_x'(M_0)+\alpha_1)\Delta x+(f_y'(M_0)+\alpha_2)\Delta y=f_x'(M_0)\Delta x+f_y'(M_0)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y,$$

且 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}(\alpha_1\cos\theta+\alpha_2\sin\theta)=0$, 从而 $\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=o(\rho)$, 所以

$$\Delta z=f'_x(M_0)\Delta x+f'_y(M_0)\Delta y+o(\rho)=(A\Delta x+B\Delta y)+o(\rho),$$

从而 $f(x,y)$ 在 M_0 处可微.

例 8.3 反例 3: $z=f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处可微, 但 $f'_x(x,y),f'_y(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

8.2 高阶偏导数

设 $z=f(x,y)=x^2+xy+y^2+x^y+3x+4y$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y+yx^{y-1}+3,$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+2y+x^y\ln x+4.$$

由此得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y=(2x+y+yx^{y-1}+3)'_y=1+x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x=(x+2y+x^y\ln x+4)'_x=1+x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x.$$

进一步得

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)'_x=\left(1+x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x\right)'_x=(y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x+yx^{y-2},$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)'_x=(1+x^y\ln x+y)'_x=(y-1)x^{y-2}+y(y-1)x^{y-2}\ln x+yx^{y-2}.$$

对比得知,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x},\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}$ 在区域 $D:x>0$ 中连续, 且

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}\equiv\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}.$$

对于 $(x,y)\in D$ 成立.

定理 8.5

若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 中的高阶偏导数连续, 则高阶偏导数与求偏导的顺序无关. ♡

证明 仅证 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

任取 $M_0=(x_0,y_0)\in D,B(M_0,r)\subset D$, 取 $h=\Delta x\neq0,k=\Delta y\neq0$, 使得 $(x_0+h,y_0+k)\in$

$B(M_0, r)$, 令

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y),$$
$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y).$$

是 $f(x,y)$ 分别对于 x 和 y 的偏差分。容易验证，如果 $\varphi(x)$ 和 $\psi(y)$ 分别对 x 和 y 再进行差分，那么差分的结果是都等于 $f(x,y)$ 的二阶混合差分（下列第二个等式的右端）

$$\begin{aligned}\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) &= \psi(y_0+k) - \psi(y_0) \\ &= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) + f(x_0, y_0).\end{aligned}$$

由一元函数的微分公式可得

$$\begin{aligned}\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) &= h\varphi'(x_0+\theta_1 h) \\ &= h\left(f'(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - f'(x_0+\theta_1 h, y_0)\right) \\ &= hkf''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\eta_1 k),\end{aligned}$$

其中 $0 < \theta_1, \eta_1 < 1$。类比存在 $0 < \theta_2, \eta_2 < 1$，使得

$$\psi(y+k) - \psi(y_0) = hkf''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\eta_2 k).$$

故有

$$f''_{xy}(x_0+\theta_1 h, y_0+\eta_1 k) = f''_{yx}(x_0+\theta_2 h, y_0+\eta_2 k).$$

令 $(h,k) \to (0,0)$，由混合偏导数的连续性即可证明定理。

8.3 例题

例 8.4 证明函数 $u = \dfrac{1}{r}, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} > 0$ 满足 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv equiv0, \forall (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

证明 $u = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = -x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{(x^2+y^2+z^2) - 3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$. 由于 $u = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$ 是关于 x, y, z 的对称函数, 因此有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{(x^2+y^2+z^2) - 3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{(x^2+y^2+z^2) - 3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{(x^2+y^2+z^2) - 3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3(x^2+y^2+z^2) - 3(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.$$

例 8.5 证明 $u=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}, x>0, t>0, a>0$ 常数满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=\frac{(t^{-\frac{1}{2}})'_t}{2a\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}+\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)'_t\\&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}t}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-1+\frac{x^2}{2a^2t}\right).\end{aligned}$$

且有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{x}{2a^2t}\right),\\\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{1}{4a\sqrt{\pi t}t}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(\frac{x^2}{2a^4t}-\frac{1}{a^2}\right).\end{aligned}$$

从而

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad \forall t>0, x\in\mathbb{R}^+.$$

例 8.6 $\forall\phi,\psi\in C^2(I)$, $u=\phi(x-at)+\psi(x+at)$ 满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

其中 $a>0$ 为常数.

证明 令 $\begin{cases}v=x-at,\\w=x+at,\end{cases}$，则 $u=\phi(v)+\psi(w)$, 且

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\phi'(v)\frac{\partial v}{\partial x}+\psi'(w)\frac{\partial w}{\partial x}=\phi'(v)+\psi'(w),\\\frac{\partial u}{\partial t}&=\phi'(v)\frac{\partial v}{\partial t}+\psi'(w)\frac{\partial w}{\partial t}=-a\phi'(v)+a\psi'(w).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\phi''(v)\frac{\partial v}{\partial x}+\psi''(w)\frac{\partial w}{\partial x}=\phi''(v)+\psi''(w),\\\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}&=\phi''(v)\frac{\partial v}{\partial t}+\psi''(w)\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\phi''(v)+a^2\psi''(w).\end{aligned}$$

因此有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \forall t>0, x\in\mathbb{R}.$$

✍ **作业** ex9.2:2(7),8,11,15,26,27,28.

Lec 9 复合 (隐) 函数微分法

9.1 复合函数 (composition) 微分法

定理 9.1

设 $z = f(u,v)$ 在区域 D 中可微, 且 $\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases}$ 都在区域 E 中可微, 当复合 $f(g(x,y),h(x,y))$ 有意义时,z 通过中间变量 u,v 成为 x,y 的多元复合函数, 且有求偏导数的链式法则如下:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}; \end{cases} \tag{9.1}$$

同时,z 作为 x,y 的多元复合函数可微, 且不论 u,v 是作为 $f(u,v)$ 的自变量, 还是作为复合函数 $f(g(x,y),h(x,y))$ 的中间变量, 总有:

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v. \tag{9.2}$$

??称为全微分的一阶形式不变性.

♡

证明

?? 固定 y, 令 x 有增量 Δx, 则

$$\begin{cases} \Delta u_x = g(x+\Delta x, y) - g(x,y), \\ \Delta v_x = h(x+\Delta x, y) - h(x,y), \\ \Delta z_x = f(u+\Delta u_x, v+\Delta v_x) - f(u,v) = \dfrac{\partial z}{\partial u}\Delta u_x + \dfrac{\partial z}{\partial v}\Delta v_x + o(\rho); \end{cases}$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta u_x)^2 + (\Delta v_x)^2}$, 并有 $\Delta x \to 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta u_x \to 0, \\ \Delta v_x \to 0; \end{cases} \Rightarrow \rho \to 0.$

利用

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\frac{\rho}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\rho}{\Delta x} \\ &= \lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho)}{\rho}\lim_{\Delta x\to 0}\sqrt{\left(\frac{\Delta u_x}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta x}\right)^2} \\ &= 0\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以及

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\partial u}{\partial x},\ \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=\frac{\partial v}{\partial x};$$

因此有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\Delta u_x}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\Delta v_x}{\Delta x}+\frac{o(\rho)}{\Delta x}\right)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u_x}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\rho)}{\Delta x}\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}$$

同理, 对 y 有

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

可微性 记

$$\begin{cases}\Delta u=g(x+\Delta x,y+\Delta y)-g(x,y),\\ \Delta v=h(x+\Delta x,y+\Delta y)-h(x,y),\\ \Delta z=f(u+\Delta u,v+\Delta v)-f(u,v),\\ r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\\ \rho=\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2};\end{cases}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\Delta z&=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta v+o(\rho)\\&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+o(r)\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o(r)\right)+o(\rho)\\&=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y+o(r)+o(\rho)\end{aligned}$$

同时, 当 $r\to 0$, 有 $\rho\to 0$ 与 $\dfrac{o(r)}{r}$ 有界, 因此

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{r}&=\frac{\sqrt{(\Delta u)^2+(\Delta v)^2}}{r}\\&=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\Delta x}{r}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\Delta y}{r}+\frac{o(r)}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\Delta x}{r}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\Delta y}{r}+\frac{o(r)}{r}\right)^2}\\&\leqslant\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}+M_0\triangleq M,r\to 0\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\left|\frac{o(\rho)}{r}\right| &= \lim_{r\to 0}\left|\frac{o(\rho)}{\rho}\right|\left|\frac{\rho}{r}\right| \\ &\leqslant M\lim_{r\to 0}\left|\frac{o(\rho)}{\rho}\right| \\ &= 0\end{aligned}$$

故

$$\Delta z=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y+o(r)$$

表明 z 作为 x,y 的多元复合函数可微.

?? (a). 当 u,v 作为 $f(u,v)$ 的自变量时,$z=f(u,v)$ 可微, 自然有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

(b). 当 u,v 作为复合函数 $f(g(x,y),h(x,y))$ 的中间变量时,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\\ &=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\\ &=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\\ &=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v\end{aligned}$$

9.2 隐函数 (implicit function) 微分法

例 9.1 方程

$$3x+4y-5z+7=0$$

可确定

$$\begin{cases} & z=\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+\frac{7}{5},\\ \text{or} & y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}z-\frac{7}{4},\\ \text{or} & x=-\frac{4}{3}y+\frac{5}{3}z-\frac{7}{3};\end{cases}$$

三个函数, 分别可得

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3}{5},\\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{4}{5};\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{5}{4},\\ \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{3}{4};\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{4}{3},\\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{5}{3};\end{cases}$$

可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{5}{4}=-1,\frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{5}{3}\times\frac{4}{5}\times\left(-\frac{3}{4}\right)=-1.$$

上述的三个二元函数, 都是方程 $F(x,y,z)=3x+4y-5z+7=0$ 所确定的隐函数.

定理 9.2

设方程 $F(x,y)=0$ 满足:

1. $F(x,y)\in C^1(D)$,D 为区域,
2. $F(M_0)=F(x_0,y_0)=0, M_0\in D$,
3. $F'_y(M_0)=F'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则方程 $F(x,y)=0$ 可在点 M_0 的某个 δ 邻域 $\bar{U}(M_0,\delta)$ 中确定唯一隐函数:$y=\varphi(x)$ 满足

$$\begin{cases}\varphi(x_0)=y_0,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\in C\end{cases}$$

证明 不妨设 $F'_y(x_0,y_0)>0$, 则 $F(x_0,y)$ 在 y_0 附近严格单调递增, 即在 $M(x_0,y_0)$ 附近形成了一条唯一存在的严格单调递增平面曲线, 设此曲线的表达式为 $y=\varphi(x),(x,y)\in\bar{U}(M_0,\delta)$, 则 $y=\varphi(x)$ 即为所求的隐函数.

显然 $y=\varphi(x)$ 穿过点 $M_0(x_0,y_0)$, 即 $\varphi(x_0)=y_0$, 且从 $F(x,\varphi(x))\equiv 0$, 两边对 x 求导, 有:$F'_x\cdot 1+F'_y\cdot\dfrac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\equiv 0\Rightarrow\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi'(x)=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$

从 $F\in C^1(D)$ 知,$\varphi'(x)$ 是连续函数.

定理 9.3

设方程 $F(x,y,z)=0$ 满足:

1. $F(x,y,z)\in C^1(D)$,D 为区域,
2. $F(M_0)=F(x_0,y_0,z_0)=0, M_0\in D$,
3. $F'_z(M_0)=F'_y(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

则方程 $F(x,y,z)=0$ 可在点 M_0 的某个 δ 邻域 $\bar{U}(M_0,\delta)$ 中确定唯一隐函数:$z=\varphi(x,y)$ 满足

$$\begin{cases}\varphi(x_0,y_0)=z_0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.\end{cases}$$

注 值得注意的是, 上述隐函数 $y=\varphi(x)$ 或者 $z=\varphi(x,y)$ 只理论上存在, 实际问题中未必能求出来, 但隐函数的导数或偏导数是能够从已知方程 $F(x,y)=0$ 或 $F(x,y,z)=0$ 中求出来的.

例如, 已知 $z=\varphi(x,y)$ 是方程 $F(x,y,z)=0$ 确定的隐函数, 则由 $F(x,y,\varphi(x,y))\equiv 0$, 两边对 x,y 分别求导, 有

$$\begin{cases}F'_x\cdot 1+F'_z\cdot\varphi'_x(x,y)=0\\ F'_y\cdot 1+F'_z\cdot\varphi'_y(x,y)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\varphi'_x(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}\\ \varphi'_y(x,y)=\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.\end{cases}$$

9.3 例题

例 9.2 证明:

$$u = \frac{1}{r}, r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

满足 Laplace 方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv 0, \forall (x,y,z) \neq (0,0,0).$$

证明

由于 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$,

因此 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\left(\frac{x}{r^3}\right)'_x = -\frac{r^3 - 3r^2\frac{x}{r}x}{r^6} = -\frac{r^2-3x^2}{r^5}$,

由 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 的对称性知 $\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{r^2-3y^2}{r^5}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{r^2-3z^2}{r^5}; \end{cases}$

故 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{3r^2 - 3(x^2+y^2+z^2)}{r^5} = -\frac{3r^2-3r^2}{r^5} = 0.$

例 9.3 证明:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} (x>0, t>0, a>0\text{常数})$$

满足热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证明

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}(t^{-\frac{1}{2}})'_t\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}(-\frac{x^2}{4a^2t})'_t = \frac{1}{4a\sqrt{\pi t^3}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(\frac{x^2}{2a^2t} - 1\right).$

另外 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right)'_x = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{x}{2a^2t}\right)$,

可得 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{x}{2a^2t}\right)^2 + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{1}{2a^2t}\right)\right] = \frac{1}{4a\sqrt{\pi t^3}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(\frac{x^2}{2a^4t} - \frac{1}{a^2}\right)$,

因此 $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4a\sqrt{\pi t^3}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(\frac{x^2}{2a^2t} - 1\right) = \frac{\partial u}{\partial t}.$

例 9.4 证明: 设

$$\varphi, \psi \in C^2(I), u = \varphi(x-at) + \psi(x+at), (x\in\mathbb{R}, t>0, a>0\text{常数})$$

满足波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证明

令 $\begin{cases} v = x - at, \\ w = x + at; \end{cases}$ 则有 $u = \varphi(v) + \psi(w)$ 且 $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 1; \end{cases}$ 与 $\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = -a, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = a; \end{cases}$

因此我们有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(v)\frac{\partial v}{\partial x} + \psi'(w)\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi'(v) + \psi'(w)$,

故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(v)\dfrac{\partial v}{\partial x}+\psi''(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}=\varphi''(v)+\psi''(w)$.

同时 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial t}+\psi'(w)\dfrac{\partial w}{\partial t}=-a\varphi'(v)+a\psi'(w)$,

故 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-a\varphi''(v)\dfrac{\partial v}{\partial t}+a\psi''(w)\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\left(\varphi''(v)+\psi''(w)\right)=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

例 9.5 球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0$常数) 在第一卦限内可确定三个隐函数

$$x=\sqrt{a^2-y^2-z^2},y=\sqrt{a^2-x^2-z^2},z=\sqrt{a^2-x^2-y^2};$$

证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\equiv-1.$$

证明

$\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{2y}{2\sqrt{a^2-y^2-z^2}}=-\dfrac{y}{x},\ \dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{2z}{2\sqrt{a^2-x^2-z^2}}=-\dfrac{z}{y}$,

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{2x}{2\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=-\dfrac{x}{z};\ (x>0,y>0,z>0)$,

因此 $\dfrac{\partial x}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(-\dfrac{y}{x}\right)\left(-\dfrac{z}{y}\right)\left(-\dfrac{x}{z}\right)\equiv-1,\forall x>0,y>0,z>0,x^2+y^2+z^2=a^2$.

例 9.6 设 $F(x,y)\in C^2(D)$,D 是区域, 函数 $y=\varphi(x)$ 由方程 $F(x,y)=0$ 确定,

证明:

$$\varphi''(x)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

证明 可知

$$\begin{aligned}
\varphi''(x)=\left(\varphi'(x)\right)'_x&=-\left(\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\right)'_x\\
&=-\frac{\left(F'_x(x,y)\right)'_xF'_y(x,y)-\left(F'_y(x,y)\right)'_xF'_x(x,y)}{\left(F'_y(x,y)\right)^2}\\
&=-\frac{\left(F''_{xx}\cdot1+F''_{xy}\cdot y'_x\right)F'_y-\left(F''_{yx}\cdot1+F''_{yy}\cdot y'_x\right)F'_x}{\left(F'_y\right)^2}\\
&=-\frac{\left(F''_{xx}+F''_{xy}\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)\right)F'_y-\left(F''_{yx}+F''_{yy}\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)\right)F'_x}{\left(F'_y\right)^2}\\
&=-\frac{F''_{xx}\left(F'_y\right)^2-F''_{xy}F'_xF'_y-F''_{xy}F'_xF'_y+F''_{yy}\left(F'_x\right)^2}{\left(F'_y\right)^3}\\
&=-\frac{\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^3}
\end{aligned}$$

其中 $y'_x=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

✍ 作业 ex9.2:20(2)(3)(4),25,28,32;ex9.3:1(1),2(2)(5),4(1).

Lec 10 多元函数微分法习题课（1）

10.1 例题

例 10.1 设方程:$u^3-3(x+y)u^2+z^3=0$ 确定了隐函数 $u=f(x,y,z)$, 求 $\mathrm{d}u$.

解 解法一:

原方程两边取全微分 d, 得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(u^3-3(x+y)u^2+z^3)=\mathrm{d}(0)=0\\
\Rightarrow&\mathrm{d}(u^3)-3\,\mathrm{d}((x+y)u^2)+\mathrm{d}(z^3)=0\\
\Rightarrow&3u^2\,\mathrm{d}u-3u^2(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)-3(x+y)2u\,\mathrm{d}u+3z^2\,\mathrm{d}z=0
\end{aligned}$$

整理得

$$\mathrm{d}u=\frac{3u^2(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+3z^2\,\mathrm{d}z}{3u^2+6(x+y)u}=\frac{u^2\,\mathrm{d}x+u^2\,\mathrm{d}y-z^2\,\mathrm{d}z}{u^2-2(x+y)u}$$

解 解法二:

令 $F(x,y,z,u)=u^3-3(x+y)u^2+z^3$, 其中 x,y,z,u 地位相同, 则 $F'_u=3u^2-6(x+y)u$,$F'_x=-3u^2$,$F'_y=-3u^2$,$F'_z=3z^2$. 从而

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=-\frac{F'_x}{F'_u}=\frac{u^2}{-2(x+y)u+u^2};\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{F'_y}{F'_u}=\frac{u^2}{-2(x+y)u+u^2};\\
\frac{\partial u}{\partial z}&=\frac{F'_z}{F'_u}=\frac{z^2}{-2(x+y)u+u^2}.
\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z=\frac{u^2\,\mathrm{d}x+u^2\,\mathrm{d}y-z^2\,\mathrm{d}z}{u^2-2(x+y)u}.$$

解 解法三:

原方程两边分别对 x,y,z 求偏导数, 解出 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$ 再代入 $\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$ 即可.

例 10.2 试证明方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

在线性变换

$$\begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=3x-y\end{cases}$$

下可以化简为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0$$

解 证法一:

从线性变换 $\begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=3x-y\end{cases}$ 可得 $x=\frac{1}{4}(\xi+\eta)$,$y=\frac{1}{4}(3\xi-\eta)$, 因此 $\frac{\partial x}{\partial\xi}=\frac{1}{4},\frac{\partial x}{\partial\eta}=\frac{1}{4},\frac{\partial y}{\partial\xi}=\frac{3}{4},\frac{\partial y}{\partial\eta}=-\frac{1}{4}$. 由此得

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial\xi}&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}=\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial y}\\ \Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}&=\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_\eta'=\left(\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\eta'+\left(\frac{3}{4}\frac{\partial u}{\partial y}\right)_\eta'\\ &=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\eta}\right)\\ &=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{1}{4}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\left(-\frac{1}{4}\right)\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{1}{4}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(-\frac{1}{4}\right)\right)\\ &=\frac{1}{16}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

即有

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=16\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\\ \frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial u}{\partial y}=4\frac{\partial u}{\partial\xi}\end{cases}$$

故原偏微分方程化简为

$$\begin{aligned}16\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+2\left(4\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)=0\\ \Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0\end{aligned}$$

解 解法二:

从线性变换 $\begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=3x-y\end{cases}$ $\Rightarrow\frac{\partial\xi}{\partial x}=1,\frac{\partial\xi}{\partial y}=1,\frac{\partial\eta}{\partial x}=3,\frac{\partial\eta}{\partial y}=-1$. 而 $u(x,y)$ 通过中间变量可视为 ξ,η 的函数, 从而

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+3\frac{\partial u}{\partial\eta},\\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}.\end{cases},$$

从而

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_x'+3\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_x'=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\xi}\right)+3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right),\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_x'=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+3\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right),\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_y'=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\right).\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+6\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+9\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.\end{cases}$$

且

$$2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=2\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+3\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+6\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=8\frac{\partial u}{\partial \xi},$$

从而原方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1+2-3)+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}(6+4+6)+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(9-6-3)+8\frac{\partial u}{\partial \xi}=0,$$

即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial\eta}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \xi}=0.$$

例 10.3 设 $u=f(x,y,z),\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0,y=\sin x$, 且 $f,\varphi\in C^1$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解 从 $\varphi(x^2,\mathrm{e}^{\sin x},z)=0$ 及 $\varphi_z'\neq 0$ 可知, 由方程 $\varphi(x^2,\mathrm{e}^{\sin x},z)=0$ 可确定 z 是 x,y 的隐函数, 从而 z 是 x 的复合函数. 故从 $u=f(x,y,z)$ 知,u 是 x 的一元函数.

注 助教注: 这个地方可以理解为由隐函数定理 $F(x,y,z)=\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$, 确定了隐函数 $z=z(x,y)$, 从而 $u=f(x,y,z)=f(x,y,z(x,y))=f(x,\sin x,z(x,\sin x))$ 确定了 u 是 x 的函数.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y_x'+f_3'\cdot z_x'=f_1'+f_2'\cdot\cos x\cdot 2x+f_3'\cdot z_x'.$$

令 $F(x,y,z)=\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)$, 则

$$\begin{cases}F_x'(x,y,z)=\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\mathrm{e}^{\sin x}\cos x,\\ F_z'(x,y,z)=\varphi_3'\cdot 1=\varphi_3'.\end{cases}$$

故 $z_x'=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{\varphi_3'}$. 代入 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 即有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'+f_2'\cdot y_x'+f_3'\cdot\left(-\frac{\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{\varphi_3'}\right).$$

注 助教注: 这里老师写的确实很模糊. 我们要区分两个式子和他们分别的含义.

1. 令 $F(x,y,z)=\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)$, 则 $F(x,y,z)=0$ 确定了 $z=z(x,y)$, 其中 $z_x'=-\dfrac{F_x'}{F_z'}$. 这时候 z_x' 表示的是 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. $F_x'(x,y,z)=\varphi_1'\cdot 2x, F_z'(x,y,z)=\varphi_3'$, 从而 $z_x'=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{2x\varphi_1'}{\varphi_3'}$.
2. 令 $F(x,z)=\varphi(x^2,\mathrm{e}^{\sin x},z)$, 则 $F(x,z)=0$ 确定了 $z=z(x)$. 这时候 z_x' 表示的是 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. $F_x'(x,z)=\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\mathrm{e}^{\sin x}\cos x, F_z'(x,z)=\varphi_3'$, 从而 $z_x'=-\dfrac{F_x'}{F_z'}=-\dfrac{2x\varphi_1'+\varphi_2'\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{\varphi_3'}$.

老师要表示的实际是第二种情况, 即 $z=z(x)$. 只不过写成的形式看起来像是第一种情况.

注 正是因为老师这里写模糊了, 所以会有疑问为什么当 $F(x,z)=\varphi(x^2,\mathrm{e}^{\sin x},z)$ 时,

$$F_x'=\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$$

而不是

$$F_x'=\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\cdot\mathrm{e}^{\sin x}\cos x+\varphi_3'\cdot z_x'$$

后者是 $F(x)=\varphi(x^2,\mathrm{e}^{\sin x},z(x))$ 时的 $F_x'=F'(x)$. 而为了求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, 我们需要对 $F(x,z)$ 这个函数利用隐函数定理, 此时 x,z 都是这个 $F(x,z)$ 的自变量, 因此 $F_x'=\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\mathrm{e}^{\sin x}\cos x$.

例 10.4 证明: 全微分也具有一阶微分形式不变性, 即, 若 $f(x,y)$ 可微, 则不论 x,y 是自变量还是中间变量, 则 $z=f(x,y)$, 总有

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y=f_x'\,\mathrm{d}x+f_y'\,\mathrm{d}y.$$

证明

1. 当 x,y 是自变量时, 显然有 $\mathrm{d}z=f_x'\,\mathrm{d}x+f_y'\,\mathrm{d}y$.
2. 当 x,y 是中间变量时, 设 $\begin{cases}x=g(s,t),\\ y=h(s,t),\end{cases}$ 可微, 且 $f(g(s,t),h(s,t))$ 有意义时,z 通过中间变量 x,y 成为 s,t 的复合函数, 且有求偏导数的链式法则如下:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x&=\frac{\partial x}{\partial s}\,\mathrm{d}s+\frac{\partial x}{\partial t}\,\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}y&=\frac{\partial y}{\partial s}\,\mathrm{d}s+\frac{\partial y}{\partial t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial s}\,\mathrm{d}s+\frac{\partial z}{\partial t}\,\mathrm{d}t&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\right)\mathrm{d}s+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right)\mathrm{d}t\\ &=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\,\mathrm{d}s+\frac{\partial x}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right)+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\,\mathrm{d}s+\frac{\partial y}{\partial t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &=\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

即 x,y 是中间变量时, 也有 $\mathrm{d}z=f_x'\,\mathrm{d}x+f_y'\,\mathrm{d}y$.

注 利用全微分的一阶微分形式不变性, 可导出多元可微函数的如下的微分四则运算法则:

1. $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;
2. $\mathrm{d}(uv)=u\,\mathrm{d}v+v\,\mathrm{d}u$;
3. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2}$, 其中 u,v 均可微, 且 $v\neq 0$;

证明

1. 令 $f(u,v)=u+v$, 则 $f(u,v)\in C^1$, 从而 $f(u,v)$ 可微, 无论 u,v 是自变量还是中间变量, 总有

$$\mathrm{d}(u+v)=\mathrm{d}f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}v=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$$

从而有 $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$. 这里 d 是全微分.

2. 令 $f(u,v)=uv$, 则 $f(u,v)\in C^1$, 从而 $f(u,v)$ 可微, 无论 u,v 是自变量还是中间变量, 总

有

$$\mathrm{d}(uv)=\mathrm{d}f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}v=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v$$

从而有 $\mathrm{d}(uv)=u\,\mathrm{d}v+v\,\mathrm{d}u$.

3. 令 $f(u,v)=\dfrac{u}{v}$, 则 $f(u,v)\in C^1$, 从而 $f(u,v)$ 可微, 无论 u,v 是自变量还是中间变量, 总有

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\mathrm{d}f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}\,\mathrm{d}u+\frac{\partial f}{\partial v}\,\mathrm{d}v=\frac{1}{v}\,\mathrm{d}u+\left(-\frac{u}{v^2}\right)\mathrm{d}v=\frac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2}$$

注 二阶及以上的微分通常没有形式不变性, 具体而言, 设 $f(x,y)\in C^2$, 则 $z=f(x,y)\Rightarrow \mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{d}z):=\mathrm{d}^2z&=\mathrm{d}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\\
&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)'_x\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right)'_y\mathrm{d}y\\
&=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}y\\
&=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\mathrm{d}x)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\mathrm{d}y)^2.
\end{aligned}$$

d^2z 是 x,y 是自变量时的 $z=f(x,y)$ 的二阶微分, 而 d^2z 是 x,y 是中间变量时的 $z=f(x,y)$ 的二阶微分, 二者通常不相等.

例 10.5 设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$ 是由方程组

$$\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\ v=g(u-x,v^2y)\end{cases}$$

所确定的隐函数组, 求变换 $\begin{cases}u=u(x,y),\\ v=v(x,y)\end{cases}$ 的 Jacobi 行列式:

$$\begin{vmatrix}u'_x & u'_y\\ v'_x & v'_y\end{vmatrix}:=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\qquad f,g\in C^1.$$

解 令 $A=ux,B=v+y,E=u-x,F=v^2y$, 则方程组可化为

$$\begin{cases}u=f(A,B),\\ v=g(E,F).\end{cases}$$

方程组两边关于 x 求偏导

$$\begin{cases}u'_x=f'_1\cdot(u+xu'_x)+f'_2\cdot(v'_x+0),\\ v'_x=g'_1\cdot(u'_x-1)+g'_2\cdot 2vv'_xy.\end{cases}$$

标准化为

$$\begin{cases}(xf'_1-1)u'_x+f'_2v'_x=-f'_1u,\\ g'_1u'_x+(2vg'_2y-1)v'_x=g'_1.\end{cases}$$

令 $D=\begin{vmatrix}xf_1'-1 & f_2' \\ g_1' & 2vg_2'y-1\end{vmatrix}$, 则 $D\neq 0$, 再令

$$D_1=\begin{vmatrix}-f_1'u & f_2' \\ g_1' & 2vg_2'y-1\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}xf_1'-1 & -f_1'u \\ g_1' & g_1'\end{vmatrix},$$

由克莱姆法则可得

$$u_x'=\frac{D_1}{D},\quad v_x'=\frac{D_2}{D}.$$

方程组 $\begin{cases}u=f(A,B), \\ v=g(E,F)\end{cases}$ 两边同时对 y 求偏导, 可得

$$\begin{cases}u_y'=f_1'\cdot u_y'\cdot x+f_2'\cdot(v_y'+1), \\ v_y'=g_1'\cdot u_y'+g_2'\cdot(2vv_y'y+2v^2).\end{cases}$$

标准化为

$$\begin{cases}(xf_1'-1)u_y'+f_2'v_y'=-f_2', \\ g_1'u_y'+(2vg_2'y-1)v_y'=2vg_2'.\end{cases}$$

令 $D=\begin{vmatrix}xf_1'-1 & f_2' \\ g_1' & 2vg_2'y-1\end{vmatrix}$, 则 $D\neq 0$, 再令

$$\tilde{D}_1=\begin{vmatrix}-f_2' & f_2' \\ v^2g_2' & 2vg_2'y-1\end{vmatrix},\quad \tilde{D}_2=\begin{vmatrix}xf_1'-1 & -f_2' \\ g_1' & g_1'v^2\end{vmatrix},$$

由克莱姆法则可得

$$u_y'=\frac{\tilde{D}_1}{D},\quad v_y'=\frac{\tilde{D}_2}{D}.$$

从而

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}u_x' & u_y' \\ v_x' & v_y'\end{vmatrix}=\frac{\begin{vmatrix}D_1 & \tilde{D}_1 \\ D_2 & \tilde{D}_2\end{vmatrix}}{D}$$

例 10.6 设 $\begin{cases}u=u(x,y), \\ v=v(x,y)\end{cases}$ 是由方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

确定的隐函数组,$F,G\in C^1$, 且 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$, 求 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$.

解 解法一:

$\mathrm{d}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}v=\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$, 对 $\begin{cases}F(x,y,u(x,y),v(x,y))=0, \\ G(x,y,u(x,y),v(x,y))=0\end{cases}$ 两边关于 x

求偏导, 可得

$$\begin{cases} F'_x \cdot 1 + F'_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + F'_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ G'_x \cdot 1 + G'_u \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + G'_v \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

注 助教注: 这里的对 $F=0$ 两侧对 x 求偏导, 我们区分两个描述

1. $F(x,y,u,v)=0$, 两侧对 x 求偏导, 也就是对第一个分量求偏导, 得到 $F'_x=0$.
2. 我们令 $\tilde{F}(x,y)=F(x,y,u(x,y),v(x,y))$, 两侧对 x 求偏导, 求的是 $\dfrac{\partial \tilde{F}}{\partial x}$, 得到

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} = F'_x + F'_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + F'_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

后者才是隐函数定理的表述, 多元函数的隐函数定理是这样的

定理 10.1 (多元函数隐函数定理)

设 $F:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m$ 是一个连续可微函数, 设 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$. 若方程

$$\begin{cases} F^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0, \\ F^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0, \\ \cdots \\ F^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \end{cases}$$

满足在 $(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})$ 处, 有 $F(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{y_0})=0$, 且 $\dfrac{\partial(F^1,F^2,\cdots,F^m)}{\partial(\boldsymbol{y})}\neq 0$, 则存在一个邻域 U 和一个函数

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})=(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\varphi_2(\boldsymbol{x}),\cdots,\varphi_m(\boldsymbol{x}))$$

使得在 U 中, 有 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$ 是 $\boldsymbol{x}$ 的函数, 且在 U 中有解集可以写为

$$F^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))=0, F^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))=0,\cdots,F^m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}))=0 \tag{10.1}$$

我们希望求隐函数的偏导数, 是希望求 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)$ 的偏导数. 也就是说

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$$

而 $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}$ 由 10.1 求出.

♡

因此我们在求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 时, 我们是对 $F(x,y,u(x,y),v(x,y))$ 两侧对 x 求偏导.

注 那有的同学会说, 这不对啊, 为什么例 10.3 中就是对 $F(x,z)=0$ 对 x 求偏导时就是把 x,z 视作不相关的自变量呢?

这是因为, 如果我们已知 $z=z(x)$, 然后对 $F(x,z(x))=0$ 两侧对 x 求导, 得到

$$F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0$$

还是能得到 $z'_x = -\dfrac{F'_x}{F'_z}$.

我们继续原来的题目.

标准化为

$$\begin{cases} F'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=-F'_x, \\ G'_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G'_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=-G'_x. \end{cases}$$

令 $D=\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}$, 则 $D\neq 0$, 再令

$$D_1=\begin{vmatrix} -F'_x & F'_v \\ -G'_x & G'_v \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} F'_u & -F'_x \\ G'_u & -G'_x \end{vmatrix},$$

此时注意到 $D_1=\begin{vmatrix} F'_v & F'_x \\ G'_v & G'_x \end{vmatrix}=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(v,x)}$, $D_2=\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$, 由克莱姆法则可得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{D_1}{D}=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{D_2}{D}=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

对原方程组两边对 y 求偏导, 同样可得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

从而

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,x)}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)}\,\mathrm{d}y}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},$$

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\,\mathrm{d}y}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

解 解法二:

对原方程两边同时取全微分, 可得

$$\begin{cases} F'_x\,\mathrm{d}x+F'_y\,\mathrm{d}y+F'_u\,\mathrm{d}u+F'_v\,\mathrm{d}v=0, \\ G'_x\,\mathrm{d}x+G'_y\,\mathrm{d}y+G'_u\,\mathrm{d}u+G'_v\,\mathrm{d}v=0. \end{cases}$$

以 $\mathrm{d}u,\mathrm{d}v$ 为变量. 依 cramer 法则, 解得

$$\mathrm{d}u=\frac{D_1}{D}=\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,x)}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial(F,G)}{\partial(v,y)}\,\mathrm{d}y}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},$$

$$\mathrm{d}v=\frac{D_2}{D}=\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y=\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\,\mathrm{d}x+\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\,\mathrm{d}y}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

其中,

$$D_1=\begin{vmatrix}-(F'_x\,\mathrm{d}x+F'_y\,\mathrm{d}y) & F'_v\\ -(G'_x\,\mathrm{d}x+G'_y\,\mathrm{d}y) & G'_v\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}F'_u & -(F'_x\,\mathrm{d}x+F'_y\,\mathrm{d}y)\\ G'_u & -(G'_x\,\mathrm{d}x+G'_y\,\mathrm{d}y)\end{vmatrix},\quad D=\begin{vmatrix}F'_u & F'_v\\ G'_u & G'_v\end{vmatrix}=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}.$$

✍ 作业 ex9.2:31;ex9.3:6,7,8,10,11(1),14.

Lec 11 方向导数与梯度

11.1 方向导数

定义 11.1

设函数 $u=f(x,y)$ 定义在 $\bar{U}(M_0,\delta)$ 中,$M_t=(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)\in\bar{U}(M_0,\delta)$,$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)=(\cos\alpha,\cos\beta)$,$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

如果极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

存在, 那么称 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$ 为函数 $u=f(x,y)$ 在点 M_0 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 的方向导数 (directional derivative), 表示 u 关于 $\boldsymbol{l}$ 方向在 M_0 处的变化率.

例 11.1 若 $f'_x(M_0)=f'_x(x_0,y_0)$ 存在, 则 $u=f(x,y)$ 在 M_0 处沿 x 轴方向 $\boldsymbol{i}=(1,0)$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{i}}\right|_{M_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=f'_x(x_0,y_0);$$

而 $u=f(x,y)$ 在 M_0 处沿 x 轴负向 $\boldsymbol{l}=(-1,0)=-i$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial(-\boldsymbol{i})}\right|_{M_0}=\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{-\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=-f'_x(M_0).$$

同理, 当 $f'_y(x_0,y_0)=B$(常数) 存在时, 则 $u=f(x,y)$ 在 M_0 处沿 y 轴正负方向都存在, 且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{j}}\right|_{M_0}=f'_y(M_0),\ \left.\frac{\partial u}{\partial(-\boldsymbol{j})}\right|_{M_0}=-f'_y(M_0).$$

这里 $\boldsymbol{j}=(0,1),-\boldsymbol{j}=(0,-1)$ 分别为 y 轴的正负向.

例 11.2 $u=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处连续, 但 $u=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处沿任何方向 $\boldsymbol{l}^0=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数均不存在,

这是由于

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}^0}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{(t\cos\alpha)^2+(\boldsymbol{t}\sin\alpha)^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}.$$

但 $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{|t|}{t}=1\neq\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{|t|}{t}=-1$

例 11.3 设函数 $u=f(x,y,z)$ 定义在 $\bar{U}(M_0,\delta)$ 中,$M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_t(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+\boldsymbol{t}\cos\gamma)=M_0+t\boldsymbol{l}\in\bar{U}(M_0,\delta)$,$\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 已知, 则定义

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{f(M_t)-f(M_0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}.$$

当偏导数 $f'_x(x_0,y_0,z_0)=A$(常数) 存在时,$u=f(x,y,z)$ 在 M_0 处沿 x 轴正向 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$,

负向 $-\boldsymbol{i}=(-1,0,0)$ 的方向导数都存在, 且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{i}}\right|_{M_0}=A,\ \left.\frac{\partial u}{\partial(-\boldsymbol{i})}\right|_{M_0}=-A,$$

其余情况可类推.

定理 11.1

当 $u=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微时,u 在点 M_0 处沿任何方向 $\boldsymbol{l}^0=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数都存在, 且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}^0}\right|_{M_0}=f_x'(M_0)\cos\alpha+f_y'(M_0)\sin\alpha=f_x'(M_0)\cos\alpha+f_y'(M_0)\cos\beta,(\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}) \tag{11.1}$$

♡

证明 设 $M_t(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)\in\bar{U}(M_0,\delta)$, 则

$$f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)=f_x'(M_0)t\cos\alpha+f_y'(M_0)t\cos\beta+o(\rho),$$

其中

$$\begin{aligned}\rho&=\rho(M_0,M_t)\\&=\sqrt{(x_0+t\cos\alpha-x_0)^2+(y_0+t\sin\alpha-y_0)^2}\\&=\sqrt{(t\cos\alpha)^2+(t\sin\alpha)^2}\\&=\sqrt{t^2\cos^2\alpha+t^2\sin^2\alpha}\\&=\sqrt{t^2}\\&=|t|\end{aligned}$$

而有 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{o(\rho)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{o(|t|)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{o(|t|)}{|t|}\dfrac{|t|}{t}$

$\left|\dfrac{|t|}{t}\right|=|\pm1|=1\leqslant1$ 有界,$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{o(|t|)}{|t|}=0.$

因此 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{o(\rho)}{t}=0$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}^0}\right|_{M_0}&=\lim_{t\to0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{f_x'(M_0)t\cos\alpha+f_y'(M_0)t\sin\alpha+o(\rho)}{t}\\&=\lim_{t\to0}\left(f_x'(M_0)\cos\alpha+f_y'(M_0)\sin\alpha+\frac{o(\rho)}{t}\right)\\&=f_x'(M_0)\cos\alpha+f_y'(M_0)\sin\alpha\end{aligned}$$

例 11.4 设 $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,$\boldsymbol{l}=(\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,2\pi)$,

求 $f'_x(0,0), f'_y(0,0), \left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{O(0,0)}$, 并证明在 $O(0,0)$ 处,$z=f(x,y)$ 不可微.

解

1.
$$\begin{aligned} f'_x(0,0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^2 0^2}{((\Delta x)^2+0^2)^{\frac{3}{2}}}-0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

由对称性可知,$f'_y(0,0)=f'_x(0,0)=0$

2.
$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{O(0,0)} &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\cos\theta,0+t\sin\theta)-f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{(t\cos\theta)^2(t\sin\theta)^2}{((t\cos\theta)^2+(t\sin\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}}{t} \\ &= \lim_{t\to \mathbf{0}}\frac{t^3\cos^2\theta\sin^2\theta}{|t|^3} \end{aligned}$$

$\dfrac{t^3}{|t|^3}=\pm 1$ 有界, 但趋于零时极限不存在,

因此当且仅当 $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$ 时,$\cos^2\theta\sin^2\theta=0, \left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{O(0,0)}=0$

即只在 $\theta=0,\dfrac{\pi}{2},\pi,\dfrac{3\pi}{2}$ 四个方向上存在方向导数, 且方向导数为 0, 其他方向上无方向导数.

3.
$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-f'_x(0,0)\Delta x+f'_y(0,0)\Delta y}{\rho} &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^2} \\ &= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{k^2(\Delta x)^4}{((\Delta x)^2+k^2(\Delta x)^2)^2} \\ &= \frac{k^2}{(1+k^2)^2}\neq 0 \end{aligned}$$

故不可微.

4. 不可微这一问依照定理**??**的结论直接可得:
若可微则应有 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{O(0,0)}=f'_x(0,0)\cos\theta+f'_y(0,0)\sin\theta=0$, 即沿各个方向的方向导数都存在, 均为 0. 但这与第二问中我们求出来的结果矛盾, 故不可微.

同理, 当 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微时,u 在点 M_0 处沿任何方向

$\boldsymbol{l}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数都存在, 且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}^0}\right|_{M_0}=f'_x(M_0)\cos\alpha+f'_y(M_0)\cos\beta+f'_z(M_0)\cos\gamma \tag{11.2}$$

在??中称向量 $(f'_x(M_0),f'_y(M_0))$ 为函数 $u=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的梯度; 在??中称向量 $(f'_x(M_0),f'_y(M_0),f'_z(M_0))$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度, 记作

$$\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)=(f'_x(M_0),f'_y(M_0));\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)=(f'_x(M_0),f'_y(M_0),f'_z(M_0)).$$

或

$$\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0)=\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right|_{M_0};\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)=\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right|_{M_0}.$$

$u=f(x,y,z)$ 在 $\bar{U}(M_0,\delta)$ 中任一点 M 的梯度记作

$$\mathbf{grad}\,f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)u=\nabla u$$

其中 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$ 称为微分向量算子, 也称为 Hamilton 算子, 此时??可改写为:

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}^0}\right|_{M_0}&=\left(f'_x(M_0),f'_y(M_0),f'_z(M_0)\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\\&=\nabla u|\cdot\boldsymbol{l}^0\\&=\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)\cdot\boldsymbol{l}^0\\&=|\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)|\left|\boldsymbol{l}^0\right|\cos\left(\widehat{\mathbf{grad}\,f(M_0),\boldsymbol{l}^0}\right)\\&\leqslant|\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)|\\&=|\nabla u(M_0)|\end{aligned}$$

等号当且仅当 $\boldsymbol{l}^0$ 与 $\mathbf{grad}\,f(M_0)$ 一致时取到.

11.2 函数的梯度 (陡度, 倾斜度)

设 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微, 则 $f(x,y,z)$ 在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度

$$\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)=(f'_x(M_0),f'_y(M_0),f'_z(M_0))$$

是一个向量. 这个向量的模 $|\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)|$ 是 $f(x,y,z)$ 在点 M_0 处所有方向的方向导数中的最大值, 而梯度的方向即是 $f(x,y,z)$ 在点 M_0 处所有方向的方向导数中取最大值的方向.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}^0}\right|_{M_0}=\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)\cdot\boldsymbol{l}^0=|\mathbf{grad}\,f(x_0,y_0,z_0)|\left|\boldsymbol{l}^0\right|\cos\left(\widehat{\mathbf{grad}\,f(M_0),\boldsymbol{l}^0}\right)\leqslant|\nabla u(M_0)|$$

可知, 当 $\boldsymbol{l}^0$ 与 $\mathbf{grad}\,f(M_0)$ 方向一致时, $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}^0}\right|_{M_0}$ 取最大值 $|\mathbf{grad}\,f(M_0)|$; 而当 $\boldsymbol{l}^0$ 与 $\mathbf{grad}\,f(M_0)$ 方向相反时, $\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}^0}\right|_{M_0}$ 取最小值 $-|\mathbf{grad}\,f(M_0)|$;

即

$$\left(\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}\right)_{\max} = |\mathbf{grad}\, f(M_0)|, \left(\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}\right)_{\min} = -|\mathbf{grad}\, f(M_0)|$$

换言之, 在点 M_0 处沿梯度 $\mathbf{grad}\, f(M_0)$ 的方向,$f(x,y,z)$ 的变化率是最大的,
而沿着 $-\mathbf{grad}\, f(M_0)$ 的方向,$f(x,y,z)$ 的变化率最小:

$$-|\mathbf{grad}\, f(M_0)| \leqslant \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0} \leqslant |\mathbf{grad}\, f(M_0)|$$

并由 $\mathbf{grad}\, f(M_0) = \nabla u(M_0) = \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right|_{M_0}$, 从而有

$$-|\nabla u(M_0)| \leqslant \left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0} \leqslant |\nabla u(M_0)|$$

命题 11.1

求函数或数量场 u 的梯度是一种特定的微分运算, 设 $u_2 = f_1(x,y,z), u_2 = f_2(x,y,z)$ 均可微, 或 $f_1, f_2 \in C^1$, 则必有:

1. $\nabla(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1\nabla u_1 + c_2\nabla u_2$,$c_1, c_2$ 为任意常数;
2. $\nabla(u_1u_2) = u_2\nabla u_1 + u_1\nabla u_2$;
3. $\nabla f(u_1) = f'(u)\nabla u, \forall f \in C^1$.

证明

1. c_1, c_2 是常数

$$\begin{aligned}
\nabla(c_1u_1 + c_2u_2) &= \left((c_1u_1 + c_2u_2)'_x, (c_1u_1 + c_2u_2)'_y, (c_1u_1 + c_2u_2)'_z\right) \\
&= \left(c_1(u_1)'_x + c_2(u_2)'_x, c_1(u_1)'_y + c_2(u_2)'_y, c_1(u_1)'_z + c_2(u_2)'_z\right) \\
&= c_1\left((u_1)'_x, (u_1)'_y, (u_1)'_z\right) + c_2\left((u_2)'_x, (u_2)'_y, (u_2)'_z\right) \\
&= c_1\nabla u_1 + c_2\nabla u_2
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\nabla(u_1u_2) &= \left((u_1u_2)'_x, (u_1u_2)'_y, (u_1u_2)'_z\right) \\
&= \left(u_2(u_1)'_x + u_1(u_2)'_x, u_2(u_1)'_y + u_1(u_2)'_y, u_2(u_1)'_z + u_1(u_2)'_z\right) \\
&= u_2\left((u_1)'_x, (u_1)'_y, (u_1)'_z\right) + u_1\left((u_2)'_x, (u_2)'_y, (u_2)'_z\right) \\
&= u_2\nabla u_1 + u_1\nabla u_2
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\nabla f(u) &= \left((f(u))'_x, (f(u))'_y, (f(u))'_z\right) \\
&= \left(f'(u)u'_x, f'(u)u'_y, f'(u)u'_z\right) \\
&= f'(u)\left(u'_x, u'_y, u'_z\right) \\
&= f'(u)\nabla u
\end{aligned}$$

从这三条性质可知, 哈密顿算子 ∇ 与微分算子 d非常类似.

例 11.5 求解下列各题:

1. 求 $z=x^2+y^2$ 在点 $M_0(1,2)$ 处, 沿着 (1,2) 到 $(2,2+\sqrt{3})$ 方向的方向导数, 并求 $\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0(1,2)}$ 的最大值和最小值.
2. 求 $z=1-(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})$ 在点 $M_0(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 处, 沿曲线 $L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在这点的内法线方向的方向导数.
3. 求数量场 $\frac{m}{r}$ 所产生的梯度场 $\nabla\frac{m}{r}$, 其中 $m>0$ 为常数,$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 是向径 (x,y,z) 的模.

解

1. $\boldsymbol{l}=(2-1,2+\sqrt{3}-2)=\left(1,\sqrt{3}\right)\Rightarrow \boldsymbol{l}^0=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta)$

   $\nabla z(M_0)=\left(z'_x(M_0),z'_y(M_0)\right)=(2x,2y)\Big|_{M_0(1,2)}=(2,4)$

   因此
   $$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0(1,2)}=(2,4)\cdot(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=1+2\sqrt{3}$$
   而又有 $|\nabla z(M_0)|=|(2,4)|=2\sqrt{5}$

   因此
   $$\left(\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0(1,2)}\right)_{max}=2\sqrt{5},\left(\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0(1,2)}\right)_{min}=-2\sqrt{5}$$

2. L 有参数方程表示
   $$\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t))=(a\cos t,b\sin t),t\in[0,2\pi]$$
   因此 $M_0=\mathbf{r}(t_0),t_0=\frac{\pi}{4}$.

   有 $r'(t)=(x'(t),y'(t))\Big|_{M_0}=(-a\sin t,b\cos t)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)$

   可取切向量 $\boldsymbol{\tau}=(-a,b)$, 则过 M_0 的外法向量为 $\boldsymbol{n}=(b,a)$, 因此过 M_0 的内法向量为 $\boldsymbol{l}=-\boldsymbol{n}=(-b,-a)\Rightarrow \boldsymbol{l}^0=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b,a)$,

   同时 $z'_x(M_0)=-\frac{2x}{a^2}\Big|_{M_0}=-\frac{2}{a^2}\frac{a}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{a},z'_y(M_0)=-\frac{2y}{b^2}\Big|_{M_0}=-\frac{2}{b^2}\frac{b}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{b}$

   故
   $$\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}=-\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}\right)\cdot(b,a)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{ab}$$

3. $\nabla\left(\frac{m}{r}\right)=\left(\left(\frac{m}{r}\right)'_x,\left(\frac{m}{r}\right)'_y,\left(\frac{m}{r}\right)'_z\right).$

   而 $\left(\frac{m}{r}\right)'_x=m\left(\frac{1}{r}\right)'_x=-\frac{m}{r^2}r'_x=-\frac{m}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{mx}{r^3}.$

   由对称性知 $\left(\frac{m}{r}\right)'_y=-\frac{my}{r^3},\left(\frac{m}{r}\right)'_z=-\frac{mz}{r^3}$

因此

$$\nabla\left(\frac{m}{r}\right) = -\frac{m}{r^3}(x,y,z)$$

令 $\mathbf{r}^0 = \frac{1}{r}(x,y,z)$, 则

$$\nabla\left(\frac{m}{r}\right) = -\frac{m}{r^2}\mathbf{r}^0 = -\frac{m\cdot 1}{r^2}\mathbf{r}^0 \tag{11.3}$$

??右端的力学解释: 位于原点 $O(0,0,0)$ 的质量为 m 的顶点, 对位于点 $M(x,y,z)$ 且质量为 1 的单位质点的引力, 该引力大小与两质点的质量乘积成正比, 而与它们的距离的平方成反比, 并且和这个引力的方向由点 M 指向原点.

在物理中, 称 $\nabla\left(\frac{m}{r}\right) = \frac{m\cdot 1}{r^2}(-\mathbf{r}^0)$ 为引力场, 这是一个向量场, 而称 $\frac{m}{r} = \frac{m}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为对应的引力势函数, 简称势函数.

因为引力场 $\frac{m}{r^2}(-\mathbf{r}^0) = -\frac{m}{x^2+y^2+z^2}\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 是通过势函数 $\frac{m}{r}$ 取梯度得到的, 因此, 也常成这个引力场为梯度场.

注 设 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$, 则 $\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\cdot(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \triangleq \Delta$——Laplace 算子.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$$

作业 ex9.2:21,22,23,24,36(2)(5),38.

Lec 12 多元函数微分学的几何应用

12.1 空间曲线的切线 (tangent) 与法平面 (normal plane)

12.1.1 向径式

定义 12.1 (光滑曲线)

设 Γ 的方程为向径式:$\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))\in C^1(I)$, 且 $r'(t)\neq\mathbf{0}$, 称这样的曲线 Γ 为光滑曲线.

♣

定义 12.2 (逐段光滑曲线)

由有限段光滑曲线连接而成的曲线称为逐段光滑曲线.

♣

定义 12.3 (切向量)

设 $M_0(x(t_0),y(t_0),z(t_0)),M(x(t_0+\Delta t),y(t_0+\Delta t),z(t_0+\Delta t))\in\Gamma$, 若极限

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}\\ =&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x(t_0+\Delta t)-x(t_0),y(t_0+\Delta t)-y(t_0),z(t_0+\Delta t)-z(t_0))}{\Delta t}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\\ \triangleq&\ \boldsymbol{\tau}\end{aligned}$$

存在, 则记 $\boldsymbol{\tau}=$ 为 Γ 在切点 M_0 处切线 T 的切向量.

♣

注 切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的方向恒指向参数 t 增加的方向, 即恒指向质点运动的运动方向.

由直线点向式知:Γ 上过切点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切线 T 方程为:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)},$$

而过 M_0 且垂直于 T 的 Γ 的法平面 π 为:

$$x'(t_0)(x-x_0)=y'(t_0)(y-y_0)=z'(t_0)(z-z_0)=0,$$

其中,$M(x,y,z)$ 是法平面 π 中的动点坐标组成的点.

12.1.2 交面式

设 Γ 的交面式:$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0; \end{cases}$ 其中,$F,G\in C^1$ 且 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\neq 0$, 依隐函数组存在定理,

该方程组唯一确定函数组 $\begin{cases} x=x, \\ y=y(x), \\ z=z(x); \end{cases}$ 且 $y'(x)=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, z'(x)=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big/\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}$.

令 $\boldsymbol{r}=(x,y(x),z(x))$, 则 $\tau=\boldsymbol{r}'(x)=(1,y'(x),z'(x))\neq\mathbf{0}$. 此时,$\Gamma$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线下的方程为:

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)},$$

而过切点 M_0 的法平面 π 为

$$1(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$$

其中,$y'(x_0)=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\right|_{M_0}\Big/\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}, z'(x)=\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}\Big/\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{M_0}$

12.2 曲面 Σ 的切平面与法线 N

12.2.1 隐式曲面

定义 12.4 (光滑曲面)

设曲面 Σ 为隐式曲面 $F(x,y,z)=0$, 而 $F\in C^1$, 且 $\nabla F=(F'_x,F'_y,F'_z)\neq 0$. 称这样的曲面 Σ 为光滑曲面. ♣

定义 12.5 (逐片光滑曲面)

由有限段光滑曲面连接而成的曲面为逐片光滑曲面. ♣

例如长方体表面, 四面体表面均为逐片光滑曲面.

设 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma,\Gamma_1:\boldsymbol{r}_1(t)=(x_1(t),y_1(t),z_1(t)),\Gamma_2:\boldsymbol{r}_2(t)=(x_2(t),y_2(t),z_2(t))$ 是 Σ 中过点 M_0 的任意两条光滑曲线, 从而

$$\begin{cases} F(x_1(t),y_1(t),z_1(t))\equiv 0 \\ F(x_2(t),y_2(t),z_2(t))\equiv 0 \end{cases}$$

两边对 t 求导有

$$\begin{cases} F'_x(M_0)x'_1(t)+F'_y(M_0)y'_1(t)+F'_z(M_0)z'_1(t)=0 \\ F'_x(M_0)x'_2(t)+F'_y(M_0)y'_2(t)+F'_z(M_0)z'_2(t)=0 \end{cases}$$

令 $\boldsymbol{\tau}_1=(x'_1(t_0),y'_1(t_0),z'_1(t_0)),\boldsymbol{\tau}_2=(x'_2(t_0),y'_2(t_0),z'_2(t_0),\boldsymbol{n}(M_0)=(F'_x(M_0),F'_y(M_0),F'_z(M_0))=$

$(F'_x,F'_y,F'_z)\Big|_{M_0}=\nabla F\Big|_{M_0}$, 则 $\boldsymbol{n}(M_0)=\nabla F\Big|_{M_0}\neq\mathbf{0}$, 且 $\boldsymbol{n}(M_t)=\boldsymbol{\tau}_1\times\boldsymbol{\tau}_2$. 即向量 $\boldsymbol{n}(M_0)$ 是由 $\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2$ 确定的平面 π 的法向量. 由 Γ_1,Γ_2 在 Σ 内的任意性可知,Σ 内过点 M_0 的所有曲线 Γ 在 M_0 处的切线都共面, 由过点 M_0 的所有切线组成的平面 π 称之为曲面 Σ 在点 M_0 处的切平面, 由点法式知,π 的方程为:

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(z-z_0)=0$$

或

$$\nabla F\big|_{M_0}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$$

$M(x,y,z)$ 是切平面 π 中的动点,$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, 过切点 M_0 垂直于切平面 π 的直线——法线 N 的方程:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

或

$$\nabla F\Big|_{M_0}\times\overrightarrow{M_0M}=\mathbf{0}$$

12.2.2 显式曲面

当曲面为显式曲面

$$\Sigma:z=f(x,y)\in C^1(D)$$

时, 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$, 则 $z_0=f(x_0,y_0)=f(P_0),P_0(x_0,y_0)$. 此时

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z,\boldsymbol{n}(M_0)=(F'_x,F'_y,F'_z)\Big|_{M_0}=(f'_x(P_0),f'_y(P_0),-1)\neq\mathbf{0}$$

. 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切平面 $\pi:f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(p_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$. 而 $f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(p_0)(y-y_0)$ 恰好是 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{P_0}$.

设 $P(x,y)$ 是 $P_0(x_0,y_0)$ 邻近的一点,$P(x,y)\in D$. 则曲面 $z=f(x,y)$ 的 $\Delta z=f(P)-f(P_0)=f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(P_0)(y-y_0)+o(\rho),\rho=|\overrightarrow{P_0P}|$, 当 ρ 较小时, 有曲面 $\Delta z\approx f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(P_0)(y-y_0)=\mathrm{d}z\big|_{P_0}=$ 切平面的Δz[1]. 即在点 M_0 的局部范围内, 曲面 Σ 可用点 M_0 的切平面 π 来代替. 即局部可线性化.

$$\Delta z\approx f'_x(P_0)(x-x_0)^1+f'_y(P_0)(y-y_0)^1,\rho>0\text{比较小时成立}$$

12.2.3 向径式

设 Σ 的向径式:

$$\Sigma:\boldsymbol{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,z))\in C^1(D_{u,v1})$$

[1]正如我们所提到过的, 不建议将 $\mathrm{d}z\big|_{P_0}$ 理解成线性主部 $f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(P_0)(y-y_0)$, 更准确的表达应当是 $\mathrm{d}z\big|_{P_0}(x-x_0,y-y_0)=f'_x(P_0)(x-x_0)+f'_y(P_0)(y-y_0)$ 类似这样的表述, 当然这里领会精神即可

且 $\boldsymbol{\tau}_u = \boldsymbol{r}_v(u,v) = (x'_u, y'_u, z'_u) \neq \mathbf{0}, \boldsymbol{\tau}_v = \boldsymbol{r}_v(u,v) = (x'_v, y'_v, z'_v) \neq \mathbf{0}$ 则过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}(M_0) = \boldsymbol{\tau}_u \times \boldsymbol{\tau}_v\Big|_{M_0} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}_{M_0} = \left(\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$

π 的方程:

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\bigg|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\bigg|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\bigg|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0$$

或用向量式表示为

$$(\boldsymbol{\tau}_u \times \boldsymbol{\tau}_v)\Big|_{M_0} \cdot \overrightarrow{M_0 M} = 0$$

$M(x,y,z)$ 是切平面 π 中的动点, 过点 M 且垂直于 π 的法线 $N : (\boldsymbol{\tau}_u \times \boldsymbol{\tau}_v)\Big|_{M_0} \times \overrightarrow{M_0 M} = \mathbf{0}$

12.3 例题

例 12.1 证明: 二次曲面 $\Sigma : Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0$ 在其任一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面 π 的方程为

$$Ax_0 x + By_0 y + Cz_0 z + D\frac{x_0 + x}{2} + E\frac{y_0 + y}{2} + F\frac{z_0 + z}{2} + G = 0$$

例 12.2 证明: 二次曲线 $\Gamma : Ax^2 + B^2 + Cx + Dy + E = 0$ 上点 $M_0(x_0, y_0)$ 处的切线 T 的方程为

$$Ax_0 x + By_0 y + C\frac{x_0 + x}{2} + D\frac{y_0 + y}{2} + E = 0$$

✍ 作业 ex9.4:3,4,8(1)(4),9,11,16(1),17(2).

Lec 13 多元函数的 Taylor 公式及其应用

13.1 二元函数的 Taylor 公式

设 $D \subset \mathbb{R}^2$, 且 D 是凸区域, 即

$$\forall x, y \in D, \lambda x + (1-\lambda)y \in D, \forall \lambda \in [0,1]$$

或者说 D 中任两点都可以用 D 中的直线连接起来. 设 $z = f(x,y) \in C^{n+1}(D)$,$M_0(x_0,y_0) \in D$,$M(x,y) = M(x_0+h, y_0+k) \in D$, 点 $Q(x_1,y_1)$ 在 M_0 和 M 之间, 即 Q 在 M_0 和 M 的连线上.

由 $\overrightarrow{M_0Q} /\!/ \overrightarrow{M_0M}$, 即

$$(x_1-x_0, y_1-y_0) /\!/ (h,k) \Leftrightarrow \frac{x_1-x_0}{h} = \frac{y_1-y_0}{k} := t \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + th, \\ y_1 = y_0 + tk. \end{cases}, t \in [0,1]$$

得

$$f(Q) = f(x_1,y_1) = f(x_0+th, y_0+tk) := \varphi(t) \in C^{n+1}[0,1]$$

利用 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 处的 n 阶 Taylor 公式

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{n+1}, \quad t \in [0,1], \theta \in (0,1)$$

取 $t=1$, 得到

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x,y) = \varphi(1) = \sum_{m=0}^{n} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

其中

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= f(M_0) \\
\varphi'(0) &= \left(f'_x(x_0+ht, y_0+kt)h + f'_y(x_0+th, y_0+kt)k\right)_{t=0} \\
&= \left(h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0} := \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(M_0) \\
\varphi''(0) &= \left(\frac{\partial^2 f(x_0+ht, y_0+kt)}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f(x_0+ht, y_0+kt)}{\partial y^2}k^2\right)_{t=0} \\
&= \left(h^2\frac{\partial^2}{\partial x^{22}} + 2\frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial y^2}hk + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^{22}}\right) f(M_0) \\
:&= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(M_0)
\end{aligned}$$

以此类推, 得到

$$\varphi^{(m)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(M_0), m = 0,1,2,\cdots,n$$

代入 Taylor 公式, 得到

$$f(x,y)=f(x_0+h,y_0+k)=\varphi(1)=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(M_0)+R_n$$

其中

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

其中 $\theta\in(0,1),\begin{cases}h=x-x_0,\\k=y-y_0.\end{cases}$.

这即为二元函数 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的 n 阶 Taylor 公式.

例 13.1 可微函数 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的 0 阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(x_0,y_0)+f'_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)k+f'_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)h\\&=f(x_0,y_0)+f'_x\left(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)\right)(x-x_0)\\&+f'_y\left(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)\right)(y-y_0)\end{aligned}$$

也就是我们可以得到二元函数 $z=f(x,y)$ 的微分中值定理

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)&+f'_x\left(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)\right)(x-x_0)\\&+f'_y\left(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0)\right)(y-y_0)\end{aligned}$$

例 13.2 设 $z=f(x,y)\in C^3(D)$, 则 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 的二阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)\\&+\frac{1}{2}\left(f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right)+o(\rho^2)\end{aligned}$$

其中 $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{h^2+k^2}$.

设 $f'_x(M_0)=0=f'_y(M_0)$,$f''_{xx}(M_0)=A$, $f''_{xy}(M_0)=B$, $f''_{yy}(M_0)=C$, 则

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)&=\frac{1}{2}\left(A(x-x_0)^2+2B(x-x_0)(y-y_0)+C(y-y_0)^2\right)+o(\rho^2)\\&=\frac{A}{2}\left[\left(x-x_0+\frac{B}{A}(y-y_0)\right)^2+\frac{AC-B^2}{A^2}(y-y_0)^2\right]+o(\rho^2)\end{aligned}$$

由此进行分析

1. 当 $\begin{cases}A>0,\\AC-B^2>0\end{cases}$ 时,$f(x,y)-f(x_0,y_0)\geqslant 0$ 恒成立, 此时 $f(x,y)$ 在 M_0 处取得极小值.
2. 当 $\begin{cases}A<0,\\AC-B^2>0\end{cases}$ 时,$f(x,y)-f(x_0,y_0)\leqslant 0$ 恒成立, 此时 $f(x,y)$ 在 M_0 处取得极大值.
3. 当 $\begin{cases}AC-B^2<0\end{cases}$ 时,$f(x_0,y_0)$ 不是 f 的极值.

定理 13.1

设 $z=f(x,y)\in C^2(D)$,D 是凸区域,$M_0(x_0,y_0)\in D$ 且 M_0 是 f 的一个驻点, 即

$$f'_x(M_0)=0=f'_y(M_0)$$

令 $1+f(M_0)=\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ 称之为 f 在驻点 M_0 处的 Hessian 矩阵, 则

1. 当 $Hf(M_0)>0$, 即矩阵正定, 一切顺序主子式均大于 0, 则 f 在 M_0 处取得极小值.
   即 $\begin{cases} A>0, \\ AC-B^2>0 \end{cases}$ 时,f 在 M_0 处取得极小值.
2. 当 $Hf(M_0)<0$, 即矩阵负定, 一切顺序主子式交替正负, 则 f 在 M_0 处取得极大值.
   即 $\begin{cases} A<0, \\ AC-B^2>0 \end{cases}$ 时,f 在 M_0 处取得极大值.
3. $\Delta=AC-B^2<0$ 时,f 在 M_0 处不取得极值.
4. 当 $Hf(M_0)=0$, 即矩阵不定, 则 f 在 M_0 处是否取得极值不确定. 要使用更高阶的 Taylor 公式进行讨论.

例 13.3

1. 设 $f(x,y)=x^4+y^4, f(0,0)=0$.
$$f'_x(0,0)=4x^3\Big|_{(0,0)}=0,\quad f'_y(0,0)=4y^3\Big|_{(0,0)}=0$$
$$f''_{xx}(0,0)=12x^2\Big|_{(0,0)}=0,\quad f''_{xy}(0,0)=0,\quad f''_{yy}(0,0)=12y^2\Big|_{(0,0)}=0$$
   则 $\Delta=AC-B^2=0$, 但是不难看出 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处取得极小值.
2. 设 $f(x,y)=x^3+y^3, f(0,0)=0$.
$$f'_x(0,0)=3x^2\Big|_{(0,0)}=0,\quad f'_y(0,0)=3y^2\Big|_{(0,0)}=0$$
$$f''_{xx}(0,0)=6x\Big|_{(0,0)}=0,\quad f''_{xy}(0,0)=0,\quad f''_{yy}(0,0)=6y\Big|_{(0,0)}=0$$
   则 $\Delta=AC-B^2=0$, 但是不难看出 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不取得极值.

13.2 例题

例 13.4 将 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$ 在点 $M_0(0,0)$ 处分别展成零阶, 一阶, 二阶 Taylor 公式.

解

1. 零阶 Taylor 公式
$$f(x,y)=f(0,0)+(x-0)f'_x(0+\theta(x-0),0+\theta(y-0))+(y-0)f'_y(0+\theta(x-0),0+\theta(y-0))$$
$$1+xf'_x(\theta x,\theta y)+yf'_y(\theta x,\theta y),\theta\in(0,1)$$

而 $f(x,y)=\dfrac{1}{(1-x)(1-y)}$, 则

$$f'_x(\theta x,\theta y)=\frac{1}{(1-\theta x)^2(1-\theta y)},\quad f'_y(\theta x,\theta y)=\frac{1}{(1-\theta x)(1-\theta y)^2}$$

代入得零阶 Taylor 公式为

$$f(x,y)=1+\frac{x}{(1-\theta x)^2}\frac{1}{1-\theta y}+\frac{y}{1-\theta x}\frac{1}{(1-\theta y)^2}$$

2. 高阶 Taylor 公式

利用

$$\frac{1}{1-x}=1+x+o(x)=1+x+x^2+o(x^2)=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$$
$$\frac{1}{1-y}=1+y+o(y)=1+y+y^2+o(y^2)=1+y+y^2+y^3+o(y^3)$$

得到 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处的一阶, 二阶, 三阶 Taylor 公式为

$$f(x,y)=(1+x+o(x))(1+y+o(y))=1+x+y+R_1=1+\frac{x^2-y^2}{x-y}+R_1$$
$$\begin{aligned}f(x,y)&=(1+x+x^2+o(x^2))(1+y+y^2+o(y^2))\\&=1+x+y+x^2+xy+y^2+R_2=1+\frac{x^2-y^2}{x-y}+\frac{x^3-y^3}{x-y}+R_2\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}f(x,y)&=(1+x+x^2+x^3+o(x^3))(1+y+y^2+y^3+o(y^3))\\&=1+x+y+x^2+xy+y^2+x^3+x^2y+xy^2+y^3+R_3\\&=1+\frac{x^2-y^2}{x-y}+\frac{x^3-y^3}{x-y}+\frac{x^4-y^4}{x-y}+R_3\end{aligned}$$

以此类推可以得到 $f(x,y)$ 在点 $O(0,0)$ 处的 n 阶 Taylor 公式为

$$f(x,y)=1+(x+y)+\frac{x^3-y^3}{x-y}+\frac{x^4-y^4}{x-y}+\cdots+\frac{x^n-y^n}{x-y}+R_n$$

例 13.5 求 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的所有极值.

解 先求 $f(x,y)$ 的驻点, 即求 $f'_x(x,y)=0=f'_y(x,y)$, 得到

$$\begin{cases}f'_x(x,y)=3x^2+6x-9=0,\\ f'_y(x,y)=-3y^2+6y=0.\end{cases}$$

解得 $f(x,y)$ 的驻点为 $M_1(1,0),M_2(1,2),M_3(-3,0),M_4(-3,2)$. 对每个驻点, 计算 $f(x,y)$ 的 Hessian 矩阵, 根据 Hessian 矩阵的正定性, 负定性, 不定性来判断极值.

由

$$f''_{xx}=6x+6,f''_{xy}=0,f''_{yy}=-6y+6$$

1. 在 $M_1(1,0)$ 处,

$$A=12,\quad B=0,\quad C=6$$

由此得到 $\Delta=AC-B^2=72>0,A>0$, 故 $f(M_1)=f(1,0)=-5$ 为极小值.

2. 在 $M_2(1,2)$ 处,
$$A=12,\quad B=0,\quad C=-6$$
由此得到 $\Delta=AC-B^2=-72<0$, 故 $f(M_2)=f(1,2)=5$ 不是极值.
3. 在 $M_3(-3,0)$ 处,
$$A=-12,\quad B=0,\quad C=6$$
由此得到 $\Delta=AC-B^2=-72<0$, 故 $f(M_3)=f(-3,0)=45$ 不是极值.
4. 在 $M_4(-3,2)$ 处,
$$A=-12,\quad B=0,\quad C=-6$$
由此得到 $\Delta=AC-B^2=72>0, A<0$, 故 $f(M_4)=f(-3,2)=31$ 为极大值.

13.3 对称矩阵 A 的正定性与负定性

定义 13.1 (对称矩阵)

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 且 $a_{12}=a_{21}, a_{13}=a_{31}, a_{23}=a_{32}$, 则 A 称之为对称矩阵, 此时 $A=A^T$.

定义 13.2 (正定矩阵与负定矩阵)

A 为 n 阶对称矩阵, 则

1. 若 A 的顺序主子式全大于零, 即 $|a_{11}|=a_{11}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}>0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=|A|>0$, 则称 A 为正定矩阵.
2. 若 A 的奇数阶顺序主子式全小于零, 偶数阶顺序主子式全大于零, 即 $|a_{11}|=a_{11}<0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}<0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=|A|>0$, 则称 A 为负定矩阵.

更高阶的对称矩阵的正定性与负定性的定义类似.

作业 ex9.5:2(2),3,4(1)(3)(7),7(1)(3)(4).

Lec 14 多元函数的极值与最值

14.1 多元函数极值必要条件与充分条件

定理 14.1 (可微函数有极值的必要条件)

设 $z=f(x,y)$ 在 $\overline{U}(M_0,\delta)$ 中可微, 且 $f(M_0)$ 为 f 的极值, 则 $f'_x(M_0)=f'_y(M_0)=0$.

证明 设 $M_0(x_0,y_0)$ 为 f 的极小值点. 考虑函数

$$g(x)=f(x,y_0),x\in\overline{U}(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

则 $g(x)$ 在 x_0 处取得极小值, 故 $g'(x_0)=0$, 即 $f'_x(M_0)=0$. 同理可证 $f'_y(M_0)=0$.

这表示可微函数的极值点必是驻点, 可推广到 n 元函数.

定理 14.2 (二阶连续可微函数有极值的充分条件)

设 $z=f(x,y)\in C^2(\overline{U}(M_0,\delta))$, 且 $M_0(x_0,y_0)$ 为 f 的驻点, 即 $f'_x(M_0)=f'_y(M_0)=0$, 记 $A=f''_{xx}(M_0),B=f''_{xy}(M_0),C=f''_{yy}(M_0)$,$Hf(M_0)=\begin{pmatrix}A&B\\B&C\end{pmatrix}$, 则

1. $Hf(M_0)>0$,Hessian 矩阵正定, 即 $A>0,AC-B^2>0$, 则 f 在 M_0 处取得极小值.
2. $Hf(M_0)<0$,Hessian 矩阵负定, 即 $A<0,AC-B^2>0$, 则 f 在 M_0 处取得极大值.
3. $AC-B^2<0$,Hessian 矩阵不定, 则 f 在 M_0 处不取得极值.

证明 $\forall(x,y)\in\overline{U}(M_0,\delta)$, 记 $\begin{cases}h=x-x_0=\Delta x,\\k=y-y_0=\Delta y.\end{cases}$, 由二阶 Taylor 公式

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left(Ah^2+2Bhk+Ck^2\right)+o(\rho^2)$$

其中 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$.

设 h,k 不全为零, 引进变量

$$u=\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h}{\rho},\quad v=\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{k}{\rho}$$

则

$$Q(h,k)=\rho^2\varphi(u,v)=\rho^2(Au^2+2Buv+Cv^2)$$

其中 $\varphi(u,v)=Au^2+2Buv+Cv^2$ 是定义在单位圆周 $u^2+v^2=1$ 上的连续函数. 当 Q 正定时,$\varphi(u,v)>0$ 对圆周上任意点 (u,v) 成立. 而单位圆周是一个有界闭集, 所以 $\varphi(u,v)$ 在圆周上的最小值 m 也是正的, 且 $Q\geqslant m\rho^2$, 即

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}(Ah^2+2Bhk+Ck^2)+o(\rho^2)\geqslant\rho^2\left(\frac{1}{2}m+\frac{o(\rho^2)}{\rho^2}\right)$$

注意到上式右端括号内的值当 ρ 充分小时, 一定是正的, 所以有 $f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$. 即 (x_0,y_0) 是极小值点. 对于负定的情形, 证明是完全类似的.

当 $\Delta<0$ 时, 因为 Q 是不定的, 所以存在点 $(h_1,k_1),(h_2,k_2)$ 使得

$$Q(h_1,k_1)=\rho_1^2\varphi(u_1,v_1)>0,\quad Q(h_2,k_2)=\rho_2^2\varphi(u_2,v_2)<0$$

上述条件等价于 $\varphi(u_1,v_1)>0,\quad \varphi(u_2,v_2)<0$, 所以存在一个数 m 使得

$$\varphi(u_1,v_1)>m>0,\quad \varphi(u_2,v_2)<-m<0$$

即

$$Q(h_1,k_1)>m\rho_1^2,\quad Q(h_2,k_2)<-m\rho_2^2$$

令 $h=th_1,\ k=tk_1,\ 0\leqslant t\leqslant 1$, 则 $\rho=t\rho_1$,$Q(h,k)=t^2Q(h_1,k_1)>mt^2\rho_1^2$,

$$f(x_0+th_1,y_0+tk_1)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}Q(th_1,tk_1)+o(t^2\rho_1^2)>t^2\left(\frac{1}{2}m+\frac{o(t^2)}{t^2\rho_1^2}\right)$$

所以对充分小的 t, 上式右端括号内大于零. 也就是说 $f(x_0+th_1,y_0+tk_1)-f(x_0,y_0)>0$. 同样的道理, 存在一个充分小的 t, 使得 $f(x_0+th_2,y_0+tk_2)-f(x_0,y_0)<0$.

综上分析, 在 (x_0,y_0) 的任意小的邻域内, 既有大于 $f(x_0,y_0)$ 的值, 又有小于 $f(x_0,y_0)$ 的值, 所以 (x_0,y_0) 不是极值点.

关于半正定情形无法判断, 在此不再讨论. 不过我们可以用几个例子来说明半正定情形无法判别极值.

例 14.1 考虑下列函数在 $O(0,0)$ 处取值的情况:

1. $z=f(x,y)=x^2+y^2$,
2. $z=f(x,y)=x^3+y^3$,
3. $z=f(x,y)=x^4+y^4$.
4. $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.
5. $z=f(x,y)=xy$.

解

1. $O(0,0)$ 为 f 的驻点, 且

$$A=f''_{xx}(0,0)=2,B=f''_{xy}(0,0)=0,C=f''_{yy}(0,0)=2$$

则

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}>0$$

故 $f(0,0)=0$ 为极小值.

2.

$$\begin{cases}f'_x=3x^2=0,\\ f'_y=3y^2=0.\end{cases}$$

. 故 $O(0,0)$ 为 f 的驻点, 且

$$A=f''_{xx}(0,0)=0,B=f''_{xy}(0,0)=0,C=f''_{yy}(0,0)=0$$

则 $\Delta=AC-B^2=0$, 无法由此判断 $f(0,0)$ 是否为极值.

对于任意的 $\delta>0$, 在 $\overline{U}(0,\delta)$ 之中, 总有 $M_1,M_2\in U(0,\delta)$, 使得

$$f(M_1)>0=f(0,0)=f(M_2)$$

故 $O(0,0)$ 不是极值.

3. $O(0,0)$ 为 f 的驻点, 且

$$A=f''_{xx}(0,0)=0, B=f''_{xy}(0,0)=0, C=f''_{yy}(0,0)=0$$

无法由此判断 $f(0,0)$ 是否为极值.

但是不难看出 $\forall(x,y), f(x,y)\geqslant 0=f(0,0)$, 故 $O(0,0)$ 为最小值, 当然是极小值.

4. $f(0,0)=0$ 为 f 的极小值, 也是 f 的最小值, 但是

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2}}{h}$$

不存在, 故 $O(0,0)$ 不是驻点.

5. 从 $\begin{cases} f'_x=y=0,\\ f'_y=x=0.\end{cases}$ 得到驻点 $O(0,0)$, 但 $\forall\delta>0, \exists(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}),(\frac{\delta}{2},-\frac{\delta}{2})\in U(0,\delta)$ 使得 $f(\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2})=\frac{\delta^2}{4}>0=f(0,0)=f(\frac{\delta}{2},-\frac{\delta}{2})$, 故 $O(0,0)$ 不是极值.

注 由上述例子可知,

- 驻点可以是极值点, 也可以不是极值点.
- 极值点可以是驻点, 也可以不是驻点.
- $\Delta=AC-B^2=0$ 时, 可以有极值, 也可以没有极值.

14.2 n 元函数的极值与最值

设 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个自变量,f 是一个 n 元函数. $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^3(D)$, 其中 D 是凸区域.$M_0(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})\in D$ 且 M_0 是 f 的一个驻点, 即

$$f'_{x_1}(M_0)=f'_{x_2}(M_0)=\cdots=f'_{x_n}(M_0)=0$$

记 $a_{ij}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x_i\partial x_j}\right|_{M_0}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$, 记

$$Hf(M_0):=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

则

1. $Hf(M_0)>0$, 即 $Hf(M_0)$ 正定时,$f(M_0)$ 为 f 的极小值.
2. $Hf(M_0)<0$, 即 $Hf(M_0)$ 负定时,$f(M_0)$ 为 f 的极大值.
3. 若 f 在凸的开区域 D 中仅有一个极小 (大) 值, 且无极大 (小) 值. 则此极值为 f 的最小

(大) 值.

4. 若 D 是有界的闭区域. 则 f 在 D 中科同时取最大值与最小值. 可先求出 f 在 D 内的所有可能的驻点 $M_1, M_2, \cdots, M_k$, 再求出 f 在这些驻点上的函数值 $f(M_1), f(M_2), \cdots, f(M_k)$, 其中 $f(M_1), f(M_2), \cdots, f(M_k)$ 中的最大值与最小值即为 f 在 D 中的最大值与最小值.

14.3 例题

例 14.2 在椭球面 $\Sigma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上取一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 求 M_0 处的切平面方程与三个坐标面围成的四面体 Ω 的体积的最小值.

解 设 M_0 位于第一卦限, 则 π 为

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1$$

则 $V(\Omega)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{a^2}{x_0}\right)\left(\dfrac{b^2}{y_0}\right)\left(\dfrac{c^2}{z_0}\right)=\dfrac{abc}{6}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}}$ 再利用平均值不等式, 得到

$$\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}}\geqslant\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

故 $V(\Omega)$ 的最小值为 $\dfrac{abc}{6\sqrt{3}}$. 此时切平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\sqrt{3}$.

例 14.3 证明 $z=f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(x+y)}$ 在 $D:\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 中的最大值为 $4\mathrm{e}^{-2}$.

解

1. 在 D 内部仅有疑点 $M_1(1,1)$,
2. 在边界 $y=0$ 上 $f(x,0)=x^2\mathrm{e}^{-x}$ 有疑点 $x_1=0, x_2=2$,
3. 在边界 $x=0$ 上 $f(0,y)=y^2\mathrm{e}^{-y}$ 有疑点 $y_1=0, y_2=2$.

且

$$f(0,0)=0,\quad f(2,0)=4\mathrm{e}^{-2}=f(0,2),\quad f(1,1)=2\mathrm{e}^{-2}$$

且 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(x+y)}=0$, 故 $f(x,y)$ 在 D 中的最大值为 $4\mathrm{e}^{-2}$.

✍ **作业** ex9.5:7(2)(5),8,11(2)(4),17;CH9:6,14.