数学分析 B2 第四次习题课

邓嘉驹

更新：March 21, 2025

目录

1 知识回顾

1.1 空间解析几何

这一章就考试而言并不是重点，但关键在于通过对高中向量知识的补充深入奠定后续曲面积分章节的学习，是承前启后的一章.

1. 向量的基本运算

1. 点乘定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}), \tag{1.1}$$

叉乘 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 产生一个由右手法则确定方向、大小为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \tag{1.2}$$

的向量. 其中值得强调的是叉乘的反对称性：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$.

2. 在平面直角坐标系下，设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2,\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}. \tag{1.3}$$

3. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$. $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$.

2. 平面方程的构建

常见的构建方式有三种：

1. 截距式. 简单易懂，无需额外说明.
2. 构建平面法向量 $\boldsymbol{n}$. 这是最常遇到的情况，后续利用点法式可以给出平面方程. $\boldsymbol{n}$ 的获得最常见的思路是想方设法找到该平面上的两个向量，利用叉乘构建.
3. 绕过定直线的平面. 若该直线给的是交面式

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\quad i=1,2. \tag{1.4}$$

这是最理想的情况. 由于直线上的点分别满足平面方程所要求的线性关系，因此这样的点也必然满足两个线性关系的线性叠加，因此绕该直线的平面可设为

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+(C_1+\lambda C_2)z+(D_1+\lambda D_2)=0, \tag{1.5}$$

其中 λ 可取到 ∞. 若该直线给的是点向式，则可利用“化归”的思想，利用参数式构造两个平面方程即可.

3. 直线方程的构建

空间直线方程的构建就比较简单直白了，特征量就是方向向量，比较常见的是找到直线某一法平面内两个向量，利用叉乘构建. 当然，对于存在绕定直线的平面时，有时也会使用表达更简便的交面式.

4. 空间中的位置关系

1. 对于平面，其位置关系无非相交（正交为特殊情形）、平行、重合，最后一种过于 trivial 不予讨论. 平行对应于 $\boldsymbol{n}_1 // \boldsymbol{n}_2$，不平行不重合即相交，正交对应于 $\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2 = 0$。
   特别地，对于处于角平分线上的平面，可将法向量单位化为 $\boldsymbol{n}_1', \boldsymbol{n}_2'$，则该平面的法向量为 $\boldsymbol{n}_1' \pm \boldsymbol{n}_2'$，直线类似.
2. 对于直线，位置关系稍显复杂，有相交、平行、重合、异面. 平行对应于 $\boldsymbol{\tau}_1 // \boldsymbol{\tau}_2$，后三者的区别仅在于方程是否有唯一解[1].
3. 对于直线与平面，无非相交、平行、包含三种关系. 平行对应于 $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$；包含对应于在平行的基础上任取直线上一点，验证其在平面上；除此之外为相交，特别地，正交满足 $\boldsymbol{n} // \boldsymbol{\tau}$.

5. 空间中的距离计算

距离公式本质上来源于 $d = \left|\overrightarrow{P_0P} \cdot \boldsymbol{n}\right| / |\boldsymbol{n}|$ 和 $d = \left|\overrightarrow{P_0P} \times \boldsymbol{\tau}\right| / |\boldsymbol{\tau}|$，两者分别是对于平面和直线而言的.

1. 两点间的距离公式：trivial.
2. 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离：取平面上任一点 $P(x, y, z)$，利用第一个公式可计算得
$$d = \frac{|A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1.6}$$
3. 点 $P_0(x_0', y_0', z_0')$ 到直线 $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ 的距离：取直线上任一点 $P(x, y, z)$，利用第二个公式可计算得
$$d = \frac{|(x - x_0', y - y_0', z - z_0')| \times (l, m, n)}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{|(x_0 - x_0', y_0 - y_0', z_0 - z_0') \times (l, m, n)|}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{1.7}$$
4. 两平行平面 $\pi_i : Ax + By + Cz + D_i = 0 \ (i = 1, 2)$ 的距离公式：可取 π_1 上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，则化为点到平面的距离，即
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1.8}$$

[1] 的确有利用混合积判断的方法，单个人感觉不考虑后续异面直线最短距离计算的话，混合积的方法不如线性方程组的方法来得直接，况且求解线性方程组困难的题计算行列式通常也相当费功夫

5. 两平行直线 $l_i: \frac{x-x_i}{l} = \frac{y-y_i}{m} = \frac{z-z_i}{n}$ 间的距离：可取 l_1 上一点 $P_1(x_1, y_1, z_2)$，则化为点到直线的距离，即

$$d = \frac{|(x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2) \times (l, m, n)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \tag{1.9}$$

6. 异面直线间的最短距离：两直线最短距离的方向必然与两者均垂直，首先利用方向向量的叉乘构造这一方向 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2$. 再于两直线上各取一点，通常直接取点向式中给出的点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$，利用第一个公式可计算得

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \boldsymbol{n}\right|}{|\boldsymbol{n}|} = \frac{|(\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2) \cdot (x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2)|}{|(\boldsymbol{\tau}_1 \times \boldsymbol{\tau}_2)|}. \tag{1.10}$$

6. 常见二次曲面的识别

识别的方式通常为某一坐标取定值（相当于用平行于坐标平面的平面去截取曲面），判断各截面交线的形状.

1. 柱面：在应试中出现基本上是母线平行于坐标轴的情形，trivial.
2. 锥面：在应试中基本以 $z^2 = x^2 + y^2$ 或 $z = (\pm)\sqrt{x^2+y^2}$ 的形式出现，trivial.
3. 旋转曲面：某两个分量仅有二次项，且二次项系数相等，具体原因见旋转曲面的构建小小节.
4. 椭球面：$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.
5. 双曲面：$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = \pm 1$，其中单叶和双叶分别对应于 $+1$ 和 -1. 一个比较简单的区分方法是，分别取 x, y, z 为零，单叶双曲面始终与坐标平面有交线，而双叶双曲面与其一坐标平面不相交（实际上对应这里的负项 $-z^2/c^2$）.
6. 椭圆抛物面：$z = x^2/a^2 + y^2/b^2$.
7. 双曲抛物面：$z = x^2/a^2 - y^2/b^2$.

7. 旋转曲面的构建[2]

核心思路是，取转动轴的某一法平面，则对于旋转曲面上任一点 $P(x, y, z)$，其应当满足两个条件：(1) 点 P 在该平面上；(2) 记该平面与用于旋转的曲面交于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$，则 P 与 P_0 到旋转轴的距离相等. 原本空间坐标有 3 个自由度，引入法平面沿旋转轴滑移的自由度，再消去两个约束条件减少的自由度，最终根据这两个条件列出的方程组应当有 2 个自由度，符合空间曲面的自由度要求，条件完备.

[2]柱面的构建后面有一道专门的习题讲解，因其本身不是特别困难，就放弃了新开一个小小节讲解的想法

1.2 多变量函数的微分学

尽管整个数学分析 B2 中更强调计算，这一章仍有不少繁杂困难的证明（相信大家在学单变量微分学的时候就感受到了），尤其是在期中考试里这部分占比会很大. 当然，抛开应试，本章本身就是相当重要的，含参变量积分的计算就是依托于此的，空间曲线切向量与空间曲面法向量的计算以及矢量场的微分更是曲面积分这一章的核心基础. 这对于对于物理学院的学生更是如此，掌握好偏微分能在理论力学课程中轻松不少，熟悉场论的梯度、散度、旋度能让你在电动力学课程中游刃有余. 总之这一章的实用性是非常强的，希望同学们能在这里多下点功夫，对相关定理与常用结论（不过不用太纠结于证明）要有清晰的印象.

1. 函数的极限与连续性

定义 1.1 (二元函数的极限) 对 $\forall \varepsilon > 0$，总 $\exists \delta(\varepsilon, M_0) > 0$，其中点 $M_0(x_0, y_0)$，使得当

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \quad \text{或} \quad 0 < |x-x_0| < \delta,\ 0 < |y-y_0| < \delta \tag{1.11}$$

时，$0 < |f(x,y) - a| < \varepsilon$ 恒成立，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$.

当然，一般要用 ε-δ 语言证明极限存在时，通常用后者，因为接近线性的运算通常要来得更简单. 并且要注意区分极限和累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，这在之后的重积分和累次积分中同样会遇到类似的问题，容易想到的例子如 x/y 在原点的极限.

定义 1.2 (二元函数的连续性) 上述定义中，若 $a = f(x_0, y_0)$，则 $f(x,y)$ 在点 M_0 连续. 若对 D 上任一点满足 $\delta = \delta(\varepsilon)$，则 $f(x,y)$ 在 D 上一致连续.

2. 偏导数与可微性

定义 1.3 (二元函数的偏导数)

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} = \left.\frac{\mathrm{d}f(x,y_0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}, \tag{1.12}$$

$$f_y(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y)}{y-y_0} = \left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}. \tag{1.13}$$

类似地，可定义高阶偏导数.

若 $f(x,y) \in C^n(D)$，则 $f(x,y)$ 在 D 中 n 阶偏导可交换.

定义 1.4 (二元函数的可微性) 记 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则

$$f(x,y)\text{在}M_0(x_0,y_0)\text{可微} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\rho\to 0^+} \left.\frac{\Delta f - f_x\Delta x - f_y \Delta y}{\rho}\right|_{M_0} = 0. \tag{1.14}$$

3. 方向导数与梯度

定义 1.5 (二元函数的方向导数) 记 $\boldsymbol{l}=l(\cos\alpha,\cos\beta)$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{M_0(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}, \tag{1.15}$$

几何上，方向导数即 $f(x,y)$ 在 M_0 点沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的单位增长率. 换言之，沿 $\boldsymbol{l}$ 方向增量 Δf 有多大，取决于方向导数与增量 t 的乘积.

注 教材更新后，方向导数的极限值由“射线型”的 $t\to 0^+$ 更改为“直线型”的 $t\to 0$，要注意这一变化. 在去年期中考试课题组给的阅卷标准答案中，采用的方向导数定义也是后者，指向性明确.

定义 1.6 (二元函数的梯度) 若函数 f 可微，则

$$\nabla f=\operatorname{grad} f=f_x\hat{\boldsymbol{x}}+f_y\hat{\boldsymbol{y}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\nabla f\cdot\frac{\boldsymbol{l}}{l}. \tag{1.16}$$

梯度方向即 $f(x,y)$ 增长率（绝对值）最高的方向，因为 $|\partial f/\partial\boldsymbol{l}|\leqslant|\nabla f|$ 恒成立. 另外，$\nabla\cdot$ 表示对向量场的散度，$\nabla\times$ 表示对向量场的旋度，当然这是后话了. Nabla 算子对标量场的作用满足 Leibniz 法则：

$$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f. \tag{1.17}$$

4. 梯度算符在不同（空间）坐标系下的表示

首先应当明确的一点是，无论是 Nabla 还是 Laplacian，其本身都是不依赖于坐标系的存在，以下公式只是在具体坐标系下对该算符进行展开表示. 这是容易理解的，因为算符作用的对象是不依赖于坐标系的标量场、向量场或张量场，作用的结果也是不依赖于坐标系的标量场、向量场或张量场，因此算符本身也是不依赖于坐标系的.

1. 直角坐标系：结合 Einstein 求和约定，Nabla 可写为

$$\nabla=\hat{\boldsymbol{x}}_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\hat{\boldsymbol{x}}_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\hat{\boldsymbol{x}}_3\frac{\partial}{\partial x_3}=\hat{\boldsymbol{x}}_i\partial_i, \tag{1.18}$$

相应地，拉普拉斯算符 (Laplacian) 为

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=(\hat{\mathbf{x}}_i\cdot\hat{\mathbf{x}}_j)(\partial_i\partial_j)=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2. \tag{1.19}$$

2. 柱坐标系：

$$\nabla=\hat{\boldsymbol{\rho}}\partial_\rho+\frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\rho}\partial_\varphi+\hat{\boldsymbol{z}}\partial_z. \tag{1.20}$$

注 在一般的正交曲线坐标系中，对某坐标的导数作用在坐标基矢上的结果可能是非零的. 以柱坐标基矢为例，对其直角坐标表示进行微分：

$$\partial_\varphi\hat{\rho}=\partial_\varphi(\cos\varphi,\sin\varphi,0)=(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)=\hat{\varphi}, \tag{1.21}$$

$$\partial_\varphi\hat{\varphi}=\partial_\varphi(-\sin\varphi,\cos\varphi,0)=-(\cos\varphi,\sin\varphi,0)=\hat{\rho}. \tag{1.22}$$

因此这里给出的算子表示中，坐标基矢与求导顺序是绝对不可交换的. 当然，这在物理上采用运动学描述（或者数学上的几何观点）是更形象直观、更容易理解的，也避免了公式推导和记忆.

同样给出 Laplacian：

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho f) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\varphi^2 f + \partial_z^2 f. \tag{1.23}$$

3. 球坐标系：

$$\nabla = \hat{\boldsymbol{r}}\partial_r + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\partial_\theta + \frac{\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{r\sin\theta}\partial_\varphi, \tag{1.24}$$

其 Laplacian 为

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r f) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta f) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\varphi^2 f. \tag{1.25}$$

5. 向量场的微分

设 $\boldsymbol{A}(t) = (A_x(t), A_y(t), A_z(t))$，则

$$\frac{\mathrm{d}^n\boldsymbol{A}(t)}{\mathrm{d}t^n} = (A_x^{(n)}(t), A_y^{(n)}(t), A_z^{(n)}(t)), \tag{1.26}$$

当然，这里 t 可以取坐标 x, y, z. 向量值函数的运算仍满足 Leibniz 法则：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[f(t)\boldsymbol{A}] = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A} + f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}, \tag{1.28}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)] = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.29}$$

特别地，若 $\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{r}(t)$，则该向量场即一空间曲线，几何上看，参数 t 相当于质点从曲线上某一点出发、沿该曲线向前走过的路程.

若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(u, v)$，仿上可定义偏导数，类似地 $\boldsymbol{r}(u, v)$ 表示空间曲面.

6. Jacobi 矩阵与 Jacobi 行列式

1. 考虑从 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ 到 $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ 的变换，有

$$\mathrm{d}y_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}\mathrm{d}y_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}y_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_{x_1}y_1 & \cdots & \partial_{x_n}y_1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \partial_{x_n}y_1 & \cdots & \partial_{x_n}y_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{pmatrix}, \tag{1.30}$$

其中变换矩阵定义为 Jacobi 矩阵，记为 $\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$，Jacobi 行列式即 $\det\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$.

2. 常在重积分中利用二元和三元的 Jacobi 行列式，即

$$\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.31}$$

同学们可以试试将柱坐标和球坐标三个坐标分别代入 (u,v,w)，可得到柱坐标和球坐标下的体积元.

3. Jacobi 行列式的链式法则[3]：

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}. \tag{1.32}$$

7. 隐函数偏导数的计算

1. 对于满足单一约束条件 $F(x_1,\cdots,x_n)=0$ 的变量组来说，若偏导数存在，则

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial_j F}{\partial_i F}, \quad i \neq j. \tag{1.33}$$

2. 对于多约束的情况，在应试中至多出现双重约束的情形：$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0. \end{cases}$ 若计算 u_x, u_v，则选取 u 与其他任一变量作为因变量（这里选择 v），对另外两个（自）变量求偏导即可：

$$\begin{cases} F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0, \\ G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} F_y + F_u u_y + F_v v_y = 0, \\ G_y + G_u u_y + G_v v_y = 0, \end{cases} \tag{1.34}$$

利用此方程组分别解出 u_x, u_v 即可（这里不建议记书上的公式）.

注 需要注意的是，若计算 $\mathrm{d}u$ 或 u_x, u_v 都需要计算的话，应将 $\mathrm{d}u$ 视为一个整体，对方程组取微分即可：

$$\begin{cases} F_x\,\mathrm{d}x + F_y\,\mathrm{d}y + F_u\,\mathrm{d}u + F_v\,\mathrm{d}v = 0, \\ G_x\,\mathrm{d}x + G_y\,\mathrm{d}y + G_u\,\mathrm{d}u + G_v\,\mathrm{d}v = 0, \end{cases} \tag{1.35}$$

整体地计算出 $\mathrm{d}u$ 而不必拆成偏导分别计算两次.

3. 两个常用的偏微分公式（利用隐函数求导法则容易证明）：

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} = 1, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = -1 \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}. \tag{1.36}$$

8. 空间曲线的切向量与弧长

对于参数曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$，其切向量为

$$\boldsymbol{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)), \tag{1.37}$$

[3] 要证明该结论，考虑两次坐标变换即可

弧长微元为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t = \left|\boldsymbol{r}'(t)\right|\mathrm{d}t\,. \tag{1.38}$$

对于交面式表达的曲线 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$ 视参量 t 为坐标 x,y,z 之一即可. 以坐标 x 为例，切向量为 $(1,y_x,z_x)$，弧长微元为 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+y_x^2+z_x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 y_x,z_x 的计算方法已在上一小小节进行了充分讨论.

9. 空间曲面切平面的构建

对于参数曲面 $\boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，考虑其对两变量的偏导数 $\boldsymbol{r}_u,\boldsymbol{r}_v$. 经上一小小节的讨论，对于曲面上任一给定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，均存在一条在该曲面上且过该点的曲线

$$\boldsymbol{r}(u,v_0) = (x(u,v_0),y(u,v_0),z(u,v_0)), \tag{1.39}$$

这里 v_0 为一常数，满足 $x_0 = x(u_0,v_0)$, $y_0 = y(u_0,v_0)$, $z_0 = z(u_0,v_0)$. 因此 $\boldsymbol{r}_u\big|_{M_0}$ 可视为该曲线在 (u_0,v_0) 处即点 M_0 处的切线. 类似地， $\boldsymbol{r}_v\big|_{M_0}$ 为另一切线. 由于两切线均在切平面上，因此切平面的法向量为 $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$，切点即点 M_0.

对于一般式表达的曲面 $F(x,y,z)=0$，其法向量为 ∇F. 特别地，对于形如 $z=f(x,y)$ 的显式曲面，可取参数为 x,y，那么 $\boldsymbol{r}=(x,y,f(x,y))$，或者直接通过梯度计算.

2 作业选讲

1. [9.2.2 (5)] 求函数 $u = \arctan \dfrac{x+y}{x-y}$ 对 x, y 的偏微商.
2. (9.2.15) 根据可微的定义证明，函数 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ 在原点处不可微.
3. (9.2.16) 证明函数 $f(x,y) = \begin{cases} x^2y/(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在，但在此点不可微.
4. (9.2.11) 设 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，证明当 $r \neq 0$ 时有
   (a). $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \dfrac{2}{r}$.
   (b). $\dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \ln r}{\partial z^2} = \dfrac{1}{r^2}$.
   (c). $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\dfrac{1}{r^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\dfrac{1}{r^2} = 0$.
5. (9.2.32) 设变换 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay \end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$. 求常数 a.（其中二阶偏导数均连续）
6. [9.3.1 (1)] 证明方程 $x^2 + xy + y^2 = 7$ 在点 $(2,1)$ 附近对 y 有唯一解，并求出 y 对 x 在该点处的一阶和二阶导数.

3 真题集萃

1. [23-24 期中 T_1 (2)] 求过直线 $l = \begin{cases} 2x+y-z-2=0, \\ 3x-2y-2z+1=0 \end{cases}$ 且与平面 $\pi: 3x+2y+3z-9=0$ 垂直的平面方程.
2. [23-24 期中 T_1 (3)] 设函数 $f(x,y)$ 具有连续的一阶偏导数，$f(1,1)=1, f'_x(1,1)=a$ 且 $f'_y(1,1)=b$，求函数 $u(x)=f(x,f(x,x))$ 在 $x=1$ 处的微分.
3. (22-23 期中 T_7) 设 $f(x,y)$ 为开区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上的连续可偏导函数，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上的夹角为 α 的单位向量. 证明：
$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]\sin^2\alpha \leqslant 2\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\right)^2\right]. \tag{3.1}$$
4. (22-23 期中 T_8) 二元函数 $f(x,y)$ 被称为凸函数是指：对 $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$，$t\in[0,1]$，都有如下不等式：
$$f(tx_1+(1-t)x_2, ty_1+(1-t)y_2) \leqslant tf(x_1,y_1)+(1-t)f(x_2,y_2). \tag{3.2}$$
假设函数 f 是可微的，求证：f 是凸函数当且仅当对 $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$，有
$$(x_1-x_2)f'_x(x_1,y_1)+(y_1-y_2)f'_y(x_1,y_1)\geqslant f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2). \tag{3.3}$$
5. [22-23 期中 T_2 (2)] 求由方程 $z^3-3xyz=a^3$ 在点 $(0,0,1)$ 附近所确定函数 $z(x,y)$ 的偏导数 $\partial^2 z/\partial x\partial y$，其中 a 为给定的正常数.
6. (21-22 期中 T_4) 给定正整数 n，设函数 $f(x,y)=\begin{cases} (x+y)^n\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 讨论 n 为何值时，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处：(1) 连续；(2) 可微.
7. (20-21 期中 T_2) 设 $f(x,y)$ 有 2 阶连续偏导数，$\partial f/\partial y\neq 0$，求 $f(x,y)=0$ 确定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 的二阶偏导数（用 f 的各阶导数表示）.
8. (20-21 期中 T_5) 设参数变换 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 有二阶连续的偏导数，并满足
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{3.4}$$
证明：对任意二阶连续可微函数 $z=f(x,y)$，有
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right). \tag{3.5}$$
9. (20-21 期中 T_8) 设 f 是定义在 $D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 的三阶连续可微函数，且 $f(0,0)=0$.
   (a). 证明：存在 D 上 2 阶连续可微函数 g_1,g_2 满足
$$f(x,y)=xg_1(x,y)+yg_2(x,y). \tag{3.6}$$
   (b). 又设 $\nabla f(0,0)=0$，且
$$\det\begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial x^2 & \partial^2 f/\partial x\partial y \\ \partial^2 f/\partial x\partial y & \partial^2 f/\partial y^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,0)}<0, \tag{3.7}$$

证明：在原点的一个邻域内存在变换 $x = x(u,v)$，$y = y(u,v)$ 使得

$$f(x(u,v), y(u,v)) = u^2 - v^2. \tag{3.8}$$

10. (18-19 期中 T_1) 设有空间直线 L_1 与 L_2 分别由如下的方程组定义：

$$L_1: \begin{cases} x = y, \\ x + y + z = 1, \end{cases} \qquad L_2 \begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + z = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

求一个平面与它们平行且到它们的距离相等.

11. (18-19 期中 T_2) 设有一条曲线由如下方程组定义：

$$\begin{cases} x = yz, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2, \end{cases} \tag{3.10}$$

请判断这条曲线在不在一个平面上，并给出理由.

12. (18-19 期中 T_5) 设 $C > 0$ 是一个常数，又设函数 $f(x,y)$ 满足：对于任何平面上的点 (x,y)，存在 $a(x,y), b(x,y)$ 使得对于任何实数 h, k 满足 $|h| + |k| \leqslant 1$，有

$$|f(x+h, y+k) - f(x,y) - a(x,y)h - b(x,y)k| \leqslant C(|h| + |k|)^{3/2}. \tag{3.11}$$

求证：f 有一致连续的偏导数.

4 教材习题

1. (8.2.26) 过直线 $\begin{cases} 5x-11z+7=0, \\ 5y+7z-4=0 \end{cases}$ 作两互相垂直的平面，其中一平面过点 $(4,-3,1)$，求此二平面方程.
2. (8.2.29) 求原点关于平面 $6x+2y-9z+121=0$ 对称的点的坐标.
3. (8.2.34) 写出垂直于平面 $5x-y+3z-2=0$，且与它的交线在 Oxy 平面上的平面方程.
4. (Ch 8.7) 求准线为 $\begin{cases} y^2+z^2=1, \\ x=1, \end{cases}$ 母线方向为 $(2,1,1)$ 的柱面的一般方程.
5. (Ch 8.12) 已知椭球面的三个半长轴长分别为 a,b,c，三条对称轴方程分别为
$$3-x=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}, \quad \frac{x}{2}=3-y=\frac{z}{2}, \quad \frac{x}{2}=\frac{y}{2}=3-z, \tag{4.1}$$
求椭球面的一般方程.
6. (9.1.19) 设 $f(x,y)$ 在 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上分别对 x 和 y 连续，且关于变量 y 是单调的，证明：$f(x,y)$ 在 D 上连续.
7. [9.2.1 (3)] 设 $f(x,y)=\ln\left[xy^2+yx^2+\sqrt{1+(xy^2+yx^2)^2}\right]$，求 $f'_x(1,y)$，$f'_y(1,y)$.
8. (9.3.9) 设 $y=f(x+t)$，而 t 是由方程 $y+g(x,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.
9. [9.2.9 (2)(4)] 在下列各题中，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

   (a). $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$. (b). $z=\sin^2(ax+by)$.
10. [9.2.19 (2)(4)] 求下列复合函数的偏导数或导数.
    (a). 设 $u=\mathrm{e}^{xyz}$，$x=rs$，$y=r/s$，$z=r^s$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial r},\dfrac{\partial u}{\partial s}$.
    (b). 设 $u=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，$y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.
11. [9.3.11 (3)] 设 $\begin{cases} u=f(ux,v+y), \\ v=g(u-x,v^2-y), \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.
12. [9.3.12 (1)] 设 $\begin{cases} x=f(u,v), \\ y=g(u,v), \end{cases}$ 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.
13. (9.4.9) 求椭球面 $x^2+2y^2+z^2=1$ 上平行于平面 $x-y+2z=0$ 的切平面方程.
14. [9.4.17 (2)] 求曲线 $\begin{cases} 2x^2+3y^2+z^2=47, \\ x^2+2y^2=z \end{cases}$ 在点 $(-2,1,6)$ 的切线和法平面方程.
15. (Ch9-1) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非零常数. $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可微. 求证：存在 $\mathbb{R}$ 上一元可微函数 $F(s)$ 使得 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)$ 的充分必要条件是
$$a_j\frac{\partial f}{\partial x_i}=a_i\frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad i,j=1,2,\cdots,n. \tag{4.2}$$
16. (Ch9-3) 若函数 $u=f(x,y,z)$ 满足恒等式 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$，则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数. 试证下述关于齐次函数的 Euler 定理：可微函数 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数的充

要条件是

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=kf(x,y,z). \tag{4.3}$$

17. (Ch9-8) 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是包含原点的凸区域，$f\in C^1(D)$. 若

$$x\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0,\quad (x,y)\in D, \tag{4.4}$$

则 $f(x,y)$ 是常数.

18. (Ch9-11) 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上取正值且有二阶连续偏导数. 证明 u 满足方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{4.5}$$

的充分必要条件是存在一元函数 f 和 g 使得 $u(x,y)=f(x)g(y)$.

19. (Ch9-13) 设 $f(x,y,z)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有一阶连续偏函数，且满足

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{4.6}$$

如果 $f(x,0,0)>0$ 对 $\forall x\in\mathbb{R}$ 成立，求证：对 $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$，也有 $f(x,y,z)>0$.