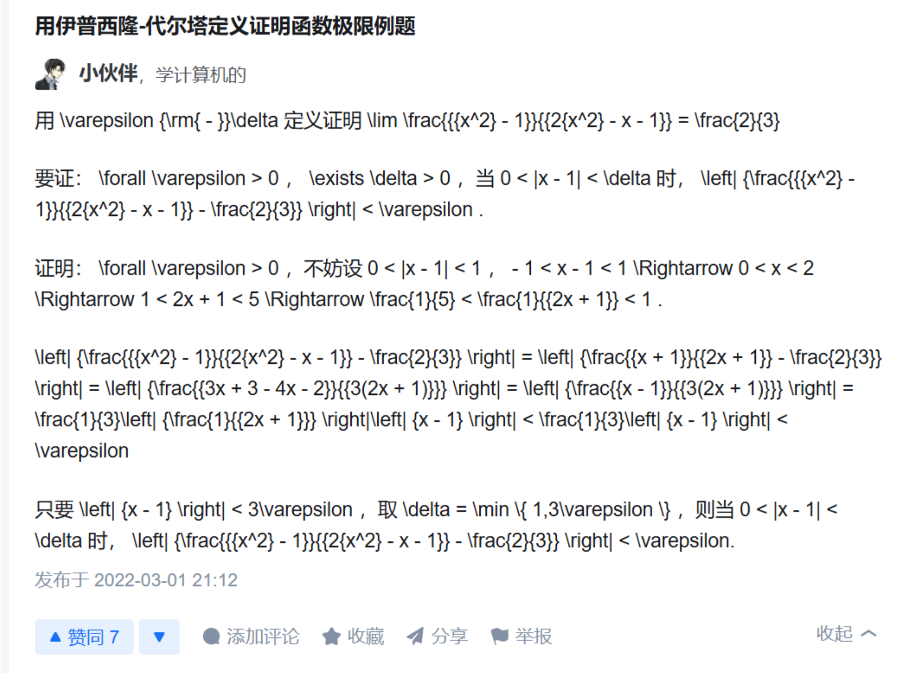
Tut 1

1.1 Latex

LaTeX 是一种基于文本的排版系统, 常用于学术论文、技术文档和书籍的排版. 它能帮助你精确控制文档格式, 尤其是在涉及数学公式时, 它比传统的文字处理软件（比如 Word）更加高效. 对于理工科的同学来说, 后期论文的编辑几乎离不开 LaTeX 这个排版系统.



用伊普西隆-代尔塔定义证明函数极限例题

小伙伴, 学计算机的

用 \varepsilon {\rm{ - }}\delta 定义证明 \lim \frac{{{x^2} - 1}}{{2{x^2} - x - 1}} = \frac{2}{3}

要证: \forall \varepsilon > 0， \exists \delta > 0，当 0 < |x - 1| < \delta 时， \left| {\frac{{{x^2} - 1}}{{2{x^2} - x - 1}} - \frac{2}{3}} \right| < \varepsilon .

证明: \forall \varepsilon > 0，不妨设 0 < |x - 1| < 1， - 1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow 1 < 2x + 1 < 5 \Rightarrow \frac{1}{5} < \frac{1}{{2x + 1}} < 1 .

\left| {\frac{{{x^2} - 1}}{{2{x^2} - x - 1}} - \frac{2}{3}} \right| = \left| {\frac{{x + 1}}{{2x + 1}} - \frac{2}{3}} \right| = \left| {\frac{{3x + 3 - 4x - 2}}{{3(2x + 1)}}} \right| = \left| {\frac{{x - 1}}{{3(2x + 1)}}} \right| = \frac{1}{3}\left| {\frac{1}{{2x + 1}}} \right|\left| {x - 1} \right| < \frac{1}{3}\left| {x - 1} \right| < \varepsilon

只要 \left| {x - 1} \right| < 3\varepsilon，取 \delta = \min \{ 1,3\varepsilon \}，则当 0 < |x - 1| < \delta 时， \left| {\frac{{{x^2} - 1}}{{2{x^2} - x - 1}} - \frac{2}{3}} \right| < \varepsilon.

发布于 2022-03-01 21:12

图 1.1: Latex

1. 当网络不好的时候, 经常能够看到刷新出来如图所示的公式, 比如上图, 可以认为这就是 LaTeX 的排版时未渲染时的效果.
2. 在专业的论文集成网站Arxiv上, 大部分的论文都是用 LaTeX 写的.
3. 大物实验的模板用 LaTeX 写起来会更加方便.

关于 LaTeX 的安装，初步使用可以参考文档 `readme.md`.

1.2 数学分析 B2 思路概括

数学分析 B2 主要围绕多元函数的极限、连续、可微、可积等性质展开, 在继承一元函数部分性质外, 我们会发现多元函数有很多在一元函数情况下不存在的新的现象、理论及性质. 一般来说, 这些新的现象、理论及性质一旦在二元或三元情况下存在或被证明, 则不难推广到更多元情形中而无需本质上的改变. 因此，基于本课程的定位, 我们以二元或三元情况讨论为主, 这样以便于我们借助直观来学习这些内容. 如果想更系统更深入地学习多变量这部分的理

论可以直接参考数学专业用的教材/参考书 (群文件里也有) 数学分析 B2 继承了数学分析 B1 的思路, 且为各个其他专业的学习奠定了基础, 如 Fourier 分析是对 B1 级数的推广, 而将会在信号与系统中用到.

大致而言, 数学分析 B2 的内容如下:

1. 空间解析几何: 这一部分主要讲的是空间中点、直线、平面的位置关系、方程以及它们之间的交点。你需要理解平面方程、直线方程以及它们的几何含义和相互关系。这一章只是带大家养成一些几何直观, 因此这一章要格外注重**向量的平行和垂直, 几何体的法向量**.
2. 多变量微分: 在这一部分中, 我们希望将单变量的求导微分向多变量微分推广.
   单变量的导数定义为:
   $$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}.$$
   看着这个我们产生了很多疑问, 究竟应该如何推广呢? 具体而言, 我们遇到了以下问题:
   (a). 多变量中 $f(x)$ 应该是什么? 我们接触过含参数 a 的 $f(x)$, 他能视为一个多变量函数吗?
   (b). 右式表示多变量函数的极限, 多变量函数的极限该如何定义? 我们在定义极限的时候 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的附近如何定义?
   (c). 多变量函数的连续性该如何定义?
   (d). 在单变量导数中, 当 $f(x)$ 向两侧的导数均存在且相等时, 定义这一点可导. 在多变量中我们可以定义向各个方向的导数均存在且相等时才可导吗?
   (e). 在单变量微分中, 一点可微定义为: 可以将函数的增量用自变量的线性增量近似, 即 $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$. 那多变量中可以写为 $\Delta y = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_n\Delta x_n + o(\sqrt{(\Delta x_1)^2 + \cdots + (\Delta x_n)^2})$ 吗?

   我们将逐渐解决这一系列问题, 从而定义出多变量的微分.
   - 这一章的前期我们会讲到如何使用多变量函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来构造高维度的几何体, 这实际上就是将, 空间解析几何中的 $2x + y + z = 0$ 确定了空间中的一个平面, 这一概念抽象化.
   - 在这一章的后期我们就可以用多变量的微积分可以研究在非平凡的几何体 (比如球面) 上定义的函数的最值和极值问题.
3. 多变量积分: 和单变量一样，我们仍然想通过 Riemann 和定义积分。只要函数足够“规整”使其可积，我们的的难点落在了“分割”这一步上。实轴上，我们可以将积分区域分成小区间。类似地，高维的积分是在闭的矩形、长方体这样的集合上定义的。接下来，只要集合够好，那么用这些形状去逼近整个集合，就得到了这个集合上的积分。
4. Fourier 分析: 幂级数的基本形式是
   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x - a_n)^n$$
   其中，c_n 是通过泰勒展开或者类似方法得到的系数。幂级数能够将很多函数展开成无穷级数的形式，且在函数的定义域内（尤其是围绕某一点的邻域内）具有良好的收敛性和

表示能力。

然而，幂级数存在一些限制：

- **收敛性问题**：幂级数的收敛域是有限的，某些函数在其定义域的边界可能无法表示为幂级数。例如，某些具有不连续点、跳跃或其他类型奇异性的函数，或者在边界处定义不良的函数，幂级数无法有效地表示它们。
- **局部表达能力**：幂级数主要适用于在某一点处的展开，并不适合在全域上表示周期性或具有其他特殊结构的函数。

傅里叶分析的基本思想是将一个函数表示为三角函数（正弦函数和余弦函数）的线性组合, 傅里叶分析的优势主要体现在以下几点：

- **适用于周期性函数**
  傅里叶分析特别适用于周期性函数，尤其是周期函数的表示。无论一个函数在定义域内是否具有复杂的行为，傅里叶分析都能将其分解为不同频率成分的和，这对于周期信号（如声音信号、电磁波等）特别重要。
- **对不规则性具有更强的适应性**
  傅里叶分析能够有效地处理包含突变、间断、非光滑等不规则性的函数。相比于幂级数，傅里叶级数可以适应更加广泛的函数类型。即使在函数具有间断或其他不规则特性时，傅里叶级数也能够提供有效的近似和表示。
- **全局表示**
  傅里叶级数能够在全局范围内表示一个函数，而不仅仅是局部范围或某个点的展开。傅里叶级数提供了一种更加适合整体分析和处理的表示方式，尤其适用于周期性现象。

5. 反常积分:
   - 级数是离散的求和，积分是连续的求和。因此，积分（无穷积分与瑕积分）的敛散性判别法应当和级数如出一辙。事实的确如此，数项级数与反常积分、函数项级数与含参变量积分的理论完全对应。
   - 除此之外，通过添加参数的方法，我们可以计算诸如 Gauss 积分、Fresner 积分等无法用初等方法算出来的积分。
   - 进一步，我们在数学分析 B1 中学到常义积分可以定义函数，那广义积分必然也可以。通过这种方式，我们可以将阶乘光滑延拓到 Gamma 函数。另一个 Beta 函数本质上也是 Gamma 函数，可用于简化一类三角积分的计算。

关于数学分析 B2 学习的建议

数学分析 B2 所涉及到的知识点非常之多, 琐碎, 章节之间的联系比 B1 还要松散, 而且很多内容一开始接触并不容易理解. 同时这门课的很多内容和结论都会直接用于数学的后续课程和其他学科中, 而不仅仅是应付考试. 所以关于 B2 的学习我并不主张过度刷题, 而是更倾向把教材 (包括参考书) 和老师讲授的内容反复咀嚼消化, 把概念理解清楚 (当然也不要一直拘泥

于细节中), 建成自己的知识体系.

1.3 空间解析几何

1.3.1 二重外积

定义 1.1 (叉乘)

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$, 则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}-(x_1z_2-x_2z_1)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}=(y_1z_2-y_2z_1,-(x_1z_2-x_2z_1),x_1y_2-x_2y_1)$.

命题 1.1

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$, 其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角.

注 叉乘是一种运算, 吃进去两个向量, 吐出来一个向量. 叉乘运算时**反对称**的, 交换时要加负号.

注 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 表示的是向量 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. 从线性代数 (或者从更规范的表达上),$\boldsymbol{a},\boldsymbol{x},\boldsymbol{i}$ 都应该写为列向量的形式, 但是数学分析这里省略了转置符号以使形式更加简洁.

$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 有时也会写为 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$, 前者强调是在三维空间下, 后者更符合线性代数的书写习惯.

以下我们在标准正交基 $\{\boldsymbol{e_1},\boldsymbol{e_2},\boldsymbol{e_3}\}$ 下进行：

我们已经知道，向量的内积运算等式 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 是未必成立的（详见教材习题 8.1.3(4)），现在我们来探讨向量的外积运算是否满足结合律。回答此问题之前，我们先来探讨二重外积 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 的几何意义。

不妨设，$\boldsymbol{c}$ 不共线，从外积的几何意义知道，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 产生于由 $\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 形成的平面 π。而 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直，因此 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 在平面 π 内，即存在 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=x_1\boldsymbol{b}+x_2\boldsymbol{c}$ 的值。

命题 1.2 (二重外积公式)

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

证明 设 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e_1}+a_2\boldsymbol{e_2}+a_3\boldsymbol{e_3},\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e_1}+b_2\boldsymbol{e_2}+b_3\boldsymbol{e_3},\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{e_1}+c_2\boldsymbol{e_2}+c_3\boldsymbol{e_3}$。我们已知

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(b_2c_3-b_3c_2)\boldsymbol{e_1}+(b_3c_1-b_1c_3)\boldsymbol{e_2}+(b_1c_2-b_2c_1)\boldsymbol{e_3}.$$

设 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=d_1\boldsymbol{e_1}+d_2\boldsymbol{e_2}+d_3\boldsymbol{e_3}$, 则

$$\begin{aligned} d_1 &= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ &= b_1(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} - a_1c_1) - c_1(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} - a_1b_1) \\ &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_1. \end{aligned}$$

同理

$$d_2 = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2, \quad d_3 = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_3.$$

因此

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

由二重外积公式和外积的反交换律，得

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}.$$

又因为等式 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 未必成立，故等式 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ 未必成立，向量的外积运算不满足结合律。

我们下面来看几个二重外积公式的应用：

例 1.1 若 $|\boldsymbol{x}| = 0$，证明：$\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$ 共线 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 共线。

证明 利用二重外积公式，我们有

$$\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = 0 \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow |\boldsymbol{x}|^2\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}.$$

这意味着 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 共线。

例 1.2 证明 Jacobi 等式:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = 0.$$

证明 利用二重外积公式，我们有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}, \\ \boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) &= (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}, \\ \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}. \end{aligned}$$

将上述三等式相加即得 Jacobi 等式.

例 1.3 记 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$。证明：对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2.$$

证明

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\
=&(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\
=&\{[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]\boldsymbol{b}=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}\}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\
=&[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}]\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\
=&(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2.
\end{aligned}
$$

定理 1.1 (Lagrange 恒等式)

对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$, 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}).$$

证明 利用混合积的性质和二重外积公式，我们有

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}))\\
&=\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}]\\
&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).
\end{aligned}
$$

因此得证。

例 1.4 证明: 对任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$, 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=0.$$

证明 利用 Lagrange 恒等式，我们有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}),$$

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}),$$

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

对上述三个式子相加，得到

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{d})=0.$$

因此得证。

1.3.2 线与面

定义 1.2

向量 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$ 的方向余弦为:

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$
$$\cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

♣

直线方程

过 (x_0,y_0,z_0), 方向量为 (a,b,c) 的直线方程可写作以下形式

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$
$$r(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a,b,c),$$

$$x=x_0+at \quad y=y_0+bt \quad z=z_0+ct$$

也可以写成两平面交线的形式，这时方向量为两个平面法向量的叉乘。

注 这里的第一行的形式特别指 $abc\neq 0$ 的情况，若来一项为 0，比如 $c=0$，则去掉某项，另外一行写为 $z=z_0$。

平面方程

$$ax+by+cz+d=0$$

其法向量为 (a,b,c), 且注意到“哪个顶点系数为 0 平面就与哪个轴平行”。

旋转曲面

绕坐标轴得到的旋转曲面方程形如

$$\text{绕}x\text{ 轴}: \quad F(x,\sqrt{y^2+z^2})=0,$$
$$\text{绕}y\text{ 轴}: \quad F(y,\sqrt{x^2+z^2})=0,$$
$$\text{绕}z\text{ 轴}: \quad F(z,\sqrt{x^2+y^2})=0.$$

1.3.3 解题技巧

求方程

平面想办法计算出法向量 (a,b,c), 设平面方程为 $ax+by+cz+d=0$, 再利用其它条件求出 d。

直线想办法求出方向向量，再利用其它条件得到直线上一点即可。

求夹角

两平面夹角即法向量夹角及其补角。

直线与平面夹角

$$\theta=\arcsin\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{n}|}$$

求距离

点到平面的距离

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

两平行平面的距离

$$\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

两平行直线的距离在两直线上各取一点 M_1,M_2, 则距离为

$$\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}$$

两异面直线的距离在两直线上各取一点 M_1,M_2, 设两直线的方向向量分别为 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$, 则距离为

$$\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}$$

求投影

点在直线上的投影待定系数设出直线上一点，再利用内积为 0, 得到投影。

直线在平面上的投影投影的方向向量为

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a})$$

若直线与平面相交，则代入交点；若平行，则在平面上设出一点，与原直线上一点连线，得到的向量垂直于 $\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a}$。

1.4 习题讲解

✍ **习题 8.2.2** 试求通过点 $M_1(2,-1,3)$ 和 $M_2(3,1,2)$ 且平行于向量 $\boldsymbol{v}=(3,-1,4)$ 的平面方程。

解 (法一)

平面平行于 $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,2,-1),\boldsymbol{v}=(3,-1,4)$, 故平面的一个法向量为 $\overrightarrow{M_1M_2}\times\boldsymbol{v}=(1,-1,-1)$, 故平面方程可以写为

$$x-y-z=D.$$

代入 M_1 得 $D=0$, 故平面方程为 $x-y-z=0$.

(法二) 设平面方程为 $ax+bx+c+d=0$，则

$$\begin{cases}2a-b+3c+d=0\\3a+b+2c+d=0\\3a-b+4c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c=0\\b=c\\d=0\end{cases}$$

故平面方程为 $x-y-z=0$.

✍ **习题 8.2.3** 设平面过点 $(5,-7,4)$ 且在 x,y,z 三轴上的截距相等，求平面方程。

解 设平面方程为 $Ax+By+Cz=D$.

当 $D=0$ 时, 平面过点 $(5,-7,4)$, 故 $5A-7B+4C=0$, 解得 $A=4t,B=4s,C=-5t+7s$, 平面方程有无穷多个, 形如 $4tx+4sy-(5t-7s)z=0$, 其中 t,s 为任意实数.

当 $D\neq 0$ 时, 截距相等推出平面的一个法向量为 $(1,1,1)$, 代入点 $(5,-7,4)$, 得平面方程为

$$x+y+z=2.$$

✍ **习题 8.15.(1)** 分别求出满足下列各条件的直线方程。

1. 过点 $(0,2,4)$ 且与平面 $x+2z=1,\ y-3z=2$ 平行;

解 两平面的法向量为 $\mathbf{n_1}=(1,0,2),\mathbf{n_2}=(0,1,-3)$，则

$$\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}=(-2,3,1)$$

设直线的参数方程为 $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+(-2,3,1)t$, 代入点 $(0,2,4)$ 可解出 $x_0=0,y_0=2,z_0=4$. 因此直线方程为

$$(x,y,z)=(0,2,4)+(-2,3,1)t$$

1.5 补充题

这三题与数学分析 B2 的后续学习几乎没有关系, 复习的时候请跳过这个.

✍ **习题** 教材综合习题 8 T1 的推广

证明：点 M 在 $\triangle ABC$ 内（包括三条边）的充分必要条件是：存在非负实数 λ,μ,γ, 使得

$$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC},\quad \lambda+\mu+\gamma=1,$$

其中 O 是空间中任意取定的一点。

证明 先证明命题（证明请自行完成）：点 M 在 $\triangle ABC$ 内（包括三条边）的充分必要条件是：存在非负实数 λ,μ, 使得

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC},\quad \lambda+\mu\leq 1.$$

然后在上述等式两边同时加上向量 $\overrightarrow{OA}$ 即可。

✍ 习题 二重外积公式 证明: 对任意向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, 有

$$[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})] \times [\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})] = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).$$

证明 利用二重外积公式及教材习题 8.1.12, 我们有

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})] \times [\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})] &= [(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - |\boldsymbol{a}|^2 \boldsymbol{b}] \times [[\boldsymbol{b}]^2 \boldsymbol{a} - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{b}] \\ &= |\boldsymbol{a}|^2 |\boldsymbol{b}|^2 (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \\ &= |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

✍ 习题 有点难 已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 不共线，且 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + c \times \boldsymbol{a} \neq 0$. 证明: 存在不全为 0 的实数 k_1, k_2, 使得 $k_1 \boldsymbol{a} + k_2 \boldsymbol{b} + (k_1 + k_2)\boldsymbol{c} = 0$.

证明 对等式 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + c \times \boldsymbol{a}$ 两边同时点乘 $\boldsymbol{c}$, 得

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} = 0.$$

即 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 共面, 存在不全为 0 的 k_1, k_2, k_3, 使得 $k_1 \boldsymbol{a} + k_2 \boldsymbol{b} + k_3 \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, 故

$$(k_1 \boldsymbol{a} + k_2 \boldsymbol{b} + k_3 \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \Rightarrow k_2 \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + k_3 \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}.$$

同理, 有 $k_1 \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + k_3 \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, 并利用 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$, 得

$$(k_1 - k_3)\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} - k_3 \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}.$$

两式相加, 由 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ 知, $k_3 = k_1 + k_2$. 即证.