Lec 22 重积分的计算与证明

22.1 对称性

三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 具有奇偶对称性, 其中 $f \in C^1(\Omega)$, Ω 是有界区域, 则有:

1. 若 $f(x,y,z)$ 是关于 z 的奇函数, 即 $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$, 且 Ω 关于 $z=0$ 的坐标面对称, 则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$.
2. 若 $f(x,y,z)$ 是关于 z 的偶函数, 即 $f(x,y,-z) = f(x,y,z)$, 且 Ω 关于 $z=0$ 的坐标面对称, 则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2\iiint_{\Omega^+} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω^+ 是 Ω 在 $z=0$ 上方的部分.
3. 若 $f(x,y,z)$ 是关于 x,y,z 分别都是偶函数, 且 Ω 关于 $x=0, y=0, z=0$ 的坐标面对称, 则 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 8\iiint_{\Omega^+} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω^+ 是 Ω 在第一卦限的部分.

22.2 例题

例 22.1 再次计算椭球体:$\Omega : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ 的体积.

解 设 $f(x,y,z) = 1$, 则

$$f(x,y,z) = f(-x,y,z) = f(x,-y,z) = f(x,y,-z)$$

即 $f(x,y,z) = 1$ 是关于 x,y,z 的偶函数, 且 Ω 关于 $x=0, y=0, z=0$ 的坐标面对称, 因此有

$$V = \iiint_{\Omega} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 8\iiint_{\Omega^+} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 Ω^+ 是 Ω 在第一卦限的部分.

作坐标变换 $x = ar\sin\theta\cos\varphi, y = br\sin\theta\sin\varphi, z = cr\cos\theta$, 则

$$\Omega^+ = \{(r,\theta,\varphi) | r \leqslant 1, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

且 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = abcr^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, 因此有

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 abcr^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = \frac{4abc\pi}{3}$$

例 22.2 计算曲面 $\Sigma : \left(x^2+y^2\right)^2 + z^4 = y$ 围成的区域 Ω 的体积 $V(\Omega) = \iiint_{\Omega} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

解

1. 从 $\left(x^2+y^2\right)^2 + z^4 = y \geqslant 0$ 可知, 区域 Ω 仅在半空间 $y \geqslant 0$ 中存在

2. 由于曲面

$$\Sigma:\left(x^2+y^2\right)^2+z^4=y$$

与曲面

$$\Sigma':\left((-x)^2+y^2\right)^2+z^4=y$$

$$\Sigma'':\left(x^2+y^2\right)^2+(-z)^4=y$$

表示的曲面是同一个, 因此围成的区域 Ω 也是同一个. 因此 Ω 关于 $x=0,z=0$ 的坐标面对称;

3. 由 $f(x,y,z)=1$ 关于 x,z 都是偶函数.

故有

$$V(\Omega)=4\iiint_{\Omega^+}1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中 Ω^+ 是 Ω 在第一卦限的部分.

作球坐标变换

$$\begin{cases}x=r\sin\theta\cos\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(r^2\sin^2\theta\right)^2+\left(r^2\cos^2\theta\right)^2\leqslant y=r\sin\theta\sin\varphi\Rightarrow 0\leqslant r\leqslant\left(\dfrac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\right)^{\frac{1}{3}}\\ 0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned}V(\Omega)&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\right)^{\frac{1}{3}}}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\left(\frac{\sin\theta\sin\varphi}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta\sec^2\theta}{1+\tan^4\theta}\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{4}{3}\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u\quad(u=\tan\theta)\\&=\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}\end{aligned}$$

例 22.3 设 $(a,b,c)\neq\theta=(0,0,0)$ 为常向量,$f(x)$ 为连续函数.$\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$. 证明:

$$\iiint_\Omega f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\pi\int_{-R}^{R}f(\lambda u)\left(R^2-u^2\right)\mathrm{d}u,\lambda=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$$

证明 设 $A=\begin{pmatrix}\frac{a}{\lambda}&\frac{b}{\lambda}&\frac{c}{\lambda}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 即满足 $AA^T=I$, 作正交变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} & \frac{c}{\lambda} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

则 $u = \frac{a}{\lambda}x + \frac{b}{\lambda}y + \frac{c}{\lambda}z$, 且由

$$\left|AA^T\right| = |A|^2 = 1 \Rightarrow |A| = 1$$

知道 Jacobian 行列式

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \pm 1$$

且 $u^2+v^2+w^2 = x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$, 从而

$$\begin{aligned} & \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ = & \int_{-R}^{R} f(\lambda u)\,\mathrm{d}u \iint_{v^2+w^2 \leqslant R^2-u^2} \mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\ = & \pi \int_{-R}^{R} f(\lambda u)\left(R^2-u^2\right)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

例 22.4 $(a,b) \neq \theta = (0,0), \lambda = \sqrt{a^2+b^2} > 0$, 证明:

$$\iint_{x^2+y^2 \leqslant 1} f(ax+by+c)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} f(\lambda t + c)\,\mathrm{d}t$$

证明 设 $A = \begin{pmatrix} \frac{a}{\lambda} & \frac{b}{\lambda} \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ 为正交矩阵, 即 $A^T = A^{-1} \Rightarrow |A| = \pm 1$, 于是

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \left|A^{-1}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

作正交变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

则 $u^2+v^2 = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} AA^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2+y^2 \leqslant 1$

从而

$$
\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} f(ax+by+c)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\iint_{u^2+v^2\leqslant 1} f(\lambda u+c)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
=&\int_{-1}^{1} f(\lambda u+c)\,\mathrm{d}u \iint_{v^2\leqslant 1-u^2} \mathrm{d}v\\
=&2\int_{-1}^{1} f(\lambda u+c)\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

例 22.5 证明:

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \left(\int_{-\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$$

证明 由奇偶对称性可知

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{D_{11}} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{D_2} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint_{D_{21}} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中

$$D_1 : x^2+y^2 \leqslant 1, D_2 : |x|,|y| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D_{11} 为 D_1 在第一象限的部分,D_{21} 为 D_2 在第一象限的部分. 取 $D_0 = D_{11}\cap D_{21}$, 则

$$S(D_1) = \pi = S(D_2) \Rightarrow S(D_{11}) = S(D_{21}) \Rightarrow S(D_{11}-D_0) = S(D_{21}-D_0)$$

而

$$\iint_{D_{11}-D_0} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \iint_{D_{11}-D_0} \mathrm{e}^{1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{21}-D_0} \mathrm{e}^{1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \iint_{D_{21}-D_0} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

因此

$$\iint_{D_{11}} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \iint_{D_{21}} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

由此可知

$$\iint_{D_1} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \iint_{D_2} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

✍ **作业**

1. 用五种方法计算 $\Omega : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$ 的体积 $V(\Omega)$.
2. 计算 $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} \cos(ax+by+c)\,\mathrm{d}V$ 与 $I = \iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} (ax+by+cz)^m\,\mathrm{d}V$ 其中 $(a,b,c) \neq \theta$ 为常向量 $m \in N^*$.
3. CH10:5,6,8.