

## Lec 13 多元函数的 Taylor 公式及其应用

### 13.1 二元函数的 Taylor 公式

设  $D \subset \mathbb{R}^2$ , 且  $D$  是凸区域, 即

$$\forall x, y \in D, \lambda x + (1 - \lambda)y \in D, \forall \lambda \in [0, 1]$$

或者说  $D$  中任两点都可以用  $D$  中的直线连接起来. 设  $z = f(x, y) \in C^{n+1}(D)$ ,  $M_0(x_0, y_0) \in D$ ,  $M(x, y) = M(x_0 + h, y_0 + k) \in D$ , 点  $Q(x_1, y_1)$  在  $M_0$  和  $M$  之间, 即  $Q$  在  $M_0$  和  $M$  的连线上. 由  $\overrightarrow{M_0Q} \parallel \overrightarrow{M_0M}$ , 即

$$(x_1 - x_0, y_1 - y_0) \parallel (h, k) \Leftrightarrow \frac{x_1 - x_0}{h} = \frac{y_1 - y_0}{k} := t \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_0 + th, \\ y_1 = y_0 + tk. \end{cases}, t \in [0, 1]$$

得

$$f(Q) = f(x_1, y_1) = f(x_0 + th, y_0 + tk) := \varphi(t) \in C^{n+1}[0, 1]$$

利用  $\varphi(t)$  在  $t = 0$  处的  $n$  阶 Taylor 公式

$$\varphi(t) = \sum_{m=0}^n \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} t^m + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{n+1}, \quad t \in [0, 1], \theta \in (0, 1)$$

取  $t = 1$ , 得到

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x, y) = \varphi(1) = \sum_{m=0}^n \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= f(M_0) \\ \varphi'(0) &= (f'_x(x_0 + ht, y_0 + kt)h + f'_y(x_0 + ht, y_0 + kt)k)_{t=0} \\ &= \left( h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{M_0} := \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(M_0) \\ \varphi''(0) &= \left( \frac{\partial^2 f(x_0 + ht, y_0 + kt)}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0 + ht, y_0 + kt)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(x_0 + ht, y_0 + kt)}{\partial y^2} k^2 \right)_{t=0} \\ &= \left( h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} hk + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(M_0) \\ &:= \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(M_0) \end{aligned}$$

以此类推, 得到

$$\varphi^{(m)}(0) = \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(M_0), m = 0, 1, 2, \dots, n$$

代入 Taylor 公式, 得到

$$f(x, y) = f(x_0 + h, y_0 + k) = \varphi(1) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(M_0) + R_n$$

其中

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

其中  $\theta \in (0, 1)$ ,  $\begin{cases} h = x - x_0, \\ k = y - y_0. \end{cases}$

这即为二元函数  $f(x, y)$  在点  $M_0(x_0, y_0)$  处的  $n$  阶 Taylor 公式.

**例 13.1** 可微函数  $z = f(x, y)$  在点  $M_0(x_0, y_0)$  的 0 阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)k + f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h \\ &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))(x - x_0) \\ &\quad + f'_y(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))(y - y_0) \end{aligned}$$

也就是我们可以得到二元函数  $z = f(x, y)$  的微分中值定理

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))(x - x_0) \\ &\quad + f'_y(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))(y - y_0) \end{aligned}$$

**例 13.2** 设  $z = f(x, y) \in C^3(D)$ , 则  $f(x, y)$  在点  $M_0(x_0, y_0)$  的二阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2) + o(\rho^2) \end{aligned}$$

其中  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{h^2 + k^2}$ .

设  $f'_x(M_0) = 0 = f'_y(M_0)$ ,  $f''_{xx}(M_0) = A$ ,  $f''_{xy}(M_0) = B$ ,  $f''_{yy}(M_0) = C$ , 则

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= \frac{1}{2} (A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2) + o(\rho^2) \\ &= \frac{A}{2} \left[ \left( x - x_0 + \frac{B}{A}(y - y_0) \right)^2 + \frac{AC - B^2}{A^2}(y - y_0)^2 \right] + o(\rho^2) \end{aligned}$$

由此进行分析

1. 当  $\begin{cases} A > 0, \\ AC - B^2 > 0 \end{cases}$  时,  $f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq 0$  恒成立, 此时  $f(x, y)$  在  $M_0$  处取得极小值.
2. 当  $\begin{cases} A < 0, \\ AC - B^2 > 0 \end{cases}$  时,  $f(x, y) - f(x_0, y_0) \leq 0$  恒成立, 此时  $f(x, y)$  在  $M_0$  处取得极大值.
3. 当  $AC - B^2 < 0$  时,  $f(x_0, y_0)$  不是  $f$  的极值.

## 定理 13.1

设  $z = f(x, y) \in C^2(D)$ ,  $D$  是凸区域,  $M_0(x_0, y_0) \in D$  且  $M_0$  是  $f$  的一个驻点, 即

$$f'_x(M_0) = 0 = f'_y(M_0)$$

令  $Hf(M_0) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$  称之为  $f$  在驻点  $M_0$  处的 Hessian 矩阵, 则

1. 当  $Hf(M_0) > 0$ , 即矩阵正定, 一切顺序主子式均大于 0, 则  $f$  在  $M_0$  处取得极小值.  
即  $\begin{cases} A > 0, \\ AC - B^2 > 0 \end{cases}$  时,  $f$  在  $M_0$  处取得极小值.
2. 当  $Hf(M_0) < 0$ , 即矩阵负定, 一切顺序主子式交替正负, 则  $f$  在  $M_0$  处取得极大值.  
即  $\begin{cases} A < 0, \\ AC - B^2 > 0 \end{cases}$  时,  $f$  在  $M_0$  处取得极大值.
3.  $\Delta = AC - B^2 < 0$  时,  $f$  在  $M_0$  处不取得极值.
4. 当  $Hf(M_0) = 0$ , 即矩阵不定, 则  $f$  在  $M_0$  处是否取得极值不确定. 要使用更高阶的 Taylor 公式进行讨论.



## 例 13.3

1. 设  $f(x, y) = x^4 + y^4$ ,  $f(0, 0) = 0$ .

$$f'_x(0, 0) = 4x^3 \Big|_{(0,0)} = 0, \quad f'_y(0, 0) = 4y^3 \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f''_{xx}(0, 0) = 12x^2 \Big|_{(0,0)} = 0, \quad f''_{xy}(0, 0) = 0, \quad f''_{yy}(0, 0) = 12y^2 \Big|_{(0,0)} = 0$$

则  $\Delta = AC - B^2 = 0$ , 但是不难看出  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处取得极小值.

2. 设  $f(x, y) = x^3 + y^3$ ,  $f(0, 0) = 0$ .

$$f'_x(0, 0) = 3x^2 \Big|_{(0,0)} = 0, \quad f'_y(0, 0) = 3y^2 \Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f''_{xx}(0, 0) = 6x \Big|_{(0,0)} = 0, \quad f''_{xy}(0, 0) = 0, \quad f''_{yy}(0, 0) = 6y \Big|_{(0,0)} = 0$$

则  $\Delta = AC - B^2 = 0$ , 但是不难看出  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处不取得极值.

## 13.2 例题

例 13.4 将  $f(x, y) = \frac{1}{1 - x - y + xy}$  在点  $M_0(0, 0)$  处分别展成零阶, 一阶, 二阶 Taylor 公式.

解

1. 零阶 Taylor 公式

$$f(x, y) = f(0, 0) + (x - 0)f'_x(0 + \theta(x - 0), 0 + \theta(y - 0)) + (y - 0)f'_y(0 + \theta(x - 0), 0 + \theta(y - 0)) \\ + x f'_x(\theta x, \theta y) + y f'_y(\theta x, \theta y), \theta \in (0, 1)$$

而  $f(x, y) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$ , 则

$$f'_x(\theta x, \theta y) = \frac{1}{(1-\theta x)^2(1-\theta y)}, \quad f'_y(\theta x, \theta y) = \frac{1}{(1-\theta x)(1-\theta y)^2}$$

代入得零阶 Taylor 公式为

$$f(x, y) = 1 + \frac{x}{(1-\theta x)^2} \frac{1}{1-\theta y} + \frac{y}{1-\theta x} \frac{1}{(1-\theta y)^2}$$

## 2. 高阶 Taylor 公式

利用

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2) = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + o(y) = 1 + y + y^2 + o(y^2) = 1 + y + y^2 + y^3 + o(y^3)$$

得到  $f(x, y)$  在点  $O(0, 0)$  处的一阶, 二阶, 三阶 Taylor 公式为

$$f(x, y) = (1 + x + o(x))(1 + y + o(y)) = 1 + x + y + R_1 = 1 + \frac{x^2 - y^2}{x - y} + R_1$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (1 + x + x^2 + o(x^2))(1 + y + y^2 + o(y^2)) \\ &= 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + R_2 = 1 + \frac{x^2 - y^2}{x - y} + \frac{x^3 - y^3}{x - y} + R_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3))(1 + y + y^2 + y^3 + o(y^3)) \\ &= 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + R_3 \\ &= 1 + \frac{x^2 - y^2}{x - y} + \frac{x^3 - y^3}{x - y} + \frac{x^4 - y^4}{x - y} + R_3 \end{aligned}$$

以此类推可以得到  $f(x, y)$  在点  $O(0, 0)$  处的  $n$  阶 Taylor 公式为

$$f(x, y) = 1 + (x + y) + \frac{x^3 - y^3}{x - y} + \frac{x^4 - y^4}{x - y} + \cdots + \frac{x^n - y^n}{x - y} + R_n$$

**例 13.5** 求  $f(x, y) = x^3 - y^3 + 3x^2 + 3y^2 - 9x$  的所有极值.

**解** 先求  $f(x, y)$  的驻点, 即求  $f'_x(x, y) = 0 = f'_y(x, y)$ , 得到

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 3x^2 + 6x - 9 = 0, \\ f'_y(x, y) = -3y^2 + 6y = 0. \end{cases}$$

解得  $f(x, y)$  的驻点为  $M_1(1, 0), M_2(1, 2), M_3(-3, 0), M_4(-3, 2)$ . 对每个驻点, 计算  $f(x, y)$  的 Hessian 矩阵, 根据 Hessian 矩阵的正定性, 负定性, 不定性来判断极值.

由

$$f''_{xx} = 6x + 6, f''_{xy} = 0, f''_{yy} = -6y + 6$$

1. 在  $M_1(1, 0)$  处,

$$A = 12, \quad B = 0, \quad C = 6$$

由此得到  $\Delta = AC - B^2 = 72 > 0, A > 0$ , 故  $f(M_1) = f(1, 0) = -5$  为极小值.

2. 在  $M_2(1, 2)$  处,

$$A = 12, \quad B = 0, \quad C = -6$$

由此得到  $\Delta = AC - B^2 = -72 < 0$ , 故  $f(M_2) = f(1, 2) = 5$  不是极值.

3. 在  $M_3(-3, 0)$  处,

$$A = -12, \quad B = 0, \quad C = 6$$

由此得到  $\Delta = AC - B^2 = -72 < 0$ , 故  $f(M_3) = f(-3, 0) = 45$  不是极值.

4. 在  $M_4(-3, 2)$  处,

$$A = -12, \quad B = 0, \quad C = -6$$

由此得到  $\Delta = AC - B^2 = 72 > 0, A < 0$ , 故  $f(M_4) = f(-3, 2) = 31$  为极大值.

## 13.3 对称矩阵 $A$ 的正定性与负定性

### 定义 13.1 (对称矩阵)

设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  且  $a_{12} = a_{21}, a_{13} = a_{31}, a_{23} = a_{32}$ , 则  $A$  称之为对称矩阵, 此时  $A = A^T$ .



### 定义 13.2 (正定矩阵与负定矩阵)

$A$  为  $n$  阶对称矩阵, 则

1. 若  $A$  的顺序主子式全大于零, 即  $|a_{11}| = a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$|A| > 0$ , 则称  $A$  为正定矩阵.

2. 若  $A$  的奇数阶顺序主子式全小于零, 偶数阶顺序主子式全大于零, 即  $|a_{11}| = a_{11} <$

$0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |A| > 0$ , 则称  $A$  为负定矩阵.

更高阶的对称矩阵的正定性与负定性的定义类似.



作业 ex9.5:2(2),3,4(1)(3)(7),7(1)(3)(4).