Lec 16 多元函数微分学复习小结

16.1 多元函数与一元函数

多元函数微分学相较于一元函数微分学, 不同之处在于多元函数的极限动点区域定点有无穷多种方式, 而一元函数的极限只有左右极限两种方式. 其他不同的性质基本由上述性质引申而来.

例 16.1 设 $z=f(x,y)$ 在区域 D 中偏导数存在且有界, 即 $\exists M>0$, 使得 $\forall (x,y)\in D, |f'_x(x,y)|\leqslant M, |f'_y(x,y)|\leqslant M$, 则 f 在 D 中是连续的.

证明 $\forall M_0(x_0,y_0)\in D$, 设 $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in D$, 则

$$\begin{aligned}\Delta z =& f(M)-f(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ =&\left(f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)\right)+\left(f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\right)\\ =&f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\\ \leqslant& M\left(|\Delta x|+|\Delta y|\right)\end{aligned}$$

当 $\Delta x,\Delta y\to 0$ 时, 有 $\Delta z\to 0$, 即 f 在 M_0 处连续.

16.2 例题

例 16.2 证明: 一切二次曲面 Σ

$$\Sigma: ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g=0$$

在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$ax_0x+by_0y+cz_0z+d\frac{x_0+x}{2}+e\frac{y_0+y}{2}+f\frac{z_0+z}{2}+g=0$$

其中 a,b,c,d,e,f,g 为常数, 且 $a^2+b^2+c^2>0$.

证明 令 $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+g$, 则 F 在 M_0 处的切平面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\nabla F\bigg|_{M_0}=\left(F'_x,F'_y,F'_z\right)\bigg|_{M_0}=(2ax_0+d,2by_0+e,2cz_0+f)$$

因此由点法式方程, 有切平面方程为

$$(2ax_0+d)(x-x_0)+(2by_0+e)(y-y_0)+(2cz_0+f)(z-z_0)=0$$

整理后可得

$$ax_0x+by_0y+cz_0z+d\frac{x_0+x}{2}+e\frac{y_0+y}{2}+f\frac{z_0+z}{2}+g=0$$

例 16.3 设有函数 $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$, 曲线

$$L:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

其中 $M_0\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 为 L 上的点, 记 $\boldsymbol{n}$ 为 L 在 M_0 处的法向量,$\boldsymbol{l}$ 为任意方向向量.

求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{M_0}$, 并求 $\left(\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}\right)_{\max}$, $\left(\left.\dfrac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}\right)_{\min}$.

解 设 $F(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1$, 则 F 在 M_0 处的法向量为

$$\boldsymbol{N}=\nabla F\Big|_{M_0}=\left(F_x',F_y'\right)\Big|_{M_0}=\frac{\sqrt{2}}{ab}(b,a)$$

取 $\boldsymbol{N}=(b,a)$, 则 L 在 M_0 处的内法向为 $\boldsymbol{n}=-bmN=(-b,-a)$, 则方向向量为 $\boldsymbol{n}^\circ=\left(-\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. 又

$$\nabla z\Big|_{M_0}=\left(-\frac{2x}{a^2},-\frac{2y}{b^2}\right)\Big|_{M_0}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}\right)$$

且

$$\left(\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}\right)_{\max}=|\nabla z|_{M_0}=\left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}\right)\right|=\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}$$

$$\left(\left.\frac{\partial z}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0}\right)_{\min}=|\nabla z\cdot\boldsymbol{n}^\circ|_{M_0}=\left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}\right)\right|=\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}$$

例 16.4 在椭球面 $\Sigma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上取一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$, 求 M_0 处的切平面方程与三个坐标面围成的四面体 Ω 的体积的最小值.

解 设 M_0 位于第一卦限, 则 π 为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1$$

则 $V(\Omega)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{a^2}{x_0}\right)\left(\dfrac{b^2}{y_0}\right)\left(\dfrac{c^2}{z_0}\right)=\dfrac{abc}{6}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}}$ 再利用平均值不等式, 得到

$$\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c}\right)^2}}\geqslant\frac{abc}{6}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

故 $V(\Omega)$ 的最小值为 $\dfrac{abc}{6\sqrt{3}}$. 此时切平面方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=\sqrt{3}$.

例 16.5 设 (r_0,θ_0,φ_0) 为点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的球坐标系, 即

$$\begin{cases}x_0=r_0\sin\theta_0\cos\varphi_0,\\ y_0=r_0\sin\theta_0\sin\varphi_0,\\ z_0=r_0\cos\theta_0.\end{cases}$$

其中 $r_0\in[0,+\infty)$, $\theta_0\in[0,\pi]$, $\varphi_0\in[0,2\pi)$. 证明:

1. 三个球坐标曲面 $\Sigma_1 : r = r_0, \Sigma_2 : \theta = \theta_0, \Sigma_3 : \varphi = \varphi_0$ 在 M_0 处两两正交
2. 三条球坐标曲线 $\Gamma_1 : \begin{cases} \Sigma_1, \\ \Sigma_2 \end{cases}, \Gamma_2 : \begin{cases} \Sigma_1, \\ \Sigma_3 \end{cases}, \Gamma_3 : \begin{cases} \Sigma_2, \\ \Sigma_3 \end{cases}$ 在 M_0 处两两正交

证明

1. 实际上要验证的是, 三张曲面的法向量在 M_0 处两两正交. Σ_1 在球坐标系下的方程为 $r = r_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r_0$$

设 $F_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r_0^2$, 则 F_1 在 M_0 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_1 = \nabla F_1\Big|_{M_0} = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$$

Σ_2 在球坐标系下的方程为 $\theta = \theta_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta_0$$

设 $F_2(x,y,z) = z^2-(x^2+y^2)\cos^2\theta_0$, 则 F_2 在 M_0 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_2 = \nabla F_2\Big|_{M_0} = \left(-2x_0\cos^2\theta_0, -2y_0\cos^2\theta_0, 2z_0\right)$$

Σ_3 在球坐标系下的方程为 $\varphi = \varphi_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\frac{y}{x} = \tan\varphi_0$$

设 $F_3(x,y,z) = y - x\tan\varphi_0$, 则 F_3 在 M_0 处的法向量为

$$\boldsymbol{n}_3 = \nabla F_3\Big|_{M_0} = (-\tan\varphi_0, 1, 0)$$

而

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2 &= (2x_0,2y_0,2z_0)\cdot\left(-2x_0\cos^2\theta_0, -2y_0\cos^2\theta_0, 2z_0\right) \\
&= -4x_0^2\cos^2\theta_0 - 4y_0^2\cos^2\theta_0 + 4z_0^2 = 0 \\
\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_3 &= (2x_0,2y_0,2z_0)\cdot(-\tan\varphi_0,1,0) \\
&= -2x_0\tan\varphi_0 + 2y_0 = 2\left(y_0 - x_0\tan\varphi_0\right) = 0 \\
\boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_3 &= \left(-2x_0\cos^2\theta_0, -2y_0\cos^2\theta_0, 2z_0\right)\cdot(-\tan\varphi_0,1,0) \\
&= 2x_0\cos^2\theta_0\tan\varphi_0 - 2y_0\cos^2\theta_0 = 2\left(x_0\cos^2\theta_0\tan\varphi_0 - y_0\cos^2\theta_0\right) \\
&= 2\left(x_0\cos^2\theta_0\tan\varphi_0 - y_0\cos^2\theta_0\right) = 0
\end{aligned}$$

2. 要验证的是, 三条曲线的切向量 τ_1,τ_2,τ_3 在 M_0 处两两正交. 其中

$$\tau_1 /\!/ \boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$$

因此又 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2,\boldsymbol{n}_3$ 两两正交, 所以

$$\tau_1 /\!/ \boldsymbol{n}_3$$

同理可得 $\tau_2 /\!/ \boldsymbol{n}_2$,$\tau_3 /\!/ \boldsymbol{n}_1$, 所以 τ_1,τ_2,τ_3 两两正交.

例 16.6 设 (r_0,θ_0,z_0) 为点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的圆柱坐标系, 即

$$\begin{cases} x_0 = r_0\cos\theta_0, \\ y_0 = r_0\sin\theta_0, \\ z_0 = z_0. \end{cases}$$

证明:

1. 三个圆柱坐标曲面 $\Sigma_1 : r = r_0, \Sigma_2 : \theta = \theta_0, \Sigma_3 : z = z_0$ 在 M_0 处两两正交
2. 三条圆柱坐标曲线 $\Gamma_1 : \begin{cases} \Sigma_1, \\ \Sigma_2 \end{cases}, \Gamma_2 : \begin{cases} \Sigma_1, \\ \Sigma_3 \end{cases}, \Gamma_3 : \begin{cases} \Sigma_2, \\ \Sigma_3 \end{cases}$ 在 M_0 处两两正交

证明

1. 实际上要验证的是, 三张曲面的法向量在 M_0 处两两正交. Σ_1 在圆柱坐标系下的方程为 $r = r_0$, 则在直角坐标系下的方程为

   $$\sqrt{x^2+y^2} = r_0$$

   设 $F_1(x,y,z) = x^2+y^2-r_0^2$, 则 F_1 在 M_0 处的法向量为

   $$\boldsymbol{n}_1 = \nabla F_1\Big|_{M_0} = (2x_0, 2y_0, 0)$$

   Σ_2 在圆柱坐标系下的方程为 $\theta = \theta_0$, 则在直角坐标系下的方程为

   $$\frac{y}{x} = \tan\theta_0$$

   设 $F_2(x,y,z) = y - x\tan\theta_0$, 则 F_2 在 M_0 处的法向量为

   $$\boldsymbol{n}_2 = \nabla F_2\Big|_{M_0} = (-\tan\theta_0, 1, 0)$$

   Σ_3 在圆柱坐标系下的方程为 $z = z_0$, 则在直角坐标系下的方程为

   $$z = z_0$$

   设 $F_3(x,y,z) = z - z_0$, 则 F_3 在 M_0 处的法向量为

   $$\boldsymbol{n}_3 = \nabla F_3\Big|_{M_0} = (0,0,1)$$

   而

   $$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2 &= (2x_0,2y_0,0)\cdot(-\tan\theta_0,1,0) \\ &= -2x_0\tan\theta_0 + 2y_0 = 2\left(y_0 - x_0\tan\theta_0\right) = 0 \\ \boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_3 &= (2x_0,2y_0,0)\cdot(0,0,1) = 0 \\ \boldsymbol{n}_2\cdot\boldsymbol{n}_3 &= (-\tan\theta_0,1,0)\cdot(0,0,1) = 0 \end{aligned}$$

   故三张曲面在 M_0 处两两正交.
2. 曲线的正交同上述球坐标系中的正交.

例 16.7 设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 确定的隐函数, 且 $x = 1, y = 1$ 时 $z = 1$. 试将 $z(x,y)$ 在点 $M_0(1,1)$ 处展开为二阶 Taylor 公式.

解 $z(x,y)$ 在 M_0 处的二阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned} z(x,y) &= z(1,1) + (x-1)z'_x(1,1) + (y-1)z'_y(1,1) \\ &\quad + \frac{(x-1)^2}{2}z''_{xx}(1,1) + (x-1)(y-1)z''_{xy}(1,1) + \frac{(y-1)^2}{2}z''_{yy}(1,1) + o(\rho^2) \end{aligned}$$

对 $z^3 - 2xz + y = 0$ 两边求微分，得

$$3z^2\,\mathrm{d}z - 2\left(x\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\right) + \mathrm{d}y = 0$$

整理得

$$\mathrm{d}z = \frac{2z}{3z^2 - 2x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3z^2 - 2x}\,\mathrm{d}y$$

因此

$$z'_x = \frac{2z}{3z^2 - 2x}, z'_y = \frac{1}{3z^2 - 2x}$$

对于 z'_x, z'_y 求偏导数，得

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= \frac{1}{(3z^2-2x)^2}\left(2z'_x(3z^2-2x) - 2z(6zz'_x - 2)\right) \\ z''_{xy} &= \frac{1}{(3z^2-2x)^2}\left(2z'_y(3z^2-2x) - 2z(6zz'_y)\right) \\ z''_{yy} &= \frac{1}{(3z^2-2x)^2}\left(-(6zz'_y)\right) \end{aligned}$$

代入 $x=1, y=1, z=1$ 得

$$z'_x = 2, z'_y = -1$$

$$z''_{xx} = 16, z''_{xy} = 10, z''_{yy} = -6$$

故 $z(x,y)$ 在 $M_0(1,1)$ 处的二阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned} z(x,y) &= 1 + 2(x-1) - (y-1) + \frac{16}{2}(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - \frac{6}{2}(y-1)^2 + o(\rho^2) \\ &= 1 + 2(x-1) - (y-1) + 8(x-1)^2 + 5(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + o(\rho^2) \end{aligned}$$

例 16.8 求旋转椭球面 $\Sigma : \dfrac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ 上距平面 $\pi : x + y + 2z = 9$ 最远和最近的点.

解 这是一个条件极值问题，取 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$，则 M_0 到 π 的距离 $d = \dfrac{|x_0 + y_0 + 2z_0 - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{|x_0 + y_0 + 2z_0 - 9|}{\sqrt{6}}$. 取目标函数

$$f(x,y,z) = (x + y + 2z - 9)^2$$

条件为

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

作 $L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} L'_x=2(x+y+2z-9)+\lambda\dfrac{x}{2}=0\\ L'_y=2(x+y+2z-9)+\lambda 2y=0\\ L'_z=4(x+y+2z-9)+\lambda 2z=0\\ L'_\lambda=\dfrac{x^2}{4}+y^2+z^2-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_0=\pm\dfrac{4}{3}\\ y_0=\pm\dfrac{1}{3}\\ z_0=\pm\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$M_1(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ 为最近点,$d=\sqrt{6}$,

$M_2(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$ 为最远点,$d=2\sqrt{6}$.

✍ **作业** ex9.5:5,7(5),8,10(3),11(2),16,17,19.