

Lec 7 偏导数与全微分 (total differential)

7.1 多元函数的偏导数 (partial derivative)

在多元函数 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ 中, 设 $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_0 + \Delta x, y_0)$, $M_2(x_0, y_0 + \Delta y) \in D$, 则

1. $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ 是固定 y , 仅让 x 发生变化而使得 z 产生的增量.
2. $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 是固定 x , 仅让 y 发生变化而使得 z 产生的增量.

记 $\Delta z_x = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, $\Delta z_y = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 分别称作因变量 z 关于 x, y 的偏增量, 并有如下定义:

定义 7.1

1. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 为 z 关于 x 在 $M_0(x_0, y_0)$ 处的偏导数, 并记作
$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = f'_x(M_0) = f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = (f(x, y_0))'_x \Big|_{x_0}$$
2. $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ 为 z 关于 y 在 $M_0(x_0, y_0)$ 处的偏导数, 并记作
$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = f'_y(M_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = (f(x_0, y))'_y \Big|_{y_0}$$

注 我们采用的几种导数记号:

1. $\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}$;
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)}$;
3. $f'_x(x_0, y_0)$;
4. $f'_1(x_0, y_0)$ (一定程度上可以避免复合函数指代的问题, 推荐使用).

$f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$ 实际上就是在点 M_0 处, 因变量 z 分别关于 x, y 的相对瞬时变化率. 即

$$f'_x(x_0, y_0) = \left. \frac{df(x, y_0)}{dx} \right|_{x_0}, f'_y(x_0, y_0) = \left. \frac{df(x_0, y)}{dy} \right|_{y_0}$$

同理, 设 $u = f(x, y, z)$ 在 $\bar{U}(M_0, \Delta)$ 中有定义, 则

$$f'_x(x_0, y_0, z_0) = \left. \frac{df(x, y_0, z_0)}{dx} \right|_{x_0}, f'_y(x_0, y_0, z_0) = \left. \frac{df(x_0, y, z_0)}{dy} \right|_{y_0}, f'_z(x_0, y_0, z_0) = \left. \frac{df(x_0, y_0, z)}{dz} \right|_{z_0}$$

其余情形可类推.

总之, 多元函数的偏导数, 就是将多元函数中的其余自变量固定, 只把因变量对一个自变量求导的结果.

例 7.1 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

1. 证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续;
2. 证明 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, 即 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可偏导;
3. 求 $f'_x(1, 1), f'_y(2, 1)$.

解

1. 沿着 $y = kx^2$ 可得在 $(0, 0)$ 不连续.
2. $f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \cdot 0}{(\Delta x)^4 + 0^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$, 同理 $f'_y(0, 0) = 0$
3. $f'_x(1, 1) = (f(x, 1))'_x \Big|_{x=1} = \left(\frac{x^2 \cdot 1}{x^4 + 1^2} \right)'_x \Big|_{x=1} = \frac{2x - 2x^5}{(x^4 + 1)^2} \Big|_{x=1} = 0$
 $f'_y(2, 1) = (f(2, y))'_y \Big|_{y=1} = \left(\frac{2^2 y}{2^4 + y^2} \right)'_y \Big|_{y=1} = \frac{4(16 - y^2)}{(16 + y^2)^2} \Big|_{y=1} = \frac{60}{289}$

例 7.2 设 $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, 证明:

1. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处连续.
2. $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处偏导数 $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 不存在, 即 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不可偏导.

证明

1. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$
2. $f'_x(0, 0) = (\sqrt{x^2 + 0})'_x \Big|_{x=0} = (|x|)'_x \Big|_{x=0}$ 不存在. 同理 $f'_y(0, 0)$ 不存在.

从两个例题可知, 多元函数连续性和可偏导性没有关系.

7.2 多元函数全微分 (total differential) 与可微性

定义 7.2

设 $z = f(x, y), (x, y) \in D \in \mathbb{R}^2$, 并设 $M_0(x_0, y_0), M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$, 若存在常数 A, B , 设 $z = f(x, y)$ 在 M_0 处的全增量可表示为

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中, $\rho = \rho(M, M_0) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, 则称 $z = f(x, y)$ 是可微的.

称 $\Delta x, \Delta y$ 的线性函数: $A\Delta x + B\Delta y = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ 为 $f(x, y)$ 在 M_0 处的全微分, 记作 $dz \Big|_{M_0} = A\Delta x + B\Delta y = A(x - x_0) + B(y - y_0)$

即在 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 可微的条件下, 有 $\Delta z = dz \Big|_{M_0} + o(\rho) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + o(\rho)$



同理, 若三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的全增量可表示为

$$\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) + o(\rho)$$

其中 A, B, C 为常数, $\rho = \rho(M_0, M) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, 则称 $u = f(x, y, z)$ 在点 M_0 处可微, 且 $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ 称为 $f(x, y, z)$ 在点 M_0 处的全微分, 记作 $du \Big|_{M_0} = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ 即有 $\Delta u = du \Big|_{M_0} + o(\rho) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + o(\rho)$ 更高维上的可类似进行定义.

若 $z = f(x, y)$ 在区域 D 中每一点可微, 则称 $f(x, y)$ 在区域 D 上可微.

注 关于 d 这个符号, 有如下几种认知,

1. 完全当做记号来用, 即只有全微分, 积分, 以及有些情况下的导数才使用, 实际上 B2 中也确实最好这么做.
2. 如上述表述中的, 作为线性主部存在, $dz = A(x - x_0) + B(y - y_0)$. 但一般不用 ddz 去直接代替做运算.
3. 特殊的线性映射, 相当于认为 $dz(\Delta x, \Delta y) \Big|_{(x_0, y_0)} = A\Delta x + B\Delta y$, 这是 B3 中的定义, 了解一下即可.
4. 一种特殊算子, 在 B2 的后续选讲课程中微分形式涉及到这一部分, 也是了解即可.

我们在 B2 中实际上可以按照第二种方式去理解, 但最好不要让 $dz = A(x - x_0) + B(y - y_0)$ 这种形式出现, 因为这种表达方式和另外三种都有些冲突, 且容易出错. 实际上更多的当成完全的记号来使用会更好.

定理 7.1

1. 若 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处可微, 则 $f(x, y)$ 在 M_0 处连续. 反之未必.
2. 若 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 处可微, 则 $f(x, y)$ 在 M_0 处可偏导. 反之未必.



证明

1. (a). 当 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$, 有 $\begin{cases} \Delta x \rightarrow 0, \\ \Delta y \rightarrow 0; \end{cases}$ 而

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) = 0$$

因此

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0)$$

即有连续性.

- (b). 反例: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在原点处连续但不可微, 否则原点处可偏导.

2. (a).

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A\Delta x + o(|\Delta x|)}{\Delta x} = A$$

因此 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在, 且 $f'_x(x_0, y_0) = A$.

同理, 有 $f'_x(x_0, y_0)$ 存在, $f'_y(x_0, y_0) = B$. 故而可得偏导存在.

(b). 反例: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在原点处可偏导但不连续, 故一定不可微.

例 7.3 证明: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在原点处可偏导, 连续, 但不可微.

解

1.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x||y| \cdot |x|}{x^2 + y^2} \\ &\leq \frac{\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \cdot |x|}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{|x|}{2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

故得连续.

2.

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \left(\frac{x^2 \cdot 0}{x^4 + 0^2} \right)'_x \Big|_{x=0} = (0)'_x \Big|_{x=0} = 0 \\ f'_y(0, 0) &= \left(\frac{0^2 \cdot y}{0^4 + y^2} \right)'_y \Big|_{y=0} = (0)'_y \Big|_{y=0} = 0 \end{aligned}$$

故得可偏导.

3. 反证法: 假设在原点处可微. 则有

$$f(\Delta x, \Delta y) - 0 = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

结合偏导数可知上述等式可化为

$$\frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = o(\rho)$$

即

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

但当

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = k\Delta x}} \frac{(\Delta x)^2 \Delta y}{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 k \Delta x}{((\Delta x)^2 + k^2(\Delta x)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k}{(1 + k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

与 k 有关, 故与极限存在唯一性矛盾, 因此可知原函数在原点不可微.

例 7.4 思考题 设 $u = f(x, y, z) = x^{y^z} + x^{a^z} + a^{y^z} + x^{y^a} + a^{a^z}$ ($a > 0$, 常数) 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, 及 u 在 $M(1, 1, 1)$ 处的全微分.

可不做为作业中, 发在群里即可.

作业 ex9.2:2(2)(5)(8), 3, 4, 6, 13(4)(6), 16.