第11讲 补充讲稿：

方向导数、方向导数：由于新版教课本关于方向导数的定义作了改变，因此，大家以后还是要按照新版教课本上的方向导数：

$$\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t} \qquad (*)$$

来计算 $\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{M_0}$，其中 $u=f(x,y,z)$，$\vec{l^0}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，$M_0=(x_0,y_0,z_0)$.

例1. 设 $z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，$(x,y)\in R^2$，$M_0=O(0,0)$，$\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ 为表示在 $O(0,0)$ 的任意单位向量，则

$$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t\cos\alpha,\ 0+t\cos\beta)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{(t\cos\alpha)^2+(t\cos\beta)^2}-0}{t}$$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{|t|}{t}$，且 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{|t|}{t}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{t}{t}=1$，$\lim\limits_{t\to 0^-}\frac{|t|}{t}=\lim\limits_{t\to 0^-}\frac{-t}{t}=-1\neq\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{|t|}{t}$，故 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{|t|}{t}$ 不存在！即函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $O(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数 $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{M_0(0,0)}$ 都不存在！

例2. 设 $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$，求 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$，及 $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{O(0,0)}$，并证明：

(1).

在$O(0,0)$处，$z=f(x,y)$不可微。

解：(1°) $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^2\cdot 0^2}{((\Delta x)^2+0^2)^{3/2}}-0}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$，由对称性知，$f_y'(0,0)=f_x'(0,0)=0$.

(2°) $\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{O(0,0)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(0+t\cos\theta,0+t\sin\theta)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{(t\cos\theta)^2(t\sin\theta)^2}{((t\cos\theta)^2+(t\sin\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0}\frac{t^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{t\,|t|^3}$

当且仅当$\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi$时，$\cos^2\theta\sin^2\theta=0$，且$\frac{t^4}{t|t|^3}=\pm 1$

是有界变量，故$\frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{O(0,0)}\xlongequal[\pi,\frac{3}{2}\pi\text{时}]{\text{当且仅当}\theta=0,\frac{\pi}{2},}0$， （有2）

即$z=f(x,y)$在$O(0,0)$处只能在$\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$四个方向上存在方向导数，且方向导数皆为零，f在其它方向上皆无方向导数！

(3°) $\because \Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}}$，$f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y=0$，

$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，且$\rho\to 0\Leftrightarrow\Delta x\to 0$且$\Delta y\to 0$

由$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-(f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y)}{\rho}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^2}\xlongequal[k\neq 0]{\text{令}\Delta y=k\Delta x}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{k^2(\Delta x)^4}{((\Delta x)^2+k^2(\Delta x)^2)^2}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{k^2}{(1+k^2)^2}=\frac{k^2}{(1+k^2)^2}\neq 0$

依函数可微的判定充要条件，$f(x,y)$在$O(0,0)$处不可微。

(2).

(4)，在 $O(0,0)$ 处，$z=f(x,y)$ 不可微分的第二种证法：

反证法：若 $z=f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处可微分，则含于上半

纹理的书1，应该有：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{O(0,0)}=f'_x(0,0)\cos\theta+f'_y(0,0)\sin\theta=0\cos\theta+0\sin\theta=0.\ (\text{＊})$$

其中，$\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 是以 $O(0,0)$ 为起点的任意一向量。

（＊）表明：$z=f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处沿任意方向 $\vec{l}$ 的方向导数 $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{O(0,0)}$ 都存在且皆为零。这与（＊＊）的结论相矛盾！

（＊＊）表明：$f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处只在 $\theta=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ 四个方向上存在方向导数，在其它方向上并不存在方向导数。

故 $z=f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处不可微分。

注：设 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$，则 $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$

$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\triangleq\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\triangleq\Delta$ —— Laplace 算子.

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\Longrightarrow\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u=0\Longrightarrow\Delta u=0$.