Lec 7 偏导数与全微分 (total differential)

7.1 多元函数的偏导数 (partial derivative)

在多元函数 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 中, 设 $M_0(x_0,y_0),M_1(x_0+\Delta x,y_0),M_2(x_0,y_0+\Delta y)\in D$, 则

1. $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 是固定 y, 仅让 x 发生变化而使得 z 产生的增量.
2. $f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 是固定 x, 仅让 y 发生变化而使得 z 产生的增量.

记 $\Delta z_x=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0),\Delta z_y=f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 分别称作因变量 z 关于 x,y 的偏增量, 并有如下定义:

定义 7.1

1. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 为 z 关于 x 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的偏导数, 并记作
$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=f'_x(M_0)=f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\left.\big(f(x,y_0)\big)'_x\right|_{x_0}$$
2. $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 为 z 关于 y 在 $M_0(x_0,y_0)$ 处的偏导数, 并记作
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=f'_y(M_0)=f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}=\left.\big(f(x_0,y)\big)'_y\right|_{y_0}$$

♣

注 我们采用的几种导数记号:

1. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$;
2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$;
3. $f'_x(x_0,y_0)$;
4. $f'_1(x_0,y_0)$(一定程度上可以避免复合函数指代的问题, 推荐使用).

$f'_x(M_0),f'_y(M_0)$ 实际上就是在点 M_0 处, 因变量 z 分别关于 x,y 的相对瞬时变化率. 即
$$f'_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0},f'_y(x_0,y_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y_0}$$

同理, 设 $u=f(x,y,z)$ 在 $\bar U(M_0,\Delta)$ 中有定义, 则
$$f'_x(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0,z_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0},f'_y(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y,z_0)}{\mathrm{d}y}\right|_{y_0},f'_z(x_0,y_0,z_0)=\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y_0,z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z_0}$$
其余情形可类推.

总之, 多元函数的偏导数, 就是将多元函数中的其余自变量固定, 只把因变量对一个自变量求导的结果.

例 7.1 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

1. 证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续;
2. 证明 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$, 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导;
3. 求 $f'_x(1,1), f'_y(2,1)$.

解

1. 沿着 $y=kx^2$ 可得在 $(0,0)$ 不连续.
2. $f'_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{(\Delta x)^2\cdot 0}{(\Delta x)^4+0^2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$, 同理 $f'_y(0,0)=0$
3. $f'_x(1,1)=\left(f(x,1)\right)'_x\Big|_{x=1}=\left(\dfrac{x^2\cdot 1}{x^4+1^2}\right)'_x\Bigg|_{x=1}=\dfrac{2x-2x^5}{(x^4+1)^2}\Bigg|_{x=1}=0$

   $f'_y(2,1)=\left(f(2,y)\right)'_y\Big|_{x=1}=\left(\dfrac{2^2y}{2^4+y^2}\right)'_y\Bigg|_{y=1}=\dfrac{4(16-y^2)}{(16+y^2)^2}\Bigg|_{y=1}=\dfrac{60}{289}$

例 7.2 设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, 证明:

1. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.
2. $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处偏导数 $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 不存在, 即 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可偏导.

证明

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0,0)$
2. $f'_x(0,0)=\left(\sqrt{x^2+0}\right)'_x\Big|_{x=0}=\left(|x|\right)'_x\Big|_{x=0}$ 不存在. 同理 $f'_y(0,0)$ 不存在.

从两个例题可知, 多元函数连续性和可偏导性没有关系.

7.2 多元函数全微分 (total differential) 与可微性

定义 7.2

设 $z=f(x,y),(x,y)\in D\in\mathbb{R}^2$, 并设 $M_0(x_0,y_0), M(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\in D$, 若存在常数 A,B, 设 $z=f(x,y)$ 在 M_0 处的全增量可表示为

$$\Delta z=f(M)-f(M_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

q 其中,$\rho=\rho(M,M_0)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 则称 $z=f(x,y)$ 是可微的.

称 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数:$A\Delta x+B\Delta y=A(x-x_0)+B(y-y_0)$ 为 $f(x,y)$ 在 M_0 处的全微分, 记作 $\mathrm{d}z\Big|_{M_0}=A\Delta x+B\Delta y=A(x-x_0)+B(y-y_0)$

即在 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 可微的条件下, 有 $\Delta z=\mathrm{d}z\Big|_{M_0}+o(\rho)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o(\rho)$ ♣

同理, 若三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的全增量可表示为

$$\Delta u=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)-f(x_0,y_0,z_0)+o(\rho)$$

其中 A,B,C 为常数,$\rho=\rho(M_0,M)=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$, 则称 $u=f(x,y,z)$ 在点 M_0 处可微, 且 $A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$ 称为 $f(x,y,z)$ 在点 M_0 处的全微分, 记作 $\mathrm{d}u\Big|_{M_0}=A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$ 即有 $\Delta u=\mathrm{d}u\Big|_{M_0}+o(\rho)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)+o(\rho)$ 更高维上的可类似进行定义.

若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 中每一点可微, 则称 $f(x,y)$ 在区域 D 上可微.

注 关于 d这个符号, 有如下几种认知,

1. 完全当做记号来用, 即只有全微分, 积分, 以及有些情况下的导数才使用, 实际上 B2 中也确实最好这么做.
2. 如上述表述中的, 作为线性主部存在,$\mathrm{d}z=A(x-x_0)+B(y-y_0)$. 但一般不用 $\mathrm{d}dz$ 去直接代替做运算.
3. 特殊的线性映射, 相当于认为 $\mathrm{d}z(\Delta x,\Delta y)\Big|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y$, 这是 B3 中的定义, 了解一下即可.
4. 一种特殊算子, 在 B2 的后续选讲课程中微分形式涉及到这一部分, 也是了解即可.

我们在 B2 中实际上可以按照第二种方式去理解, 但最好不要让 $\mathrm{d}z=A(x-x_0)+B(y-y_0)$ 这种形式出现, 因为这种表达方式和另外三种都有些冲突, 且容易出错. 实际上更多的当成完全的记号来使用会更好.

定理 7.1

1. 若 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微, 则 $f(x,y)$ 在 M_0 处连续. 反之未必.
2. 若 $z=f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处可微, 则 $f(x,y)$ 在 M_0 处可偏导. 反之未必.

证明

1. (a). 当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$, 有 $\begin{cases}\Delta x\to 0,\\ \Delta y\to 0;\end{cases}$ 而

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)=0$$

因此

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)$$

即有连续性.

(b). 反例:$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点处连续但不可微, 否则原点处可偏导.

2. (a).

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{A\Delta x+o(|\Delta x|)}{\Delta x}=A$$

因此 $f'_x(x_0,y_0)$ 存在, 且 $f'_x(x_0,y_0)=A$.

同理, 有 $f'_x(x_0,y_0)$ 存在,$f'_y(x_0,y_0)=B$. 故而可得偏导存在.

(b). 反例:$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点处可偏导但不连续, 故一定不可微.

例 7.3 证明:$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点处可偏导, 连续, 但不可微.

解

1.

$$\begin{aligned}0\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|&=\frac{|x||y|\cdot|x|}{x^2+y^2}\\&\leqslant\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)\cdot|x|}{x^2+y^2}\\&=\frac{|x|}{2}\to 0\end{aligned}$$

故得连续.

2.

$$f'_x(0,0)=\left(\frac{x^2\cdot 0}{x^4+0^2}\right)'_x\Big|_{x=0}=(0)'_x|_{x=0}=0$$

$$f'_y(0,0)=\left(\frac{0^2\cdot y}{0^4+y^2}\right)'_y\Big|_{y=0}=(0)'_y\Big|_{y=0}=0$$

故得可偏导.

3. 反证法: 假设在原点处可微. 则有

$$f(\Delta x,\Delta y)-0=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

结合偏导数可知上述等式可化为

$$\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=o(\rho)$$

即

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}}=0$$

但当

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{(\Delta x)^2\Delta y}{((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2k\Delta x}{((\Delta x)^2+k(\Delta x)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

与 k 有关, 故与极限存在唯一性矛盾, 因此可知原函数在原点不可微.

例 7.4 思考题 设 $u=f(x,y,z)=x^{y^z}+x^{a^z}+a^{y^z}+x^{y^a}+a^{a^z}(a>0,\text{常数})$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$, 及 u 在 $M(1,1,1)$ 处的全微分.

可不做在作业中, 发在群里即可.

✍ **作业** ex9.2:2(2)(5)(8),3,4,6,13(4)(6),16.