第4讲：二次曲面与旋转曲面 (rotation surface)

(一) 二次曲面 (quadric)：

(1) 球面Σ：设球心是 $M_0(a,b,c)$，半径为 $R>0$ 的球面Σ上任一点的坐标为 $Q(x,y,z)$，则 $|\overrightarrow{M_0Q}|^2=R^2 \Leftrightarrow$

$$|(x-x_0,y-y_0,z-z_0)|^2=R^2 \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2 \qquad (※1)$$

(※1) 称为球面Σ的标准方程，$R=0$ 时，球面退缩为一点。

(※1) 可化为一般式球面方程：

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \qquad (※2)$$

(※2) 为球面，当且仅当 $\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2)-D=R^2\geq 0$，

(※2) 配方：$(x+\frac{A}{2})^2+(y+\frac{B}{2})^2+(z+\frac{C}{2})^2=\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2)-D \triangleq R^2 \geq 0$)

(2) 曲面的一般方程：$F(x,y,z)=0$ —— 隐式曲面，

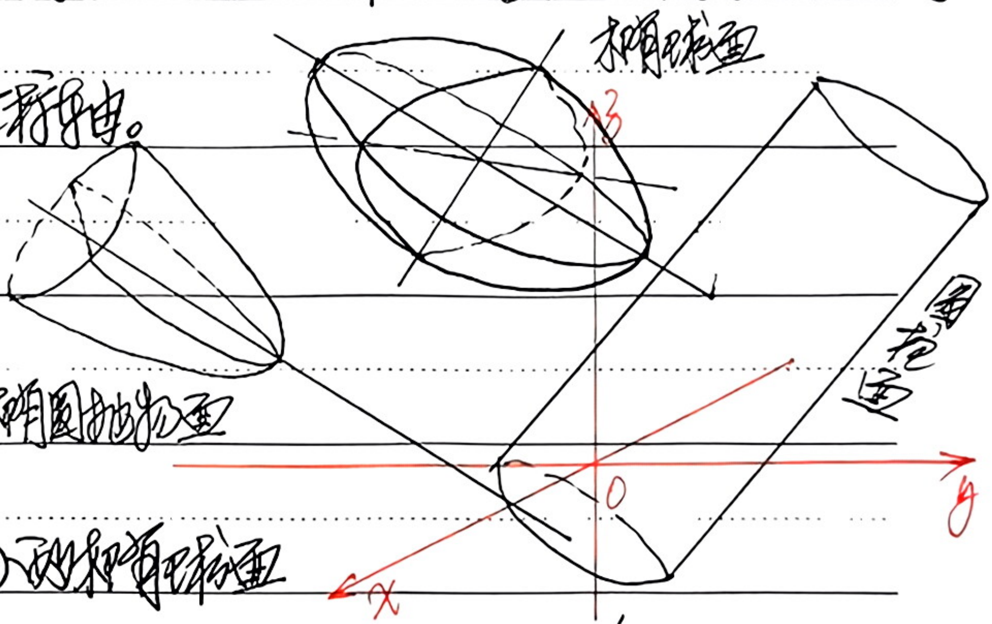
若 $F(x,y,z)=0$ 可化为 $z=f(x,y)$，则称 $z=f(x,y)$ 为显式曲面。

例1. $x^2+y^2+z^2-1=0$ 为隐式球面；$z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$，$x^2+y^2\leq 1$

为显式上半球面。

当 $F(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Jz+K$

且 $(A,B,C,D,E,F)\neq 0=(0,0,0,0,0,0)$ 时，$F(x,y,z)=0$ 为二次曲面。当 $D=E=F=0$ 且 $A^2+B^2+C^2>0$ 时，二次曲面的对称轴都平行于坐标轴，当 $D^2+E^2+F^2>0$ 时，二次曲面的对称轴不都平行于坐标轴。

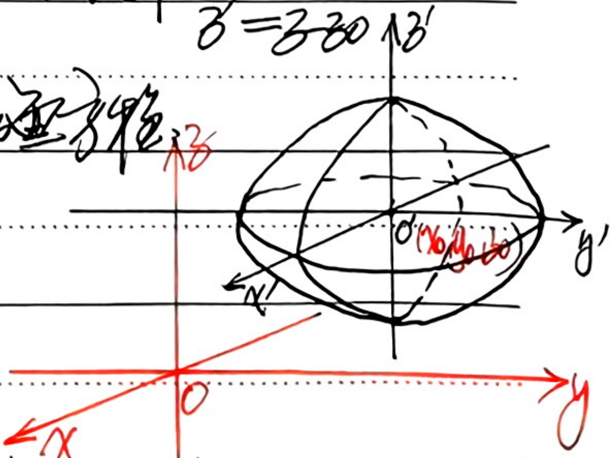


(3) 中心在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的椭球面

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$ 经坐标平移 $\begin{cases} x'=x-x_0 \\ y'=y-y_0 \\ z'=z-z_0 \end{cases}$ 可化为

$O\text{-}x'y'z'$ 坐标系中的标准椭圆球面方程。

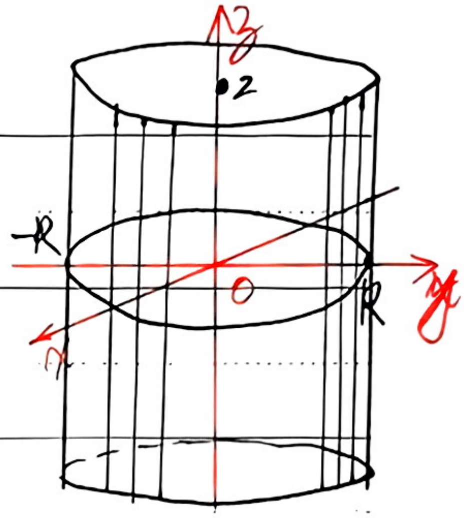
$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1 \quad (标)$$



$$z=z_0\pm c\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}}$$

取"+"时为上半椭球面，取"-"时为下半椭球面 (2).

(4). 圆柱面: $x^2+y^2=R^2$ $(R>0)$. (如图)



圆柱面是由直线连续移动构成的，这类曲面我们称之为直纹面。(ruled surface)

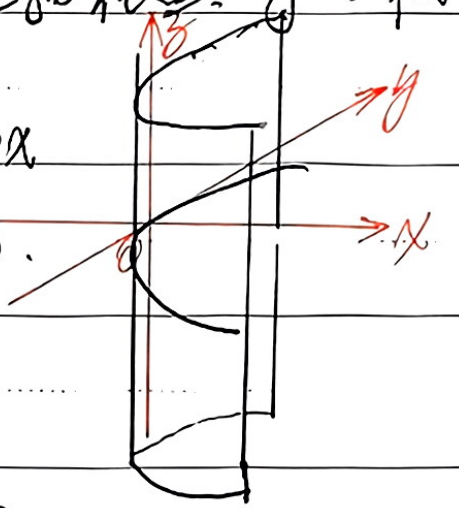
若要表示 xoy 平面中的圆 $x^2+y^2=R^2$,

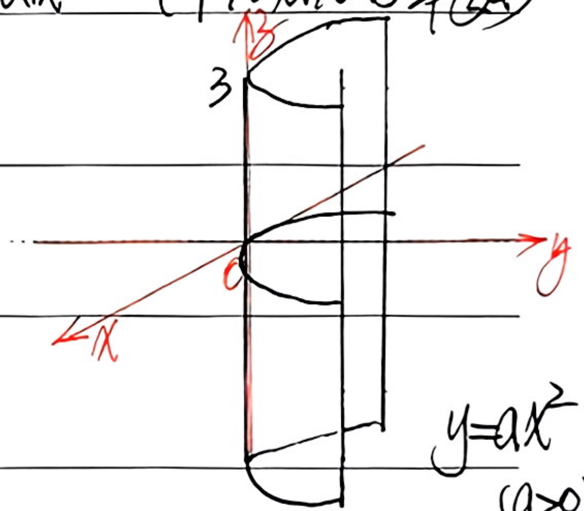
则应写成 $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{cases}$ 即圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与平面 $z=0$ 的交线; 同理: $\begin{cases} x^2+y^2=R^2 \\ z=2 \end{cases}$ 是空间中 $z=2$ 的圆周。

(5). 抛物柱面: $y^2=2px$ 及 $y=ax^2$ $(p\neq 0, a\neq 0$ 为常数$)$

$y^2=2px$

$(p>0)$.



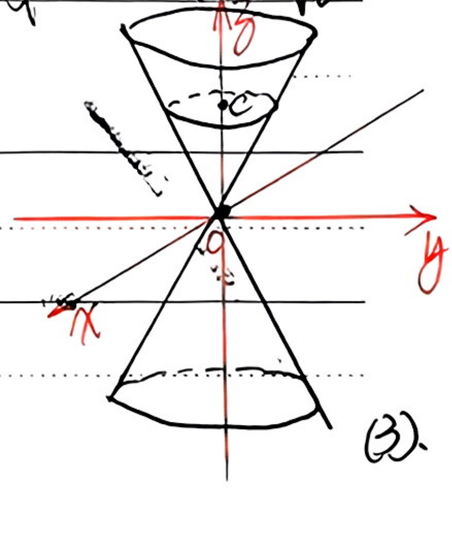


$y=ax^2$

$(a>0)$

而 $\begin{cases} y^2=2px \\ z=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y=ax^2 \\ z=3 \end{cases}$ 是空间中的抛物线——交线式。

(6) 圆锥面 $z^2=a^2(x^2+y^2)$ $(a>0)$

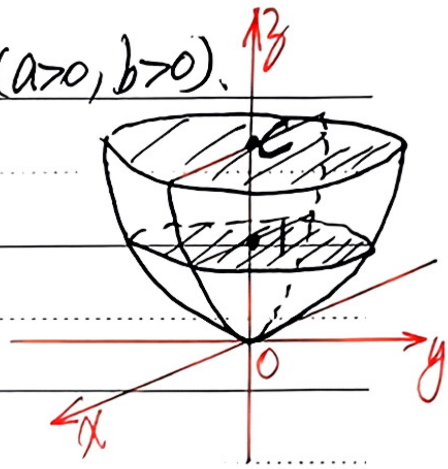


而 $\begin{cases} z^2=a^2(x^2+y^2) \\ z=c \end{cases}$ 为空间的圆周;

$\begin{cases} z=\pm ay \\ x=0 \end{cases}$ 是空间的相交直线。

(3).

(7) 椭圆抛物面: $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0, b>0)$.

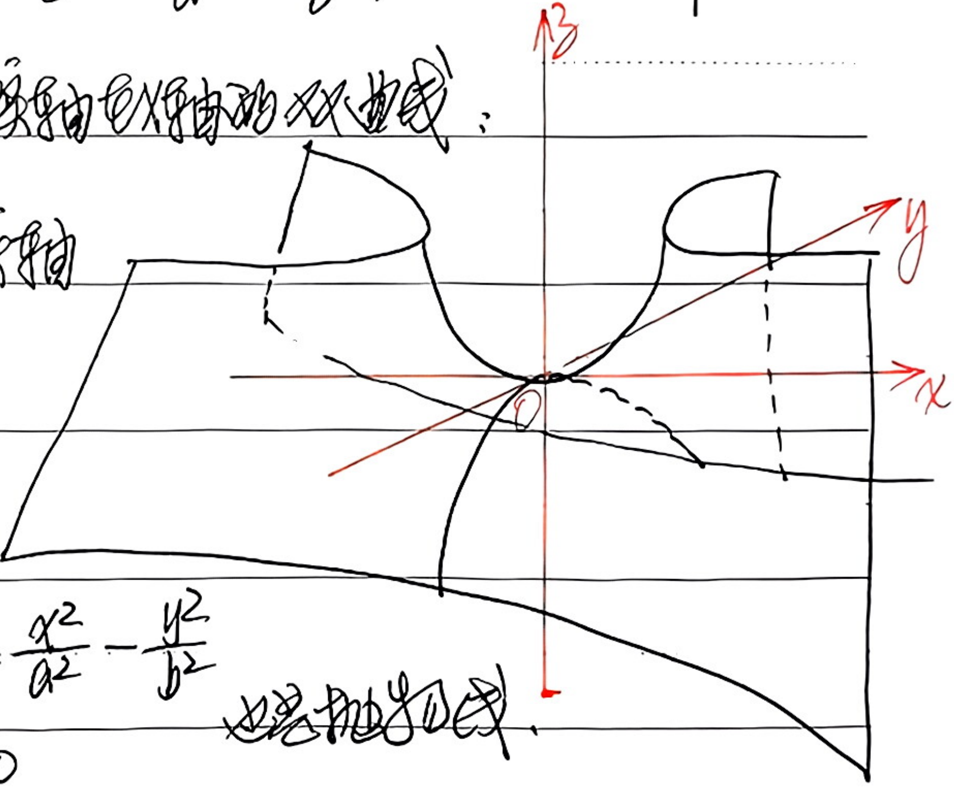


$\begin{cases} z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \\ z=z_0>0 \end{cases}$ 都是空间中的椭圆:

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{z_0})^2}+\frac{y^2}{(b\sqrt{z_0})^2}=1$$

其所围截面积为 $\pi(a\sqrt{z_0})(b\sqrt{z_0})=\pi ab z_0$.

(8) 双曲抛物面: $z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ $(a>0, b>0)$ (即马鞍面).



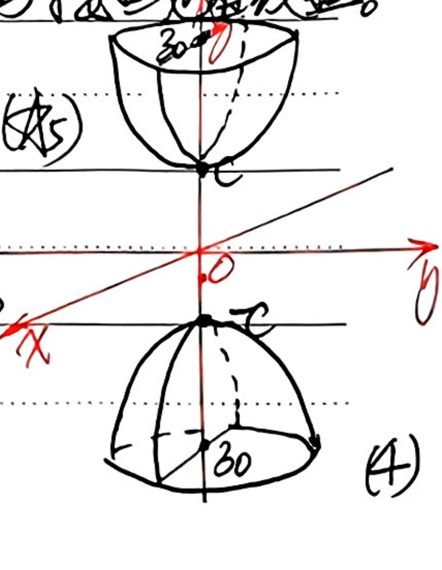
$z=z_0>0$ 时,是一族实轴在 x 轴上的双曲线;

$z=z_0<0$ 时,是一族实轴在 y 轴上的双曲线.

$\begin{cases} z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \\ x=0 \end{cases}$ 是抛物线, $\begin{cases} z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} \\ y=0 \end{cases}$ 也是抛物线.

故将双曲抛物面称马鞍面。另外,马鞍面是直纹面。

(9) 双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ (如图)

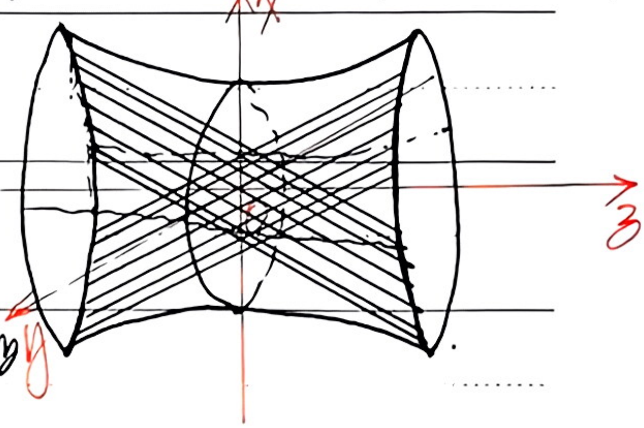


从 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1\geq 0 \Longrightarrow |z|\geq c$ 才有图像。

且 $z=z_0>c$ 或 $z=z_0<-c$ 时,都是椭圆。

(10) 单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (如图)

从 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}+1\geq 0$, $\forall z\in R$ 知, 对 $\forall z\in R$, 都有曲面围绕.

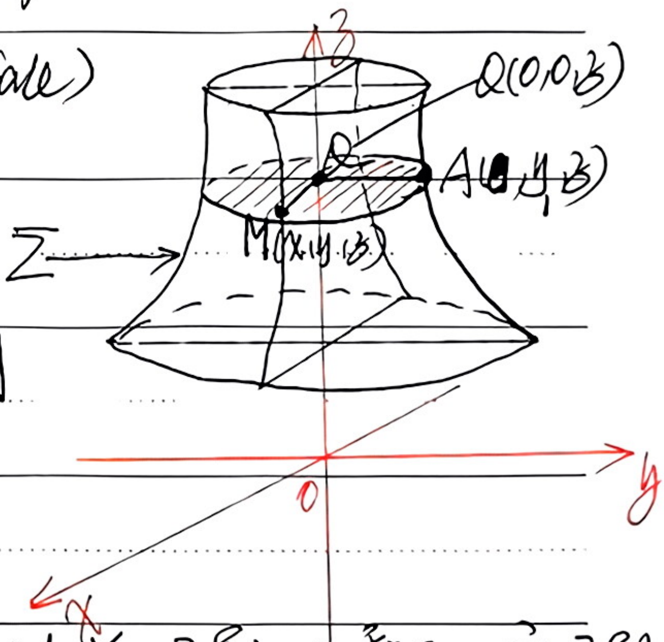


任取 $z_0\in R$, $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}+1\\ z=z_0\end{cases}$

都是椭圆, 即用垂直于oz轴的平面去切单叶双曲面, 截线都是椭圆.

另外, 单叶双曲面是由直线连续移动构成的直纹面.

(二) 旋转曲面 (rotation surface)



设L: $z=f(y)$ 是一条平面连续曲线, 将L绕oz轴旋转一周所得的旋转曲面记作Σ.

设 $M(x,y,z)$ 是Σ上任一点, 过点M作oz轴的垂面交oz轴于 $Q(0,0,z)$, 交曲线L于 $A(0,y_1,z)$ 则 $|QM|^2=|QA|^2 \Rightarrow$

$x^2+y^2+0^2=0^2+y_1^2+0^2$ 即 $y_1^2=x^2+y^2 \Rightarrow y_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

故 $z=f(|y|)=f(\pm\sqrt{x^2+y^2})$ 为三维方程，即曲线 $z=f(y)$ 绕 z 轴旋转一周的旋转曲面中，z 保持不变，而另一变量用 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 代替。同理，曲线 $z=f(y)$ 绕 y 轴旋转一周的曲面，为 $f(y)=\pm\sqrt{x^2+z^2}$。

(三) 例题：

例1. 证明 (1) 马鞍面：$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 是直纹面；

(2) 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 是直纹面.

证(1)：马鞍面可化为 $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=z \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda\neq 0\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda}\end{cases}$

当 $\lambda\neq 0$ 连续变化时，这一族的直线 L：$\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\lambda\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\lambda}\end{cases}$ 就在空间中不断移动，最后得到了马鞍面，因此，马鞍面是直纹面。

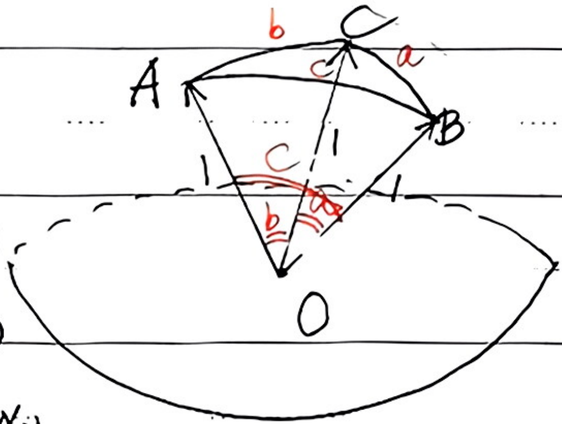
证(2)：从 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right)$

$\Rightarrow \begin{cases}\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1-\frac{x}{a}\right) & (\lambda\neq 0 \text{ 常数}) \text{ —— 这一族直线}\\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{x}{a}\right)\end{cases}$

即单叶双曲面是由一族直线连续运动构成的，故为直纹面。

例2、球面三角形的余弦定理（P125/6）：

设单位球面三角形ABC是过球心$O(0,0,0)$的三个平面π_1,π_2,π_3与单位球面$\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$相交所成的球面上的$\triangle ABC$，如图所示：



则有：

$$\begin{cases} \cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\angle A, & (*1)\\ \cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos\angle B, & (*2)\\ \cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\angle C., & (*3)\end{cases}$$

称为球面三角形$\triangle ABC$的余弦定理.

下面证(*1)，(*2)，(*3)可同样证。

设$\vec{OB},\vec{OC}$所确定平面为π_1，法向量$\vec{n}_1=\vec{OB}\times\vec{OC}$；$\vec{OC},\vec{OA}$所确定的平面为$\pi_2$，$\vec{n}_2=\vec{OA}\times\vec{OC}$，$\vec{OA},\vec{OB}$所确定的平面为$\pi_3$，$\vec{n}_3=\vec{OA}\times\vec{OB}$.

则
$$\cos\angle A=\cos(\widehat{\vec{n}_2,\vec{n}_3})=\frac{\vec{n}_2\cdot\vec{n}_3}{|\vec{n}_2||\vec{n}_3|}=\frac{(\vec{OA}\times\vec{OC})\cdot(\vec{OA}\times\vec{OB})}{|\vec{OA}\times\vec{OC}|\,|\vec{OA}\times\vec{OB}|},\quad (*4)$$

依向量乘法的Lagrange恒等式：

$$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\cdot(\vec{\gamma}\times\vec{\delta})=(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\beta}\cdot\vec{\delta})-(\vec{\alpha}\cdot\vec{\delta})(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})\quad (*5)$$

又 $|\vec{OA}\times\vec{OC}| = |\vec{OA}||\vec{OC}|\sin(\vec{OA},\vec{OC}) = 1\cdot 1\cdot \sin b$, $|\vec{OA}\times\vec{OB}| = |\vec{OA}||\vec{OB}|\sin(\vec{OA},\vec{OB})$

$= 1\cdot 1\cdot \sin c$, $(\vec{OA}\times\vec{OC})\cdot(\vec{OA}\times\vec{OB}) = (\vec{OA}\cdot\vec{OA})(\vec{OC}\cdot\vec{OB}) - (\vec{OA}\cdot\vec{OB})(\vec{OC}\cdot\vec{OA})$

$= (|\vec{OA}||\vec{OA}|\cos 0)(|\vec{OC}||\vec{OB}|\cos a) - (|\vec{OA}||\vec{OB}|\cos c)(|\vec{OC}||\vec{OA}|\cos b)$

$= 1\cdot\cos a - \cos c\cos b$

代入(式7):

$$\cos\angle A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c} \Leftrightarrow \cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\angle A$$

对于Lagrange恒等式，只要设 $\begin{cases}\vec{\alpha} = (a_1, b_1, c_1)\\ \vec{\beta} = (a_2, b_2, c_2)\\ \vec{a} = (x_1, y_1, z_1)\\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)\end{cases}$ 则可写出

(式8)的左边与右边是同个数。

例3. 将曲线L: $\begin{cases}\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1\\ x = 0\end{cases}$ 分别绕y轴、z轴旋转

一周所得旋转曲面.

解(1) 绕y轴旋转，y保持不动，将L中的z改成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$

则旋转曲面Σ_1为: $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{(\pm\sqrt{x^2+z^2})^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

解(2) 绕z轴旋转，z保持不动，将L中的y改成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$.

则旋转曲面Σ_2为: $\dfrac{(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$. (8)

Σ_1, Σ_2 都是旋转椭球面。

例4、求直线L：$\begin{cases} y=kx & (k\neq 0,\text{常数}) \\ z=0 \end{cases}$ 分别绕x轴、y轴旋转一周的旋转曲面Σ_1, Σ_2.

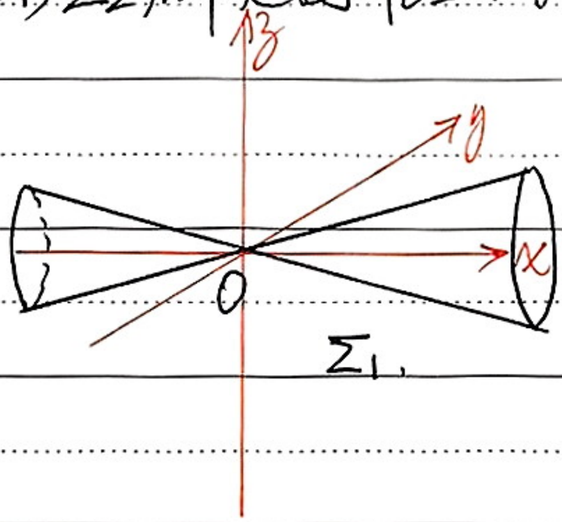
解(1)：绕x轴旋转时，x保持不变，y改写成：$\pm\sqrt{y^2+z^2}$，

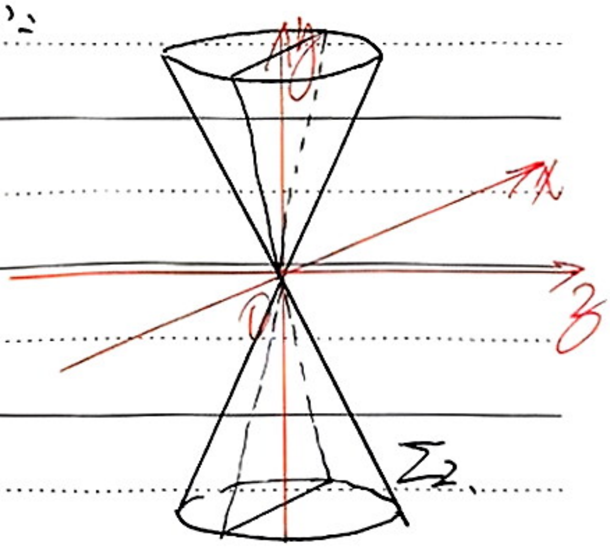
则 Σ_1：$\pm\sqrt{y^2+z^2}=kx$ 即 Σ_1：$y^2+z^2=k^2x^2$，$(k\neq 0)$

解(2)：绕y轴旋转时，y保持不变，x改为$\pm\sqrt{x^2+z^2}$，

则 Σ_2：$y=k(\pm\sqrt{x^2+z^2})$ 即 Σ_2：$y^2=k^2(x^2+z^2)$，$(k\neq 0)$

Σ_1, Σ_2都是圆锥面，如图所示：





作业：Ex8.3/1；2；3.