数学分析讲义 (第一册)
习题解答

如有疏漏, 欢迎指正. 联系邮箱: liuyue22@mail.ustc.edu.cn

目录

第 1 章 极限

习题 1.1

习题 1.1.1 设 a 是有理数, b 是无理数. 求证: $a+b$ 和 $a-b$ 都是无理数; 当 $a \neq 0$ 时, ab 和 $\dfrac{b}{a}$ 也都是无理数.

解 设 a 是有理数,b 是无理数.

(1) 若 $a+b$ 是有理数, 则 $b=(a+b)-a$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $a-b$ 是无理数.

(2) 若 ab 是有理数, 则 $b=\dfrac{ab}{a}$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $\dfrac{b}{a}$ 是无理数.

习题 1.1.2 求证: 两个不同的有理数之间有无理数.

解 设 a, b 是两个不同的有理数, 不妨设 $a<b$. 则存在正整数 k, N 使得

$$\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} a < N < \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b.$$

具体而言, 取 $k > \lceil \log_2(b-a) \rceil$, 则 $k > \log_2 \dfrac{2\sqrt{2}}{b-a} \Rightarrow 2^k(b-a) > 2\sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b - \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} a > 2$. 因此, 存在整数 $N = \left\lfloor \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b \right\rfloor$, 使得 $\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} a < N < \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b$. 于是

$$a < \frac{N}{\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}} < b.$$

而 $\dfrac{N}{\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}} = \dfrac{N\sqrt{2}}{2^k}$ 是无理数.

习题 1.1.3 求证: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 以及 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 都是无理数.

解

(1) 设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $2q^2=p^2$, 由素数分解的唯一性可知 p 是偶数, 设 $p=2k$, 则 $2q^2=4k^2 \Rightarrow q^2=2k^2$, 同理可知 q 也是偶数, 与 p, q 互素矛盾. 因此 $\sqrt{2}$ 是无理数.

(2) 设 $\sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $3q^2=p^2$, 由素数分解的唯一性可知 p 是 3 的倍数, 设 $p=3k$, 则 $3q^2=9k^2 \Rightarrow q^2=3k^2$, 同理可知 q 也是 3 的倍数, 与 p, q 互素矛盾. 因此 $\sqrt{3}$ 是无理数.

(3) 设 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $2+3+2\sqrt{6}=\dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6}=\dfrac{p^2-5q^2}{2q^2}$, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 因此 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数.

习题 1.1.4 把下列循环小数表示为分数:

(1) $0.24999\ldots$ (2) $0.\dot{3}7\dot{5}$ (3) $4.\dot{5}1\dot{8}$

解

(1) 设 $x=0.24999\ldots$, 则 $10x=2.4999\ldots$, 因此 $9x=2.25 \Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

(2) 设 $x=0.\dot{3}7\dot{5}$, 则 $1000x=375.375375\ldots$, 因此 $999x=375 \Rightarrow x=\dfrac{375}{999}=\dfrac{125}{333}$.

(3) 设 $x=4.\dot{5}1\dot{8}$, 则 $1000x=4518.518518\ldots$, 因此 $999x=4514 \Rightarrow x=\dfrac{4514}{999}=\dfrac{122}{27}$.

习题 1.1.5 设 r,s,t 都是有理数. 求证:

(1) 若 $r+s\sqrt{2}=0$, 则 $r=s=0$;

(2) 若 $r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}=0$, 则 $r=s=t=0$.

解

(1) 假设 $s\neq 0$, 则 $\sqrt{2}=-\dfrac{r}{s}$ 是有理数, 与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾. 因此 $s=0$, 从而 $r=0$.

(2) $r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}=0 \Rightarrow r^2=2s^2+3t^2+2st\sqrt{6} \Rightarrow \left(r^2-2s^2-3t^2\right)+(-2st)\sqrt{6}=0.$:

与 (1) 类似, 若 $st\neq 0$, 则 $\sqrt{6}=\dfrac{r^2-2s^2-3t^2}{2st}$ 是有理数, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 故 $st=0$,

(a) 若 $t=0$, 则 $r+s\sqrt{2}=0$, 由 (1) 可知 $r=s=0$;

(b) 若 $s=0$, 则 $r+t\sqrt{3}=0$, 同理可知 $r=t=0$.

习题 1.1.6 设 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 有相同的符号, 且都大于 -1. 证明:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

解 利用数学归纳法:

当 $n=1$ 时, 等式为

$$1+a_1\geqslant 1+a_1,$$

显然成立.

假设当 $n=k$ 时, 等式成立, 即

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_k.$$

以此作为条件, 当 $n=k+1$ 时, 由 $a_{k+1}>-1$, 可知 $1+a_{k+1}>0$, 因此

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1}) &\geqslant (1+a_1+a_2+\cdots+a_k)(1+a_{k+1})\\ &=1+a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}+a_{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k)\\ &\geqslant 1+a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}.\end{aligned}$$

其中 $a_{k+1}(a_1+a_2+\cdots+a_k)=a_1a_{k+1}+a_2a_{k+1}+\cdots+a_ka_{k+1}\geqslant 0$, 因为 a_i 与 a_{k+1} 符号相同.

习题 1.1.7 设 a,b 是实数, 且 $|a|<1, |b|<1$. 证明:

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1.$$

解 由 $|a| < 1, |b| < 1$, 可知 $ab \neq -1$. 因此

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1 \Leftrightarrow |a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow (a+b)^2 < (1+ab)^2.$$

即

$$a^2 + b^2 + 2ab < 1 + a^2b^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2 \Leftrightarrow (1-a^2)(1-b^2) > 0.$$

显然成立.

习题 1.2

习题 1.2.1 用定义证明下面的结论:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5+3n}=\dfrac{1}{3}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

解

(1) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{5}{9\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n}{5+3n}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3n-(5+3n)}{3(5+3n)}\right|=\frac{5}{3(5+3n)}<\frac{5}{9n}<\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\frac{|\sin n|}{n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

(3) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon^2}-1\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon.$$

(4) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

习题 1.2.2 若数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 满足条件: 任给正数 ε, 存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ (其中 M 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 a 为极限.

M 为常数指的是 M 不依赖于 ε 和 n. 例如 $M=2, M=1000$ 等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于 $\forall M>0,\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ 成立.

习题 1.2.3 证明: 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

证明 充分性: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

必要性: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$.

习题 1.2.4 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 则

$$||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

反之不一定成立, 如数列 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$, 但 $\{a_n\}$ 发散.

若 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 则 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $||a_n| - 0| < \varepsilon$. 则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

习题 1.2.5 证明: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 又 $|b_n| \leqslant M, (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

证明 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. 则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

习题 1.2.6 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$, 及 $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

解 按已知条件 $\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$. 又 $\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$. 于是令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, 则 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 故 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

习题 1.2.7 证明下列数列不收敛:

(1) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$;　　(2) $a_n = 5\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) + (-1)^n$.

解

(1) 取 $a_{2n} = \dfrac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\dfrac{2n+1}{2n+2}$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

(2) 取 $a_{2n} = 5\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5\left(1 - \dfrac{2}{2n+1}\right) - 1$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 6, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 4$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

习题 1.2.8 求下列极限:

(1) $a_n = \dfrac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1}$;

(2) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}$;

(3) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{6}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n(n+1)/2}\right)$, $n = 2, 3, \ldots$;

(4) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

(5) $a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^m})$, $(|q| < 1)$.

解

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}} = \frac{4+0+0}{3+0+0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1-0 = 1.$$

(3)

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{(n^2+n-2)/2}{n(n+1)/2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ =& \frac{(1\cdot 2\cdots(n-1))\cdot(4\cdot 5\cdots(n+2))}{(2\cdot 3\cdots(n))\cdot(3\cdot 4\cdots(n+1))} = \frac{1\cdot(n+2)}{n\cdot 3} = \frac{n+2}{3n}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{n} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

(4)

$$a_n = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-\lim\limits_{m\to\infty} q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

习题 1.2.9 若 $a_n \neq 0(n=1,2,\ldots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?

解 不能. 例如 $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 可能为 0.

习题 1.2.10 若数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = 0$, 是否必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$? 若还假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 回答同样的问题.

解 不一定. 例如 $a_n = \begin{cases} 1, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}$, $b_n = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 1, & n\text{为偶数} \end{cases}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, 但

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均不存在.

当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 时成立. 假设 $a \neq 0$ 时, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n b_n}{a_n} = \dfrac{0}{a} = 0$.

习题 1.2.11 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性如何? 举例说明. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 回答同样的问题.

解

(1) $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则

(a) $\{a_n+b_n\}, \{a_n-b_n\}$ 都发散可以采用反证法: 若 $\{a_n+b_n\}$ 收敛, 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 容易知道 $\{a_n+b_n-a_n\} = \{b_n\}$ 收敛, 这与 $\{b_n\}$ 发散矛盾, 因此 $\{a_n+b_n\}$ 发散, $\{a_n-b_n\}$ 同理可得.

(b) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

I. $a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = 1$ 收敛;

II. $a_n = 1, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = n$ 发散.

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散, 则

(a) $\{a_n + b_n\}$ 的收敛性不确定

I. $a_n = n, b_n = -n$, 则 $a_n + b_n = 0$ 收敛.

II. $a_n = n, b_n = n$, 则 $a_n + b_n = 2n$ 发散.

(b) $\{a_n - b_n\}$ 的收敛性不确定

I. $a_n = n + \dfrac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n - b_n = \dfrac{1}{n}$, 收敛.

II. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}$, 则 $a_n - b_n = 2 \cdot (-1)^n$ 发散.

(c) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

I. $a_n = \begin{cases} 1, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 1, & n\text{为偶数} \end{cases}$, 则 $a_n \cdot b_n = 0$ 收敛.

II. $a_n = n, b_n = (-1)^n$, 则 $a_n \cdot b_n = (-1)^n n$ 发散;

习题 1.2.12 下面的推理是否正确?

(1) 设数列 $\{a_n\}: a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 在 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 两边取极限, 得 $a = 2a - 1$, 即 $a = 1$.

(2)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\
&= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n\text{个}} = 0.
\end{aligned}$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=1^n=1.$

解

(1) 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为 $a_n=1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(2) 错误. 不能将一个数列的极限折成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

并有

$$\lim_{n\to}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1,\lim_{n\to}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

(3) 错误. 不能将一个数列的极限折成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

习题 1.2.13 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a,b. 若 $a>b$, 则从某一项开始, 有 $a_n>b_n$; 反之, 若从某项开始恒有 $a_n\geqslant b_n$, 则 $a\geqslant b$.

解 这是保序性的直接推论.

习题 1.2.14 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别收敛于 a 及 b. 记 $c_n=\max(a_n,b_n)$, $d_n=\min(a_n,b_n)$ $(n=1,2,\ldots)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\max(a,b),\quad \lim_{n\to\infty}d_n=\min(a,b).$$

解 由 $\max(x,y)=\dfrac{x+y+|x-y|}{2},\min(x,y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$, 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

习题 1.2.15 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}((n+1)^k-n^k)$, 其中 $0<k<1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+2}-n\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}\right)$.

解

(1) 由于

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = 0.$$

(2) 由于

$$0 \leqslant ((n+1)^k - n^k) = n^k \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) \leqslant n^k \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^1 - 1\right) = n^{k-1}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \lim_{n\to\infty} n^{k-1} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} ((n+1)^k - n^k) = 0.$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

(4) 由 $\frac{1}{n}\ln(n^2-n+2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1)$, 故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-n+2} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(n^2-n+2\right)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln\left(n^2-n+2\right)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(5) 由于

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} \leqslant \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leqslant \sqrt[n]{n}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} = 1, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} = 1.$$

习题 1.2.16 设 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 为 m 个正数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

解 设 $a_k = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, 则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leqslant \sqrt[n]{m a_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a_k=\max(a_1,a_2,\ldots,a_m).$$

习题 1.2.17 证明下列数列收敛:

(1) $a_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$;

(2) $a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$;

(3) $a_n=\alpha_0+\alpha_1 q+\cdots+\alpha_n q^n$, 其中 $|\alpha_k|\leqslant M,(k=1,2,\ldots)$, 而 $|q|<1$;

(4) $a_n=\dfrac{\cos 1}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2}{2\cdot 3}+\dfrac{\cos 3}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{\cos n}{n(n+1)}$.

证明

(1) 由 $1-\dfrac{1}{2^n}<1$, 可知 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n>0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 由 $a_n<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}<\frac{1}{2}$, 可知 $\{a_n\}$ 有上界, 且 a_n 单调递增, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor\log_{|q|}\dfrac{\varepsilon(1-|q|)}{2M}\right\rfloor+1$, 则当 $m>n>N$ 时,

$$|a_m-a_n|=|\alpha_{n+1}q^{n+1}+\cdots+\alpha_m q^m|\leqslant M(|q|^{n+1}+|q|^{n+2}+\cdots)=M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}<\varepsilon.$$

(4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$, 则当 $m>n>N$ 时,

$$|a_m-a_n|=\left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{\cos m}{m(m+1)}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

习题 1.2.18 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

(1) $a_n=\dfrac{n}{c^n},\ (c>1)$;

(2) $a_1=\dfrac{c}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}\ (0\leqslant c\leqslant 1)$;

(3) $a>0,a_0>0,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)$ (提示: 先证明 $a_n^2\geqslant a$);

(4) $a_0=1,\ a_n=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$;

(5) $a_n=\sin\sin\cdots\sin 1$ (n 个 sin).

解

(1) 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{c^{n+1}-c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^n(c-1)}=0.$$

(2)

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})$$

由 $a_2-a_1=\left(\dfrac{c}{2}\right)^2>0$, 可递归的得知 $a_{n+1}-a_n>0$, 因此 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $a_1<c$, 归纳

的可得 $a_{n+1} < \dfrac{c}{2} + \dfrac{c^2}{2} < \dfrac{c}{2} + \dfrac{c}{2} = c$, 因此 $\{a_n\}$ 有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a = \dfrac{c}{2} + \dfrac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$, 又由 $a_n > 0$, 可知 $a = 1 - \sqrt{1-c}$.

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)\right)^2 \geqslant a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leqslant 0$$

因此 $\{a_n\}$ 在 $n \geqslant 1$ 时单调减, 且有下界 $\sqrt{a}$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则 $l = \dfrac{1}{2}\left(l + \dfrac{a}{l}\right)$, 解得 $l = \sqrt{a}$.

(4)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1} - \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}\right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1}+1)^2}$$

由 $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$ 归纳的可得 $1 + a_n - a_n^2 > 0$, 因此 $a_n - a_{n-1} > 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 有上界, 因此 $\{a_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 递推式两侧取极限, 得 $a = 1 + \dfrac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 由于 $a_n > 0$ 始终成立, 故 $a \geqslant 0$ 而 $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, 故舍去这一值, 进而得到 $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(5) $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$, 因此 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a = \sin a \Rightarrow a = 0$.

习题 1.2.19 设 $a_n \leqslant a \leqslant b_n\ (n = 1, 2, \ldots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时,$|a_n - b_n| < \varepsilon$. 又由 $a_n \leqslant a \leqslant b_n$, 可知 $|a_n - a| = a - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$, 同理 $|b_n - a| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

习题 1.2.20 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

解 先证明一个引理: 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \ldots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

证明如下

(1) $a = 0$ 时,

$$0 \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

同时, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = 0$$

由夹逼定理, 得证.

(2) $a>0$ 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_n}}=a,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

由夹逼定理, 得证.

回到本题,

可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{l}<1$. 因此 $\exists r=\frac{1+\frac{1}{l}}{2}\in(0,1)$, 使得当 n 充分大时, $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}}<r$. 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}<r^n,$$

即 $a_n<a_1r^n$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

习题 1.2.21 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是正数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n=1,2,\ldots$. 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

解 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 则由 $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant a_1\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}=a_1\cdot\frac{b_n}{b_1}$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b>0$, 由原式有 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 单调减, 且 $\frac{a_n}{b_n}>0$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=bc$.

习题 1.2.22 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 求下列数列的极限:

(1) $a_n=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$;

(2) $a_n=\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$;

(3) $a_n=\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$;

(4) $a_n=\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}$.

简要说明: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 故 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的任意子列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ 也收敛于 e. 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为 $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ 的形式, 从而求出极限. 对于类似于 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ 的形式, 可以考虑先通分再变形去掉指数的负号即可处理.

在此过程中下列命题也相同有用:

命题 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a, a_n > 0, a > 0$. $\{b_n\}$ 收敛于 b. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

请注意, 这条结论对于 1^∞ 型是不能直接使用的, 即若 $a_n \to 1, b_n \to \infty$, 则不能直接说 $a_n^{b_n} \to 1^\infty = 1$. 但是对于 $a_n \to a > 1, b_n \to \infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \to a^{+\infty} = +\infty$; 对于 $a_n \to a < 1, b_n \to +\infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \to a^{+\infty} = 0$.

解

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m\Bigg|_{m=2n+1} = \mathrm{e}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n-2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^{-n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^{(n-3)\cdot\left(-\frac{n+1}{n-3}\right)} = \mathrm{e}^{-1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{n+1}\right)} = \mathrm{e}^{-1}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{2n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^3\cdot 2} = \mathrm{e}^2$.

习题 1.2.23 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 且 $|b_n| \geqslant b > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

解 对 $\forall M > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时,$|a_n| > \dfrac{M}{b}$. 又由 $|b_n| \geqslant b > 0$, 可知 $|a_n b_n| \geqslant |a_n||b| > M$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

习题 1.2.24 确定 $n \to \infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}$ 与 $n\sin\dfrac{n\pi}{2}\ (n \geqslant 1)$ 是否有界, 是否趋于无穷大.

解 $\sqrt[n]{n!}$ 无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty$, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

因此,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = +\infty$.

注 Stolz 定理规范的思路要先说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 然后才能说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 存在. 为了方便, 我们也会省去前面的部分, 直接写 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

$n\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 无界, 但是不趋于无穷大. 当 $n = 4k+1$ 时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2} = 4k+1$, 趋于无穷大; 当 $n = 4k+3$ 时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2} = -(4k+3)$, 趋于负无穷大; 当 n 为偶数时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2} = 0$.

习题 1.2.25 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}\ (n \geqslant 1)$ 定义, 证明: $a_n \to +\infty\ (n \to \infty)$.

解 由 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n) = \dfrac{1}{a_n}(a_n + a_n + \dfrac{1}{a_n}) = 2 + \dfrac{1}{a_n^2} > 2$, 可知 $a_n^2 > 2(n-1)$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

习题 1.2.26 给出 $\dfrac{0}{0}$ 型 Stolz 定理的证明.

命题 ($\dfrac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小量, 其中 $\{a_n\}$ 还是严格单调减少数列, 又

存在 (其中 l 为有限或 $\pm\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

证明

(1) 当 l 为有限值时, 根据条件对 $\varepsilon>0$ 存在 N, 使当 $n>N$ 时成立

$$\left|\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}-l\right|<\varepsilon.$$

由于对每个 n 都有 $a_n>a_{n+1}$, 这样就有

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_{n+1})<b_n-b_{n+1}<(l+\varepsilon)(a_n-a_{n+1}).$$

任取 $m>n$, 并且将上述不等式中的 n 换成 $n+1,\ldots,$ 直到$m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_m)<b_n-b_m<(l+\varepsilon)(a_n-a_m),$$

以及

$$\left|\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}-l\right|<\varepsilon.$$

令 $m\to\infty$, 并利用条件 $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=\lim\limits_{m\to\infty}b_m=0$, 就知道当 $n>N$ 时成立

$$\left|\frac{b_n}{a_n}-l\right|\leqslant\varepsilon.$$

(2) $l=+\infty$ 时. 根据条件对任意 $M>0$ 存在 N, 使当 $n>N$ 时成立

$$\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}>M.$$

由于对每个 n 都有 $a_n>a_{n+1}$, 这样就有

$$b_n-b_{n+1}>M(a_n-a_{n+1}).$$

任取 $m>n$, 并且将上述不等式中的 n 换成 $n+1,\ldots,$ 直到$m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$b_n-b_m>M(a_n-a_m),$$

以及

$$\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}>M.$$

令 $m\to\infty$, 并利用条件 $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=\lim\limits_{m\to\infty}b_m=0$, 就知道当 $n>N$ 时成立

$$\frac{b_n}{a_n}>M.$$

习题 1.3

习题 1.3.1 按定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0, (a>1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$;

(3) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x} = 2$;

(4) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{1/q} = 0$ (q 为正整数).

解

(1) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\log_a\varepsilon$, 则当 $x<M$ 时, $|a^x-0| = a^x < a^M = \varepsilon$.

(2) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\dfrac{2}{\varepsilon}+1$, 则当 $|x|>\max\{M,1\}$ 时, $\left|\dfrac{x-1}{x+1}-1\right| = \left|\dfrac{-2}{x+1}\right| \leqslant \dfrac{2}{|x|-1} < \varepsilon$.

(3) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$, 则当 $0<|x+1|<\delta$ 时, $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+x}-2\right| = \left|\dfrac{-x^2-2x-1}{x^2+x}\right| = \left|\dfrac{x+1}{x}\right| < \dfrac{\delta}{1/2} \leqslant \varepsilon$.

(4) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon^q$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $|x^{1/q}-0| = x^{1/q} < \delta^{1/q} = \varepsilon$.

习题 1.3.2 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(x^5-5x+2+\dfrac{1}{x}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$ (n 为正整数);

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

(1) 由四则运算的极限可知,

$$\lim_{x\to1}\left(x^5-5x+2+\frac{1}{x}\right) = 1-5+2+1 = -1.$$

(2) $x^n-1 = (x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$, 因此

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1} = \lim_{x\to1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1) = \sum_{k=0}^{n-1}1 = n.$$

请注意, 这里 n 是常数, 因此可以交换这 n 个极限与求和的顺序.

(3)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(4)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3+\dfrac{6}{x}\right)^{70}(8-\dfrac{5}{x})^{20}}{\left(5-\dfrac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{\left(3+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{x}\right)^{70}\left(8-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{3^{70}\cdot8^{20}}{5^{90}}$$

事实上, $\dfrac{3^{70}\cdot8^{20}}{5^{90}} = \left(\dfrac{3^7\cdot2^6}{5^9}\right)^{10} = 0.00000000000357262291898582591365145687276124639214255753536961640067601894023379767892377 6.$

习题 1.3.3 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$.

(1) 用 Cauchy 收敛原理. 对 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, 任取 $M>0$, 总总存在 $k=\lceil M/\pi\rceil$, 使得 $x_1=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi>M, x_2=(k+1)\pi>M(k\in\mathbb{N}^*)$, 使得 $|\sin x_1-\sin x_2|=1>\varepsilon$. 因此极限不存在.

(2) 考虑两个单边极限,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1,\quad \lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}-1=-1.$$

而极限存在的充要条件是两个单边极限存在且相等, 因此极限不存在.

习题 1.3.4 设函数 $f(x)$ 在正无穷大处的极限为 l, 则对于任意趋于正无穷大的数列 $\{a_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$. 特别地 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$.

(无穷版本的 Heine 定理) **解** 对 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 存在 $M>0$, 使得当 $x>M$ 时, $|f(x)-l|<\varepsilon$. 又由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, $a_n>M$. 因此当 $n>N$ 时, $|f(a_n)-l|<\varepsilon$. 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$. 特别地, 取 $a_n=n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$.

习题 1.3.5 讨论下列函数在 $x=0$ 处的极限.

(1) $f(x)=[x]$;　　(2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$;

(3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ 1+x^2, & x<0.\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0;\\ x, & x\leqslant 0.\end{cases}$

解 **注** 教材中的符号 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 即不大于 x 的最大整数. 本题中, 我们沿用此符号. 其他地方, 我们使用 $\lfloor x\rfloor$ 表示对 x 向下取整, 使用 $\lceil x\rceil$ 表示对 x 向上取整.

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0,\quad \lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$. 因此极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn}x=1,\quad \lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn}x=-1$. 左右极限均存在, 但不相等, 因此极限不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}2^x=1,\quad \lim\limits_{x\to0^-}(1+x^2)=1$. 因此极限存在, 且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在, 因此右极限不存在. 左极限 $\lim\limits_{x\to0^-}x=0$. 函数在 $x=0$ 处的极限不存在.

注 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 的极限过程等同于考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$, 而该极限不存在 (与习题 1.3.3(1)同理).

习题 1.3.6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

解

(1) 当 $\forall m\in\mathbb{N}^*, \sin\dfrac{x}{2^m}\neq0$ 时, 二倍角公式变形可得 $\cos y=\dfrac{\sin 2y}{2\sin y}$, 当 $\sin y\neq 0$, 反复利用可知

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}}\cdots\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(2) 若存在 $m_0\geqslant 1,\sin\dfrac{x}{2^m}=0$, 有 $\dfrac{x}{2^{m_0}}=k\pi, x=2^{m_0}k\pi, k\in\mathbb{Z}$. 自然的推论是 $\forall m\leqslant m_0$, 有 $\sin\dfrac{x}{2^m}=\sin(2^{m_0-m}k\pi)=0$.

此时根据是否存在最大的 m_0, 使得 $\sin\dfrac{x}{2^{m_0}}=0$ 可以分成两种情况:

(a) $x=0$, 则 $\forall m\in\mathbb{N}^*$, 有 $\cos\dfrac{x}{2^m}=1$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=1$;

(b) $x\neq 0\Leftrightarrow\exists\, m_0,\text{s.t.}\sin\dfrac{x}{2^{m_0}}=0,\sin\dfrac{x}{2^{m_0+1}}\neq 0$, 也就是存在最大的 m_0.

因此可以得到 $x=2^{m_0}k\pi, k=2l+1, l\in\mathbb{Z}$(如果 k 是偶数, 那么与 $\sin\dfrac{x}{2^{m_0+1}}=\sin\dfrac{k\pi}{2}\neq 0$ 矛盾).

此时 $\cos\dfrac{x}{2^{m_0+1}}=\cos\dfrac{k\pi}{2}=\cos\left(l+\dfrac{1}{2}\right)\pi=0$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=0$.

不过又由于 $\sin x=0$ 同样成立, 并且 $x\neq 0$, 因此可以把结果合并进 $\dfrac{\sin x}{x}$.

综上所述,

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

习题 1.3.7 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\alpha}{n^2}+\sin\dfrac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n\alpha}{n^2}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$.

解 我们先证明如下事实:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}, & \sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0;\\ 0, & \sin\dfrac{\theta}{2}=0.\end{cases}$$

我们利用积化和差

$$\sin\frac{\theta}{2}\sin k\theta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{\theta}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\right)=&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}-\cos\frac{5\theta}{2}+\cdots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\ =&\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta.\end{aligned}$$

因此, 当 $\sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0$ 自然有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

另一种情况是显然的, 每一项都为 0.

回到本题, 首先, 如果 $\alpha\neq 0$, 那么这意味着存在充分大的 N 使得 $n>N, 0<\left|\dfrac{\alpha}{n^2}\right|<\pi$, 此时, $\sin\dfrac{\alpha}{2n^2}\neq 0$. 因此 $n>N$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\frac{\alpha}{n^2}=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\sin\frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}$$

考虑 $\sin x\sim x, (x\to 0)$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin k\frac{\alpha}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\sin\frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\cdot\frac{n\alpha}{2n^2}}{\frac{\alpha}{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\alpha}{2n}=\frac{\alpha}{2}.$$

如果 $\alpha=0$, 那么每一项都为 0, 极限自然为 $0=\dfrac{\alpha}{2}$.

综上所述,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2}\right)=\frac{\alpha}{2}.$$

习题 1.3.8 证明: 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确. 叙述并证明, 当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时类似的结论. (应用本题结论, 可将极限过程为 $x\to\infty$ 的问题化为 $x\to 0$ 处理, 或者反过来. 例如, 我们有 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$.)

解 我们先给出这条命题的完整表述:

命题 (1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

(3) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

证明:

(1) 由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l\Rightarrow\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. $\Rightarrow\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$.
反之, 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. $\Rightarrow\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$.

(2) 由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l\Rightarrow\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. $\Rightarrow\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$.

反之, 若 $\lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0^+$, 则 $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$. $\Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$, 则 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

(3) 由 Heine 定理, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ 则 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. $\Rightarrow \forall\{y_n\}$, 若 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0^-$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = -\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$.
反之, 若 $\lim_{x\to 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim_{n\to\infty} y_n = 0^-$, 则 $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$. $\Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0^-$, 则 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.

习题 1.3.9 求下列极限:

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}$;

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$;

(3) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x$;

(4) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

解

(1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

(2) 由和差化积,

$$\cos x - \cos 3x = 2\sin 2x \sin x,$$

因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$$

(3) 当 $x > \frac{7}{2}$ 时, 有 $0 < \frac{x+1}{2x-1} < \frac{3}{4}$ 恒成立, 因此

$$0 \leqslant \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

又由于 $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$, 由夹逼定理可知

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x = 0.$$

(4)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{2}{x^2-1}x^2} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2-1}x^2} = \mathrm{e}^2$$

习题 1.3.10 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x+1)$.

解

(1) $\arctan x$ 在 $x\to+\infty$ 时有界, 而 $x\to+\infty$ 时无界, 因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}=0.$$

具体而言,

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

(2) 由夹逼定理,

$$-x^2\leqslant x^2\sin\frac{1}{x}\leqslant x^2,$$

且 $\lim\limits_{x\to0}-x^2=\lim\limits_{x\to0}x^2=0$, 因此

$$\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$$

(3)

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)x^2}{x-2}=\lim_{x\to2}x^2=4.$$

(4) 证明:

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2-x+1)=+\infty.$$

由 $2x^2-x+1=x^2+(x-1/2)^2+3/4>x^2$, 因此对 $\forall M>0$, 取 $N=\sqrt{M}$, 则当 $x>N$ 时, $2x^2-x+1>x^2>N^2=M$. 由此可知

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2-x+1)=+\infty.$$

习题 1.3.11 按定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty,(a>1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\log_a x=-\infty,(a>1)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x=+\infty$;

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{1/x}=+\infty$.

解

(1) 对 $\forall M>0$, 取 $N=a^M$, 则当 $x>N$ 时, $\log_a x>\log_a N=M$.

(2) 对 $\forall M<0$, 取 $\delta=a^M$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $\log_a x<\log_a\delta=M$.

(3) 对 $\forall M>0$, 取 $\delta=\dfrac{\pi}{2}-\arctan M$, 则当 $\dfrac{\pi}{2}-\delta<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\tan x>\tan(\dfrac{\pi}{2}-\delta)=M$.

(4) 对 $\forall M>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{\ln M}$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $\mathrm{e}^{1/x}>\mathrm{e}^{1/\delta}=M$.

习题 1.3.12 证明: 函数 $y = x\sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界, 但当 $x \to +\infty$ 时, 这个函数并不是无穷大量.

解 $\forall M > 0$, 存在 $x_0 = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k-1 > M$, 因此 $y(x_0) = x_0 \sin x_0 = x_0 > M$. 由此可知 $y = x\sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界.

$\forall X > 0$, 总存在 $x_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k\pi > X$, 使得 $y(x_1) = x_1 \sin x_1 = 0$. 因此当 $x \to +\infty$ 时, $y = x\sin x$ 并不是无穷大量.

习题 1.3.13 函数 $y = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是否有界? 又当 $x \to 0^+$ 时, 这个函数是否为无穷大量?

解 考虑 0^+ 处的 $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 与考虑 $+\infty$ 处的 $x\cos x$ 是等价的. 以与习题 1.3.12类似的方法可知, $y = x\cos x$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界, 但当 $x \to +\infty$ 时, $y = x\cos x$ 并不是无穷大量. 因此, $y = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界, 但当 $x \to 0^+$ 时, $y = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 并不是无穷大量.

习题 1.3.14 本题所涉及的函数极限有着鲜明的几何意义.

记函数 $y = f(x)$ 所表示的曲线为 C. 若动点沿曲线无限远离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线 C 的一条渐近线.

(i) 垂直渐近线　易知 (垂直于 x 轴的) 直线 $x = x_0$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty.$$

(ii) 水平渐近线　易知 (平行于 x 轴的) 直线 $y = b$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \quad 或 \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b.$$

(iii) 斜渐近线　请读者证明, 方程为 $y = ax + b\,(a \neq 0)$ 的直线 L 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax);$$

或者

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax).$$

这里自然要假定所说的极限都存在. (提示: 以 $x \to +\infty$ 为例, 设曲线 C 及直线 L 上的横坐标为 x 的点分别为 M, N. 则 M 至 L 的距离, 是 $|MN|$ 的一个常数倍. 因此, 直线 L 为曲线 C 的渐近线, 等价于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (ax+b)) = 0$, 由此易得所说结果.)

求下列曲线的渐近方程.

(1) $y = x\ln\left(\mathrm{e} + \frac{1}{x}\right)$;　　(2) $y = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x-1}$.

解 先证明, 仅证明 $+\infty$, 另一种同理. 正如提示所说, 由于距离 $d = \left|\frac{f(x) - (ax+b)}{\sqrt{a^2+1}}\right|$, 因此 l 是

渐近线, 等价于 $x \to +\infty$ 时 d 趋于 0, 等价于 $f(x) - (ax+b)$ 趋于 0.

然后问题转化为了证明

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0 \Leftrightarrow a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax).$$

充分性: 由 $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ 可知,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0.$$

必要性: 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$ 可知,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = 0, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = b$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax) = b.$$

(1) (a) 垂直渐近线, $x = -\frac{1}{\mathrm{e}}$: $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{\mathrm{e}})^-} = -\frac{1}{\mathrm{e}}\lim\limits_{y\to0^+}\ln y = +\infty$;

(b) 斜渐近线, $y = x + \frac{1}{\mathrm{e}}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x}) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(y(x)-x) = \lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})-1) = \lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{\mathrm{e}x}) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{\mathrm{e}x})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/\mathrm{e}x}{1/x} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ ($\pm\infty$ 两侧是同一条渐近线);

(2) (a) 垂直渐近线, $x = 1$: $\lim\limits_{x\to1}y(x) = \lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x+3}{x-1} = \infty$;

(b) 斜渐近线, $y = 3x+1$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 3$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(y(x)-3x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-1} = 1$;

习题 1.3.15 证明: 在同一极限过程中等价的无穷小量有下列性质:

(1) $\alpha(x) \sim \alpha(x)$ (自反性);

(2) 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\beta(x) \sim \alpha(x)$ (对称性);

(3) 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ (传递性).

(注意, (1) 中自然需假定 $\alpha(x)$ 不取零值; 而在 (2)、(3) 中, 条件蕴含着, 所说的无穷小量在极限过程中均不取零值.)

解 解释一下, 这里说的是 (1) 需要没有 $\alpha(x) \equiv 0$ 这种情况.(2)(3) 因为有“若 xxx”的假设自然排除了这种情况.

(1) 显然, $\lim\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, 因此 $\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

(2) 由 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ 可知, $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 因此 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, 即 $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

(3) 由 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$ 可知, $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, $\lim\frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1$, 因此 $\lim\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim\frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1$, 即 $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

习题 1.3.16 当 $x \to 0$ 时, 比较下列无穷小的阶:

(1) $\tan x - \sin x$ 与 x^3;

(2) $x^3 + x^2$ 与 $\sin^2 x$;

(3) $1 - \cos x$ 与 x^2.

解

(1)

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = \sin x \cdot \frac{1-\cos x}{\cos x}.$$

由 $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, \cos x \sim 1$, 可知

$$\tan x - \sin x \sim x \cdot \frac{x^2/2}{1} = \frac{x^3}{2}.$$

因此,

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

(2)

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \sim x^2 (x \to 0).$$

同时,

$$x^3 + x^2 = (x+1)x^2 \sim x^2 (x \to 0).$$

可得

$$x^3 + x^2 \sim \sin^2 x$$

(3)

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \sim 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}(x \to 0).$$

习题 1.3.17 当 $x \to +\infty$ 时, 试比较下列无穷大量的阶:

(1) n 次多项式 $P_n(x)$ 与 m 次多项式 $P_m(x)$ (m, n 均为正整数);

(2) x^α 与 x^β ($\alpha, \beta > 0$);

(3) a^x 与 b^x ($a, b > 1$).

解

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}\cdots}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{x^m}\frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots}$

$$=\frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to+\infty}x^{n-m}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ +\infty, & n>m.\end{cases}\text{, 即得到}\begin{cases}P_n(x)\sim P_m(x), & n=m;\\ P_m(x)\text{更高阶}, & n<m;\\ P_n(x)\text{更高阶}, & n>m.\end{cases}$$

(2) 利用 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{x^\beta}=\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha-\beta}=\begin{cases}1, & \alpha=\beta;\\ 0, & \alpha<\beta;\\ +\infty, & \alpha>\beta.\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x^\alpha\sim x^\beta, & \alpha=\beta;\\ x^\beta\text{更高阶}, & \alpha<\beta;\\ x^\alpha\text{更高阶}, & \alpha>\beta.\end{cases}$

(3) 利用 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{b^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^x=\begin{cases}1, & a=b;\\ 0, & a<b;\\ +\infty, & a>b.\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a^x\sim b^x, & a=b;\\ b^x\text{更高阶}, & a<b;\\ a^x\text{更高阶}, & a>b.\end{cases}$

习题 1.3.18 试用等价无穷小量代换的方法计算下列极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$ (m,n 均为正整数);

(2) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{x}$;

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x}$;

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$;

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

解

(1) 由 $\sin x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}.$$

(2) 由 $\tan x\sim x$, 可知 $a\neq0$ 时,

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{x}=a.$$

很显然该结果对 $a=0$ 也成立.

(3) 由 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $\arctan x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{n}\sin x}{x}=\frac{1}{n}.$$

(4)

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}.$$

由 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, $\sin x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(5) 由 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x, \sin x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x}=\frac{1}{4}.$$

(6) 由 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x, 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, 可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}}=1.$$

第 1 章综合习题

习题 1.C.1 求下列数列的极限:

(1) $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$ (提示: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$);

(2) $a_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$;

(3) 设 $a_1>1, a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}, n=1,2,\cdots$;

(4) 设 $a_1=3, a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}, n=1,2,\cdots$.

解

(1) 由

$$(2n)^2=4n^2\geqslant 4n^2-1=(2n-1)(2n+1)$$

可得

$$\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}=\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}.$$

因此

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdots\frac{2n-1}{2n+1}}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2n+1}}=0$, 故由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+9}{2n-1}=\frac{1}{2}$, 知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{2n-1}=\frac{1}{2}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)^n=0$;

(3) 由 $a_1>1$, 以及若 $a_n>1$ 时, $a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}>1$, 归纳的可知 $a_n>1,\forall n\in\mathbb{N}^+$. 所以数列有下界. 再用归纳法: 当 $n=1$ 时:

$$a_2-a_1=2-\left(\frac{1}{a_1}+a_1\right)\leqslant 2-2=0,$$

推出 $a_2\leqslant a_1$. 假设对 n 有 $a_n\leqslant a_{n-1}$, 那么当 $n+1$ 时

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_na_{n-1}}\leqslant 0.$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调减有下界数列, 因此收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geqslant 1$. 在

$$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$$

两边取极限得

$$a=2-\frac{1}{a}\implies a^2-2a+1=0$$

解得 $a=\pm 1$. 但 $a=-1$ 不合题意, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(4) $a_{n+2}=\dfrac{1}{1+a_{n+1}}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}}=\dfrac{1+a_n}{2+a_n}$. 假如对任何 n, 有 $a_{2n}\geqslant a_{2n-2}$; $a_{2n+1}\leqslant a_{2n-1}$, 那么对 $n+1$, 有

$$a_{2n+2}-a_{2n}=\frac{1}{1+a_{2n+1}}-\frac{1}{1+a_{2n-1}}=\frac{a_{2n-1}-a_{2n+1}}{1+a_{2n+1}a_{2n-1}}\geqslant 0$$
$$a_{2n+3}-a_{2n+1}=\frac{1}{1+a_{2n+2}}-\frac{1}{1+a_{2n}}=\frac{a_{2n}-a_{2n+2}}{1+a_{2n+2}a_{2n}}\leqslant 0$$

推出数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{2n}\}$ 单调增有上界, $\{a_{2n-1}\}$ 单调减有下界. 因此分别收敛. 对

$$a_{2n+2}=\frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}},$$

两边取极限得

$$a=\frac{1+a}{2+a}\implies a^2+a-1=0$$

解得 $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 同理, 对

$$a_{2n+3}=\frac{1+a_{2n+1}}{2+a_{2n+1}},$$

两边取极限得

$$b=\frac{1+b}{2+b}\implies b^2+b-1=0$$

解得 $b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

习题 1.C.2 设 $\{a_n\}$ 为单调递增的数列, 并且收敛于 a, 证明对一切 n 有 $a_n<a$. (对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

解 反证法. 假设存在某个 n_0, 使得 $a_{n_0}>a$. 由数列单调递增的性质, 对一切 $n>n_0$ 有 $a_n\geqslant a_{n_0}>a$, 于是存在 $\varepsilon=\dfrac{a_{n_0}-a}{2}>0$, 使得 $\forall N$, 存在 $n=\max\{n_0,N\}+1>N$, 使得

$$|a_n-a|=a_n-a\geqslant a_{n_0}-a=2\varepsilon>\varepsilon,$$

这与数列收敛的定义矛盾.

习题 1.C.3 证明下面的数列收敛:

(1) $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$;

(2) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

解

(1) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=2-\frac{1}{n}<2,$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 因此 $\{a_n\}$ 收敛;

(2) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{\sum_{k=1}\frac{1}{2^k}} = \mathrm{e}^1.$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 又由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

习题 1.C.4 试构造一个发散的数列 $\{a_n\}$, 满足条件: 对任意正数 ε, 存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

解 取 $a_n = \sqrt{n}$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > \dfrac{1}{4\varepsilon^2}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

但数列 $\{a_n\}$ 显然发散.

习题 1.C.5 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在常数 M, 使得对一切 n 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leqslant M.$$

证明:

(1) 数列 $\{A_n\}$ 收敛;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

解

(1) 由数列定义可知 $\{A_n\}$ 单调递增. 又因为对一切 n 有 $A_n \leqslant M$, 所以 $\{A_n\}$ 有上界. 因此 $\{A_n\}$ 收敛;

(2) 用 Cauchy 收敛准则证明. 由 (1) 知 $\{A_n\}$ 收敛, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, $\forall n > N+1, p > 0$, 有

$$|A_{n+p} - A_{n-1}| = |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

由三角不等式可知

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

习题 1.C.6 设 $\{a_n\}$ 是正严格递增数列. 求证: 若 $a_{n+1} - a_n$ 有界, 则对任意 $\alpha \in (0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$. 并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列 $\{a_n\}$ 使得对任意 $\alpha \in (0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$, 但是 $a_{n+1} - a_n$ 无界. (提示: 考虑 $a_n = n\ln n$.)

解

(1) 若 $\{a_n\}$ 有界, 此时由于其严格单调, 故有极限, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = l^\alpha - l^\alpha = 0$.

(2) 若 $\{a_n\}$ 无界, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 设 $|a_{n+1} - a_n| \leqslant M$.

$$0 \leqslant a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha\left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^\alpha - 1\right) < a_n^\alpha\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{1-\alpha}} \leqslant \frac{M}{a_n^{1-\alpha}}.$$

同时,

$$\lim_{n\to\infty} Ma_n^{\alpha-1}=0.$$

因此由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha)=0$.

(3) 反之不对, 取 $a_n=n\ln n$, 则

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha&=(n+1)^\alpha\ln^\alpha(n+1)-n^\alpha\ln^\alpha\\
&<((n+1)^\alpha-n^\alpha)\ln^\alpha n\\
&=n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right)\ln^\alpha n\\
&<n^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)\ln^\alpha n\\
&=n^{\alpha-1}\ln^\alpha n=\frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}}=0,$$

因此由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha-a_n^\alpha)=0$. 但

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)\ln(n+1)-n\ln n=\ln(n+1)+n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>\ln(n+1),$$

显然无界.

习题 1.C.7 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=a$.

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a.$$

习题 1.C.8 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 且 $a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}{n}}\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{1}}=\mathrm{e}^{\ln a}=a.$$

习题 1.C.9 证明: 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 也存在, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

解 设 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}},(n>1);b_1=a_1$, 则 $a_n=b_1b_2\cdots b_n$. 由综合习题 1.C.8可知结果. 直接 Stolz 也

可以得到结果.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln a_n}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n}}$$
$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}}$$
$$=\mathrm{e}^{\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

习题 1.C.10 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解

(1) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$$

(2) 可以用综合习题 1.C.9来做, 记 $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$ 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\mathrm{e}.$$

习题 1.C.11 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\dfrac{a}{2}$.

解 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a}{2}.$$

习题 1.C.12 设 $\{a_n\}$ 且 $a_n\to a\in\mathbb{R}$, 又设 $\{b_n\}$ 是正数列, $c_n=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 求证:

(1) $\{c_n\}$ 收敛;

(2) 若 $(b_1+b_2+\cdots+b_n)\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

解

(1) 记 $B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 任取 $\varepsilon>0$, 存在 K, 当 $k>K$ 时,$|a_k-a|<\varepsilon$. 当 $n>K$, 有

$$c_n-a=\frac{\sum_{k=1}^n(a_k-a)b_k}{B_n}=\frac{\sum_{k=1}^K(a_k-a)b_k}{B_n}+\frac{\sum_{k=K+1}^n(a_k-a)b_k}{B_n}.$$

其中

$$\left|\frac{\sum_{k=K+1}^n(a_k-a)b_k}{B_n}\right|\leqslant\frac{\sum_{k=K+1}^n|a_k-a|b_k}{B_n}<\varepsilon\frac{\sum_{k=K+1}^n b_k}{B_n}<\varepsilon.$$

因此

$$\left|c_n-\left(a+\frac{\sum_{k=1}^K(a_k-a)b_k}{B_n}\right)\right|<\varepsilon.$$

而对于

$$q_n := \frac{\sum_{k=1}^{K}(a_k - a)b_k}{B_n},$$

$C := \sum\limits_{k=1}^{K}(a_k - a)b_k$ 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数,B_n 单调增, 因此 q_n 单调有界 ($C > 0$ 时 q_n 单调减且 $q_n > 0, C < 0$ 时 q_n 单调增且 $q_n < 0$), 故 q_n 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = q$, 再取 N, 使得当 $n, m > N$ 时,$|q_m - q_n| < \varepsilon$, 则当 $n, m > \max\{N, K\}$ 时,

$$|c_m - c_n| \leqslant |c_n - (a + q_n)| + |c_m - (a + q_m)| + |q_m - q_n| < 3\varepsilon.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 c_n 收敛.

(2) 下给出两种方法,

(a) 由 (1) 中的过程,$q_n = \dfrac{C}{B_n}$, 由于 $B_n \to +\infty, C$ 为常数, 因此 $q_n \to 0$, 因此存在 N, 使得当 $n > N$ 时,$|q_n| < \varepsilon$, 则当 $n > \max\{N, K\}$ 时,

$$|c_n - a| \leqslant |c_n - (a + q_n)| + |q_n| < \varepsilon + |q_n| < 2\varepsilon.$$

(b) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_nb_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

上述解答中给出了符合题目原意的证明, 即先证明 c_n 收敛, 然后在 B_n 无界时, 再证明 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. 但对于这道题而言, 还可以分类 B_n 有界和无界来讨论, 即先做 (2), 然后对 B_n 有界时, 用 Cauchy 收敛准则证明 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_nb_n\right\}$ 收敛, 即两种分类下以截然不同的方式来证明 c_n 收敛.

注 $a_n := \cdots$ 中 $:=$ 表示定义. 如 $a_n := \dfrac{1}{n}$ 表示我们新定义了一个数列 a_n, 其通项公式为 $a_n = \dfrac{1}{n}$. 在上文中 “$C := \sum\limits_{k=1}^{K}(a_k - a)b_k$ 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数.” 表示: “记 $C = \sum\limits_{k=1}^{K}(a_k - a)b_k$, 则 C 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数.” 有的地方会写为 $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \cdots$.

习题 1.C.13 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x^p}\right)^x = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ \mathrm{e}, & p = 1, \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$

解 实际上题目中的无穷只能是 $+\infty$.

$p>0$ 时, $x^p \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{x^p\cdot\frac{1}{x^{p-1}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{p-1}}}=\begin{cases}1, & p>1,\\ \mathrm{e}, & p=1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$$

$p\leqslant 0$ 时, $x^p\to 0$, 则考虑 $x>1$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x \geqslant \lim_{x\to+\infty}2^x=+\infty.$$

习题 1.C.14 设 $f(x)$ 为周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, 证明 $f(x)$ 恒为零.

解 设 $f(x)$ 的正周期为 $T>0, \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $|x|\geqslant N$ 时 $|f(x)|<\varepsilon$.

因此对于 $n=\left\lceil\dfrac{N}{T}\right\rceil$, 有 $nT\geqslant N$, 故对于任意 $x\in[nT,(n+1)T)$, 有 $f(x)<\varepsilon$.

利用周期性可以得到 $\forall x\in\mathbb{R}, |f(x)|<\varepsilon$. 由于 ε 是任意的正数, 所以 $f(x)$ 恒为零.

习题 1.C.15 证明

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递增数列 $\{a_n\}\,(a_n\neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$;

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0^+$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递减数列 $\{a_n\}\,(a_n\neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$.

解

(1) (a) 必要性: 考虑任意数列 $\{a_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$ 且 $\{a_n\}$ 单调递增, .

由于 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l$, 因此, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.

同时对于 $\delta, \exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-x_0|<\delta$, 即 $x_0-\delta<a_n<x_0$.

因此我们有 $m>N$ 时 $|f(a_n)-l|<\varepsilon$. 即得到数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛到 l.

(b) 充分性: 反证, 若 $x\to x_0^-$ 时 $f(x)$ 的极限为 l 不成立, 即 $\exists\varepsilon>0, \forall\delta>0, \exists x_0-\delta<x<x_0$, 使得 $|f(x)-l|\geqslant\varepsilon$.

因此我们依次构造 $\delta_1=1, \delta_n=\min\{\dfrac{1}{n}, x_0-a_{n-1}\}, (n>2)$, 则 $\exists a_n, x_0-\delta_n<a_n<x_0$, 使得 $|f(a_n)-l|\geqslant\varepsilon$. 即有 $a_n>a_{n-1}$, 且 $|x_0-a_n|<\dfrac{1}{n}$. 这意味着 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$.

由于 $|f(a_n)-l|\geqslant\varepsilon$, 所以 $\{f(a_n)\}$ 不收敛到 l, 矛盾, 故充分性成立.

(2) 证明同理. 具体而言:

设 $g(x)=f(-x)$, 则 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时有极限 $l\Leftrightarrow g(x)$ 在 $x\to -x_0^+$ 时有极限 l. 由 (1) 可知, 这等价于对于任意一个以 $-x_0$ 为极限的单调递增数列 $\{b_n\}\,(b_n\neq -x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}g(b_n)=l$. 设 $a_n=-b_n$, 则 $\{a_n\}$ 是以 x_0 为极限的单调递减数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$. 因此 (2) 得证.

习题 1.C.16 设 ξ 是一个无理数, a, b 是实数, 且 $a < b$. 求证: 存在整数 m, n 使得 $m+n\xi \in (a,b)$, 即, 集合

$$S = \{m + n\xi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

在 $\mathbb{R}$ 稠密.

解 稠密的定义: 设 $S \subset \mathbb{R}$, 若对任意 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, 都有 $S \cap (a,b) \neq \varnothing$, 则称 S 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

想法是这样的, 我们为了找到某个 $m + n\xi$ 落在 (a,b) 中, 于是用 ξ 构造一个充分小的实数 $\varepsilon = m_0 + n_0\xi \in (0, b-a)$, 因为这个 ε 够小, 因此在 $\mathbb{R}$ 的分割 $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{l\in\mathbb{Z}}[l\varepsilon, (l+1)\varepsilon]$ 中, 每一段的长度 ε 严格小于 $b-a$. 这样就能证明 $\{l\varepsilon \mid l \in \mathbb{Z}\} \cap (a,b) \neq \varnothing$, 也就是存在某个 $l_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $l_0\varepsilon \in (a,b)$. 随后我们取 $m = l_0m_0, n = l_0n_0$ 即有 $m + n\xi = l_0\varepsilon \in (a,b)$.

构造 ε　实际上, 对于 $b - a > 0$, 总存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\dfrac{1}{k} < b - a$. 因此我们考虑构造一个满足 $\varepsilon < \dfrac{1}{k}, \varepsilon \in S$ 即可.

对于 $l = 1, 2, \cdots, k+1$, 我们考虑

$$n_l = \lfloor l\xi \rfloor$$
$$x_l = l\xi - n_l \in S.$$

x_l 是 $l\xi$ 的小数部分, 容易知道 $x_l \in [0,1)$, 并且 x_l 之间总是两两不同的, 否则 $i\xi - n_i = j\xi - n_j, i \neq j$, 这意味着 $\xi = \dfrac{n_i - n_j}{i - j}$, 这与 ξ 为无理数矛盾.

因此对于

$$[0,1) = \bigcup_{j=1}^{k}\left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right),$$

这 k 个区间包括了 $k+1$ 个不同实数 x_l. 因此总有一个区间内部存在同时两个实数, 记为 $x_p, x_q \in S, p \neq q$, 不妨认为 $x_q > x_p$.

由 x_l 的构造 $x_p = p\xi - n_p, x_q = q\xi - n_q$, 有

$$x_q - x_p = (q-p)\xi - (n_p - x_q) \in S,$$

且由于 x_p, x_q 落在同一个区间内, 而区间长度为 $\dfrac{1}{k}$, 因此 $0 < x_q - x_p \leqslant \dfrac{1}{k} < b - a$, 所以 $x_q - x_p$ 满足我们对 ε 的要求. 我们取

$$\varepsilon = x_q - x_p.$$

构造 m, n　我们先证明 $\exists l_0 \in \mathbb{Z}, \mathrm{s.t.}\, l_0\varepsilon \in (a,b)$: 我们取 $l_0 = \left\lceil \dfrac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1$, 则

$$l_0\varepsilon = \left(\left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1\right)\varepsilon < \left(\frac{b}{\varepsilon} + 1 - 1\right)\varepsilon = b.$$

同时, 由于 $\varepsilon < b-a$, 因此

$$l_0\varepsilon = \left(\left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1\right)\varepsilon \geqslant \left(\frac{b}{\varepsilon} - 1\right)\varepsilon = b - \varepsilon > b - (b-a) = a.$$

因此取 $l_0\varepsilon \in (a,b)$, 因此

$$m = l_0(n_q - n_p), n = l_0(q-p)$$

即有 $m + n\xi = l_0(n_q - n_p) + l_0(q-p)\xi = l_0\left((q-p)\xi - (n_p - n_q)\right) = l_0\varepsilon \in (a,b)$.