

数学分析讲义 (第一册)

习题解答

October 26, 2025

目录

第 1 章 极限	1
习题 1.1	1
习题 1.2	4
习题 1.3	15
第 1 章综合习题	26
第 2 章 连续函数的基本概念	35
习题 2.1	35
习题 2.2	44
第 2 章综合习题	48
第 3 章 单变量函数的微分学	53
习题 3.1	53
习题 3.2	70
习题 3.3	74
习题 3.4	87
习题 3.5	92
习题 3.6	94
第 3 章综合习题	98

第1章 极限

习题 1.1

习题 1.1.1 设 a 是有理数, b 是无理数. 求证: $a+b$ 和 $a-b$ 都是无理数; 当 $a \neq 0$ 时, ab 和 $\frac{b}{a}$ 也都是无理数.

解 设 a 是有理数, b 是无理数.

(1) 若 $a+b$ 是有理数, 则 $b = (a+b) - a$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $a-b$ 是无理数.

(2) 若 ab 是有理数, 则 $b = \frac{ab}{a}$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $\frac{b}{a}$ 是无理数.

习题 1.1.2 求证: 两个不同的有理数之间有无理数.

解 设 a, b 是两个不同的有理数, 不妨设 $a < b$. 则存在正整数 k, N 使得

$$(\sqrt{2})^{2k-1} a < N < (\sqrt{2})^{2k-1} b.$$

具体而言, 取 $k > \lceil \log_2(b-a) \rceil$, 则 $k > \log_2 \frac{2\sqrt{2}}{b-a} \Rightarrow 2^k(b-a) > 2\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2})^{2k-1} b - (\sqrt{2})^{2k-1} a > 2$. 因此, 存在整数 $N = \left\lfloor (\sqrt{2})^{2k-1} b \right\rfloor$, 使得 $(\sqrt{2})^{2k-1} a < N < (\sqrt{2})^{2k-1} b$. 于是

$$a < \frac{N}{(\sqrt{2})^{2k-1}} < b.$$

而 $\frac{N}{(\sqrt{2})^{2k-1}} = \frac{N\sqrt{2}}{2^k}$ 是无理数.

习题 1.1.3 求证: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 以及 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 都是无理数.

解

(1) 设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $2q^2 = p^2$, 由素数分解的唯一性可知 p 是偶数, 设 $p = 2k$, 则 $2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$, 同理可知 q 也是偶数, 与 p, q 互素矛盾. 因此 $\sqrt{2}$ 是无理数.

(2) 设 $\sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $3q^2 = p^2$, 由素数分解的唯一性可知 p 是 3 的倍数, 设 $p = 3k$, 则 $3q^2 = 9k^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2$, 同理可知 q 也是 3 的倍数, 与 p, q 互素矛盾. 因此 $\sqrt{3}$ 是无理数.

(3) 设 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $2 + 3 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2}$, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 因此 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数.

习题 1.1.4 把下列循环小数表示为分数:

(1) $0.24999\dots$

(2) $0.\dot{3}7\dot{5}$

(3) $4.\dot{5}1\dot{8}$

解

(1) 设 $x = 0.24999\dots$, 则 $10x = 2.4999\dots$, 因此 $9x = 2.25 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.

(2) 设 $x = 0.\dot{3}7\dot{5}$, 则 $1000x = 375.375375\dots$, 因此 $999x = 375 \Rightarrow x = \frac{375}{999} = \frac{125}{333}$.

(3) 设 $x = 4.\dot{5}1\dot{8}$, 则 $1000x = 4518.518518\dots$, 因此 $999x = 4514 \Rightarrow x = \frac{4514}{999} = \frac{122}{27}$.

习题 1.1.5 设 r, s, t 都是有理数. 求证:

(1) 若 $r + s\sqrt{2} = 0$, 则 $r = s = 0$;

(2) 若 $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0$, 则 $r = s = t = 0$.

解

(1) 假设 $s \neq 0$, 则 $\sqrt{2} = -\frac{r}{s}$ 是有理数, 与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾. 因此 $s = 0$, 从而 $r = 0$.

(2) $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0 \Rightarrow r^2 = 2s^2 + 3t^2 + 2st\sqrt{6} \Rightarrow (r^2 - 2s^2 - 3t^2) + (-2st)\sqrt{6} = 0$.

与 (1) 类似, 若 $st \neq 0$, 则 $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 2s^2 - 3t^2}{2st}$ 是有理数, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 故 $st = 0$,

(a) 若 $t = 0$, 则 $r + s\sqrt{2} = 0$, 由 (1) 可知 $r = s = 0$;

(b) 若 $s = 0$, 则 $r + t\sqrt{3} = 0$, 同理可知 $r = t = 0$.

习题 1.1.6 设 a_1, a_2, \dots, a_n 有相同的符号, 且都大于 -1 . 证明:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

解 利用数学归纳法:

当 $n = 1$ 时, 等式为

$$1 + a_1 \geq 1 + a_1,$$

显然成立.

假设当 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_k) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

以此作为条件, 当 $n = k + 1$ 时, 由 $a_{k+1} > -1$, 可知 $1 + a_{k+1} > 0$, 因此

$$\begin{aligned}
(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_k)(1 + a_{k+1}) &\geq (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(1 + a_{k+1}) \\
&= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\
&\geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}.
\end{aligned}$$

其中 $a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \cdots + a_ka_{k+1} \geq 0$, 因为 a_i 与 a_{k+1} 符号相同.习题 1.1.7 设 a, b 是实数, 且 $|a| < 1, |b| < 1$. 证明:

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1.$$

解 由 $|a| < 1, |b| < 1$, 可知 $ab \neq -1$. 因此

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1 \Leftrightarrow |a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow (a+b)^2 < (1+ab)^2.$$

即

$$a^2 + b^2 + 2ab < 1 + a^2b^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2 \Leftrightarrow (1-a^2)(1-b^2) > 0.$$

显然成立.

习题 1.2

习题 1.2.1 用定义证明下面的结论:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5+3n} = \frac{1}{3}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$;
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$; (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

解

(1) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{5}{9\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{n}{5+3n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n - (5+3n)}{3(5+3n)} \right| = \frac{5}{3(5+3n)} < \frac{5}{9n} < \varepsilon.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(3) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon.$$

(4) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{n!}{n^n} - 0 \right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

习题 1.2.2 若数列 $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) 满足条件: 任给正数 ε , 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ (其中 M 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 a 为极限.

M 为常数指的是 M 不依赖于 ε 和 n . 例如 $M = 2, M = 1000$ 等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于 $\forall M > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ 成立.

习题 1.2.3 证明: 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

解 充分性: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

必要性: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0.$$

习题 1.2.4 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$ 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon.$ 则

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$

反之不一定成立, 如数列 $a_n = (-1)^n,$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1,$ 但 $\{a_n\}$ 发散.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0,$ 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$ 当 $n > N$ 时, 有 $||a_n| - 0| < \varepsilon.$ 则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

习题 1.2.5 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$ 又 $|b_n| \leq M, (n = 1, 2, \dots),$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$ 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.$ 则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$

习题 1.2.6 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = a,$ 及 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a,$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$

解 按已知条件 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0,$ 当 $n > N_1$ 时 $|x_{2n} - a| < \varepsilon.$ 又 $\exists N_2 > 0,$ 当 $n > N_2$ 时 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon.$ 于是令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\},$ 则 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon.$ 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$

习题 1.2.7 证明下列数列不收敛:

$$(1) a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}; \quad (2) a_n = 5 \left(1 - \frac{2}{n}\right) + (-1)^n.$$

解

- (1) 取 $a_{2n} = \frac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2},$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1,$ 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1},$ 矛盾.
- (2) 取 $a_{2n} = 5 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5 \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) - 1,$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 6, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 4,$ 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1},$ 矛盾.

习题 1.2.8 求下列极限:

- (1) $a_n = \frac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1};$
- (2) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n};$
- (3) $a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n(n+1)/2}\right), n = 2, 3, \dots;$
- (4) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$
- (5) $a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^m}), (|q| < 1).$

解

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

(3)

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n^2 + n - 2)/2}{n(n+1)/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{(1 \cdot 2 \cdots (n-1)) \cdot (4 \cdot 5 \cdots (n+2))}{(2 \cdot 3 \cdots (n)) \cdot (3 \cdot 4 \cdots (n+1))} = \frac{1 \cdot (n+2)}{n \cdot 3} = \frac{n+2}{3n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

(4)

$$a_n = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^n})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1 - \lim_{m \rightarrow \infty} q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

习题 1.2.9 若 $a_n \neq 0 (n=1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 能否断定 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?

解 不能. 例如 $a_n = \frac{1}{2^n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 可能为 0.

习题 1.2.10 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$, 是否必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$? 若还假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 回答同样的问题.

解 不一定. 例如 $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, 但

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 均不存在.

当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 时成立. 假设 $a \neq 0$ 时, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{0}{a} = 0$.

习题 1.2.11 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性如何? 举例说明. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 回答同样的问题.

解

(1) $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则

(a) $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ 都发散可以采用反证法: 若 $\{a_n + b_n\}$ 收敛, 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 容易知道 $\{a_n + b_n - a_n\} = \{b_n\}$ 收敛, 这与 $\{b_n\}$ 发散矛盾, 因此 $\{a_n + b_n\}$ 发散, $\{a_n - b_n\}$ 同理可得.

(b) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

I. $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = 1$ 收敛;

II. $a_n = 1, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = n$ 发散.

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散, 则

(a) $\{a_n + b_n\}$ 的收敛性不确定

I. $a_n = n, b_n = -n$, 则 $a_n + b_n = 0$ 收敛.

II. $a_n = n, b_n = n$, 则 $a_n + b_n = 2n$ 发散.

(b) $\{a_n - b_n\}$ 的收敛性不确定

I. $a_n = n + \frac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n - b_n = \frac{1}{n}$, 收敛.

II. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}$, 则 $a_n - b_n = 2 \cdot (-1)^n$ 发散.

(c) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

I. $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则 $a_n \cdot b_n = 0$ 收敛.

II. $a_n = n, b_n = (-1)^n$, 则 $a_n \cdot b_n = (-1)^n n$ 发散;

习题 1.2.12 下面的推理是否正确?

(1) 设数列 $\{a_n\}: a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 在 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 两边取极限, 得 $a = 2a - 1$, 即 $a = 1$.

(2)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \underbrace{0+0+\cdots+0}_{n \text{ 个}} = 0. \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n = 1^n = 1.$$

解

(1) 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为 $a_n = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

(2) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

并有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1.$$

(3) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

习题 1.2.13 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a, b . 若 $a > b$, 则从某一项开始, 有 $a_n > b_n$; 反之, 若从某项开始恒有 $a_n \geq b_n$, 则 $a \geq b$.

解 这是保序性的直接推论.

习题 1.2.14 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别收敛于 a 及 b . 记 $c_n = \max(a_n, b_n)$, $d_n = \min(a_n, b_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \max(a, b), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \min(a, b).$$

解 由 $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$, $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$, 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

习题 1.2.15 求下列极限:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right];$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k)$, 其中 $0 < k < 1$;
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2});$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 2} - n);$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n}).$

解

(1) 由于

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = 0.$$

(2) 由于

$$0 \leq ((n+1)^k - n^k) = n^k \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right) \leq n^k \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 - 1 \right) = n^{k-1}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-1} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k) = 0.$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

(4) 由 $\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1)$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2)} = e^0 = 1.$$

(5) 由于

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} \leq \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leq \sqrt[n]{n}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} = 1.$$

习题 1.2.16 设 a_1, a_2, \dots, a_m 为 m 个正数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

解 设 $a_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a_k = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

习题 1.2.17 证明下列数列收敛:

- (1) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$;
- (2) $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$;
- (3) $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots + \alpha_n q^n$, 其中 $|\alpha_k| \leq M$, ($k = 1, 2, \dots$), 而 $|q| < 1$;
- (4) $a_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$.

证明

- (1) 由 $1 - \frac{1}{2^n} < 1$, 可知 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.
- (2) 由 $a_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} < \frac{1}{2}$, 可知 $\{a_n\}$ 有上界, 且 a_n 单调递增, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.
- (3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \log_{|q|} \frac{\varepsilon(1-|q|)}{2M} \right\rfloor + 1$, 则当 $m > n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| = |\alpha_{n+1}q^{n+1} + \cdots + \alpha_m q^m| \leq M(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \cdots) = M \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon.$$

- (4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, 则当 $m > n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m}{m(m+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

习题 1.2.18 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

- (1) $a_n = \frac{n}{c^n}$, ($c > 1$);
- (2) $a_1 = \frac{c}{2}$, $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$ ($0 \leq c \leq 1$);
- (3) $a > 0$, $a_0 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right)$ (提示: 先证明 $a_n^2 \geq a$);
- (4) $a_0 = 1$, $a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}$;
- (5) $a_n = \sin \sin \cdots \sin 1$ ($n \uparrow \sin$).

解

- (1) 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{c^{n+1} - c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n(c-1)} = 0.$$

- (2)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1})$$

由 $a_2 - a_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 > 0$, 可递归的得知 $a_{n+1} - a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $a_1 < c$, 归纳

的可得 $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$, 因此 $\{a_n\}$ 有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$, 又由 $a_n > 0$, 可知 $a = 1 - \sqrt{1-c}$.

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) \right)^2 \geq a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

因此 $\{a_n\}$ 在 $n \geq 1$ 时单调减, 且有下界 \sqrt{a} , 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, 则 $l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{a}{l} \right)$, 解得 $l = \sqrt{a}$.

(4)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} - \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} \right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1} + 1)^2}$$

由 $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$ 归纳的可得 $1 + a_n - a_n^2 > 0$, 因此 $a_n - a_{n-1} > 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 有上界, 因此 $\{a_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 递推式两侧取极限, 得 $a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 由于 $a_n > 0$ 始终成立, 故 $a \geq 0$ 而 $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, 故舍去这一值, 进而得到 $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

(5) $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$, 因此 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a = \sin a \Rightarrow a = 0$.

习题 1.2.19 设 $a_n \leq a \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - b_n| < \varepsilon$. 又由 $a_n \leq a \leq b_n$, 可知 $|a_n - a| = a - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$, 同理 $|b_n - a| < \varepsilon$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

习题 1.2.20 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

解 先证明一个引理: 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

证明如下

(1) $a = 0$ 时,

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

同时, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1} = 0$$

由夹逼定理, 得证.

(2) $a > 0$ 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = a,$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

由夹逼定理, 得证.

回到本题,

可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{l} < 1$. 因此 $\exists r = \frac{1 + \frac{1}{l}}{2} \in (0, 1)$, 使得当 n 充分大时, $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} < r$. 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} < r^n,$$

即 $a_n < a_1 r^n$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

习题 1.2.21 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是正数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n = 1, 2, \dots$. 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

解 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 则由 $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = a_1 \cdot \frac{b_n}{b_1}$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$, 由原式有 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 单调减, 且 $\frac{a_n}{b_n} > 0$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = bc$.

习题 1.2.22 利用极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1};$$

$$(2) a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1};$$

$$(3) a_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n;$$

$$(4) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}.$$

简要说明: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 故 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的任意子列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ 也收敛于 e . 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为 $\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ 的形式, 从而求出极限.

对于类似于 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ 的形式, 可以考虑先通分再变形去掉指数的负号即可处理.

在此过程中下列命题也相同有用:

命题 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a, a_n > 0, a > 0$. $\{b_n\}$ 收敛于 b . 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$.

请注意, 这条结论对于 1^∞ 型是不能直接使用的, 即若 $a_n \rightarrow 1, b_n \rightarrow \infty$, 则不能直接说 $a_n^{b_n} \rightarrow 1^\infty = 1$. 但是对于 $a_n \rightarrow a > 1, b_n \rightarrow \infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \rightarrow a^{+\infty} = +\infty$; 对于 $a_n \rightarrow a < 1, b_n \rightarrow +\infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \rightarrow a^{+\infty} = 0$.

解

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \Big|_{m=2n+1} = e;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{-n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{(n-3) \cdot \left(-\frac{n+1}{n-3}\right)} = e^{-1};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1) \cdot \left(-\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3 \cdot 2} = e^2.$$

习题 1.2.23 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, 且 $|b_n| \geq b > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

解 对 $\forall M > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n| > \frac{M}{b}$. 又由 $|b_n| \geq b > 0$, 可知 $|a_n b_n| \geq |a_n| |b| > M$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

习题 1.2.24 确定 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}$ 与 $n \sin \frac{n\pi}{2}$ ($n \geq 1$) 是否有界, 是否趋于无穷大.

解 $\sqrt[n]{n!}$ 无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$$

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty$, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

注 Stolz 定理规范的思路要先说明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ 存在, 然后才能说明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 存在. 为了方便,

我们也会省去前面的部分, 直接写 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$.

$n \sin \frac{n\pi}{2}$ 无界, 但是不趋于无穷大. 当 $n = 4k + 1$ 时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = 4k + 1$, 趋于无穷大; 当 $n = 4k + 3$ 时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = -(4k + 3)$, 趋于负无穷大; 当 n 为偶数时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = 0$.

习题 1.2.25 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ ($n \geq 1$) 定义, 证明: $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$).

解 由 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \frac{1}{a_n}(a_n + a_n + \frac{1}{a_n}) = 2 + \frac{1}{a_n^2} > 2$, 可知 $a_n^2 > 2(n-1)$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

习题 1.2.26 给出 $\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理的证明.

命题 ($\frac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小量, 其中 $\{a_n\}$ 还是严格单调减少数列, 又

存在 (其中 l 为有限或 $\pm\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$

证明

(1) 当 l 为有限值时, 根据条件对 $\varepsilon > 0$ 存在 N , 使当 $n > N$ 时成立

$$\left| \frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} - l \right| < \varepsilon.$$

由于对每个 n 都有 $a_n > a_{n+1}$, 这样就有

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_{n+1}) < b_n - b_{n+1} < (l + \varepsilon)(a_n - a_{n+1}).$$

任取 $m > n$, 并且将上述不等式中的 n 换成 $n+1, \dots$, 直到 $m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_m) < b_n - b_m < (l + \varepsilon)(a_n - a_m),$$

以及

$$\left| \frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l \right| < \varepsilon.$$

令 $m \rightarrow \infty$, 并利用条件 $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$, 就知道当 $n > N$ 时成立

$$\left| \frac{b_n}{a_n} - l \right| \leq \varepsilon.$$

(2) $l = +\infty$ 时. 根据条件对任意 $M > 0$ 存在 N , 使当 $n > N$ 时成立

$$\frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} > M.$$

由于对每个 n 都有 $a_n > a_{n+1}$, 这样就有

$$b_n - b_{n+1} > M(a_n - a_{n+1}).$$

任取 $m > n$, 并且将上述不等式中的 n 换成 $n+1, \dots$, 直到 $m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$b_n - b_m > M(a_n - a_m),$$

以及

$$\frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} > M.$$

令 $m \rightarrow \infty$, 并利用条件 $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$, 就知道当 $n > N$ 时成立

$$\frac{b_n}{a_n} > M.$$

习题 1.3

习题 1.3.1 按定义证明:

- (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, (a > 1);$ (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1;$
 (3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+x} = 2;$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/q} = 0$ (q 为正整数).

解

- (1) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $M = \log_a \varepsilon$, 则当 $x < M$ 时, $|a^x - 0| = a^x < a^M = \varepsilon$.
 (2) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $M = \frac{2}{\varepsilon} + 1$, 则当 $|x| > \max\{M, 1\}$ 时, $\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{x+1} \right| \leq \frac{2}{|x|-1} < \varepsilon$.
 (3) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$, 则当 $0 < |x+1| < \delta$ 时, $\left| \frac{x^2-1}{x^2+x} - 2 \right| = \left| \frac{-x^2-2x-1}{x^2+x} \right| = \left| \frac{x+1}{x} \right| < \frac{\delta}{1/2} \leq \varepsilon$.
 (4) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon^q$, 则当 $0 < x < \delta$ 时, $|x^{1/q} - 0| = x^{1/q} < \delta^{1/q} = \varepsilon$.

习题 1.3.2 求下列极限:

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x} \right);$ (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$ (n 为正整数);
 (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$ (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}.$

(1) 由四则运算的极限可知,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x} \right) = 1 - 5 + 2 + 1 = -1.$$

(2) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

请注意, 这里 n 是常数, 因此可以交换这 n 个极限与求和的顺序.

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(3 + \frac{6}{x}\right)^{70} \left(8 - \frac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5 - \frac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{\left(3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x}\right)^{70} \left(8 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}}$$

事实上, $\frac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}} = \left(\frac{3^7 \cdot 2^6}{5^9}\right)^{10} = 0.000000000003572622918985825913651456872761246392142557535369616400676018940233797678923776.$

习题 1.3.3 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

(1) 用 Cauchy 收敛原理. 对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 任取 $M > 0$, 总存在 $k = \lceil M/\pi \rceil$, 使得 $x_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi > M$, $x_2 = (k+1)\pi > M$ ($k \in \mathbb{N}^*$), 使得 $|\sin x_1 - \sin x_2| = 1 > \varepsilon$. 因此极限不存在.

(2) 考虑两个单边极限,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

而极限存在的充要条件是两个单边极限存在且相等, 因此极限不存在.

习题 1.3.4 设函数 $f(x)$ 在正无穷大处的极限为 l , 则对于任意趋于正无穷大的数列 $\{a_n\}$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$. 特别地 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$.

(无穷版本的 Heine 定理) 解 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, 存在 $M > 0$, 使得当 $x > M$ 时, $|f(x) - l| < \varepsilon$. 又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $a_n > M$. 因此当 $n > N$ 时, $|f(a_n) - l| < \varepsilon$. 由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$. 特别地, 取 $a_n = n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$.

习题 1.3.5 讨论下列函数在 $x = 0$ 处的极限.

$$(1) f(x) = [x]; \quad (2) f(x) = \operatorname{sgn} x;$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1 + x^2, & x < 0. \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x > 0; \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$$

解 注 教材中的符号 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 即不大于 x 的最大整数. 本题中, 我们沿用此符号. 其他地方, 我们使用 $\lfloor x \rfloor$ 表示对 x 向下取整, 使用 $\lceil x \rceil$ 表示对 x 向上取整.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$. 因此极限不存在.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$. 左右极限均存在, 但不相等, 因此极限不存在.
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^2) = 1$. 因此极限存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$ 不存在, 因此右极限不存在. 左极限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$. 函数在 $x = 0$ 处的极限不存在.

注 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$ 的极限过程等同于考虑 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$, 而该极限不存在 (与习题 1.3.3(1) 同理).

习题 1.3.6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$.

解

- (1) 当 $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\sin \frac{x}{2^m} \neq 0$ 时, 二倍角公式变形可得 $\cos y = \frac{\sin 2y}{2 \sin y}$, 当 $\sin y \neq 0$, 反复利用可知

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2^2}} \cdots \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

(2) 若存在 $m_0 \geq 1$, $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$, 有 $\frac{x}{2^{m_0}} = k\pi, x = 2^{m_0}k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 自然的推论是 $\forall m \leq m_0$, 有 $\sin \frac{x}{2^m} = \sin(2^{m_0-m}k\pi) = 0$.

此时根据是否存在最大的 m_0 , 使得 $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$ 可以分成两种情况:

(a) $x = 0$, 则 $\forall m \in \mathbb{N}^*$, 有 $\cos \frac{x}{2^m} = 1$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = 1$;

(b) $x \neq 0 \Leftrightarrow \exists m_0$, s.t. $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0, \sin \frac{x}{2^{m_0+1}} \neq 0$, 也就是存在最大的 m_0 .

因此可以得到 $x = 2^{m_0}k\pi, k = 2l + 1, l \in \mathbb{Z}$ (如果 k 是偶数, 那么与 $\sin \frac{x}{2^{m_0+1}} = \sin \frac{k\pi}{2} \neq 0$ 矛盾).

此时 $\cos \frac{x}{2^{m_0+1}} = \cos \frac{k\pi}{2} = \cos \left(l + \frac{1}{2} \right) \pi = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = 0$.

不过又由于 $\sin x = 0$ 同样成立, 并且 $x \neq 0$, 因此可以把结果合并进 $\frac{\sin x}{x}$.

综上所述,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

习题 1.3.7 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2} \right) = \frac{\alpha}{2}$.

解 我们先证明如下事实:

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, & \sin \frac{\theta}{2} \neq 0; \\ 0, & \sin \frac{\theta}{2} = 0. \end{cases}$$

我们利用积化和差

$$\sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta = \frac{1}{2} \left(\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} \left(\sum_{k=1}^n \sin k\theta \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} + \cdots + \cos \left(n - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \sin \frac{n+1}{2} \theta \sin \frac{n}{2} \theta. \end{aligned}$$

因此, 当 $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$ 自然有

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

另一种情况是显然的, 每一项都为 0.

回到本题, 首先, 如果 $\alpha \neq 0$, 那么这意味着存在充分大的 N 使得 $n > N, 0 < \left| \frac{\alpha}{n^2} \right| < \pi$, 此时, $\sin \frac{\alpha}{2n^2} \neq 0$. 因此 $n > N$ 时,

$$\sum_{k=1}^n \sin k \frac{\alpha}{n^2} = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \sin \frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin \frac{\alpha}{2n^2}}$$

考虑 $\sin x \sim x, (x \rightarrow 0)$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin k \frac{\alpha}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \sin \frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin \frac{\alpha}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \cdot \frac{n\alpha}{2n^2}}{\frac{\alpha}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2}.$$

如果 $\alpha = 0$, 那么每一项都为 0, 极限自然为 $0 = \frac{\alpha}{2}$.

综上所述,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2} \right) = \frac{\alpha}{2}.$$

习题 1.3.8 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 反之亦正确. 叙述并证明, 当 $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 时类似的结论. (应用本题结论, 可将极限过程为 $x \rightarrow \infty$ 的问题化为 $x \rightarrow 0$ 处理, 或者反过来. 例如, 我们有 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$.)

解 我们先给出这条命题的完整表述:

命题 (1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 反之亦正确;

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 反之亦正确;

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 反之亦正确;

证明:

(1) 由 Heine 定理, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l. \Rightarrow \forall \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$.
反之, 若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l. \Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$.

(2) 由 Heine 定理, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l. \Rightarrow \forall \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$.

反之, 若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$.
 $\Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

(3) 由 Heine 定理, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l \Rightarrow \forall \{y_n\}$, 若
 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^-$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = -\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$.
 反之, 若 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^-$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$.
 $\Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^-$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

习题 1.3.9 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}.$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

(2) 由和差化积,

$$\cos x - \cos 3x = 2 \sin 2x \sin x,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$$

(3) 当 $x > \frac{7}{2}$ 时, 有 $0 < \frac{x+1}{2x-1} < \frac{3}{4}$ 恒成立, 因此

$$0 \leq \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x \leq \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

又由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$, 由夹逼定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x = 0.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{2}{x^2-1} x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2-1} x^2} = e^2$$

习题 1.3.10 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1).$$

解

(1) $\arctan x$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时有界, 而 $x \rightarrow +\infty$ 时无界, 因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0.$$

具体而言,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

(2) 由夹逼定理,

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2,$$

且 $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

(4) 证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1) = +\infty.$$

由 $2x^2 - x + 1 = x^2 + (x - 1/2)^2 + 3/4 > x^2$, 因此对 $\forall M > 0$, 取 $N = \sqrt{M}$, 则当 $x > N$ 时, $2x^2 - x + 1 > x^2 > N^2 = M$. 由此可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1) = +\infty.$$

习题 1.3.11 按定义证明.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, (a > 1);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, (a > 1);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty.$$

解

(1) 对 $\forall M > 0$, 取 $N = a^M$, 则当 $x > N$ 时, $\log_a x > \log_a N = M$.

(2) 对 $\forall M < 0$, 取 $\delta = a^M$, 则当 $0 < x < \delta$ 时, $\log_a x < \log_a \delta = M$.

(3) 对 $\forall M > 0$, 取 $\delta = \frac{\pi}{2} - \arctan M$, 则当 $\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > \tan(\frac{\pi}{2} - \delta) = M$.

(4) 对 $\forall M > 0$, 取 $\delta = \frac{1}{\ln M}$, 则当 $0 < x < \delta$ 时, $e^{1/x} > e^{1/\delta} = M$.

习题 1.3.12 证明: 函数 $y = x \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界, 但当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 这个函数并不是无穷大量.

解 $\forall M > 0$, 存在 $x_0 = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k-1 > M$, 因此 $y(x_0) = x_0 \sin x_0 = x_0 > M$. 由此可知 $y = x \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界.

$\forall X > 0$, 总存在 $x_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k\pi > X$, 使得 $y(x_1) = x_1 \sin x_1 = 0$. 因此当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = x \sin x$ 并不是无穷大量.

习题 1.3.13 函数 $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是否有界? 又当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 这个函数是否为无穷大量?

解 考虑 0^+ 处的 $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 与考虑 $+\infty$ 处的 $x \cos x$ 是等价的. 以与 **习题 1.3.12** 类似的方法可知, $y = x \cos x$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界, 但当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = x \cos x$ 并不是无穷大量. 因此, $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 但当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 并不是无穷大量.

习题 1.3.14 本题所涉及的函数极限有着鲜明的几何意义.

记函数 $y = f(x)$ 所表示的曲线为 C . 若动点沿曲线无限远离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线 C 的一条渐近线.

(i) 垂直渐近线 易知 (垂直于 x 轴的) 直线 $x = x_0$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty.$$

(ii) 水平渐近线 易知 (平行于 x 轴的) 直线 $y = b$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

(iii) 斜渐近线 请读者证明, 方程为 $y = ax + b (a \neq 0)$ 的直线 L 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax);$$

或者

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax).$$

这里自然要假定所说的极限都存在. (提示: 以 $x \rightarrow +\infty$ 为例, 设曲线 C 及直线 L 上的横坐标为 x 的点分别为 M, N . 则 M 至 L 的距离, 是 $|MN|$ 的一个常数倍. 因此, 直线 L 为曲线 C 的渐近线, 等价于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, 由此易得所说结果.)

求下列曲线的渐近方程.

$$(1) y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right);$$

$$(2) y = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1}.$$

解 先证明, 仅证明 $+\infty$, 另一种同理. 正如提示所说, 由于距离 $d = \left| \frac{f(x) - (ax + b)}{\sqrt{a^2 + 1}} \right|$, 因此 l 是

渐近线, 等价于 $x \rightarrow +\infty$ 时 d 趋于 0, 等价于 $f(x) - (ax + b)$ 趋于 0.

然后问题转化为了证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Leftrightarrow a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

充分性: 由 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ 可知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

必要性: 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ 可知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

$$(1) \quad (a) \text{ 垂直渐近线, } x = -\frac{1}{e}: \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{e})^-} = -\frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = +\infty;$$

$$(b) \text{ 斜渐近线, } y = x + \frac{1}{e}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e + \frac{1}{x}) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(e + \frac{1}{x}) - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{1}{ex}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{ex})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/ex}{1/x} = \frac{1}{e} \text{ (}\pm\infty\text{ 两侧是同一条渐近线);}$$

$$(2) \quad (a) \text{ 垂直渐近线, } x = 1: \lim_{x \rightarrow 1} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1} = \infty;$$

$$(b) \text{ 斜渐近线, } y = 3x + 1: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 3, \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x - 1} = 1;$$

习题 1.3.15 证明: 在同一极限过程中等价的无穷小量有下列性质:

(1) $\alpha(x) \sim \alpha(x)$ (自反性);

(2) 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\beta(x) \sim \alpha(x)$ (对称性);

(3) 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ (传递性).

(注意, (1) 中自然需假定 $\alpha(x)$ 不取零值; 而在 (2)、(3) 中, 条件蕴含着, 所说的无穷小量在极限过程中均不取零值.)

解 解释一下, 这里说的是 (1) 需要没有 $\alpha(x) \equiv 0$ 这种情况. (2)(3) 因为有“若 xxx”的假设自然排除了这种情况.

$$(1) \text{ 显然, } \lim \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \text{ 因此 } \alpha(x) \sim \alpha(x).$$

$$(2) \text{ 由 } \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ 可知, } \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \text{ 因此 } \lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1, \text{ 即 } \beta(x) \sim \alpha(x).$$

$$(3) \text{ 由 } \alpha(x) \sim \beta(x), \beta(x) \sim \gamma(x) \text{ 可知, } \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \lim \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1, \text{ 因此 } \lim \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot$$

$$\lim \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1, \text{ 即 } \alpha(x) \sim \gamma(x).$$

习题 1.3.16 当 $x \rightarrow 0$ 时, 比较下列无穷小的阶:

(1) $\tan x - \sin x$ 与 x^3 ;

(2) $x^3 + x^2$ 与 $\sin^2 x$;

(3) $1 - \cos x$ 与 x^2 .

解

(1)

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x}.$$

由 $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \cos x \sim 1$, 可知

$$\tan x - \sin x \sim x \cdot \frac{x^2/2}{1} = \frac{x^3}{2}.$$

因此,

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

(2)

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \sim x^2 (x \rightarrow 0).$$

同时,

$$x^3 + x^2 = (x+1)x^2 \sim x^2 (x \rightarrow 0).$$

可得

$$x^3 + x^2 \sim \sin^2 x$$

(3)

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2} (x \rightarrow 0).$$

习题 1.3.17 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 试比较下列无穷大量的阶:

(1) n 次多项式 $P_n(x)$ 与 m 次多项式 $P_m(x)$ (m, n 均为正整数);

(2) x^α 与 x^β ($\alpha, \beta > 0$);

(3) a^x 与 b^x ($a, b > 1$).

解

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^m} \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots}$$

$$= \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ +\infty, & n > m. \end{cases} \text{即得到} \begin{cases} P_n(x) \sim P_m(x), & n = m; \\ P_m(x) \text{更高阶}, & n < m; \\ P_n(x) \text{更高阶}, & n > m. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 利用 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha < \beta; \\ +\infty, & \alpha > \beta. \end{cases} \text{可得} \begin{cases} x^\alpha \sim x^\beta, & \alpha = \beta; \\ x^\beta \text{更高阶}, & \alpha < \beta; \\ x^\alpha \text{更高阶}, & \alpha > \beta. \end{cases}$$

$$(3) \text{ 利用 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \begin{cases} 1, & a = b; \\ 0, & a < b; \\ +\infty, & a > b. \end{cases} \text{可得} \begin{cases} a^x \sim b^x, & a = b; \\ b^x \text{更高阶}, & a < b; \\ a^x \text{更高阶}, & a > b. \end{cases}$$

习题 1.3.18 试用等价无穷小量代换的方法计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m, n \text{ 均为正整数});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\arctan x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x}.$$

解

(1) 由 $\sin x \sim x$, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

(2) 由 $\tan x \sim x$, 可知 $a \neq 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x} = a.$$

很显然该结果对 $a = 0$ 也成立.

(3) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\arctan x \sim x$, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \sin x}{x} = \frac{1}{n}.$$

(4)

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x})(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}{\sin^2 x(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}.$$

由 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\sin x \sim x$, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(5) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\sin x \sim x$, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

(6) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

第1章综合习题

习题 1.C.1 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \text{ (提示: } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{);}$$

$$(2) a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1};$$

$$(3) \text{ 设 } a_1 > 1, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, n = 1, 2, \cdots;$$

$$(4) \text{ 设 } a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n = 1, 2, \cdots.$$

解

(1) 由

$$(2n)^2 = 4n^2 \geq 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1)$$

可得

$$\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}.$$

因此

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0$, 故由夹逼定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

$$(2) \text{ 由 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}, \text{ 知}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a_n})^n = 0$;

(3) 由 $a_1 > 1$, 以及若 $a_n > 1$ 时, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} > 1$, 归纳的可知 $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^+$. 所以数列有下界. 再用归纳法: 当 $n = 1$ 时:

$$a_2 - a_1 = 2 - \left(\frac{1}{a_1} + a_1 \right) \leq 2 - 2 = 0,$$

推出 $a_2 \leq a_1$. 假设对 n 有 $a_n \leq a_{n-1}$, 那么当 $n+1$ 时

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} \leq 0.$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调减有下界数列, 因此收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 1$. 在

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

两边取极限得

$$a = 2 - \frac{1}{a} \implies a^2 - 2a + 1 = 0$$

解得 $a = \pm 1$. 但 $a = -1$ 不合题意, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

(4) $a_{n+2} = \frac{1}{1+a_{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}} = \frac{1+a_n}{2+a_n}$. 假如对任何 n , 有 $a_{2n} \geq a_{2n-2}$; $a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$, 那么对 $n+1$, 有

$$\begin{aligned} a_{2n+2} - a_{2n} &= \frac{1}{1+a_{2n+1}} - \frac{1}{1+a_{2n-1}} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n+1}}{1+a_{2n+1}a_{2n-1}} \geq 0 \\ a_{2n+3} - a_{2n+1} &= \frac{1}{1+a_{2n+2}} - \frac{1}{1+a_{2n}} = \frac{a_{2n} - a_{2n+2}}{1+a_{2n+2}a_{2n}} \leq 0 \end{aligned}$$

推出数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{2n}\}$ 单调增有上界, $\{a_{2n-1}\}$ 单调减有下界. 因此分别收敛. 对

$$a_{2n+2} = \frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}},$$

两边取极限得

$$a = \frac{1+a}{2+a} \implies a^2 + a - 1 = 0$$

解得 $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 同理, 对

$$a_{2n+3} = \frac{1+a_{2n+1}}{2+a_{2n+1}},$$

两边取极限得

$$b = \frac{1+b}{2+b} \implies b^2 + b - 1 = 0$$

解得 $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

习题 1.C.2 设 $\{a_n\}$ 为单调递增的数列, 并且收敛于 a , 证明对一切 n 有 $a_n < a$. (对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

解 反证法. 假设存在某个 n_0 , 使得 $a_{n_0} > a$. 由数列单调递增的性质, 对一切 $n > n_0$ 有 $a_n \geq a_{n_0} > a$, 于是存在 $\varepsilon = \frac{a_{n_0} - a}{2} > 0$, 使得 $\forall N$, 存在 $n = \max\{n_0, N\} + 1 > N$, 使得

$$|a_n - a| = a_n - a \geq a_{n_0} - a = 2\varepsilon > \varepsilon,$$

这与数列收敛的定义矛盾.

习题 1.C.3 证明下面的数列收敛:

$$(1) a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2};$$

$$(2) a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

解

(1) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 因此 $\{a_n\}$ 收敛;

(2) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n = e^{\sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{1}{2^k})} \leq e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = e^1.$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 又由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

习题 1.C.4 试构造一个发散的数列 $\{a_n\}$, 满足条件: 对任意正数 ε , 存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

解 取 $a_n = \sqrt{n}$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > \frac{1}{4\varepsilon^2}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

但数列 $\{a_n\}$ 显然发散.

习题 1.C.5 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在常数 M , 使得对一切 n 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq M.$$

证明:

- (1) 数列 $\{A_n\}$ 收敛;
- (2) 数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

解

- (1) 由数列定义可知 $\{A_n\}$ 单调递增. 又因为对一切 n 有 $A_n \leq M$, 所以 $\{A_n\}$ 有上界. 因此 $\{A_n\}$ 收敛;
- (2) 用 Cauchy 收敛准则证明. 由 (1) 知 $\{A_n\}$ 收敛, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N, \forall n > N+1, p > 0$, 有

$$|A_{n+p} - A_{n-1}| = |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

由三角不等式可知

$$|a_{n+p} - a_n| \leq |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

习题 1.C.6 设 $\{a_n\}$ 是正严格递增数列. 求证: 若 $a_{n+1} - a_n$ 有界, 则对任意 $\alpha \in (0, 1)$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$. 并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列 $\{a_n\}$ 使得对任意 $\alpha \in (0, 1)$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$, 但是 $a_{n+1} - a_n$ 无界. (提示: 考虑 $a_n = n \ln n$.)

解

- (1) 若 $\{a_n\}$ 有界, 此时由于其严格单调, 故有极限, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = l^\alpha - l^\alpha = 0$.
- (2) 若 $\{a_n\}$ 无界, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 设 $|a_{n+1} - a_n| \leq M$.

$$0 \leq a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha \left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^\alpha - 1 \right) < a_n^\alpha \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{1-\alpha}} \leq \frac{M}{a_n^{1-\alpha}}.$$

同时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M a_n^{\alpha-1} = 0.$$

因此由夹逼定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$.

(3) 反之不对, 取 $a_n = n \ln n$, 则

$$\begin{aligned} a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha &= (n+1)^\alpha \ln^\alpha(n+1) - n^\alpha \ln^\alpha n \\ &< ((n+1)^\alpha - n^\alpha) \ln^\alpha n \\ &= n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) \ln^\alpha n \\ &< n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right) \ln^\alpha n \\ &= n^{\alpha-1} \ln^\alpha n = \frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}} = 0,$$

因此由夹逼定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$. 但

$$a_{n+1} - a_n = (n+1) \ln(n+1) - n \ln n = \ln(n+1) + n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) > \ln(n+1),$$

显然无界.

习题 1.C.7 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = a$.

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a.$$

习题 1.C.8 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a_n > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{1}} = e^{\ln a} = a.$$

习题 1.C.9 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ 也存在, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

解 设 $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, ($n > 1$); $b_1 = a_1$, 则 $a_n = b_1 b_2 \cdots b_n$. 由综合习题 1.C.8 可知结果. 直接 Stolz 也

可以得到结果.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}} \\ &= e^{\ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.\end{aligned}$$

习题 1.C.10 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

解

(1) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

(2) 可以用综合习题 1.C.9 来做, 记 $a_n = \frac{n^n}{n!}$ 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e.$$

习题 1.C.11 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}$.

解 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{2}.$$

习题 1.C.12 设 $\{a_n\}$ 且 $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, 又设 $\{b_n\}$ 是正数列, $c_n = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$. 求证:

(1) $\{c_n\}$ 收敛;

(2) 若 $(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \rightarrow +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

解

(1) 记 $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 K , 当 $k > K$ 时, $|a_k - a| < \varepsilon$.

当 $n > K$, 有

$$c_n - a = \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - a)b_k}{B_n} = \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n} + \frac{\sum_{k=K+1}^n (a_k - a)b_k}{B_n}.$$

其中

$$\left| \frac{\sum_{k=K+1}^n (a_k - a)b_k}{B_n} \right| \leq \frac{\sum_{k=K+1}^n |a_k - a|b_k}{B_n} < \varepsilon \frac{\sum_{k=K+1}^n b_k}{B_n} < \varepsilon.$$

因此

$$\left| c_n - \left(a + \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n} \right) \right| < \varepsilon.$$

而对于

$$q_n := \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n},$$

$C := \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$ 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数, B_n 单调增, 因此 q_n 单调有界 ($C > 0$ 时 q_n 单调减且 $q_n > 0$, $C < 0$ 时 q_n 单调增且 $q_n < 0$), 故 q_n 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$, 再取 N , 使得当 $n, m > N$ 时, $|q_m - q_n| < \varepsilon$, 则当 $n, m > \max\{N, K\}$ 时,

$$|c_m - c_n| \leq |c_n - (a + q_n)| + |c_m - (a + q_m)| + |q_m - q_n| < 3\varepsilon.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 c_n 收敛.

(2) 下给出两种方法,

(a) 由 (1) 中的过程, $q_n = \frac{C}{B_n}$, 由于 $B_n \rightarrow +\infty$, C 为常数, 因此 $q_n \rightarrow 0$, 因此存在 N , 使得当 $n > N$ 时, $|q_n| < \varepsilon$, 则当 $n > \max\{N, K\}$ 时,

$$|c_n - a| \leq |c_n - (a + q_n)| + |q_n| < \varepsilon + |q_n| < 2\varepsilon.$$

(b) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

上述解答中给出了符合题目原意的证明, 即先证明 c_n 收敛, 然后在 B_n 无界时, 再证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. 但对于这道题而言, 还可以分类 B_n 有界和无界来讨论, 即先做 (2), 然后对 B_n 有界时, 用 Cauchy 收敛准则证明 $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k b_k \right\}$ 收敛, 即两种分类下以截然不同的方式来证明 c_n 收敛.

注 $a_n := \cdots$ 中 $:=$ 表示定义. 如 $a_n := \frac{1}{n}$ 表示我们新定义了一个数列 a_n , 其通项公式为 $a_n = \frac{1}{n}$.

在上文中 “ $C := \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$ 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数.” 表示: “记 $C = \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$,

则 C 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数.” 有的地方会写为 $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \cdots$.

习题 1.C.13 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$

解 实际上题目中的无穷只能是 $+\infty$.

$p > 0$ 时, $x^p \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^{x^p \cdot \frac{1}{x^{p-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}}} = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}$$

$p \leq 0$ 时, $x^p \rightarrow 0$, 则考虑 $x > 1$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty.$$

习题 1.C.14 设 $f(x)$ 为周期函数, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 证明 $f(x)$ 恒为零.

解 设 $f(x)$ 的正周期为 $T > 0$, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $|x| \geq N$ 时 $|f(x)| < \varepsilon$.

因此对于 $n = \left\lceil \frac{N}{T} \right\rceil$, 有 $nT \geq N$, 故对于任意 $x \in [nT, (n+1)T)$, 有 $f(x) < \varepsilon$.

利用周期性可以得到 $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| < \varepsilon$. 由于 ε 是任意的正数, 所以 $f(x)$ 恒为零.

习题 1.C.15 证明

- (1) 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递增数列 $\{a_n\}$ ($a_n \neq x_0$), 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$;
- (2) 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^+$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递减数列 $\{a_n\}$ ($a_n \neq x_0$), 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

解

- (1) (a) 必要性: 考虑任意数列 $\{a_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ 且 $\{a_n\}$ 单调递增, .

由于 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$, 因此, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 有 $|f(x) - l| < \varepsilon$.

同时对于 $\delta, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - x_0| < \delta$, 即 $x_0 - \delta < a_n < x_0$.

因此我们有 $m > N$ 时 $|f(a_n) - l| < \varepsilon$. 即得到数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛到 l .

- (b) 充分性: 反证, 若 $x \rightarrow x_0^-$ 时 $f(x)$ 的极限为 l 不成立, 即 $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 - \delta < x < x_0$, 使得 $|f(x) - l| \geq \varepsilon$.

因此我们依次构造 $\delta_1 = 1, \delta_n = \min\{\frac{1}{n}, x_0 - a_{n-1}\}, (n > 2)$, 则 $\exists a_n, x_0 - \delta_n < a_n < x_0$, 使得 $|f(a_n) - l| \geq \varepsilon$. 即有 $a_n > a_{n-1}$, 且 $|x_0 - a_n| < \frac{1}{n}$. 这意味着 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$.

由于 $|f(a_n) - l| \geq \varepsilon$, 所以 $\{f(a_n)\}$ 不收敛到 l , 矛盾, 故充分性成立.

- (2) 证明同理. 具体而言:

设 $g(x) = f(-x)$, 则 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时有极限 $l \Leftrightarrow g(x)$ 在 $x \rightarrow -x_0^+$ 时有极限 l . 由

(1) 可知, 这等价于对于任意一个以 $-x_0$ 为极限的单调递增数列 $\{b_n\}$ ($b_n \neq -x_0$), 都有

$\lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n) = l$. 设 $a_n = -b_n$, 则 $\{a_n\}$ 是以 x_0 为极限的单调递减数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

因此 (2) 得证.

习题 1.C.16 设 ξ 是一个无理数, a, b 是实数, 且 $a < b$. 求证: 存在整数 m, n 使得 $m + n\xi \in (a, b)$, 即, 集合

$$S = \{m + n\xi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

在 \mathbb{R} 稠密.

解 稠密的定义: 设 $S \subset \mathbb{R}$, 若对任意 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, 都有 $S \cap (a, b) \neq \emptyset$, 则称 S 在 \mathbb{R} 中稠密.

想法是这样的, 我们为了找到某个 $m + n\xi$ 落在 (a, b) 中, 于是用 ξ 构造一个充分小的实数 $\varepsilon = m_0 + n_0\xi \in (0, b - a)$. 因为这个 ε 够小, 所以能证明存在某个 $l_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $l_0\varepsilon \in (a, b)$, 直观理解如图 1.1 所示.

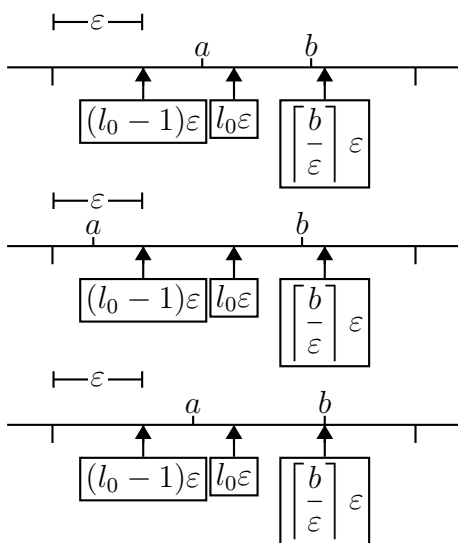


图 1.1: a, b 之间的区间长度大于 ε , 因此存在某个 $l_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $l_0\varepsilon \in (a, b)$. 这里的思路和习题 1.1.2 中证明两个无理数之间存在有理数的思路是类似的.

随后我们取 $m = l_0 m_0, n = l_0 n_0$ 即有 $m + n\xi = l_0\varepsilon \in (a, b)$.

构造 ε 实际上, 对于 $b - a > 0$, 总存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\frac{1}{k} < b - a$. 因此我们考虑构造一个满足 $\varepsilon < \frac{1}{k}, \varepsilon \in S$ 即可.

对于 $l = 1, 2, \dots, k + 1$, 我们考虑

$$n_l = \lfloor l\xi \rfloor$$

$$x_l = l\xi - n_l \in S.$$

x_l 是 $l\xi$ 的小数部分, 容易知道 $x_l \in [0, 1)$, 并且 x_l 之间总是两两不同的, 否则 $i\xi - n_i = j\xi - n_j, i \neq j$, 这意味着 $\xi = \frac{n_i - n_j}{i - j}$, 这与 ξ 为无理数矛盾.

因此对于

$$[0, 1) = \bigcup_{j=1}^k \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right),$$

这 k 个区间包括了 $k+1$ 个不同实数 x_l . 因此总有一个区间内部存在同时两个实数, 记为 $x_p, x_q \in S, p \neq q$, 不妨认为 $x_q > x_p$.

由 x_l 的构造 $x_p = p\xi - n_p, x_q = q\xi - n_q$, 有

$$x_q - x_p = (q - p)\xi - (n_p - n_q) \in S,$$

且由于 x_p, x_q 落在同一个区间内, 而区间长度为 $\frac{1}{k}$, 因此 $0 < x_q - x_p \leq \frac{1}{k} < b - a$, 所以 $x_q - x_p$ 满足我们对 ε 的要求. 我们取

$$\varepsilon = x_q - x_p.$$

构造 m, n 我们先证明 $\exists l_0 \in \mathbb{Z}, \text{s. t. } l_0\varepsilon \in (a, b)$: 我们取 $l_0 = \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1$, 则

$$l_0\varepsilon = \left(\left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon < \left(\frac{b}{\varepsilon} + 1 - 1 \right) \varepsilon = b.$$

同时, 由于 $\varepsilon < b - a$, 因此

$$l_0\varepsilon = \left(\left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon \geq \left(\frac{b}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon = b - \varepsilon > b - (b - a) = a.$$

因此 $l_0\varepsilon \in (a, b)$.

于是令

$$m = l_0(n_q - n_p), n = l_0(q - p)$$

即有 $m + n\xi = l_0(n_q - n_p) + l_0(q - p)\xi = l_0((q - p)\xi - (n_p - n_q)) = l_0\varepsilon \in (a, b)$.

第2章 连续函数的基本概念

习题 2.1

习题 2.1.1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$. 问 $f(x)$ 是否必在 $x = x_0$ 处连续?

解 不一定. 例如, 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则 $\lim_{h \rightarrow 0} [f(0 + h) - f(0 - h)] = \lim_{h \rightarrow 0} (0 - 0) = 0$, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

习题 2.1.2 设对任意正数 $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ 上连续. 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

解 设 $x_0 \in (a, b)$, 则存在 $\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{b - x_0}{2}, \frac{x_0 - a}{2} \right\} > 0$, 使得 $a + \varepsilon_0 < x_0 < b - \varepsilon_0$. 因为 $f(x)$ 在 $[a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 因此 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

习题 2.1.3 设在点 $x = x_0$ 处, 函数 $f(x)$ 连续, 而 $g(x)$ 不连续, 问函数 $f(x) \pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 的连续性如何? 若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处都不连续, 回答同样的问题.

解

(1) $f(x) \pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处均不连续. 反证: 若 $f(x) + g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + g(x_0) - f(x_0) = g(x_0)$, 矛盾. 同理可证 $f(x) - g(x)$ 在点 x_0 处不连续.

$f(x)g(x)$ 在 x_0 处连续性未知, 例如, 设

$$f(x) = x, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

则 $f(x)g(x) \equiv x$, 在点 $x_0 = 0$ 处连续. 又例如, 设

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

则 $f(x)g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ 在点 $x_0 = 0$ 处不连续.

(2) 若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处都不连续, 则 $f(x) \pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处可能连续, 也可能

不连续. 例如,

(a) $f(x) + g(x)$ 在点 x_0 处连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f(x) + g(x) \equiv 0$, 在点 $x_0 = 0$ 处连续.

(b) $f(x) + g(x)$ 在点 x_0 处不连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f(x) + g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0; \end{cases}$ 在点 $x_0 = 0$ 处不连续.

(c) $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f(x)g(x) \equiv 0$, 在点 $x_0 = 0$ 处连续.

(d) $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处不连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f(x)g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ 在点 $x_0 = 0$ 处不连续.

习题 2.1.4

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x = x_0$ 处也连续.

(2) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在一个区间 I 上连续, 证明: 函数 $M(x) = \max(f(x), g(x))$ 及 $m(x) = \min(f(x), g(x))$ 在区间 I 上均连续.

解

(1) 因为 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 又因为

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

故 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$, 即 $|f(x)|$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

(2) 由 $M(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$, $m(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$ 可知, 只需

证明 $|f(x) - g(x)|$ 在区间 I 上连续. 因为 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上连续, 故 $f(x) - g(x)$ 在区间 I 上连续. 由 (1) 可知, $|f(x) - g(x)|$ 在区间 I 上连续.

习题 2.1.5 证明: 存在这样的函数 $f(x)$, 处处不连续, 但函数 $|f(x)|$ 处处连续. (提示: 适当地修改 Dirichlet 函数可得出一个例子.)

解 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 处处不连续, 但 $|f(x)| \equiv 1$, 处处连续.

证明 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 取 $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$; 取 $\{b_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(a_n) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(b_n)$, 矛盾. 因此 $f(x)$ 处处不连续.

习题 2.1.6 指出下列函数的间断点, 并说明其类型.

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \frac{x+1}{x-2}; & (2) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \\ (3) \quad f(x) &= \lfloor \cos x \rfloor; & (4) \quad f(x) &= \frac{1}{1 + e^{1/x}}; \\ (5) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x+7}, & -\infty < x < -7, \\ x, & -7 \leq x \leq 1, \\ (x-1) \sin \frac{1}{x-1}, & 1 < x < +\infty; \end{cases} \\ (6) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

左右极限不存在, 因此 $x = 2$ 是第二类间断点.

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{\sin x}{x} \right) = -1.$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x = 0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(3) 可知 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 在 $x = k\pi$ 处, $\lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = 0 \neq f(k\pi) = 1$. 左右极限存在且相等, $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 是第一类间断点中的可去间断点.

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 1.$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x = 0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(5) (a) 在 $x = -7$ 处

$$\lim_{x \rightarrow -7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{1}{x + 7} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = -7,$$

左极限不存在, 因此 $x = -7$ 是第二类间断点.

(b) 在 $x = 1$ 处:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \sin \frac{1}{x - 1} = 0, \quad f(1) = 1,$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x = 1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(6) 当 $x \neq 2$ 时, $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$, 但 $f(2) = 4$, 函数值与极限值相等. 因此函数在 $x = 2$ 处连续, 无间断点.

习题 2.1.7 试确定 a , 使得函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续.

解 由 $f(0) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + 0 = a$ 可知, 当 $a = 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

习题 2.1.8 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 在点 0 处右连续, 但不左连续.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-2/x}}{1 + e^{-2/x}} = 1 = f(0)$, 故 $f(x)$ 在点 0 处右连续.

又因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2/x} - 1}{e^{2/x} + 1} = -1 \neq f(0)$, 故 $f(x)$ 在点 0 处不左连续.

习题 2.1.9 证明: 对每个实数 x , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 存在. 将该极限值记为 $f(x)$, 试讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

解

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = (1+x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(x^2)^n} = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1; \\ \frac{1+x}{2}, & x = \pm 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

即

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 1; \\ 1, & x = 1; \\ 0, & x > 1 \text{ 或 } x \leq -1. \end{cases}$$

因此,

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$, 故 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \neq f(1)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续; 对于其他点, $f(x)$ 均连续.

综上所述, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 上连续, 在 $x = 1$ 处不连续.

习题 2.1.10 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则存在一个正数 δ , 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有界. (这一结果称为连续函数的局部有界性.)

解 因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = 1$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < 1$, 即 $-1 < f(x) - f(x_0) < 1$, 故 $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$. 因此, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leq \max\{|f(x_0) - 1|, |f(x_0) + 1|\}$, 即 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有界.

习题 2.1.11 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 且 $f(x_0) \neq 0$, 则存在一个正数 δ , 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上与 $f(x_0)$ 同号. (这一结果称为连续函数的局部保号性) 进一步, 存在某个正数 γ , 使得 $f(x)$ 在这一区间中满足 $|f(x)| \geq \gamma$.

解 因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2},$$

即

$$-\frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{|f(x_0)|}{2},$$

$$\text{故 } f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

因为 $f(x_0) \neq 0$, 故当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有

(1) $f(x_0) > 0$ 时

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

(2) $f(x_0) < 0$ 时

$$f(x) < f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} < 0.$$

因此, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号. 进一步地, 取 $\gamma = \frac{|f(x_0)|}{2}$, 则当

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \geq \gamma$.

习题 2.1.12 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$ (从而 x_0 为 $g(x)$ 的可去间断点), $f(u)$ 在 $u = a$ 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(a).$$

(这一结论对其他五种极限过程也成立.)

解 由于 $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = f(a)$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $|u - a| < \delta_1$ 时, 有 $|f(u) - f(a)| < \varepsilon$.

又因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, 故对于 $\delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - a| < \delta_1$.

因此, 当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - a| < \delta_1$, 即 $|f(g(x)) - f(a)| < \varepsilon$. 综上所述, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(a)$.

习题 2.1.13 证明: 若函数 $u(x), v(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $u(x_0) > 0$, 则函数 $u(x)^{v(x)}$ 也在点 x_0 处连续.

解 利用 e^x 在 \mathbb{R} 上连续, $\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 以及复合函数的极限可交换性, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{v(x) \ln u(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln u(x)} = e^{v(x_0) \ln u(x_0)} = u(x_0)^{v(x_0)}.$$

习题 2.1.14 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 且对于任意 x 有 $f(2x) = f(x)$. 求证 $f(x)$ 是常数.

解 即证: $f(x) \equiv f(0)$. 对于任意点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 考虑任意以 x_0 为极限的数列, $\{x_n\}$, 则由连续性

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n}{2^n} \cdot 2^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n}{2^n}\right) = f(0),$$

且 $f(x_0) = f(0)$. 由于 x_0 的任意性, 故 $f(x) \equiv f(0)$.

习题 2.1.15 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 且对于任意 x, y 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 求证 $f(x) = cx$, 其中 c 是常数.

解

(1) 由 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ 可知, $f(0) = 0$.

(2) 对 $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx) = f((n-1)x + x) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n \text{ 个}} = nf(x).$$

即对任意自然数 $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.

(3)

$$f(-x) + f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

即对任意整数 $k \in \mathbb{Z}$, $f(kx) = kf(x)$.

(4) 对 $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$,

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m \cdot \frac{1}{n} \cdot nf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$$

即对任意有理数 $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.

(5) 对 $x \in \mathbb{R}$, 则存在有理数列 $\{r_n\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$, 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(1) = xf(1).$$

由于 f 在 x 处连续, 故

$$f(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = xf(1).$$

取 $c = f(1)$, 即有 $f(x) = xf(1) = cx$.

习题 2.1.16 当 $x \rightarrow 0$ 时, 用 $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$ 证明 $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$; 用 $\ln(1+x) \sim x$ 证明 $(e^x - 1) \sim x$.

(上述的等价无穷小, 是微积分中非常基本的事实.)

解

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 设 $g(x) = \arcsin x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即 $\arcsin x \sim x$;

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 设 $g(x) = \arctan x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \arctan x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即 $\arctan x \sim x$;

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 设 $g(x) = e^x - 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即 $(e^x - 1) \sim x$.

习题 2.1.17 求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[10]{1+\tan x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{2x \sin x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin(\sin x)}{1 - \cos x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x});$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 - \frac{\sin x}{x}}.$$

解

$$(1) \sqrt{1+x+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}(x+x^2), \sin 2x \sim 2x, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4};$$

$$(2) \sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1;$$

$$(3) \sqrt[10]{1+\tan x} - 1 \sim \frac{1}{10} \tan x \sim \frac{1}{10}x, \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x, 2x \sin x \sim 2x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[10]{1+\tan x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{10}x \cdot \frac{1}{2}x}{2x^2} = \frac{1}{40};$$

$$(4) x \cdot \arcsin(\sin x) \sim x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin(\sin x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2;$$

$$(5) 1 - \cos(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}(1 - \cos x)^2 \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{1}{8}x^4, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^4}{x^4} = \frac{1}{8};$$

$$(6) \text{ 令 } y = \frac{1}{x}, \text{ 则 } y \rightarrow 0^+,$$

$$\text{并且 } x = -\frac{1}{y}, \text{ 即有 } x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = -\frac{1}{y} \left(\sqrt{\frac{1}{y^2} + 100} - \frac{1}{y} \right) = -\frac{\sqrt{1 + 100y^2} - 1}{y^2}$$

$$\text{而 } \sqrt{1 + 100y^2} - 1 \sim \frac{1}{2} \cdot 100y^2 = 50y^2, (y \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{1 + 100y^2} - 1}{y^2} = -\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{50y^2}{y^2} = -50$$

(7)

$$\begin{aligned} \left| \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \right| &= \left| 2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| \\ &= 2 \left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right| \\ &\leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \text{ 可知, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0;$$

(8)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 - \frac{\sin x}{x}} = \sqrt{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}} = \sqrt{2 - 0} = \sqrt{2}.$$

习题 2.1.18 (旧版教材中的题目) 函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 与 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 分别称为双曲正弦与双曲余弦 (统称为双曲函数), 它们均在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 证明以下各题. (可与三角函数的性质作比较.)

$$(1) \sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x; \quad (2) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$(3) \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x; \quad (4) \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x;$$

$$(5) \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y; \quad (6) \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

解

$$(1) \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x;$$

$$(2) \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1;$$

$$(3) \sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = 2 \sinh x \cosh x;$$

$$(4) \cosh 2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2 + (e^x + e^{-x})^2}{4} = \sinh^2 x + \cosh^2 x;$$

$$(5) \sinh(x \pm y) = \frac{e^{x \pm y} - e^{-(x \pm y)}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} - e^{-x} e^{\mp y}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} - e^{-x} e^{\pm y} + e^{-x} e^{\pm y} - e^{-x} e^{\mp y}}{2} =$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} + e^{\mp y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} - e^{\mp y}}{2}\right) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y;$$

$$(6) \cosh(x \pm y) = \frac{e^{x \pm y} + e^{-(x \pm y)}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} + e^{-x} e^{\mp y}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} + e^{-x} e^{\pm y} - e^{-x} e^{\pm y} + e^{-x} e^{\mp y}}{2} =$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} + e^{\mp y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} - e^{\mp y}}{2}\right) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

习题 2.2

习题 2.2.1 证明函数 $x \cdot 2^x - 1$ 在 $[0, 1]$ 内有零点.

解 设 $f(x) = x \cdot 2^x - 1$, 则 $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$. 又因 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续. 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

习题 2.2.2 证明函数 $x - a \sin x - b$ (其中 a, b 为正数) 在 $(0, +\infty)$ 上有零点, 且零点不超过 $a + b$.

解 设 $f(x) = x - a \sin x - b$, 该函数在 $[0, +\infty)$ 连续, 同时 $f(0) = -b < 0, f(a + b + 1) = a + b + 1 - a \sin(a + b + 1) - b = a(1 - \sin(a + b + 1)) + 1 \geq 1 > 0$. 因此由零点定理, $(0, a + b + 1)$ 上有零点, 进而 $(0, +\infty)$ 上有零点.

又因对任意 $x > a + b$ 有 $f(x) = x - a \sin x - b > a + b - a \sin x - b \geq 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点不超过 $a + b$.

习题 2.2.3 证明函数 $x - \sin(x + 1)$ 有实零点.

解 设 $f(x) = x - \sin(x + 1)$, 由 $-1 \leq \sin(x + 1) \leq 1$ 知, 则 $f(-2) \leq -2 + 1 = -1 < 0, f(2) \geq 2 - 1 = 1 > 0$. 又因 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上连续, 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (-2, 2)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

习题 2.2.4 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且值域就是 $[a, b]$. 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有不动点, 即有 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

解 函数 $f(x)$ 的值域为 $[a, b]$, 故存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 使得 $f(x_1) = a, f(x_2) = b$. 设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(a) = f(a) - a \geq 0, g(b) = f(b) - x_2 \leq 0$.

故结合零点定理可简单推知, 要么 a 或 b 是 $g(x)$ 的零点, 要么存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $g(x_0) = 0$, 总之存在 $x_0 \in [a, b]$, $g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = x_0$.

注 这里给出一个表述的区分.

(1) 如果严格满足零点定理的情形, 即端点处非零异号, 推出开区间内存在零点, 那么表达为由零点定理可知.

(2) 如果和本题类似, 端点处可能为零, 推出推出闭区间内存在零点, 则简单表达为结合零点定理可简单推知.

习题 2.2.5 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$. 试证: 存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$.

解 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $h(a) = f(a) - g(a) > 0, h(b) = f(b) - g(b) < 0$. 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = g(x_0)$.

习题 2.2.6 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$. 证明: 在区间 $[0, a]$ 上存在某个 x_0 , 使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

解 设 $g(x) = f(x) - f(x + a)$, 则 $g(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 且 $g(0) = f(0) - f(a), g(a) = f(a) - f(2a) =$

$f(a) - f(0) = -g(0)$. 因此 $g(0)g(a) = -(g(0))^2 \leq 0$. 由结合零点定理简单推知, 存在 $x_0 \in [0, a]$, 使得 $g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

习题 2.2.7 试证: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, x_1, x_2, \dots, x_n 为此区间中的任意点, 则在 $[a, b]$ 中有一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)).$$

更一般地, 若 $q_1 > 0, q_2 > 0, \dots, q_n > 0$, 且 $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$, 则在 $[a, b]$ 中有一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n).$$

解

(1) 设 $A = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$. 若 $f(x_i) = f(x_j)$ 对所有 i, j 成立, 则对任意 k , 取 $\xi = x_k$ 总是可以的. 否则取 i, j 使得 $f(x_i) = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}, f(x_j) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$. 则 $f(x_i) \leq A \leq f(x_j), f(x_i) < f(x_j)$. 由介值定理知, 存在 $\xi \in (\min\{x_i, x_j\}, \max\{x_i, x_j\}) \subset [a, b]$, 使得 $f(\xi) = A$.

(2) 设 $A = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n)$. 若 $f(x_i) = f(x_j)$ 对所有 i, j 成立, 则对任意 k , 取 $\xi = x_k$ 总是可以的. 否则取 i, j 使得 $f(x_i) = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}, f(x_j) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$. 则 $f(x_i) \leq A \leq f(x_j), f(x_i) < f(x_j)$. 由介值定理知, 存在 $\xi \in (\min\{x_i, x_j\}, \max\{x_i, x_j\}) \subset [a, b]$, 使得 $f(\xi) = A$.

习题 2.2.8 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 证明 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

解 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. 则对于 $\varepsilon = 1 > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $x > N$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$, 即 $|f(x)| < |A| + 1$. 又因函数 $f(x)$ 在区间 $[a, N]$ 上连续, 故在该闭区间上有界, 即存在 $K > 0$, 使得对任意 $x \in [a, N]$ 有 $|f(x)| \leq K$. 取 $M = \max\{K, |A| + 1\}$, 则对任意 $x \in [a, +\infty)$ 有 $|f(x)| \leq M$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

习题 2.2.9 证明函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

解 由习题 1.3.17 知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4} = 0$, 利用习题 2.2.8 知, 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界. 又因 $f(x)$ 是偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上也有界. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

习题 2.2.10 是否有满足下面条件的连续函数? 说明理由.

- (1) 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $(0, +\infty)$;
- (2) 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $(0, 1)$;
- (3) 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $[0, 1] \cup [2, 4]$;
- (4) 定义域为 $(0, 1)$, 值域为 $(2, +\infty)$.

解

(1) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(2) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(3) 不存在. 这与介值定理矛盾.

(4) 存在. 例如, $f(x) = \frac{1}{x} + 2$.

习题 2.2.11 举例说明, 对任意正数 $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ 上有界, 不能保证 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上有界. (比较习题 2.1 第 2 题.)

解 例如, 设 $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}$, 则对任意正数 $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ 上连续, 故有界; 但在开区间 (a, b) 上无界.

习题 2.2.12 设 $y = f(x)$ 在开区间 $I = (a, b)$ 上连续并严格单调. 证明 $y = f(x)$ 的值域 $f(I)$ 也是一个开区间.

解 注 不能假设 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在. $f(I)$ 可能有无穷端点, 例如 $f(x) = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上连续且严格单调, 但值域是 $(-\infty, +\infty)$.

(1) 不妨假设是严格递增的, 否则类似考虑 $-f(x)$ 即可. 先证明 $f(I)$ 存在两个不同的点: 取 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 由严格单调性知, $f(x_1) < f(x_2)$, 故 $f(I)$ 中至少有两个不同的点.

注 如果去除单调的严格性, 则 $f(I)$ 不一定是开区间, 例如 $f(x) = 1$ 在 $(0, 1)$ 上连续且单调, 但值域不是开区间.

(2) $\forall y_1, y_2 \in f(I)$, 且 $y_1 < y_2$. 则存在 $x_1, x_2 \in I$, 使得 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. 因为 $f(x)$ 在 I 上严格单调, 故 $x_1 < x_2$. 对任意 $y \in (y_1, y_2)$, 由介值定理知, 存在 $x \in (x_1, x_2) \subset I$, 使得 $f(x) = y$. 因此, $f(I)$ 是区间.

(3) 下面证明 $f(I)$ 是开区间. $\forall y \in f(I)$, 则存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = y$. 由 (a, b) 是开区间知, 存在 $\delta > 0$, 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$. 设 $\eta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta) - f(x_0)\} > 0$, 则对任意 $y' \in (y - \eta, y + \eta) \subset (f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta))$, 由介值定理知, 存在 $x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$, 使得 $f(x') = y'$. 因此, $f(I)$ 是开区间.

习题 2.2.13 设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 上一致连续. 求证 $f(x)$ 在 a 点的右极限和在 b 点的左极限都存在.

解 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

现取 $x_1, x_2 \in (a, a + \delta)$, 则 $|x_1 - x_2| < \delta$, 故 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(a, a + \delta)$ 上满足柯西收敛准则, 故 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在. 同理可证 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 也存在.

习题 2.2.14 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续, $\{a_n\}$ 是正收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛. 又问仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论是否还成立, 为什么?

解

(1) 由 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 又因 $\{a_n\}$ 是正收敛数列, 故存在 $N \in \mathbf{N}^+$, 使得当 $n, m > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \delta$, 因此, 对任意 $n, m > N$ 有 $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$. 由柯西收敛准则知, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛.

(2) 仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论不成立. 例如, 设 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且数列 $a_n = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi}$ 收敛于 0, 但数列 $f(a_n) = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right) = (-1)^n$ 不收敛.

习题 2.2.15 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $\{a_n\}$ 是收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛.

解 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a \in (-\infty, +\infty)$. 由 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续知, $f(x)$ 在 a 点连续, 即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. 因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

又因数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 故存在 $N \in \mathbf{N}^+$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \delta$, 因此, 对任意 $n > N$ 有 $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$. 由数列的收敛定义知, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛于 $f(a)$.

习题 2.2.16 给出一个在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且有界但不一致连续的函数.

解 例如, $f(x) = \sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且有界, 但不一致连续.

反证法: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 则对 $\varepsilon = 1 > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$. 但倘若我们取 $x_1 = \sqrt{2n\pi}$, $x_2 = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则当 $n > \left(\frac{2}{\delta}\right)^2$ 时, 有 $|x_1 - x_2| < \delta$, 但 $|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \sin(2n\pi) - \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right| = 1$, 矛盾.

第2章综合习题

习题 2.C.1 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数,} \\ x, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 仅在点 $x = 0$ 处连续.

解 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有理数列 $\{r_n\}$ 与无理数列 $\{s_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_0$. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_0.$$

当 $x_0 \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = x_0$, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不连续.

当 $x_0 = 0$ 时, 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $|x - 0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$. 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

习题 2.C.2 设 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$, 记 $f(x) = \frac{|x - x_1| + \dots + |x - x_n|}{n}$, 证明: 存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

解 设 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$, 则 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) &= \frac{|0 - x_1| + \dots + |0 - x_n|}{n} + \frac{|1 - x_1| + \dots + |1 - x_n|}{n} \\ &= \frac{(x_1 + (1 - x_1)) + \dots + (x_n + (1 - x_n))}{n} = 1. \end{aligned}$$

因此 $g(0) + g(1) = f(0) + f(1) - 1 = 0$. 则 $g(0)g(1) = -(g(0))^2 \leq 0$. 结合零点定理可简单推知, 存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

习题 2.C.3 证明: 函数 $\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$ (其中 $a_1, a_2, a_3 > 0$, 且 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) 在 (λ_1, λ_2) 与 (λ_2, λ_3) 内各有一个零点.

解 仅证明 (λ_1, λ_2) 内有一个零点, (λ_2, λ_3) 内的证明类似.

由 $\frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$ 在 $\left[\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right]$ 上连续, 因此有界, 即存在 $M_1 > 0$, 使得对任意 $x \in \left[\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right]$ 有 $\left|\frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}\right| \leq M_1$.

又由 $\lim_{x \rightarrow \lambda_1^+} \frac{a_1}{x - \lambda_1} = +\infty$, 因此存在 $\delta_1 \in \left(0, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_1)$ 有 $\frac{a_1}{x - \lambda_1} > M_1$. 因此, 存在 $x_1 \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_1) \subset \left(\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)$, 使得

$$\frac{a_1}{x_1 - \lambda_1} + \frac{a_2}{x_1 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_1 - \lambda_3} = \frac{a_1}{x_1 - \lambda_1} + \left(\frac{a_2}{x_1 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_1 - \lambda_3}\right) > M_1 - M_1 = 0.$$

由 $\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$ 在 $\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right]$ 上连续, 因此有界, 即存在 $M_2 > 0$, 使得对任意 $x \in$

$\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right]$ 有 $\left|\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}\right| \leq M_2$.

又由 $\lim_{x \rightarrow \lambda_2^-} \frac{a_2}{x - \lambda_2} = -\infty$, 因此存在 $\delta_2 \in \left(0, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x \in (\lambda_2 - \delta_2, \lambda_2)$ 有 $\frac{a_2}{x - \lambda_2} < -M_2$. 因此, 存在 $x_2 \in (\lambda_2 - \delta_2, \lambda_2) \subset \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right)$, 使得

$$\frac{a_1}{x_2 - \lambda_1} + \frac{a_2}{x_2 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_2 - \lambda_3} = \left(\frac{a_1}{x_2 - \lambda_1} + \frac{a_3}{x_2 - \lambda_3}\right) + \frac{a_2}{x_2 - \lambda_2} < M_2 - M_2 = 0.$$

综上, 存在 $x_1, x_2 \in (\lambda_1, \lambda_2)$, 使得对于函数 $f(x) = \frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$ 有 $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$. 由介值定理知, 存在 $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (\lambda_1, \lambda_2)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

同时由于 $\frac{a_1}{x - \lambda_1}, \frac{a_2}{x - \lambda_2}, \frac{a_3}{x - \lambda_3}$ 在 (λ_1, λ_2) 上严格单调递减, 因此 $f(x)$ 在 (λ_1, λ_2) 上严格单调递减. 因此, 零点 x_0 唯一.

习题 2.C.4 设 $f(x)$ 是一个多项式, 则必存在一点 x_0 , 使得 $|f(x_0)| \leq |f(x)|$ 对任意实数 x 成立.

解 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中 $a_n \neq 0, n \geq 1$. 则

$$|f(x)| = |x|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right|.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n$, 因此存在 $M > 0$, 使得当 $|x| > M$ 时, 有

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right| > \frac{|a_n|}{2}.$$

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{2} |x|^n = +\infty$, 因此 $\exists X > M$, 使得当 $|x| > X$ 时, 有 $\frac{|a_n|}{2} |x|^n > |f(0)|$. 而由 $|f(x)|$ 在 $[-X, X]$ 上连续, 故由最值性知, 存在 $x_0 \in [-X, X]$, 使得 $|f(x_0)| = \inf\{|f(x)| : x \in [-X, X]\}$.

特别的, 对任意 $x \in [-X, X]$ 有 $|f(x_0)| \leq |f(x)|$. 因此对于 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x)| > \frac{|a_n|}{2} |x|^n \geq |f(x_0)|$. 综上, 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $|f(x_0)| \leq |f(x)|$.

习题 2.C.5 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$. 证明: 对任意正整数 n , 在区间 $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ 中有一点 ξ , 使得 $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right)$.

解 设 $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$, 则 $g(x)$ 在 $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ 上连续, 且

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right),$$

...

$$g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(0).$$

因此 $\frac{1}{n} \left(g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) \right) = 0$. 则 $g(0), g\left(\frac{1}{n}\right), \dots, g\left(\frac{n-1}{n}\right)$ 中至少有一

个非正, 另一个非负. 由介值定理知, 存在 $\xi \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, 使得 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right)$.

习题 2.C.6 证明: 存在一个实数 x , 满足 $x^5 + \frac{\cos x}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 72$.

解 设 $f(x) = x^5 + \frac{\cos x}{1 + x^2 + \sin^2 x}$,

$$f(3) = 3^5 + \frac{\cos 3}{1 + 3^2 + \sin^2 3} \geq 243 \frac{1}{1 + 3^2 - 1} > 72,$$

$$f(-3) = (-3)^5 + \frac{\cos(-3)}{1 + (-3)^2 + \sin^2(-3)} \leq -243 + \frac{1}{1 + (-3)^2 - 1} < -72.$$

由介值定理知, 存在 $x \in [-3, 3]$, 使得 $f(x) = 72$.

习题 2.C.7 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上或者有最大值, 或者有最小值.

解 记

$$S = \sup\{f(x) : x \in [a, +\infty)\}, \quad I = \inf\{f(x) : x \in [a, +\infty)\}, \quad L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

(1) 若 $S > L$, 取 $\varepsilon = \frac{S - L}{2} > 0$, 则存在 $X > a$, 使得对任意 $x > X$ 有 $|f(x) - L| < \varepsilon$, 即

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \text{ 因此, 对任意 } x > X \text{ 有 } f(x) < L + \varepsilon = \frac{S + L}{2} < S. \text{ 因此}$$

$$\sup\{f(x) : x \in [a, X]\} = S,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0 \in [a, X]$, 使得 $f(x_0) = S$.

(2) 若 $I < L$, 取 $\varepsilon = \frac{L - I}{2} > 0$, 则存在 $X > a$, 使得对任意 $x > X$ 有 $|f(x) - L| < \varepsilon$, 即

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \text{ 因此, 对任意 } x > X \text{ 有 } f(x) > L - \varepsilon = \frac{I + L}{2} > I. \text{ 因此}$$

$$\inf\{f(x) : x \in [a, X]\} = I,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0 \in [a, X]$, 使得 $f(x_0) = I$.

(3) 若 $S = L = I$, 则 $f(x) \equiv L$, 即任取 $x_0 \in [a, +\infty)$, 均有 $f(x_0) = L$ 同时为最大值和最小值.

注 一个只有极限没有最大值的例子是 $f(x) = \arctan x, x \in [0, +\infty)$.

习题 2.C.8 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 满足条件: $a \leq f(x) \leq b$ (对任意 $x \in [a, b]$), 且对 $[a, b]$ 中任意的 x, y 有 $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. 这里 k 是常数, $0 < k < 1$. 证明:

(1) 存在唯一的 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

(2) 任取 $x_1 \in [a, b]$, 并定义数列 $\{x_n\} : x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

(3) 给出一个在实轴上的连续函数, 使得对任意 $x \neq y$ 有 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, 但方程 $f(x) - x = 0$ 无解.

解

(1) 先证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续: 设 $x_0 \in [a, b]$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, 则对任意 $x \in [a, b]$

且 $|x - x_0| < \delta$, 有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0| < k\delta = \varepsilon.$$

设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(a) = f(a) - a \geq 0$, $g(b) = f(b) - b \leq 0$. 故结合零点定理可简单推知, 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = x_0$. 又因对任意 $x, y \in [a, b]$ 有

$$|g(x) - g(y)| = |f(x) - f(y) - (x - y)| \geq |x - y| - |f(x) - f(y)| \geq (1 - k)|x - y|,$$

故若存在 $x_1 \neq x_0$ 使得 $f(x_1) = x_1$, 则

$$(1 - k)|x_1 - x_0| \leq |g(x_1) - g(x_0)| = |f(x_1) - f(x_0) - (x_1 - x_0)| = 0,$$

即 $x_1 = x_0$. 因此 x_0 唯一.

- (2) (a) 若 $x_2 = x_1$, 则由 $f(x_1) = x_1$ 以及 (1) 中所述的唯一性, 知 $x_2 = x_1 = x_0$, 则 $x_3 = f(x_2) = f(x_0) = x_0$, 依此类推, 有 $x_n = x_0$ 对任意 $n \geq 1$ 成立. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.
 (b) 若 $x_2 \neq x_1$, 对任意 $n \geq 1$ 有

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq k^{n-1}|x_2 - x_1|.$$

因此, 对任意 $m > n \geq 1$ 有

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (k^{m-2} + k^{m-3} + \dots + k^{n-1})|x_2 - x_1| \\ &\leq \frac{k^{n-1}}{1 - k}|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left\lceil \log_k \frac{(1 - k)\varepsilon}{|x_2 - x_1|} \right\rceil$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|x_m - x_n| \leq \frac{k^{n-1}}{1 - k}|x_2 - x_1| < \varepsilon.$$

故数列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 故存在 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n := a$ 存在. 又因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 对递推式两侧取极限, 有

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(a).$$

由 (1) 中所述的唯一性, 知 $a = x_0$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

- (3) 一个不太严谨的思考过程: 我想要构造一个满足 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ 的函数, 我考虑了 $|f'(x)| < 1$ 的趋势为增的函数, 同时 $f(x) - x$ 无解要求了 $f(x)$ 应该是贴在 $y = x$ 的 (不妨设为) 上方的, 于是我考虑了 $f(x) = x + g(x)$, 并假设 $g(x)$ 可导, 其中如果 $-1 < -g'(x) < 0$, 那就能保证 $f(x)$ 的导数满足要求. (当然上述思路中, 对 $g(x)$ 的选取过程都只

是必要的)

$$f(x) = x + \frac{1}{1+e^x}.$$

(a) 满足 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$: 设 $x > y$, 则

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= f(x) - f(y) = (x - y) + \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^y} \\ &= (x - y) - \frac{e^x - e^y}{(1+e^x)(1+e^y)} \\ &< x - y = |x - y|. \end{aligned}$$

(b) 方程 $f(x) - x = 0$ 无解: 由 $f(x) - x = \frac{1}{1+e^x} > 0$, 知 $f(x) - x = 0$ 无解.

习题 2.C.9 证明: 对任意正整数 n , 方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 恰有一个正根 x_n ; 进一步证明数列 $\{x_n\}$ ($n \geq 1$) 收敛, 并求其极限.

解

(1) 设 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$, 则 $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续, 且 $f_n(0) = -1 < 0$, $f_n(1) = n - 1 \geq 0$. 故结合零点定理可简单推知, 存在 $x_n \in (0, 1]$, 使得 $f_n(x_n) = 0$. 由于 $f_n(x)$ 的每一项都严格单调递增, 故 $f_n(x)$ 也严格单调递增, 因此 x_n 是唯一解.

(2) 下证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减: 若 $x_{n+1} \geq x_n$, 由 $x_n > 0$

$$1 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} > x_n^{n+1} + x_n^n + \cdots + x_n > x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1,$$

故矛盾, 因此 $x_{n+1} < x_n$. $\{x_n\}$ 单调递减, 有 0 为下界, 故数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(3) 考虑

$$1 - x_n^n = (1 - x_n)(1 + x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^{n-1}) = 1 - x_n,$$

在两边同时取极限之前, 我们还得先考虑 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n$. 由于 $1 = x_2 + x_2^2 \geq x_2 \cdot x_2 + x_2^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, 对 $x_n^n < x_2^n$, 由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$. 因此, 对数列 $\{x_n\}$ 取极限, 有

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - x_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - x_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

习题 2.C.10 设 $a < b$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任意 $x \in [a, b)$ 存在 $y \in (x, b)$ 使得 $f(y) > f(x)$. 求证: $f(b) > f(a)$.

解 考虑 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值 $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, 由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = M$. 若 $\exists x < b, f(x) = M$, 则由题设条件, 存在 $y \in (x, b)$, 使得 $f(y) > f(x) = M$, 矛盾. 因此 $f(b) = M$, 且 $\forall x < b, f(x) < M$. 特别的, $f(a) < f(b)$.

第 3 章 单变量函数的微分学

习题 3.1

习题 3.1.1 讨论下列函数在点 $x = 0$ 处是否可导:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= |\sin x|; & (2) \quad f(x) &= \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0; \end{cases} \\ (3) \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} & (4) \quad f(x) &= \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x+1, & x < 0; \end{cases} \\ (5) \quad f(x) &= |x|e^x; & (6) \quad f(x) &= |x^3|. \end{aligned}$$

解

(1)

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|\sin h| - |\sin 0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|\sin h| - |\sin 0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin h}{h} = -1. \end{aligned}$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

(2)

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h+1) - 1}{h} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1}{h} = 0. \end{aligned}$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

(3)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$.

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq f(0),$$

因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

(5)

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{he^h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} e^h = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-he^h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -e^h = -1.$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

(6)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h^3| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h|h = 0,$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

习题 3.1.2 求 a, b 的值, 使下列函数处处可导:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1; \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x < 0, \\ ax + b, & x \geq 0. \end{cases}$$

解

(1) $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上可导, 故只需讨论 $x = 1$ 处的可导性.

由连续性得:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 1 = a + b.$$

由可导性得:

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 2 = a.$$

解得 $a = 2, b = -1$.

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上可导, 故只需讨论 $x = 0$ 处的可导性.

由连续性得:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow b = 0.$$

由可导性得:

$$f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow 1 = a.$$

解得 $a = 1, b = 0$.

习题 3.1.3 设函数 $g(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 记 $f(x) = (x - a)g(x)$. 证明 $f'(a) = g(a)$.

解

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h-a)g(a+h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a).$$

习题 3.1.4 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} = (\alpha + \beta)f'(x_0) \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数}).$$

解

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta h)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\alpha \cdot \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} + \beta \cdot \frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta h)}{\beta h} \right] \\
&= \alpha f'(x_0) + \beta f'(x_0) = (\alpha + \beta) f'(x_0).
\end{aligned}$$

习题 3.1.5 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 且 $f(a) \neq 0$, 证明函数 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 也可导. 若 $f(a) = 0$, 结论是否仍成立?

解

(1) $f(a) \neq 0$ 时, 不妨设 $f(a) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $|x - a| < \delta$ 时, $f(x) > 0$, 因此

$$|f(x)| = f(x),$$

因此 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处可导, 且 $|f'(a)| = f'(a)$.

(2) 不成立, 如 $f(x) = x$ 在 $x = 0$ 处可导, 但是 $|x|$ 在 $x = 0$ 处不可导.

习题 3.1.6 求下列函数的导数.

$$(1) y = \frac{x}{3x^2 + 5x - 2};$$

$$(2) y = \sin x \tan x + \cot x;$$

$$(3) y = x^2 \log_3 x;$$

$$(4) y = \frac{x}{1 - \cos x};$$

$$(5) y = \frac{1 + \ln x}{x^2 + 1};$$

$$(6) y = \frac{(1 + x^2) \ln x}{\sin x + \cos x};$$

$$(7) y = (x^2 + 1)(3x - 1)(1 - x^3);$$

$$(8) y = x^3 \cdot \tan x \cdot \ln x.$$

解

(1)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x'(3x^2 + 5x - 2) - x(3x^2 + 5x - 2)'}{(3x^2 + 5x - 2)^2} \\
&= \frac{(3x^2 + 5x - 2) - (6x^2 + 5x)}{(3x^2 + 5x - 2)^2} = -\frac{3x^2 + 2}{(3x^2 + 5x - 2)^2}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)' \\
&= \frac{(2 \sin x \cos x) \cos x - \sin^2 x (-\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\sin x(1 + \cos^2 x)}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 y' &= (x^2)' \log_3 x + x^2 (\log_3 x)' \\
 &= 2x \log_3 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 3} \\
 &= 2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3}
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(x)'(1 - \cos x) - x(1 - \cos x)'}{(1 - \cos x)^2} \\
 &= \frac{1 \cdot (1 - \cos x) - x(\sin x)}{(1 - \cos x)^2} \\
 &= \frac{1 - \cos x - x \sin x}{(1 - \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(1 + \ln x)'(x^2 + 1) - (1 + \ln x)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{x}(x^2 + 1) - (1 + \ln x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{x + \frac{1}{x} - 2x - 2x \ln x}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{1 - x^2 - 2x^2 \ln x}{x(x^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{[(1 + x^2) \ln x]'(\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{[(1 + x^2)' \ln x + (1 + x^2)(\ln x)'](\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{[2x \ln x + (1 + x^2)\frac{1}{x}](\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{(2x \ln x + x + \frac{1}{x})(\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{(x + \frac{1}{x} + (x + 1)^2 \ln x) \sin x + (x + \frac{1}{x} - (x - 1)^2 \ln x) \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
 &y'(x^2 + 1)'(3x - 1)(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)'(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)(1 - x^3)' \\
 &= 2x(3x - 1)(1 - x^3) + (x^2 + 1)3(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)(-3x^2) \\
 &= -18x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 2x + 3
 \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
y' &= (x^3)'(\tan x \cdot \ln x) + x^3(\tan x)' \ln x + x^3 \tan x (\ln x)' \\
&= (3x^2)(\tan x \ln x) + (x^3)(\sec^2 x)(\ln x) + (x^3 \tan x) \left(\frac{1}{x}\right) \\
&= 3x^2 \tan x \ln x + x^3 \sec^2 x \ln x + x^2 \tan x \\
&= x^2(3 \tan x \ln x + x \sec^2 x \ln x + \tan x)
\end{aligned}$$

习题 3.1.7 求下列函数的导数:

(1) $y = x\sqrt{1-x^2};$

(2) $y = \sqrt{1+\ln^2 x};$

(3) $y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}};$

(4) $y = (\sin x + \cos x)^3;$

(5) $y = (\sin x^3)^3;$

(6) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$

(7) $y = \sin[\sin(\sin x)];$

(8) $y = \sin[\cos^5(\arctan x^3)];$

(9) $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3;$

(10) $y = x\sqrt{1+x^2} \sin x;$

(11) $y = e^{\sqrt{x^2+1}};$

(12) $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)];$

(13) $y = x^{x^x} + x^x + x^{2^x};$

(14) $y = (\ln x)^x;$

(15) $y = (\tan x)^{\cot x};$

(16) $y = 10^x \cdot (\sin x)^{\cos x};$

(17) $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^3(x+4)^{1/2}};$

(18) $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}.$

解

(1)

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

(2)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}} (\ln^2 x)' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}} 2 \ln x (\ln x)' = \frac{2 \ln x}{x \sqrt{1+\ln^2 x}}.$$

(3)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)' = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+4x+2}} = \sqrt{\frac{1}{-2x^2+2x+1}}.$$

(4)

$$y' = 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x) = 3(1 + \cos 2x)(\cos x - \sin x).$$

(5)

$$y' = 3 (\sin x^3)^2 (\sin x^3)' = 3 (\sin x^3)^2 (\cos x^3) 3x^2.$$

(6)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} (x + \sqrt{x})' \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right) \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} y' &= \cos[\sin(\sin x)] (\sin(\sin x))' \\ &= \cos[\sin(\sin x)] \cos(\sin x) (\sin x)' \\ &= \cos[\sin(\sin x)] \cos(\sin x) \cos x \end{aligned}$$

(8) 令 $u = \arctan x^3$, 则 $v = \cos^5 u$, 则 $y = \sin v$, 则

$$\begin{aligned} y' &= \cos v \cdot v' = \cos v \cdot (-5 \sin^4 u \cdot \cos u) u' \\ &= -5 \cos \cos^5(\arctan x^3) \sin^4(\arctan x^3) \cdot \cos(\arctan x^3) \cdot \frac{3x^2}{1+x^6}. \end{aligned}$$

(9)

$$y' = \frac{12x^5 - 24x^3 + 12x}{(x^2 + 1)^3}.$$

(10)

$$y' = \frac{x \sin x + \cos x (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(11)

$$y' = e^{\sqrt{x^2+1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(12) 令 $u = \ln^3 x$, 则 $v = \ln^2 u$, 则 $y = \ln v$, 则

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{v} \cdot v' = \frac{1}{v} \cdot 2 \ln u \cdot \frac{1}{u} u' \\ &= \frac{2 \ln(\ln^3 x)}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot \frac{3 \ln^2 x}{x} = \frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)}. \end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
y' &= (e^{x^x \ln x} + e^{x \ln x} + e^{2^x \ln x})' \\
&= (e^{x \ln x} \ln x)' e^{x \ln x} + (x \ln x)' e^{x \ln x} + (2^x \ln x)' e^{2^x \ln x} \\
&= \left((1 + \ln x) e^{x \ln x} + \frac{1}{x} x^x \right) e^{x \ln x} + (1 + \ln x) e^{x \ln x} + \left(2^x \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 \ln x \right) e^{2^x \ln x} \\
&= x^{x^x} (x^{x-1} + \ln x (\ln x + 1) x^x) + x^x (\ln x + 1) + x^{2^x} \left(2^x \frac{1}{x} + \ln x \cdot 2^x \ln 2 \right)
\end{aligned}$$

(14)

$$y' = \frac{(\ln x)^{x+1} \ln(\ln x) + \ln(\ln x)}{\ln x}.$$

(15)

$$y' = (\tan x)^{\cot x} \csc^2(1 - \ln(\tan x))$$

(16) 设 $y = e^{2 \ln(x+5) + \frac{1}{3} \ln(x-4) - 5 \ln(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x+4)} := e^u$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= e^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{(x+5)^2 (x-4)^{1/3}}{(x+2)^5 (x+4)^{1/2}} \left(2 \frac{1}{x+5} + \frac{1}{3} \frac{1}{x-4} - 5 \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+4} \right).
\end{aligned}$$

(17)

$$y' = 10^x \ln 10 \cdot (\sin x)^{\cos x} - 10^x \ln(\sin x) (\sin x)^{\cos x+1} + 10^x \cos^2 x (\sin x)^{\cos x-1}.$$

(18) 设 $y = e^{\ln(1-\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)} := e^u$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= e^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2} \right)
\end{aligned}$$

习题 3.1.8 设 $f(x) = x^3$. 求 $f'(x^2)$ 与 $[f(x^2)]'$.

解

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x^2) = 3(x^2)^2 = 3x^4,$$

$$[f(x^2)]' = [(x^3)^2]' = (x^6)' = 6x^5.$$

习题 3.1.9 设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $g(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$. 求 $f'[g(x)]$, $[f(g(x))]'$.

解

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'[g(x)] = \frac{1}{\sqrt{1+(e^{\sqrt{x^2+1}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}},$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(e^{\sqrt{x^2+1}})^2}} \cdot e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{(x^2+1)(1+e^{2\sqrt{x^2+1}})}}.$$

习题 3.1.10 设 $f(x)$ 处处可导. 求 $\frac{dy}{dx}$:

$$(1) y = f(x^3);$$

$$(2) y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x);$$

$$(3) y = f(e^x + x^e);$$

$$(4) y = \sin[f(\sin f(x))];$$

$$(5) y = f[f(f(x + \cos x))];$$

$$(6) y = f(e^x)e^{f(x)}.$$

解

(1) 令 $u = x^3$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot (3x^2) = 3x^2 f'(x^3).$$

(2) 令 $u = \sin^2 x, v = \cos^2 x$, 则 $y = f(u) + f(v)$. 由链式法则:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f(u) + \frac{d}{dx} f(v) \\ &= \frac{df}{du} \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \frac{dv}{dx} \\ &= f'(u) \cdot (2 \sin x \cos x) + f'(v) \cdot (2 \cos x (-\sin x)) \\ &= f'(\sin^2 x) \sin(2x) - f'(\cos^2 x) \sin(2x) \\ &= [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)] \sin(2x). \end{aligned}$$

(3) 令 $u = e^x + x^e$, 则 $y = f(u)$. 根据链式法则,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot (e^x + ex^{e-1}) = (e^x + ex^{e-1}) f'(e^x + x^e).$$

(4) 这是一个多次复合的函数. 反复应用链式法则:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \sin[f(\sin f(x))] \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot \frac{d}{dx} f(\sin f(x)) \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot f'(\sin f(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\sin f(x)) \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot f'(\sin f(x)) \cdot \cos(f(x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x) \\ &= f'(x) \cos(f(x)) f'(\sin f(x)) \cos[f(\sin f(x))]. \end{aligned}$$

(5) 同样, 多次应用链式法则:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f[f(f(x + \cos x))] \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot \frac{d}{dx} f(f(x + \cos x)) \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot f'(f(x + \cos x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x + \cos x) \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot f'(f(x + \cos x)) \cdot f'(x + \cos x) \cdot \frac{d}{dx} (x + \cos x) \\
 &= (1 - \sin x) f'(x + \cos x) f'(f(x + \cos x)) f'[f(f(x + \cos x))].
 \end{aligned}$$

(6) 令 $u = f(e^x)$ 且 $v = e^{f(x)}$, 则 $y = uv$. 根据乘法法则 $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$. 分别计算:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} f(e^x) = f'(e^x) \cdot (e^x)' = e^x f'(e^x). \\
 \frac{dv}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x).
 \end{aligned}$$

将它们代入乘法法则:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= (e^x f'(e^x)) \cdot e^{f(x)} + f(e^x) \cdot (e^{f(x)} f'(x)) \\
 &= e^{f(x)} [e^x f'(e^x) + f(e^x) f'(x)].
 \end{aligned}$$

习题 3.1.11 求下列函数的导数:

$$(1) \ y = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad (2) \ y = |1 - 2x| \sin x.$$

解

(1) 对于 $x \neq 0$,

$$y' = \frac{e^{1/x} (1 - 1/x + e^{1/x})}{(1 + e^{1/x})^2}$$

对于 $x = 0$,

$$y'_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{he^{1/h}}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-1/h} + 1} = 1, \quad y'_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{he^{1/h}}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/h}}{e^{1/h} + 1} = 0$$

因此

$$y' = \begin{cases} \frac{e^{1/x} (1 - 1/x + e^{1/x})}{(1 + e^{1/x})^2} & x \neq 0 \\ \text{不存在} & x = 0 \end{cases}$$

- (2) (a) $(1 - 2x) > 0$ 时, $x < \frac{1}{2}$, $y' = ((1 - 2x) \sin x)' = -2 \sin x + (1 - 2x) \cos x$.
 (b) $(1 - 2x) < 0$ 时, $x > \frac{1}{2}$, $y' = ((2x - 1) \sin x)' = 2 \sin x + (2x - 1) \cos x$.
 (c) $(1 - 2x) = 0$ 时, $y'_+ = 2 \sin \frac{1}{2} \neq y'_- = -2 \sin \frac{1}{2}$.

综上所述,

$$y' = \begin{cases} 2 \sin x + (2x - 1) \cos x & x > \frac{1}{2} \\ -2 \sin x + (1 - 2x) \cos x & x < \frac{1}{2} \\ \text{不存在} & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

习题 3.1.12 设 n 为正整数, 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 证明:

- (1) 当 $n = 1$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不可导;
- (2) 当 $n = 2$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 但导函数在 $x = 0$ 处不连续 (事实上, 在这一点有第二类间断);
- (3) 当 $n \geq 3$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且导函数在 $x = 0$ 处连续.

解

- (1) 当 $n = 1$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{h},$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{h},$$

显然, $f'_+(0)$ 与 $f'_-(0)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不可导.

- (2) 当 $n = 2$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$. 对于 $x \neq 0$,

$$f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x})' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$$

不存在, 故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

- (3) 当 $n \geq 3$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$. 对于 $x \neq 0$,

$$f'(x) = (x^n \sin \frac{1}{x})' = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} + x^n \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}) = 0,$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

习题 3.1.13 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上处处可导, 但导函数在这个区间上无界.

解 对于 $x \neq 0$,

$$f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x^2})' = 2x \sin \frac{1}{x^2} + x^2 \left(-\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

对于 $x=0$,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sin \frac{1}{h^2} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h \sin \frac{1}{h^2} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$. 综上所述, $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上处处可导. 而对于 $x = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} (n=1, 2, 3, \dots)$,

$$f' \left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sin(n\pi) - 2\sqrt{n\pi} \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} 2\sqrt{n\pi},$$

显然, 当 n 趋近于无穷大时, $\left| f' \left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \right) \right|$ 趋近于无穷大, 故导函数在区间 $[-1, 1]$ 上无界.

习题 3.1.14 求下列函数的反函数的微商.

(1) $y = xe^x$;

(2) $y = \arctan \frac{1}{x}$;

(3) $y = 2x^3 - e^{-2x}$;

(4) $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$.

按照反函数求导定理, 我们应该写成这样:

$$(f^{-1})'(y) \stackrel{y=xe^x}{=} \frac{1}{f'(x)}$$

但是考虑到初学者对反函数求导的理解有点困难, 容易把自己绕晕. 我们给出几种推荐且合理的过程, 这几种过程几乎是等价的:

解

(1) 将 x 看成 y 的函数并在方程两边对 y 求导

$$1 = x'e^x + xx'e^x \Rightarrow x' = \frac{e^{-x}}{1+x}.$$

注 对于由方程 $\varphi(x, y) = 0$ 给出的反函数或隐函数, 只要认准了一个变量是另一个变量的函数, 在方程两边直接对自变量求导即可. 有关详细内容将在第二册中介绍.

(2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -(1 + x^2)$$

注 这种写法与反函数求导定理的意义是最贴近的, 但是避免了使用重复的符号, 因此看起来清晰一点.

(3)

$$dy = 2d(x^3) - d(e^{-2x}) = 6x^2 dx + 2e^{-2x} dx \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{6x^2 + 2e^{-2x}}.$$

注 这在利用 3.2 节中微分的知识: 若 $y(x)$ 可微且能表示为 $dx = A dy$, 那么 $A = x'(y)$.

(4)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}} \left(e^x + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \cdot 2e^{2x} \right) \\ &= \frac{e^{2x} + e^x \sqrt{1 + e^{2x}}}{(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}) \sqrt{1 + e^{2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}. \end{aligned}$$

则

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\sqrt{1 + e^{2x}}}{e^x}.$$

习题 3.1.15 证明: 可导的偶函数的导数为奇函数; 而可导的奇函数的导数为偶函数.

解 设 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 则

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

则 $f'(x)$ 为奇函数.

设 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$, 则

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) + f(x)}{h} = f'(x),$$

则 $f'(x)$ 为偶函数.

习题 3.1.16 证明: 可导的周期函数的导数仍是周期函数.

解 设 $f(x)$ 为周期为 T 的函数, 则 $f(x+T) = f(x)$, 则 $f'(x+T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$, 则 $f'(x)$ 为周期为 T 的函数.

习题 3.1.17 求下列各式之和:

$$(1) P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1};$$

$$(2) Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1};$$

$$(3) R_n = \cos 1 + 2 \cos 2 + \cdots + n \cos n.$$

解

$$(1) \text{ 令 } A(x) = x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}, \text{ 则 } P_n = A'(x) = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.$$

$$(2) Q_n = (xA'(x))' = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

$$(3) \text{ 令 } B(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}},$$

$$\text{则 } B'(x) = \frac{(-\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2} + (n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})x)2\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}(\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x)}{(2\sin \frac{x}{2})^2}.$$

$$\text{则 } R_n = B'(1) = \frac{(-\frac{1}{2}\sin \frac{1}{2} + (n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2}))2\sin \frac{1}{2} - \cos \frac{1}{2}(\cos \frac{1}{2} - \cos(n+\frac{1}{2}))}{(2\sin \frac{1}{2})^2}.$$

习题 3.1.18 求下列函数的二阶导数:

$$(1) y = e^{-x^2};$$

$$(2) y = x^2 2^{2x};$$

$$(3) y = (1+x^2) \arctan x;$$

$$(4) y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

解

(1)

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

(2)

$$y' = 2x2^{2x}(1 + 2\ln 2), \quad y'' = 4x2^{2x}(\ln 2)^2 + 4(1 + \ln 2)2^{2x}.$$

(3)

$$y' = 1 + 2x \arctan x, \quad y'' = 2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

(4) 当 $y > 0$ 时, $y' = 2x$; 当 $y < 0$ 时, $y' = -2x$; 当 $y = 0$ 时,

$$y'_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = 0 = y'_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - 0}{h} = 0$$

故 $y'(0) = 0$ 存在.当 $y > 0$ 时, $y'' = 2$; 当 $y < 0$ 时, $y'' = -2$; 当 $y = 0$ 时,

$$y''_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h - 0}{h} = 2 \neq y''_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h - 0}{h} = -2$$

故 $y''(0)$ 不存在.习题 3.1.19 设函数 $f(x)$ 处处有三阶导数, 求 y'', y''' .

$$(1) y = f(x^2);$$

$$(2) y = f(e^x + x).$$

解

(1)

$$y' = f'(x^2) \cdot 2x, \quad y'' = f''(x^2) \cdot (2x)^2 + f'(x^2) \cdot 2, \quad y''' = f'''(x^2) \cdot (2x)^3 + 3f''(x^2) \cdot (2x) \cdot 2.$$

(2)

$$y' = f'(e^x + x) \cdot (e^x + 1), \quad y'' = f''(e^x + x) \cdot (e^x + 1)^2 + f'(e^x + x) \cdot e^x,$$

$$y''' = f'''(e^x + x) \cdot (e^x + 1)^3 + 3f''(e^x + x) \cdot (e^x + 1) \cdot e^x + f'(e^x + x) \cdot e^x.$$

习题 3.1.20 设 $f(x) = x^n|x|$ (n 为正整数), 证明 $f^{(n)}(0)$ 存在, 但 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

解

$$(1) \text{ 当 } k \leq n \text{ 时当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = x^{n+1}, \text{ 则 } f^{(k)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} x^{n+1-k} = A_{n+1}^k x^{n+1-k};$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = -x^{n+1}, \text{ 则 } f^{(k)}(x) = -\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} x^{n+1-k} = -A_{n+1}^k x^{n+1-k};$$

当 $x = 0$ 时,

$$f_+^{(k)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A_{n+1}^{k-1} h^{n+2-k} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} A_{n+1}^{k-1} h^{n+1-k} = 0$$

$$f_-^{(k)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-A_{n+1}^{k-1} h^{n+2-k} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -A_{n+1}^{k-1} h^{n+1-k} = 0$$

$$f_+^{(n)}(0) = f_-^{(n)}(0), \text{ 故 } f^{(n)}(0) = 0 \text{ 存在.}$$

$$(2) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } f^{(n)}(x) = (n+1)!x, \text{ 则 } f^{(n+1)}(x) = (n+1)!; \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } f^{(n)}(x) = (-1)(n+1)!x,$$

则 $f^{(n+1)}(x) = (-1)(n+1)!; \text{ 当 } x = 0 \text{ 时,}$

$$f_+^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(n+1)!h - 0}{h} = (n+1)!$$

$$f_-^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-1)(n+1)!h - 0}{h} = (-1)(n+1)!$$

$$f_+^{(n+1)}(0) \neq f_-^{(n+1)}(0), \text{ 故 } f^{(n+1)}(0) \text{ 不存在.}$$

习题 3.1.21 证明: 如果 x_0 是多项式 $P_n(x)$ 的 r 重根, 即 $P_n(x)$ 可以分解成

$$P_n(x) = (x - x_0)^r Q_{n-r}(x),$$

其中 $Q_{n-r}(x)$ 是一个 $n-r$ 次多项式, 且 $Q_{n-r}(x_0) \neq 0$. 则 $P_n(x)$ 满足条件

$$P_n(x_0) = 0, \quad P'_n(x_0) = 0, \quad \dots, \quad P_n^{(r-1)}(x_0) = 0, \quad P_n^{(r)}(x_0) \neq 0.$$

解 由题意, $P_n(x) = (x - x_0)^r Q_{n-r}(x)$, 则

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [(x - x_0)^r]^{(i)} \cdot Q_{n-r}^{(k-i)}(x).$$

$$(a) \text{ 当 } k < r \text{ 时, } [(x - x_0)^r]^{(i)} = 0, \text{ 则 } P_n^{(k)}(x_0) = 0.$$

$$(b) \text{ 当 } k = r \text{ 时, } [(x - x_0)^r]^{(r)} = r!, \text{ 则 } P_n^{(r)}(x_0) = r! Q_{n-r}(x_0) \neq 0.$$

习题 3.1.22 求下列函数的高阶导数:

- (1) $(x^2 e^x)^{(n)}$; (2) $[(x^2 + 1) \sin x]^{(n)}$;
 (3) $\left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)^{(n)}$; (4) $(\sin x \cdot \cos x)^{(n)}$.

我们将会直接使用如下结论:

$$(1) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(2) (e^x)^{(n)} = e^x, (a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x;$$

$$(3) \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}};$$

$$(4) (\ln(x+a))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+a)^n};$$

$$(5) (x^m)^{(n)} = \begin{cases} 0 & n < m; \\ n! & n = m; \\ n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} & n > m. \end{cases}$$

解

(1) 由莱布尼兹公式,

$$(x^2 e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{\min\{2,n\}} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} e^x.$$

$$(a) \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } (x^2 e^x)^{(1)} = (x^2)^{(0)} e^x + (x^2)^{(1)} e^x = (x^2 + 2x) e^x;$$

$$(b) \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } (x^2 e^x)^{(n)} = (x^2)^{(0)} e^x + n(x^2)^{(1)} e^x + \binom{n}{2} (x^2)^{(2)} e^x = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x.$$

(2) 由莱布尼兹公式,

$$[(x^2 + 1) \sin x]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2 + 1)^{(k)} (\sin x)^{(n-k)}.$$

$$(a) \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } [(x^2 + 1) \sin x]^{(1)} = (x^2 + 1)^{(0)} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + (x^2 + 1)^{(1)} \sin x = (x^2 + 1) \cos x + 2x \sin x;$$

(b) 当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} [(x^2 + 1) \sin x]^{(n)} &= (x^2 + 1)^{(0)} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n(x^2 + 1)^{(1)} \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\ &\quad + \binom{n}{2} (x^2 + 1)^{(2)} \sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \\ &= (x^2 + 1) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\ &\quad + n(n-1) \sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \\ &= (x^2 + n(n-1) + 1) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

(3) 由莱布尼兹公式,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)^{(n)} &= \left(\frac{1}{(x-1)(x-2)} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(k)} \left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{(x-2)^{n-k+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)(x-2)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x-1)^k (x-2)^{n-k}} \end{aligned}$$

(4)

$$(\sin x \cdot \cos x)^{(n)} = \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^{(n)} = 2^{n-1} \sin \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

习题 3.1.23 求曲线 $y = \cos x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

解 $y' = -\sin x$, 则 $y'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

或

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

习题 3.1.24 证明: 双曲线 $xy = 1$ 上任一点处的切线, 与两坐标轴构成的三角形的面积为定值.

解 对 $xy = 1$ 两侧对 x 求导, $y' = -\frac{y}{x}$, 设切点为 (x_0, y_0) , 则切线方程为

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

即

$$y = -\frac{y_0}{x_0}x + 2y_0.$$

切线与 x 轴交点为 $(2x_0, 0)$, 与 y 轴交点为 $(0, 2y_0)$, 则三角形面积为

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot 2y_0 = 2x_0y_0 = 2.$$

习题 3.1.25 有一底半径为 r cm, 高为 h cm 的正圆锥形容器, 现以 a cm³/s 的速度自顶部向其内注水, 求水面上升的速度.

解 设水面高度为 x cm, 则水面半径为 $\frac{r}{h}x$ cm, 则水体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{r}{h}x \right)^2 x = \frac{\pi r^2}{3h^2}x^3.$$

则

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi r^2}{h^2}x^2 \frac{dx}{dt}.$$

由题意, $\frac{dV}{dt} = a$, 则

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ah^2}{\pi r^2 x^2}.$$

习题 3.1.26 水自高为 18 cm, 底半径为 6 cm 的圆锥形漏斗流入直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 已知水在漏斗中深度为 12 cm 时水平面下降的速率为 1 cm/min. 试求圆柱形筒中水面上升的速度.

解 设漏斗中水深为 x cm, 则漏斗中水体积为

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{6}{18}x\right)^2 x = \frac{\pi}{27}x^3.$$

则

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\pi}{9}x^2 \frac{dx}{dt}.$$

由题意, $\frac{dx}{dt} = -1$ cm/min, 当 $x = 12$ cm 时,

$$\frac{dV_1}{dt} = -16\pi \text{ cm}^3/\text{min}.$$

设圆柱形筒中水深为 y cm, 则圆柱形筒中水体积为

$$V_2 = \pi 5^2 y = 25\pi y.$$

则

$$\frac{dV_2}{dt} = 25\pi \frac{dy}{dt}.$$

由题意, $-\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt}$, 则

$$-(-16\pi) = 25\pi \frac{dy}{dt},$$

即

$$\frac{dy}{dt} = \frac{16}{25} \text{ cm/min}.$$

习题 3.2

习题 3.2.1 设 $y = x^2 + x$, 计算在 $x = 1$ 处, 当 $\Delta x = 10, 1, 0.1, 0.01$ 时, 相应的函数的改变量 Δy 和函数的微分 dy , 并观察差 $\Delta y - dy$ 随 Δx 减小的变化情况.

解

(1) 当 $\Delta x = 10$ 时,

$$\Delta y = f(11) - f(1) = 130, dy = f'(1) dx = 3 \times 10 = 30, \Delta y - dy = 100.$$

(2) 当 $\Delta x = 1$ 时,

$$\Delta y = f(2) - f(1) = 4, dy = f'(1) dx = 3 \times 1 = 3, \Delta y - dy = 1.$$

(3) 当 $\Delta x = 0.1$ 时,

$$\Delta y = f(1.1) - f(1) = 0.31, dy = f'(1) dx = 3 \times 0.1 = 0.3, \Delta y - dy = 0.01.$$

(4) 当 $\Delta x = 0.01$ 时,

$$\Delta y = f(1.01) - f(1) = 0.0301, dy = f'(1) dx = 3 \times 0.01 = 0.03, \Delta y - dy = 0.0001.$$

从中不难看出, 随着 Δx 的减小, $\Delta y - dy$ 也在减小, 且大体上 $\Delta y - dy$ 趋于 0.

习题 3.2.2 求下列函数的微分:

$$(1) y = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right);$$

$$(2) y = \sin x - x \cos x;$$

$$(3) y = \arccos \frac{1}{|x|};$$

$$(4) y = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|;$$

$$(5) y = 5\sqrt[3]{\arctan x^2};$$

$$(6) y = \tan^2(1 + 2x^2);$$

$$(7) y = e^{-x} \cos(3 - x);$$

$$(8) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

解

(1)

$$dy = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}} \cdot d\left(-\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{x - 2\pi} dx.$$

(2)

$$dy = d(\sin x) - d(x \cos x) = \cos x dx - (\cos x - x \sin x) dx = x \sin x dx.$$

(3) $x > 0$ 时,

$$dy = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

$x < 0$ 时,

$$dy = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot d\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

因此

$$dy = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx, x \neq 0, |x| > 1.$$

(4)

$$dy = d(\ln|x-1| - \ln|x+1|) = \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{x+1} dx = \frac{2}{x^2-1} dx, \quad x \neq \pm 1.$$

(5)

$$dy = 5 \cdot \frac{1}{3} (\arctan x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot d(\arctan x^2) = \frac{10x}{3(1+x^4)(\arctan x^2)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

(6)

$$dy = 2 \tan(1+2x^2) \cdot \sec^2(1+2x^2) \cdot d(1+2x^2) = 8x \tan(1+2x^2) \sec^2(1+2x^2) dx.$$

(7)

$$dy = e^{-x} \cos(3-x) \cdot d(-x) + e^{-x} \cdot d(\cos(3-x)) = e^{-x}(-\cos(3-x) + \sin(3-x)) dx.$$

(8)

$$dy = \frac{(\sqrt{x^2+1}) \cdot d(x) - x \cdot d(\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{-x^2+x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

习题 3.2.3 对下列函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases} & (2) \quad & \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases} \\ (3) \quad & \begin{cases} x = \varphi \cos \varphi, \\ y = \varphi \sin \varphi; \end{cases} & (4) \quad & \begin{cases} x = \cos^3 \varphi, \\ y = \sin^3 \varphi. \end{cases} \end{aligned}$$

解

(1) 对 $x = \ln(1+t^2), y = t - \arctan t$ 两边求微分, 得

$$dx = \frac{2t}{1+t^2} dt, \quad dy = \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

(2) 对 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ 两边求微分, 得

$$dx = (1 - \cos t) dt, \quad dy = \sin t dt,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\cos t(1-\cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1-\cos t)^2}}{1 - \cos t} = \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{(1 - \cos t)^2}.$$

(3) 对 $x = \varphi \cos \varphi, y = \varphi \sin \varphi$ 两边求微分, 得

$$dx = (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) d\varphi, \quad dy = (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) d\varphi,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi + \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi - \varphi \sin \varphi}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} \\ &= \frac{(\cos \varphi + \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)(-\sin \varphi - \sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}{(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)^2} \\ &= \frac{\varphi}{(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)^3} \end{aligned}$$

(4) 对 $x = \cos^3 \varphi, y = \sin^3 \varphi$ 两边求微分, 得

$$dx = -3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi, \quad dy = 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{3 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{-3 \cos^2 \varphi \sin \varphi} = -\tan \varphi.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{-\sec^2 \varphi}{-3 \cos^2 \varphi \sin \varphi} = \frac{1}{3 \cos^4 \varphi \sin \varphi}.$$

习题 3.2.4 求下列曲线在已知点处的切线方程.

$$(1) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases} \quad \text{在 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 处}; \quad (2) \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^2}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{在 } t = 2 \text{ 处}.$$

解

(1) 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处,

$$x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t,$$

所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1.$$

切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

即

$$x + y - \sqrt{2} = 0.$$

(2) 在 $t = 2$ 处,

$$x = \frac{3 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{6}{5}, \quad y = \frac{3 \times 2^2}{1 + 2^2} = \frac{12}{5}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{6t}{(1+t^2)^2}}{\frac{3(1-t^2)}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = -\frac{4}{3}.$$

切线方程为

$$y - \frac{12}{5} = -\frac{4}{3} \left(x - \frac{6}{5} \right),$$

即

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

习题 3.3

习题 3.3.1 设 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 确定方程 $f'(x) = 0$ 的实根的个数, 并指出根所在的区间.

解 $f'(x)$ 为三次多项式, 故 $f'(x) = 0$ 最多有三个实根. 又 $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$, 由 Rolle 定理, 在 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 内至少有一点 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$. 因此 $f'(x) = 0$ 有且仅有三个实根, 分别在 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 内.

习题 3.3.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上有二阶微商, 且 $f(1) = f(2) = 0$. 记 $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 则在区间 $(1, 2)$ 内至少有一点 ξ , 使得 $F''(\xi) = 0$.

解 由 $f(1) = f(2) = 0 \Rightarrow F(1) = F(2) = 0$. 由 Rolle 定理, 在 $(1, 2)$ 内至少有一点 ξ_1 , 使得 $F'(\xi_1) = 0$. 又 $F'(1) = 2(1-1)f(1) + (1-1)^2 f'(1) = 0$. 由 Rolle 定理, 在 $(1, \xi_1)$ 内至少有一点 ξ , 使得 $F''(\xi) = 0$.

习题 3.3.3 举例说明, 中值定理的下述意义的逆不成立: 设 $\xi \in (a, b)$ 是指定的一点, 则存在 $c, d \in [a, b]$, 使得 $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$. (提示: 考虑函数 $f(x) = x^3, \xi = 0$.)

解 设 $f(x) = x^3, \xi = 0$, 则 $f'(\xi) = f'(0) = 0$. 若存在 $c, d \in [-1, 1]$, 使得 $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$, 则有

$$\frac{c^3 - d^3}{c - d} = 0 \Rightarrow c^2 + cd + d^2 = 0 \Rightarrow c = d = 0.$$

但 c, d 不能相等, 故不存在 $c, d \in [-1, 1]$, 使得 $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$.

习题 3.3.4 证明下列不等式:

(1) 当 $a > b > 0, n > 1$ 时, 有 $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$;

(2) 当 $x > 0$ 时, 有 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$;

(3) 当 $0 < a < b$ 时, 有 $(a+b) \ln \frac{a+b}{2} < a \ln a + b \ln b$.

(4) 当 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \alpha} < \tan \beta - \tan \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \beta}$.

解

(1) 设 $f(x) = x^n$, 则 $f'(x) = nx^{n-1}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 (b, a) 内至少有一点 ξ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

又 $a > \xi > b > 0, f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 故 $nb^{n-1} < f'(\xi) < na^{n-1}$, 于是

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$

(2) 设 $f(x) = \ln(1+x)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 $(0, x)$ 内至少有一点 ξ , 使

得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

又 $x > \xi > 0$, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 故 $\frac{1}{1+x} < f'(\xi) < 1$, 于是

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

(3) 设 $f(x) = x \ln x$, 则 $f'(x) = \ln x + 1$. 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$, $\eta \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{(a+b) \ln \frac{a+b}{2} - 2a \ln a}{b-a}$$

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{a+b}{2}} = \frac{2b \ln b - (a+b) \ln \frac{a+b}{2}}{b-a}$$

又 $a < \xi < \eta < b$, $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 故 $f'(\xi) < f'(\eta)$, 于是

$$(a+b) \ln \frac{a+b}{2} < a \ln a + b \ln b.$$

(4) 设 $f(x) = \tan x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 (α, β) 内至少有一点 ξ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\beta - \alpha}$$

又 $\beta > \xi > \alpha > 0$, $f'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递增, 故 $\frac{1}{\cos^2 \alpha} < f'(\xi) < \frac{1}{\cos^2 \beta}$, 于是

$$\frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \alpha} < \tan \beta - \tan \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \beta}.$$

习题 3.3.5 证明下列恒等式:

$$(1) \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(2) \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

解

(1) 设 $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 0.$$

又 $f(0) = 0$, 故 $f(x) = 0$, 即 $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) 设 $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x}$, 则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = 0. \quad (x \neq -1)$$

$$\text{又 } g(0) = \frac{\pi}{4}, g(-2) = -\frac{3\pi}{4}, \text{ 故 } g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

这道题使用了引理:

引理 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且在 I 内部可导. 若 $f'(x) = 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在 I 上恒为常数.

证明 设 $x_1, x_2 \in I$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1).$$

因此 $f(x)$ 在 I 上恒为常数.

习题 3.3.6 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的可导函数, 对任意 $x \in [0, 1]$ 有 $f(x) \in (0, 1)$; 并且对每个 $x, f'(x) \neq 1$. 证明在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x , 使 $f(x) = x$.

解 设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(0) = f(0) > 0, g(1) = f(1) - 1 < 0$. 由介值定理, 在 $(0, 1)$ 内至少有一点 ξ , 使得 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$.

反证法证明唯一性: 假设在 $(0, 1)$ 内有两点 ξ_1, ξ_2 , 使得 $f(\xi_1) = \xi_1, f(\xi_2) = \xi_2$, 则 $g(\xi_1) = g(\xi_2) = 0$. 由 Rolle 定理, 在 (ξ_1, ξ_2) 内至少有一点 η , 使得 $g'(\eta) = 0$, 即 $f'(\eta) - 1 = 0$, 与 $f'(x) \neq 1$ 矛盾. 因此在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x , 使 $f(x) = x$.

习题 3.3.7 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $|f'(x)| < 1$, 又 $f(0) = f(1)$. 证明: 对于 $[0, 1]$ 上的任意两点 x_1, x_2 , 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$.

解 对于 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3$ s. t. $0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \xi_3 < 1$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f'(\xi_3) = \frac{f(1) - f(x_2)}{1 - x_2}.$$

因此

$$|f(x_1) - f(0)| = |f'(\xi_1)|x_1 < x_1,$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi_2)|(x_2 - x_1) < x_2 - x_1,$$

$$|f(1) - f(x_2)| = |f'(\xi_3)|(1 - x_2) < 1 - x_2.$$

于是

$$\begin{aligned} 2|f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_2) - f(x_1)| + |f(1) - f(x_2) + f(x_1) - f(0)| \\ &\leq |f(x_2) - f(x_1)| + |f(1) - f(x_2)| + |f(x_1) - f(0)| \\ &< (x_2 - x_1) + (1 - x_2) + x_1 = 1. \end{aligned}$$

故 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$.

习题 3.3.8 若 $f(x)$ 处处可导, 且 $f'(x) = f(x)$. 证明 $f(x) = Ce^x$, C 为任意常数.

解 设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x f(x) - e^x f(x)}{(e^x)^2} = 0.$$

因此 $g(x) \equiv g(0) \Rightarrow f(x) = f(0)e^x$. 设 $C = f(0)$.

习题 3.3.9 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$. 证明在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$.

解 由于 $f(x)$ 不为常函数, 故存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) \neq f(a)$.

(1) 若 $f(x_0) > f(a)$, 则 $\exists \xi \in (a, x_0)$, 使得 $f(\xi) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0$.

(2) 若 $f(x_0) < f(a) = f(b)$, 则 $\exists \eta \in (x_0, b)$, 使得 $f(\eta) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} > 0$.

习题 3.3.10 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. 证明:

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$;

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

解

(1) 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (x, x+1)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x).$$

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon, \exists X > 0$, s. t. $\forall x > X, |f'(x)| < \varepsilon$. 设 $x > X$, 则由 Lagrange 中值定理, $\exists \eta \in (X, x)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x) - f(X)}{x - X} \Rightarrow f(x) = f'(\eta)(x - X) + f(X).$$

因此

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| = \left| f'(\eta) \left(1 - \frac{X}{x} \right) + \frac{f(X)}{x} \right| \leq |f'(\eta)| \left| 1 - \frac{X}{x} \right| + \left| \frac{f(X)}{x} \right| < \varepsilon + \left| \frac{f(X)}{x} \right|.$$

也就是说, 当 $x > \max \left\{ X, \frac{|f(X)|}{\varepsilon} \right\}$ 时, $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < 2\varepsilon$. 因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

习题 3.3.11 证明: 若函数 $f(x)$ 在 (有限) 开区间 (a, b) 内有有界的导函数, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内也有界. 如果有限区间 (a, b) 改为无穷区间, 结论还成立吗? 命题的逆命题是否成立?

解 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 故在 (a, b) 连续. 不妨设 $\forall x \in (a, b), f'(x) \leq M$, 则

$$\forall x \in (a, b), \left| \frac{f(x) - f(a)}{b - a} \right| = |f'(\xi)| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq |f(a)| + M|b - a|$$

即 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

将 (a, b) 改为无穷区间, 结论不成立. 考虑 $f(x) = x, f'(x) = 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 但 $f(x) = x$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界.

逆命题不成立. 考虑 $f(x) = \sqrt{x}, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1)$ 上有界, 但 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1)$ 上无界.

习题 3.3.12 设对所有的实数 x, y , 不等式 $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^2$ (M 为常数) 都成立. 证明: $f(x)$ 恒为常数.

解 $\forall x \neq y, 0 \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M|x - y|$. 令 $y \rightarrow x$,

$$\lim_{y \rightarrow x} 0 = \lim_{y \rightarrow x} M|x - y| = 0 \Rightarrow |f'(x)| = \lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

故 $f(x)$ 恒为常数.

习题 3.3.13 设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0 + \delta]$ 上连续 (这里 $\delta > 0$), 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内可导. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = l$ (这里的 l 可以是无穷大), 则 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数也为 l , 即

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x).$$

(将区间 $[x_0, x_0 + \delta]$ 换为 $[x_0 - \delta, x_0]$, 有类似的结论.)

解 仅证 $l = +\infty$ 的情形. 由 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = +\infty$, 知 $\forall N > 0, \exists \delta_N > 0, \text{s.t. } \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_N), f'(x) > N$.

由 Lagrange 中值定理, 有 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_N), \exists \xi \in (x_0, x)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

因此 $\forall N, \exists \delta_N > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_N)$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi) > N.$$

即证 $f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$.

但是若 $f'_+(x_0) = l$ 已知, 不一定有 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = l$. 考虑 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} f'_+(0) =$

0, 但 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ 不存在.

习题 3.3.14 应用上一题的结论证明:

(1) 函数 $x^{1/3}$ 在 $x = 0$ 处不可导;

(2) 函数 $\arcsin x, \arccos x$ 在 $x = 1$ 处没有左导数, 在 $x = -1$ 处没有右导数.

解

(1) 设 $f(x) = x^{1/3}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

(2) 仅证明 $\arcsin x$ 在 $x = 1$ 处没有左导数, $\arccos x$ 的证明类似. 设 $f(x) = \arcsin x$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = +\infty, \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } x = 1 \text{ 处没有左导数.}$$

习题 3.3.15 证明: 若函数 $f(x)$ 在一个区间内处处可导, 则导函数 $f'(x)$ 不能有第一类间断点, 即在 (区间内) 每一点处, $f'(x)$ 或者连续, 或者有第二类间断. (由本题推出, 具有第一类间断点的函数, 如 $\operatorname{sgn} x$, 不能成为某个函数的导函数.)

解 由 Darboux 定理, 导函数 $f'(x)$ 具有介值性质, 故 $f'(x)$ 不能有第一类间断点.

习题 3.3.16 设 $f(x)$ 在一个区间 I 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外, $f(x)$ 在 I 内部的导数为正 (负), 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增 (减). (注意, 在例外的点处, $f(x)$ 可能不可导.)

解 设 $x_1, x_2 \in I$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 若 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 内处处可导, 则由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

又 $f'(\xi) > 0 (f'(\xi) < 0)$, 故 $f(x_2) > f(x_1) (f(x_2) < f(x_1))$.

若 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 内有有限个点不可导, 设这些点为 y_1, y_2, \dots, y_n , 则将 (x_1, x_2) 分成 $n+1$ 个子区间 $(x_1, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_n, x_2)$, 在每个子区间内 $f(x)$ 处处可导, 由上面的结论可知, 在每个子区间内 $f(x)$ 严格单调递增 (递减). 因此 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 内严格单调递增 (递减). 综上所述, $f(x)$ 在 I 上严格单调递增 (递减).

习题 3.3.17 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 I 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 I 内部满足 $f'(x) > g'(x)$; 设存在 $a \in I$, 使得 $f(a) = g(a)$ (a 不是区间端点), 则当 $x \in I$ 且 $x > a$ 时, 有 $f(x) > g(x)$; 当 $x \in I$ 且 $x < a$ 时, 有 $f(x) < g(x)$.

解 记 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 在 I 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外, $h(x)$ 在 I 内部满足 $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$. 又 $h(a) = f(a) - g(a) = 0$. 由上一题的结论可知, 当 $x \in I$ 且 $x > a$ 时, $h(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$; 当 $x \in I$ 且 $x < a$ 时, $h(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$.

习题 3.3.18 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可导, $f(0) = 0$, $f'(x)$ 严格递增, 证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 严格递增.

解 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

又由 Lagrange 中值定理, $\exists \eta \in (0, x_1)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{f(x_1)}{x_1}.$$

因为 $f'(x)$ 严格递增, 故 $f'(\xi) > f'(\eta)$, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow \frac{f(x_2)}{x_2} > \frac{f(x_1)}{x_1}.$$

因此 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 严格递增.

习题 3.3.19 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个可疑极值点, 且 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可微, $f''(x_0) \neq 0$. 证明: 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点; 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点. (提示: 现在必有 $f'(x_0) = 0$.)

举例说明: 若 $f''(x_0) = 0$, 则 x_0 可以是 $f(x)$ 的极大值点或极小值点, 也可以不是极值点.

解 若 $f''(x_0) < 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f''(x) < 0$. 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi_1 \in (x, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, x)$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

又 $f''(x) < 0$, 故 $f'(\xi_1) > f'(x_0) = 0 > f'(\xi_2)$, 由 **习题 3.3.17** 可知, 即当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f(x) < f(x_0)$. 因此 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点. 即当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f(x) < f(x_0)$. 因此 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点.

例: 设 $f(x) = x^4$, 则 $f''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点. 设 $g(x) = -x^4$, 则 $g''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的一个极大值点. 设 $h(x) = x^3$, 则 $h''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 不是 $h(x)$ 的极值点.

习题 3.3.20 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0)$, $f(1) = f'(1)$. 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 满足 $f(\xi) = f''(\xi)$.

解 设 $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$, 则

$$g'(x) = e^x(f(x) - f'(x)) + e^x(f'(x) - f''(x)) = e^x(f(x) - f''(x)).$$

又 $g(0) = e^0(f(0) - f'(0)) = 0$, $g(1) = e^1(f(1) - f'(1)) = 0$. 由 Rolle 定理, 在 $(0, 1)$ 内至少有一点 ξ , 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = f''(\xi)$.

习题 3.3.21 求下列函数的单调区间与极值.

(1) $y = 2x^3 - 3x^2$;

(2) $y = x^{2/3}$;

(3) $y = x^2 e^{-x^2}$;

(4) $y = x^{1/x}$;

(5) $y = \frac{(\ln x)^2}{x}$;

(6) $y = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$.

解 高中的时候大家就已经很熟悉怎么用导数来求函数的单调区间与极值了, 这里仅给出答案.

(1)

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1), \quad y'' = 12x - 6.$$

单调区间: 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 0$ 处取得极小值 0, 在 $x = 1$ 处取得极大值 -1 .

(2)

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}, \quad y'' = -\frac{2}{9}x^{-4/3}.$$

单调区间: 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 0$ 处取得极小值 0.

(3)

$$y' = 2xe^{-x^2}(1 - x^2), \quad y'' = 2e^{-x^2}(1 - 4x^2 + x^4).$$

单调区间: 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 上单调递增.

极值: 在 $x = -1$ 处取得极大值 $\frac{1}{e}$, 在 $x = 0$ 处取得极小值 0, 在 $x = 1$ 处取得极大值 $\frac{1}{e}$.

(4) 此函数只在 $(0, +\infty)$ 有定义.

$$y' = x^{1/x} \frac{1 - \ln x}{x}, \quad y'' = x^{1/x} \frac{(\ln x)^2 - 3 \ln x + 2}{x^2}.$$

单调区间: 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = e$ 处取得极大值 $e^{1/e}$.

(5)

$$y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}, \quad y'' = \frac{(\ln x)^2 - 4 \ln x + 2}{x^3}.$$

单调区间: 在 $(0, 1)$ 和 $(e^2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(1, e^2)$ 上单调递增.

极值: 在 $x = 1$ 处取得极小值 0, 在 $x = e^2$ 处取得极大值 $\frac{4}{e^2}$.

(6)

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1-x}{1+x^2}, \quad y'' = -\frac{(1+x^2) + 2x(1-x)}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}.$$

单调区间: 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 1$ 处取得极大值 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

命题 (极值点的判别法)

- (1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f'(x_0)$ 在 x_0 两侧存在, 异号, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值点. $f'(x_0)$ 可以不存在. 这即极值存在的一阶导判别法.
- (2) 若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 (< 0)$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的二阶导判别法.
- (3) 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, f^{(2n)}(x_0) > 0 (< 0)$, 则 $f(x_0)$ 必是 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的高阶导判别法.

习题 3.3.22 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值.

$$(1) y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2, 2];$$

$$(2) y = \sin 2x - x, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$$

$$(3) y = \arctan \frac{1-x}{1+x}, [0, 1];$$

$$(4) y = x \ln x, (0, +\infty).$$

解

(1)

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y(-2) = 13, \quad y(-1) = 4, \quad y(0) = 5, \quad y(1) = 4, \quad y(2) = 13.$$

故最大值为 13, 最小值为 4.

(2)

$$y' = 2 \cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6}.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

故最大值为 $\frac{\pi}{2}$, 最小值为 $-\frac{\pi}{2}$.

(3)

$$y' = -\frac{2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2} < 0 \quad (x \in [0, 1]).$$

故在 $[0, 1]$ 上单调递减, 最大值为 $y(0) = \frac{\pi}{4}$, 最小值为 $y(1) = 0$.

(4)

$$y' = \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}.$$

函数在 $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增且趋于 $+\infty$. 故最小值为 $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, 无最大值.

习题 3.3.23 证明下列不等式:

$$(1) \frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1, \quad x \in [0, 1], p > 1;$$

$$(2) \tan x > x - \frac{x^3}{3}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2});$$

$$(3) \frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}, \quad 0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2};$$

$$(4) \ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}, \quad x > 0;$$

$$(5) 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, \quad x \text{ 为任意实数};$$

(6) $\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且右端的常数 $\frac{4}{3}$ 不能换为更大的数;

(7) $(1 - \frac{1}{x})^{x-1} (1 + \frac{1}{x})^x < 4$, $x \in (1, +\infty)$;

(8) $x^{a-1} + x^{a+1} \geq \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}$, $x \in (0, 1), a \in (0, 1)$.

解

(1) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 则 $f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$. 因此 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减. 故 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$, 最大值为 $f(0) = f(1) = 1$, 即

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

(2) 设 $g(x) = \tan x - x + \frac{x^3}{3}$, 则 $g'(x) = \sec^2 x - 1 + x^2 = \tan^2 x + x^2 > 0$. 因此 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 又 $g(0) = 0$, 故 $g(x) > 0$, 即

$$\tan x > x - \frac{x^3}{3}.$$

(3) 设 $h(x) = \frac{\tan x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x \tan^2 x}{x^2} > 0$. 因此 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 故 $h(x_2) > h(x_1)$, 即

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

(4) 设 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x}$, 则

$$f'(x) = \frac{\arctan x + x^2 \arctan x + x^3 + x^2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} > 0, \quad x > 0$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(0) = 0$, 故 $f(x) > 0$, 即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(4) 另解令 $f(x) = (1+x) \ln(1+x) - \arctan x$, $g(x) = \arctan x$, $\forall x > 0$,

$$\exists \xi_1 \in [0, x], \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi_1) = 1 + \ln(1+x) > 1.$$

$$\exists \xi_2 \in [0, x], \frac{g(x) - g(0)}{g - 0} = \frac{g(x)}{x} = g'(\xi_2) = \frac{1}{1 + \xi_2^2} < 1.$$

故

$$g(x) < x < f(x).$$

即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(5) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exists \xi \in [0, x], \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \sqrt{1+x^2} - 1$$

即

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}.$$

(6) 令 $f(x) = x - \frac{4}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin x \cos x$, 则

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{3} \cos x + \frac{1}{3} \cos 2x = \frac{1}{3} (2 \cos x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0.$$

又 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}), \sin x > 0$,

$$\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos x.$$

另一方面, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cos x = 0,$$

$\frac{4}{3}$ 不能被替换为更大的数.

(7)

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 < 4$$

(8) 令 $f(x) = x^{a-1} + x^{a+1}$, 则 $\forall x \in (0, 1), a \in (0, 1)$,

$$f'(x) = (a-1)x^{a-2} + (a+1)x^a = (a+1) \left(x + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) \left(x - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) x^{a-2}.$$

$$\forall x \in \left(0, \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right), f'(x) < 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

$$\forall x \in \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, 1\right), f'(x) > 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

$$\text{综上, } \forall x \in (0, 1), a \in (0, 1), x^{a-1} + x^{a+1} \geq \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

习题 3.3.24 试确定下列函数零点的个数及所在范围:

(1) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10$;

(2) $ax - \ln x$ (其中 $a > 0$).

解

(1) 令 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$. 我们首先分析 $f(x)$ 的单调性. 求导得:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3).$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = 3$.

- 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.
- 当 $x \in (1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.
- 当 $x \in (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值,

$$f(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 10 = 1 - 6 + 9 - 10 = -6.$$

$f(x)$ 在 $x = 3$ 处取得极小值,

$$f(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 10 = 27 - 54 + 27 - 10 = -10.$$

同时, 考察 x 趋于无穷时的极限:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

由于极大值 $f(1) = -6 < 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 所以在 $(-\infty, 1]$ 上 $f(x)$ 恒为负, 没有零点. 由于极小值 $f(3) = -10 < 0$, 且极大值 $f(1) = -6 < 0$, 所以在 $(1, 3]$ 上 $f(x)$ 恒为负, 没有零点. 由于 $f(3) = -10 < 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 且 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上连续且单调递增, 根据零点存在定理, $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上有且仅有一个零点.

又因为

$$f(4) = -6 < 0, \quad f(5) = 10 > 0.$$

所以零点在 $(4, 5)$ 范围内.

该函数只有一个零点, 位于区间 $(4, 5)$ 内.

- (2) 令 $g(x) = ax - \ln x$. 函数的定义域为 $(0, +\infty)$. (题目已给出 $a > 0$) 我们分析 $g(x)$ 的单调性. 求导得:

$$g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}.$$

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{a}$.

- 当 $x \in (0, 1/a)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.
- 当 $x \in (1/a, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

因此, $g(x)$ 在 $x = 1/a$ 处取得全局最小值, 最小值为:

$$g(1/a) = a \left(\frac{1}{a} \right) - \ln \left(\frac{1}{a} \right) = 1 - \ln(a^{-1}) = 1 + \ln a.$$

我们考察 $g(x)$ 在定义域边界的行为:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(a - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \cdot (a - 0) = +\infty.$$

函数 $g(x)$ 从 $+\infty$ 递减到最小值 $1 + \ln a$, 然后再递增到 $+\infty$. 零点的个数取决于最小值 $1 + \ln a$ 的符号:

情况 1 若最小值 $1 + \ln a > 0$, 即 $\ln a > -1$, $a > e^{-1}$ ($a > 1/e$). 此时 $g(x)$ 的最小值大于 0, $g(x)$ 恒大于 0, 故函数没有零点.

情况 2 若最小值 $1 + \ln a = 0$, 即 $\ln a = -1$, $a = e^{-1}$ ($a = 1/e$). 此时 $g(x)$ 的最小值等于 0, $g(x)$ 仅在 $x = 1/a = e$ 处与 x 轴相切, 故函数有且仅有一个零点, 零点为 $x = e$.

情况 3 若最小值 $1 + \ln a < 0$, 即 $\ln a < -1$, $0 < a < e^{-1}$ ($0 < a < 1/e$). 此时 $g(x)$ 的最小值小于 0. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ 且 $g(1/a) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1/a)$ 上连续且单调递减, 故在 $(0, 1/a)$ 内必有一个零点. 由于 $g(1/a) < 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, $g(x)$ 在 $(1/a, +\infty)$ 上连续且单调递增, 故在 $(1/a, +\infty)$ 内必有一个零点. 故函数有两个零点.

结论:

- 若 $a > e^{-1}$, 函数有 0 个零点.
- 若 $a = e^{-1}$, 函数有 1 个零点, 位于 $x = e$.
- 若 $0 < a < e^{-1}$, 函数有 2 个零点, 一个位于 $(0, 1/a)$, 另一个位于 $(1/a, +\infty)$.

习题 3.3.25 设 $a \in (0, 1)$, $b_1 = 1 - a$,

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{1 - e^{-b_n}} - a, \quad n = 1, 2, \dots$$

问 $\{b_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则给予证明, 若收敛, 则求极限.

习题 3.4

习题 3.4.1 试给出 Cauchy 中值定理的几何解释.

解 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可微. 根据 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

几何上, 这意味着在区间 $[a, b]$ 上, 存在一点 ξ , 使得函数 $f(x)$ 在该点的瞬时变化率 (导数) 与函数 $g(x)$ 在该点的瞬时变化率之比等于它们在端点处的平均变化率之比. 换句话说, 存在一条切线, 其斜率与通过点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的割线的斜率成比例关系, 这个比例由函数 $g(x)$ 的变化决定.

习题 3.4.2 试说明在闭区间 $[-1, 1]$ 上 Cauchy 中值定理对函数 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = x^3$ 为什么不正确.

解 在闭区间 $[-1, 1]$ 上, 函数 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = x^3$ 都是连续的, 并且在开区间 $(-1, 1)$ 内可微. 然而, 我们计算它们在端点处的变化:

$$f(1) - f(-1) = 1^2 - (-1)^2 = 0,$$

$$g(1) - g(-1) = 1^3 - (-1)^3 = 2.$$

因此, Cauchy 中值定理要求存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使得

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{0}{2} = 0 = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

计算导数:

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 3x^2.$$

因此,

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} = \frac{2}{3\xi}.$$

要使得 $\frac{2}{3\xi} = 0$, 必须有 $\xi \rightarrow \infty$, 这显然不可能在区间 $(-1, 1)$ 内实现. 因此, 在这个例子中, Cauchy 中值定理不成立.

这个例子说明了 Cauchy 中值定理的适用条件必须严格满足, 其中要求 $g'(x)$ 在 (a, b) 内不为零, 否则可能导致分母为零的情况, 从而使得定理无法应用.

习题 3.4.3 设 $b > a > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$2\xi(f(b) - f(a)) = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

解 设 $g(x) = x^2$, 则 $g'(x) = 2x$. 根据 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{f'(\xi)}.$$

整理即得.

习题 3.4.4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 ($ab > 0$), 在 (a, b) 上可微. 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

解 由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{f'(\xi)\xi - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}.$$

整理即得.

习题 3.4.5 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \alpha x} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x} \quad (m, n \text{ 为正整数}, \alpha, \beta \text{ 为实数});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2} \quad (m, n \text{ 为自然数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} \quad (\alpha \text{ 为任意实数});$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > 0);$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\tan x};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2} \right);$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln(1 - x)};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{2x - \pi};$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{1/x} - e}{x};$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1 - x) + \tan \frac{\pi}{2} x}{\cot \pi x};$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x^3)^2}{(1 - \cos x)(e^{x^2} - 1) \tan^2 x};$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1 + x)}{x} \right)^{1/x};$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \cdot \left(2 - \frac{x}{e^x - 1} \right);$$

$$(19) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} \quad (n \text{ 为自然数}, a > 1, k > 0);$$

$$(20) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k} \quad (n \text{ 为正整数}, k > 0).$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \alpha x} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{m}(1 + \alpha x)^{\frac{1}{m}-1} - \frac{\beta}{n}(1 + \beta x)^{\frac{1}{n}-1}}{1} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nm(1+mx)^{n-1} - mn(1+nx)^{m-1}}{2x} \\ &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nm^2(n-1)(1+mx)^{n-2} - mn^2(m-1)(1+nx)^{m-2}}{2} \\ &= \frac{mn(n-m)}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = -4.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} \stackrel{\arcsin x = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{\sin^3 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{6}.$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

(6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha.$$

(7)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{1} = 0.$$

(8)

$$\begin{aligned} ((a+x)^x)' &= (e^{x \ln(a+x)})' = \left(\frac{x}{a+x} + \ln(a+x) \right) e^{x \ln(a+x)} \\ ((a+x)^x)'' &= \left(\frac{x}{a+x} + \ln(a+x) \right)^2 e^{x \ln(a+x)} + \left(\frac{a}{(a+x)^2} + \frac{1}{a+x} \right) e^{x \ln(a+x)} \rightarrow (\ln a)^2 + \frac{2}{a} \quad (x \rightarrow 0) \\ (a^x)'' &= \ln^2(a) a^x \rightarrow \ln^2(a) \quad (x \rightarrow 0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \dots = \frac{(\ln a)^2 + \frac{2}{a} - (\ln a)^2}{2} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

(9)

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

(10)

$$\left| \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\tan x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\tan x|} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\cot x| = 0.$$

(11)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^2 \arctan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \arctan x)(x + \arctan x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x - \arctan x}{x^3} \\
&\stackrel{x=\tan y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} 2 \frac{\tan y - y}{\tan^3 y} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y - y}{y^3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1-x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0
\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{(2x-\pi)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{(2x-\pi) \ln(\tan x)} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{2x-\pi}} \right) \\
&\stackrel{L'H}{=} \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x \cos^2 x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-(2x-\pi)^2}{\sin 2x} \right) \\
&\stackrel{x-\frac{\pi}{2}=y}{=} \exp \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-4y^2}{-\sin 2y} \right) = e^0 = 1
\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right) \right) \\
&= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) - 1 \right) \right) = e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x) + \tan \frac{\pi}{2}x}{\cot \pi x} &\stackrel{y=1-x}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y + \tan \frac{\pi}{2}(1-y)}{\cot \pi(1-y)} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi y (\ln y + \tan \frac{\pi}{2}y)}{-\cos \pi y} \\
&= - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi y}{\tan \frac{\pi}{2}y} = -2
\end{aligned}$$

(16)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x^3)^2}{(1 - \cos x)(e^{x^2} - 1) \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3)^2}{(\frac{1}{2}x^2)(x^2)x^2} = 2$$

(17) 当 x 充分大时, $1 < \ln(1+x) < x^{1/2}$, 此时 $\frac{1}{x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{x^{1/2}}$, 同时

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(1/x) \right) = 1 \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{1/2}} \right)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x^{-1/2}) \right) = 1
\end{aligned}$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)^{1/x} = 1.$

(18)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \cdot \left(2 - \frac{x}{e^x - 1}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{x}{e^x - 1}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+1)}{1+x \sin x - (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(19) 转而证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0.$$

而后由 Heine 定理即得.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{[k]}}{a^x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[k] x^{[k]-1}}{(\ln a) a^x} = \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[k]!}{(\ln a)^{[k]} a^x} = 0.$$

(20) 转而证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0.$$

而后由 Henie 定理即得.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{kx^k} = 0.$$

习题 3.4.6 设 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0) = 1, f''(0) \neq 0$, 且 $0 < f(x) < x$, $x \in (0, a)$. 令

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_1 \in (0, a).$$

(1) 求证: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限;

(2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 则求其极限.

解

(1) $\{x_n\}$ 是递减的, 因为 $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n < 0$. $\{x_n\}$ 具有下界 0, 故可设 $\{x_n\}$ 收敛到 x . 令 $n \rightarrow \infty$, 由 f 的连续性, 得 $x = f(x)$, 故 $x = 0$.

(2) 由泰勒展开, $f(x) = x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$, 因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - f(x_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + o(x_n^2)}{x_n - \left(x_n + \frac{f''(0)}{2}x_n^2 + o(x_n^2)\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{-\frac{f''(0)}{2}x_n^2 + o(x_n^2)} \\ &= -\frac{2}{f''(0)} \end{aligned}$$

习题 3.5

习题 3.5.1 证明 (Jensen (延森) 不等式): 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, x_1, \dots, x_n 是 I 中 n 个点, 则对任意满足 $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ 的正数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

习题 3.5.2 设 x_1, x_2, \dots, x_n 和 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 都是正数, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, 证明: 有不等式

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

特别, 取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, 则得到算术平均不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

(提示: 考虑区间 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = -\ln x$ 的凸凹性, 并利用 Jensen 不等式.)

习题 3.5.3 设 a, b, c, d 满足 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, 其中 $b > 0, d > 0$, 证明不等式

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

习题 3.5.4 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, 证明: $f(x)$ 在 I 的内点是连续的.

习题 3.5.5 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上处处可导, 且除了有限个点之外, 均有 $f''(x) > 0$, 证明: $f(x)$ 在 I 上是凸的. 将本题用于 $f(-x)$, 就得到关于凹函数的类似结论.

习题 3.5.6 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有连续的二阶导数. 若 x_0 是 $f(x)$ 的一个拐点, 证明: $f''(x_0) = 0$.

习题 3.5.7 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 及其附近二阶可导, 且 $f''(x_0) = 0$. 若 $f'''(x_0)$ 存在但不为零, 证明: x_0 是 $f(x)$ 的拐点.

习题 3.5.8 求下列函数的凸、凹区间和拐点.

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------|
| (1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$; | (2) $y = x + \frac{1}{x}$; |
| (3) $y = x^{5/3}$; | (4) $y = (1 + x^2)e^x$; |
| (5) $y = x^4$; | (6) $y = x + \sin x$. |

习题 3.5.9 求 a, b 值, 使点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点.

习题 3.5.10 描绘下列各曲线的图形.

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| (1) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$; | (2) $y = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$; |
| (3) $y = x - 2 \arctan x$; | (4) $y = xe^{-x}$. |

习题 3.5.11 设函数 $y = f(x)$ 所表示的曲线为 C . 记 C 上一点 $M(x, y)$ 处的曲率为 $\kappa (\kappa \neq 0)$, 过点 M 引曲线的法线, 在此法线上曲线上凸的一侧取点 D , 使 $|DM| = \frac{1}{\kappa} = \rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径作圆, 这个圆称为曲线在点 M 处的曲率圆, 其圆心 D 称为曲线在点 M 处的曲率中心, 半径 ρ 称为曲线在点 M 处的曲率半径.

求下列曲线在指定点的曲率、曲率中心及曲率半径.

(1) $xy = 1$ 在点 $(1, 1)$ 处;

(2) $y = e^{-x^2}$ 在点 $(0, 1)$ 处.

习题 3.5.12 求下列曲线在指定点的曲率.

(1) $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$, 在 $t = 1$ 处;

(2) $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处.

习题 3.5.13 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点的曲率半径最小? 并求出该点的曲率半径.

习题 3.5.14 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的凸函数且有界, 求证: $f(x)$ 是常数.

习题 3.6

习题 3.6.1 写出下列函数的 (具有 Peano 余项的) Maclaurin 展开式.

$$(1) y = \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1};$$

$$(2) y = \sin^2 x.$$

解

(1)

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1} = -(x^3 + 2x + 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)) \\ &= -1 - 3x - 3x^2 - 4x^3 - 4x^4 - \cdots - 4x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

习题 3.6.2 求出函数 $e^{\sin x}$ 的 (具有 Peano 余项的) 三阶 Maclaurin 展开式.

习题 3.6.3 求出函数 $\ln(\cos x)$ 的 (具有 Peano 余项的) 六阶 Maclaurin 展开式.

解

$$\ln(\cos x) = \ln(1 + (\cos x - 1))$$

$$\begin{aligned} &= (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3} + o((\cos x - 1)^3) \\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6) \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) \right)^2 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right)^3 + o(x^6) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right) \right) x^4 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2} \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!} \right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \right) x^6 + o(x^6) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8} \right) x^4 + \left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24} \right) x^6 + o(x^6) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6) \end{aligned}$$

习题 3.6.4 已知 $f(x)$ 是一个四次多项式, 并且 $f(2) = -1, f'(2) = 0, f''(2) = 2, f'''(2) = -12, f^{(4)}(2) = 24$. 计算 $f(-1), f'(0), f''(1)$.

解

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 \\ &= -1 + (x-2)^2 - 2(x-2)^3 + (x-2)^4 \end{aligned}$$

因此

$$f(-1) = 143, f'(0) = -60, f''(1) = 26.$$

习题 3.6.5 求下列函数具有 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

- (1) $y = \tan x$ 在 $x = 0$ 的二阶 Taylor 展开式; (2) $y = \frac{1}{x}$ 在 $x = -1$ 的 n 阶 Taylor 展开式.

习题 3.6.6 求下列极限.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x}$; (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}$;
 (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$; (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x}$.

解

(1)

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \quad e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4))}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{12}.$$

(2)

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4), \quad \sqrt[3]{1-x^2} = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4))}{x^2} = \frac{5}{6}.$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - \left(x - \frac{1}{2} + o(1) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - o(1) \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) &= 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^4}{24} + o((\sin x)^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \right) + \frac{1}{24} (x^4 + o(x^4)) + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4))}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{6}.$$

习题 3.6.7 设函数 $f(x)$ 处处有 $n+1$ 阶导数, 证明: $f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式的充分必要条件是 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$.

习题 3.6.8 设函数 $f'(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且对任意 $x \in [0, 2]$, 有 $|f(x)| \leq 1$ 及 $|f''(x)| \leq 1$. 证明: $|f'(x)| \leq 2, x \in [0, 2]$.

习题 3.6.9 设 n 为自然数, 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$ 证明: $f'(0) = 0$, 但 $f''(0)$ 不存在.

(提示: 证明 $f(x)$ 仅在一点 $x = 0$ 可导.)

注意, 我们显然有

$$f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

但当 $n > 1$ 时, 并不能断言 $f^{(k)}(0) = 0 (2 \leq k \leq n)$. 因此, 定理 3.32 中的条件: 函数在点 x_0 处有 n 阶导数, 是至关重要的.

习题 3.6.10 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 它在 $x \neq 0$ 处显然有任意阶导数. 证明: $f(x)$ 在

$x = 0$ 处的任意阶导数都存在, 而且都等于零. (提示: 首先, 易用数学归纳法证明, 当 $x \neq 0$ 时, 对 $n = 1, 2, \dots$ 有 $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}(\frac{1}{x})$, 这里 $P_{3n}(t)$ 是 t 的 $3n$ 次多项式; 其次, 由导数定义及 L'Hôpital 法则, 得出 (记 $y = \frac{1}{x}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0,$$

即 $f'(0) = 0$. 现在, 说的结论易用数学归纳法及 L'Hôpital 法则证明.)

本题意味着, 对任意的自然数 n , 函数 f 在 $x = 0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式是 0; 换句话说, 余项总是等于 $f(x)$. 因此, 即使函数在一点附近的性态, 用 (在该点的) 足够高阶的导数也未必能将其揭示出来.

习题 3.6.11 设函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的 n 阶微商存在, 并且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{而 } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

证明:

- (1) 若 n 为奇数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值;
- (2) 若 n 为偶数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值. 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值; 当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处取极大值.

本题表明, 若函数 $f(x)$ 在驻点上存在如上所述的高阶导数, 则由此可确定驻点是否为极值点. 然而, 我们注意, 上一题中的函数 f 在 $x = 0$ 处显然有极小值, 但却不能用这一判别法判别.

第3章综合习题

习题 3.C.1 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 求 $f'(0)$.

习题 3.C.2 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶连续导数, 记函数

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 确定 a 的值, 使 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

(2) 对 (1) 中确定的 a , 证明: $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且导函数连续.

习题 3.C.3 设 $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0$, 证明: 方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个根.

习题 3.C.4 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

习题 3.C.5 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果任给 I 中两点 x_1, x_2 , 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

证明: $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数.

习题 3.C.6 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的二阶可微函数, $f(0) = f(1) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

习题 3.C.7 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = f(b) = 0, f'(a)f'(b) > 0$. 证明: 在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$.

习题 3.C.8 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{2}$. 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

习题 3.C.9 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上二阶可微, 且满足 $f(a) > 0, f'(a) < 0$, 以及当 $x > a$ 时, $f''(x) \leq 0$. 试证在区间 $(a, +\infty)$ 内, 函数 $f(x)$ 恰有一个零点.

习题 3.C.10 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f'(x)$ 严格单调增. 若 $f(a) = f(b) = \lambda$, 证明: 对任意 $x \in (a, b)$, 有 $f(x) < \lambda$.

习题 3.C.11 函数 $\frac{\sin x^2}{x} (x > 0)$ 表明, 若函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 不能保证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在. 证明: 若已知该极限存在, 则其值必然为零.

习题 3.C.12 设函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时二阶可微, 且 $f''(x) < 0, f(0) = 0$. 证明: 对任意正数 x_1, x_2 , 有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

习题 3.C.13 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数, 求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

习题 3.C.14 证明下列不等式.

- (1) 对任意实数 x , $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$;
- (2) 对 $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$;
- (3) 对 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$;
- (4) 对任意实数 x, y , 有 $2e^{\frac{x+y}{2}} \leq e^x + e^y$.

习题 3.C.15 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

习题 3.C.16 求 $\sqrt[n]{n} (n = 1, 2, \dots)$ 的最大值.

习题 3.C.17 试给出函数 $x \cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的一个尽可能小的上界.

习题 3.C.18 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$.

习题 3.C.19 设 $a > 1$, 函数 $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 可微. 求证: 存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$, 使得

$$f'(x_n) < f(ax_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

习题 3.C.20 利用凸函数的性质证明 Hölder (赫尔德) 不等式: 设 $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是正数, p, q 是大于 1 的正数, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(提示: 考虑函数 $f(x) = x^p$.)