

Lec 16 多元函数微分学复习小结

16.1 多元函数与一元函数

多元函数微分学相较于一元函数微分学, 不同之处在于多元函数的极限动点区域定点有无穷多种方式, 而一元函数的极限只有左右极限两种方式. 其他不同的性质基本由上述性质引申而来.

例 16.1 设 $z = f(x, y)$ 在区域 D 中偏导数存在且有界, 即 $\exists M > 0$, 使得 $\forall (x, y) \in D, |f'_x(x, y)| \leq M, |f'_y(x, y)| \leq M$, 则 f 在 D 中是连续的.

证明 $\forall M_0(x_0, y_0) \in D$, 设 $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$, 则

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\&= (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)) + (f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)) \\&= f'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + f'_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y \\&\leq M(|\Delta x| + |\Delta y|)\end{aligned}$$

当 $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ 时, 有 $\Delta z \rightarrow 0$, 即 f 在 M_0 处连续.

16.2 例题

例 16.2 证明: 一切二次曲面 Σ

$$\Sigma: ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g = 0$$

在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$ax_0x + by_0y + cz_0z + d\frac{x_0+x}{2} + e\frac{y_0+y}{2} + f\frac{z_0+z}{2} + g = 0$$

其中 a, b, c, d, e, f, g 为常数, 且 $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

证明 令 $F(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + g$, 则 F 在 M_0 处的切平面的法向量为

$$\mathbf{n} = \nabla F \Big|_{M_0} = (F'_x, F'_y, F'_z) \Big|_{M_0} = (2ax_0 + d, 2by_0 + e, 2cz_0 + f)$$

因此由点法式方程, 有切平面方程为

$$(2ax_0 + d)(x - x_0) + (2by_0 + e)(y - y_0) + (2cz_0 + f)(z - z_0) = 0$$

整理后可得

$$ax_0x + by_0y + cz_0z + d\frac{x_0+x}{2} + e\frac{y_0+y}{2} + f\frac{z_0+z}{2} + g = 0$$

例 16.3 设有函数 $z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$, 曲线

$$L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

其中 $M_0\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 为 L 上的点, 记 \mathbf{n} 为 L 在 M_0 处的法向量, \mathbf{l} 为任意方向向量.

求 $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{n}}\bigg|_{M_0}$, 并求 $\left(\frac{\partial z}{\partial \mathbf{l}}\bigg|_{M_0}\right)_{\max}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial \mathbf{l}}\bigg|_{M_0}\right)_{\min}$.

解 设 $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, 则 F 在 M_0 处的法向量为

$$\mathbf{N} = \nabla F\bigg|_{M_0} = (F'_x, F'_y)\bigg|_{M_0} = \frac{\sqrt{2}}{ab}(b, a)$$

取 $\mathbf{N} = (b, a)$, 则 L 在 M_0 处的内法向为 $\mathbf{n} = -bm\mathbf{N} = (-b, -a)$, 则方向向量为 $\mathbf{n}^\circ = \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$. 又

$$\nabla z\bigg|_{M_0} = \left(-\frac{2x}{a^2}, -\frac{2y}{b^2}\right)\bigg|_{M_0} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{a}, -\frac{\sqrt{2}}{b}\right)$$

且

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \mathbf{l}}\bigg|_{M_0}\right)_{\max} = |\nabla z|_{M_0} = \left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{a}, -\frac{\sqrt{2}}{b}\right)\right| = \sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \mathbf{l}}\bigg|_{M_0}\right)_{\min} = |\nabla z \cdot \mathbf{n}^\circ|_{M_0} = \left|\left(-\frac{\sqrt{2}}{a}, -\frac{\sqrt{2}}{b}\right) \cdot \left(-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\right| = \sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2}}$$

例 16.4 在椭球面 $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上取一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 求 M_0 处的切平面方程与三个坐标面围成的四面体 Ω 的体积的最小值.

解 设 M_0 位于第一卦限, 则 π 为

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

则 $V(\Omega) = \frac{1}{6} \left(\frac{a^2}{x_0}\right) \left(\frac{b^2}{y_0}\right) \left(\frac{c^2}{z_0}\right) = \frac{abc}{6} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c}\right)^2}}$ 再利用平均值不等式, 得到

$$\frac{abc}{6} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c}\right)^2}} \geq \frac{abc}{6} \frac{1}{\sqrt{3}}$$

故 $V(\Omega)$ 的最小值为 $\frac{abc}{6\sqrt{3}}$. 此时切平面方程为 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}$.

例 16.5 设 $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ 为点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的球坐标系, 即

$$\begin{cases} x_0 = r_0 \sin \theta_0 \cos \varphi_0, \\ y_0 = r_0 \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \\ z_0 = r_0 \cos \theta_0. \end{cases}$$

其中 $r_0 \in [0, +\infty)$, $\theta_0 \in [0, \pi]$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$. 证明:

1. 三个球坐标曲面 $\Sigma_1: r = r_0, \Sigma_2: \theta = \theta_0, \Sigma_3: \varphi = \varphi_0$ 在 M_0 处两两正交
2. 三条球坐标曲线 $\Gamma_1: \begin{cases} \Sigma_1, \\ \Sigma_2 \end{cases}, \Gamma_2: \begin{cases} \Sigma_1, \\ \Sigma_3 \end{cases}, \Gamma_3: \begin{cases} \Sigma_2, \\ \Sigma_3 \end{cases}$ 在 M_0 处两两正交

证明

1. 实际上要验证的是, 三张曲面的法向量在 M_0 处两两正交. Σ_1 在球坐标系下的方程为 $r = r_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r_0$$

设 $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r_0^2$, 则 F_1 在 M_0 处的法向量为

$$\mathbf{n}_1 = \nabla F_1 \Big|_{M_0} = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$$

Σ_2 在球坐标系下的方程为 $\theta = \theta_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta_0$$

设 $F_2(x, y, z) = z^2 - (x^2 + y^2) \cos^2 \theta_0$, 则 F_2 在 M_0 处的法向量为

$$\mathbf{n}_2 = \nabla F_2 \Big|_{M_0} = (-2x_0 \cos^2 \theta_0, -2y_0 \cos^2 \theta_0, 2z_0)$$

Σ_3 在球坐标系下的方程为 $\varphi = \varphi_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\frac{y}{x} = \tan \varphi_0$$

设 $F_3(x, y, z) = y - x \tan \varphi_0$, 则 F_3 在 M_0 处的法向量为

$$\mathbf{n}_3 = \nabla F_3 \Big|_{M_0} = (-\tan \varphi_0, 1, 0)$$

而

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 &= (2x_0, 2y_0, 2z_0) \cdot (-2x_0 \cos^2 \theta_0, -2y_0 \cos^2 \theta_0, 2z_0) \\ &= -4x_0^2 \cos^2 \theta_0 - 4y_0^2 \cos^2 \theta_0 + 4z_0^2 = 0 \\ \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 &= (2x_0, 2y_0, 2z_0) \cdot (-\tan \varphi_0, 1, 0) \\ &= -2x_0 \tan \varphi_0 + 2y_0 = 2(y_0 - x_0 \tan \varphi_0) = 0 \\ \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 &= (-2x_0 \cos^2 \theta_0, -2y_0 \cos^2 \theta_0, 2z_0) \cdot (-\tan \varphi_0, 1, 0) \\ &= 2x_0 \cos^2 \theta_0 \tan \varphi_0 - 2y_0 \cos^2 \theta_0 = 2(x_0 \cos^2 \theta_0 \tan \varphi_0 - y_0 \cos^2 \theta_0) \\ &= 2(x_0 \cos^2 \theta_0 \tan \varphi_0 - y_0 \cos^2 \theta_0) = 0 \end{aligned}$$

2. 要验证的是, 三条曲线的切向量 τ_1, τ_2, τ_3 在 M_0 处两两正交. 其中

$$\tau_1 \parallel \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$$

因此又 $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ 两两正交, 所以

$$\tau_1 \parallel \mathbf{n}_3$$

同理可得 $\tau_2 \parallel \mathbf{n}_2, \tau_3 \parallel \mathbf{n}_1$, 所以 τ_1, τ_2, τ_3 两两正交.

例 16.6 设 (r_0, θ_0, z_0) 为点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的圆柱坐标系, 即

$$\begin{cases} x_0 = r_0 \cos \theta_0, \\ y_0 = r_0 \sin \theta_0, \\ z_0 = z_0. \end{cases}$$

证明:

1. 三个圆柱坐标曲面 $\Sigma_1: r = r_0, \Sigma_2: \theta = \theta_0, \Sigma_3: z = z_0$ 在 M_0 处两两正交
2. 三条圆柱坐标曲线 $\Gamma_1: \begin{cases} \Sigma_1, \\ \Sigma_2 \end{cases}, \Gamma_2: \begin{cases} \Sigma_1, \\ \Sigma_3 \end{cases}, \Gamma_3: \begin{cases} \Sigma_2, \\ \Sigma_3 \end{cases}$ 在 M_0 处两两正交

证明

1. 实际上要验证的是, 三张曲面的法向量在 M_0 处两两正交. Σ_1 在圆柱坐标系下的方程为 $r = r_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r_0$$

设 $F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - r_0^2$, 则 F_1 在 M_0 处的法向量为

$$\mathbf{n}_1 = \nabla F_1 \Big|_{M_0} = (2x_0, 2y_0, 0)$$

Σ_2 在圆柱坐标系下的方程为 $\theta = \theta_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$\frac{y}{x} = \tan \theta_0$$

设 $F_2(x, y, z) = y - x \tan \theta_0$, 则 F_2 在 M_0 处的法向量为

$$\mathbf{n}_2 = \nabla F_2 \Big|_{M_0} = (-\tan \theta_0, 1, 0)$$

Σ_3 在圆柱坐标系下的方程为 $z = z_0$, 则在直角坐标系下的方程为

$$z = z_0$$

设 $F_3(x, y, z) = z - z_0$, 则 F_3 在 M_0 处的法向量为

$$\mathbf{n}_3 = \nabla F_3 \Big|_{M_0} = (0, 0, 1)$$

而

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 &= (2x_0, 2y_0, 0) \cdot (-\tan \theta_0, 1, 0) \\ &= -2x_0 \tan \theta_0 + 2y_0 = 2(y_0 - x_0 \tan \theta_0) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = (2x_0, 2y_0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = (-\tan \theta_0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$

故三张曲面在 M_0 处两两正交.

2. 曲线的正交同上述球坐标系中的正交.

例 16.7 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 确定的隐函数, 且 $x = 1, y = 1$ 时 $z = 1$. 试将 $z(x, y)$ 在点 $M_0(1, 1)$ 处展开为二阶 Taylor 公式.

解 $z(x, y)$ 在 M_0 处的二阶 Taylor 公式为

$$z(x, y) = z(1, 1) + (x-1)z'_x(1, 1) + (y-1)z'_y(1, 1) + \frac{(x-1)^2}{2}z''_{xx}(1, 1) + (x-1)(y-1)z''_{xy}(1, 1) + \frac{(y-1)^2}{2}z''_{yy}(1, 1) + o(\rho^2)$$

对 $z^3 - 2xz + y = 0$ 两边求微分, 得

$$3z^2 dz - 2(x dz + z dx) + dy = 0$$

整理得

$$dz = \frac{2z}{3z^2 - 2x} dx + \frac{1}{3z^2 - 2x} dy$$

因此

$$z'_x = \frac{2z}{3z^2 - 2x}, z'_y = \frac{1}{3z^2 - 2x}$$

对于 z'_x, z'_y 求偏导数, 得

$$z''_{xx} = \frac{1}{(3z^2 - 2x)^2} (2z'_x(3z^2 - 2x) - 2z(6zz'_x - 2))$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{(3z^2 - 2x)^2} (2z'_y(3z^2 - 2x) - 2z(6zz'_y))$$

$$z''_{yy} = \frac{1}{(3z^2 - 2x)^2} (-(6zz'_y))$$

代入 $x = 1, y = 1, z = 1$ 得

$$z'_x = 2, z'_y = -1$$

$$z''_{xx} = 16, z''_{xy} = 10, z''_{yy} = -6$$

故 $z(x, y)$ 在 $M_0(1, 1)$ 处的二阶 Taylor 公式为

$$\begin{aligned} z(x, y) &= 1 + 2(x-1) - (y-1) + \frac{16}{2}(x-1)^2 + 10(x-1)(y-1) - \frac{6}{2}(y-1)^2 + o(\rho^2) \\ &= 1 + 2(x-1) - (y-1) + 8(x-1)^2 + 5(x-1)(y-1) - 3(y-1)^2 + o(\rho^2) \end{aligned}$$

例 16.8 求旋转椭球面 $\Sigma: \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$ 上距平面 $\pi: x + y + 2z = 9$ 最远和最近的点.

解 这是一个条件极值问题, 取 $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, 则 M_0 到 π 的距离 $d = \frac{|x_0 + y_0 + 2z_0 - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|x_0 + y_0 + 2z_0 - 9|}{\sqrt{6}}$. 取目标函数

$$f(x, y, z) = (x + y + 2z - 9)^2$$

条件为


$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

作 $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} L'_x = 2(x + y + 2z - 9) + \lambda \frac{x}{2} = 0 \\ L'_y = 2(x + y + 2z - 9) + \lambda 2y = 0 \\ L'_z = 4(x + y + 2z - 9) + \lambda 2z = 0 \\ L'_\lambda = \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \pm \frac{4}{3} \\ y_0 = \pm \frac{1}{3} \\ z_0 = \pm \frac{2}{3} \end{cases}$$

$M_1(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 为最近点, $d = \sqrt{6}$,

$M_2(-\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$ 为最远点, $d = 2\sqrt{6}$.

 作业 ex9.5:5,7(5),8,10(3),11(2),16,17,19.