Lec 6 多元函数的极限与连续性

6.1 多元函数的例子

多元函数形如 $u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是自变量,u 是因变量.

1. $z = ax + by + c, (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \{(x, y)|x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leqslant +\infty\}$: 平面方程;
2. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, (x, y) \in D : x^2 + y^2 \leqslant R^2$: 上半球面;
3. $f(x, y) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$: 二元正态分布概率密度函数;
4. $u = \ln(a^2 - x^2 - y^2 - z^2), x^2 + y^2 + z^2 < a^2, \Omega : x^2 + y^2 + z^2 < a^2$ 为开球体;
5. $B(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1 - t)^{y-1}\,\mathrm{d}t, x, y > 0$: 贝塔函数.
6. $u = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$: n 元线性函数.
7. $Q(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j, a_{ij} = a_{ji}$: $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次函数.

多元函数中, 最简单的是二元函数 $z = f(x, y), (x, y) \in D$. 且 $z = f(x, y)$ 有直观图像 — 空间的曲面. 因此, 二元函数是今后的重点讨论的多元函数.

6.2 平面点集的若干概念

二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域 D 是平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集.

1. 点 M_0 的 δ 邻域 $\overline{U}(M_0, \delta) := \{M : |MM_0| = \rho(M, M_0) < \delta\}$, 即 $\overline{U}(M_0, \delta) = \{(x, y)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\} \subset D$.
2. D 的内点 $M_0 : M_0 \in D$, 且 $\exists\delta > 0$, 使得 $\overline{U}(M_0, \delta) \subset D$.
3. D 的外点 $M_0 : M_0 \notin D$, 且 $\exists\delta > 0$, 使得 $\overline{U}(M_0, \delta) \cap D = \varnothing$.
4. D 的边界点 $M_0 : M_0$ 的任意 δ 邻域中都同时含有 D 中点与 D^c 中点. 点集 D 的边界点全体记作 $\partial D : D$ 的边界.
5. 由全体内点组成的点集称为开集, 开集 D 的余集 D^c 称为闭集. 闭集的余集是开集.
6. 连通性: 若 D 中任意两点 A, B 都可以用 D 中连续曲线连接, 则称 D 是联通的.
7. 开集若是联通的, 称之为开区域, 简称为区域, 开区域 D 与 D 的边界 ∂D 之并, 称之为闭区域, 记作 $\overline{D} = D \cup \partial D$. 注 讲义上此处写为 $\overline{D} = D + \partial D$. 两种写法是等价的.
8. 若 $\exists R > 0$, 使得 $D \subset \overline{U}(0, R)$, 则称 D 是有界集.

例 6.1 $\overline{U}(M_0, \delta), \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 + z^2 < a^2$ 都是开集,$\overline{U}(M_0, \delta)^c, x^2 + y^2 + z^2 < a^2$ 是有界集,$\mathbb{R}^2$ 是无界集. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \geqslant \delta^2, (R^2)^c = \varnothing, x^2 + y^2 + z^2 \geqslant a^2$ 是闭集. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant \delta^2, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$ 是有界闭集.

例 6.2 空集 $\varnothing$ 由零个内点组合, 因此是开集;$\varnothing^c = \mathbb{R}^2$ 开, 因此 $\varnothing$ 是闭集. 在所有点集之中, 只有空集和全集是既开又闭的.

6.3 二元函数 $f(x,y)$ 的极限与连续性

1. 若 $\forall\delta>0, \overline{U}(M_0,\delta)$ 都有点集 D 中点, 则称 M_0 是 D 原点 (极限点),M_0 这个原点可以属于 D, 也可以不属于 D.
2. 设点 $M_0\in D$, 且 $\exists\delta>0$, 使得 $\overline{U}(M_0,\delta)$ 中除 M_0 无 D 中点, 则称 M_0 是 D 的孤立点.

定义 6.1

设 $z=f(x,y)$ 是定义在平面点集 D 上的二维函数,$M_0=(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点, 又设 a 是一个数. 如果对任意给定的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $M=(x,y)\in D$ 满足

$$0<\rho(M,M_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

或者

$$0<|x-x_0|<\delta,\quad 0<|y-y_0|<\delta$$

时, 有

$$|f(M)-a|<\varepsilon,$$

那么称当 M 趋于 M_0 时 $f(M)$ 以 a 为极限, 记作

$$\lim_{M\to M_0}f(M)=a.$$

也可以写成

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=a \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0,y\to y_0}f(x,y)=a.$$

♣

由于多元函数的极限与一元函数的极限定义的方式相同. 因此, 一元函数极限中的四则运算法则, 夹逼准则, 及极限的唯一性, 局部有界性, 保号性, 保序性等都可以推广到多元函数的极限之中来.

定义 6.2

设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的邻域 $B(M_0,r)=\{M\mid\rho(M,M_0)<r\}$ 有定义, 如

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,$$

或者

$$|x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta$$

时, 就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

也就是说极限

$$\lim_{x\to x_0,y\to y_0}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

或

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_0,y_0),$$

那么称 f 在 (x_0,y_0) 连续. 如果 f 在区域 D 的每一个点连续, 就称 f 在 D 上连续. ♣

注 多元函数的一致连续性指的是 δ 与 ε 与点 M_0 无关, 具体而言, 若 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得 $\forall M_1,M_2\in D$, 当 $\rho(M_1,M_2)<\delta$ 时, 有 $|f(M_1)-f(M_2)|<\varepsilon$, 则称 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续.

从定义可知, 若 M_0 是 D 是原点, 则必有 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)=f(\lim\limits_{M\to M_0} M)$, 即极限号与函数符号可交换.

若 $M_0(x_0,y_0)$ 是 D 的孤立点, 则 $f(M)$ 在 M_0 处必连续.

证明 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 使得 $\overset{\circ}{U}(M_0,\delta)$ 中除 M_0 外无 D 中点. 当 $M\in D,|MM_0|<\delta$ 时,$|f(M)-f(M_0)|=0<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$.

注 此处使用的是课本上的定义方式.

例 6.3 $f(x,y)=\sqrt{\cos^2\pi x+\cos^2\pi y-2}$ 的定义域 D 由所有的整点 (格点)$M(m,n),m,n\in\mathbb{Z}$ 组成. 每个整点都是 D 的孤立点. 也都是 $f(x,y)$ 的连续点, 从而 $f(x,y)$ 在 D 上连续.

例 6.4 考察下列极限:

1. 证明: $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$;
2. 证明: $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在;
3. 证明: $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在.

证明

1. $0\leqslant\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}|y|$, 且 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}0=0=\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{1}{2}|y|$, 由夹逼准则, 得 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}=0$;
2. 取 $y=kx^2$,k 为常数, 即动点 $M(x,y)$ 沿抛物线 $y=kx^2$ 趋于原点, 则 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{kx^3}{x^4+k^2x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k}{1+k^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$. 当 k 取不同值时, 即动点以不同方式趋于 $(0,0)$ 时, 函数有不同的极限, 与极限存在的唯一性矛盾. 故 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 不存在, 从而 $\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处不连续;
3. $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}=\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}\cdot\frac{x+y}{xy}}$. 其中
$$\lim_{x\to 0,y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$$
而取 $y=-x+kx^2$ 时, $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x+y}{xy}=\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{x+y}{xy}=\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{-x^2+kx^3}{kx^2}=-\dfrac{1}{k}$. 即 k 取不同值时,$M(x,y)$ 沿 $y=-x+kx^2$ 趋于原点时, 函数有不同的极限, 与极限存在的唯一性矛盾. $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}\dfrac{xy}{x+y}$ 不存在, 从而 $\lim\limits_{x\to 0,y\to 0}(1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在.

例 6.5 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, x^2+y^2\neq 0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$. 证明在 $(0,0)$ 处过此点的每一条射线 $\begin{cases}x=t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$,$0\leqslant t<+\infty$,$f(x,y)$ 都连续, 即 $\lim\limits_{t\to\delta^+}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=f(0,0)=0$. 但 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

证明 不连续性已在上文证明. 下证射线上的连续性.

$$\lim_{t\to0^+}f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)=\lim_{t\to0^+}\frac{(t\cos\alpha)^2(t\sin\alpha)}{(t\cos\alpha)^4+(t\sin\alpha)^3}=\lim_{t\to0^+}\frac{t\cos^2\alpha\sin\alpha}{t^2\cos^4\alpha+\sin^2\alpha}=0=f(0,0).$$

因此对于任意 α, 即对于任意射线, 函数 $f(x,y)$ 在射线上连续.

6.4 连续多元函数的主要性质

1. 连续多元函数的和, 差, 积, 商 (分母不为零) 仍然是连续的多元函数;
2. 在复合有意义的前提下, 连续多元函数的复合函数仍是连续函数;
3. 有界闭区域 D 上的连续多元函数具有“五性”;
   (a). 有界性;
   (b). 最值性;
   (c). 介值性;
   (d). 零值性;
   (e). 一致连续性,

上述性质的证明方法, 与一元连续函数的“五性”证明方法类似.

✍ **作业** ex9.1:12,13,14(2)(7)(9)(10),15,17(1),18.