

ge

数学分析讲义 (第一册)

习题解答

November 7, 2025

目录

第 1 章 极限	1
习题 1.1	1
习题 1.2	4
习题 1.3	15
第 1 章综合习题	26
第 2 章 连续函数的基本概念	35
习题 2.1	35
习题 2.2	44
第 2 章综合习题	48
第 3 章 单变量函数的微分学	53
习题 3.1	53
习题 3.2	70
习题 3.3	74
习题 3.4	88
习题 3.5	92
习题 3.6	101
第 3 章综合习题	107
第 4 章 不定积分	115
习题 4.1	115
习题 4.2	135
第 5 章 单变量函数的积分	138
习题 5.1	138
习题 5.2	157
习题 5.3	159
习题 5.4	164
第 5 章综合习题	169

第 6 章 常微分方程初步	182
习题 6.1	182
习题 6.2	201
第 7 章 无穷级数	207
习题 7.1	207
习题 7.2	217
习题 7.3	225
习题 7.4	235
第 7 章综合习题	238

第 1 章 极限

习题 1.1

习题 1.1.1 设 a 是有理数, b 是无理数. 求证: $a + b$ 和 $a - b$ 都是无理数; 当 $a \neq 0$ 时, ab 和 $\frac{b}{a}$ 也是无理数.

解 设 a 是有理数, b 是无理数.

(1) 若 $a + b$ 是有理数, 则 $b = (a + b) - a$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $a - b$ 是无理数.

(2) 若 ab 是有理数, 则 $b = \frac{ab}{a}$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $\frac{b}{a}$ 是无理数.

习题 1.1.2 求证: 两个不同的有理数之间有无理数.

解 设 a, b 是两个不同的有理数, 不妨设 $a < b$. 则存在正整数 k, N 使得

$$(\sqrt{2})^{2k-1} a < N < (\sqrt{2})^{2k-1} b.$$

具体而言, 取 $k > \lceil \log_2(b-a) \rceil$, 则 $k > \log_2 \frac{2\sqrt{2}}{b-a} \Rightarrow 2^k(b-a) > 2\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2})^{2k-1} b - (\sqrt{2})^{2k-1} a > 2$. 因此, 存在整数 $N = \left\lfloor (\sqrt{2})^{2k-1} b \right\rfloor$, 使得 $(\sqrt{2})^{2k-1} a < N < (\sqrt{2})^{2k-1} b$. 于是

$$a < \frac{N}{(\sqrt{2})^{2k-1}} < b.$$

而 $\frac{N}{(\sqrt{2})^{2k-1}} = \frac{N\sqrt{2}}{2^k}$ 是无理数.

习题 1.1.3 求证: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 以及 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 都是无理数.

解

(1) 设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $2q^2 = p^2$, 由素数分解的唯一性可知 p 是偶数, 设 $p = 2k$, 则 $2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$, 同理可知 q 也是偶数, 与 p, q 互素矛盾. 因此 $\sqrt{2}$ 是无理数.

(2) 设 $\sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $3q^2 = p^2$, 由素数分解的唯一性可知 p 是 3 的倍数, 设 $p = 3k$, 则 $3q^2 = 9k^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2$, 同理可知 q 也是 3 的倍数, 与 p, q 互素矛盾. 因此 $\sqrt{3}$ 是无理数.

(3) 设 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $2 + 3 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2}$, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 因此 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 是无理数.

习题 1.1.4 把下列循环小数表示为分数:

(1) $0.24999\dots$

(2) $0.\dot{3}7\dot{5}$

(3) $4.\dot{5}1\dot{8}$

解

(1) 设 $x = 0.24999\dots$, 则 $10x = 2.4999\dots$, 因此 $9x = 2.25 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.

(2) 设 $x = 0.\dot{3}7\dot{5}$, 则 $1000x = 375.375375\dots$, 因此 $999x = 375 \Rightarrow x = \frac{375}{999} = \frac{125}{333}$.

(3) 设 $x = 4.\dot{5}1\dot{8}$, 则 $1000x = 4518.518518\dots$, 因此 $999x = 4514 \Rightarrow x = \frac{4514}{999} = \frac{122}{27}$.

习题 1.1.5 设 r, s, t 都是有理数. 求证:

(1) 若 $r + s\sqrt{2} = 0$, 则 $r = s = 0$;

(2) 若 $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0$, 则 $r = s = t = 0$.

解

(1) 假设 $s \neq 0$, 则 $\sqrt{2} = -\frac{r}{s}$ 是有理数, 与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾. 因此 $s = 0$, 从而 $r = 0$.

(2) $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0 \Rightarrow r^2 = 2s^2 + 3t^2 + 2st\sqrt{6} \Rightarrow (r^2 - 2s^2 - 3t^2) + (-2st)\sqrt{6} = 0$. :

与 (1) 类似, 若 $st \neq 0$, 则 $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 2s^2 - 3t^2}{2st}$ 是有理数, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 故 $st = 0$,

(a) 若 $t = 0$, 则 $r + s\sqrt{2} = 0$, 由 (1) 可知 $r = s = 0$;

(b) 若 $s = 0$, 则 $r + t\sqrt{3} = 0$, 同理可知 $r = t = 0$.

习题 1.1.6 设 a_1, a_2, \dots, a_n 有相同的符号, 且都大于 -1 . 证明:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

解 利用数学归纳法:

当 $n = 1$ 时, 等式为

$$1 + a_1 \geqslant 1 + a_1,$$

显然成立.

假设当 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

以此作为条件, 当 $n = k + 1$ 时, 由 $a_{k+1} > -1$, 可知 $1 + a_{k+1} > 0$, 因此

$$\begin{aligned} (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) &\geqslant (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(1 + a_{k+1}) \\ &= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\ &\geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}. \end{aligned}$$

其中 $a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \cdots + a_ka_{k+1} \geqslant 0$, 因为 a_i 与 a_{k+1} 符号相同.

习题 1.1.7 设 a, b 是实数, 且 $|a| < 1, |b| < 1$. 证明:

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1.$$

解 由 $|a| < 1, |b| < 1$, 可知 $ab \neq -1$. 因此

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1 \Leftrightarrow |a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow (a+b)^2 < (1+ab)^2.$$

即

$$a^2 + b^2 + 2ab < 1 + a^2b^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2 \Leftrightarrow (1-a^2)(1-b^2) > 0.$$

显然成立.

习题 1.2

习题 1.2.1 用定义证明下面的结论:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5+3n} = \frac{1}{3};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0;$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

解

$$(1) \forall \varepsilon > 0, \text{ 取 } N = \left\lceil \frac{5}{9\varepsilon} \right\rceil, \text{ 则当 } n > N \text{ 时, 有}$$

$$\left| \frac{n}{5+3n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n - (5+3n)}{3(5+3n)} \right| = \frac{5}{3(5+3n)} < \frac{5}{9n} < \varepsilon.$$

$$(2) \forall \varepsilon > 0, \text{ 取 } N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil, \text{ 则当 } n > N \text{ 时, 有}$$

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

$$(3) \forall \varepsilon > 0, \text{ 取 } N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right\rceil, \text{ 则当 } n > N \text{ 时, 有}$$

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon.$$

$$(4) \forall \varepsilon > 0, \text{ 取 } N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil, \text{ 则当 } n > N \text{ 时, 有}$$

$$\left| \frac{n!}{n^n} - 0 \right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

习题 1.2.2 若数列 $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) 满足条件: 任给正数 ε , 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ (其中 M 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 a 为极限.

M 为常数指的是 M 不依赖于 ε 和 n . 例如 $M = 2, M = 1000$ 等都是常数. 也就是说, 上述

(2) 其实等价于 $\forall M > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ 成立.

习题 1.2.3 证明: 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

解 充分性: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

必要性: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$.

习题 1.2.4 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 则

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$.

反之不一定成立, 如数列 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$, 但 $\{a_n\}$ 发散.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $||a_n| - 0| < \varepsilon$. 则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

习题 1.2.5 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 又 $|b_n| \leq M, (n = 1, 2, \dots)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$. 则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

习题 1.2.6 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = a$, 及 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

解 按已知条件 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$. 又 $\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$. 于是令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, 则 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

习题 1.2.7 证明下列数列不收敛:

$$(1) a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1};$$

$$(2) a_n = 5 \left(1 - \frac{2}{n}\right) + (-1)^n.$$

解

(1) 取 $a_{2n} = \frac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

(2) 取 $a_{2n} = 5 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5 \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) - 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 6, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 4$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

习题 1.2.8 求下列极限:

$$(1) a_n = \frac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1};$$

$$(2) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n};$$

$$(3) a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n(n+1)/2}\right), n = 2, 3, \dots;$$

$$(4) a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(5) a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^m}), (|q| < 1).$$

解

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

(3)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n^2+n-2)/2}{n(n+1)/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ &= \frac{(1 \cdot 2 \cdots (n-1)) \cdot (4 \cdot 5 \cdots (n+2))}{(2 \cdot 3 \cdots (n)) \cdot (3 \cdot 4 \cdots (n+1))} = \frac{1 \cdot (n+2)}{n \cdot 3} = \frac{n+2}{3n}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^n})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-\lim_{m \rightarrow \infty} q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$

习题 1.2.9 若 $a_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 能否断定 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?

解 不能. 例如 $a_n = \frac{1}{2^n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 可能为 0.

习题 1.2.10 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$, 是否必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$? 若还假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 回答同样的问题.

解 不一定. 例如 $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, 但

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 均不存在.

当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 时成立. 假设 $a \neq 0$ 时, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{0}{a} = 0$.

习题 1.2.11 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性如何? 举例说明. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 回答同样的问题.

解

(1) $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则

(a) $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ 都发散可以采用反证法: 若 $\{a_n + b_n\}$ 收敛, 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 容易知道 $\{a_n + b_n - a_n\} = \{b_n\}$ 收敛, 这与 $\{b_n\}$ 发散矛盾, 因此 $\{a_n + b_n\}$ 发散, $\{a_n - b_n\}$ 同理可得.

(b) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

- I. $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = 1$ 收敛;
- II. $a_n = 1, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = n$ 发散.

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散, 则

(a) $\{a_n + b_n\}$ 的收敛性不确定

- I. $a_n = n, b_n = -n$, 则 $a_n + b_n = 0$ 收敛.
- II. $a_n = n, b_n = n$, 则 $a_n + b_n = 2n$ 发散.

(b) $\{a_n - b_n\}$ 的收敛性不确定

- I. $a_n = n + \frac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n - b_n = \frac{1}{n}$ 收敛.
- II. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}$, 则 $a_n - b_n = 2 \cdot (-1)^n$ 发散.

(c) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

- I. $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则 $a_n \cdot b_n = 0$ 收敛.
- II. $a_n = n, b_n = (-1)^n$, 则 $a_n \cdot b_n = (-1)^n n$ 发散;

习题 1.2.12 下面的推理是否正确?

(1) 设数列 $\{a_n\}$: $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 在 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 两边取极限, 得 $a = 2a - 1$, 即 $a = 1$.

(2)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n \uparrow} = 0. \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n = 1^n = 1.$$

解

- (1) 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为 $a_n = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

- (2) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

并有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1.$$

- (3) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

习题 1.2.13 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a, b . 若 $a > b$, 则从某一项开始, 有 $a_n > b_n$; 反之, 若从某项开始恒有 $a_n \geq b_n$, 则 $a \geq b$.

解 这是保序性的直接推论.

习题 1.2.14 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别收敛于 a 及 b . 记 $c_n = \max(a_n, b_n)$, $d_n = \min(a_n, b_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \max(a, b), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \min(a, b).$$

解 由 $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$, $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$, 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

习题 1.2.15 求下列极限:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right]$;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k)$, 其中 $0 < k < 1$;
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2})$;
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - n + 2} - n \right)$;
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \right)$.

解

- (1) 由于

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = 0.$$

(2) 由于

$$0 \leq ((n+1)^k - n^k) = n^k \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right) \leq n^k \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 - 1 \right) = n^{k-1}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-1} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k) = 0.$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

(4) 由 $\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1)$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2)} = e^0 = 1.$$

(5) 由于

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} \leq \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leq \sqrt[n]{n}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} = 1.$$

习题 1.2.16 设 a_1, a_2, \dots, a_m 为 m 个正数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

解 设 $a_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, 则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{m a_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a_k = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

习题 1.2.17 证明下列数列收敛:

$$(1) a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right);$$

$$(2) a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1};$$

$$(3) a_n = \alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots + \alpha_n q^n, \text{ 其中 } |\alpha_k| \leq M, (k = 1, 2, \dots), \text{ 而 } |q| < 1;$$

$$(4) a_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{\cos n}{n(n+1)}.$$

证明

(1) 由 $1 - \frac{1}{2^n} < 1$, 可知 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 由 $a_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} < \frac{1}{2}$, 可知 $\{a_n\}$ 有上界, 且 a_n 单调递增, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \log_{|q|} \frac{\varepsilon(1-|q|)}{2M} \right\rfloor + 1$, 则当 $m > n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| = |\alpha_{n+1}q^{n+1} + \cdots + \alpha_mq^m| \leq M(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \cdots) = M \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon.$$

(4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, 则当 $m > n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m}{m(m+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

习题 1.2.18 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

$$(1) a_n = \frac{n}{c^n}, (c > 1);$$

$$(2) a_1 = \frac{c}{2}, a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} (0 \leq c \leq 1);$$

$$(3) a > 0, a_0 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) (\text{提示: 先证明 } a_n^2 \geq a);$$

$$(4) a_0 = 1, a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1};$$

$$(5) a_n = \sin \sin \cdots \sin 1 (n \uparrow \sin).$$

解

(1) 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)-n}{c^{n+1}-c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n(c-1)} = 0.$$

(2)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1})$$

由 $a_2 - a_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 > 0$, 可递归的得知 $a_{n+1} - a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $a_1 < c$, 归纳

的可得 $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$, 因此 $\{a_n\}$ 有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$, 又由 $a_n > 0$, 可知 $a = 1 - \sqrt{1-c}$.

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) \right)^2 \geq a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

因此 $\{a_n\}$ 在 $n \geq 1$ 时单调减, 且有下界 \sqrt{a} , 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, 则 $l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{a}{l} \right)$, 解得 $l = \sqrt{a}$.

(4)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} - \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} \right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1} + 1)^2}$$

由 $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$ 归纳的可得 $1 + a_n - a_n^2 > 0$, 因此 $a_n - a_{n-1} > 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 有上界, 因此 $\{a_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 递推式两侧取极限, 得 $a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 由于 $a_n > 0$ 始终成立, 故 $a \geq 0$ 而 $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, 故舍去这一值, 进而得到 $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

(5) $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$, 因此 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a = \sin a \Rightarrow a = 0$.

习题 1.2.19 设 $a_n \leq a \leq b_n (n = 1, 2, \dots)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - b_n| < \varepsilon$. 又由 $a_n \leq a \leq b_n$, 可知 $|a_n - a| = a - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$, 同理 $|b_n - a| < \varepsilon$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

习题 1.2.20 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

解 先证明一个引理: 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

证明如下

(1) $a = 0$ 时,

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

同时, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1} = 0$$

由夹逼定理, 得证.

(2) $a > 0$ 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = a,$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

由夹逼定理, 得证.

回到本题,

可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{l} < 1$. 因此 $\exists r = \frac{1+\frac{1}{l}}{2} \in (0, 1)$, 使得当 n

充分大时, $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} < r$. 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} < r^n,$$

即 $a_n < a_1 r^n$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

习题 1.2.21 设数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 是正数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n = 1, 2, \dots$. 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

解 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 则由 $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = a_1 \cdot \frac{b_n}{b_1}$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$, 由原式有 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 单调减, 且 $\frac{a_n}{b_n} > 0$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛, 设

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = bc$.

习题 1.2.22 利用极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1};$$

$$(2) a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1};$$

$$(3) a_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n;$$

$$(4) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}.$$

简要说明: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 故 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的任意子列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ 也收敛于 e . 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为 $\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ 的形式, 从而求出极限.

对于类似于 $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ 的形式, 可以考虑先通分再变形去掉指数的负号即可处理.

在此过程中下列命题也相同有用:

命题 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , $a_n > 0, a > 0$. $\{b_n\}$ 收敛于 b . 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$.

请注意, 这条结论对于 1^∞ 型是不能直接使用的, 即若 $a_n \rightarrow 1, b_n \rightarrow \infty$, 则不能直接说 $a_n^{b_n} \rightarrow 1^\infty = 1$. 但是对于 $a_n \rightarrow a > 1, b_n \rightarrow \infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \rightarrow a^{+\infty} = +\infty$; 对于 $a_n \rightarrow a < 1, b_n \rightarrow +\infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \rightarrow a^{+\infty} = 0$.

解

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \Big|_{m=2n+1} = e;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{-n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{(n-3) \cdot (-\frac{n+1}{n-3})} = e^{-1};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1) \cdot (-\frac{n}{n+1})} = e^{-1};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3 \cdot 2} = e^2.$$

习题 1.2.23 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, 且 $|b_n| \geq b > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

解 对 $\forall M > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n| > \frac{M}{b}$. 又由 $|b_n| \geq b > 0$, 可知 $|a_n b_n| \geq |a_n||b| > M$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

习题 1.2.24 确定 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}$ 与 $n \sin \frac{n\pi}{2}$ ($n \geq 1$) 是否有界, 是否趋于无穷大.

解 $\sqrt[n]{n!}$ 无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}$$

已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty$, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

注 Stolz 定理规范的思路要先说明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ 存在, 然后才能说明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ 存在. 为了方便, 我们也会省去前面的部分, 直接写 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$.

$n \sin \frac{n\pi}{2}$ 无界, 但是不趋于无穷大. 当 $n = 4k+1$ 时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = 4k+1$, 趋于无穷大; 当 $n = 4k+3$ 时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = -(4k+3)$, 趋于负无穷大; 当 n 为偶数时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = 0$.

习题 1.2.25 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ ($n \geq 1$) 定义, 证明: $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$).

解 由 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \frac{1}{a_n}(a_n + a_n + \frac{1}{a_n}) = 2 + \frac{1}{a_n^2} > 2$, 可知 $a_n^2 > 2(n-1)$,

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

习题 1.2.26 给出 $\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理的证明.

命题 ($\frac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小量, 其中 $\{a_n\}$ 还是严格单调减函数列, 又

存在 (其中 l 为有限或 $\pm\infty$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$

证明

(1) 当 l 为有限值时, 根据条件对 $\varepsilon > 0$ 存在 N , 使当 $n > N$ 时成立

$$\left| \frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} - l \right| < \varepsilon.$$

由于对每个 n 都有 $a_n > a_{n+1}$, 这样就有

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_{n+1}) < b_n - b_{n+1} < (l + \varepsilon)(a_n - a_{n+1}).$$

任取 $m > n$, 并且将上述不等式中的 n 换成 $n+1, \dots, m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_m) < b_n - b_m < (l + \varepsilon)(a_n - a_m),$$

以及

$$\left| \frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l \right| < \varepsilon.$$

令 $m \rightarrow \infty$, 并利用条件 $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$, 就知道当 $n > N$ 时成立

$$\left| \frac{b_n}{a_n} - l \right| \leq \varepsilon.$$

(2) $l = +\infty$ 时. 根据条件对任意 $M > 0$ 存在 N , 使当 $n > N$ 时成立

$$\frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} > M.$$

由于对每个 n 都有 $a_n > a_{n+1}$, 这样就有

$$b_n - b_{n+1} > M(a_n - a_{n+1}).$$

任取 $m > n$, 并且将上述不等式中的 n 换成 $n+1, \dots, m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$b_n - b_m > M(a_n - a_m),$$

以及

$$\frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} > M.$$

令 $m \rightarrow \infty$, 并利用条件 $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$, 就知道当 $n > N$ 时成立

$$\frac{b_n}{a_n} > M.$$

习题 1.3

习题 1.3.1 按定义证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, (a > 1);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+x} = 2;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/q} = 0 (q \text{ 为正整数}).$$

解

(1) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $M = \log_a \varepsilon$, 则当 $x < M$ 时, $|a^x - 0| = a^x < a^M = \varepsilon$.

(2) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $M = \frac{2}{\varepsilon} + 1$, 则当 $|x| > \max\{M, 1\}$ 时, $\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{x+1} \right| \leq \frac{2}{|x|-1} < \varepsilon$.

(3) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right\}$, 则当 $0 < |x+1| < \delta$ 时, $\left| \frac{x^2-1}{x^2+x} - 2 \right| = \left| \frac{-x^2-2x-1}{x^2+x} \right| = \left| \frac{x+1}{x} \right| < \frac{\delta}{1/2} \leq \varepsilon$.

(4) 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon^q$, 则当 $0 < x < \delta$ 时, $|x^{1/q} - 0| = x^{1/q} < \delta^{1/q} = \varepsilon$.

习题 1.3.2 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x} \right);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} (n \text{ 为正整数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}.$$

(1) 由四则运算的极限可知,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x} \right) = 1 - 5 + 2 + 1 = -1.$$

(2) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

请注意, 这里 n 是常数, 因此可以交换这 n 个极限与求和的顺序.

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(3 + \frac{6}{x}\right)^{70} \left(8 - \frac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5 - \frac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{\left(3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x}\right)^{70} \left(8 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}}$$

事实上, $\frac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}} = \left(\frac{3^7 \cdot 2^6}{5^9}\right)^{10} = 0.000000000003572622918985825913651456872761246392142557535369616400676018940233797678923776$.

习题 1.3.3 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

(1) 用 Cauchy 收敛原理. 对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 任取 $M > 0$, 总总存在 $k = \lceil M/\pi \rceil$, 使得 $x_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi > M$, $x_2 = (k+1)\pi > M$ ($k \in \mathbb{N}^*$), 使得 $|\sin x_1 - \sin x_2| = 1 > \varepsilon$. 因此极限不存在.

(2) 考虑两个单边极限,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

而极限存在的充要条件是两个单边极限存在且相等, 因此极限不存在.

习题 1.3.4 设函数 $f(x)$ 在正无穷大处的极限为 l , 则对于任意趋于正无穷大的数列 $\{a_n\}$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l. \text{ 特别地 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l.$$

(无穷版本的 Heine 定理) 解 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, 存在 $M > 0$, 使得当 $x > M$ 时, $|f(x) - l| < \varepsilon$. 又由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $a_n > M$. 因此当 $n > N$ 时, $|f(a_n) - l| < \varepsilon$. 由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$. 特别地, 取 $a_n = n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$.

习题 1.3.5 讨论下列函数在 $x = 0$ 处的极限.

$$(1) f(x) = [x];$$

$$(2) f(x) = \operatorname{sgn} x;$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1 + x^2, & x < 0. \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x > 0; \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$$

解注 教材中的符号 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 即不大于 x 的最大整数. 本题中, 我们沿用此符号.

其他地方, 我们使用 $\lfloor x \rfloor$ 表示对 x 向下取整, 使用 $\lceil x \rceil$ 表示对 x 向上取整.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1. \text{ 因此极限不存在.}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1. \text{ 左右极限均存在, 但不相等, 因此极限不存在.}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^2) = 1. \text{ 因此极限存在, 且 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x} \text{ 不存在, 因此右极限不存在. 左极限 } \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0. \text{ 函数在 } x = 0 \text{ 处的极限不存在.}$$

注 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$ 的极限过程等同于考虑 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$, 而该极限不存在 (与 **习题 1.3.3(1)** 同理).

习题 1.3.6 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$.

解

(1) 当 $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\sin \frac{x}{2^m} \neq 0$ 时, 二倍角公式变形可得 $\cos y = \frac{\sin 2y}{2 \sin y}$, 当 $\sin y \neq 0$, 反复利用可知

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2^2}} \cdots \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

- (2) 若存在 $m_0 \geq 1$, $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$, 有 $\frac{x}{2^{m_0}} = k\pi$, $x = 2^{m_0}k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. 自然的推论是 $\forall m \leq m_0$, 有 $\sin \frac{x}{2^m} = \sin(2^{m_0-m}k\pi) = 0$.

此时根据是否存在最大的 m_0 , 使得 $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$ 可以分成两种情况:

- (a) $x = 0$, 则 $\forall m \in \mathbb{N}^*$, 有 $\cos \frac{x}{2^m} = 1$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = 1$;
- (b) $x \neq 0 \Leftrightarrow \exists m_0$, s.t. $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$, $\sin \frac{x}{2^{m_0+1}} \neq 0$, 也就是存在最大的 m_0 .

因此可以得到 $x = 2^{m_0}k\pi$, $k = 2l + 1$, $l \in \mathbb{Z}$ (如果 k 是偶数, 那么与 $\sin \frac{x}{2^{m_0+1}} = \sin \frac{k\pi}{2} \neq 0$ 矛盾).

此时 $\cos \frac{x}{2^{m_0+1}} = \cos \frac{k\pi}{2} = \cos \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi = 0$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = 0$.

不过又由于 $\sin x = 0$ 同样成立, 并且 $x \neq 0$, 因此可以把结果合并进 $\frac{\sin x}{x}$.

综上所述,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

习题 1.3.7 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2} \right) = \frac{\alpha}{2}$.

解 我们先证明如下事实:

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, & \sin \frac{\theta}{2} \neq 0; \\ 0, & \sin \frac{\theta}{2} = 0. \end{cases}$$

我们利用积化和差

$$\sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta = \frac{1}{2} \left(\cos \left(k - \frac{1}{2}\right)\theta - \cos \left(k + \frac{1}{2}\right)\theta \right)$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} \left(\sum_{k=1}^n \sin k\theta \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\cos \left(k - \frac{1}{2}\right)\theta - \cos \left(k + \frac{1}{2}\right)\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} + \cdots + \cos \left(n - \frac{1}{2}\right)\theta - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \right) \\ &= \sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta. \end{aligned}$$

因此, 当 $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$ 自然有

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

另一种情况是显然的, 每一项都为 0.

回到本题, 首先, 如果 $\alpha \neq 0$, 那么这意味着存在充分大的 N 使得 $n > N, 0 < \left| \frac{\alpha}{n^2} \right| < \pi$, 此时, $\sin \frac{\alpha}{2n^2} \neq 0$. 因此 $n > N$ 时,

$$\sum_{k=1}^n \sin k \frac{\alpha}{n^2} = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \sin \frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin \frac{\alpha}{2n^2}}$$

考虑 $\sin x \sim x, (x \rightarrow 0)$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin k \frac{\alpha}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \sin \frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin \frac{\alpha}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \cdot \frac{n\alpha}{2n^2}}{\frac{\alpha}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2}.$$

如果 $\alpha = 0$, 那么每一项都为 0, 极限自然为 $0 = \frac{\alpha}{2}$.

综上所述,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2} \right) = \frac{\alpha}{2}.$$

习题 1.3.8 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 反之亦正确. 叙述并证明, 当 $x \rightarrow +\infty$ 及 $x \rightarrow -\infty$ 时类似的结论. (应用本题结论, 可将极限过程为 $x \rightarrow \infty$ 的问题化为 $x \rightarrow 0$ 处理, 或者反过来. 例如, 我们有 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$.)

解 我们先给出这条命题的完整表述:

- 命题**
- (1) 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 反之亦正确;
 - (2) 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 反之亦正确;
 - (3) 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 反之亦正确;

证明:

- (1) 由 Heine 定理, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l \Rightarrow \forall \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$. 反之, 若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$.

- (2) 由 Heine 定理, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l \Rightarrow \forall \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$.

反之, 若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$.

$\Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

(3) 由 Heine 定理, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l \Rightarrow \forall \{y_n\}$, 若
 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^-$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = -\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$.

反之, 若 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall \{y_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^-$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$.

$\Rightarrow \forall \{x_n\}$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^-$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

习题 1.3.9 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}.$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

(2) 由和差化积,

$$\cos x - \cos 3x = 2 \sin 2x \sin x,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$$

(3) 当 $x > \frac{7}{2}$ 时, 有 $0 < \frac{x+1}{2x-1} < \frac{3}{4}$ 恒成立, 因此

$$0 \leq \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x \leq \left(\frac{3}{4} \right)^x$$

又由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^x = 0$, 由夹逼定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1} \right)^x = 0.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1} \right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{2}{x^2-1} x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2-1} x^2} = e^2$$

习题 1.3.10 求下列极限.

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x};$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$
 (3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2};$ (4) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1).$

解

(1) $\arctan x$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 时有界, 而 $x \rightarrow +\infty$ 时无界, 因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0.$$

具体而言,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

(2) 由夹逼定理,

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2,$$

且 $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

(4) 证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1) = +\infty.$$

由 $2x^2 - x + 1 = x^2 + (x - 1/2)^2 + 3/4 > x^2$, 因此对 $\forall M > 0$, 取 $N = \sqrt{M}$, 则当 $x > N$ 时, $2x^2 - x + 1 > x^2 > N^2 = M$. 由此可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1) = +\infty.$$

习题 1.3.11 按定义证明.

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, (a > 1);$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, (a > 1);$
 (3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty;$ (4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty.$

解

- (1) 对 $\forall M > 0$, 取 $N = a^M$, 则当 $x > N$ 时, $\log_a x > \log_a N = M$.
 (2) 对 $\forall M < 0$, 取 $\delta = a^M$, 则当 $0 < x < \delta$ 时, $\log_a x < \log_a \delta = M$.
 (3) 对 $\forall M > 0$, 取 $\delta = \frac{\pi}{2} - \arctan M$, 则当 $\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\tan x > \tan(\frac{\pi}{2} - \delta) = M$.
 (4) 对 $\forall M > 0$, 取 $\delta = \frac{1}{\ln M}$, 则当 $0 < x < \delta$ 时, $e^{1/x} > e^{1/\delta} = M$.

习题 1.3.12 证明: 函数 $y = x \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界, 但当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 这个函数并不是无穷大量.

解 $\forall M > 0$, 存在 $x_0 = (2k - 1)\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k - 1 > M$, 因此 $y(x_0) = x_0 \sin x_0 = x_0 > M$. 由此可知 $y = x \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界.

$\forall X > 0$, 总存在 $x_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k\pi > X$, 使得 $y(x_1) = x_1 \sin x_1 = 0$. 因此当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = x \sin x$ 并不是无穷大量.

习题 1.3.13 函数 $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 内是否有界? 又当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 这个函数是否为无穷大量?

解 考虑 0^+ 处的 $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 与考虑 $+\infty$ 处的 $x \cos x$ 是等价的. 以与 **习题 1.3.12** 类似的方法可知, $y = x \cos x$ 在 $(0, +\infty)$ 内无界, 但当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y = x \cos x$ 并不是无穷大量. 因此, $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内无界, 但当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 并不是无穷大量.

习题 1.3.14 本题所涉及的函数极限有着鲜明的几何意义.

记函数 $y = f(x)$ 所表示的曲线为 C . 若动点沿曲线无限远离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线 C 的一条渐近线.

(i) 垂直渐近线 易知(垂直于 x 轴的)直线 $x = x_0$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty.$$

(ii) 水平渐近线 易知(平行于 x 轴的)直线 $y = b$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

(iii) 斜渐近线 请读者证明, 方程为 $y = ax + b (a \neq 0)$ 的直线 L 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax);$$

或者

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax).$$

这里自然要假定所说的极限都存在. (提示: 以 $x \rightarrow +\infty$ 为例, 设曲线 C 及直线 L 上的横坐标为 x 的点分别为 M, N . 则 M 至 L 的距离, 是 $|MN|$ 的一个常数倍. 因此, 直线 L 为曲线 C 的渐近线, 等价于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, 由此易得所说结果.)

求下列曲线的渐近方程.

$$(1) \quad y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right);$$

$$(2) \quad y = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1}.$$

解 先证明, 仅证明 $+\infty$, 另一种同理. 正如提示所说, 由于距离 $d = \left| \frac{f(x) - (ax + b)}{\sqrt{a^2 + 1}} \right|$, 因此 l 是

渐近线, 等价于 $x \rightarrow +\infty$ 时 d 趋于 0, 等价于 $f(x) - (ax + b)$ 趋于 0.

然后问题转化为了证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Leftrightarrow a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

充分性: 由 $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ 可知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

必要性: 由 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ 可知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

(1) (a) 垂直渐近线, $x = -\frac{1}{e}$: $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{e})^-} \frac{y(x)}{x} = -\frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = +\infty$;

(b) 斜渐近线, $y = x + \frac{1}{e}$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e + \frac{1}{x}) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(e + \frac{1}{x}) - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{1}{ex}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{ex})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/ex}{1/x} = \frac{1}{e}$ ($\pm\infty$ 两侧是同一条渐近线);

(2) (a) 垂直渐近线, $x = 1$: $\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1} = \infty$;

(b) 斜渐近线, $y = 3x + 1$: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x - 1} = 1$;

习题 1.3.15 证明: 在同一极限过程中等价的无穷小量有下列性质:

(1) $\alpha(x) \sim \alpha(x)$ (自反性);

(2) 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, 则 $\beta(x) \sim \alpha(x)$ (对称性);

(3) 若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$, 则 $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ (传递性).

(注意, (1) 中自然需假定 $\alpha(x)$ 不取零值; 而在 (2)、(3) 中, 条件蕴含着, 所说的无穷小量在极限过程中均不取零值.)

解 解释一下, 这里说的是 (1) 需要没有 $\alpha(x) \equiv 0$ 这种情况.(2)(3) 因为有 “若 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ” 的假设自然排除了这种情况.

(1) 显然, $\lim \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$, 因此 $\alpha(x) \sim \alpha(x)$.

(2) 由 $\alpha(x) \sim \beta(x)$ 可知, $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, 因此 $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$, 即 $\beta(x) \sim \alpha(x)$.

(3) 由 $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $\beta(x) \sim \gamma(x)$ 可知, $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, $\lim \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1$, 因此 $\lim \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1$.

$\lim \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1$, 即 $\alpha(x) \sim \gamma(x)$.

习题 1.3.16 当 $x \rightarrow 0$ 时, 比较下列无穷小的阶:

- (1) $\tan x - \sin x$ 与 x^3 ;
- (2) $x^3 + x^2$ 与 $\sin^2 x$;
- (3) $1 - \cos x$ 与 x^2 .

解

(1)

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x}.$$

由 $\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\cos x \sim 1$, 可知

$$\tan x - \sin x \sim x \cdot \frac{x^2/2}{1} = \frac{x^3}{2}.$$

因此,

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

(2)

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \sim x^2 (x \rightarrow 0).$$

同时,

$$x^3 + x^2 = (x+1)x^2 \sim x^2 (x \rightarrow 0).$$

可得

$$x^3 + x^2 \sim \sin^2 x$$

(3)

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2} (x \rightarrow 0).$$

习题 1.3.17 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 试比较下列无穷大量的阶:

- (1) n 次多项式 $P_n(x)$ 与 m 次多项式 $P_m(x)$ (m, n 均为正整数);
- (2) x^α 与 x^β ($\alpha, \beta > 0$);
- (3) a^x 与 b^x ($a, b > 1$).

解

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^m} \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots}$$

$$= \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ +\infty, & n > m. \end{cases}, \text{ 即得到 } \begin{cases} P_n(x) \sim P_m(x), & n = m; \\ P_m(x) \text{ 更高阶,} & n < m; \\ P_n(x) \text{ 更高阶,} & n > m. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 利用 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha < \beta; \\ +\infty, & \alpha > \beta. \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x^\alpha \sim x^\beta, & \alpha = \beta; \\ x^\beta \text{ 更高阶,} & \alpha < \beta; \\ x^\alpha \text{ 更高阶,} & \alpha > \beta. \end{cases}$$

$$(3) \text{ 利用 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \begin{cases} 1, & a = b; \\ 0, & a < b; \\ +\infty, & a > b. \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} a^x \sim b^x, & a = b; \\ b^x \text{ 更高阶,} & a < b; \\ a^x \text{ 更高阶,} & a > b. \end{cases}$$

习题 1.3.18 试用等价无穷小量代换的方法计算下列极限.

$$\begin{array}{ll} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m, n \text{ 均为正整数}); & (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x}; \\ (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\sin x} - 1}{\arctan x}; & (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}; \\ (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x}; & (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x}. \end{array}$$

解

(1) 由 $\sin x \sim x$, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

(2) 由 $\tan x \sim x$, 可知 $a \neq 0$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x} = a.$$

很显然该结果对 $a = 0$ 也成立.

(3) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\arctan x \sim x$, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\sin x} - 1}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \sin x}{x} = \frac{1}{n}.$$

(4)

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2} + \sqrt{1+\cos x})}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1+\cos x})} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1+\cos x})}.$$

由 $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\sin x \sim x$, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2 (\sqrt{2} + \sqrt{1+\cos x})} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(5) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\sin x \sim x$, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

(6) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

第1章综合习题

习题1.C.1 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \quad (\text{提示: } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}});$$

$$(2) a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1};$$

$$(3) \text{设 } a_1 > 1, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, n = 1, 2, \dots;$$

$$(4) \text{设 } a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n = 1, 2, \dots.$$

解

(1) 由

$$(2n)^2 = 4n^2 \geq 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1)$$

可得

$$\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}.$$

因此

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0$, 故由夹逼定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

(2) 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}$, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a_n})^n = 0$;

(3) 由 $a_1 > 1$, 以及若 $a_n > 1$ 时, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} > 1$, 归纳的可知 $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^+$. 所以数列有下界. 再用归纳法: 当 $n = 1$ 时:

$$a_2 - a_1 = 2 - \left(\frac{1}{a_1} + a_1 \right) \leq 2 - 2 = 0,$$

推出 $a_2 \leq a_1$. 假设对 n 有 $a_n \leq a_{n-1}$, 那么当 $n+1$ 时

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} \leq 0.$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调减有下界数列, 因此收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 1$. 在

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

两边取极限得

$$a = 2 - \frac{1}{a} \implies a^2 - 2a + 1 = 0$$

解得 $a = \pm 1$. 但 $a = -1$ 不合题意, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

(4) $a_{n+2} = \frac{1}{1+a_{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}} = \frac{1+a_n}{2+a_n}$. 假如对任何 n , 有 $a_{2n} \geq a_{2n-2}; a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$, 那么对 $n+1$, 有

$$\begin{aligned} a_{2n+2} - a_{2n} &= \frac{1}{1+a_{2n+1}} - \frac{1}{1+a_{2n-1}} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n+1}}{1+a_{2n+1}a_{2n-1}} \geq 0 \\ a_{2n+3} - a_{2n+1} &= \frac{1}{1+a_{2n+2}} - \frac{1}{1+a_{2n}} = \frac{a_{2n} - a_{2n+2}}{1+a_{2n+2}a_{2n}} \leq 0 \end{aligned}$$

推出数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{2n}\}$ 单调增有上界, $\{a_{2n-1}\}$ 单调减有下界. 因此分别收敛. 对

$$a_{2n+2} = \frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}},$$

两边取极限得

$$a = \frac{1+a}{2+a} \implies a^2 + a - 1 = 0$$

解得 $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 同理, 对

$$a_{2n+3} = \frac{1+a_{2n+1}}{2+a_{2n+1}},$$

两边取极限得

$$b = \frac{1+b}{2+b} \implies b^2 + b - 1 = 0$$

解得 $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

习题 1.C.2 设 $\{a_n\}$ 为单调递增的数列, 并且收敛于 a , 证明对一切 n 有 $a_n < a$. (对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

解 反证法. 假设存在某个 n_0 , 使得 $a_{n_0} > a$. 由数列单调递增的性质, 对一切 $n > n_0$ 有 $a_n \geq a_{n_0} > a$, 于是存在 $\varepsilon = \frac{a_{n_0} - a}{2} > 0$, 使得 $\forall N$, 存在 $n = \max\{n_0, N\} + 1 > N$, 使得

$$|a_n - a| = a_n - a \geq a_{n_0} - a = 2\varepsilon > \varepsilon,$$

这与数列收敛的定义矛盾.

习题 1.C.3 证明下面的数列收敛:

$$(1) a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2};$$

$$(2) a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

解

(1) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 因此 $\{a_n\}$ 收敛;

(2) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n = e^{\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{2^k})} \leq e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = e^1.$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 又由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

习题 1.C.4 试构造一个发散的数列 $\{a_n\}$, 满足条件: 对任意正数 ε , 存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

解 取 $a_n = \sqrt{n}$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > \frac{1}{4\varepsilon^2}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

但数列 $\{a_n\}$ 显然发散.

习题 1.C.5 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在常数 M , 使得对一切 n 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq M.$$

证明:

- (1) 数列 $\{A_n\}$ 收敛;
- (2) 数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

解

(1) 由数列定义可知 $\{A_n\}$ 单调递增. 又因为对一切 n 有 $A_n \leq M$, 所以 $\{A_n\}$ 有上界. 因此 $\{A_n\}$ 收敛;

(2) 用 Cauchy 收敛准则证明. 由 (1) 知 $\{A_n\}$ 收敛, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N, \forall n > N + 1, p > 0$, 有

$$|A_{n+p} - A_{n-1}| = |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

由三角不等式可知

$$|a_{n+p} - a_n| \leq |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

习题 1.C.6 设 $\{a_n\}$ 是正严格递增数列. 求证: 若 $a_{n+1} - a_n$ 有界, 则对任意 $\alpha \in (0, 1)$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$. 并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列 $\{a_n\}$ 使得对任意 $\alpha \in (0, 1)$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$, 但是 $a_{n+1} - a_n$ 无界. (提示: 考虑 $a_n = n \ln n$.)

解

(1) 若 $\{a_n\}$ 有界, 此时由于其严格单调, 故有极限, 记 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = l^\alpha - l^\alpha = 0$.

(2) 若 $\{a_n\}$ 无界, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 设 $|a_{n+1} - a_n| \leq M$.

$$0 \leq a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha \left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^\alpha - 1 \right) < a_n^\alpha \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{1-\alpha}} \leq \frac{M}{a_n^{1-\alpha}}.$$

同时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M a_n^{\alpha-1} = 0.$$

因此由夹逼定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$.

(3) 反之不对, 取 $a_n = n \ln n$, 则

$$\begin{aligned} a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha &= (n+1)^\alpha \ln^\alpha (n+1) - n^\alpha \ln^\alpha n \\ &< ((n+1)^\alpha - n^\alpha) \ln^\alpha n \\ &= n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) \ln^\alpha n \\ &< n^\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right) \ln^\alpha n \\ &= n^{\alpha-1} \ln^\alpha n = \frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}} = 0,$$

因此由夹逼定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$. 但

$$a_{n+1} - a_n = (n+1) \ln(n+1) - n \ln n = \ln(n+1) + n \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) > \ln(n+1),$$

显然无界.

习题 1.C.7 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a$. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = a$.

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a.$$

习题 1.C.8 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 且 $a_n > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} (\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)}{n}} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{1}} = e^{\ln a} = a.$$

习题 1.C.9 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ 也存在, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

解 设 $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, ($n > 1$); $b_1 = a_1$, 则 $a_n = b_1 b_2 \cdots b_n$. 由综合习题 1.C.8 可知结果. 直接 Stolz 也

可以得到结果.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}} \\ &= e^{\ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.\end{aligned}$$

习题 1.C.10 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

解

(1) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

(2) 可以用综合习题 1.C.9 来做, 记 $a_n = \frac{n^n}{n!}$ 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e.$$

习题 1.C.11 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}$.

解 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{2}.$$

习题 1.C.12 设 $\{a_n\}$ 且 $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, 又设 $\{b_n\}$ 是正数列, $c_n = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$. 求证:

(1) $\{c_n\}$ 收敛;

(2) 若 $(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \rightarrow +\infty$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

解

(1) 记 $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 任取 $\varepsilon > 0$, 存在 K , 当 $k > K$ 时, $|a_k - a| < \varepsilon$.

当 $n > K$, 有

$$c_n - a = \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - a)b_k}{B_n} = \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n} + \frac{\sum_{k=K+1}^n (a_k - a)b_k}{B_n}.$$

其中

$$\left| \frac{\sum_{k=K+1}^n (a_k - a)b_k}{B_n} \right| \leqslant \frac{\sum_{k=K+1}^n |a_k - a|b_k}{B_n} < \varepsilon \frac{\sum_{k=K+1}^n b_k}{B_n} < \varepsilon.$$

因此

$$\left| c_n - \left(a + \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n} \right) \right| < \varepsilon.$$

而对于

$$q_n := \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n},$$

$C := \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$ 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数, B_n 单调增, 因此 q_n 单调有界 ($C > 0$ 时 q_n 单调减且 $q_n > 0$, $C < 0$ 时 q_n 单调增且 $q_n < 0$), 故 q_n 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$, 再取 N , 使得当 $n, m > N$ 时, $|q_m - q_n| < \varepsilon$, 则当 $n, m > \max\{N, K\}$ 时,

$$|c_m - c_n| \leq |c_n - (a + q_n)| + |c_m - (a + q_m)| + |q_m - q_n| < 3\varepsilon.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 c_n 收敛.

(2) 下给出两种方法,

(a) 由 (1) 中的过程, $q_n = \frac{C}{B_n}$, 由于 $B_n \rightarrow +\infty$, C 为常数, 因此 $q_n \rightarrow 0$, 因此存在 N , 使得当 $n > N$ 时, $|q_n| < \varepsilon$, 则当 $n > \max\{N, K\}$ 时,

$$|c_n - a| \leq |c_n - (a + q_n)| + |q_n| < \varepsilon + |q_n| < 2\varepsilon.$$

(b) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

上述解答中给出了符合题目原意的证明, 即先证明 c_n 收敛, 然后在 B_n 无界时, 再证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$. 但对于这道题而言, 还可以分类 B_n 有界和无界来讨论, 即先做 (2), 然后对 B_n 有界时, 用 Cauchy 收敛准则证明 $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k b_k \right\}$ 收敛, 即两种分类下以截然不同的方式来证明 c_n 收敛.

注 $a_n := \dots$ 中 $:=$ 表示定义. 如 $a_n := \frac{1}{n}$ 表示我们新定义了一个数列 a_n , 其通项公式为 $a_n = \frac{1}{n}$. 在上文中 “ $C := \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$ 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数.” 表示: “记 $C = \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$,

则 C 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数.” 有的地方会写为 $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \dots$.

习题 1.C.13 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$

解 实际上题目中的无穷只能是 $+\infty$.

$p > 0$ 时, $x^p \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^{x^{p \cdot \frac{1}{x^{p-1}}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}}} = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}$$

$p \leq 0$ 时, $x^p \rightarrow 0$, 则考虑 $x > 1$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty.$$

习题 1.C.14 设 $f(x)$ 为周期函数, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, 证明 $f(x)$ 恒为零.

解 设 $f(x)$ 的正周期为 $T > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $|x| \geq N$ 时 $|f(x)| < \varepsilon$.

因此对于 $n = \left\lceil \frac{N}{T} \right\rceil$, 有 $nT \geq N$, 故对于任意 $x \in [nT, (n+1)T]$, 有 $f(x) < \varepsilon$.

利用周期性可以得到 $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < \varepsilon$. 由于 ε 是任意的正数, 所以 $f(x)$ 恒为零.

习题 1.C.15 证明

- (1) 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递增数列 $\{a_n\}$ ($a_n \neq x_0$), 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$;
- (2) 函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^+$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递减数列 $\{a_n\}$ ($a_n \neq x_0$), 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

解

- (1) (a) 必要性: 考虑任意数列 $\{a_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ 且 $\{a_n\}$ 单调递增, .

由于 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$, 因此, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 有 $|f(x) - l| < \varepsilon$.

同时对于 δ , $\exists N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - x_0| < \delta$, 即 $x_0 - \delta < a_n < x_0$.

因此我们有 $m > N$ 时 $|f(a_n) - l| < \varepsilon$. 即得到数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛到 l .

- (b) 充分性: 反证, 若 $x \rightarrow x_0^-$ 时 $f(x)$ 的极限为 l 不成立, 即 $\exists \varepsilon > 0$, $\forall \delta > 0$, $\exists x_0 - \delta < x < x_0$, 使得 $|f(x) - l| \geq \varepsilon$.

因此我们依次构造 $\delta_1 = 1$, $\delta_n = \min\{\frac{1}{n}, x_0 - a_{n-1}\}$, ($n > 2$), 则 $\exists a_n, x_0 - \delta_n < a_n < x_0$, 使得 $|f(a_n) - l| \geq \varepsilon$. 即有 $a_n > a_{n-1}$, 且 $|x_0 - a_n| < \frac{1}{n}$. 这意味着 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$.

由于 $|f(a_n) - l| \geq \varepsilon$, 所以 $\{f(a_n)\}$ 不收敛到 l , 矛盾, 故充分性成立.

- (2) 证明同理. 具体而言:

设 $g(x) = f(-x)$, 则 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0^-$ 时有极限 $l \Leftrightarrow g(x)$ 在 $x \rightarrow -x_0^+$ 时有极限 l . 由

(1) 可知, 这等价于对于任意一个以 $-x_0$ 为极限的单调递增数列 $\{b_n\}$ ($b_n \neq -x_0$), 都有

$\lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n) = l$. 设 $a_n = -b_n$, 则 $\{a_n\}$ 是以 x_0 为极限的单调递减数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

因此 (2) 得证.

习题 1.C.16 设 ξ 是一个无理数, a, b 是实数, 且 $a < b$. 求证: 存在整数 m, n 使得 $m + n\xi \in (a, b)$, 即, 集合

$$S = \{m + n\xi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

在 \mathbb{R} 稠密.

解 稠密的定义: 设 $S \subset \mathbb{R}$, 若对任意 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, 都有 $S \cap (a, b) \neq \emptyset$, 则称 S 在 \mathbb{R} 中稠密.

想法是这样的, 我们为了找到某个 $m + n\xi$ 落在 (a, b) 中, 于是用 ξ 构造一个充分小的实数 $\varepsilon = m_0 + n_0\xi \in (0, b - a)$. 因为这个 ε 够小, 所以能证明存在某个 $l_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $l_0\varepsilon \in (a, b)$, 直观理解如图 1.1 所示.

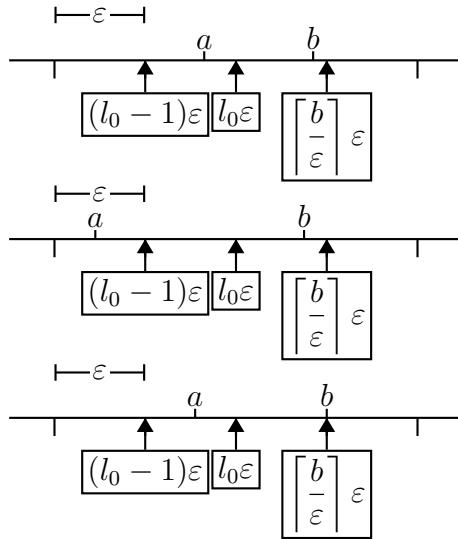


图 1.1: a, b 之间的区间长度大于 ε , 因此存在某个 $l_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $l_0\varepsilon \in (a, b)$. 这里的思路和习题 1.1.2 中证明两个无理数之间存在有理数的思路是类似的.

随后我们取 $m = l_0 m_0, n = l_0 n_0$ 即有 $m + n\xi = l_0\varepsilon \in (a, b)$.

构造 ε 实际上, 对于 $b - a > 0$, 总存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\frac{1}{k} < b - a$. 因此我们考虑构造一个满足 $\varepsilon < \frac{1}{k}, \varepsilon \in S$ 即可.

对于 $l = 1, 2, \dots, k+1$, 我们考虑

$$n_l = \lfloor l\xi \rfloor$$

$$x_l = l\xi - n_l \in S.$$

x_l 是 $l\xi$ 的小数部分, 容易知道 $x_l \in [0, 1)$, 并且 x_l 之间总是两两不同的, 否则 $i\xi - n_i = j\xi - n_j, i \neq j$, 这意味着 $\xi = \frac{n_i - n_j}{i - j}$, 这与 ξ 为无理数矛盾.

因此对于

$$[0, 1) = \bigcup_{j=1}^k \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right),$$

这 k 个区间包括了 $k+1$ 个不同实数 x_l . 因此总有一个区间内部存在同时两个实数, 记为 $x_p, x_q \in S, p \neq q$, 不妨认为 $x_q > x_p$.

由 x_l 的构造 $x_p = p\xi - n_p, x_q = q\xi - n_q$, 有

$$x_q - x_p = (q-p)\xi - (n_p - n_q) \in S,$$

且由于 x_p, x_q 落在同一个区间内, 而区间长度为 $\frac{1}{k}$, 因此 $0 < x_q - x_p \leq \frac{1}{k} < b - a$, 所以 $x_q - x_p$ 满足我们对 ε 的要求. 我们取

$$\varepsilon = x_q - x_p.$$

构造 m, n 我们先证明 $\exists l_0 \in \mathbb{Z}, s.t. l_0\varepsilon \in (a, b)$: 我们取 $l_0 = \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1$, 则

$$l_0\varepsilon = \left(\left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon < \left(\frac{b}{\varepsilon} + 1 - 1 \right) \varepsilon = b.$$

同时, 由于 $\varepsilon < b - a$, 因此

$$l_0\varepsilon = \left(\left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon \geq \left(\frac{b}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon = b - \varepsilon > b - (b - a) = a.$$

因此 $l_0\varepsilon \in (a, b)$.

于是令

$$m = l_0(n_q - n_p), n = l_0(q - p)$$

即有 $m + n\xi = l_0(n_q - n_p) + l_0(q - p)\xi = l_0((q - p)\xi - (n_p - n_q)) = l_0\varepsilon \in (a, b)$.

第 2 章 连续函数的基本概念

习题 2.1

习题 2.1.1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$. 问 $f(x)$ 是否必在 $x = x_0$ 处连续?

解 不一定. 例如, 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则 $\lim_{h \rightarrow 0} [f(0 + h) - f(0 - h)] = \lim_{h \rightarrow 0} (0 - 0) = 0$, 但 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

习题 2.1.2 设对任意正数 $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ 上连续. 证明 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

解 设 $x_0 \in (a, b)$, 则存在 $\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{b-x_0}{2}, \frac{x_0-a}{2} \right\} > 0$, 使得 $a + \varepsilon_0 < x_0 < b - \varepsilon_0$. 因为 $f(x)$ 在 $[a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 因此 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

习题 2.1.3 设在点 $x = x_0$ 处, 函数 $f(x)$ 连续, 而 $g(x)$ 不连续, 问函数 $f(x) \pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 的连续性如何? 若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处都不连续, 回答同样的问题.

解

(1) $f(x) \pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处均不连续. 反证: 若 $f(x) + g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + g(x_0) - f(x_0) = g(x_0)$, 矛盾. 同理可证 $f(x) - g(x)$ 在点 x_0 处不连续.

$f(x)g(x)$ 在 x_0 处连续性未知, 例如, 设

$$f(x) = x, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

则 $f(x)g(x) \equiv x$, 在点 $x_0 = 0$ 处连续. 又例如, 设

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

则 $f(x)g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ 在点 $x_0 = 0$ 处不连续.

(2) 若 $f(x), g(x)$ 在 x_0 处都不连续, 则 $f(x) \pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处可能连续, 也可能

不连续. 例如,

(a) $f(x) + g(x)$ 在点 x_0 处连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f(x) + g(x) \equiv 0$, 在点 $x_0 = 0$ 处连续.

(b) $f(x) + g(x)$ 在点 x_0 处不连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{则 } f(x) + g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0; \end{cases} \text{ 在点 } x_0 = 0 \text{ 处不连续.}$$

(c) $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f(x)g(x) \equiv 0$, 在点 $x_0 = 0$ 处连续.

(d) $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处不连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\text{则 } f(x)g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \text{ 在点 } x_0 = 0 \text{ 处不连续.}$$

习题 2.1.4

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x = x_0$ 处也连续.

(2) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在一个区间 I 上连续, 证明: 函数 $M(x) = \max(f(x), g(x))$ 及 $m(x) = \min(f(x), g(x))$ 在区间 I 上均连续.

解

(1) 因为 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处连续, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 因此 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 又因为

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

故 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$, 即 $|f(x)|$ 在点 $x = x_0$ 处连续.

(2) 由 $M(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$, $m(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$ 可知, 只需

证明 $|f(x) - g(x)|$ 在区间 I 上连续. 因为 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上连续, 故 $f(x) - g(x)$ 在区间 I 上连续. 由(1)可知, $|f(x) - g(x)|$ 在区间 I 上连续.

习题 2.1.5 证明: 存在这样的函数 $f(x)$, 处处不连续, 但函数 $|f(x)|$ 处处连续. (提示: 适当地修改 Dirichlet 函数可得出一个例子.)

解 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 处处不连续, 但 $|f(x)| \equiv 1$, 处处连续.

证明 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 取 $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$; 取 $\{b_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(a_n) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(b_n)$, 矛盾. 因此 $f(x)$ 处处不连续.

习题 2.1.6 指出下列函数的间断点, 并说明其类型.

$$(1) f(x) = \frac{x+1}{x-2};$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \lfloor |\cos x| \rfloor;$$

$$(4) f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}};$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+7}, & -\infty < x < -7, \\ x, & -7 \leq x \leq 1, \\ (x-1) \sin \frac{1}{x-1}, & 1 < x < +\infty; \end{cases}$$

$$(6) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases}$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

左右极限不存在, 因此 $x = 2$ 是第二类间断点.

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{\sin x}{x} \right) = -1.$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x = 0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(3) 可知 $f(x) = \begin{cases} 1, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 在 $x = k\pi$ 处, $\lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = 0 \neq f(k\pi) = 1$. 左右极限存在且相等, $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) 是第一类间断点中的可去间断点.

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 1.$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x = 0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(5) (a) 在 $x = -7$ 处

$$\lim_{x \rightarrow -7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{1}{x + 7} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = -7,$$

左极限不存在, 因此 $x = -7$ 是第二类间断点.

(b) 在 $x = 1$ 处:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \sin \frac{1}{x - 1} = 0, \quad f(1) = 1,$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x = 1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(6) 当 $x \neq 2$ 时, $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$, 但 $f(2) = 4$, 函数值与极限值相等. 因此函数在 $x = 2$ 处连续, 无间断点.

习题 2.1.7 试确定 a , 使得函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续.

解 由 $f(0) = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^0 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + 0 = a$ 可知, 当 $a = 1$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

习题 2.1.8 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 在点 0 处右连续, 但不左连续.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-2/x}}{1 + e^{-2/x}} = 1 = f(0)$, 故 $f(x)$ 在点 0 处右连续.

又因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2/x} - 1}{e^{2/x} + 1} = -1 \neq f(0)$, 故 $f(x)$ 在点 0 处不左连续.

习题 2.1.9 证明: 对每个实数 x , $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 存在. 将该极限值记为 $f(x)$, 试讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

解

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = (1+x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(x^2)^n} = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1; \\ \frac{1+x}{2}, & x = \pm 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

即

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 1; \\ 1, & x = 1; \\ 0, & x > 1 \text{ 或 } x \leq -1. \end{cases}$$

因此,

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(-1), \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } x = -1 \text{ 处连续;}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \neq f(1), \text{ 故 } f(x) \text{ 在 } x = 1 \text{ 处不连续; 对于其他点, } f(x) \text{ 均连续.}$$

综上所述, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 上连续, 在 $x = 1$ 处不连续.

习题 2.1.10 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则存在一个正数 δ , 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有界. (这一结果称为连续函数的局部有界性.)

解 因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = 1$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < 1$, 即 $-1 < f(x) - f(x_0) < 1$, 故 $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$. 因此, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leq \max\{|f(x_0) - 1|, |f(x_0) + 1|\}$, 即 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有界.

习题 2.1.11 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 且 $f(x_0) \neq 0$, 则存在一个正数 δ , 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上与 $f(x_0)$ 同号. (这一结果称为连续函数的局部保号性) 进一步, 存在某个正数 γ , 使得 $f(x)$ 在这一区间中满足 $|f(x)| \geq \gamma$.

解 因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2},$$

即

$$-\frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{|f(x_0)|}{2},$$

$$\text{故 } f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

因为 $f(x_0) \neq 0$, 故当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有

(1) $f(x_0) > 0$ 时

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

(2) $f(x_0) < 0$ 时

$$f(x) < f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} < 0.$$

因此, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号. 进一步地, 取 $\gamma = \frac{|f(x_0)|}{2}$, 则当

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \geq \gamma$.

习题 2.1.12 证明: 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$ (从而 x_0 为 $g(x)$ 的可去间断点), $f(u)$ 在 $u = a$ 处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(a).$$

(这一结论对其他五种极限过程也成立.)

解 由于 $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = f(a)$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$, 当 $|u - a| < \delta_1$ 时, 有 $|f(u) - f(a)| < \varepsilon$.

又因为 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$, 故对于 $\delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - a| < \delta_1$.

因此, 当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - a| < \delta_1$, 即 $|f(g(x)) - f(a)| < \varepsilon$. 综上所述, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(a)$.

习题 2.1.13 证明: 若函数 $u(x), v(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $u(x_0) > 0$, 则函数 $u(x)^{v(x)}$ 也在点 x_0 处连续.

解 利用 e^x 在 \mathbb{R} 上连续, $\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 以及复合函数的极限可交换性, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{v(x) \ln u(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln u(x)} = e^{v(x_0) \ln u(x_0)} = u(x_0)^{v(x_0)}.$$

习题 2.1.14 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 且对于任意 x 有 $f(2x) = f(x)$. 求证 $f(x)$ 是常数.

解 即证: $f(x) \equiv f(0)$. 对于任意点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 考虑任意以 x_0 为极限的数列, $\{x_n\}$, 则由连续性

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n}{2^n} \cdot 2^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n}{2^n}\right) = f(0),$$

且 $f(x_0) = f(0)$. 由于 x_0 的任意性, 故 $f(x) \equiv f(0)$.

习题 2.1.15 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 且对于任意 x, y 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 求证 $f(x) = cx$, 其中 c 是常数.

解

(1) 由 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ 可知, $f(0) = 0$.

(2) 对 $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx) = f((n-1)x+x) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n \text{ 个}} = nf(x).$$

即对任意自然数 $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.

(3)

$$f(-x) + f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

即对任意整数 $k \in \mathbb{Z}$, $f(kx) = kf(x)$.

(4) 对 $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$,

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m \cdot \frac{1}{n} \cdot nf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$$

即对任意有理数 $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = rf(x)$.

(5) 对 $x \in \mathbb{R}$, 则存在有理数列 $\{r_n\}$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$, 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(1) = xf(1).$$

由于 f 在 x 处连续, 故

$$f(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = xf(1).$$

取 $c = f(1)$, 即有 $f(x) = xf(1) = cx$.

习题 2.1.16 当 $x \rightarrow 0$ 时, 用 $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$ 证明 $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$; 用 $\ln(1+x) \sim x$ 证明 $(e^x - 1) \sim x$.

(上述的等价无穷小, 是微积分中非常基本的事实.)

解

(1) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 设 $g(x) = \arcsin x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即 $\arcsin x \sim x$;

(2) $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 设 $g(x) = \arctan x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \arctan x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即 $\arctan x \sim x$;

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续. 设 $g(x) = e^x - 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即 $(e^x - 1) \sim x$.

习题 2.1.17 求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[10]{1+\tan x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{2x \sin x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin(\sin x)}{1 - \cos x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x});$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 - \frac{\sin x}{x}}.$$

解

$$(1) \sqrt{1+x+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}(x+x^2), \sin 2x \sim 2x, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4};$$

$$(2) \sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1;$$

$$(3) \sqrt[10]{1+\tan x} - 1 \sim \frac{1}{10}\tan x \sim \frac{1}{10}x, \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x, 2x \sin x \sim 2x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[10]{1+\tan x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{10}x \cdot \frac{1}{2}x}{2x^2} = \frac{1}{40};$$

$$(4) x \cdot \arcsin(\sin x) \sim x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin(\sin x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2;$$

$$(5) 1 - \cos(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}(1 - \cos x)^2 \sim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x^2 \right)^2 = \frac{1}{8}x^4, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^4}{x^4} = \frac{1}{8};$$

$$(6) \text{令 } y = \frac{1}{x}, \text{则 } y \rightarrow 0^+,$$

$$\text{并且 } x = -\frac{1}{y}, \text{即有 } x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = -\frac{1}{y} \left(\sqrt{\frac{1}{y^2} + 100} - \frac{1}{y} \right) = -\frac{\sqrt{1+100y^2}-1}{y^2}$$

$$\text{而 } \sqrt{1+100y^2} - 1 \sim \frac{1}{2} \cdot 100y^2 = 50y^2, (y \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{1+100y^2}-1}{y^2} = -\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{50y^2}{y^2} = -50$$

(7)

$$\begin{aligned} |\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}| &= \left| 2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| \\ &= 2 \left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right| \\ &\leqslant 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \text{ 可知, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0;$$

(8)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 - \frac{\sin x}{x}} = \sqrt{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}} = \sqrt{2 - 0} = \sqrt{2}.$$

习题 2.1.18 (旧版教材中的题目) 函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 与 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ 分别称为双曲正弦与双曲余弦(统称为双曲函数), 它们均在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 证明以下各题. (可与三角函数的性质作比较.)

$$(1) \sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x; \quad (2) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$(3) \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x; \quad (4) \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x;$$

$$(5) \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y; \quad (6) \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

解

$$(1) \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x, \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x;$$

$$(2) \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1;$$

$$(3) \sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = 2 \sinh x \cosh x;$$

$$(4) \cosh 2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2 + (e^x + e^{-x})^2}{4} = \sinh^2 x + \cosh^2 x;$$

$$(5) \sinh(x \pm y) = \frac{e^{x \pm y} - e^{-(x \pm y)}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} - e^{-x} e^{\mp y}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} - e^{-x} e^{\pm y} + e^{-x} e^{\pm y} - e^{-x} e^{\mp y}}{2} =$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} + e^{\mp y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} - e^{\mp y}}{2}\right) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y;$$

$$(6) \cosh(x \pm y) = \frac{e^{x \pm y} + e^{-(x \pm y)}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} + e^{-x} e^{\mp y}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} + e^{-x} e^{\pm y} - e^{-x} e^{\pm y} + e^{-x} e^{\mp y}}{2} =$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} + e^{\mp y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} - e^{\mp y}}{2}\right) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

习题 2.2

习题 2.2.1 证明函数 $x \cdot 2^x - 1$ 在 $[0, 1]$ 内有零点.

解 设 $f(x) = x \cdot 2^x - 1$, 则 $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$. 又因 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续. 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

习题 2.2.2 证明函数 $x - a \sin x - b$ (其中 a, b 为正数) 在 $(0, +\infty)$ 上有零点, 且零点不超过 $a+b$.

解 设 $f(x) = x - a \sin x - b$, 该函数在 $[0, +\infty)$ 连续, 同时 $f(0) = -b < 0, f(a+b+1) = a+b+1 - a \sin(a+b+1) - b = a(1 - \sin(a+b+1)) + 1 \geq 1 > 0$. 因此由零点定理, $(0, a+b+1)$ 上有零点, 进而 $(0, +\infty)$ 上有零点.

又因对任意 $x > a+b$ 有 $f(x) = x - a \sin x - b > a+b - a \sin x - b \geq 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点不超过 $a+b$.

习题 2.2.3 证明函数 $x - \sin(x+1)$ 有实零点.

解 设 $f(x) = x - \sin(x+1)$, 由 $-1 \leq \sin(x+1) \leq 1$ 知, 则 $f(-2) \leq -2+1 = -1 < 0, f(2) \geq 2-1 = 1 > 0$. 又因 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上连续, 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (-2, 2)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

习题 2.2.4 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且值域就是 $[a, b]$. 证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上必有不动点, 即有 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

解 函数 $f(x)$ 的值域为 $[a, b]$, 故存在 $x_1, x_2 \in [a, b]$, 使得 $f(x_1) = a, f(x_2) = b$. 设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(a) = f(a) - a \geq 0, g(b) = f(b) - b \leq 0$.

故结合零点定理可简单推知, 要么 a 或 b 是 $g(x)$ 的零点, 要么存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $g(x_0) = 0$, 总之存在 $x_0 \in [a, b], g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = x_0$.

注 这里给出一个表述的区分.

(1) 如果严格满足零点定理的情形, 即端点处非零异号, 推出开区间内存在零点, 那么表达为由零点定理可知.

(2) 如果和本题类似, 端点处可能为零, 推出推出闭区间内存在零点, 则简单表达为结合零点定理可简单推知.

习题 2.2.5 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$. 试证: 存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$.

解 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $h(a) = f(a) - g(a) > 0, h(b) = f(b) - g(b) < 0$. 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = g(x_0)$.

习题 2.2.6 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$. 证明: 在区间 $[0, a]$ 上存在某个 x_0 , 使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

解 设 $g(x) = f(x) - f(x+a)$, 则 $g(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 且 $g(0) = f(0) - f(a), g(a) = f(a) - f(2a) =$

$f(a) - f(0) = -g(0)$. 因此 $g(0)g(a) = -(g(0))^2 \leq 0$. 由结合零点定理简单推知, 存在 $x_0 \in [0, a]$, 使得 $g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

习题 2.2.7 试证: 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, x_1, x_2, \dots, x_n 为此区间中的任意点, 则在 $[a, b]$ 中有一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)).$$

更一般地, 若 $q_1 > 0, q_2 > 0, \dots, q_n > 0$, 且 $q_1 + q_2 + \dots + q_n = 1$, 则在 $[a, b]$ 中有一点 ξ , 使得

$$f(\xi) = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \dots + q_n f(x_n).$$

解

- (1) 设 $A = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n))$. 若 $f(x_i) = f(x_j)$ 对所有 i, j 成立, 则对任意 k , 取 $\xi = x_k$ 总是可以的. 否则取 i, j 使得 $f(x_i) = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}, f(x_j) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$. 则 $f(x_i) \leq A \leq f(x_j), f(x_i) < f(x_j)$. 由介值定理知, 存在 $\xi \in (\min\{x_i, x_j\}, \max\{x_i, x_j\}) \subset [a, b]$, 使得 $f(\xi) = A$.
- (2) 设 $A = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \dots + q_n f(x_n)$. 若 $f(x_i) = f(x_j)$ 对所有 i, j 成立, 则对任意 k , 取 $\xi = x_k$ 总是可以的. 否则取 i, j 使得 $f(x_i) = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}, f(x_j) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$. 则 $f(x_i) \leq A \leq f(x_j), f(x_i) < f(x_j)$. 由介值定理知, 存在 $\xi \in (\min\{x_i, x_j\}, \max\{x_i, x_j\}) \subset [a, b]$, 使得 $f(\xi) = A$.

习题 2.2.8 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 证明 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

解 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$. 则对于 $\varepsilon = 1 > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $x > N$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$, 即 $|f(x)| < |A| + 1$. 又因函数 $f(x)$ 在区间 $[a, N]$ 上连续, 故在该闭区间上有界, 即存在 $K > 0$, 使得对任意 $x \in [a, N]$ 有 $|f(x)| \leq K$. 取 $M = \max\{K, |A| + 1\}$, 则对任意 $x \in [a, +\infty)$ 有 $|f(x)| \leq M$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

习题 2.2.9 证明函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

解 由习题 1.3.17 知, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4} = 0$, 利用习题 2.2.8 知, 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界. 又因 $f(x)$ 是偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上也有界. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

习题 2.2.10 是否有满足下面条件的连续函数? 说明理由.

- (1) 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $(0, +\infty)$;
- (2) 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $(0, 1)$;
- (3) 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $[0, 1] \cup [2, 4]$;
- (4) 定义域为 $(0, 1)$, 值域为 $(2, +\infty)$.

解

- (1) 不存在. 这与最值定理矛盾.
 (2) 不存在. 这与最值定理矛盾.
 (3) 不存在. 这与介值定理矛盾.
 (4) 存在. 例如, $f(x) = \frac{1}{x} + 2$.

习题 2.2.11 举例说明, 对任意正数 $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ 上有界, 不能保证 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上有界. (比较习题 2.1 第 2 题.)

解 例如, 设 $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}$, 则对任意正数 $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ 上连续, 故有界; 但在开区间 (a, b) 上无界.

习题 2.2.12 设 $y = f(x)$ 在开区间 $I = (a, b)$ 上连续并严格单调. 证明 $y = f(x)$ 的值域 $f(I)$ 也是一个开区间.

解 注 不能假设 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在. $f(I)$ 可能有无穷端点, 例如 $f(x) = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上连续且严格单调, 但值域是 $(-\infty, +\infty)$.

- (1) 不妨假设是严格递增的, 否则类似考虑 $-f(x)$ 即可. 先证明 $f(I)$ 存在两个不同的点: 取 $x_1, x_2 \in I$, 且 $x_1 < x_2$, 由严格单调性知, $f(x_1) < f(x_2)$, 故 $f(I)$ 中至少有两个不同的点.

注 如果去除单调的严格性, 则 $f(I)$ 不一定是开区间, 例如 $f(x) = 1$ 在 $(0, 1)$ 上连续且单调, 但值域不是开区间.

- (2) $\forall y_1, y_2 \in f(I)$, 且 $y_1 < y_2$. 则存在 $x_1, x_2 \in I$, 使得 $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. 因为 $f(x)$ 在 I 上严格单调, 故 $x_1 < x_2$. 对任意 $y \in (y_1, y_2)$, 由介值定理知, 存在 $x \in (x_1, x_2) \subset I$, 使得 $f(x) = y$. 因此, $f(I)$ 是区间.

- (3) 下面证明 $f(I)$ 是开区间. $\forall y \in f(I)$, 则存在 $x_0 \in I$, 使得 $f(x_0) = y$. 由 (a, b) 是开区间知, 存在 $\delta > 0$, 使得 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$. 设 $\eta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta) - f(x_0)\} > 0$, 则对任意 $y' \in (y - \eta, y + \eta) \subset (f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta))$, 由介值定理知, 存在 $x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$, 使得 $f(x') = y'$. 因此, $f(I)$ 是开区间.

习题 2.2.13 设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a, b) 上一致连续. 求证 $f(x)$ 在 a 点的右极限和在 b 点的左极限都存在.

解 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

现取 $x_1, x_2 \in (a, a + \delta)$, 则 $|x_1 - x_2| < \delta$, 故 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(a, a + \delta)$ 上满足柯西收敛准则, 故 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在. 同理可证 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 也存在.

习题 2.2.14 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续, $\{a_n\}$ 是正收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛. 又问仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论是否还成立, 为什么?

解

(1) 由 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 又因 $\{a_n\}$ 是正收敛数列, 故存在 $N \in \mathbf{N}^+$, 使得当 $n, m > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \delta$, 因此, 对任意 $n, m > N$ 有 $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$. 由柯西收敛准则知, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛.

(2) 仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论不成立. 例如, 设 $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 且数列 $a_n = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi}$ 收敛于 0, 但数列 $f(a_n) = \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \right) = (-1)^n$ 不收敛.

习题 2.2.15 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, $\{a_n\}$ 是收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛.

解 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a \in (-\infty, +\infty)$. 由 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续知, $f(x)$ 在 a 点连续, 即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. 因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

又因数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 故存在 $N \in \mathbf{N}^+$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \delta$, 因此, 对任意 $n > N$ 有 $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$. 由数列的收敛定义知, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛于 $f(a)$.

习题 2.2.16 给出一个在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且有界但不一致连续的函数.

解 例如, $f(x) = \sin x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且有界, 但不一致连续.

反证法: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 则对 $\varepsilon = 1 > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$. 但倘若我们取 $x_1 = \sqrt{2n\pi}, x_2 = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$, 则当 $n > \left(\frac{2}{\delta}\right)^2$ 时, 有 $|x_1 - x_2| < \delta$, 但 $|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \sin(2n\pi) - \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right| = 1$, 矛盾.

第 2 章综合习题

习题 2.C.1 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数,} \\ x, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$ 仅在点 $x = 0$ 处连续.

解 设 $x_0 \in \mathbb{R}$, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在有理数列 $\{r_n\}$ 与无理数列 $\{s_n\}$, 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_0$. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_0.$$

当 $x_0 \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = x_0$, 故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处不连续.

当 $x_0 = 0$ 时, 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $|x - 0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$. 因此 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

习题 2.C.2 设 $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$, 记 $f(x) = \frac{|x - x_1| + \dots + |x - x_n|}{n}$, 证明: 存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

解 设 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$, 则 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) &= \frac{|0 - x_1| + \dots + |0 - x_n|}{n} + \frac{|1 - x_1| + \dots + |1 - x_n|}{n} \\ &= \frac{(x_1 + (1 - x_1)) + \dots + (x_n + (1 - x_n))}{n} = 1. \end{aligned}$$

因此 $g(0) + g(1) = f(0) + f(1) - 1 = 0$. 则 $g(0)g(1) = -(g(0))^2 \leq 0$. 结合零点定理可简单推知, 存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

习题 2.C.3 证明: 函数 $\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$ (其中 $a_1, a_2, a_3 > 0$, 且 $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) 在 (λ_1, λ_2) 与 (λ_2, λ_3) 内各有一个零点.

解 仅证明 (λ_1, λ_2) 内有一个零点, (λ_2, λ_3) 内的证明类似.

由 $\frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$ 在 $\left[\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right]$ 上连续, 因此有界, 即存在 $M_1 > 0$, 使得对任意 $x \in \left[\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right]$ 有 $\left|\frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}\right| \leq M$.

又由 $\lim_{x \rightarrow \lambda_1^+} \frac{a_1}{x - \lambda_1} = +\infty$, 因此存在 $\delta_1 \in \left(0, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_1)$ 有 $\frac{a_1}{x - \lambda_1} > M_1$. 因此, 存在 $x_1 \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_1) \subset \left(\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)$, 使得

$$\frac{a_1}{x_1 - \lambda_1} + \frac{a_2}{x_1 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_1 - \lambda_3} = \frac{a_1}{x_1 - \lambda_1} + \left(\frac{a_2}{x_1 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_1 - \lambda_3}\right) > M_1 - M_1 = 0.$$

由 $\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$ 在 $\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right]$ 上连续, 因此有界, 即存在 $M_2 > 0$, 使得对任意 $x \in$

$\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right]$ 有 $\left|\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}\right| \leq M_2$.

又由 $\lim_{x \rightarrow \lambda_2^-} \frac{a_2}{x - \lambda_2} = -\infty$, 因此存在 $\delta_2 \in \left(0, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x \in (\lambda_2 - \delta_2, \lambda_2)$ 有 $\frac{a_2}{x - \lambda_2} < -M_2$. 因此, 存在 $x_2 \in (\lambda_2 - \delta_2, \lambda_2) \subset \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right)$, 使得

$$\frac{a_1}{x_2 - \lambda_1} + \frac{a_2}{x_2 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_2 - \lambda_3} = \left(\frac{a_1}{x_2 - \lambda_1} + \frac{a_3}{x_2 - \lambda_3}\right) + \frac{a_2}{x_2 - \lambda_2} < M_2 - M_2 = 0.$$

综上, 存在 $x_1, x_2 \in (\lambda_1, \lambda_2)$, 使得对于函数 $f(x) = \frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$ 有 $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$. 由介值定理知, 存在 $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (\lambda_1, \lambda_2)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

同时由于 $\frac{a_1}{x - \lambda_1}, \frac{a_2}{x - \lambda_2}, \frac{a_3}{x - \lambda_3}$ 在 (λ_1, λ_2) 上严格单调递减, 因此 $f(x)$ 在 (λ_1, λ_2) 上严格单调递减. 因此, 零点 x_0 唯一.

习题 2.C.4 设 $f(x)$ 是一个多项式, 则必存在一点 x_0 , 使得 $|f(x_0)| \leq |f(x)|$ 对任意实数 x 成立.

解 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中 $a_n \neq 0, n \geq 1$. 则

$$|f(x)| = |x|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right|.$$

因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = a_n$, 因此存在 $M > 0$, 使得当 $|x| > M$ 时, 有

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right| > \frac{|a_n|}{2}.$$

由 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{2} |x|^n = +\infty$, 因此 $\exists X > M$, 使得当 $|x| > X$ 时, 有 $\frac{|a_n|}{2} |x|^n > |f(0)|$. 而由 $|f(x)|$ 在 $[-X, X]$ 上连续, 故由最值性知, 存在 $x_0 \in [-X, X]$, 使得 $|f(x_0)| = \inf\{f(x) : x \in [-X, X]\}$. 特别的, 对任意 $x \in [-X, X]$ 有 $|f(x_0)| \leq |f(0)|$. 因此对于 $|x| > X$ 时, 有 $|f(x)| > \frac{|a_n|}{2} |x|^n \geq |f(x_0)|$. 综上, 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有 $|f(x_0)| \leq |f(x)|$.

习题 2.C.5 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$. 证明: 对任意正整数 n , 在区间 $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ 中有一点 ξ , 使得 $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right)$.

解 设 $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$, 则 $g(x)$ 在 $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ 上连续, 且

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right),$$

...

$$g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(0).$$

因此 $\frac{1}{n} \left(g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + g\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) = 0$. 则 $g(0), g\left(\frac{1}{n}\right), \dots, g\left(\frac{n-1}{n}\right)$ 中至少有一

一个非正, 另一个非负. 由介值定理知, 存在 $\xi \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, 使得 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right)$.

习题 2.C.6 证明: 存在一个实数 x , 满足 $x^5 + \frac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x} = 72$.

解 设 $f(x) = x^5 + \frac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}$,

$$f(3) = 3^5 + \frac{\cos 3}{1+3^2+\sin^2 3} \geq 243 \frac{1}{1+3^2-1} > 72,$$

$$f(-3) = (-3)^5 + \frac{\cos(-3)}{1+(-3)^2+\sin^2(-3)} \leq -243 + \frac{1}{1+(-3)^2-1} < -72.$$

由介值定理知, 存在 $x \in [-3, 3]$, 使得 $f(x) = 72$.

习题 2.C.7 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上或者有最大值, 或者有最小值.

解 记

$$S = \sup\{f(x) : x \in [a, +\infty)\}, I = \inf\{f(x) : x \in [a, +\infty)\}, L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

- (1) 若 $S > L$, 取 $\varepsilon = \frac{S-L}{2} > 0$, 则存在 $X > a$, 使得对任意 $x > X$ 有 $|f(x) - L| < \varepsilon$, 即 $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. 因此, 对任意 $x > X$ 有 $f(x) < L + \varepsilon = \frac{S+L}{2} < S$. 因此

$$\sup\{f(x) : x \in [a, X]\} = S,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0 \in [a, X]$, 使得 $f(x_0) = S$.

- (2) 若 $I < L$, 取 $\varepsilon = \frac{L-I}{2} > 0$, 则存在 $X > a$, 使得对任意 $x > X$ 有 $|f(x) - L| < \varepsilon$, 即 $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. 因此, 对任意 $x > X$ 有 $f(x) > L - \varepsilon = \frac{I+L}{2} > I$. 因此

$$\inf\{f(x) : x \in [a, X]\} = I,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0 \in [a, X]$, 使得 $f(x_0) = I$.

- (3) 若 $S = L = I$, 则 $f(x) \equiv L$, 即任取 $x_0 \in [a, +\infty)$, 均有 $f(x_0) = L$ 同时为最大值和最小值.

注 一个只有极限没有最大值的例子是 $f(x) = \arctan x, x \in [0, +\infty)$.

习题 2.C.8 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上, 满足条件: $a \leq f(x) \leq b$ (对任意 $x \in [a, b]$), 且对 $[a, b]$ 中任意的 x, y 有 $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. 这里 k 是常数, $0 < k < 1$. 证明:

- (1) 存在唯一的 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.
- (2) 任取 $x_1 \in [a, b]$, 并定义数列 $\{x_n\} : x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.
- (3) 给出一个在实轴上的连续函数, 使得对任意 $x \neq y$ 有 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, 但方程 $f(x) - x = 0$ 无解.

解

- (1) 先证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续: 设 $x_0 \in [a, b]$, 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$, 则对任意 $x \in [a, b]$

且 $|x - x_0| < \delta$, 有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0| < k\delta = \varepsilon.$$

设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $g(a) = f(a) - a \geq 0, g(b) = f(b) - b \leq 0$. 故结合零点定理可简单推知, 存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = x_0$. 又因对任意 $x, y \in [a, b]$ 有

$$|g(x) - g(y)| = |f(x) - f(y) - (x - y)| \geq |x - y| - |f(x) - f(y)| \geq (1 - k)|x - y|,$$

故若存在 $x_1 \neq x_0$ 使得 $f(x_1) = x_1$, 则

$$(1 - k)|x_1 - x_0| \leq |g(x_1) - g(x_0)| = |f(x_1) - f(x_0) - (x_1 - x_0)| = 0,$$

即 $x_1 = x_0$. 因此 x_0 唯一.

- (2) (a) 若 $x_2 = x_1$, 则由 $f(x_1) = x_1$ 以及 (1) 中所述的唯一性, 知 $x_2 = x_1 = x_0$, 则 $x_3 = f(x_2) = f(x_0) = x_0$, 依此类推, 有 $x_n = x_0$ 对任意 $n \geq 1$ 成立. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.
- (b) 若 $x_2 \neq x_1$, 对任意 $n \geq 1$ 有

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq k^{n-1}|x_2 - x_1|.$$

因此, 对任意 $m > n \geq 1$ 有

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (k^{m-2} + k^{m-3} + \dots + k^{n-1})|x_2 - x_1| \\ &\leq \frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left\lceil \log_k \frac{(1-k)\varepsilon}{|x_2 - x_1|} \right\rceil$, 当 $m, n > N$ 时, 有

$$|x_m - x_n| \leq \frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2 - x_1| < \varepsilon.$$

故数列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 故存在 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n := a$ 存在. 又因 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 对递推式两侧取极限, 有

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(a).$$

由 (1) 中所述的唯一性, 知 $a = x_0$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

- (3) 一个不太严谨的思考过程: 我想要构造一个满足 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ 的函数, 我考虑了 $|f'(x)| < 1$ 的趋势为增的函数, 同时 $f(x) - x$ 无解要求了 $f(x)$ 应该是贴在 $y = x$ 的(不妨设为)上方的, 于是我考虑了 $f(x) = x + g(x)$, 并假设 $g(x)$ 可导, 其中如果 $-1 < -g'(x) < 0$, 那就能保证 $f(x)$ 的导数满足要求.(当然上述思路中, 对 $g(x)$ 的选取过程都只

是必要的)

$$f(x) = x + \frac{1}{1 + e^x}.$$

(a) 满足 $|f(x) - f(y)| < |x - y|$: 设 $x > y$, 则

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= f(x) - f(y) = (x - y) + \frac{1}{1 + e^x} - \frac{1}{1 + e^y} \\ &= (x - y) - \frac{e^x - e^y}{(1 + e^x)(1 + e^y)} \\ &< x - y = |x - y|. \end{aligned}$$

(b) 方程 $f(x) - x = 0$ 无解: 由 $f(x) - x = \frac{1}{1 + e^x} > 0$, 知 $f(x) - x = 0$ 无解.

习题 2.C.9 证明: 对任意正整数 n , 方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 恰有一个正根 x_n ; 进一步证明数列 $\{x_n\}$ ($n \geq 1$) 收敛, 并求其极限.

解

(1) 设 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$, 则 $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续, 且 $f_n(0) = -1 < 0$, $f_n(1) = n - 1 \geq 0$. 故结合零点定理可简单推知, 存在 $x_n \in (0, 1]$, 使得 $f_n(x_n) = 0$. 由于 $f_n(x)$ 的每一项都严格单调递增, 故 $f_n(x)$ 也严格单调递增, 因此 x_n 是唯一解.

(2) 下证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减: 若 $x_{n+1} \geq x_n$, 由 $x_n > 0$

$$1 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} \geq x_n^{n+1} + x_n^n + \cdots + x_n > x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1,$$

故矛盾, 因此 $x_{n+1} < x_n$. $\{x_n\}$ 单调递减, 有 0 为下界, 故数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(3) 考虑

$$1 - x_n^n = (1 - x_n)(1 + x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^{n-1}) = 1 - x_n,$$

在两边同时取极限之前, 我们还得先考虑 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n$. 由于 $1 = x_2 + x_2^2 \geq x_2 \cdot x_2 + x_2^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, 对 $x_n^n < x_2^n$, 由夹逼定理知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$. 因此, 对数列 $\{x_n\}$ 取极限, 有

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - x_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - x_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

习题 2.C.10 设 $a < b$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任意 $x \in [a, b]$ 存在 $y \in (x, b)$ 使得 $f(y) > f(x)$. 求证: $f(b) > f(a)$.

解 考虑 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值 $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, 由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = M$. 若 $\exists x < b$, $f(x) = M$, 则由题设条件, 存在 $y \in (x, b)$, 使得 $f(y) > f(x) = M$, 矛盾. 因此 $f(b) = M$, 且 $\forall x < b$, $f(x) < M$. 特别的, $f(a) < f(b)$.

第3章 单变量函数的微分学

习题 3.1

习题 3.1.1 讨论下列函数在点 $x = 0$ 处是否可导:

$$(1) f(x) = |\sin x|;$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$(4) f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x+1, & x < 0; \end{cases}$$

$$(5) f(x) = |x|e^x;$$

$$(6) f(x) = |x^3|.$$

解

(1)

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|\sin h| - |\sin 0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|\sin h| - |\sin 0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin h}{h} = -1.$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

(2)

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h+1) - 1}{h} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1}{h} = 0.$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

(3)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$.

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq f(0),$$

因此 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

(5)

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{he^h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} e^h = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-he^h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -e^h = -1.$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导.

(6)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h^3| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h|h = 0,$$

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

习题 3.1.2 求 a, b 的值, 使下列函数处处可导:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1; \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \ln(1 + x), & x < 0, \\ ax + b, & x \geq 0. \end{cases}$$

解

(1) $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上可导, 故只需讨论 $x = 1$ 处的可导性.

由连续性得:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 1 = a + b.$$

由可导性得:

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 2 = a.$$

解得 $a = 2, b = -1$.

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上可导, 故只需讨论 $x = 0$ 处的可导性.

由连续性得:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow b = 0.$$

由可导性得:

$$f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow 1 = a.$$

解得 $a = 1, b = 0$.

习题 3.1.3 设函数 $g(x)$ 在 $x = a$ 处连续, 记 $f(x) = (x - a)g(x)$. 证明 $f'(a) = g(a)$.

解

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a + h - a)g(a + h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} g(a + h) = g(a).$$

习题 3.1.4 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} = (\alpha + \beta)f'(x_0) \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数}).$$

解

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta h)}{h} \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\alpha \cdot \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} + \beta \cdot \frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta h)}{\beta h} \right] \\
 &= \alpha f'(x_0) + \beta f'(x_0) = (\alpha + \beta) f'(x_0).
 \end{aligned}$$

习题 3.1.5 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 且 $f(a) \neq 0$, 证明函数 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 也可导. 若 $f(a) = 0$, 结论是否仍成立?

解

(1) $f(a) \neq 0$ 时, 不妨设 $f(a) > 0$, 则 $\exists \delta > 0$, 当 $|x - a| < \delta$ 时, $f(x) > 0$, 因此

$$|f(x)| = f(x),$$

因此 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处可导, 且 $|f'|'(a) = f'(a)$.

(2) 不成立, 如 $f(x) = x$ 在 $x = 0$ 处可导, 但是 $|x|$ 在 $x = 0$ 处不可导.

习题 3.1.6 求下列函数的导数.

- | | |
|---------------------------------------|--|
| (1) $y = \frac{x}{3x^2 + 5x - 2};$ | (2) $y = \sin x \tan x + \cot x;$ |
| (3) $y = x^2 \log_3 x;$ | (4) $y = \frac{x}{1 - \cos x};$ |
| (5) $y = \frac{1 + \ln x}{x^2 + 1};$ | (6) $y = \frac{(1 + x^2) \ln x}{\sin x + \cos x};$ |
| (7) $y = (x^2 + 1)(3x - 1)(1 - x^3);$ | (8) $y = x^3 \cdot \tan x \cdot \ln x.$ |

解

(1)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{x'(3x^2 + 5x - 2) - x(3x^2 + 5x - 2)'}{(3x^2 + 5x - 2)^2} \\
 &= \frac{(3x^2 + 5x - 2) - (6x^2 + 5x)}{(3x^2 + 5x - 2)^2} = -\frac{3x^2 + 2}{(3x^2 + 5x - 2)^2}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 y' &= \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)' \\
 &= \frac{(2 \sin x \cos x) \cos x - \sin^2 x (-\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} \\
 &= \frac{\sin x (1 + \cos^2 x)}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
y' &= (x^2)' \log_3 x + x^2 (\log_3 x)' \\
&= 2x \log_3 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 3} \\
&= 2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3}
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(x)'(1 - \cos x) - x(1 - \cos x)'}{(1 - \cos x)^2} \\
&= \frac{1 \cdot (1 - \cos x) - x(\sin x)}{(1 - \cos x)^2} \\
&= \frac{1 - \cos x - x \sin x}{(1 - \cos x)^2}
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{(1 + \ln x)'(x^2 + 1) - (1 + \ln x)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{x}(x^2 + 1) - (1 + \ln x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{x + \frac{1}{x} - 2x - 2x \ln x}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{1 - x^2 - 2x^2 \ln x}{x(x^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{[(1 + x^2) \ln x]'(\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} \\
&= \frac{[(1 + x^2)' \ln x + (1 + x^2)(\ln x)'](\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
&= \frac{[2x \ln x + (1 + x^2)\frac{1}{x}](\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
&= \frac{(2x \ln x + x + \frac{1}{x})(\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
&= \frac{\left(x + \frac{1}{x} + (x + 1)^2 \ln x\right) \sin x + \left(x + \frac{1}{x} - (x - 1)^2 \ln x\right) \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
y' &= (x^2 + 1)'(3x - 1)(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)'(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)(1 - x^3)' \\
&= 2x(3x - 1)(1 - x^3) + (x^2 + 1)3(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)(-3x^2) \\
&= -18x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 2x + 3
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
y' &= (x^3)'(\tan x \cdot \ln x) + x^3(\tan x)' \ln x + x^3 \tan x (\ln x)' \\
&= (3x^2)(\tan x \ln x) + (x^3)(\sec^2 x)(\ln x) + (x^3 \tan x) \left(\frac{1}{x} \right) \\
&= 3x^2 \tan x \ln x + x^3 \sec^2 x \ln x + x^2 \tan x \\
&= x^2(3 \tan x \ln x + x \sec^2 x \ln x + \tan x)
\end{aligned}$$

习题 3.1.7 求下列函数的导数:

(1) $y = x\sqrt{1-x^2};$

(2) $y = \sqrt{1+\ln^2 x};$

(3) $y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}};$

(4) $y = (\sin x + \cos x)^3;$

(5) $y = (\sin x^3)^3;$

(6) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$

(7) $y = \sin[\sin(\sin x)];$

(8) $y = \sin[\cos^5(\arctan x^3)];$

(9) $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^3;$

(10) $y = x\sqrt{1+x^2} \sin x;$

(11) $y = e^{\sqrt{x^2+1}};$

(12) $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)];$

(13) $y = x^{x^x} + x^x + x^{2^x};$

(14) $y = (\ln x)^x;$

(15) $y = (\tan x)^{\cot x};$

(16) $y = 10^x \cdot (\sin x)^{\cos x};$

(17) $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^3(x+4)^{1/2}};$

(18) $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}.$

解

(1)

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

(2)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}} (\ln^2 x)' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}} 2 \ln x (\ln x)' = \frac{2 \ln x}{x \sqrt{1+\ln^2 x}}.$$

(3)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right)' = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+4x+2}} = \sqrt{\frac{1}{-2x^2+2x+1}}.$$

(4)

$$y' = 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x) = 3(1 + \cos 2x)(\cos x - \sin x).$$

(5)

$$y' = 3(\sin x^3)^2 (\sin x^3)' = 3(\sin x^3)^2 (\cos x^3) 3x^2.$$

(6)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left(x + \sqrt{x+\sqrt{x}} \right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} (x+\sqrt{x})' \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right) \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} y' &= \cos[\sin(\sin x)] (\sin(\sin x))' \\ &= \cos[\sin(\sin x)] \cos(\sin x) (\sin x)' \\ &= \cos[\sin(\sin x)] \cos(\sin x) \cos x \end{aligned}$$

(8) 令 $u = \arctan x^3$, 则 $v = \cos^5 u$, 则 $y = \sin v$, 则

$$\begin{aligned} y' &= \cos v \cdot v' = \cos v \cdot (-5 \sin^4 u \cdot \cos u) u' \\ &= -5 \cos \cos^5(\arctan x^3) \sin^4(\arctan x^3) \cdot \cos(\arctan x^3) \cdot \frac{3x^2}{1+x^6}. \end{aligned}$$

(9)

$$y' = \frac{12x^5 - 24x^3 + 12x}{(x^2 + 1)^3}.$$

(10)

$$y' = \frac{x \sin x + \cos x (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(11)

$$y' = e^{\sqrt{x^2+1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(12) 令 $u = \ln^3 x$, 则 $v = \ln^2 u$, 则 $y = \ln v$, 则

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{v} \cdot v' = \frac{1}{v} \cdot 2 \ln u \cdot \frac{1}{u} u' \\ &= \frac{2 \ln(\ln^3 x)}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot \frac{3 \ln^2 x}{x} = \frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)}. \end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
y' &= (\mathrm{e}^{x^x \ln x} + \mathrm{e}^{x \ln x} + \mathrm{e}^{2^x \ln x})' \\
&= (\mathrm{e}^{x \ln x} \ln x)' \mathrm{e}^{x^x \ln x} + (x \ln x)' \mathrm{e}^{x \ln x} + (2^x \ln x)' \mathrm{e}^{2^x \ln x} \\
&= \left((1 + \ln x) \mathrm{e}^{x \ln x} + \frac{1}{x} x^x \right) \mathrm{e}^{x^x \ln x} + (1 + \ln x) \mathrm{e}^{x \ln x} + \left(2^x \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 \ln x \right) \mathrm{e}^{2^x \ln x} \\
&= x^{x^x} (x^{x-1} + \ln x (\ln x + 1) x^x) + x^x (\ln x + 1) + x^{2^x} \left(2^x \frac{1}{x} + \ln x \cdot 2^x \ln 2 \right)
\end{aligned}$$

(14)

$$y' = \frac{(\ln x)^{x+1} \ln(\ln x) + \ln(\ln x)}{\ln x}.$$

(15)

$$y' = (\tan x)^{\cot x} \csc^2(1 - \ln(\tan x))$$

(16) 设 $y = \mathrm{e}^{2 \ln(x+5) + \frac{1}{3} \ln(x-4) - 5 \ln(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x+4)} := \mathrm{e}^u$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{(x+5)^2 (x-4)^{1/3}}{(x+2)^5 (x+4)^{1/2}} \left(2 \frac{1}{x+5} + \frac{1}{3} \frac{1}{x-4} - 5 \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+4} \right).
\end{aligned}$$

(17)

$$y' = 10^x \ln 10 \cdot (\sin x)^{\cos x} - 10^x \ln(\sin x) (\sin x)^{\cos x + 1} + 10^x \cos^2 x (\sin x)^{\cos x - 1}.$$

(18) 设 $y = \mathrm{e}^{\ln(1-\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)} := \mathrm{e}^u$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 - \sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1 + \sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \\
&= \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \\
&= \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2} \right)
\end{aligned}$$

习题 3.1.8 设 $f(x) = x^3$. 求 $f'(x^2)$ 与 $[f(x^2)]'$.

解

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x^2) = 3(x^2)^2 = 3x^4,$$

$$[f(x^2)]' = [(x^3)^2]' = (x^6)' = 6x^5.$$

习题 3.1.9 设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$. 求 $f'[g(x)]$, $[f(g(x))]'$.

解

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'[g(x)] = \frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+1}}}},$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}})^2}} \cdot \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{(x^2+1)(1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+1}})}}.$$

习题 3.1.10 设 $f(x)$ 处处可导. 求 $\frac{dy}{dx}$:

- | | |
|----------------------------------|---|
| (1) $y = f(x^3);$ | (2) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x);$ |
| (3) $y = f(\mathrm{e}^x + x^e);$ | (4) $y = \sin[f(\sin f(x))];$ |
| (5) $y = f[f(f(x + \cos x))];$ | (6) $y = f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}.$ |

解

(1) 令 $u = x^3$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot (3x^2) = 3x^2 f'(x^3).$$

(2) 令 $u = \sin^2 x, v = \cos^2 x$, 则 $y = f(u) + f(v)$. 由链式法则:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f(u) + \frac{d}{dx} f(v) \\ &= \frac{df}{du} \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \frac{dv}{dx} \\ &= f'(u) \cdot (2 \sin x \cos x) + f'(v) \cdot (2 \cos x (-\sin x)) \\ &= f'(\sin^2 x) \sin(2x) - f'(\cos^2 x) \sin(2x) \\ &= [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)] \sin(2x). \end{aligned}$$

(3) 令 $u = \mathrm{e}^x + x^e$, 则 $y = f(u)$. 根据链式法则,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot (\mathrm{e}^x + ex^{e-1}) = (\mathrm{e}^x + ex^{e-1})f'(\mathrm{e}^x + x^e).$$

(4) 这是一个多次复合的函数. 反复应用链式法则:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \sin[f(\sin f(x))] \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot \frac{d}{dx} f(\sin f(x)) \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot f'(\sin f(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\sin f(x)) \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot f'(\sin f(x)) \cdot \cos(f(x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x) \\ &= f'(x) \cos(f(x)) f'(\sin f(x)) \cos[f(\sin f(x))]. \end{aligned}$$

(5) 同样, 多次应用链式法则:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f[f(f(x + \cos x))] \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot \frac{d}{dx} f(f(x + \cos x)) \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot f'(f(x + \cos x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x + \cos x) \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot f'(f(x + \cos x)) \cdot f'(x + \cos x) \cdot \frac{d}{dx}(x + \cos x) \\
 &= (1 - \sin x)f'(x + \cos x)f'(f(x + \cos x))f'[f(f(x + \cos x))].
 \end{aligned}$$

(6) 令 $u = f(e^x)$ 且 $v = e^{f(x)}$, 则 $y = uv$. 根据乘法法则 $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$. 分别计算:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} f(e^x) = f'(e^x) \cdot (e^x)' = e^x f'(e^x). \\
 \frac{dv}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x).
 \end{aligned}$$

将它们代入乘法法则:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= (e^x f'(e^x)) \cdot e^{f(x)} + f(e^x) \cdot (e^{f(x)} f'(x)) \\
 &= e^{f(x)}[e^x f'(e^x) + f(e^x) f'(x)].
 \end{aligned}$$

习题 3.1.11 求下列函数的导数:

$$(1) \quad y = \begin{cases} \frac{x e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad (2) \quad y = |1 - 2x| \sin x.$$

解

(1) 对于 $x \neq 0$,

$$y' = \frac{e^{1/x} (1 - 1/x + e^{1/x})}{(1 + e^{1/x})^2}$$

对于 $x = 0$,

$$y'_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{he^{1/h}}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-1/h} + 1} = 1, \quad y'_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{he^{1/h}}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/h}}{e^{1/h} + 1} = 0$$

因此

$$y' = \begin{cases} \frac{e^{1/x} (1 - 1/x + e^{1/x})}{(1 + e^{1/x})^2} & x \neq 0 \\ \text{不存在} & x = 0 \end{cases}$$

(2) (a) $(1 - 2x) > 0$ 时, $x < \frac{1}{2}$, $y' = ((1 - 2x) \sin x)' = -2 \sin x + (1 - 2x) \cos x$.

(b) $(1 - 2x) < 0$ 时, $x > \frac{1}{2}$, $y' = ((2x - 1) \sin x)' = 2 \sin x + (2x - 1) \cos x$.

(c) $(1 - 2x) = 0$ 时, $y'_+ = 2 \sin \frac{1}{2} \neq y'_- = -2 \sin \frac{1}{2}$.

综上所述,

$$y' = \begin{cases} 2 \sin x + (2x - 1) \cos x & x > \frac{1}{2} \\ -2 \sin x + (1 - 2x) \cos x & x < \frac{1}{2} \\ \text{不存在} & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

习题 3.1.12 设 n 为正整数, 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 证明:

- (1) 当 $n = 1$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不可导;
- (2) 当 $n = 2$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 但导函数在 $x = 0$ 处不连续 (事实上, 在这一点有第二类间断);
- (3) 当 $n \geq 3$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且导函数在 $x = 0$ 处连续.

解

- (1) 当 $n = 1$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{h},$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{h},$$

显然, $f'_+(0)$ 与 $f'_-(0)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不可导.

- (2) 当 $n = 2$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$. 对于 $x \neq 0$,

$$f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x})' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$$

不存在, 故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

- (3) 当 $n \geq 3$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$. 对于 $x \neq 0$,

$$f'(x) = (x^n \sin \frac{1}{x})' = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} + x^n \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}) = 0,$$

故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

习题 3.1.13 证明: 函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上处处可导, 但导函数在這個区间上无界.

解 对于 $x \neq 0$,

$$f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x^2})' = 2x \sin \frac{1}{x^2} + x^2 \left(-\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

对于 $x = 0$,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sin \frac{1}{h^2} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h \sin \frac{1}{h^2} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$. 综上所述, $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上处处可导. 而对于 $x = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$),

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sin(n\pi) - 2\sqrt{n\pi} \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} 2\sqrt{n\pi},$$

显然, 当 n 趋近于无穷大时, $\left|f'\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)\right|$ 趋近于无穷大, 故导函数在区间 $[-1, 1]$ 上无界.

习题 3.1.14 求下列函数的反函数的微商.

$$(1) y = xe^x;$$

$$(2) y = \arctan \frac{1}{x};$$

$$(3) y = 2x^3 - e^{-2x};$$

$$(4) y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}).$$

按照反函数求导定理, 我们应该写成这样:

$$(f^{-1})'(y) \stackrel{y=xe^x}{=} \frac{1}{f'(x)}$$

但是考虑到初学者对反函数求导的理解有点困难, 容易把自己绕晕. 我们给出几种推荐且合理的过程, 这几种过程几乎是等价的:

解

(1) 将 x 看成 y 的函数并在方程两边对 y 求导

$$1 = x'e^x + xx'e^x \Rightarrow x' = \frac{e^{-x}}{1+x}.$$

注 对于由方程 $\varphi(x, y) = 0$ 给出的反函数或隐函数, 只要认准了一个变量是另一个变量的函数, 在方程两边直接对自变量求导即可. 有关详细内容将在第二册中介绍.

(2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -(1 + x^2)$$

注 这种写法与反函数求导定理的意义是最贴近的, 但是避免了使用重复的符号, 因此看起来清晰一点.

(3)

$$dy = 2d(x^3) - d(e^{-2x}) = 6x^2 dx + 2e^{-2x} dx \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{6x^2 + 2e^{-2x}}.$$

注 这在利用 3.2 节中微分的知识: 若 $y(x)$ 可微且能表示为 $dx = A dy$, 那么 $A = x'(y)$.

(4)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}} \left(e^x + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \cdot 2e^{2x} \right) \\ &= \frac{e^{2x} + e^x \sqrt{1 + e^{2x}}}{(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})\sqrt{1 + e^{2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}. \end{aligned}$$

则

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\sqrt{1 + e^{2x}}}{e^x}.$$

习题 3.1.15 证明: 可导的偶函数的导数为奇函数; 而可导的奇函数的导数为偶函数.

解 设 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x) = f(x)$, 则

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

则 $f'(x)$ 为奇函数.

设 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$, 则

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) + f(x)}{h} = f'(x),$$

则 $f'(x)$ 为偶函数.

习题 3.1.16 证明: 可导的周期函数的导数仍是周期函数.

解 设 $f(x)$ 为周期为 T 的函数, 则 $f(x+T) = f(x)$, 则 $f'(x+T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$, 则 $f'(x)$ 为周期为 T 的函数.

习题 3.1.17 求下列各式之和:

$$(1) P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1};$$

$$(2) Q_n = 1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \cdots + n^2 x^{n-1};$$

$$(3) R_n = \cos 1 + 2 \cos 2 + \cdots + n \cos n.$$

解

$$(1) \text{ 令 } A(x) = x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}, \text{ 则 } P_n = A'(x) = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.$$

$$(2) Q_n = (xA'(x))' = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

$$(3) \text{ 令 } B(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

$$\text{则 } B'(x) = \frac{(-\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + (n+\frac{1}{2}) \sin(n+\frac{1}{2})x) 2 \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} (\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x)}{(2 \sin \frac{x}{2})^2}$$

$$\text{则 } R_n = B'(1) = \frac{(-\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} + (n+\frac{1}{2}) \sin(n+\frac{1}{2})) 2 \sin \frac{1}{2} - \cos \frac{1}{2} (\cos \frac{1}{2} - \cos(n+\frac{1}{2}))}{(2 \sin \frac{1}{2})^2}.$$

习题 3.1.18 求下列函数的二阶导数:

$$(1) y = e^{-x^2};$$

$$(2) y = x^2 2^{2x};$$

$$(3) y = (1+x^2) \arctan x;$$

$$(4) y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

解

(1)

$$y' = -2x e^{-x^2}, \quad y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

(2)

$$y' = 2x 2^{2x} (1 + 2 \ln 2), \quad y'' = 4x 2^{2x} (\ln 2)^2 + 4(1 + \ln 2) 2^{2x}.$$

(3)

$$y' = 1 + 2x \arctan x, \quad y'' = 2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

(4) 当 $y > 0$ 时, $y' = 2x$; 当 $y < 0$ 时, $y' = -2x$; 当 $y = 0$ 时,

$$y'_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = 0 = y'_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - 0}{h} = 0$$

故 $y'(0) = 0$ 存在.

当 $y > 0$ 时, $y'' = 2$; 当 $y < 0$ 时, $y'' = -2$; 当 $y = 0$ 时,

$$y''_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h - 0}{h} = 2 \neq y''_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h - 0}{h} = -2$$

故 $y''(0)$ 不存在.

习题 3.1.19 设函数 $f(x)$ 处处有三阶导数, 求 y'', y''' .

$$(1) y = f(x^2);$$

$$(2) y = f(e^x + x).$$

解

(1)

$$y' = f'(x^2) \cdot 2x, \quad y'' = f''(x^2) \cdot (2x)^2 + f'(x^2) \cdot 2, \quad y''' = f'''(x^2) \cdot (2x)^3 + 3f''(x^2) \cdot (2x) \cdot 2.$$

(2)

$$y' = f'(\mathrm{e}^x + x) \cdot (\mathrm{e}^x + 1), \quad y'' = f''(\mathrm{e}^x + x) \cdot (\mathrm{e}^x + 1)^2 + f'(\mathrm{e}^x + x) \cdot \mathrm{e}^x,$$

$$y''' = f'''(\mathrm{e}^x + x) \cdot (\mathrm{e}^x + 1)^3 + 3f''(\mathrm{e}^x + x) \cdot (\mathrm{e}^x + 1) \cdot \mathrm{e}^x + f'(\mathrm{e}^x + x) \cdot \mathrm{e}^x.$$

习题 3.1.20 设 $f(x) = x^n|x|$ (n 为正整数), 证明 $f^{(n)}(0)$ 存在, 但 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

解

(1) 当 $k \leq n$ 时当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^{n+1}$, 则 $f^{(k)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} x^{n+1-k} = A_{n+1}^k x^{n+1-k}$;

当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x^{n+1}$, 则 $f^{(k)}(x) = -\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} x^{n+1-k} = -A_{n+1}^k x^{n+1-k}$;

当 $x = 0$ 时,

$$f_+^{(k)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A_{n+1}^{k-1} h^{n+2-k} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} A_{n+1}^{k-1} h^{n+1-k} = 0$$

$$f_-^{(k)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-A_{n+1}^{k-1} h^{n+2-k} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} -A_{n+1}^{k-1} h^{n+1-k} = 0$$

$f_+^{(n)}(0) = f_-^{(n)}(0)$, 故 $f^{(n)}(0) = 0$ 存在.

(2) 当 $x > 0$ 时, $f^{(n)}(x) = (n+1)!x$, 则 $f^{(n+1)}(x) = (n+1)!$; 当 $x < 0$ 时, $f^{(n)}(x) = (-1)(n+1)!x$,

则 $f^{(n+1)}(x) = (-1)(n+1)!$; 当 $x = 0$ 时,

$$f_+^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(n+1)!h - 0}{h} = (n+1)!$$

$$f_-^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-1)(n+1)!h - 0}{h} = (-1)(n+1)!$$

$f_+^{(n+1)}(0) \neq f_-^{(n+1)}(0)$, 故 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

习题 3.1.21 证明: 如果 x_0 是多项式 $P_n(x)$ 的 r 重根, 即 $P_n(x)$ 可以分解成

$$P_n(x) = (x - x_0)^r Q_{n-r}(x),$$

其中 $Q_{n-r}(x)$ 是一个 $n - r$ 次多项式, 且 $Q_{n-r}(x_0) \neq 0$. 则 $P_n(x)$ 满足条件

$$P_n(x_0) = 0, \quad P'_n(x_0) = 0, \quad \dots, \quad P_n^{(r-1)}(x_0) = 0, \quad P_n^{(r)}(x_0) \neq 0.$$

解 由题意, $P_n(x) = (x - x_0)^r Q_{n-r}(x)$, 则

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [(x - x_0)^r]^{(i)} \cdot Q_{n-r}^{(k-i)}(x).$$

(a) 当 $k < r$ 时, $[(x - x_0)^r]^{(i)} = 0$, 则 $P_n^{(k)}(x_0) = 0$.

(b) 当 $k = r$ 时, $[(x - x_0)^r]^{(r)} = r!$, 则 $P_n^{(r)}(x_0) = r! Q_{n-r}(x_0) \neq 0$.

习题 3.1.22 求下列函数的高阶导数:

$$(1) (x^2 e^x)^{(n)};$$

$$(2) [(x^2 + 1) \sin x]^{(n)};$$

$$(3) \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)^{(n)};$$

$$(4) (\sin x \cdot \cos x)^{(n)}.$$

我们将会直接使用如下结论:

$$(1) (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), (\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2});$$

$$(2) (e^x)^{(n)} = e^x, (a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x;$$

$$(3) \left(\frac{1}{x+a} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}};$$

$$(4) (\ln(x+a))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n};$$

$$(5) (x^m)^{(n)} = \begin{cases} 0 & n < m; \\ n! & n = m; \\ n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} & n > m. \end{cases}$$

解

(1) 由莱布尼兹公式,

$$(x^2 e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{\min\{2,n\}} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} e^x.$$

$$(a) \text{ 当 } n = 1 \text{ 时}, (x^2 e^x)^{(1)} = (x^2)^{(0)} e^x + (x^2)^{(1)} e^x = (x^2 + 2x) e^x;$$

$$(b) \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时}, (x^2 e^x)^{(n)} = (x^2)^{(0)} e^x + n(x^2)^{(1)} e^x + \binom{n}{2} (x^2)^{(2)} e^x = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x.$$

(2) 由莱布尼兹公式,

$$[(x^2 + 1) \sin x]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2 + 1)^{(k)} (\sin x)^{(n-k)}.$$

$$(a) \text{ 当 } n = 1 \text{ 时}, [(x^2 + 1) \sin x]^{(1)} = (x^2 + 1)^{(0)} \sin(x + \frac{\pi}{2}) + (x^2 + 1)^{(1)} \sin x = (x^2 + 1) \cos x + 2x \sin x;$$

(b) 当 $n \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} [(x^2 + 1) \sin x]^{(n)} &= (x^2 + 1)^{(0)} \sin(x + \frac{n\pi}{2}) + n(x^2 + 1)^{(1)} \sin(x + \frac{(n-1)\pi}{2}) \\ &\quad + \binom{n}{2} (x^2 + 1)^{(2)} \sin(x + \frac{(n-2)\pi}{2}) \\ &= (x^2 + 1) \sin(x + \frac{n\pi}{2}) + 2nx \sin(x + \frac{(n-1)\pi}{2}) \\ &\quad + n(n-1) \sin(x + \frac{(n-2)\pi}{2}) \\ &= (x^2 + n(n-1) + 1) \sin(x + \frac{n\pi}{2}) + 2nx \sin(x + \frac{(n-1)\pi}{2}) \end{aligned}$$

(3) 由莱布尼兹公式,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)^{(n)} &= \left(\frac{1}{(x-1)(x-2)} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{x-1} \right)^{(k)} \left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{(x-2)^{n-k+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)(x-2)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x-1)^k (x-2)^{n-k}} \end{aligned}$$

(4)

$$(\sin x \cdot \cos x)^{(n)} = \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^{(n)} = 2^{n-1} \sin \left(2x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

习题 3.1.23 求曲线 $y = \cos x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

解 $y' = -\sin x$, 则 $y'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

或

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

习题 3.1.24 证明: 双曲线 $xy = 1$ 上任一点处的切线, 与两坐标轴构成的三角形的面积为定值.

解 对 $xy = 1$ 两侧对 x 求导, $y' = -\frac{y}{x}$, 设切点为 (x_0, y_0) , 则切线方程为

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

即

$$y = -\frac{y_0}{x_0}x + 2y_0.$$

切线与 x 轴交点为 $(2x_0, 0)$, 与 y 轴交点为 $(0, 2y_0)$, 则三角形面积为

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot 2y_0 = 2x_0 y_0 = 2.$$

习题 3.1.25 有一底半径为 r cm, 高为 h cm 的正圆锥形容器, 现以 a cm³/s 的速度自顶部向其内注水, 求水面上升的速度.

解 设水面高度为 x cm, 则水面半径为 $\frac{r}{h}x$ cm, 则水体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{r}{h}x \right)^2 x = \frac{\pi r^2}{3h^2} x^3.$$

则

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2 \frac{dx}{dt}.$$

由题意, $\frac{dV}{dt} = a$, 则

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ah^2}{\pi r^2 x^2}.$$

习题 3.1.26 水自高为 18 cm, 底半径为 6 cm 的圆锥形漏斗流入直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 已知水在漏斗中深度为 12 cm 时水平面下降的速率为 1 cm/min. 试求圆柱形筒中水面上升的速度.

解 设漏斗中水深为 x cm, 则漏斗中水体积为

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{6}{18}x\right)^2 x = \frac{\pi}{27}x^3.$$

则

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\pi}{9}x^2 \frac{dx}{dt}.$$

由题意, $\frac{dx}{dt} = -1$ cm/min, 当 $x = 12$ cm 时,

$$\frac{dV_1}{dt} = -16\pi \text{ cm}^3/\text{min}.$$

设圆柱形筒中水深为 y cm, 则圆柱形筒中水体积为

$$V_2 = \pi 5^2 y = 25\pi y.$$

则

$$\frac{dV_2}{dt} = 25\pi \frac{dy}{dt}.$$

由题意, $-\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt}$, 则

$$-(-16\pi) = 25\pi \frac{dy}{dt},$$

即

$$\frac{dy}{dt} = \frac{16}{25} \text{ cm/min}.$$

习题 3.2

习题 3.2.1 设 $y = x^2 + x$, 计算在 $x = 1$ 处, 当 $\Delta x = 10, 1, 0.1, 0.01$ 时, 相应的函数的改变量 Δy 和函数的微分 dy , 并观察差 $\Delta y - dy$ 随 Δx 减小的变化情况.

解

(1) 当 $\Delta x = 10$ 时,

$$\Delta y = f(11) - f(1) = 130, dy = f'(1) dx = 3 \times 10 = 30, \Delta y - dy = 100.$$

(2) 当 $\Delta x = 1$ 时,

$$\Delta y = f(2) - f(1) = 4, dy = f'(1) dx = 3 \times 1 = 3, \Delta y - dy = 1.$$

(3) 当 $\Delta x = 0.1$ 时,

$$\Delta y = f(1.1) - f(1) = 0.31, dy = f'(1) dx = 3 \times 0.1 = 0.3, \Delta y - dy = 0.01.$$

(4) 当 $\Delta x = 0.01$ 时,

$$\Delta y = f(1.01) - f(1) = 0.0301, dy = f'(1) dx = 3 \times 0.01 = 0.03, \Delta y - dy = 0.0001.$$

从中不难看出, 随着 Δx 的减小, $\Delta y - dy$ 也在减小, 且大体上 $\Delta y - dy$ 趋于 0.

习题 3.2.2 求下列函数的微分:

$$(1) y = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right);$$

$$(2) y = \sin x - x \cos x;$$

$$(3) y = \arccos \frac{1}{|x|};$$

$$(4) y = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|;$$

$$(5) y = 5\sqrt[3]{\arctan x^2};$$

$$(6) y = \tan^2(1 + 2x^2);$$

$$(7) y = e^{-x} \cos(3-x);$$

$$(8) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

解

(1)

$$dy = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}} \cdot d\left(-\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{x - 2\pi} dx.$$

(2)

$$dy = d(\sin x) - d(x \cos x) = \cos x dx - (\cos x - x \sin x) dx = x \sin x dx.$$

(3) $x > 0$ 时,

$$dy = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

$x < 0$ 时,

$$dy = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot d\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

因此

$$dy = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx, |x| > 1.$$

(4)

$$dy = d(\ln|x-1| - \ln|x+1|) = \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{x+1} dx = \frac{2}{x^2-1} dx, \quad x \neq \pm 1.$$

(5)

$$dy = 5 \cdot \frac{1}{3} (\arctan x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot d(\arctan x^2) = \frac{10x}{3(1+x^4)(\arctan x^2)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

(6)

$$dy = 2 \tan(1+2x^2) \cdot \sec^2(1+2x^2) \cdot d(1+2x^2) = 8x \tan(1+2x^2) \sec^2(1+2x^2) dx.$$

(7)

$$dy = e^{-x} \cos(3-x) \cdot d(-x) + e^{-x} \cdot d(\cos(3-x)) = e^{-x} (-\cos(3-x) + \sin(3-x)) dx.$$

(8)

$$dy = \frac{(\sqrt{x^2+1}) \cdot d(x) - x \cdot d(\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

习题 3.2.3 对下列函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$(1) \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = \varphi \cos \varphi, \\ y = \varphi \sin \varphi; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = \cos^3 \varphi, \\ y = \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

解

(1) 对 $x = \ln(1+t^2)$, $y = t - \arctan t$ 两边求微分, 得

$$dx = \frac{2t}{1+t^2} dt, \quad dy = \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

(2) 对 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$ 两边求微分, 得

$$dx = (1 - \cos t) dt, \quad dy = \sin t dt,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}}{1-\cos t} = \frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

(3) 对 $x = \varphi \cos \varphi, y = \varphi \sin \varphi$ 两边求微分, 得

$$dx = (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) d\varphi, \quad dy = (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) d\varphi,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \Big/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi + \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi - \varphi \sin \varphi}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big/ \frac{dx}{d\varphi} \\ &= \frac{(\cos \varphi + \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)(-\sin \varphi - \sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}{(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)^2} \\ &= \frac{\varphi^2 + 2}{(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)^3} \end{aligned}$$

(4) 对 $x = \cos^3 \varphi, y = \sin^3 \varphi$ 两边求微分, 得

$$dx = -3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi, \quad dy = 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \Big/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{3 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{-3 \cos^2 \varphi \sin \varphi} = -\tan \varphi.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dy}{dx} \right) \Big/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{-\sec^2 \varphi}{-3 \cos^2 \varphi \sin \varphi} = \frac{1}{3 \cos^4 \varphi \sin \varphi}.$$

习题 3.2.4 求下列曲线在已知点处的切线方程.

$$(1) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases} \quad \text{在 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 处;}$$

$$(2) \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^2}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{在 } t = 2 \text{ 处.}$$

解

(1) 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 处,

$$x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t,$$

所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1.$$

切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

即

$$x + y - \sqrt{2} = 0.$$

(2) 在 $t = 2$ 处,

$$x = \frac{3 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{6}{5}, \quad y = \frac{3 \times 2^2}{1 + 2^2} = \frac{12}{5}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{6t}{(1+t^2)^2}}{\frac{3(1-t^2)}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = -\frac{4}{3}.$$

切线方程为

$$y - \frac{12}{5} = -\frac{4}{3} \left(x - \frac{6}{5} \right),$$

即

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

习题 3.3

习题 3.3.1 设 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 确定方程 $f'(x) = 0$ 的实根的个数, 并指出根所在的区间.

解 $f'(x)$ 为三次多项式, 故 $f'(x) = 0$ 最多有三个实根. 又 $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$, 由 Rolle 定理, 在 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 内分别各至少有一点 ξ_1, ξ_2, ξ_3 , 使得 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$, 显然该三点互不相同. 因此 $f'(x) = 0$ 有且仅有三个实根, 分别在 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 内.

习题 3.3.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 2]$ 上有二阶微商, 且 $f(1) = f(2) = 0$. 记 $F(x) = (x-1)^2 f(x)$, 则在区间 $(1, 2)$ 内至少有一点 ξ , 使得 $F''(\xi) = 0$.

解 由 $f(1) = f(2) = 0 \Rightarrow F(1) = F(2) = 0$. 由 Rolle 定理, 在 $(1, 2)$ 内至少有一点 ξ_1 , 使得 $F'(\xi_1) = 0$. 又 $F'(1) = 2(1-1)f(1) + (1-1)^2 f'(1) = 0$. 由 Rolle 定理, 在 $(1, \xi_1)$ 内至少有一点 ξ , 使得 $F''(\xi) = 0$.

习题 3.3.3 举例说明, 中值定理的下述意义的逆不成立: 设 $\xi \in (a, b)$ 是指定的一点, 则存在 $c, d \in [a, b]$, 使得 $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$. (提示: 考虑函数 $f(x) = x^3, \xi = 0$.)

解 设 $f(x) = x^3, \xi = 0$, 则 $f'(\xi) = f'(0) = 0$. 若存在 $c, d \in [-1, 1]$, 使得 $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$, 则有

$$\frac{c^3 - d^3}{c - d} = 0 \Rightarrow c^2 + cd + d^2 = 0 \Rightarrow c = d = 0.$$

但 c, d 不能相等, 故不存在 $c, d \in [-1, 1]$, 使得 $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$.

习题 3.3.4 证明下列不等式:

(1) 当 $a > b > 0, n > 1$ 时, 有 $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$;

(2) 当 $x > 0$ 时, 有 $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$;

(3) 当 $0 < a < b$ 时, 有 $(a+b)\ln\frac{a+b}{2} < a\ln a + b\ln b$.

(4) 当 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\frac{\beta-\alpha}{\cos^2 \alpha} < \tan \beta - \tan \alpha < \frac{\beta-\alpha}{\cos^2 \beta}$.

解

(1) 设 $f(x) = x^n$, 则 $f'(x) = nx^{n-1}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 (b, a) 内至少有一点 ξ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

又 $a > \xi > b > 0, f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 故 $nb^{n-1} < f'(\xi) < na^{n-1}$, 于是

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$

(2) 设 $f(x) = \ln(1+x)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 $(0, x)$ 内至少有一点 ξ , 使

得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

又 $x > \xi > 0, f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 故 $\frac{1}{1+x} < f'(\xi) < 1$, 于是

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

(3) 设 $f(x) = x \ln x$, 则 $f'(x) = \ln x + 1$. 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right), \eta \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{(a+b)\ln\frac{a+b}{2} - 2a\ln a}{b-a}$$

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{a+b}{2}} = \frac{2b\ln b - (a+b)\ln\frac{a+b}{2}}{b-a}$$

又 $a < \xi < \eta < b, f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 故 $f'(\xi) < f'(\eta)$, 于是

$$(a+b)\ln\frac{a+b}{2} < a\ln a + b\ln b.$$

(4) 设 $f(x) = \tan x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 (α, β) 内至少有一点 ξ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\beta - \alpha}$$

又 $\beta > \xi > \alpha > 0, f'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内单调递增, 故 $\frac{1}{\cos^2 \alpha} < f'(\xi) < \frac{1}{\cos^2 \beta}$, 于是

$$\frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \alpha} < \tan \beta - \tan \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \beta}.$$

习题 3.3.5 证明下列恒等式:

$$(1) \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(2) \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

解

$$(1) \text{设 } f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ 则}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{(1+x^2)-x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 0.$$

又 $f(0) = 0$, 故 $f(x) = 0$, 即 $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) 设 $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x}$, 则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+(\frac{1-x}{1+x})^2} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = 0. \quad (x \neq -1)$$

$$\text{又 } g(0) = \frac{\pi}{4}, g(-2) = -\frac{3\pi}{4}, \text{ 故 } g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

这道题使用了引理:

引理 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且在 I 内部可导. 若 $f'(x) = 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在 I 上恒为常数.

证明 设 $x_1, x_2 \in I$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1).$$

因此 $f(x)$ 在 I 上恒为常数.

习题 3.3.6 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的可导函数, 对任意 $x \in [0, 1]$ 有 $f(x) \in (0, 1)$; 并且对每个 x , $f'(x) \neq 1$. 证明在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x , 使 $f(x) = x$.

解 先证明存在性: 设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(0) = f(0) > 0$, $g(1) = f(1) - 1 < 0$. 由介值定理, 在 $(0, 1)$ 内至少有一点 ξ , 使得 $g(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = \xi$.

反证法证明唯一性: 假设在 $(0, 1)$ 内有两点 ξ_1, ξ_2 , 使得 $f(\xi_1) = \xi_1, f(\xi_2) = \xi_2$, 则 $g(\xi_1) = g(\xi_2) = 0$. 由 Rolle 定理, 在 (ξ_1, ξ_2) 内至少有一点 η , 使得 $g'(\eta) = 0$, 即 $f'(\eta) - 1 = 0$, 与 $f'(x) \neq 1$ 矛盾. 因此在 $(0, 1)$ 内有且仅有一个 x , 使 $f(x) = x$.

习题 3.3.7 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $|f'(x)| < 1$, 又 $f(0) = f(1)$. 证明: 对于 $[0, 1]$ 上的任意两点 x_1, x_2 , 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$.

解 对于 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3$ s.t. $0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \xi_3 < 1$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f'(\xi_3) = \frac{f(1) - f(x_2)}{1 - x_2}.$$

因此

$$|f(x_1) - f(0)| = |f'(\xi_1)|x_1 < x_1,$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi_2)|(x_2 - x_1) < x_2 - x_1,$$

$$|f(1) - f(x_2)| = |f'(\xi_3)|(1 - x_2) < 1 - x_2.$$

于是

$$\begin{aligned} 2|f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_2) - f(x_1)| + |f(1) - f(x_2) + f(x_1) - f(0)| \\ &\leq |f(x_2) - f(x_1)| + |f(1) - f(x_2)| + |f(x_1) - f(0)| \\ &< (x_2 - x_1) + (1 - x_2) + x_1 = 1. \end{aligned}$$

故 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$.

习题 3.3.8 若 $f(x)$ 处处可导, 且 $f'(x) = f(x)$. 证明 $f(x) = Ce^x, C$ 为任意常数.

解 设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x f(x) - e^x f(x)}{(e^x)^2} = 0.$$

因此 $g(x) \equiv g(0) \Rightarrow f(x) = f(0)e^x$. 设 $C = f(0)$.

习题 3.3.9 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$. 证明在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) > 0$.

解 由于 $f(x)$ 不为常函数, 故存在 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) \neq f(a)$.

$$(1) \text{ 若 } f(x_0) > f(a), \text{ 则 } \exists \xi \in (a, x_0), \text{ 使得 } f(\xi) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0.$$

$$(2) \text{ 若 } f(x_0) < f(a) = f(b), \text{ 则 } \exists \eta \in (x_0, b), \text{ 使得 } f(\eta) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} > 0.$$

习题 3.3.10 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可微, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. 证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

解

(1) 由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi_x \in (x, x+1)$, 使得

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x).$$

又 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$.

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon, \exists X > 0$, s.t. $\forall x > X, |f'(x)| < \varepsilon$. 设 $x > X$, 则由 Lagrange 中值定理, $\exists \eta \in (X, x)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x) - f(X)}{x - X} \Rightarrow f(x) = f'(\eta)(x - X) + f(X).$$

因此

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| = \left| f'(\eta) \left(1 - \frac{X}{x} \right) + \frac{f(X)}{x} \right| \leq |f'(\eta)| \left| 1 - \frac{X}{x} \right| + \left| \frac{f(X)}{x} \right| < \varepsilon + \left| \frac{f(X)}{x} \right|.$$

也就是说, 当 $x > \max \left\{ X, \frac{|f(X)|}{\varepsilon} \right\}$ 时, $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < 2\varepsilon$. 因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

习题 3.3.11 证明: 若函数 $f(x)$ 在(有限)开区间 (a, b) 内有有界的导函数, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内也有界. 如果有限区间 (a, b) 改为无穷区间, 结论还成立吗? 命题的逆命题是否成立?

解 $f(x)$ 在 (a, b) 内可导, 故在 (a, b) 连续. 不妨设 $\forall x \in (a, b), f'(x) \leq M$, 同时取 $c = \frac{a+b}{2}$, 则

$$\forall x \in (a, b) \setminus \{c\}, \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| = |f'(\xi)| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq |f(c)| + M|b - a|$$

显然对于 $c, |f(c)| \leq |f(c)| + M|b - a|$ 也成立, 即得 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

将 (a, b) 改为无穷区间, 结论不成立. 考虑 $f(x) = x, f'(x) = 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界, 但 $f(x) = x$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界.

逆命题不成立. 考虑 $f(x) = \sqrt{x}, f(x) = \sqrt{x}$ 在 $(0, 1)$ 上有界, 但 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0, 1)$ 上无界.

习题 3.3.12 设对所有的实数 x, y , 不等式 $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^2$ (M 为常数) 都成立. 证明: $f(x)$ 恒为常数.

解 $\forall x \neq y, 0 \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M|x - y|$. 令 $y \rightarrow x$,

$$\lim_{y \rightarrow x} 0 = \lim_{y \rightarrow x} M|x - y| = 0 \Rightarrow |f'(x)| = \lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

故 $f(x)$ 恒为常数.

习题 3.3.13 设 $f(x)$ 在一个区间 I 上连续, 且(至多)除了有限个点外, $f(x)$ 在 I 内部的导数为正(负), 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增(减). (注意, 在例外的点处, $f(x)$ 可能不可导.)

解 设 $x_1, x_2 \in I$, 不妨设 $x_1 < x_2$. 若 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 内处处可导, 则由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

又 $f'(\xi) > 0 (f'(\xi) < 0)$, 故 $f(x_2) > f(x_1) (f(x_2) < f(x_1))$.

若 $f(x)$ 在 (x_1, x_2) 内有有限个点不可导, 设这些点为 y_1, y_2, \dots, y_n , 则将 (x_1, x_2) 分成 $n+1$ 个子区间 $(x_1, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_n, x_2)$, 在每个子区间内 $f(x)$ 处处可导, 由上面的结论可知, $f(x_1) < f(y_1) < \dots < f(y_n) < f(x_2) (f(x_1) > f(y_1) > \dots > f(y_n) > f(x_2))$.

综上所述, $f(x)$ 在 I 上严格单调递增(递减).

习题 3.3.14 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 I 上连续, 且(至多)除了有限个点外, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 I 内部满足 $f'(x) > g'(x)$; 设存在 $a \in I$, 使得 $f(a) = g(a)$ (a 不是区间端点), 则当 $x \in I$ 且 $x > a$ 时, 有 $f(x) > g(x)$; 当 $x \in I$ 且 $x < a$ 时, 有 $f(x) < g(x)$.

解 记 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 在 I 上连续, 且(至多)除了有限个点外, $h(x)$ 在 I 内部满足 $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$. 又 $h(a) = f(a) - g(a) = 0$. 由上一题的结论可知, 当 $x \in I$ 且 $x > a$ 时, $h(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$; 当 $x \in I$ 且 $x < a$ 时, $h(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$.

习题 3.3.15 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可导, $f(0) = 0, f'(x)$ 严格递增, 证明 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 严格递增.

解 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

又由 Lagrange 中值定理, $\exists \eta \in (0, x_1)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{f(x_1)}{x_1}.$$

因为 $f'(x)$ 严格递增, 故 $f'(\xi) > f'(\eta)$, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow \frac{f(x_2)}{x_2} > \frac{f(x_1)}{x_1}. \quad (\text{习题 3.5.3})$$

因此 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 严格递增.

习题 3.3.16 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个驻点 ($f'(x_0) = 0$), 且 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可微, $f''(x_0) \neq 0$. 证明: 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点; 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点.

举例说明: 若 $f''(x_0) = 0$, 则 x_0 可以是 $f(x)$ 的极大值点或极小值点, 也可以不是极值点.

解 若 $f''(x_0) < 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $f''(x) < 0$. 由 Lagrange 中值定理, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\exists \xi = \xi(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$

又 $f''(x) < 0$, 故 $f'(\xi) > f'(x_0) = 0 > f'(x_2)$, 由习题 3.3.17 可知, 即当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f(x) < f(x_0)$. 因此 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点. 即当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时, $f(x) < f(x_0)$. 因此 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点.

例: 设 $f(x) = x^4$, 则 $f''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点. 设 $g(x) = -x^4$, 则 $g''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的一个极大值点. 设 $h(x) = x^3$, 则 $h''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 不是 $h(x)$ 的极值点.

习题 3.3.17 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0)$, $f(1) = f'(1)$. 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 满足 $f(\xi) = f''(\xi)$.

解 设 $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$, 则

$$g'(x) = e^x(f(x) - f'(x)) + e^x(f'(x) - f''(x)) = e^x(f(x) - f''(x)).$$

又 $g(0) = e^0(f(0) - f'(0)) = 0$, $g(1) = e^1(f(1) - f'(1)) = 0$. 由 Rolle 定理, 在 $(0, 1)$ 内至少有一点 ξ , 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = f''(\xi)$.

习题 3.3.18 求下列函数的单调区间与极值.

$$(1) \ y = 2x^3 - 3x^2;$$

$$(2) \ y = x^{2/3};$$

(3) $y = x^2 e^{-x^2};$

(4) $y = x^{1/x};$

(5) $y = \frac{(\ln x)^2}{x};$

(6) $y = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$

解 高中的时候大家就已经很熟悉怎么用导数来求函数的单调区间与极值了, 这里仅给出答案.

(1)

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1).$$

单调区间: 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 0$ 处取得极大值 0, 在 $x = 1$ 处取得极小值 -1 .

(2)

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

单调区间: 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 0$ 处取得极小值 0.

(3)

$$y' = 2xe^{-x^2}(1 - x^2).$$

单调区间: 在 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$ 上单调递增.

极值: 在 $x = \pm 1$ 处取得极大值 $\frac{1}{e}$, 在 $x = 0$ 处取得极小值 0.

(4) 此函数只在 $(0, +\infty)$ 有定义.

$$y' = x^{1/x} \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

单调区间: 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = e$ 处取得极大值 $e^{1/e}$.

(5)

$$y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}.$$

单调区间: 在 $(0, 1)$ 和 $(e^2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(1, e^2)$ 上单调递增.

极值: 在 $x = 1$ 处取得极小值 0, 在 $x = e^2$ 处取得极大值 $\frac{4}{e^2}$.

(6)

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1-x}{1+x^2}.$$

单调区间: 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 1$ 处取得极大值 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$.

命题 (极值点的判别法)

(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f'(x_0)$ 在 x_0 两侧存在, 异号, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值点. $f'(x_0)$ 可

以不存在. 这即极值存在的一阶导判别法.

- (2) 若 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0(< 0)$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值(极大值)点. 此即极值存在的二阶导判别法.
- (3) 若 $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, f^{(2n)} > 0(< 0)$, 则 $f(x_0)$ 必是 $f(x)$ 的极小值(极大值)点. 此即极值存在的高阶导判别法.

习题 3.3.19 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值.

$$(1) \quad y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2, 2]; \quad (2) \quad y = \sin 2x - x, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$$

$$(3) \quad y = \arctan \frac{1-x}{1+x}, [0, 1]; \quad (4) \quad y = x \ln x, (0, +\infty).$$

解

(1)

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y(-2) = 13, \quad y(-1) = 4, \quad y(0) = 5, \quad y(1) = 4, \quad y(2) = 13.$$

故最大值为 13, 最小值为 4.

(2)

$$y' = 2 \cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6}.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

故最大值为 $\frac{\pi}{2}$, 最小值为 $-\frac{\pi}{2}$.

(3)

$$y' = -\frac{2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2} < 0 \quad (x \in [0, 1]).$$

故在 $[0, 1]$ 上单调递减, 最大值为 $y(0) = \frac{\pi}{4}$, 最小值为 $y(1) = 0$.

(4)

$$y' = \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}.$$

函数在 $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增且趋于 $+\infty$. 故最小值为 $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$, 无最大值.

习题 3.3.20 证明下列不等式:

$$(1) \quad \frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1, \quad x \in [0, 1], p > 1;$$

- (2) $\tan x > x - \frac{x^3}{3}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$;
- (3) $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}$, $0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$;
- (4) $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}$, $x > 0$;
- (5) $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$, x 为任意实数;
- (6) $\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且右端的常数 $\frac{4}{3}$ 不能换为更大的数;
- (7) $(1 - \frac{1}{x})^{x-1} (1 + \frac{1}{x})^x < 4$, $x \in (1, +\infty)$;
- (8) $x^{a-1} + x^{a+1} \geq \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}$, $x \in (0, 1)$, $a \in (0, 1)$.

解

- (1) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 则 $f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$. 因此 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减. 故 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$, 最大值为 $f(0) = f(1) = 1$, 即

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

- (2) 设 $g(x) = \tan x - x + \frac{x^3}{3}$, 则 $g'(x) = \sec^2 x - 1 + x^2 = \tan^2 x + x^2 > 0$. 因此 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 又 $g(0) = 0$, 故 $g(x) > 0$, 即

$$\tan x > x - \frac{x^3}{3}.$$

- (3) 设 $h(x) = \frac{\tan x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x \tan^2 x}{x^2} > 0$. 因此 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 故 $h(x_2) > h(x_1)$, 即

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

- (4) 设 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x}$, 则

$$f'(x) = \frac{\arctan x + x^2 \arctan x + x^3 + x^2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} > 0, \quad x > 0$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(0) = 0$, 故 $f(x) > 0$, 即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

- (4) 另解令 $f(x) = (1+x) \ln(1+x) - \arctan x$, $g(x) = \arctan x$, $\forall x > 0$,

$$\exists \xi_1 \in [0, x], \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi_1) = 1 + \ln(1+x) > 1.$$

$$\exists \xi_2 \in [0, x], \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{g(x)}{x} = g'(\xi_2) = \frac{1}{1+\xi_2^2} < 1.$$

故

$$g(x) < x < f(x).$$

即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(5) 令 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exists \xi \in [0, x], \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \sqrt{1+x^2} - 1$$

即

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}.$$

(6) 令 $f(x) = x - \frac{4}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin x \cos x$, 则

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{3} \cos x + \frac{1}{3} \cos 2x = \frac{1}{3}(2 \cos x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0.$$

又 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin x > 0$,

$$\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos x.$$

另一方面, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cos x = 0,$$

$\frac{4}{3}$ 不能被替换为更大的数.

(7)

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 < 4$$

(8) 令 $f(x) = x^{a-1} + x^{a+1}$, 则 $\forall x \in (0, 1)$, $a \in (0, 1)$,

$$f'(x) = (a-1)x^{a-2} + (a+1)x^a = (a+1) \left(x + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) \left(x - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) x^{a-2}.$$

$$\forall x \in \left(0, \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right), f'(x) < 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

$$\forall x \in \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, 1\right), f'(x) > 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

$$\text{综上, } \forall x \in (0, 1), a \in (0, 1), x^{a-1} + x^{a+1} \geq \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

习题 3.3.21 试确定下列函数零点的个数及所在范围:

(1) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10$;

(2) $ax - \ln x$ (其中 $a > 0$).

解

(1) 令 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$. 我们首先分析 $f(x)$ 的单调性. 求导得:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3).$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = 3$.

- 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.
- 当 $x \in (1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.
- 当 $x \in (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值,

$$f(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 10 = 1 - 6 + 9 - 10 = -6.$$

$f(x)$ 在 $x = 3$ 处取得极小值,

$$f(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 10 = 27 - 54 + 27 - 10 = -10.$$

同时, 考察 x 趋于无穷时的极限:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

由于极大值 $f(1) = -6 < 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 所以在 $(-\infty, 1]$ 上 $f(x)$ 恒为负, 没有零点. 由于极小值 $f(3) = -10 < 0$, 且极大值 $f(1) = -6 < 0$, 所以在 $(1, 3]$ 上 $f(x)$ 恒为负, 没有零点. 由于 $f(3) = -10 < 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, 且 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上连续且单调递增, 根据零点存在定理, $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上有且仅有一个零点.

又因为

$$f(4) = -6 < 0, \quad f(5) = 10 > 0.$$

所以零点在 $(4, 5)$ 范围内.

该函数只有一个零点, 位于区间 $(4, 5)$ 内.

(2) 令 $g(x) = ax - \ln x$. 函数的定义域为 $(0, +\infty)$. (题目已给出 $a > 0$) 我们分析 $g(x)$ 的单调性. 求导得:

$$g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}.$$

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{a}$.

- 当 $x \in (0, 1/a)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.
- 当 $x \in (1/a, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

因此, $g(x)$ 在 $x = 1/a$ 处取得全局最小值, 最小值为:

$$g(1/a) = a \left(\frac{1}{a}\right) - \ln \left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \ln(a^{-1}) = 1 + \ln a.$$

我们考察 $g(x)$ 在定义域边界的行为:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(a - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \cdot (a - 0) = +\infty.$$

函数 $g(x)$ 从 $+\infty$ 递减到最小值 $1 + \ln a$, 然后再递增到 $+\infty$. 零点的个数取决于最小值 $1 + \ln a$ 的符号:

情况 1 若最小值 $1 + \ln a > 0$, 即 $\ln a > -1$, $a > e^{-1}$ ($a > 1/e$). 此时 $g(x)$ 的最小值大于 0, $g(x)$ 恒大于 0, 故函数没有零点.

情况 2 若最小值 $1 + \ln a = 0$, 即 $\ln a = -1$, $a = e^{-1}$ ($a = 1/e$). 此时 $g(x)$ 的最小值等于 0, $g(x)$ 仅在 $x = 1/a = e$ 处与 x 轴相切, 故函数有且仅有一个零点, 零点为 $x = e$.

情况 3 若最小值 $1 + \ln a < 0$, 即 $\ln a < -1$, $0 < a < e^{-1}$ ($0 < a < 1/e$). 此时 $g(x)$ 的最小值小于 0. 由于 $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$ 且 $g(1/a) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1/a)$ 上连续且单调递减, 故在 $(0, 1/a)$ 内必有一个零点. 由于 $g(1/a) < 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, $g(x)$ 在 $(1/a, +\infty)$ 上连续且单调递增, 故在 $(1/a, +\infty)$ 内必有一个零点. 故函数有两个零点.

结论:

- 若 $a > e^{-1}$, 函数有 0 个零点.
- 若 $a = e^{-1}$, 函数有 1 个零点, 位于 $x = e$.
- 若 $0 < a < e^{-1}$, 函数有 2 个零点, 一个位于 $(0, 1/a)$, 另一个位于 $(1/a, +\infty)$.

习题 3.3.22 设 $a \in (0, 1)$, $b_1 = 1 - a$,

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{1 - e^{-b_n}} - a, \quad n = 1, 2, \dots$$

问 $\{b_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则给予证明, 若收敛, 则求极限.

解 我们记 $f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} - a$, $x > 0$, 则有 $b_{n+1} = f(b_n)$, $n = 1, 2, \dots$, 且

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-x} - xe^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \geq 0$$

由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi_n \in (b_n, b_{n+1})$ 使得

$$b_{n+2} - b_{n+1} = f(b_{n+1}) - f(b_n) = f'(\xi_n)(b_{n+2} - b_{n+1}).$$

据此可知, $\{b_n\}$ 是一个单调数列, 增减性由 $b_2 - b_1$ 确定.

再设 $g(x) = \begin{cases} f(x) - x, & x > 0 \\ 1 - a, & x = 0 \end{cases}$ 化简得到 $x > 0$ 时,

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} - a, \quad g'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} \leq 0,$$

可知 $g(x)$ 在 $x \geq 0$ 处连续, 递减. 且由于 $g(0) = 1 - a > 0, g(1) = \frac{1}{1 - e^{-1}} - 1 - a < 0$, 故存在唯一的 $c \in (0, 1)$ 使得 $g(c) = 0$, 即 $f(c) = c$.

又由于

$$b_2 - b_1 = f(b_1) - b_1 = g(b_1) = \frac{b_1}{e^{b_1} - 1} - a = \frac{1 - a}{e^{1-a} - 1} - a = \frac{1 - ae^{1-a}}{e^{1-a} - 1} \geq 0.$$

由上述分析可知 $b_1 < c, \{b_n\}$ 单调递增, 并且 $b_{n+1} - c = f(b_n) - f(c) = f'(\eta_n)(b_n - c)$, 于是递推得到, $b_n < c$.

综上, $\{b_n\}$ 单调有界, 故收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(b).$$

故 $b = c$.

习题 3.3.23 试给出 Cauchy 中值定理的几何解释.

解 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可微. 根据 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

几何上, 这意味着在区间 $[a, b]$ 上, 存在一点 ξ , 使得函数 $f(x)$ 在该点的瞬时变化率(导数)与函数 $g(x)$ 在该点的瞬时变化率之比等于它们在端点处的平均变化率之比. 换句话说, 存在一条切线, 其斜率与通过点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的割线的斜率成比例关系, 这个比例由函数 $g(x)$ 的变化决定.

习题 3.3.24 试说明在闭区间 $[-1, 1]$ 上 Cauchy 中值定理对函数 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = x^3$ 为什么不正确.

解 在闭区间 $[-1, 1]$ 上, 函数 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = x^3$ 都是连续的, 并且在开区间 $(-1, 1)$ 内可微. 然而, 我们计算它们在端点处的变化:

$$f(1) - f(-1) = 1^2 - (-1)^2 = 0,$$

$$g(1) - g(-1) = 1^3 - (-1)^3 = 2.$$

因此, Cauchy 中值定理要求存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使得

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{0}{2} = 0 = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

计算导数:

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 3x^2.$$

因此,

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} = \frac{2}{3\xi}.$$

要使得 $\frac{2}{3\xi} = 0$, 必须有 $\xi \rightarrow \infty$, 这显然不可能在区间 $(-1, 1)$ 内实现. 因此, 在这个例子中, Cauchy 中值定理不成立.

这个例子说明了 Cauchy 中值定理的适用条件必须严格满足, 其中要求 $g'(x)$ 在 (a, b) 内不为零, 否则可能导致分母为零的情况, 从而使得定理无法应用.

习题 3.3.25 设 $b > a > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$2\xi(f(b) - f(a)) = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

解 设 $g(x) = x^2$, 则 $g'(x) = 2x$. 根据 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{f'(\xi)}.$$

整理即得.

习题 3.3.26 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 ($ab > 0$), 在 (a, b) 上可微. 求证: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

解 由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{f'(\xi)\xi - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}.$$

整理即得.

习题 3.4

习题 3.4.1 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \quad (m, n \text{ 为正整数}, \alpha, \beta \text{ 为实数});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad (m, n \text{ 为自然数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \quad (\alpha \text{ 为任意实数});$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > 0);$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\tan x};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2} \right);$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln(1-x)};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{2x-\pi};$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x}$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x) + \tan \frac{\pi}{2} x}{\cot \pi x};$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x^3)^2}{(1-\cos x)(e^{x^2}-1)\tan^2 x};$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{1/x};$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \cdot \left(2 - \frac{x}{e^x - 1} \right);$$

$$(19) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} \quad (n \text{ 为自然数}, a > 1, k > 0);$$

$$(20) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k} \quad (n \text{ 为正整数}, k > 0).$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{m}(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}-1} - \frac{\beta}{n}(1+\beta x)^{\frac{1}{n}-1}}{1} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nm(1+mx)^{n-1} - mn(1+nx)^{m-1}}{2x} \\ &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nm^2(n-1)(1+mx)^{n-2} - mn^2(m-1)(1+nx)^{m-2}}{2} \\ &= \frac{mn(n-m)}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = -4.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} \stackrel{\arcsin x = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{\sin^3 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{6}.$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

(6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha.$$

(7)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{1} = 0.$$

(8)

$$\begin{aligned} ((a+x)^x)' &= (e^{x \ln(a+x)})' = \left(\frac{x}{a+x} + \ln(a+x) \right) e^{x \ln(a+x)} \\ ((a+x)^x)'' &= \left(\frac{x}{a+x} + \ln(a+x) \right)^2 e^{x \ln(a+x)} + \left(\frac{a}{(a+x)^2} + \frac{1}{a+x} \right) e^{x \ln(a+x)} \rightarrow (\ln a)^2 + \frac{2}{a} \quad (x \rightarrow 0) \\ (a^x)'' &= \ln^2(a)a^x \rightarrow \ln^2(a) \quad (x \rightarrow 0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \dots = \frac{(\ln a)^2 + \frac{2}{a} - (\ln a)^2}{2} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

(9)

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

(10)

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\tan x} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \right| \leqslant \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

(11)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^2 \arctan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \cdot \frac{x + \arctan x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \\ &\stackrel{x = \tan y}{=} 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y - y}{\tan^3 y} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y - y}{y^3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1-x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{(2x-\pi)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{(2x-\pi) \ln(\tan x)} = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{2x-\pi}} \right) \\
&\stackrel{L'H}{=} \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x \cos^2 x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-(2x-\pi)^2}{\sin 2x} \right) \\
&\stackrel{x-\frac{\pi}{2}=y}{=} \exp \left(\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-4y^2}{-\sin 2y} \right) = e^0 = 1
\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x} &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right) \right) \\
&= \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) - 1 \right) \right) = e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x) + \tan \frac{\pi}{2}x}{\cot \pi x} &\stackrel{y=1-x}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y + \tan \frac{\pi}{2}(1-y)}{\cot \pi(1-y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y + \cot \frac{\pi}{2}(y)}{-\cot \pi y} \\
&\stackrel{L'H}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{y} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}y}}{\pi \frac{1}{\sin^2 \pi y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin^2 \pi y}{\pi y} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \pi y}{\sin^2 \frac{\pi}{2}y} \right) \\
&= 0 - 2 = -2
\end{aligned}$$

(16)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x^3)^2}{(1 - \cos x)(e^{x^2} - 1) \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3)^2}{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2 \cdot x^2} = 2$$

(17)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{1/x} &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln(1+x) - \ln x}{x} \right) = \exp \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln(1+x)} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}}{1} \right) \\
&= \exp 0 = 1
\end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \cdot \left(2 - \frac{x}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{x}{e^x - 1} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot (1+1)}{1+x \sin x - \cos x} \cdot (2-1) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin x + x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\frac{2 \sin x}{x} + \cos x} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

(19) 只需证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0.$$

再由 Heine 定理即得.

对于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} \leqslant \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{[k]}}{a^x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[k] x^{[k]-1}}{(\ln a) a^x} = \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[k]!}{(\ln a)^{[k]} a^x} = 0.$$

(20) 只需证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0.$$

再由 Heine 定理即得.

对于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{kx^k} = 0.$$

习题 3.4.2 设 $f(x)$ 在区间 $[0, a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0) = 1, f''(0) \neq 0$, 且 $0 < f(x) < x$, $x \in (0, a)$. 令

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_1 \in (0, a).$$

- (1) 求证: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限;
- (2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 则求其极限.

解

(1) $\{x_n\}$ 是递减的, 因为 $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n < 0$. $\{x_n\}$ 具有下界 0, 故可设 $\{x_n\}$ 收敛到 x . 令 $n \rightarrow \infty$, 由 f 的连续性, 得 $x = f(x)$, 同时利用夹逼准则可知 $f(0) = 0$ 是唯一满足 $x = f(x)$ 的, 故 $x = 0$.

(2) 由泰勒展开, $f(x) = x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$, 因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - f(x_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + o(x_n^2)}{x_n - \left(x_n + \frac{f''(0)}{2}x_n^2 + o(x_n^2)\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{-\frac{f''(0)}{2}x_n^2 + o(x_n^2)} \\ &= -\frac{2}{f''(0)} \end{aligned}$$

习题 3.5

习题 3.5.1 证明 (Jensen (延森) 不等式): 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, x_1, \dots, x_n 是 I 中 n 个点, 则对任意满足 $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ 的正数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

解 采用数学归纳法. 当 $n = 2$ 时, 结论显然成立.

假设当 $n = k$ 时结论成立, 即对任意满足 $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ 的正数 $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_k f(x_k).$$

现考虑 $n = k + 1$ 的情形. 设 $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ 是满足 $\alpha_1 + \dots + \alpha_{k+1} = 1$ 的正数. 记 $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$, 则有 $0 < \beta < 1$. 因此,

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) &= f\left(\beta\left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \dots + \frac{\alpha_k}{\beta} x_k\right) + (1 - \beta)x_{k+1}\right) \\ &\leq \beta f\left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \dots + \frac{\alpha_k}{\beta} x_k\right) + (1 - \beta)f(x_{k+1}) \quad (\text{由凸函数的定义}) \\ &\leq \beta\left(\frac{\alpha_1}{\beta} f(x_1) + \dots + \frac{\alpha_k}{\beta} f(x_k)\right) + (1 - \beta)f(x_{k+1}) \quad (\text{由归纳假设}) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}). \end{aligned}$$

由数学归纳法可知, 对任意正整数 n , 结论均成立.

习题 3.5.2 设 x_1, x_2, \dots, x_n 和 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 都是正数, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$, 证明: 有不等式

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

特别, 取 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$, 则得到算术平均不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

(提示: 考虑区间 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x) = -\ln x$ 的凸凹性, 并利用 Jensen 不等式.)

解 设 $f(x) = -\ln x$, 则 $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, 因此 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是凸函数. 由**习题 3.5.1**, 对任意满足 $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ 的正数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 有

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) &\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \\ -\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) &\leq -(\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \dots + \lambda_n \ln x_n). \end{aligned}$$

即

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \ln(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}).$$

即

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

习题 3.5.3 设 a, b, c, d 满足 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, 其中 $b > 0, d > 0$, 证明不等式

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

解 由 $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ 可得 $ad \leq bc$. 因为 $b > 0, d > 0$, 故有

$$ad + ab \leq bc + ab \Rightarrow a(d+b) \leq b(c+a) \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d}.$$

同理,

$$ad \leq bc \Rightarrow ad + cd \leq bc + cd \Rightarrow c(b+d) \geq d(a+c) \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

习题 3.5.4 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, 证明: $f(x)$ 在 I 的内点是连续的.

解 设 x_0 是区间 I 的一个内点, 即证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. 仅证右连续 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 左连续同理.

由于 x_0 是区间 I 的内点, 故存在 $\delta > 0$, 使得区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$.

任取 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 则由凸函数的定义, 对任意 $a \in (x_0 - \delta, x_0)$, 有

$$\frac{f(x) - f(x_0 - \delta)}{x - (x_0 - \delta)} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{(x_0 + \delta) - x_0}.$$

记 $M_1 = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \delta)}{\delta}, M_2 = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta}$, 则 M_1, M_2 均为常数, 上式可写为

$$M_1(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M_2(x - x_0).$$

当 $x \rightarrow x_0^+$ 时, 由夹逼定理可知, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

习题 3.5.5 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上处处可导, 且除了有限个点之外, 均有 $f''(x) > 0$, 证明: $f(x)$ 在 I 上是凸的. 将本题用于 $f(-x)$, 就得到关于凹函数的类似结论.

解 由题设条件以及**习题 3.3.13**知, 可得, $f'(x)$ 单调增, 由一阶导判别法即证.

其中, 一阶导判别法表述为:

定理 (零阶导判别法) $f(x)$ 在区间 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ 都有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

定理 (一阶导判别法) 若 $f'(x)$ 在 I 上存在, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow f'(x)$ 在 I 上单调增.

证明 必要求任取 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, x_1 < x < x_2$, 应用**3.5** 中第一个不等式, 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

同理, 对 $x_1 < x' < x_2$, 应用 3.5 中的第二个不等式, 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

并令 $x' \rightarrow x_2$, 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant f'(x_1)$$

所以 $f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. 根据 x_1, x_2 的任意性, 必须性证明毕.

充分分析对任意的 $x_1 < x < x_2$, 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2), \eta \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x - x_1), \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\eta) \cdot (x_2 - x_1)$$

因为 $f'(x)$ 单调增, 且 $x_1 < x < x_2$, 即

$$f'(\xi) \leqslant f'(\eta)$$

可知函数 f 是凸函数.

定理 (二阶导判别法) 若 $f''(x)$ 在 I 上存在, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow f''(x) \geqslant 0, x \in I$.

习题 3.5.6 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有连续的二阶导数. 若 x_0 是 $f(x)$ 的一个拐点, 证明: $f''(x_0) = 0$.

解 由拐点的定义可知, 存在 $\delta > 0$, 使得在区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上, $f(x)$ 为凸函数, 在区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上, $f(x)$ 为凹函数. 由二阶导判别法知, 对任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, 有 $f''(x) \geqslant 0$; 对任意 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, 有 $f''(x) \leqslant 0$. 由于 $f''(x)$ 在区间 I 内连续, 故有

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f''(x) \geqslant 0, \quad f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f''(x) \leqslant 0.$$

因此, $f''(x_0) = 0$.

习题 3.5.7 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 及其附近二阶可导, 且 $f''(x_0) = 0$. 若 $f'''(x_0)$ 存在但不为零, 证明: x_0 是 $f(x)$ 的拐点.

解 不妨设 $f'''(x_0) > 0$. 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = f'''(x_0) > 0$, 所以存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x) \geqslant 0, & x_0 < x < x_0 + \delta; \\ f''(x) \leqslant 0, & x_0 - \delta < x < x_0. \end{cases}$$

由二阶导判别法知, $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0)$ 上为凹函数, 在区间 $(x_0, x_0 + \delta)$ 上为凸函数, 因此, x_0 是 $f(x)$ 的拐点.

习题 3.5.8 求下列函数的凸、凹区间和拐点.

$$(1) \quad y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25;$$

$$(2) \quad y = x + \frac{1}{x};$$

(3) $y = x^{5/3}$; (4) $y = (1 + x^2)e^x$;

(5) $y = x^4$; (6) $y = x + \sin x$.

解

(1) $y' = 6x^2 - 6x - 36, y'' = 12x - 6$.

- 当 $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上为凹函数;

- 当 $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上为凸函数;

$x = \frac{1}{2}$ 为拐点.

(2) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}$.

- 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $(0, +\infty)$ 上为凸函数;

- 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(-\infty, 0)$ 上为凹函数;

$y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处无定义, 故无拐点.

(3) $y' = \frac{5}{3}x^{2/3}, y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3}$. 函数只在 $x \geq 0$ 上有定义, 此时 $y'' > 0$, 函数在 $[0, +\infty)$ 上为凸函数, 无拐点.

(4) $y' = (1 + 2x + x^2)e^x, y'' = (3 + 4x + x^2)e^x$.

- 当 $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ 上为凸函数;

- 当 $x \in (-3, -1)$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(-3, -1)$ 上为凹函数;

$x = -3, -1$ 为拐点.

(5) $y' = 4x^3, y'' = 12x^2 \geq 0$, 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上为凸函数, 无拐点.

(6) $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$.

- 当 $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ 上为凹函数;

- 当 $x \in ((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$ 上为凸函数;

$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 为拐点.

习题 3.5.9 求 a, b 值, 使点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点.

解 $y' = 3ax^2 + 2bx, y'' = 6ax + 2b$. 因为点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 故有

$$\begin{cases} 3 = a + b; \\ 0 = 6a + 2b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1; \\ b = 2. \end{cases}$$

习题 3.5.10 描绘下列各曲线的图形.

(1) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$;

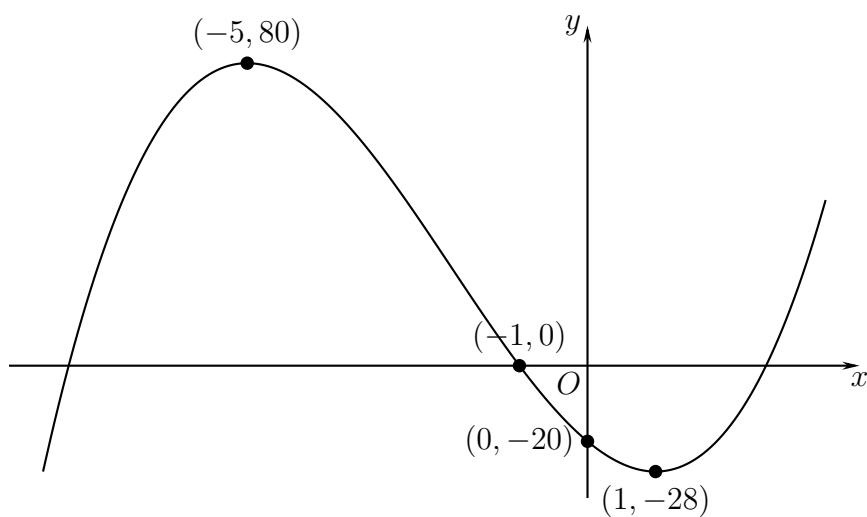
(2) $y = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$;

(3) $y = x - 2 \arctan x$;

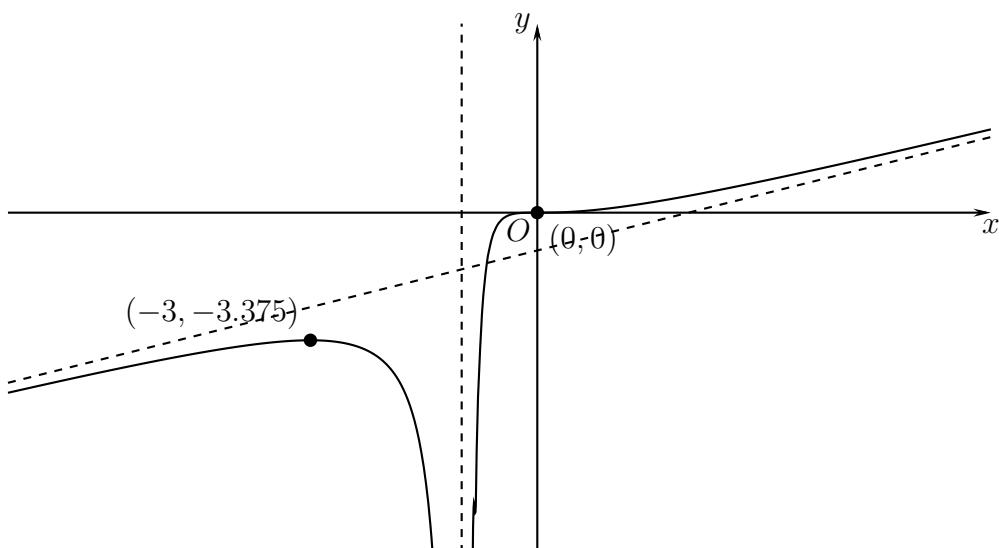
(4) $y = x e^{-x}$.

解

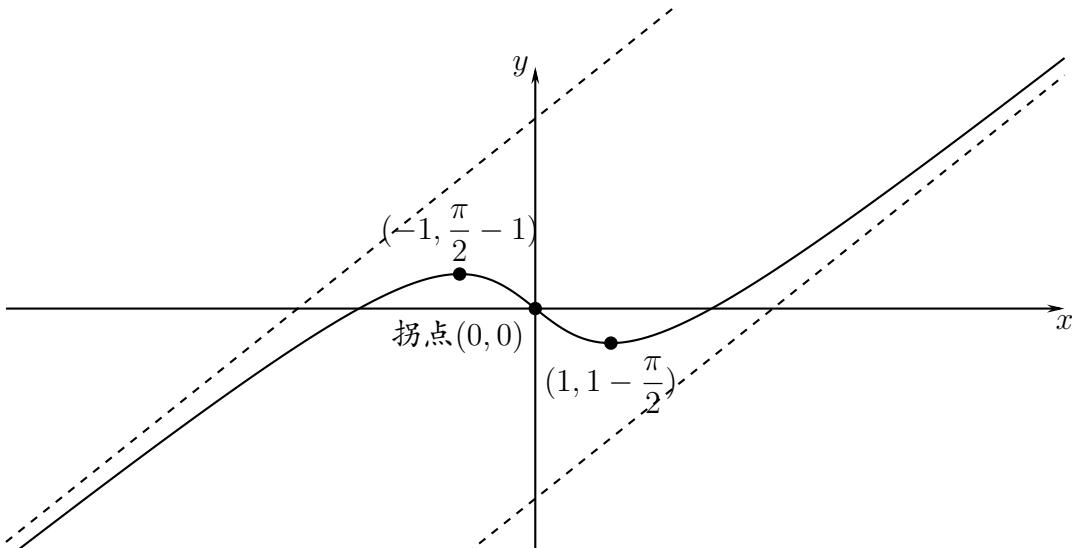
(1)



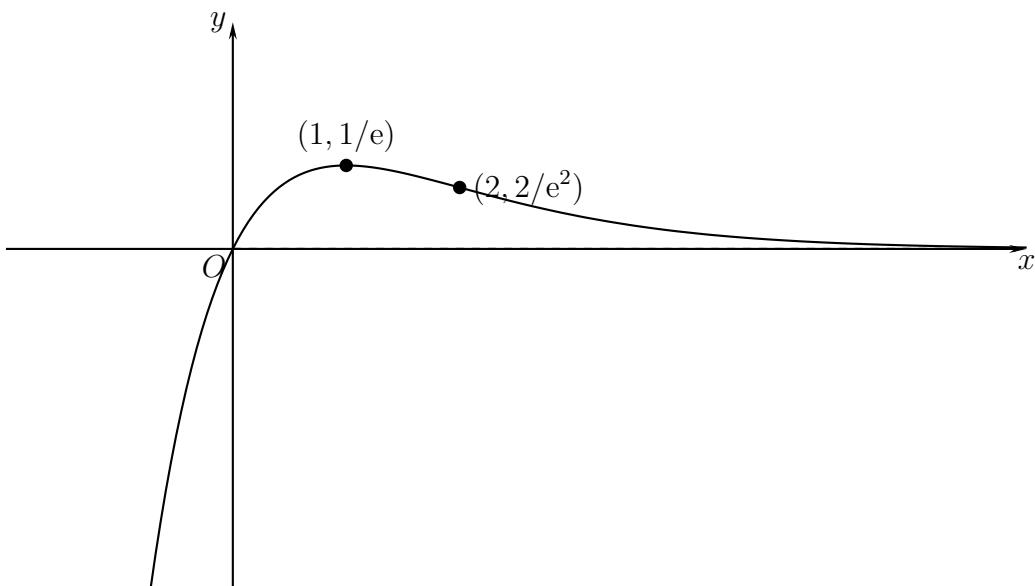
(2)



(3)



(4)



习题 3.5.11 设函数 $y = f(x)$ 所表示的曲线为 C . 记 C 上一点 $M(x, y)$ 处的曲率为 $\kappa(\kappa \neq 0)$, 过点 M 引曲线的法线, 在此法线上曲线上凸的一侧取点 D , 使 $|DM| = \frac{1}{\kappa} = \rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径作圆, 这个圆称为曲线在点 M 处的曲率圆, 其圆心 D 称为曲线在点 M 处的曲率中心, 半径 ρ 称为曲线在点 M 处的曲率半径.

求下列曲线在指定点的曲率、曲率中心及曲率半径.

$$(1) xy = 1 \text{ 在点 } (1, 1) \text{ 处;}$$

$$(2) y = e^{-x^2} \text{ 在点 } (0, 1) \text{ 处.}$$

解

(1) 设 $y = \frac{1}{x}$, 则 $y' = -\frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}$. 在点 $(1, 1)$ 处, 有

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 1)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{2}.$$

曲线在点 $(1, 1)$ 处的法线方程为 $y - 1 = x - 1$, 即 $y = x$. 因此, 曲率中心 D 的坐标为

$$D(2, 2).$$

(2) 设 $y = e^{-x^2}$, 则 $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$. 在点 $(0, 1)$ 处, 有

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 0)^{3/2}} = 2, \\ \rho &= \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

曲线在点 $(0, 1)$ 处的法线方程为 $y - 1 = 0$, 即 $y = 1$. 因此, 曲率中心 D 的坐标为

$$D\left(0, 1 - \frac{1}{2}\right) = (0, \frac{1}{2}).$$

习题 3.5.12 求下列曲线在指定点的曲率.

$$(1) \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}, \text{在 } t = 1 \text{ 处}; \quad (2) \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases} \text{在 } t = \frac{\pi}{2} \text{ 处.}$$

解

$$(1) \text{对于参数方程} \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}, \text{参数方程曲线的曲率公式为:}$$

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

计算各阶导数:

$$x' = 6t, \quad x'' = 6$$

$$y' = 3 - 3t^2, \quad y'' = -6t$$

在 $t = 1$ 处:

$$x'(1) = 6, \quad x''(1) = 6$$

$$y'(1) = 3 - 3 = 0, \quad y''(1) = -6$$

因此曲率为:

$$\kappa = \frac{|6 \cdot (-6) - 0 \cdot 6|}{(6^2 + 0^2)^{3/2}} = \frac{|-36|}{6^3} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

$$(2) \text{对于参数方程} \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}, \text{计算各阶导数:}$$

$$x' = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t$$

$$x'' = \cos t - t \sin t$$

$$y' = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t$$

$$y'' = \sin t + t \cos t$$

在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处：

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$$

因此曲率为：

$$\kappa = \frac{\left|0 \cdot 1 - \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|}{\left(0^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\left|\frac{\pi^2}{4}\right|}{\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^3}{8}} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{8}{\pi^3} = \frac{2}{\pi}$$

习题 3.5.13 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点的曲率半径最小？并求出该点的曲率半径。

解 设 $y = \ln x$, 则 $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$. 曲率半径 ρ 的表达式为

$$\rho = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{x}.$$

为了求出曲率半径的最小值，只需求出函数 $g(x) = \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{x}$ 的最小值。计算 $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{3x(x^2 + 1)^{1/2} \cdot x - (x^2 + 1)^{3/2}}{x^2} = \frac{(x^2 + 1)^{1/2}(3x^2 - (x^2 + 1))}{x^2} = \frac{(x^2 + 1)^{1/2}(2x^2 - 1)}{x^2}.$$

令 $g'(x) = 0$, 可得 $2x^2 - 1 = 0$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$ 当 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $g'(x) > 0$

当 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因此, 函数 $g(x)$ 在 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得最小值。此时的曲率半径为

$$\rho_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1\right)^{3/2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

习题 3.5.14 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的凸函数且有界，求证： $f(x)$ 是常数。

解 反证法。假设 $f(x)$ 不是常数，则存在 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $f(x) > f(y)$. 由凸函数的定义可知，对任意 $t \in (0, 1)$, 有

$$f(x) \leqslant \lambda f\left(\frac{x - (1 - \lambda)y}{\lambda}\right) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

因此

$$\frac{f(x) - (1-\lambda)f(y)}{\lambda} \leq f\left(\frac{x - (1-\lambda)y}{\lambda}\right).$$

由于 $f(x) > f(y)$,

$$\frac{f(x) - (1-\lambda)f(y)}{\lambda} = \frac{f(x) - f(y)}{\lambda} + f(y) \rightarrow +\infty, \quad \lambda \rightarrow 0^+.$$

所以当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 时,

$$f\left(\frac{x - (1-\lambda)y}{\lambda}\right) \rightarrow +\infty,$$

与 $f(x)$ 有界矛盾. 因此, $f(x)$ 是常数.

习题 3.6

习题 3.6.1 写出下列函数的（具有 Peano 余项的）Maclaurin 展开式.

$$(1) \quad y = \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1}; \quad (2) \quad y = \sin^2 x.$$

解

(1)

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1} = -(x^3 + 2x + 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)) \\ &= -1 - 3x - 3x^2 - 4x^3 - 4x^4 - \cdots - 4x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

习题 3.6.2 求出函数 $e^{\sin x}$ 的（具有 Peano 余项的）三阶 Maclaurin 展开式.

解

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2!} + \frac{(\sin x)^3}{3!} + o((\sin x)^3) \\ &= 1 + \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) + \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{6} (x + o(x))^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \right) + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

习题 3.6.3 求出函数 $\ln(\cos x)$ 的（具有 Peano 余项的）六阶 Maclaurin 展开式.

解

$$\begin{aligned}
 \ln(\cos x) &= \ln(1 + (\cos x - 1)) \\
 &= (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3} + o((\cos x - 1)^3) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^3 + o(x^6) \\
 &= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\right)x^4 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\right)x^6 + o(x^6) \\
 &= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6) \\
 &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)
 \end{aligned}$$

习题 3.6.4 已知 $f(x)$ 是一个四次多项式, 并且 $f(2) = -1, f'(2) = 0, f''(2) = 2, f'''(2) = -12, f^{(4)}(2) = 24$. 计算 $f(-1), f'(0), f''(1)$.

解

$$\begin{aligned}
 f(x) &= f(2) + f'(2)(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x - 2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x - 2)^4 \\
 &= -1 + (x - 2)^2 - 2(x - 2)^3 + (x - 2)^4
 \end{aligned}$$

因此

$$f(-1) = 143, f'(0) = -60, f''(1) = 26.$$

习题 3.6.5 求下列函数具有 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

- (1) $y = \tan x$ 在 $x = 0$ 的二阶 Taylor 展开式; (2) $y = \frac{1}{x}$ 在 $x = -1$ 的 n 阶 Taylor 展开式.

解

(1)

$$\tan x = \tan 0 + \sec^2 0 \cdot x + \frac{2 \tan 0 \sec^2 0}{2!} x^2 + \frac{2(\sec^4 \xi + 2 \tan^2 \xi \sec^2 \xi)}{3!} x^3 = x + \frac{\sec^4 \xi}{3} x^3, \quad \xi \in (0, x).$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x} &= \frac{1}{-1} + \frac{-1}{(-1)^2}(x + 1) + \frac{2!}{(-1)^3 2!}(x + 1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1} n!}(x + 1)^n + \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{\xi^{n+2} (n+1)!}(x + 1)^{n+1} \\
 &= -1 - (x + 1) - (x + 1)^2 - \cdots - (x + 1)^n - \frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x + 1)^{n+1}, \quad \xi \in (-1, x).
 \end{aligned}$$

习题 3.6.6 求下列极限.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x};$
(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right];$

- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2};$
(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x}.$

解

(1)

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \quad e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4))}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{12}.$$

(2)

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4), \quad \sqrt[3]{1-x^2} = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4))}{x^2} = \frac{5}{6}.$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - \left(x - \frac{1}{2} + o(1) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} - o(1) \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) &= 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^4}{24} + o((\sin x)^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{24} \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \right) + \frac{1}{24} (x^4 + o(x^4)) + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4))}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{6}.$$

习题 3.6.7 设函数 $f(x)$ 处处有 $n+1$ 阶导数, 证明: $f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式的充分必要条件是 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$.

解 充分性: 若 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, 则由 Taylor 公式可知, 考虑在点 $x=0$ 处的 Taylor 展开式, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

因此, $f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式, 各项系数分别为 $f(0), f'(0), \frac{f''(0)}{2!}, \dots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

必要性: 若 $f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式, 则可设

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

因此, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$f^{(n+1)}(x) = 0.$$

习题 3.6.8 设函数 $f'(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且对任意 $x \in [0, 2]$, 有 $|f(x)| \leq 1$ 及 $|f''(x)| \leq 1$.

证明: $|f'(x)| \leq 2, x \in [0, 2]$.

解

$$f(0) = f(x) - f'(0)x - \frac{f''(\xi)}{2}x^2, \quad \xi \in (0, x).$$

$$f(2) = f(x) + f'(2)(2-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2, \quad \eta \in (x, 2).$$

因此, 对任意 $x \in [0, 2]$, 有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \frac{f(2) - f(0) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 - \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2}{2} \right| \\ &\leq \frac{|f(2)|}{2} + \frac{|f(0)|}{2} + \frac{|f''(\xi)|x^2}{4} + \frac{|f''(\eta)|(2-x)^2}{4} \\ &\leq 1 + \frac{1}{4}(x^2 + (2-x)^2) \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

习题 3.6.9 设 n 为自然数, 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$ 证明: $f'(0) = 0$, 但 $f''(0)$ 不存在.

(提示: 证明 $f(x)$ 仅在一点 $x = 0$ 可导.)

注意, 我们显然有

$$f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

但当 $n > 1$ 时, 并不能断言 $f^{(k)}(0) = 0 (2 \leq k \leq n)$. 因此, 定理 3.32 中的条件: 函数在点 x_0 处有 n 阶导数, 是至关重要的.

解

$$|f'(0)| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0.$$

但是, 当 $x \neq 0, x \in \mathbb{Q}$ 时,

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow x, t \in \mathbb{Q}} \frac{t^{n+1} - x^{n+1}}{t - x} = (n+1)x^n, & t \in \mathbb{Q}, \\ \lim_{t \rightarrow x, t \notin \mathbb{Q}} \frac{0 - x^{n+1}}{t - x} = \infty, & t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

当 $x \neq 0, x \notin \mathbb{Q}$ 时,

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow x, t \in \mathbb{Q}} \frac{t^{n+1} - 0}{t - x} = \infty, & t \in \mathbb{Q}, \\ \lim_{t \rightarrow x, t \notin \mathbb{Q}} \frac{0 - 0}{t - x} = 0, & t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

因此, $f'(x)$ 在 $x \neq 0$ 处不存在, 故 $f''(0)$ 不存在.

习题 3.6.10 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 它在 $x \neq 0$ 处显然有任意阶导数. 证明: $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的任意阶导数都存在, 而且都等于零. (提示: 首先, 易用数学归纳法证明, 当 $x \neq 0$ 时, 对 $n = 1, 2, \dots$ 有 $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$, 这里 $P_{3n}(t)$ 是 t 的 $3n$ 次多项式; 其次, 由导数定义及 L'Hôpital 法则, 得出 (记 $y = \frac{1}{x}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0,$$

即 $f'(0) = 0$. 现在, 说的结论易用数学归纳法及 L'Hôpital 法则证明.)

本题意味着, 对任意的自然数 n , 函数 f 在 $x = 0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式是 0; 换句话说, 余项总是等于 $f(x)$. 因此, 即使函数在一点附近的性态, 用 (在该点的) 足够高阶的导数也未必能将其揭示出来.

解 设 n 为自然数, 当 $x \neq 0$ 时, 用数学归纳法可证 $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$, 这里 $P_{3n}(t)$ 是 t 的 $3n$ 次多项式. 当 $n = 1$ 时,

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}.$$

假设当 $n = k$ 时结论成立, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x^2}} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

显然, $\frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的 $3(k+1)$ 次多项式. 因此, 结论对任意自然数 n 都成立.

由 L'Hôpital 法则, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0,$$

即 $f'(0) = 0$. 假设当 $n = k$ 时, $f^{(k)}(0) = 0$, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{P_{3k}(y)}{ye^{y^2}} = 0 \end{aligned}$$

因此, 结论对任意自然数 n 都成立.

习题 3.6.11 设函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的 n 阶微商存在, 并且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{而 } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

证明:

- (1) 若 n 为奇数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值;
- (2) 若 n 为偶数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值. 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值; 当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处取极大值.

本题表明, 若函数 $f(x)$ 在驻点上存在如上所述的高阶导数, 则由此可确定驻点是否为极值点. 然而, 我们注意, 上一题中的函数 f 在 $x = 0$ 处显然有极小值, 但却不能用这一判别法判别.

解 不妨设 $f^{(n)}(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f^{(n)}(x) > 0$. 由 Taylor 公式, 对任意 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \xi \in (x_0, x) \text{ 或 } (x, x_0).$$

- (1) 当 n 为奇数时,

- 若 $x > x_0$, 则 $(x - x_0)^n > 0$, 故 $f(x) - f(x_0) > 0$;
- 若 $x < x_0$, 则 $(x - x_0)^n < 0$, 故 $f(x) - f(x_0) < 0$.

因此, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值.

- (2) 当 n 为偶数时,

- 若 $x > x_0$, 则 $(x - x_0)^n > 0$, 故 $f(x) - f(x_0) > 0$;
- 若 $x < x_0$, 则 $(x - x_0)^n > 0$, 故 $f(x) - f(x_0) > 0$.

因此, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值.

对于 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 的情形, 类似可证.

第3章综合习题

习题3.C.1 设 $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n)$, 求 $f'(0)$.

解

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)(x+2)\dots(x+n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!. \end{aligned}$$

习题3.C.2 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶连续导数, 记函数

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

- (1) 确定 a 的值, 使 $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.
- (2) 对 (1) 中确定的 a , 证明: $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导, 且导函数连续.

解

(1) 由于 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(0) = 0 \Rightarrow g(0) = a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$.

(2)

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f'(0)x}{x^2} = \frac{f''(0)}{2}, \\ g'(x) &= \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

又

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) \cdot x + f'(x) - f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = g'(0).$$

因此, $g'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

习题3.C.3 设 $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + a_n = 0$, 证明: 方程 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个根.

解 设函数 $f(x) = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^{n-1} + \dots + a_nx$. 则 $f(0) = 0$, 且

$$f(1) = \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + a_n = 0.$$

由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f'(\xi) = 0$, 即

$$a_0\xi^{n-1} + a_1\xi^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0.$$

习题3.C.4 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

解 设函数 $g(x) = e^x f(x)$, 则 $g(a) = g(b) = 0$. 由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$g'(\xi) = e^\xi f'(\xi) + e^\xi f(\xi) = e^\xi(f'(\xi) + f(\xi)) = 0.$$

因为 $e^\xi \neq 0$, 故 $f'(\xi) + f(\xi) = 0$.

习题 3.C.5 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果任给 I 中两点 x_1, x_2 , 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

证明: $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数.

我们将此习题完整表示为以下定理:

定理 设 $f(x)$ 在 I 上有定义, 若 $\forall x_1, x_2 \in I$, 以下三式等价:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1), \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (\text{A})$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \quad (\text{B})$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{C})$$

证明 我们使用向前和向后两步归纳法证明此定理.

(1) 第一步我们先证明: 式 (B) 成立 \Rightarrow 式 (C) 成立.

(a) 由式 (B) 知式 (C) 当 $n = 2$ 时成立. 现证 $n = 4$ 时式 (C) 成立. 事实上, 对 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$, 由式 (B), 我们有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right) &= f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right) \leq \frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2} \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4}. \end{aligned}$$

此即式 (C) 对 $n = 4$ 成立. 一般来说, 对任一自然数 k , 重复上面方法, 应用 (B) 式 k 次, 可知

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2k}}{2^k}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2k})}{2^k}.$$

这说明式 (C) 对一切 $n = 2^k$ 皆成立.

(b) 证明式 (C) 对 $n = k+1$ 成立时, 必对 $n = k$ 也成立. 记 $A = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}$, 则 $x_1+x_2+\cdots+x_k = kA$, 所以

$$A = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+A}{k+1}.$$

因此式 (C) 对 $n = k+1$ 成立, 故

$$f(A) = \left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+A}{k+1}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(A)}{k+1}.$$

不等式两边同时乘以 $k+1$, 减去 $f(A)$, 最后除以 k . 注意

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k},$$

我们得到

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k)}{k}.$$

此式表示式 (C) 对 $n = k$ 成立.

(2) 第二步我们证明: 式 (C) 成立 \Rightarrow 式 (A) 成立.

(a) 当 $\lambda_1 = \frac{m}{n}, \lambda_2 = \frac{n-m}{n}$ 为有理数时,

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f\left(\frac{m}{n}x_1 + \frac{n-m}{n}x_2\right) \\ &= f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_1 + x_2 + \cdots + x_2}{n}\right) \\ &\leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_2)}{n} \\ &= \frac{m}{n}f(x_1) + \frac{n-m}{n}f(x_2). \end{aligned}$$

(b) 当 λ_1, λ_2 为无理数时, 由有理数的稠密性, 存在 $\lambda_n \rightarrow \lambda_1$, 由 f 的连续性, 有

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_1 + (1 - \lambda_n)x_2\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\lambda_n x_1 + (1 - \lambda_n)x_2) \\ &\leqslant \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n f(x_1) + (1 - \lambda_n)f(x_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \end{aligned}$$

习题 3.C.6 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上的二阶可微函数, $f(0) = f(1) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1 - \xi}.$$

解 设函数 $g(x) = (1 - x)f(x)$, 则 $g(0) = g(1) = 0$. 由 Rolle 定理, 存在 $\eta \in (0, 1)$, 使得

$$g'(\eta) = -f(\eta) + (1 - \eta)f'(\eta) = 0$$

同时 $g'(1) = -f(1) + (1 - 1)f'(1) = 0$. 再次应用 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$, 使得

$$g''(\xi) = -2f'(\xi) + (1 - \xi)f''(\xi) = 0.$$

故

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1 - \xi}.$$

习题 3.C.7 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = f(b) = 0, f'(a)f'(b) > 0$. 证明: 在 (a, b) 内存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) = 0$.

解 不妨设 $f'(a) > 0, f'(b) > 0$. 则由

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

知存在 $\delta_1 > 0$, 使得当 $x \in (a, a + \delta_1)$ 时, $f(x) > 0$. 同理, 由

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0,$$

知存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $x \in (b - \delta_2, b)$ 时, $f(x) < 0$. 令 $\delta = \min \left\{ \delta_1, \delta_2, \frac{b - a}{2} \right\}$, 则 $f(a + \delta) > 0, f(b - \delta) < 0$. 由介值定理, 存在 $\xi \in (a + \delta, b - \delta) \subset (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$.

习题 3.C.8 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导, $f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{2}$. 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

解

(1) 若 $f(x) > 0$ 在 $[0, 1]$ 上成立, 则设函数 $g(x) = x - \frac{1}{f(x)}$, 则 $g(0) = -1, g(1) = 1 - 2 = -1$.

由 Rolle 定理, 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得

$$g'(\xi) = 1 + \frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 0.$$

故

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

(2) 若 $f(x) > 0$ 在 $[0, 1]$ 上不成立, 考虑 $x_0 := \inf\{x : f(x) = 0\}$, 则 $f(x_0) = 0$. 这是因为 $x_0 = \inf\{x : f(x) = 0\} \Rightarrow \exists \{x_n\}, x_n \rightarrow x_0, f(x_n) = 0$, 由 f 的连续性可知 $f(x_0) = 0$.

此时作以下分类:

(a) 若 $f'(x_0) = 0$, 则 $f^2(x_0) + f'(x_0) = 0$ 成立.

(b) 若 $f'(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上单调递增. 又 $f(x_0) = 0$, 所以当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时, $f(x) < 0$. 这与 $x_0 = \inf\{x : f(x) = 0\}$ 矛盾.

(c) 若 $f'(x_0) < 0$, 存在 $f(x)$ 在 $[x_0, 1]$ 上的极小值点 $y_0 : f(y) < 0$, 则 $f'(y_0) = 0$. 因此

$$f^2(x_0) + f'(x_0) = f'(x_0) < 0,$$

$$f^2(y_0) + f'(y_0) = f^2(y_0) \geqslant 0.$$

注 我希望对 $f^2(x) + f'(x)$ 这个函数应用介值性, 但是我们只知道 $f(x)$ 可导, 且不能直接说 $f(x)$ 的连续性, 加 $f'(x)$ 的介值性得到 $f^2(x) + f'(x)$ 的介值性. 所以只好这么别扭的构造如下的 $h(x)$.

考虑 $h(x) = e^{\int_0^x f(t) dt} f(x)$, 则 $h'(x) = e^{f(x)} (f^2(x) + f'(x))$. 因此 $h'(x_0) < 0, h'(y_0) \geqslant 0$.

由 Darboux 定理, 存在 $\xi \in (x_0, y_0) \subset (0, 1)$, 使得 $h'(\xi) = 0$, 即

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

习题 3.C.9 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上二阶可微, 且满足 $f(a) > 0, f'(a) < 0$, 以及当 $x > a$ 时, $f''(x) \leq 0$. 试证在区间 $(a, +\infty)$ 内, 函数 $f(x)$ 恰有一个零点.

解 若无零点, 取 $x > a - \frac{f(a)}{f'(a)}$, 则由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (a, x)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{-f(a)}{x - a} > f'(a),$$

这与 $f''(x) \leq 0$ 矛盾.

若有两个零点, 记为 $x_1 < x_2$, 则由拉格朗日中值定理知, 存在 $\eta \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 > f'(a),$$

这与 $f''(x) \leq 0$ 矛盾.

习题 3.C.10 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f'(x)$ 严格单调增. 若 $f(a) = f(b) = \lambda$, 证明: 对任意 $x \in (a, b)$, 有 $f(x) < \lambda$.

解 由课本定理 3.28, $f'(x)$ 严格单调增, 故为严格凸函数. 由 Jensen 不等式, 对任意 $x \in (a, b)$, 有

$$f(x) = f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = \lambda.$$

习题 3.C.11 函数 $\frac{\sin x^2}{x}$ ($x > 0$) 表明, 若函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 不能保证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在. 证明: 若已知该极限存在, 则其值必然为零.

解 由 L'Hôpital 法则, 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 存在且等于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$. 又因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ 存在, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L}{x} = 0.$$

因此 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

习题 3.C.12 设函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时二阶可微, 且 $f''(x) < 0, f(0) = 0$. 证明: 对任意正数 x_1, x_2 , 有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

解 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_1 + x_2)$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_1 + x_2) - f(x_2)}{x_1}.$$

由题设 $f''(x) < 0$, 知 $f'(x)$ 严格单调减, 且 $\xi_1 < \xi_2$, 故 $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$, 即

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} > \frac{f(x_1 + x_2) - f(x_2)}{x_1}.$$

整理即得.

习题3.C.13 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数, 求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

注 不能使用 L'Hôpital 法则, 因为缺定理条件.

解

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) + f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) - 2f(x_0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0)h^2 + o(h^2)}{h^2} = f''(x_0). \end{aligned}$$

习题3.C.14 证明下列不等式.

- (1) 对任意实数 x , $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$;
- (2) 对 $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1 + x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$;
- (3) 对 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$;
- (4) 对任意实数 x, y , 有 $2e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant e^x + e^y$.

解

(1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^\xi}{24}x^4 \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \xi \in (0, x).$$

(2)

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{(1 + \xi)^{-3}}{3}x^3 \geqslant x - \frac{x^2}{2}, \xi \in (0, x), \\ \ln(1 + x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{(1 + \eta)^{-4}}{4}x^4 \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \eta \in (0, x). \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos \xi}{24}x^4 \geqslant x - \frac{x^3}{6}, \xi \in (0, x), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{\sin \eta}{720}x^6 \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \eta \in (0, x). \end{aligned}$$

(4) 由 e^x 为凸函数, 以及 Jensen 不等式, 知

$$e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2}.$$

习题3.C.15 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

解

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} + o\left(\frac{k^2}{n^4}\right) \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{2n^2 + 3n + 1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= e^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

另解 由 $\ln(1+x) < x$, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \right) = e^{\frac{1}{2}}.$$

由 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{1 + \frac{k}{n^2}} \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n} \right) = e^{\frac{1}{2}}.$$

习题 3.C.16 求 $\sqrt[n]{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的最大值.

解 设函数 $f(x) = \sqrt[n]{x} = e^{\frac{\ln x}{n}}$, 则

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{n}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

当 $x = e$ 时, $f'(x) = 0$, 且 $f'(x) > 0$ 当 $x \in (0, e)$, $f'(x) < 0$. 故

$$\sqrt[n]{n} \geq \begin{cases} \sqrt[3]{3}, & n \geq 3, \\ \sqrt{2}, & n = 1, 2. \end{cases}$$

又 $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$, 故 $\sqrt[n]{n}$ 的最大值为 $\sqrt[3]{3}$, 当 $n = 3$ 时取到.

习题 3.C.17 试给出函数 $x \cos x$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的一个尽可能小的上界.

解

$$0.5610963381910451$$

习题 3.C.18 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1, 1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$. 证明: 存在 $\xi \in (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$.

解 由 Taylor 展开

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\xi_1)}{6}, \quad \xi_1 \in (0, 1),$$

$$f(-1) = f(0) - f'(0) + \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\xi_2)}{6}, \quad \xi_2 \in (-1, 0).$$

整理得 $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6$. 不妨设 $f'''(\xi_1) \geq 3$, 则存在 $\xi \in (0, \xi_1) \subset (-1, 1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$.

习题 3.C.19 设 $a > 1$, 函数 $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 可微. 求证: 存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$, 使得

$$f'(x_n) < f(ax_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

解 反证法. 若不存在如此数列, 则存在 $M > 0$, 使得当 $x > M$ 时, $f'(x) \geq f(ax)$. 由 Lagrange 中值定理, 对任意 $x > M$, 存在 $\xi \in (x, ax)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(ax) - f(x)}{(a-1)x} \leq \frac{f(ax)}{(a-1)x}.$$

因为在 $(M, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, 因此 $f''(\xi) \geq f(a\xi) \geq f(ax)$, 另一方面取 $x > \frac{1}{a-1}$ 有 $f(ax) > \frac{f(ax)}{(a-1)x}$. 综上, 当 $x > \max\left\{M, \frac{1}{a-1}\right\}$ 时, $f'(\xi) < f(ax)$, 矛盾.

习题 3.C.20 利用凸函数的性质证明 Hölder (赫尔德) 不等式: 设 $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是正数, p, q 是大于 1 的正数, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(提示: 考虑函数 $f(x) = x^p$.)

解 由题设知 $f(x) = x^p$ 为凸函数, 由 Jensen 不等式, 对任意正数 c_i , 有

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i}{\sum_{i=1}^n c_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n c_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n c_i}.$$

取 $c_i = b_i^q, x_i = \frac{a_i}{b_i}$, 则

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i^q}\right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n b_i^q \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p b_i^{q-p}}{\sum_{i=1}^n b_i^q}.$$

整理得

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

因为 $q-p = \frac{q}{p}$, 所以

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

第 4 章 不定积分

习题 4.1

习题 4.1.1 求下列不定积分:

$$(1) \int x(x-1)^3 dx;$$

$$(2) \int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx;$$

$$(3) \int (2^x + 3^x)^2 dx;$$

$$(4) \int \tan^2 x dx;$$

$$(5) \int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$$

$$(6) \int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$$

解

(1)

$$\begin{aligned}\int x(x-1)^3 dx &= \int (x-1)^4 + (x-1)^3 dx \\&= \frac{(x-1)^5}{5} + \frac{(x-1)^4}{4} + C \\&= \frac{1}{20}(x-1)^4(4x+1) + C \\&= \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1} dx &= \int \frac{(e^x+1)(e^{2x}-e^x+1)}{e^x+1} dx = \int e^{2x}-e^x+1 dx \\&= \frac{1}{2}e^{2x}-e^x+x+C\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int (2^x + 3^x)^2 dx &= \int 2^{2x} + 2 \cdot 2^x 3^x + 3^{2x} dx \\&= \frac{1}{2 \ln 2} 2^{2x} + \frac{2}{\ln 6} 6^x + \frac{1}{2 \ln 3} 3^{2x} + C\end{aligned}$$

(4)

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

(5)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C$$

(6)

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx &= \int \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sec^2 x dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \tan x + C\end{aligned}$$

习题 4.1.2 用第一代换法求下列不定积分:

(1) $\int (2x - 1)^{100} dx;$

(2) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx;$

(3) $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx;$

(4) $\int \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx;$

(5) $\int x \sqrt{1 - x^2} dx;$

(6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$

(7) $\int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1 + x^2} dx;$

(8) $\int \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} dx;$

(9) $\int \sin^2 x dx;$

(10) $\int \sin^5 x \cos x dx.$

解

(1)

$$\int (2x - 1)^{100} dx = \int (2x - 1)^{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 dx = \int (2x - 1)^{100} \cdot \frac{1}{2} d(2x - 1) = \frac{(2x - 1)^{101}}{202} + C.$$

(2)

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \int \sin \frac{1}{x} \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int \sin \frac{1}{x} \cdot (-1) d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos \frac{1}{x} + C.$$

(3)

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{1 + \sin x + \cos x} = \ln |1 + \sin x + \cos x| + C.$$

(4)

$$\int \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx = \int \arctan x d\arctan x = \frac{1}{2} \arctan^2 x + C.$$

(5)

$$\int x \sqrt{1 - x^2} dx = \int \sqrt{1 - x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2x) dx = \int \sqrt{1 - x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) d(1 - x^2) = \frac{1}{3} (1 - x^2)^{3/2} + C.$$

(6)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} dx = \int \frac{1}{1+x} \cdot 2 \cdot d\sqrt{x} = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$$

(7)

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx &= \int \arctan \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot (-x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\&= \int \arctan \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} d\left(\frac{1}{x}\right) \\&= \frac{1}{2} \arctan^2 \frac{1}{x} + C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx &= \int \frac{\operatorname{arccot} x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arccot} x \cdot (-1) \cdot d(\operatorname{arccot} x) \\&= -\frac{1}{2} \operatorname{arccot}^2 x + C.\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} dx &= \int \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot x dx \\&= \int \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} \cdot \frac{1}{x} d(x \ln x) \\&= \int \frac{1}{u} du = \ln |1+x \ln x| + C.\end{aligned}$$

(9)

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C. = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C.$$

(10)

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^5 x d(\sin x) = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

习题 4.1.3 用第二代换法求下列不定积分, 其中的 a 均为正常数:

$$(1) \int \sqrt{e^x - 2} dx;$$

$$(2) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx;$$

$$(3) \int \frac{1}{(x^2 - a^2)^{3/2}} dx;$$

$$(4) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx;$$

$$(5) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} dx;$$

$$(6) \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx;$$

$$(7) \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx;$$

$$(8) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} dx;$$

$$(9) \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx;$$

$$(10) \int \frac{x^{1/7} + x^{1/2}}{x^{8/7} + x^{1/14}} dx;$$

$$(11) \int \frac{x-1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx;$$

$$(12) \int \frac{1}{x^8(1+x^2)} dx.$$

解

(1)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x - 2} dx &\stackrel{x=\ln(t^2+2)}{=} \int \sqrt{t^2} \cdot \frac{2t}{t^2+2} dt \stackrel{t \geq 0}{=} \int \frac{2t^2}{t^2+2} dt = \int \left(2 - \frac{4}{t^2+2}\right) dt \\ &= 2t - 2\sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C \stackrel{t=\sqrt{e^x-2}}{=} 2\sqrt{e^x-2} - 2\sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{e^x-2}}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

(2) 令 $t^2 = x^2 + a^2$, 则 $t = \sqrt{x^2 + a^2} > 0$, 对 $t^2 = x^2 + a^2$ 两侧同时取微分, 有

$$t dt = x dx,$$

因此

$$\begin{aligned} \int t dx &= \frac{1}{2} \int (t dx + x dt) + \frac{1}{2} \int (t dx - x dt) \\ &= \frac{1}{2} \left(xt + a^2 \int \frac{dx}{t} \right) \end{aligned}$$

其中,

$$\frac{dx}{t} = \frac{dt}{x} = \frac{d(x+t)}{x+t} \Rightarrow \int \frac{dx}{t} = \int \frac{d(x+t)}{x+t} = \ln|x+t| + C.$$

整理一下就是,

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \int t dx = \frac{1}{2} (xt + a^2 \ln|x+t| + C) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + C.$$

注 当然这道题有更简单的计算方式, 但是我们仿照以上过程可以得到一个快速计算式:

$$\int p dq = \frac{1}{2} \left(pq + c^2 \int \frac{dq}{p} \right), \quad \int \frac{dq}{p} = \begin{cases} \ln|p+q| + C, & p^2 - q^2 = c^2; \\ \arctan \frac{q}{p} + C, & p^2 + q^2 = c^2; \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &\stackrel{x=a\tan t}{=} \int a \sec t \cdot a \sec^2 t dt = a^2 \int \sec^3 t dt = \frac{a^2}{2} (\sec t \tan t + \ln|\sec t + \tan t|) + C \\ &\stackrel{\tan t = \frac{x}{a}, \sec t = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}}{=} \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &\stackrel{x=a\sinh t}{=} \int a \cosh t \cdot a \cosh t dt = a^2 \int \cosh^2 t dt = \frac{a^2}{2} (\sinh t \cosh t + t) + C \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

注 $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

(3)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 - a^2)^{3/2}} dx &\stackrel{x=a\sec t}{=} \int \frac{a \sec t \tan t}{(a^2 \tan^2 t)^{3/2}} dt = \frac{1}{a^2} \int \csc t \cot t dt = -\frac{1}{a^2} \csc t + C \\ &\stackrel{\csc t = \frac{\sec t}{\sqrt{\sec^2 t - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{=} -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} + C. \end{aligned}$$

(4)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \stackrel{x=a \sin t}{=} \int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int \sin^2 t dt = a^2 \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t \right) + C$$

$$\stackrel{\sin t = \frac{x}{a}, \cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}{=} \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

(4) 记 $p = \sqrt{a^2 - x^2}$, $q = x$, 则

$$\begin{aligned} \int \frac{q^2}{p} dq &= -\frac{1}{2} \left(\int p dq + q dp \right) + \frac{1}{2} \int \frac{p^2 + q^2}{p} dq \\ &= -\frac{1}{2} pq + \frac{a^2}{2} \int \frac{dq}{p} = -\frac{1}{2} pq + \frac{a^2}{2} \arctan \frac{q}{p} + C. \\ &= -\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C. \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} dx &\stackrel{t=\sqrt{x+1}}{=} \int \frac{2t}{1+t} dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = 2t - 2 \ln |1+t| + C \\ &\stackrel{t=\sqrt{x+1}}{=} 2\sqrt{x+1} - 2 \ln |1 + \sqrt{x+1}| + C. \end{aligned}$$

(6)

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \ln x + \left(\sqrt{1+x^2} - 1 \right)$$

(6)

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx &= \int \ln x d \left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ &= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(\ln x) \\ &= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{1}{x \sqrt{1+x^2}} dx \end{aligned}$$

对于 $I_1 = \int \frac{1}{x \sqrt{1+x^2}} dx$, 令 $t = 1/x$, 则 $dx = -1/t^2 dt$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{(1/t) \sqrt{1+1/t^2}} d \left(-\frac{1}{t^2} \right) = \int \frac{t}{\sqrt{(t^2+1)/t^2}} \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= - \int \frac{t^2}{t^2 \sqrt{t^2+1}} dt = - \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= - \ln |t + \sqrt{t^2+1}| + C = - \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right| + C \\ &= - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

所以, 原式 $= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} \right| + C$.

$$(7) \text{ 令 } t = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } dt = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} dx = \frac{1 - \ln x}{x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx &= \int \frac{1 - \ln x}{x^2(1 - \frac{\ln x}{x})^2} dx = \int \frac{1}{(1-t)^2} dt \\ &= \frac{1}{1-t} + C = \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} + C = \frac{x}{x - \ln x} + C. \end{aligned}$$

$$(8) \text{ 令 } x = a \tan t, dx = a \sec^2 t dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \int \frac{a \sec^2 t}{(a \tan t)^2 \sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2}} dt \\ &= \int \frac{a \sec^2 t}{a^2 \tan^2 t \cdot a \sec t} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{\sec t}{\tan^2 t} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1/\cos t}{\sin^2 t / \cos^2 t} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \cot t \csc t dt = -\frac{1}{a^2} \csc t + C \\ &\stackrel{\tan t = x/a}{=} -\frac{1}{a^2} \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

$$(9) \text{ 令 } t = \sqrt[3]{2x+1}, \text{ 则 } t^3 = 2x+1, x = \frac{t^3 - 1}{2}, dx = \frac{3t^2}{2} dt.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx &= \int \frac{\frac{t^3-1}{2} + 2}{t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt = \int \frac{t^3+3}{2t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt \\ &= \frac{3}{4} \int (t^3+3) dt = \frac{3}{4} \int (t^4+3t) dt \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{t^5}{5} + \frac{3t^2}{2} \right) + C = \frac{3}{20} t^5 + \frac{9}{8} t^2 + C \\ &= \frac{3}{20} (2x+1)^{5/3} + \frac{9}{8} (2x+1)^{2/3} + C. \end{aligned}$$

$$(10) \text{ 令 } t = x^{1/14}, \text{ 则 } x = t^{14}, dx = 14t^{13} dt, u = t^5 = x^{5/14}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{1/7} + x^{1/2}}{x^{8/7} + x^{1/14}} dx &= \int \frac{t^2 + t^7}{t^{16} + t} \cdot 14t^{13} dt = 14 \int \frac{t^{14}}{t^{10} - t^5 + 1} dt \\ &= \frac{14}{5} \int \left(1 + \frac{u - \frac{1}{2}}{(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right) du \\ &= \frac{14}{5} \left(u + \frac{1}{2} \ln |u^2 - u + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u-1}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= \frac{14}{5} \left(x^{\frac{5}{14}} + \frac{1}{2} \ln |x^{\frac{10}{14}} - x^{\frac{5}{14}} + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^{\frac{5}{14}} - 1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$(11)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \int \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \end{aligned}$$

对于 $I_1 = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx$, 令 $x = \sec t$, $dx = \sec t \tan t dt$.

$$I_1 = \int \frac{\sec t \tan t}{\sec t \tan t} dt = t + C_1 = \operatorname{arcsec} x + C_1.$$

对于 $I_2 = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 - 1}} dx$, 令 $x = \sec t$, $dx = \sec t \tan t dt$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t} dt = \int \cos t dt = \sin t + C_2 \\ &\stackrel{\sec t=x}{=} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C_2. \end{aligned}$$

$$\text{原式} = I_1 - I_2 = \operatorname{arcsec} x - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C.$$

(12) 令 $t = 1/x$, $x = 1/t$, $dx = -1/t^2 dt$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^8(1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{(1/t)^8(1+1/t^2)} d\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \int \frac{t^8}{(t^2+1)/t^2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= -\int \frac{t^8}{t^2+1} dt = -\int \frac{t^8 - 1 + 1}{t^2+1} dt \\ &= -\int \frac{(t^4-1)(t^4+1)}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= -\int (t^2-1)(t^4+1) dt - \arctan t + C \\ &= -\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1) dt - \arctan t + C \\ &= -\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t\right) - \arctan t + C \\ &= -\frac{1}{7x^7} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan(1/x) + C. \end{aligned}$$

习题 4.1.4 求下列不定积分:

$$(1) \int |x| dx;$$

$$(2) \int \max\{1, x^2\} dx.$$

解

(1)

$$\int |x| dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C, & x \geq 0; \\ -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < 0. \end{cases}$$

(2)

$$\int \max\{1, x^2\} dx = \begin{cases} x - 1 + C, & |x| \leq 1; \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

习题 4.1.5 用分部积分法求下列不定积分:

$$(1) \int x \sin x dx;$$

$$(2) \int x^2 \ln x dx;$$

(3) $\int \cos(\ln x) dx;$

(4) $\int x^2 \cos 5x dx;$

(5) $\int \sec^3 x dx;$

(6) $\int x^2 e^x dx;$

(7) $\int x \arcsin x dx;$

(8) $\int x(\arctan x)^2 dx;$

(9) $\int (\arcsin x)^2 dx;$

(10) $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx.$

解

(1)

$$\int x \sin x dx = \int x d(-\cos x) = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

(2)

$$\int x^2 \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C.$$

(3)

$$\begin{aligned} I &= \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) - \int x d(\cos(\ln x)) \\ &= x \cos(\ln x) - \int x \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx \\ &= x \cos(\ln x) + \left(x \sin(\ln x) - \int x d(\sin(\ln x)) \right) \\ &= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I \end{aligned}$$

移项得 $2I = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C_1,$

$$\Rightarrow I = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos 5x \, dx &= \int x^2 d\left(\frac{1}{5} \sin 5x\right) \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \int \frac{1}{5} \sin 5x \, d(x^2) \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \frac{2}{5} \int x \sin 5x \, dx \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \frac{2}{5} \int x \, d\left(-\frac{1}{5} \cos 5x\right) \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \frac{2}{5} \left[-\frac{1}{5} x \cos 5x + \int \frac{1}{5} \cos 5x \, dx \right] \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x + \frac{2}{25} x \cos 5x - \frac{2}{25} \int \cos 5x \, dx \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x + \frac{2}{25} x \cos 5x - \frac{2}{125} \sin 5x + C
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
I &= \int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx = \int \sec x \, d(\tan x) \\
&= \sec x \tan x - \int \tan x \, d(\sec x) \\
&= \sec x \tan x - \int \tan x (\sec x \tan x) \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - I + \ln |\sec x + \tan x|
\end{aligned}$$

移项得 $2I = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C_1$,

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C$$

(6)

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x \, dx &= \int x^2 \, d(e^x) \\
&= x^2 e^x - \int e^x \, d(x^2) = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx \\
&= x^2 e^x - 2 \int x \, d(e^x) \\
&= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x \, dx \right) \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
\int x \arcsin x \, dx &= \int \arcsin x \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2}{2} \, d(\arcsin x) \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{-(1-x^2)+1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) - \frac{1}{2} \arcsin x + C \\
&= \frac{2x^2-1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
\int x (\arctan x)^2 \, dx &= \int (\arctan x)^2 \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \, d((\arctan x)^2) \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} \arctan x \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \arctan x \, dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \left(x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \right) + \int \arctan x \, d(\arctan x) \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C \\
&= \frac{x^2+1}{2} (\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
\int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 - \int x d((\arcsin x)^2) \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int x \cdot 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int \arcsin x \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int \arcsin x d(-2\sqrt{1-x^2}) \\
&= x(\arcsin x)^2 - \left[-2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int -2\sqrt{1-x^2} d(\arcsin x) \right] \\
&= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int 2\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C
\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}
\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx &= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int x d(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) \\
&= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\
&= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} d(x^2 + 1) \\
&= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C
\end{aligned}$$

习题 4.1.6 导出下列不定积分的递推公式:

$$(1) \int \sin^n x dx \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (2) \int x^n e^x dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

解

(1) 记 $I_n = \int \sin^n x dx$, 则

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx = \int \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n
\end{aligned}$$

移项得 $nI_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} + C$,

$$\Rightarrow I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} + C.$$

(2) 记 $J_n = \int x^n e^x dx$, 则

$$\begin{aligned} J_n &= \int x^n d(e^x) = x^n e^x - \int e^x d(x^n) \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n J_{n-1} \end{aligned}$$

习题 4.1.7 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{1}{1+e^x} dx;$$

$$(2) \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx;$$

$$(3) \int \frac{1}{x^4+x^6} dx;$$

$$(4) \int x \sqrt{x-2} dx;$$

$$(5) \int \frac{\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1}}{x} dx;$$

$$(6) \int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x-2}} dx;$$

$$(7) \int x e^x \sin x dx;$$

$$(8) \int \frac{1}{(1+\tan x) \sin^2 x} dx;$$

$$(9) \int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx;$$

$$(10) \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x^2} dx;$$

$$(11) \int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^3} dx;$$

$$(12) \int \frac{x}{1+\sin x} dx;$$

$$(13) \int \arcsin \sqrt{x} dx;$$

$$(14) \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx;$$

$$(15) \int x \sin^2 x dx;$$

$$(16) \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$(17) \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx;$$

$$(18) \int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx;$$

$$(19) \int e^{2x}(1+\tan x)^2 dx;$$

$$(20) \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx;$$

$$(21) \int \frac{\cos x \cos 2x}{\cos 3x} dx;$$

$$(22) \int \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx;$$

$$(23) \int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx;$$

$$(24) \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx;$$

$$(25) \int e^{-x^2/2} \frac{\cos x - 2x \sin x}{2\sqrt{\sin x}} dx;$$

$$(26) \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx.$$

解

$$(1) \text{令 } u = e^x, \text{则 } dx = \frac{du}{u}.$$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1}{u} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du$$

$$= \ln |u| - \ln |u+1| + C$$

$$= \ln(e^x) - \ln(1+e^x) + C = x - \ln(1+e^x) + C.$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx &= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{(x + \frac{1}{x})^2 - 1} dx\end{aligned}$$

令 $u = x + \frac{1}{x}$, 则 $du = (1 - \frac{1}{x^2})dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2 - 1} du &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - 1}{x + \frac{1}{x} + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right| + C.\end{aligned}$$

(3) 令 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x = \frac{1}{t}$, $dx = -\frac{1}{t^2}dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4(1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{(\frac{1}{t})^4(1+\frac{1}{t^2})} d\left(-\frac{1}{t^2}\right) \\ &= \int \frac{t^4}{t^2+1} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{t^4}{t^2+1} dt \\ &= -\int \frac{(t^4-1)+1}{t^2+1} dt = -\int \left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right) dt \\ &= -\left(\frac{t^3}{3}-t+\arctan t\right) + C \\ &= -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + C.\end{aligned}$$

(4) 令 $t = \sqrt{x-2}$, 则 $t^2 = x-2$, $x = t^2+2$, $dx = 2tdt$.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-2} dx &= \int (t^2+2) \cdot t \cdot (2tdt) = 2 \int (t^4+2t^2) dt \\ &= 2 \left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} \right) + C = \frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

(5) 令 $t = \sqrt{x-1}$, 则 $t^2 = x-1$, $x = t^2+1$, $dx = 2tdt$.

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{t \arctan t}{t^2+1} (2tdt) = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} \arctan t dt \\ &= 2 \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} \arctan t dt \\ &= 2 \int \arctan t dt - 2 \int \frac{\arctan t}{1+t^2} dt \\ &= 2t \arctan t - \ln(1+t^2) - (\arctan t)^2 + C \\ &= 2\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1} - \ln x - (\arctan \sqrt{x-1})^2 + C.\end{aligned}$$

(6) 令 $u = e^x - 2$, 则 $u + 2 = e^x$, 于是 $x = \ln(u + 2)$. 同时, $du = e^x dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 2}} dx &= \int \frac{\ln(u + 2)}{\sqrt{u}} du \\ &= \int \ln(u + 2) \cdot u^{-\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

接下来使用分部积分法:

$$\begin{aligned} \int \ln(u + 2) u^{-\frac{1}{2}} du &= 2\sqrt{u} \ln(u + 2) - \int \frac{1}{u + 2} \cdot 2\sqrt{u} du \\ &= 2\sqrt{u} \ln(u + 2) - 2 \int \frac{\sqrt{u}}{u + 2} du \end{aligned}$$

对于 $I_2 = \int \frac{\sqrt{u}}{u + 2} du$, 令 $t = \sqrt{u}$, 则 $u = t^2$, $du = 2t dt$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{t}{t^2 + 2} \cdot (2t dt) = \int \frac{2t^2}{t^2 + 2} dt \\ &= \int \frac{2(t^2 + 2) - 4}{t^2 + 2} dt \\ &= \int \left(2 - \frac{4}{t^2 + 2}\right) dt \\ &= 2t - 4 \int \frac{1}{t^2 + (\sqrt{2})^2} dt \\ &= 2t - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C_1 \\ &= 2\sqrt{u} - 2\sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}}\right) + C_1 \end{aligned}$$

将 I_2 代回原式:

$$\begin{aligned} I &= 2\sqrt{u} \ln(u + 2) - 2 \left[2\sqrt{u} - 2\sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}}\right) \right] + C \\ &= 2\sqrt{u} \ln(u + 2) - 4\sqrt{u} + 4\sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}}\right) + C \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= 2\sqrt{e^x - 2} \ln(e^x - 2 + 2) - 4\sqrt{e^x - 2} + 4\sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{e^x - 2}}{\sqrt{2}}\right) + C \\ &= 2x\sqrt{e^x - 2} - 4\sqrt{e^x - 2} + 4\sqrt{2} \arctan\left(\sqrt{\frac{e^x - 2}{2}}\right) + C. \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
I &= \int (x \sin x) d(e^x) \\
&= xe^x \sin x - \int e^x (x \cos x + \sin x) dx \\
&= xe^x \sin x - \int xe^x \cos x dx - \int e^x \sin x dx \\
&= xe^x \sin x - \int (x \cos x) d(e^x) - \int \sin x d(e^x) \\
&= xe^x \sin x - \left[xe^x \cos x - \int e^x (\cos x - x \sin x) dx \right] - \left[e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \right] \\
&= (x-1)e^x \sin x - xe^x \cos x + 2 \int e^x \cos x dx - \int xe^x \sin x dx \\
&= (x-1)e^x \sin x - xe^x \cos x + 2 \int e^x \cos x dx - I
\end{aligned}$$

已知 $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C'$.

$$2I = (x-1)e^x \sin x - xe^x \cos x + e^x(\sin x + \cos x) + C_1$$

$$2I = e^x(x \sin x - x \cos x + \cos x) + C_1$$

$$I = \frac{e^x}{2}(x(\sin x - \cos x) + \cos x) + C.$$

(8) 令 $u = 1 + \cot x$, 则 $du = -\csc^2 x dx$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\csc^2 x}{1 + \tan x} dx &= \int \frac{\csc^2 x}{1 + \frac{1}{\cot x}} dx = \int \frac{\cot x \csc^2 x}{\cot x + 1} dx \\
&= \int \frac{u-1}{u} (-du) = \int \left(-1 + \frac{1}{u} \right) du \\
&= -u + \ln |u| + C = -(1 + \cot x) + \ln |1 + \cot x| + C.
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx + \int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx
\end{aligned}$$

其中

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int \sqrt{x} d(-\sqrt{1-x}) = -\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}-1} \right) + C_1,$$

因此

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx = -(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x} + 2 \arctan \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}-1} \right) + C.$$

或者

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx = -(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x} + \arcsin \sqrt{x} + C.$$

(10) 令 $x = \sec t$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x^2} dx &= \int \sqrt{\frac{\sec t - 1}{\sec t + 1}} \cdot \cos^2 t \cdot \sec t \tan t dt = \int 1 - \cos t dt \\ &= t - \sin t + C = \operatorname{arcsec} x - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C \\ &= \arctan \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C. \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} - \int -\frac{1}{4(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx. \text{ 令 } x = \tan t, dx = \sec^2 t dt.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{(\sec^2 t)^3} \sec^2 t dt = \int \cos^4 t dt = \int \left(\frac{1+\cos 2t}{2} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int (1+2\cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{1}{4} \int \left(1+2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2}t + \sin 2t + \frac{1}{8}\sin 4t \right) + C_1 \\ &= \frac{3}{8}\arctan x + \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right) + \frac{1}{32} \left(\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \right) + C_1 \\ I &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4} \left[\frac{3}{8}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{x(1-x^2)}{8(1+x^2)^2} \right] + C \\ &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{x(3x^2+5)}{32(1+x^2)^2} + \frac{3}{32}\arctan x + C \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{x-x\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int x \sec^2 x dx - \int x \sec x \tan x dx \end{aligned}$$

$$I_1 = \int x d(\tan x) = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \ln |\sec x| + C_1. I_2 = \int x d(\sec x) =$$

$$x \sec x - \int \sec x dx = x \sec x - \ln |\sec x + \tan x| + C_2.$$

$$\begin{aligned} I &= I_1 - I_2 = (x \tan x - \ln |\sec x|) - (x \sec x - \ln |\sec x + \tan x|) + C \\ &= x(\tan x - \sec x) + \ln \left| \frac{\sec x + \tan x}{\sec x} \right| + C \\ &= x \left(\frac{\sin x - 1}{\cos x} \right) + \ln |1 + \sin x| + C. \end{aligned}$$

(13) 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $dx = 2tdt$.

$$\begin{aligned} I &= \int \arcsin t \cdot (2tdt) = 2 \int t \arcsin t dt \\ &= 2 \left[\frac{t^2}{2} \arcsin t - \int \frac{t^2}{2\sqrt{1-t^2}} dt \right] \\ &= t^2 \arcsin t - \int \frac{-(1-t^2)+1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= t^2 \arcsin t + \int \sqrt{1-t^2} dt - \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= t^2 \arcsin t + \left(\frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t \right) - \arcsin t + C \\ &= \left(t^2 - \frac{1}{2} \right) \arcsin t + \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + C \\ &= \frac{2x-1}{2} \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x(1-x)} + C. \end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{1+\cos x} dx + \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx \\ I_1 &= \int \frac{x}{2\cos^2(\frac{x}{2})} dx = \frac{1}{2} \int x \sec^2(\frac{x}{2}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x(2\tan(\frac{x}{2})) - \int 2\tan(\frac{x}{2}) dx \right] \\ &= x \tan(\frac{x}{2}) - \int \tan(\frac{x}{2}) dx = x \tan(\frac{x}{2}) - 2 \ln |\sec(\frac{x}{2})| + C_1. \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx. \text{ 令 } u = 1 + \cos x, du = -\sin x dx.$$

$$I_2 = \int \frac{1}{u} (-du) = -\ln |u| + C_2 = -\ln(1 + \cos x) + C_2.$$

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = x \tan(\frac{x}{2}) - 2 \ln |\sec(\frac{x}{2})| - \ln(2\cos^2(\frac{x}{2})) + C_3 \\ &= x \tan(\frac{x}{2}) - 2 \ln |\sec(\frac{x}{2})| - \ln 2 - 2 \ln |\cos(\frac{x}{2})| + C_3 = x \tan(\frac{x}{2}) + C. \end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}
I &= \int x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx \\
I_1 &= \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}. \\
I_2 &= \frac{1}{2} \int x d \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right) = \frac{1}{4} \left[x \sin 2x - \int \sin 2x dx \right] \\
&= \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) + C' = \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C'. \\
I &= I_1 - I_2 = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.
\end{aligned}$$

(16) 令 $u = 1 + x^2$, 则 $x^2 = u - 1$, $du = 2x dx$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} d \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}) du \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] + C \\
&= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C.
\end{aligned}$$

(17)

$$\begin{aligned}
I &= \arctan x \left(-\frac{1}{x} - \arctan x \right) - \int \left(-\frac{1}{x} - \arctan x \right) \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= -\frac{\arctan x}{x} - (\arctan x)^2 + \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\
I_1 &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1. \quad I_2 = \int \arctan x d(\arctan x) = \\
&\quad \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C_2. \\
I &= -\frac{\arctan x}{x} - (\arctan x)^2 + \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C \\
&= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.
\end{aligned}$$

(18) 令 $u = e^x$, $du = e^x dx$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx &= \int \frac{\arctan u}{u^2} du = \int \arctan u d \left(-\frac{1}{u} \right) \\
&= -\frac{\arctan u}{u} + \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1+u^2} du \\
&= -\frac{\arctan u}{u} + \ln \left| \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right| + C \\
&= -\frac{\arctan e^x}{e^x} + \ln \left| \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right| + C.
\end{aligned}$$

(19)

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{2x}(1 + 2\tan x + \tan^2 x)dx \\
&= \int e^{2x}(\sec^2 x + 2\tan x)dx \\
&= \int e^{2x} \sec^2 x dx + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= \int e^{2x} d(\tan x) + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= \left[e^{2x} \tan x - \int \tan x d(e^{2x}) \right] + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= e^{2x} \tan x - \int \tan x \cdot (2e^{2x}) dx + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= e^{2x} \tan x + C.
\end{aligned}$$

(20)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx &= \int \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx \\
&= \int \frac{x}{\cos x} d\left(-\frac{1}{x \sin x + \cos x}\right) \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} - \int \left(-\frac{1}{x \sin x + \cos x}\right) d\left(\frac{x}{\cos x}\right) \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{x \sin x + \cos x} \left(\frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}\right) dx \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \tan x + C \\
&= \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} + C.
\end{aligned}$$

(21)

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int \cos^2 2x + \cos 2x \cos 4x dx \\
&= \frac{1}{4} \int 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x dx \\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + C.
\end{aligned}$$

(22)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2} dx \\
&= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(x+1) - (x-1)} dx = \frac{1}{2} \int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + C \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t+1}} \cdot 2t dt \quad (t = \sqrt{x}, dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx) \\
&= \frac{4}{3}(t-2)\sqrt{t+1} + C \\
&= \frac{4}{3}(\sqrt{x}-2)\sqrt{\sqrt{x}+1} + C.
\end{aligned}$$

(24)

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}} d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}(-2)\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}} + C = -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}} + C.$$

(25)

$$\begin{aligned}
\int e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\cos x - 2x \sin x}{2\sqrt{\sin x}} dx &= \int \frac{\cos x - 2x \sin x}{(-x) \cdot 2\sqrt{\sin x}} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) \\
&= - \int \frac{\cos x}{2x\sqrt{\sin x}} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) + \left(\frac{2x \sin x}{2x\sqrt{\sin x}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \int e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{\sin x}{\sqrt{\sin x}}\right) \right) \\
&= - \int \frac{\cos x}{2x\sqrt{\sin x}} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) + e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{\sin x} - \int e^{-\frac{x^2}{2}} d(\sqrt{\sin x}) \\
&= e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{\sin x}
\end{aligned}$$

(26)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx &= -\frac{x e^x}{1+x} - \int \left(-\frac{1}{1+x}\right) e^x (1+x) dx \\
&= -\frac{x e^x}{1+x} + \int e^x dx = -\frac{x e^x}{1+x} + e^x + C \\
&= e^x \left(1 - \frac{x}{1+x}\right) + C = \frac{e^x}{1+x} + C.
\end{aligned}$$

习题 4.2

我没招了, 这一节实在不想写过程了, 算法在教材上都有, 算就是了.

习题 4.2.1 求下列有理函数的不定积分:

$$(1) \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$$

$$(2) \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

$$(3) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} dx$$

$$(4) \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + x)} dx$$

$$(5) \int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx$$

$$(6) \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

$$(7) \int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1} dx$$

$$(8) \int \frac{x^{15}}{(x^8 + 1)^2} dx$$

解

(1)

$$\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

(2)

$$\frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.$$

(3)

$$x + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$$

(4)

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

(5)

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(6)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\arctan (\sqrt{2}x + 1) - \arctan (1 - \sqrt{2}x) \right) + C.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x - x^{-1}}{\sqrt{2}} + C.$$

(7)

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \right| + C.$$

(8)

$$\frac{1}{8} \left(\frac{1}{x^8 + 1} + \ln |x^8 + 1| \right) + C.$$

习题 4.2.2 求下列三角函数有理式的不定积分, 其中 a, b 是常数:

$$(1) \int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$$

$$(2) \int \frac{\sin^5 x}{\cos x} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx$$

$$(4) \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$(5) \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$$

$$(6) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$$

$$(7) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$(8) \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} dx$$

$$(9) \int \frac{1}{2 \sin x + \sin 2x} dx$$

$$(10) \int \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x} dx, a^2 + b^2 \neq 0.$$

解

(1)

$$\frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{2}} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

(2)

$$-\ln |\cos x| - \frac{1}{4} \sin^4 x + \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

(3)

$$\tan x - 2 \cot x - \frac{1}{3} \cot^3 x + C.$$

(4)

$$\frac{1}{8}(-\sin 2x + 2 \cos 2x) + 2 \ln |\sin x + \cos x| + C.$$

(5)

$$\frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x) + C.$$

(6)

$$x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x)$$

(7)

$$\frac{1}{2} \left(\sin x - \cos x + \operatorname{arctanh} \left(\frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2}} \right) \right) + C.$$

$$\frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

(8)

$$\frac{-3 \cos 2x + \cos 6x}{6 \cos^3 x \sin^3 x} + C.$$

(9)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\cos x + 1} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right) + C. \\ & \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\cos x + 1} + \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| \right) + C. \end{aligned}$$

(10)

$$\frac{a \ln |a \sin x + b \cos x| + bx}{a^2 + b^2} + C.$$

第 5 章 单变量函数的积分

习题 5.1

习题 5.1.1 指出下面的哪些函数在区间 $[0, 1]$ 上可积, 并说明理由.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} \left[\frac{1}{x} \right], & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解

- (1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 故可积.
- (2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上有界, 且只有一点间断, 故可积.
- (3) 函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上无界, 故不可积.

习题 5.1.2 证明: Dirichlet 函数在任意区间 $[a, b]$ 上不可积. (因此有界的函数未必可积.)

设 $f(x)$ 是 Dirichlet 函数, 即

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

取区间 $[a, b]$ 上的任意一个分点集 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 则对每一个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 由于 \mathbb{Q} 和 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 在 \mathbb{R} 上稠密, 故在该子区间内既有有理数也有无理数.

- 当 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 为有理数时, $f(\xi_i) = 1$;

$$S_n(T) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = b - a;$$

- 当 $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 为无理数时, $f(\eta_i) = 0$;

$$S_n(T) = \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

因此, 不同的取样点所对应的 Riemann 和可以取到不同的值, 即不存在 I , 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(T) = I$.

习题 5.1.3 举例说明, 一个函数的绝对值函数在 $[a, b]$ 上可积, 不能保证该函数在 $[a, b]$ 上可积.
(提示: 适当的修改 Dirichlet 函数可得出这样的例子. 比较习题 2.1 中第 5 题.)

解 设函数 $f(x)$ 如下定义:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

则 $|f(x)| = 1$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 故 $|f(x)|$ 在区间 $[a, b]$ 上可积. 但

$$S_n(T) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \begin{cases} b-a, & \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \cap \mathbb{Q} \\ -(b-a), & \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

即证明了 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上不可积.

习题 5.1.4

- (1) 设可积函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负, 且在一点 c 处连续 (这里 $a \leq c \leq b$), 若 $f(c) > 0$, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$;
- (2) 证明: 若 f 是区间 $[a, b]$ 上非负的连续函数, 且不恒为零, 则 $\int_a^b f(x) dx > 0$;
- (3) 举例说明, 有这样的可积函数 f , 在区间 $[a, b]$ 上非负且不恒为零, 但 f 在该区间上的积分为 0.

解

- (1) 由 $f(c) > 0$ 和 $f(x)$ 在 c 处连续, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - c| < \delta$ 时, 有 $f(x) > \frac{f(c)}{2} > 0$.

取区间 $[c - \delta, c + \delta] \cap [a, b]$, 则

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} dx = f(c)\delta > 0.$$

- (2) 由 f 在 $[a, b]$ 上不恒为零, 存在 $c \in [a, b]$, 使得 $f(c) > 0$. 由(1)可知 $\int_a^b f(x) dx > 0$.

- (3) 函数 $f(x)$ 定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ -1 & \frac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负且不恒为零, 但

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} 1 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (-1) dx = 0.$$

习题 5.1.5 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递增, 证明:

$$(b-a)f(a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(b).$$

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 应该有什么样的不等式?

解

$$f \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(b) dx = (b-a)f(b).$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b f(a) dx = (b-a)f(a).$$

若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调递减, 则

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(a).$$

习题 5.1.6 证明下列不等式:

$$(1) \int_0^{2\pi} |a \sin x + b \cos x| dx \leq 2\pi \sqrt{a^2 + b^2} (a, b \text{ 为常数});$$

$$(2) \int_0^1 x^m (1-x)^n dx \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} (m > 0, n > 0 \text{ 均为常数}).$$

解

(1)

$$\int_0^{2\pi} |a \sin x + b \cos x| dx \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{(a^2 + b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dx = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(2) 对 $f(x) = x^m (1-x)^n$ 求导:

$$f'(x) = mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1} = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m(1-x) - nx].$$

令 $f'(x) = 0$, 得到 $m(1-x) = nx$, 即 $x = \frac{m}{m+n}$.

$$\text{在这点处, } f\left(\frac{m}{m+n}\right) = \left(\frac{m}{m+n}\right)^m \left(\frac{n}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

由于 $f(0) = f(1) = 0$, 且 $f(x) \geq 0$ 在 $[0, 1]$ 上, 所以 $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ 是 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值.

因此

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx \leq \int_0^1 \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} dx = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

习题 5.1.7

(1) 证明: 积分中值定理中的 ξ 值, 可取在区间 $[a, b]$ 内部;

(提示: 由该定理的证明可见, 只要指出当 f 的最大值 M 或最小值 m 在区间端点取得, 且等于 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 时, 结论成立.)

(2) 举例说明, 积分中值定理中连续性的条件是必需的.

(提示: 在 $[-1, 1]$ 上, $f(x) = x$ 的积分为 0; 而改变 $f(x)$ 在某个点处的值, 不改变积分值.)

解

(1) 反证法: 若积分中值定理仅在边界, 不妨设为点 a 处取到, 则 $\int_a^b f(x) dx = f(a) \neq f(x), \forall x \in (a, b)$.

不妨假设 $f(x) > f(a) \Rightarrow f(x) - f(a) > 0$, 则由习题 5.1.4 可得

$$\int_a^b (f(x) - f(a)) dx > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > \int_a^b f(a) dx = (b-a)f(a),$$

矛盾.

(2) 函数 $f(x)$ 定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ -1 & \frac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负且不恒为零, 但

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} 1 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (-1) dx = 0.$$

习题 5.1.8 设 $f(x)$ 是区间 $[a, b]$ 上的连续函数. 证明: 若 $\int_a^b f(x) dx = 0$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 中至少有一个零点. (因此, 由函数的积分这一整体信息, 能够推断函数值的某些性质.)

解 反证法: 若 $f(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 上恒为正或恒为负. 不妨设 $f(x) > 0, \forall x \in (a, b)$.

由**习题 5.1.4** 可得

$$\int_a^b f(x) dx > 0,$$

这与题设 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 矛盾.

习题 5.1.9

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积且非负 (或非正) 的, 证明:

存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx$$

(提示: 与积分中值定理类似地证明.)

注 (1) 中的结果也称为积分中值定理的加权推广. 这种加权的积分中值定理也提供了估计积分的一个手段: 当 $\int_a^b \varphi(x) dx$ 不易计算时, 可试着将 $\varphi(x)$ 写成 $f(x)g(x)$, 其中 $f(x)$

和 $g(x)$ 满足上面 (1) 中的条件, 且使得 $\int_a^b g(x) dx$ 易于计算. 由此导出

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx,$$

这里 M, m 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值及最小值. 易见, $\int_a^b \varphi(x) dx$ 这一上、下界估计, 优于直接用定理 5.11 所得的结果.

(2) 举例说明, (1) 中对于函数 $g(x)$ 的假设是必需的. (提示: 在 $[-1, 1]$ 上, 取 $f(x) = g(x) = x$.)

解

(1) 在证明积分中值定理前我们先证明一个引理:

引理 5.1 设 $f \in R[a, b]$, 且 $I = \int_a^b f(x) dx > 0$, 则有子区间 $[c, d] \subset [a, b]$ 和 $\mu > 0$, 使在区间 $[c, d]$ 上成立 $f(x) \geq \mu$.

证明 证 1

从积分定义可知, 存在 $[a, b]$ 的一个分划 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 使得对从属于 P 的任何介点集 ξ , 成立

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i > \frac{I}{2} > 0.$$

记 $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, 并对于上面的和式取下确界, 就得到

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \geq \frac{I}{2} > 0.$$

显然在和式中至少有一项大于 0. 设这一项是第 k 项, 则就可取 $\mu = m_k$, $[c, d] = [x_{k-1}, x_k]$.

证明 证 2

用反证法. 若结论不成立, 则 (由对偶法则) 对于每个 $\mu > 0$ 和每个子区间 $[c, d]$, 存在 $\xi \in [c, d]$, 满足 $f(\xi) < \mu$. 在 f 的 Riemann 和式中对于任何分划都取满足这个要求的介点集, 这样就得到

$$\int_a^b f(x) dx \leq \mu(b-a).$$

由于 $\mu > 0$ 是任意的, 因此只能得到

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0,$$

与条件矛盾.

这里加强, 证明 $\xi \in (a, b)$.

证明 下列三种情况是平凡的, 不需要多加讨论:

(a) 如果积分 $\int_a^b g(x) dx = 0$, 则积分第一中值定理可以通过不等式左边也等于 0, 于是 ξ 可取, 结论已成立.

(b) 如果 f 在 $[a, b]$ 的最小值和最大值相等, 即 $m = M$, 则 f 为常值函数, 因此 ξ 也可取.

(c) 如果 $m < M$, 且 $\eta \in (m, M)$ 时, 连续函数的介值性可知存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = \eta$.

要讨论的只是以上三种情况之外的问题. 不妨设 g 在区间 $[a, b]$ 上非负, 且有 $\int_a^b g(x) dx > 0$. 又由于 $f(x) - m$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上均非负, 因此得到

$$0 = \int_a^b (f(x) - m)g(x) dx \geq \int_c^d (f(x) - m)dx > 0,$$

可以上式右边的积分仍等于 0. 由于 $f \in C[c, d]$, 这只能导致在区间 $[c, d]$ 上成立 $f(x) \equiv$

$m.$

因此在 $c, d \in (a, b)$ 中任取一点作为中值点即可.

(2) 设 $f(x) = x, g(x) = x$, 则

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

但对于任意 $\xi \in [-1, 1]$, 有

$$f(\xi) \int_{-1}^1 g(x)dx = \xi \int_{-1}^1 x dx = 0.$$

因此不存在 $\xi \in [-1, 1]$, 使得

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_{-1}^1 g(x)dx.$$

习题 5.1.10 举例说明: 在定理 5.13 中, 函数 $f(x)$ 在 $x = c$ 处连续, 不是 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $x = c$ 处可导的必要条件.

解 设函数 $f(x)$ 如下定义:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 但

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = 0,$$

故 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $F'(0) = 0$.

习题 5.1.11 求下列函数的导数.

$$(1) f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt;$$

$$(2) f(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2 + \cos^2 t} dt;$$

$$(3) f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt;$$

$$(4) f(x) = \sin \left(\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin t^2 dt \right) dy \right).$$

解

(1)

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin t^2 dt = \sin x^2.$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2 + \cos^2 t} dt = \frac{d}{d\left(\frac{1}{x}\right)} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2 + \cos^2 t} dt \cdot \frac{d\frac{1}{x}}{dx} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2} + \cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2 + 1 + x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt = \frac{d}{d(x^2)} \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt \cdot \frac{d(x^2)}{dx} \\ &= e^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2x e^{-x^4}. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sin \left(\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin t^2 dt \right) dy \right) \\ &= \cos \left(\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin t^2 dt \right) dy \right) \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin t^2 dt \right) dy \right) \\ &= \cos \left(\int_0^x \sin \left(\int_0^y \sin t^2 dt \right) dy \right) \cdot \sin \left(\int_0^x \sin t^2 dt \right). \end{aligned}$$

习题 5.1.12 对下面的函数, 求 $(f^{-1})'(0)$, 这里 f^{-1} 表示函数 f 的反函数.

$$(1) \quad f(x) = \int_0^x (1 + \sin(\sin t)) dt; \quad (2) \quad f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt.$$

解

(1) 设 $y = f(x)$,

$$dy = f'(x) dx = (1 + \sin(\sin x)) dx.$$

因此

$$(f^{-1})'(0) = \frac{dx}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{1}{1 + \sin(\sin x)} \Big|_{x=0} = 1.$$

(2) 设 $y = f(x)$,

$$dy = f'(x) dx = e^{-x^2} dx.$$

因此

$$(f^{-1})'(0) = \frac{dx}{dy} \Big|_{y=0} = e^{x^2} \Big|_{x=1} = e.$$

习题 5.1.13 设函数 $f(x)$ 处处连续. $F(x) = \int_0^x x f(t) dt$, 求 $F'(x)$.

解

$$F'(x) = \left(x \int_0^x f(t) dt \right)' = \int_0^x f(t) dt + x \cdot \left(\int_0^x f(t) dt \right)' = \int_0^x f(t) dt + x f(x).$$

习题 5.1.14 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为正值连续函数. 证明: 当 $x > 0$ 时, 函数

$$G(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

单调递增.

解

$$G'(x) = \frac{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)' \int_0^x f(t)dt - \left(\int_0^x f(t)dt\right)' \int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}.$$

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{\left(\int_0^x tf(t)dt\right)' \int_0^x f(t)dt - \left(\int_0^x f(t)dt\right)' \int_0^x tf(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \\ &= \frac{x f(x) \int_0^x f(t)dt - f(x) \int_0^x t f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \\ &= \frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \int_0^x (x-t) f(t)dt \geqslant 0. \end{aligned}$$

习题 5.1.15 用 Newton-Leibniz 公式计算下列积分.

$$(1) \int_0^x \sin x dx;$$

$$(2) \int_0^x x^\alpha dx, \alpha \text{ 为常数}, \alpha > 0;$$

$$(3) \int_1^{e^2} \ln x dx;$$

$$(4) \int_2^3 \frac{1}{2x^2 + 3x - 2} dx.$$

解

(1)

$$\int_0^x \sin x dx = -\cos x \Big|_0^x = 1 - \cos x.$$

(2)

$$\int_0^x x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

(3)

$$\int_1^{e^2} \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^{e^2} = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

(4)

$$\int_2^3 \frac{1}{2x^2 + 3x - 2} dx = \int_2^3 \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \ln |2x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+2| \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}.$$

习题 5.1.16 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leqslant x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ 求 $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$, 并研究 $F(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上的可微性.

解

• 当 $x \in [-1, 0)$ 时,

$$F(x) = \int_{-1}^x -1 dt = -x - 1;$$

- 当 $x = 0$ 时,

$$F(0) = \int_{-1}^0 -1 dt = -0 - 1 = -1;$$

- 当 $x \in (0, 1]$ 时,

$$F(x) = \int_{-1}^0 -1 dt + \int_0^x 1 dt = -0 - 1 + x - 0 = x - 1.$$

即

$$F(x) = \begin{cases} -x - 1, & -1 \leq x < 0, \\ -1, & x = 0, \\ x - 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

显然, $F(x)$ 在 $(-1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 上可微, 且

$$F'(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

考察 $x = 0$ 处的可微性:

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h - 1 - 0}{h} = -1;$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 1 - 0}{h} = 1.$$

因此 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处不可微.

习题 5.1.17 计算下面平面图形的面积.

- (1) 由曲线 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = x^2$ 所围成的图形;
- (2) 由曲线 $y = x^2$, $y = \frac{1}{4}x^2$ 及 $y = 1$ 所围成的图形.

解

- (1) 曲线 $y = \sqrt{x}$ 与 $y = x^2$ 的交点为 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$.

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

- (2) 曲线 $y = x^2$ 与 $y = 1$ 的交点为 $(-1, 1)$ 和 $(1, 1)$; 曲线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 与 $y = 1$ 的交点为 $(-2, 1)$ 和 $(2, 1)$.

$$S = \int_{-2}^{-1} \left(1 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx + \int_{-1}^1 \left(x^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \frac{4}{3}.$$

习题 5.1.18 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^3 x} \int_0^{\tan x} \arcsin t^2 dt;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, p \text{ 是常数}, p > 0.$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^3 x} \int_0^{\tan x} \arcsin t^2 dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\tan x} \arcsin t^2 dt}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\tan x)^2 \sec^2 x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin(\tan x))^2}{3x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)^2}{3x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^4 x} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^p \\ &= \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

习题 5.1.19 求下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-nx^2} dx, \text{ 这里 } a, b \text{ 为常数, 且 } 0 < a < b;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x} dx, \text{ 这里 } a \text{ 为常数, 且 } a > 0.$$

(注意: 对于(2)若用积分中值定理, 则积分为 $\frac{\xi^n}{1+\xi}$, 其中 $0 < \xi < 1$; 但这时 ξ 与 n 有关, 故在 $n \rightarrow \infty$ 时, 不能断言 $\xi^n \rightarrow 0$.)

解

(1)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-nx^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{n} \cdot n e^{-nx^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2n} e^{-nx^2} \Big|_a^b \leqslant \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \cdot \frac{1}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{(n+1)(x+1)} dx^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \Big|_0^1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(1+1)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2} dx \end{aligned}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(1+1)} = 0,$$

且

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2} dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$$

(3)

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leqslant \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+a} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln x \Big|_n^{n+a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+a}{n} = 0.$$

习题 5.1.20 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上连续. 证明:

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$;

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

(本题在几何上看是十分明显的.)

解

(1) 由于 $f(x)$ 是奇函数, 则对任意的 $x \in [-a, a]$, 有 $f(-x) = -f(x)$. 因此

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= -\int_a^0 f(-t)dt \Big|_{t=-x} + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a -f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 0.\end{aligned}$$

(2) 由于 $f(x)$ 是偶函数, 则对任意的 $x \in [-a, a]$, 有 $f(-x) = f(x)$. 因此

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= -\int_a^0 f(-t)dt \Big|_{t=-x} + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.\end{aligned}$$

习题 5.1.21 设 $f(x)$ 为具有周期 T 的连续函数, 证明: 对任意的常数 a , 有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

(提示: 证明 $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$, 这在几何上是显然的.)

解 由于 $f(x)$ 为具有周期 T 的连续函数, 则对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 有 $f(x+T) = f(x)$. 因此

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx \\ &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(t+T)dt \Big|_{t=x-T} \\ &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(t)dt \\ &= \int_0^T f(x)dx.\end{aligned}$$

习题 5.1.22 计算下面的积分.

$$(1) \int_0^{2\pi} |\cos x|dx;$$

$$(2) \int_{-3}^4 [x]dx;$$

$$(3) \int_{-1}^1 \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx;$$

$$(4) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx;$$

$$(5) \int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx;$$

$$(6) \int_0^1 x \arcsin x dx;$$

$$(7) \int_0^1 x^3 e^x dx;$$

$$(8) \int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}} dx;$$

$$(9) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} dx;$$

$$(10) \int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx (a>0, b>0);$$

$$(11) \int_{-1}^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx;$$

$$(12) \int_0^{2\pi} \sin^6 x dx;$$

$$(13) \int_{-1}^1 e^{|x|} \arctan e^x dx;$$

$$(14) \int_0^\pi \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx.$$

解

(1)

$$\int_0^{2\pi} |\cos x| dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 4.$$

(2)

$$\int_{-3}^4 [x] dx = \sum_{k=-3}^3 \int_k^{k+1} k dx = \sum_{k=-3}^3 k = 0.$$

(3)

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \ln \frac{1-x}{1+x} = -\ln \frac{1+x}{1-x}.$$

因此被积函数为奇函数, 故

$$\int_{-1}^1 \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0.$$

(4)

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^{-t}} \cos^3(-t)(-dt) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^t}{1+e^t} \cos^3 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \left. \frac{\sin x - \sin^3 x / 3}{1} \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx &\stackrel{x=\ln t, dx=\frac{1}{t} dt}{=} \int_1^2 \sqrt{1-\frac{1}{t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt = \stackrel{t=\sec u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos^2 u} \cdot \frac{1}{\sec u} \cdot \sec u \tan u du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin u \tan u du \stackrel{\sin u=v}{=} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{v^2}{1-v^2} dv = \left(-v + \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

(6)

$$\int_0^1 x \arcsin x dx = \frac{1}{4} \left(x \sqrt{1-x^2} + (2x^2-1) \arcsin x \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

(7)

$$\int_0^1 x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \Big|_0^1 = 6 - 2e.$$

(8)

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dx &\stackrel{x=a \sin t, dx=a \cos t dt}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos t}{a \sin t + a \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}(\sin t + \cos t) + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)}{\sin t + \cos t} dt = \left. \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \ln(\sin t + \cos t) \right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} dx &\stackrel{\tan x=t^2, dx=\frac{2t}{1+t^4} dt}{=} \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^4} dt = \left. \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} \right) \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx &\stackrel{t=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 \tan^2 x + b^2} \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 t^2 + b^2} dt \\ &= \left. \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{at}{b} \right) \right|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2ab} \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx &\stackrel{x=\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \\ &= \pi \left(\frac{4!!}{3!!} \right) \left(\frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!} \right) = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^6 x dx &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx \\ &= 4 \cdot \frac{5!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{8}\pi \end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 e^{|x|} \arctan e^x dx &= \int_0^1 e^x \arctan e^x dx - \int_{-1}^0 e^{-x} \arctan e^x dx \\
&\stackrel{e^x=t}{=} \int_1^e \arctan t dt + \int_1^e \arctan \frac{1}{t} dt \\
&= \int_1^e \left(\arctan t + \arctan \frac{1}{t} \right) dt \\
&= \int_1^e \frac{\pi}{2} dt \\
&= \frac{\pi}{2}(e-1)
\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx &\stackrel{u=\tan x}{=} \int_0^1 \frac{1}{2+u^2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

习题 5.1.23 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx,$$

并用这一结果计算 $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$.

解 设 $I = \int_0^\pi x f(\sin x) dx$, 则

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) dt \stackrel{\sin(\pi-t)=\sin t}{=} \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt \\
&= \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - I.
\end{aligned}$$

因此

$$2I = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt,$$

即

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin t) dt.$$

由此, 可得

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} (-\arctan(\cos x)) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

习题 5.1.24 证明: $\frac{1}{6} < \int_0^1 \sin x^2 dx < \frac{1}{3}$. (注意: 求解问题中的积分将是徒劳的. 解答本题的一个方法在本节的正文中已提到.)

解 由于在区间 $[0, 1]$ 上, 对任意的 x , 有

$$x^2 - \frac{x^6}{6} < \sin x^2 < x^2,$$

故

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6} \right) dx < \int_0^1 \sin x^2 dx < \int_0^1 x^2 dx,$$

即

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{42} < \int_0^1 \sin x^2 dx < \frac{1}{3},$$

从而得到

$$\frac{1}{6} < \int_0^1 \sin x^2 dx < \frac{1}{3}.$$

习题 5.1.25 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 我们将 $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 定义为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值. 对下列函数, 计算在指定区间上的平均值, 以及最大、最小值.

- (1) $f(x) = x$, 区间 $[0, 1]$ 及 $[0, 10^5]$;
- (2) $f(x) = e^{-x}$, 区间 $[0, 1]$ 及 $[0, 10^5]$;
- (3) $f(x) = xe^{-x}$, 区间 $[0, 1]$ 及 $[0, 10^5]$.

解

- (1) (a) 区间 $[0, 1]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{1-0} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2};$$

最大值为 1; 最小值为 0.

- (b) 区间 $[0, 10^5]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{10^5 - 0} \int_0^{10^5} x dx = \frac{10^5}{2};$$

最大值为 10^5 ; 最小值为 0.

- (2) (a) 区间 $[0, 1]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{1-0} \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e};$$

最大值为 1; 最小值为 $\frac{1}{e}$.

- (b) 区间 $[0, 10^5]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{10^5 - 0} \int_0^{10^5} e^{-x} dx = \frac{1 - e^{-10^5}}{10^5};$$

最大值为 1; 最小值为 e^{-10^5} .

(3) (a) 区间 $[0, 1]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{1-0} \int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{2}{e};$$

最大值为 $\frac{1}{e}$; 最小值为 0.

(b) 区间 $[0, 10^5]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{10^5 - 0} \int_0^{10^5} x e^{-x} dx = \frac{1 - (10^5 + 1)e^{-10^5}}{10^5};$$

最大值为 $\frac{1}{e}$; 最小值为 0.

习题 5.1.26 考虑积分 $I = \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx$.

(1) 试给出 I 的尽可能好的上、下界估计;

(2) 求出 I 的近似值, 精确到 0.0001. (提醒: 本题用本节中的知识就能解决.)

解

(1)

习题 5.2.27

(1) 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上单调递减的连续函数, 证明: 对任意 $\alpha \in (0, 1)$, 有

$$\int_0^\alpha f(x) dx \geq \alpha \int_0^1 f(x) dx;$$

(2) 若仅仅设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 证明同样的结论.

(提示: (1) 有几种证法. 第一种方法: 利用 $\int_0^\alpha f(x) dx = \alpha \int_0^1 f(\alpha x) dx$; 第二种方法: 考虑 $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x) dx$ ($0 < \alpha < 1$), 证明 $g(\alpha)$ 是减函数. 注意, 这两种方法都需要 $f(x)$ 连续这一假设, 因此都不适用于解决 (2).)

解

解

(1)

$$\int_0^\alpha f(x) dx = \alpha \int_0^1 f(\alpha x) dx \geq \alpha \int_0^1 f(x) dx.$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha f(x) dx - \alpha \int_0^1 f(x) dx &= (1-\alpha) \int_0^\alpha f(x) dx - \alpha \int_\alpha^1 f(x) dx \\ &\geq (1-\alpha)\alpha f(\alpha) - \alpha(1-\alpha)f(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

习题 5.2.28 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微, 且 $|f'(x)| \leq M$ (对任意 $x \in [a, b]$).

(1) 若 $f(a) = 0$, 证明:

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{M}{2}(b-a)^2;$$

(2) 若 $f(a) = f(b) = 0$, 证明:

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq \frac{M}{4}(b-a)^2.$$

(提示: 通过对积分的上限求导能得出 (1) 的一个证明, 即考虑函数 $G(t) = \int_a^t |f(x)|dx - \frac{M}{2}(t-a)^2$, $a \leq t \leq b$.)

解

(1) 由 Lagrange 中值定理, $|f(x)| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)|(x-a) \leq M(x-a)$, 则对它取积分:

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b M(x-a)dx = \frac{M}{2}(b-a)^2$$

(2) 对于 $x \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$,

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| \leq M(x-a);$$

对于 $x \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$,

$$|f(x)| = |f(x) - f(b)| \leq M(b-x).$$

则

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)dx \\ &= \frac{M}{4}(b-a)^2 \end{aligned}$$

习题 5.2.29 利用变换 $u = \sin x$, 将下列积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}}$$

变为椭圆积分的形式.

解 由 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2u^2$, 则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-2u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-2u^2)}}.$$

习题 5.2.30 利用

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt = \int_a^x f'(t)d(t-x)$$

经过多次分部积分, 详细推导出 Taylor 展开式和它的余项的积分表示式.

解 由题意, 我们有

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)d(t-x).$$

对积分部分进行分部积分, 令 $u = f'(t)$, $dv = d(t - x)$, 则 $du = f''(t)dt$, $v = t - x$. 因此,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(t)(t - x)|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f''(t)(t - x)dt \\ &= f(a) + f'(x)(x - x) - f'(a)(a - x) - \int_a^x f''(t)(t - x)dt \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x f''(t)(x - t)dt. \end{aligned}$$

重复上述过程, 对 $\int_a^x f''(t)(x-t)dt$ 进行分部积分, 令 $u = f''(t)$, $dv = (x-t)dt$, 则 $du = f'''(t)dt$, $v = \frac{(x-t)^2}{2}$. 因此,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt. \end{aligned}$$

重复上述过程 n 次, 我们得到

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

这就是 Taylor 展开式, 其中积分余项为

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

习题 5.2.31 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 令

$$g(x, y) = \int_0^x (f(t+y) - f(t))dt,$$

求证: $g(x, y) = g(y, x)$.

解

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_0^x (f(t+y) - f(t))dt = \left(\int_y^{x+y} - \int_0^x \right) f(t)dt = \left(\int_0^{x+y} - \int_0^y - \int_0^x \right) f(t)dt \\ g(y, x) &= \int_0^y (f(t+x) - f(t))dt = \left(\int_x^{x+y} - \int_0^y \right) f(t)dt = \left(\int_0^{x+y} - \int_0^x - \int_0^y \right) f(t)dt \end{aligned}$$

因此, $g(x, y) = g(y, x)$.

习题 5.2

习题 5.2.1 求区间 $[0, 1]$ 上 Dirichlet 函数的上积分和下积分.

解 设 $f(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的 Dirichlet 函数. 对任意分划 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 因为每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上既有有理数也有无理数, 所以

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1, \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0.$$

因此

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1,$$

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

所以

$$\overline{\int_0^1} f(x) dx = \inf_P U(f, P) = 1,$$

$$\underline{\int_0^1} f(x) dx = \sup_P L(f, P) = 0.$$

习题 5.2.2 试给出 Darboux 上和与下的几何解释.

解 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有界. 对任意分划 $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

则 Darboux 上和与下可以分别表示为

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

几何上, $U(f, P)$ 表示由各子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最大值 M_i 所构成的矩形条形图的面积之和; 而 $L(f, P)$ 则表示由各子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的最小值 m_i 所构成的矩形条形图的面积之和.

习题 5.2.3 证明: 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 在区间 $[a, b]$ 上也可积, 而且有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

解 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积. 对任意分划 $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad \omega_i = M_i - m_i,$$

$$M'_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)|, \quad m'_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)|, \quad \omega'_i = M'_i - m'_i.$$

因为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 所以 $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$. 又因为

$$\omega'_i = M'_i - m'_i \leq |M_i| + |m_i| \leq |M_i - m_i| = \omega_i,$$

所以 $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega'_i \Delta x_i = 0$. 因此 $|f(x)|$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

对 $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ 两边同时积分, 得

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

即

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

习题 5.2.4 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 且 $f(x) \geq c > 0$. 求证: $\frac{1}{f(x)}$ 在区间 $[a, b]$ 上也可积.

解 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 且 $f(x) \geq c > 0$. 对任意分划 $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad \omega_i = M_i - m_i,$$

$$M'_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{f(x)}, \quad m'_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{f(x)}, \quad \omega'_i = M'_i - m'_i.$$

因为 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上可积, 所以 $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$. 又因为

$$\omega'_i = M'_i - m'_i = \frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i} = \frac{M_i - m_i}{M_i m_i} = \frac{\omega_i}{M_i m_i} \leq \frac{\omega_i}{c^2},$$

所以 $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega'_i \Delta x_i = 0$. 因此 $\frac{1}{f(x)}$ 在区间 $[a, b]$ 上可积.

习题 5.3

习题 5.3.1 求下列曲线弧的弧长.

(1) 抛物线 $y = x^2$ 在 $x = -a$ 到 $x = a$ 之间的弧;

(2) 星形线 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ ($0 \leq t < 2\pi, a > 0$ 为常数);

(3) Archimedes 螺线 $r = a\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$).

解

(1) 假设 $a > 0$, 则

$$\begin{aligned} l &= 2 \int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \\ &= 2 \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2} dx \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} x \sqrt{4x^2 + 1} + \frac{1}{4} \log \left(\sqrt{4x^2 + 1} + 2x \right) \right) \Big|_0^a \\ &= a \sqrt{1 + 4a^2} + \frac{1}{2} \log \left(\sqrt{1 + 4a^2} + 2a \right) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3 \cos^2 t \sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} dt \\ &= \frac{3}{2} a \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt \\ &= 6a \end{aligned}$$

(3) 假设 $a > 0$, 则

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\theta) + r'(\theta)^2} d\theta \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta \\ &= a \left(\frac{1}{2} \theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \frac{1}{2} \log \left(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1} \right) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2} a \left(2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \log \left(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2} \right) \right) \end{aligned}$$

习题 5.3.2 计算下面的曲线所围成的平面图形的面积.

(1) 双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right]$, a 为正常数);

$$(2) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ 及 } x \text{ 轴};$$

$$(3) y = e^x, y = e^{-x} \text{ 及 } x = 1.$$

解

(1)

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{8};$$

(2)

$$S = \int_0^{2\pi} |y'(t)| |dx(t)| = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 dt = \pi;$$

(3)

$$S = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e + \frac{1}{e} - 2.$$

习题 5.3.3 计算下列旋转体的体积.

(1) $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴围成的图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周;

(2) $y = e^{x^2}$ ($0 \leq x \leq 1$) 与 y 轴围成的图形绕 y 轴旋转一周;

$$(3) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ 与 } x \text{ 轴围成的图形绕 } x \text{ 轴旋转一周.}$$

解

(1)

$$V_x = \int_0^\pi \pi y^2 dx = \frac{1}{2} \pi^2$$

$$V_y = \int_0^\pi 2\pi x \sin x dx = 2\pi^2;$$

(2)

$$V_y = \int_0^1 2\pi x \cdot e^{x^2} dx = \pi(e - 1);$$

(3)

$$V_x = \int_0^{2\pi} \pi y^2(t) dx(t) = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2$$

习题 5.3.4 求证: 以 R 为半径, 高为 h 的球缺的体积为 $\pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$.

解

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h \pi(R^2 - (R-y)^2) dy \\ &= \pi \int_0^h (2Ry - y^2) dy \\ &= \pi \left(Rh^2 - \frac{h^3}{3} \right) \end{aligned}$$

习题 5.3.5 求下列曲线绕旋转一周后所得立体的侧面积.

(1) $x^2 + y^2 = r^2$ 绕 x 轴, 其中常数 $r > 0$;

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 绕 y 轴, 这里 $a > b > 0$;

(3) $y = a \cosh x$ ($0 \leq x \leq a$) 绕 x 轴;

(4) $r = a(1 + \cos \theta)$ 绕极轴, $a > 0$.

解

(1) 设 $x = r \cos t, y = r \sin t$ ($0 \leq t \leq \pi$), 则

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi 2\pi y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\ &= \int_0^\pi 2\pi r \sin t \cdot r dt \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

(2)

$$S = \int_{-b}^b 2\pi x(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_{-b}^b 2\pi a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 - y^2}} dy = \frac{4\pi a^2 b}{b} = 4\pi ab;$$

(3)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^a a \cosh x \sqrt{1 + a^2 \sinh^2 x} dx \\ &= 2\pi \int_0^a \sqrt{1 + a^2 \sinh^2 x} d(a \sinh x) \\ &= \pi \left(s \sqrt{1 + s^2} + \log(s + \sqrt{1 + s^2}) \right) \Big|_0^{a \sinh a} \\ &= \pi \left(a \sinh a \sqrt{1 + a^2 \sinh^2 a} + \log(a \sinh a + \sqrt{1 + a^2 \sinh^2 a}) \right) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^\pi a(1 + \cos \theta) \sin \theta \sqrt{(a(1 + \cos \theta))^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta \\
&= 2\pi \sqrt{2} a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^{3/2} \sin \theta d\theta \\
&= 2\pi \sqrt{2} a^2 \frac{2}{5} (1 + \cos \theta)^{5/2} \Big|_0^\pi \\
&= \frac{32}{5} \pi a^2
\end{aligned}$$

习题 5.3.6 半径为 r 的球沉入水中, 与水面相切 (球的密度为 1), 现将球从水中捞出, 需做多少功?

解 设球心距水面高度为 h ($0 \leq h \leq 2r$), 则球被提起 dh 时, 有 $dW = \rho g V(h) dh$, 其中 $V(h)$ 为球露出水面的体积, 则

$$\begin{aligned}
V(h) &= \int_0^h \pi(r^2 - (r - y)^2) dy \\
&= \pi \int_0^h (2ry - y^2) dy \\
&= \pi \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
W &= \int_0^{2r} \rho g V(h) dh \\
&= \rho g \pi \int_0^{2r} \left(rh^2 - \frac{h^3}{3} \right) dh \\
&= \rho g \pi \left(\frac{2}{3} r^4 - \frac{4}{12} r^4 \right) \\
&= \frac{4}{3} \rho g \pi r^4
\end{aligned}$$

习题 5.3.7 两条长为 L , 质量为 m 的均匀细杆位于同一直线上, 两杆近端距离为 l , 求两杆之间的引力.

解 设两杆的线密度均为 $\lambda = \frac{m}{L}$, 记一杆位于 $[0, L]$, 另一杆位于 $[L + l, 2L + l]$, 两杆微元长度 dx, dy 之间的引力为

$$dF = G \frac{\lambda dx \cdot \lambda dy}{(y - x)^2} = G \frac{m^2}{L^2} \frac{dxdy}{(y - x)^2},$$

则两杆之间的引力为

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^L \int_{L+l}^{2L+l} G \frac{m^2}{L^2} \frac{dx dy}{(y-x)^2} \\
 &= G \frac{m^2}{L^2} \int_0^L \left(\frac{1}{L+l-x} - \frac{1}{2L+l-x} \right) dx \\
 &= G \frac{m^2}{L^2} \left(\log \frac{L+l}{l} - \log \frac{2L+l}{L+l} \right) \\
 &= G \frac{m^2}{L^2} \log \frac{(L+l)^2}{l(2L+l)}
 \end{aligned}$$

习题 5.4

习题 5.4.1 判断下列反常积分是否收敛, 并求出收敛的反常积分的值.

$$(1) \int_0^{+\infty} xe^{-x} dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} x \sin x dx;$$

$$(3) \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx;$$

$$(5) \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx;$$

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx;$$

$$(7) \int_0^1 \ln x dx;$$

$$(8) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(9) \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1-x^2)^{3/2}} dx;$$

$$(10) \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x^2} dx;$$

$$(11) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx (n \text{ 为自然数});$$

$$(12) \int_0^1 (\ln x)^n dx (n \text{ 为自然数}).$$

解

(1)

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-(x+1)e^{-x}]_0^A = 1;$$

(2)

$$\int_0^{+\infty} x \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-x \cos x + \sin x]_0^A \stackrel{A=n\pi \rightarrow +\infty}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} n\pi \text{ (发散);}$$

(3)

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_2^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} (\ln A)^2 - \frac{1}{2} (\ln 2)^2 \right) = +\infty \text{ (发散);}$$

(4)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\pi/4}{x} dx = \frac{\pi}{4} \lim_{A \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^A = +\infty \text{ (发散);}$$

(5)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_0^A = \frac{1}{2};$$

(6)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} [\arctan(x+1)]_A^0 + \lim_{B \rightarrow +\infty} [\arctan(x+1)]_0^B \\ &= \left(\arctan(1) - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(1) \right) = \pi; \end{aligned}$$

(7)

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [x \ln x - x]_{\varepsilon}^1 = -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) = -1;$$

(8)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\arcsin x]_{-1+\varepsilon}^0 + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [\arcsin x]_0^{1-\delta} \\ &= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi; \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1-x^2)^{3/2}} dx &= \int_0^1 \ln x d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) \\ &= \ln x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) dx \\ &= 0 - \int_0^1 \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}\right) dx \\ &\stackrel{t=\sqrt{1-x^2}}{=} \int_0^1 \frac{1}{1-t^2} - \frac{t}{1-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{2} \ln(1-t^2) \\ &= -\ln 2 \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x^2} dx &= - \int_0^1 \ln(1-x) dx - \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= - \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [(1-x) \ln(1-x) - (1-x)]_0^{1-\delta} - [(1+x) \ln(1+x) - (1+x)]_0^1 \\ &= -(0 - (-1)) - [(2 \ln 2 - 2) - (-1)] \\ &= -1 - (2 \ln 2 - 1) = 2 - 2 \ln 2; \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx &= [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} n x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= 0 + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= n \cdot (n-1) \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx = \dots \\ &= n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = n!; \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\ln x)^n dx &= [x(\ln x)^n]_0^1 - \int_0^1 x \cdot n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= 0 - n \int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx \\
&= (-n) \cdot (-n+1) \int_0^1 (\ln x)^{n-2} dx = \dots \\
&= (-1)^n n! \int_0^1 dx = (-1)^n n!;
\end{aligned}$$

习题 5.4.2 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 的 Cauchy 主值定义为

$$\text{P.V. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^B f(x) dx.$$

显然, 若反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则其 Cauchy 主值也收敛, 但反过来不一定成立.

研究下列反常积分 Cauchy 主值的收敛性.

$$(1) \text{ P.V. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx; \quad (2) \text{ P.V. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx.$$

解

(1)

$$\begin{aligned}
\text{P.V. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^B \frac{x}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-B}^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} (0) = 0;
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\text{P.V. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^B \frac{|x|}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left(\int_{-B}^0 \frac{-x}{1+x^2} dx + \int_0^B \frac{x}{1+x^2} dx \right) \\
&= 2 \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln(1+B^2) = +\infty \text{ (发散).}
\end{aligned}$$

习题 5.4.3 若函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上连续, 并且以 a 为瑕点, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 定义为

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx,$$

这是本节讲的两类反常积分的组合, 其中 $b > a$ 是任一实数. 当上面两个反常积分都收敛时, 我们称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛; 否则称其发散.

(1) 证明 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$ 收敛, 并求其值;

(2) 证明: 对任意实数 α , $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ 发散.

解

(1)

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx &= \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx\end{aligned}$$

设 $x-1 = u^2$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{1}{(u^2+1)u} 2udu = 2 \int \frac{1}{u^2+1} du = 2 \arctan u + C \\ &= 2 \arctan \sqrt{x-1} + C\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^+} [2 \arctan \sqrt{x-1}]_t^2 + \lim_{A \rightarrow +\infty} [2 \arctan \sqrt{x-1}]_2^A \\ &= 2(\arctan 1 - \arctan 0) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan 1\right) = \pi\end{aligned}$$

(2)

命题 (第一类 p 积分) $I(p) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx, a > 0$, 当 $p > 1$ 时, 积分收敛, 当 $p \leq 1$ 时, 积分发散.

证明 当 $p > 1$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} b^{1-p} \right) = \frac{1}{p-1},$$

当 $p \leq 1$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} b^{1-p} \right) = +\infty.$$

命题 (第二类 p 积分) $J(p) = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx, a > 0$, 当 $p \geq 1$ 时, 积分发散, 当 $p < 1$ 时, 积分收敛.

证明 当 $p \geq 1$ 时,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right) \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} \varepsilon^{1-p} \right) = +\infty,$$

当 $p < 1$ 时,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right) \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} \varepsilon^{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}.$$

综上, 当 $\alpha \leq 1$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ 发散; 当 $\alpha \geq 1$ 时, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ 发散, 因此 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ 发散.

习题 5.4.4 设 $a < c < b$, 点 c 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 内唯一的瑕点, 则积分 $\int_a^b f(x) dx$ 定义

为两个瑕积分 $\int_a^c f(x)dx$ 与 $\int_c^b f(x)dx$ 的和. 求:

$$(1) \int_{-1}^4 \frac{1}{x^2+x-2} dx;$$

$$(2) \int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}} dx.$$

解

(1)

$$\int_{-1}^4 \frac{1}{x^2+x-2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+x-2} dx + \int_1^4 \frac{1}{x^2+x-2} dx$$

其中

$$\int \frac{1}{x^2+x-2} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C;$$

因此, $\int_1^4 \frac{1}{x^2+x-2} dx$ 发散. 故 $\int_{-1}^4 \frac{1}{x^2+x-2} dx$ 发散. 事实上, $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+x-2} dx$ 也发散.

(2) 注 这里认为 $x^{-\frac{1}{3}}$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上有定义, $x=0$ 为瑕点.

$$\int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = \int_{-1}^0 x^{-\frac{1}{3}} dx + \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} dx$$

其中

$$\int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C;$$

因此,

$$\int_{-1}^0 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{-1}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \left(\frac{3}{2} \varepsilon^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{3}{2} \right) \right) = -\frac{3}{2};$$

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \delta^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{2};$$

$$\text{故 } \int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = 0.$$

第 5 章综合习题

习题 5.C.1 设 m, n 为正整数, 证明:

$$(1) \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0;$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi, & \text{如 } m = n, \\ 0, & \text{如 } m \neq n. \end{cases}$$

(本题的结论, 在以后要讲的 Fourier (傅里叶) 级数理论中具有基本的重要性.)

解

(1)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx \\ &= \begin{cases} \pi, & \text{如 } m = n, \\ 0, & \text{如 } m \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

习题 5.C.2 设 m, n 为正整数, 记

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx.$$

证明: (1) $B(m, n) = B(n, m)$; (2) $B(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

解

(1) 由变量替换 $x = 1-t$ 可得

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 (1-t)^{m-1} t^{n-1} dt \\ &= B(n, m) \end{aligned}$$

(2) 由分部积分可得

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \\ &= -\frac{1}{n} x^{m-1} (1-x)^n \Big|_0^1 + \frac{m-1}{n} \int_0^1 x^{m-2} (1-x)^n dx \\ &= \frac{m-1}{n} B(m-1, n+1) \end{aligned}$$

重复使用上式, 可得

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \frac{(m-1)(m-2)\cdots 1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} B(1, n+m-1) \\ &= \frac{(m-1)!}{(n+m-1)!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n+m-1} \\ &= \frac{m!n!}{(m+n-1)!(m+n)} \\ &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \end{aligned}$$

习题 5.C.3 计算下列积分.

$$(1) \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx;$$

$$(2) \int_0^{n\pi} |x| \sin x |dx| (n \text{ 为自然数});$$

$$(3) \text{ 设 } f(x) = \int_x^{x+2\pi} (1 + e^{\sin t} - e^{-\sin t}) dt + \frac{1}{1+x} \int_0^x f(t) dt, \text{ 求 } \int_0^1 f(x) dx.$$

解

(1)

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^2 d \left(x e^{x+\frac{1}{x}}\right) \\ &= x e^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} |x \sin x| dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |x \sin x| dx \\ &\stackrel{x=u+k\pi}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi (u+k\pi) |\sin(u+k\pi)| du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi (u+k\pi) \sin u du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^\pi u \sin u du + k\pi \int_0^\pi \sin u du \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (\pi + 2k\pi) \\ &= n\pi + 2\pi \frac{(n-1)n}{2} = n^2\pi. \end{aligned}$$

(3) $(1 + e^{\sin t} - e^{-\sin t})$ 为以 2π 为周期的函数, 由习题 5.1.21 可知

$$\begin{aligned} \int_x^{x+2\pi} (1 + e^{\sin t} - e^{-\sin t}) dt &= \int_0^{2\pi} (1 + e^{\sin t} - e^{-\sin t}) dt \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} dt - \int_0^{2\pi} e^{-\sin t} dt \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} dt + \int_0^{-2\pi} e^{\sin u} du \quad (u = -t) \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} dt + \int_{2\pi}^0 e^{\sin u} du \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

因此 $f(x) = 2\pi + \frac{1}{x+1} \int_0^1 f(t) dt$, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积, 两边对 x 从 0 到 1 积分得

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(2\pi + \frac{1}{x+1} I \right) dx \\ &= 2\pi + I \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = 2\pi + I \ln 2. \end{aligned}$$

解得 $I = \frac{2\pi}{1 - \ln 2}$.

习题 5.C.4 证明: $\frac{1}{2n+2} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx < \frac{1}{2n}$ ($n = 1, 2, \dots$).

解

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-1} x \cdot \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-1} x \cdot \frac{1}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2n} \tan^n x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n}; \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \frac{2 \cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \frac{1}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2n+2} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+2}. \end{aligned}$$

习题 5.C.5 设函数 f 在 $[a, b]$ 上可积, 且 $\int_a^b f(x) dx > 0$, 证明: 必有一个区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, 使得对任意 $x \in [\alpha, \beta]$, 有 $f(x) > 0$. (比较习题 5.1 中第 8 题.)

(提示: 假设结论不成立, 则对 $[a, b]$ 的任一分割 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上都存在 ξ_i , 使 $f(\xi_i) \leqslant 0$. 由此产生一个非正的积分和, 过渡到极限, 产生矛盾.)

解 反证法. 假设结论不成立, 则对 $[a, b]$ 的任一分割 $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, 在区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上都存在 ξ_i , 使 $f(\xi_i) \leqslant 0$. 由此产生一个非正的积分和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leqslant 0.$$

过渡到极限, 可得

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0} S \leqslant 0,$$

这与题设 $\int_a^b f(x) dx > 0$ 矛盾. 因此假设不成立, 结论成立.

习题 5.C.6

- (1) 设 f 是处处连续的偶函数, 证明: f 必有一个原函数为奇函数;
 (2) 设 f 是处处连续的奇函数, 证明: f 的任一原函数都是偶函数. (试比较习题 3.1 第 15 题.)

解

- (1) 设 $F(x)$ 是 f 的一个原函数, 则

$$\begin{aligned} G(x) &= F(x) - F(0) \\ &= \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_0^{-x} f(-u)(-du) \quad (u = -t) \\ &= - \int_0^{-x} f(u)du \\ &= -F(-x) + F(0) \end{aligned}$$

因此 $G(-x) = -G(x)$, 即 $G(x)$ 是奇函数, 且 $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

- (2) 设 $F(x)$ 是 f 的一个原函数, 则

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t)dt \\ &= \int_0^x f(-u)(-du) \quad (u = -t) \\ &= - \int_0^x (-f(u))du \\ &= \int_0^x f(u)du \\ &= F(x) \end{aligned}$$

因此 $F(-x) = F(x)$, 即 $F(x)$ 是偶函数.

习题 5.C.7 举例说明, 存在一个连续的周期函数 f , 使得 f 的原函数都不是周期函数.

(试比较习题 3.1 第 16 题.) (提示: 选一个连续的周期函数 f , 使它能保证 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 不是周期函数. 注意, 不必考虑 $F(x)$ 的显式表示.)

解 设 $f(x) \equiv 1$, 则 f 为周期函数. $f(x)$ 的所有原函数为 $F(x) = x + C$, 显然 $F(x)$ 不是周期函数.

习题 5.C.8 设 $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0$. 证明: 多项式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点. (本题是第 3 章综合习题的第 3 题, 这里要求用积分的解法来论证. 可利用习题 5.1 中第 8 题的结果.)

解 设 $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)dx \\ &= \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n \\ &= 0\end{aligned}$$

由习题5.1.8可知, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

习题5.C.9 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且有 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$. 试证: 在 $(0, \pi)$ 内存在两点 x_1 和 x_2 , 使得 $f(x_1) = 0$ 与 $f(x_2) = 0$.

(提示: 易知 f 在 $(0, \pi)$ 内至少有一个零点 x_1 . 若这是唯一的零点, 则 f 在 $(0, x_1)$ 与 (x_1, π) 内异号. 于是 $\int_0^\pi f(x) \sin(x - x_1) dx \neq 0$, 这将产生矛盾.)

解 由 $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0$ 与习题5.1.8可知, f 在 $(0, \pi)$ 内至少有一个零点 x_1 . 若这是唯一的零点, 则

(1) 若 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 与 (x_1, π) 内同号且非零, 不妨设 $f(x) > 0, \forall x \in (0, x_1) \cup (x_1, \pi)$, 则

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = \int_0^{x_1} f(x) \sin x dx + \int_{x_1}^\pi f(x) \sin x dx > 0$$

与题设矛盾.

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 与 (x_1, π) 内异号且非零, 构造函数 $g(x) = \sin(x_1 - x) = -\sin x \cos x_1 + \cos x \sin x_1$, 不妨设 $f(x) > 0, \forall x \in (0, x_1); f(x) < 0, \forall x \in (x_1, \pi)$, 因此

$$\int_0^\pi f(x) g(x) dx = \int_0^{x_1} f(x) g(x) dx + \int_{x_1}^\pi f(x) g(x) dx > 0$$

这与

$$\int_0^\pi f(x) g(x) dx = -\cos x_1 \int_0^\pi f(x) \sin x dx + \sin x_1 \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$$

矛盾.

习题5.C.10 设 $f(x)$ 处处连续, $f(0) = 0, f'(0)$ 存在. 记 $F(x) = \int_0^1 f(xy) dy$, 证明 $F(x)$ 处处可导, 并求出 $F'(x)$.

解 $F(0) = \int_0^1 f(0) dy = 0$, 因此 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^1 f(xy) dy = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{f'(0)}{2}.$$

当 $x \neq 0$ 时, $F(x) = \int_0^1 f(xy) dy \stackrel{t=xy}{=} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, 则

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x)$$

. 综上所述, $F(x)$ 处处可导, 且

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{f'(0)}{2}, & x = 0, \\ -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x} f(x), & x \neq 0. \end{cases}$$

习题 5.C.11

(1) 设 $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1, \end{cases}$, 记 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, 试研究 $F(x)$ 在哪些点可导;

(提示: 与习题 5.1 中第 16 题不同, 本题无法求出 $F(x)$ 的显式表示.)

(2) 设 $f(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt$, 求证: $f'_+(0) = 0$.

解

(1) 当 $x \neq \pm 1$ 时, $f(x)$ 在 x 处连续, $F(x)$ 在 x 处可导, 且 $F'(x) = f(x)$. 当 $x = 1$ 时,

$$F'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} f(t)dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} 1 dt = 1;$$

$$F'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} f(t)dt = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} e^{-t^2} dt = e^{-1}.$$

因此 $F(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导, 同理可证 $F(x)$ 在 $x = -1$ 处不可导.

(2) 由于 $x = 0$ 是被积函数的间断点, 因此不能使用变上限积分求导的方法来求 $F'(0)$, 只能根据定义计算, 先由分部积分得

$$f(x) = \int_0^x -t^2 d\left(\sin \frac{1}{t}\right) = -x^2 \sin \frac{1}{x} + \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt.$$

因此

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \sin \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \left| \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \sin \frac{1}{x} \right| &\leqslant \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0; \\ \left| \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt \right| &\leqslant \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x 2|t| dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \end{aligned}$$

因此 $f'_+(0) = 0$.

习题 5.C.12 设函数 f 处处连续. 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x+h) - f(x)) dx = f(b) - f(a).$$

习题 5.C.13 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微. 证明:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

(提示: 分部积分.)

我们加强为证明

习题 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, $g(x)$ 为以 T 为周期的连续函数, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(\lambda x)dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt \int_a^b f(x)dx.$$

解 等价于证明,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \left(g(\lambda x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt \right) dx = 0.$$

记 $h(t) = g(t) - \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt$, 则 $h(t)$ 为以 T 为周期的连续函数, 且 $\int_0^T h(t)dt = 0$,

$$h(\lambda t) = g(\lambda t) - \frac{1}{T} \int_0^T g(\lambda t)dt = g(\lambda t) - \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt.$$

因此只需证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)h(\lambda x)dx = 0.$$

由分部积分可得

$$\int_a^b f(x)h(\lambda x)dx = f(x) \frac{1}{\lambda} H(\lambda x) \Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(x)H(\lambda x)dx$$

其中 $H(t)$ 为 $h(t)$ 的一个原函数, 由 $h(t)$ 的连续性可知 $H(t)$ 在 $[0, T]$ 上有界, 设 $M = \max_{t \in [0, T]} |H(t)|$, 则

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)h(\lambda x)dx \right| &\leq \frac{1}{\lambda} (|f(b)| + |f(a)|) M + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(x)| M dx \\ &= \frac{M}{\lambda} \left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right) \end{aligned}$$

当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, 上式右端趋于 0, 故

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)h(\lambda x)dx = 0.$$

习题 5.C.14 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t|dt = \frac{2}{\pi}$.

解 设 $x = 2k\pi + r$, 其中 k 为非负整数, $0 \leq r < 2\pi$, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t|dt &= \frac{1}{2k\pi + r} \left(k \int_0^{2\pi} |\sin t|dt + \int_0^r |\sin t|dt \right) \\ &= \frac{1}{2k\pi + r} \left(4k + \int_0^r |\sin t|dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2k}{2k + r/\pi} + \frac{1}{2k\pi + r} \int_0^r |\sin t|dt \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 即 $k \rightarrow +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k\pi + r} \int_0^r |\sin t|dt \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2\pi} |\sin t|dt = 0,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} + 0 = \frac{2}{\pi}.$$

习题 5.C.15 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$.

(提示: 直接用积分中值定理, 得出左端的积分为 $\frac{\pi}{2} \sin^n \xi_n$ (其中 $0 < \xi_n < \frac{\pi}{2}$), 但这不能导出结果, 因不能排除 $\{\xi_n\}$ 中有一个子列趋于 $\frac{\pi}{2}$. 克服这一困难可采用如下的方法. 对任意正数 $\varepsilon < 1$, 取一个参数 δ (与 ε 有关), 将问题中的积分拆成两部分: 一部分用区间长度控制, 另一部分由 $n \rightarrow \infty$ 来控制, 以使得两者的和小于 ε . 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ &< \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right)^n + \delta \\ &< \frac{\pi}{2} (\cos \delta)^n + \delta. \end{aligned}$$

现在取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 因 $0 < \cos \delta < 1$, 且 $\cos \delta$ 与 n 无关, 故 n 充分大时, 可使上式右端第一项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$.

解答本题的另一方法是应用 §5.1 中例 5.1.10, 并参考第 1 章综合习题中第 1 题(1).)

解 对任意正数 $\varepsilon < 1$, 取一个参数 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, 将问题中的积分拆成两部分:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ &< \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right)^n + \delta \\ &< \frac{\pi}{2} (\cos \delta)^n + \delta. \end{aligned}$$

因 $0 < \cos \delta < 1$, 且 $\cos \delta$ 与 n 无关, 故 n 充分大时, 可使上式右端第一项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 因此当 n 充分大时, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

习题 5.C.16 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数, 且 $f(x) \geq 0$ (对 $x \in [a, b]$). 记 $f(x)$ 在该区间上的最大值为 M , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

解 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续可知, $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 其中 $x_0 \in [a, b]$ 且 $f(x_0) = M$. 因此, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ 时, $f(x) > M - \varepsilon$. 设

$I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$, 记 $|I| = \sup I - \inf I > 0$, 则有

$$\int_a^b f^n(x)dx \geq \int_I f^n(x)dx \geq \int_I (M - \varepsilon)^n dx = |I|(M - \varepsilon)^n.$$

因此

$$\left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq |I|^{\frac{1}{n}}(M - \varepsilon).$$

又因为 $f(x) \leq M$, 所以

$$\left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq (b - a)^{\frac{1}{n}} M.$$

综上所述, 有

$$|I|^{\frac{1}{n}}(M - \varepsilon) \leq \left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq (b - a)^{\frac{1}{n}} M.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上式两端均趋于 M , 由夹逼定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f^n(x)dx \right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

习题 5.C.17

(1) 设函数 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上的递增、非负函数, 证明: 对任意正整数 n , 有

$$0 \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx \leq f(n);$$

(2) 设函数 $f(x)$ 是 $[1, +\infty)$ 上的递减、非负函数, 证明: 对任意正整数 n , 有

$$0 \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx \leq f(1).$$

此外, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx \right) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leq \alpha \leq f(1)$.

(提示: 对于 (1), 应用习题 5.1 中第 5 题可知,

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k+1),$$

对 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 求和, 可得出结果. 类似地可证明 (2) 中的不等式. 为证明 (2) 中说的极限存在, 可证明

$$g(n) = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x)dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

是单调递减的函数; 而上面已指出 $g(n)$ 以 0 为下界.)

某些 (不易直接处理的) 离散量的和—数列的和, 可以通过 (易于处理的) 连续的量—积分部分作出估计. 本题给出了最简单的这样的结果 (这在后面的无穷级数理论中还将提及). 如今,

我们现在易于给出 $\sqrt[n]{k}$ 及 $n!$ 的相当精确的上、下界. 我们特别提及, 对 $n \geq 1$, 有

$$\ln n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln n + 1,$$

从而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 趋于无穷大, 并与 $\ln n$ 同阶. 此外,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

存在, 这称为 Euler (欧拉) 常数.

解

(1) 由 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上递增可知, $\forall k \in \mathbb{N}^+$, 有 $f(k) \leq f(x) \leq f(k+1)$, $\forall x \in [k, k+1]$, 因此

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k+1).$$

对 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 求和, 得

$$\sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \geq \int_1^n f(x) dx + f(1),$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx + f(n).$$

(2) 由 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上递减可知, $\forall k \in \mathbb{N}^+$, 有 $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, $\forall x \in [k, k+1]$, 因此

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$

对 $k = 1, 2, \dots, n-1$ 求和, 得

$$\sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^n f(k) \geq \int_1^n f(x) dx + f(n),$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx + f(1).$$

设 $g(n) = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$, 则由

$$g(n+1) - g(n) = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0,$$

可知 $g(n)$ 是单调递减, 且有下界 0, 因此极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leq \alpha \leq f(1)$.

习题 5.C.18 (Cauchy 积分不等式) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx,$$

等号成立的充分必要条件是: f 和 g 中有一个恒为零, 或 $f(x) = \lambda g(x)$ (对 $x \in [a, b]$), 这里 λ 是一个常数.

(提示: 本题有好几种证法. 用对积分分上限求导可得出一个证明, 参见习题 5.1 中第 28 题的提示. 最标准的方法如下: 不妨设 $\int_a^b g^2(x)dx \neq 0$, 否则易知函数 g 恒为零, 结论显然成立 (习题 5.1 第 4 题 (2)). 考虑关于 t 的二次项式 $\int_a^b (f(x) + tg(x))^2 dx$, 这总是非负的.)

解 $(f(x) - tg(x))^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. 即 $\int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx \geq 0$. 展开得

$$\int_a^b f^2(x) dx - 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + t^2 \int_a^b g^2(x) dx \geq 0,$$

即

$$\Delta = 4 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \leq 0,$$

即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

习题 5.C.19 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导数, 证明: 对任意 $a \in [0, 1]$, 有

$$|f(a)| \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f'(x)| dx.$$

解 设 $|f(x_0)| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$, 又 $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$, 因此

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= \left| \int_0^1 f(x_0) dt \right| = \left| \int_0^1 f(x) dt - \int_0^1 \left(\int_{x_0}^x f'(t) dt \right) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| dx + \left| \int_0^1 \left(\int_{x_0}^x f'(t) dt \right) dx \right| \end{aligned}$$

对于后者

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \left(\int_{x_0}^x f'(t) dt \right) dx \right| &\leq \int_0^1 \left| \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| dx \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f'(t)| dt dx \\ &= \int_0^1 |f'(t)| dt \end{aligned}$$

习题 5.C.20 证明: $0.944 < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < 0.947$. (提示: 参看习题 5.1 中第 24 题的提示.)

解 由 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$, 可得

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

因此

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}.$$

对上式两端在 $[0, 1]$ 上积分, 得

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx,$$

即

$$0.944\bar{4} < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < 0.946\bar{1}.$$

习题 5.C.21 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续可微, 且 $|f'(x)| \leq M$. 证明: 对任意正整数 n ,

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}.$$

解 由 $|f'(x)| \leq M$ 可知, 对任意 $x, y \in [0, 1]$, 由 Lagrange 中值定理可得 $\exists \xi \in (x, y)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)||y - x| \leq M|y - x|.$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (f(x) - f(\frac{k}{n})) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(x) - f(\frac{k}{n})| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left|x - \frac{k}{n}\right| dx \\ &= M \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - x\right) dx \\ &= M \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n}. \end{aligned}$$

习题 5.C.22 设 $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ 是一个可微函数, 且对任意实数 x, y 满足

$$|f'(x) - f'(y)| \leq |x - y|.$$

求证: 对任意实数 x , 有

$$(f'(x))^2 < 2f(x).$$

解 对于任意 x, y , 有 $f(x+y) = f(x) + \int_x^{x+y} f'(t) dt$, 因此

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + yf'(x) + \int_x^{x+y} (f'(t) - f'(x)) dt \\ &\leq f(x) + yf'(x) + \int_x^{x+y} |f'(t) - f'(x)| dt \\ &\leq f(x) + yf'(x) + \int_x^{x+y} |t-x| dt \\ &= f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

令 $y = -f'(x)$, 则

$$f(x - f'(x)) \leq f(x) - (f'(x))^2 + \frac{(f'(x))^2}{2} = f(x) - \frac{(f'(x))^2}{2}.$$

因为 $f(x - f'(x)) > 0$, 所以 $(f'(x))^2 < 2f(x)$.

第 6 章 常微分方程初步

习题 6.1

习题 6.1.1 求下列可分离变量的微分方程.

$$(1) (1+x^2)dy = ydx;$$

$$(2) y' = e^{x-y};$$

$$(3) xy' + y = y^2;$$

$$(4) yy' = \frac{1-2x}{y}.$$

解

(1) 不难验证 $y \equiv 0$ 是方程的解. 当 $y \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} (1+x^2)dy &= ydx \\ \Rightarrow \frac{1}{y}dy &= \frac{1}{1+x^2}dx \\ \Rightarrow \ln|y| &= \arctan x + C \\ \Rightarrow y &= C'e^{\arctan x}, \quad C' = e^C \end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$y = C e^{\arctan x}$$

(2)

$$\begin{aligned} y' &= e^{x-y} \\ \Rightarrow e^y dy &= e^x dx \\ \Rightarrow e^y &= e^x + C, \quad C > -e^x \\ \Rightarrow y &= \ln(e^x + C) \end{aligned}$$

(3) 不难验证 $y \equiv 0, 1$ 是方程的解. 当 $y \neq 0, 1$ 时,

$$\begin{aligned} xy' + y &= y^2 \\ \Rightarrow \frac{dy}{y(y-1)} &= \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| &= \ln|x| + C \\ \Rightarrow \frac{y-1}{y} &= C'x, \quad C' = e^C \neq 0 \\ \Rightarrow y &= \frac{1}{1-C'x} \end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$y = 0; \quad y = \frac{1}{1 - Cx}$$

(4)

$$\begin{aligned} yy' &= \frac{1 - 2x}{y} \\ \Rightarrow y^2 dy &= (1 - 2x) dx \\ \Rightarrow \frac{1}{3} y^3 &= x - x^2 + C \\ \Rightarrow y &= \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C}. \end{aligned}$$

且由题设得 $y \neq 0$, 因此方程的所有解为:

$$\frac{3x - 3x^2 + C}{y^3} = 1$$

注 后面为了方便, 我们也将所有解写成:

$$y^3 = 3x - 3x^2 + C, \quad y \neq 0.$$

习题 6.1.2 求下列微分方程.

$$(1) \quad y' = \frac{y^2}{x^2} - 2;$$

$$(2) \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y};$$

$$(3) \quad \frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy};$$

$$(4) \quad (x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0.$$

解

(1) 记 $p = \frac{y}{x}$, 则 $y = px$, $y' = p'x + p$. 代入方程得

$$\begin{aligned} p'x + p &= p^2 - 2 \\ \Rightarrow \frac{dp}{p^2 - p - 2} &= \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+1} \right) dp &= \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \ln |p-2| - \ln |p+1| &= 3 \ln |x| + C \\ \Rightarrow \frac{p-2}{p+1} &= C'x^3, \quad C' = e^C > 0 \\ \Rightarrow \frac{y-2x}{x+y} &= C'x^3 \\ \Rightarrow y &= \frac{2x + C'x^4}{1 - C'x^3} \end{aligned}$$

同时注意到 $y - 2x = \frac{3C'x^4}{1 - C'x^3}$, 函数被分为 $y - 2x \geq 0$, $y - 2x < 0$ 两支, 这两支的解是

独立的,因此综上所述

$$y = \frac{2x + C_1 x^4}{1 - C_1 x^3}, C_1 \in \mathbb{R}, y - 2x \geq 0; \quad y = \frac{2x + C_2 x^4}{1 - C_2 x^3}, C_2 \in \mathbb{R}, y - 2x < 0.$$

注 为了方便,我们也写为

$$y = \frac{2x + Cx^4}{1 - Cx^3}, \quad x \neq 0$$

(2) 记 $p = \frac{y}{x}$, 则 $y = px, y' = p'x + p$. 代入方程得

$$\begin{aligned} p'x + p &= p + \frac{1}{p} \\ \implies p' &= \frac{1}{px} \\ \implies p dp &= \frac{dx}{x} \\ \implies \frac{1}{2}p^2 &= \ln|x| + C \\ \implies y^2 &= x^2(2\ln|x| + C'), \quad C' = 2C. \end{aligned}$$

由于微分方程在 $x = 0$ 处不连续, x 正负半轴的解是独立的,

$$y^2 = x^2(2\ln x + C_1), x > 0; \quad y^2 = x^2(2\ln(-x) + C_2), x < 0.$$

或者

$$y^2 = x^2(2\ln|x| + C), x \neq 0.$$

(3) 记 $p = \frac{y}{x}$, 则 $y = px, y' = p'x + p$. $y = x, y = 2x$ 显然为方程的解, $u \neq 0, 1, 2$ 时代入方程得

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - x(px) + (px)^2} dx &= \frac{1}{2(px)^2 - x(px)} d(px) \\ \implies \frac{dx}{x} &= \frac{p^2 - p + 1}{p(p-1)(p-2)} dp \\ \implies \int \frac{dx}{x} &= \int \left(-\frac{1}{2} \frac{dp}{p} + \frac{dp}{p-1} - \frac{3}{2} \frac{dp}{p-2} \right) \\ \implies x^{-1} p^{\frac{1}{2}} (p-1)^{-1} (p-2)^{\frac{3}{2}} &= C \\ \implies C'(y-x)^2 &= y(y-2x)^3, \quad C' = C^2 \end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$C_1(y-x)^2 = y(y-2x)^3, y > 0, \quad C_2(y-x)^2 = y(y-2x)^3, y < 0, \quad y = x, y \neq 0, \quad y = 2x, y \neq 0$$

或者

$$C(y-x)^2 = y(y-2x)^3, y \neq 0, \quad y = x, y \neq 0, \quad y = 2x, y \neq 0$$

或者

$$C(y-x)^2 = y(y-2x)^3, y \neq 0, \quad y = x, y \neq 0$$

(4) 记 $p = \frac{y}{x}$, 则 $y = px, y' = p'x + p$. 代入方程得 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} & (x^2 + 3(px)^2)dx - 2x(px)d(px) \\ \Rightarrow & \frac{2p}{1+p^2}dp = \frac{1}{x}dx \\ \Rightarrow & \ln(1+p^2) = \ln|x| + C \\ \Rightarrow & 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = C'x, \quad C' = e^C > 0 \\ \Rightarrow & x^2 + y^2 = C'x^3 \end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$x^2 + y^2 = Cx^3$$

习题 6.1.3 证明: 形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

的方程, 可通过代换化为齐次方程. (提示: 若方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

有非零解 x_0, y_0 (即 x_0, y_0 不全为零), 则可令 $u = x - x_0, v = y - y_0$; 其他情形更易于处理.)

求下面方程:

$$(1) \frac{dy}{dx} = \frac{x+y+3}{x-y+1}; \quad (2) \frac{dy}{dx} = \frac{2x+4y+3}{x+2y+1}.$$

解 对线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D = a_1b_2 - a_2b_1$ 进行讨论.

(1) $D \neq 0$: 此时方程组有唯一解 (x_0, y_0) . 令 $u = x - x_0, v = y - y_0$, 则 $du = dx, dv = dy$, 且 $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$. 原方程变为:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1(u+x_0) + b_1(v+y_0) + c_1}{a_2(u+x_0) + b_2(v+y_0) + c_2}\right)$$

因为 (x_0, y_0) 是方程组的解, 所以 $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$ 且 $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0$. 上式化为:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1(v/u)}{a_2 + b_2(v/u)}\right)$$

这是一个关于 u, v 的齐次方程.

(2) $D = 0$: 此时 $a_1b_2 = a_2b_1$. 我们可以设 $a_1 = ka_2, b_1 = kb_2$ (假设 a_2, b_2 不全为零).

- 如果 $c_1 = kc_2$, $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = k$ 为常数. 方程变为 $\frac{dy}{dx} = f(k)$, 其解为 $y = f(k)x + C$.
- 如果 $c_1 \neq kc_2$, 令 $z = a_2x + b_2y$, 则 $\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2\frac{dy}{dx}$. 原方程的右边可以写成 z 的函数:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right)$$

代入 $\frac{dz}{dx}$ 的表达式:

$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{dz}{dx} - a_2\right) = f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a_2 + b_2f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right)$$

这是一个变量分离方程 $\frac{dz}{a_2 + b_2f(\dots)} = dx$.

综上, 该类方程总能通过代换化为齐次方程或变量分离方程.

(1) 解方程组 $\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$, 得 $x = -2, y = -1$. 令 $u = x + 2, v = y + 1$. 则 $\frac{dv}{du} =$

$\frac{(u - 2) + (v - 1) + 3}{(u - 2) - (v - 1) + 1} = \frac{u + v}{u - v}$. 这是齐次方程. 令 $p = v/u$, 则 $v = pu, \frac{dv}{du} = u\frac{dp}{du} + p$.

$$u\frac{dp}{du} + p = \frac{u + pu}{u - pu} = \frac{1 + p}{1 - p} \Rightarrow u\frac{dp}{du} = \frac{1 + p}{1 - p} - p = \frac{1 + p - p + p^2}{1 - p} = \frac{1 + p^2}{1 - p}$$

分离变量: $\frac{1 - p}{1 + p^2}dp = \frac{du}{u}$. 积分:

$$\int \frac{1 - p}{1 + p^2}dp = \int \frac{1}{1 + p^2}dp - \int \frac{p}{1 + p^2}dp = \int \frac{du}{u}$$

得到

$$\arctan(p) - \frac{1}{2}\ln(1 + p^2) = \ln|u| + C$$

代回 $p = v/u$:

$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{v^2}{u^2}\right) = \ln|u| + C$$

$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2) - \frac{1}{2}\ln(u^2) + \ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(u^2 + v^2) + C$$

代回 $u = x + 2, v = y + 1$:

$$\arctan\left(\frac{y+1}{x+2}\right) - \frac{1}{2}\ln((x+2)^2 + (y+1)^2) = C$$

即, 微分方程的解为

$$y + 1 = (x + 2) \tan\left(\frac{1}{2}\ln((x+2)^2 + (y+1)^2) + C\right), x - y + 1 \neq 0$$

(2) 这里 $a_1 = 2, b_1 = 4, a_2 = 1, b_2 = 2, D = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$. 令 $z = x + 2y$. 则 $\frac{dz}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx}$.

原方程变为 $\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+2y)+3}{x+2y+1} = \frac{2z+3}{z+1}$. 代入 $\frac{dz}{dx}$ 的表达式:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + 2 \left(\frac{2z+3}{z+1} \right) = \frac{z+1+4z+6}{z+1} = \frac{5z+7}{z+1}$$

分离变量: $\frac{z+1}{5z+7} dz = dx$. 积分:

$$\int \frac{z+1}{5z+7} dz = \int \frac{\frac{1}{5}(5z+7) - \frac{7}{5} + 1}{5z+7} dz = \int \left(\frac{1}{5} - \frac{2/5}{5z+7} \right) dz = \int dx$$

得到

$$\frac{1}{5}z - \frac{2}{25} \ln |5z+7| = x + C$$

代回 $z = x + 2y$:

$$\frac{1}{5}(x+2y) - \frac{2}{25} \ln |5(x+2y)+7| = x + C$$

整理得:

$$5(x+2y) - 2 \ln |5x+10y+7| = 25x + C'$$

$$10y - 20x - 2 \ln |5x+10y+7| = C'$$

$$10x - 5y + \ln |5x+10y+7| = C''$$

即, 微分方程的解为

$$10x - 5y + \ln |5x+10y+7| = C, x+2y+1 \neq 0$$

习题 6.1.4 求下列线性方程和 Bernoulli 方程的解.

$$(1) (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2;$$

$$(2) y' + \frac{1-2x}{x} = 1;$$

$$(3) y' = \frac{y}{x+y^3};$$

$$(4) y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x;$$

$$(5) y' = y \tan x + y^2 \cos x;$$

$$(6) y - y' \cos x = y^2(1 - \sin x) \cos x.$$

解

(1) 转为标准形式:

$$y' + \left(-\frac{2x}{1+x^2} \right) y = 1+x^2.$$

则 $\int P(x) dx = \int -\frac{2x}{1+x^2} dx = -\ln(1+x^2)$. 根据线性方程通解公式:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx + C \right) \\ &= (1+x^2) \left(\int (1+x^2) \frac{1}{1+x^2} dx + C \right) \\ &= (1+x^2)(x+C). \end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$y = (x+C)(1+x^2)$$

(2) 原方程可写为 $y' = 1 - \frac{1-2x}{x} = 1 - \frac{1}{x} + 2 = 3 - \frac{1}{x}$. 分离变量得 $dy = \left(3 - \frac{1}{x}\right) dx$. 积分得

$$y = 3x - \ln|x| + C$$

(3) 将方程视为 x 关于 y 的函数. 原方程可写为 $\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^3}{y} = \frac{x}{y} + y^2$. 整理得:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y^2.$$

这是一个关于 x 的线性方程. $P(y) = -\frac{1}{y}$, $Q(y) = y^2$. $\int P(y) dy = -\ln|y|$. 通解为:

$$\begin{aligned} x &= e^{-(-\ln|y|)} \left(\int y^2 e^{-\ln|y|} dy + C \right) \\ &= |y| \left(\int y^2 \frac{1}{|y|} dy + C \right) \\ &= y \left(\int y dy + C \right) \quad (\text{假设 } y > 0) \\ &= y \left(\frac{1}{2}y^2 + C \right) = \frac{y^3}{2} + Cy. \end{aligned}$$

解为 $x = \frac{y^3}{2} + Cy$, $x + y^3 \neq 0$

(4) 这是 Bernoulli 方程. $y \equiv 0$ 是一个解. 当 $y \neq 0$ 时, 方程两边同除以 y^2 :

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \ln x.$$

作代换 $u = y^{-1}$, 则 $u' = -y^{-2}y'$. 方程变为:

$$-u' + \frac{1}{x}u = \ln x \implies u' - \frac{1}{x}u = -\ln x.$$

这是一个线性方程. $\int P(x) dx = -\ln|x|$.

$$\begin{aligned} u &= e^{-(\ln|x|)} \left(\int (-\ln x) e^{-\ln|x|} dx + C \right) \\ &= |x| \left(\int (-\ln x) \frac{1}{|x|} dx + C \right) \\ &= x \left(- \int \frac{\ln x}{x} dx + C \right) \quad (\text{假设 } x > 0) \\ &= x \left(-\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \right). \end{aligned}$$

所以 $y^{-1} = x \left(C - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right)$, 即 $y = \frac{1}{x(C - \frac{1}{2}(\ln x)^2)}$. 通解为

$$y = 0 \quad \text{和} \quad 1 = yx \left(C - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right).$$

- (5) 这是 Bernoulli 方程. $y \equiv 0$ 是一个解. 当 $y \neq 0$ 时, 方程写为 $y' - (\tan x)y = (\cos x)y^2$. 两边同除以 y^2 : $y^{-2}y' - (\tan x)y^{-1} = \cos x$. 令 $u = y^{-1}$, 则 $u' = -y^{-2}y'$. 方程变为:

$$-u' - (\tan x)u = \cos x \implies u' + (\tan x)u = -\cos x.$$

这是一个线性方程. $\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$.

$$\begin{aligned} u &= e^{(-\ln|\cos x|)} \left(\int (-\cos x) e^{-\ln|\cos x|} dx + C \right) \\ &= |\cos x| \left(\int (-\cos x) \frac{1}{|\cos x|} dx + C \right). \end{aligned}$$

假设 $\cos x > 0$, 则 $u = \cos x \left(\int (-1) dx + C \right) = \cos x(-x+C)$. 所以 $y^{-1} = (C-x)\cos x$, 即 $y = \frac{1}{(C-x)\cos x}$. 通解为

$$y = 0, \text{ 和 } 1 = y \cos x(C-x).$$

- (6) 这是 Bernoulli 方程. $y \equiv 0$ 是一个解. 当 $y \neq 0$ 时, 将方程整理为标准形式:

$$y' \cos x = y - y^2(1 - \sin x) \cos x \implies y' - (\sec x)y = -(1 - \sin x)y^2.$$

两边同除以 y^2 : $y^{-2}y' - (\sec x)y^{-1} = -(1 - \sin x)$. 令 $u = y^{-1}$, 则 $u' = -y^{-2}y'$. 方程变为:

$$-u' - (\sec x)u = -(1 - \sin x) \implies u' + (\sec x)u = 1 - \sin x.$$

这是一个线性方程. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|$.

$$\begin{aligned} u &= e^{-\ln|\sec x + \tan x|} \left(\int (1 - \sin x) e^{\ln|\sec x + \tan x|} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{|\sec x + \tan x|} \left(\int (1 - \sin x) |\sec x + \tan x| dx + C \right). \end{aligned}$$

假设 $\sec x + \tan x > 0$, 则

$$\begin{aligned}\int (1 - \sin x)(\sec x + \tan x) dx &= \int (\sec x + \tan x - \tan x - \sin x \tan x) dx \\&= \int (\sec x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}) dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} dx \\&= \int \cos x dx = \sin x.\end{aligned}$$

所以 $u = \frac{1}{\sec x + \tan x}(\sin x + C)$.

注 此处只需要考虑 $\sec x + \tan x > 0$ 的情形, 从另一个角度来理解是这样的:

$$\begin{aligned}d((\tan x + \sec x)u) &= ((\sec x + \tan x)u' + \sec x(\sec x + \tan x)u) dx \\&= ((\sec x + \tan x)(1 - \sin x)) dx\end{aligned}$$

因此

$$(\tan x + \sec x)u = \int (\sec x + \tan x)(1 - \sin x) dx + C = \sin x + C.$$

故微分方程的解为

$$y = 0 \quad \text{和} \quad y(\sin x + C) = \sec x + \tan x.$$

习题 6.1.5 求下列方程满足初值条件的特解.

$$(1) \ y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}, y(1) = 1; \quad (2) \ y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, y(\pi) = 1.$$

解

(1) 这是齐次方程. 令 $u = y/x$, 则 $y' = u'x + u$. 方程变为

$$u'x = u(\ln u - 1).$$

分离变量:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

积分得

$$\ln u - 1 = Cx.$$

所以 $u = e^{1+Cx}$, 即 $y = xe^{1+Cx}$. 代入初值 $y(1) = 1$, 得 $1 = 1 \cdot e^{1+C}$, 解得 $C = -1$. 故特解为

$$y = xe^{1-x}, x > 0.$$

(2) 这是线性方程. 积分因子为 $I(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$ (因 $x > 0$). 通解为

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \left(\int x \cdot \frac{\sin x}{x} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x} \left(\int \sin x dx + C \right) = \frac{-\cos x + C}{x}. \end{aligned}$$

代入初值 $y(\pi) = 1$, 得 $1 = \frac{-\cos \pi + C}{\pi} = \frac{1 + C}{\pi}$. 解得 $C = \pi - 1$. 故特解为

$$y = \frac{-\cos x + \pi - 1}{x}, x > 0.$$

习题 6.1.6 求解下列微分方程.

$$(1) y' + x = \sqrt{x^2 + y};$$

$$(2) y' = \cos(x - y);$$

$$(3) y' - e^{x-y} + e^x = 0;$$

$$(4) y' \sin y + x \cos y + x = 0.$$

解

(1) 令 $u^2 = x^2 + y$, 则 $y = u^2 - x^2$, $y' = 2uu' - 2x$. 代入方程得

$$\begin{aligned} y' + x &= \sqrt{x^2 + y} \\ \implies 2uu' - 2x + x &= u \\ \implies 2vx(xv' + v) &= x + vx(u = vx) \\ \implies (1 - p)^{-2} &= C|x| \\ \implies y &= -2x^4 + Cx^6 \end{aligned}$$

(2) 令 $u = x - y$, 则 $y = x - u$, $y' = 1 - u'$. 代入方程得

$$\begin{aligned} y' &= \cos(x - y) \\ \implies 1 - u' &= \cos u \\ \implies u' &= 1 - \cos u \\ \implies \frac{du}{1 - \cos u} &= dx \\ \implies \int \frac{du}{1 - \cos u} &= \int dx \end{aligned}$$

注意到 $\frac{1}{1 - \cos u} = \frac{1}{2} \csc^2 \left(\frac{u}{2} \right)$, 所以

$$\int \frac{du}{1 - \cos u} = \int \frac{1}{2} \csc^2 \left(\frac{u}{2} \right) du = -2 \cot \left(\frac{u}{2} \right) + C.$$

故方程的通解为

$$-2 \cot \left(\frac{x - y}{2} \right) = x + C.$$

(3) 令 $u = e^y, u' = e^y y'$, 代入方程得

$$\begin{aligned} y' - e^{x-y} + e^x &= 0 \\ \implies e^y y' - e^x + e^x e^y &= 0 \\ \implies u' - e^x + e^x u &= 0 \\ \implies \frac{1}{1-u} du &= e^x dx \\ \implies -\ln|1-u| &= e^x + C \\ \implies 1-e^y &= C'e^{-e^x} \end{aligned}$$

(4) 直接分离变量, 并验证 $y = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ 为方程的特解, 因此

$$\begin{aligned} \ln|1+\cos y| &= \frac{1}{2}x^2 + C \\ \implies 1+\cos y &= C'e^{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

习题 6.1.7 试用常数变易法导出 Bernoulli 方程的通解.

解 Bernoulli 方程的一般形式为:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (n \neq 0, 1)$$

我们使用常数变易法来求解.

(1) 求解对应的齐次线性方程

我们先考虑与 Bernoulli 方程相关的齐次线性方程:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

这是一个可分离变量的方程:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

两边积分, 得 $\ln|y| = - \int P(x)dx + C_0$, 其通解为:

$$y = C - \int P(x)dx$$

其中 C 是任意常数.

(2) 使用常数变易法

现在, 我们假设原 Bernoulli 方程的解具有与上述齐次解相似的形式, 但将常数 C 替换为一个关于 x 的函数 $C(x)$. 设原方程的解为:

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

我们求其导数:

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x))$$

注意到 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$, 上式可以写成:

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)y$$

(3) 代入原方程并求解 $C(x)$

将 y' 的表达式代入原 Bernoulli 方程 $y' + P(x)y = Q(x)y^n$:

$$\left(C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)y \right) + P(x)y = Q(x)y^n$$

化简得:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)y^n$$

现在, 将 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 代入上式的右边:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \left(C(x)e^{-\int P(x)dx} \right)^n = Q(x)[C(x)]^n e^{-n \int P(x)dx}$$

整理以求解 $C'(x)$:

$$C'(x) = Q(x)[C(x)]^n e^{-n \int P(x)dx} e^{\int P(x)dx} = Q(x)[C(x)]^n e^{(1-n) \int P(x)dx}$$

这是一个关于 $C(x)$ 的可分离变量方程. 我们分离变量:

$$\frac{dC}{[C(x)]^n} = Q(x)e^{(1-n) \int P(x)dx} dx$$

两边积分 (假设 $n \neq 1$):

$$\begin{aligned} \int [C(x)]^{-n} dC &= \int Q(x)e^{(1-n) \int P(x)dx} dx \\ \frac{1}{1-n}[C(x)]^{1-n} &= \int Q(x)e^{(1-n) \int P(x)dx} dx + C_1 \end{aligned}$$

解出 $[C(x)]^{1-n}$:

$$[C(x)]^{1-n} = (1-n) \left(\int Q(x)e^{(1-n) \int P(x)dx} dx + C_1 \right)$$

(4) 得到通解

从 $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ 可得 $C(x) = ye^{\int P(x)dx}$. 代入上式:

$$\begin{aligned} \left(ye^{\int P(x)dx} \right)^{1-n} &= (1-n) \left(\int Q(x)e^{(1-n) \int P(x)dx} dx + C_1 \right) \\ y^{1-n}e^{(1-n) \int P(x)dx} &= (1-n) \int Q(x)e^{(1-n) \int P(x)dx} dx + C' \end{aligned}$$

两边同乘以 $e^{-(1-n) \int P(x)dx}$:

$$y^{1-n} = e^{-(1-n) \int P(x)dx} \left((1-n) \int Q(x)e^{(1-n) \int P(x)dx} dx + C' \right)$$

这与通过标准代换 $u = y^{1-n}$ 得到的解是等价的.

习题 6.1.8 一条曲线过点 $(2, 3)$, 其在坐标轴间的任意切线段被切点平分, 求这条曲线.

解 设曲线上任意一点为 (x, y) , 该点的切线方程为 $Y - y = y'(X - x)$. 切线与 X 轴的交点(令 $Y = 0$): $X = x - \frac{y}{y'}$. 切线与 Y 轴的交点(令 $X = 0$): $Y = y - xy'$. 这两个交点分别是 $(x - \frac{y}{y'}, 0)$ 和 $(0, y - xy')$.

根据题意, 这两个交点所构成的线段的中点是切点 (x, y) 本身. 所以我们有中点坐标公式:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(x - \frac{y}{y'}) + 0}{2} \implies 2x = x - \frac{y}{y'} \implies x = -\frac{y}{y'} \\ y &= \frac{0 + (y - xy')}{2} \implies 2y = y - xy' \implies y = -xy' \end{aligned}$$

从第一个方程可以得到微分方程:

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{y}{x}$$

(第二个方程 $y = -x(-\frac{y}{x}) = y$ 与第一个方程是相容的).

这是一个可分离变量的方程.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

两边积分:

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int \frac{1}{x} dx \implies \ln|y| = -\ln|x| + C_1$$

$$\ln|y| + \ln|x| = C_1 \implies \ln|xy| = C_1$$

$$|xy| = e^{C_1} \implies xy = C \quad (C \text{ 为任意非零常数})$$

曲线经过点 $(2, 3)$, 代入方程确定常数 C :

$$2 \cdot 3 = C \implies C = 6$$

因此, 所求的曲线方程为 $xy = 6$.

习题 6.1.9 设函数 $f(x)$ 处处连续, 且 $f(x) = \int_0^x f(t)dt$ (对 $x \in \mathbb{R}$), 求 $f(x)$.

解 给定方程 $f(x) = \int_0^x f(t)dt$. 由于 $f(x)$ 连续, 根据微积分基本定理, 积分的变上限函数 $\int_0^x f(t)dt$ 是可导的, 且其导数为 $f(x)$. 对方程两边关于 x 求导, 我们得到:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x)$$

我们得到了一个微分方程 $f'(x) = f(x)$, 即 $\frac{dy}{dx} = y$ (令 $y = f(x)$). 这是一个可分离变量的方程, 其通解为:

$$y = Ce^x$$

所以 $f(x) = Ce^x$.

现在我们需要确定常数 C . 将 $x = 0$ 代入原积分方程 $f(x) = \int_0^x f(t)dt$:

$$f(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$$

再将 $x = 0$ 代入通解 $f(x) = Ce^x$:

$$f(0) = Ce^0 = C \cdot 1 = C$$

因此, 我们得到 $C = 0$. 所以, 函数 $f(x)$ 的唯一解是 $f(x) = 0 \cdot e^x = 0$. 即 $f(x)$ 是零函数.

习题 6.1.10 已知镭的衰变速率与镭的现存量成正比 (比例常数为 k). 设开始时镭的量为 a , 问 t 时刻镭的量 $x(t)$ 为多少?

解 设 t 时刻镭的量为 $x(t)$. 衰变速率即为 $\frac{dx}{dt}$. 根据题意, 衰变速率与现存量成正比, 比例常数为 k . 因为是衰变, 所以速率负.

$$\frac{dx}{dt} = -kx(t) \quad (k > 0)$$

这是一个可分离变量的微分方程.

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

两边积分:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int -k dt \implies \ln|x| = -kt + C_1$$

由于 $x(t)$ 代表物质的量, $x(t) > 0$, 所以 $|x| = x$.

$$\ln x = -kt + C_1 \implies x(t) = e^{-kt+C_1} = e^{C_1}e^{-kt}$$

令 $C = e^{C_1}$, 则通解为 $x(t) = Ce^{-kt}$.

我们有初始条件: 开始时 ($t = 0$) 镭的量为 a . 即 $x(0) = a$. 代入通解:

$$x(0) = Ce^{-k \cdot 0} = Ce^0 = C$$

所以 $C = a$. 因此, t 时刻镭的量为:

$$x(t) = ae^{-kt}$$

习题 6.1.11 一气艇以速度 $v = 10 \text{ km/h}$ 在静水上运动, 它的发动机在开足马力后关掉, 经过 20 s 后, 气艇的速度降低为 $v_1 = 6 \text{ km/h}$. 设水对气艇运动的阻力与气艇速度成正比, 试求:

(1) 发动机停止 2 min 后气艇的速度;

(2) 发动机停止 1 min 后气艇所走的路程.

解 设气艇的质量为 m , 速度为 $v(t)$. 阻力 F_r 与速度成正比, $F_r = -kv$ ($k > 0$ 为阻力系数). 根

据牛顿第二定律 $F = ma$, 我们有:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv$$

这是一个可分离变量的方程.

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

两边积分: $\ln v = -\frac{k}{m}t + C_1$. 通解为 $v(t) = e^{C_1}e^{-\frac{k}{m}t} = Ce^{-\frac{k}{m}t}$.

我们统一单位. 速度单位用 m/s, 时间单位用 s. $v_0 = 10 \text{ km/h} = 10 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = \frac{25}{9} \text{ m/s}$.

$$v_1 = 6 \text{ km/h} = 6 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = \frac{5}{3} \text{ m/s.}$$

初始条件: $t = 0$ 时, $v(0) = v_0 = \frac{25}{9}$. 代入通解: $v(0) = Ce^0 = C \implies C = \frac{25}{9}$. 所以速度函数为 $v(t) = \frac{25}{9}e^{-\frac{k}{m}t}$.

利用 $t = 20$ s 时的数据求 $\frac{k}{m}$: $v(20) = \frac{5}{3}$.

$$\frac{5}{3} = \frac{25}{9}e^{-\frac{k}{m} \cdot 20} \implies e^{-20\frac{k}{m}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{3}{5}$$

$$-20\frac{k}{m} = \ln\left(\frac{3}{5}\right) \implies \frac{k}{m} = -\frac{1}{20} \ln\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

所以速度的精确表达式为 $v(t) = \frac{25}{9}e^{-\frac{t}{20} \ln\left(\frac{5}{3}\right)} = \frac{25}{9} \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{20}}$.

(1) 求 $t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$ 后的速度.

$$v(120) = \frac{25}{9} \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{120}{20}} = \frac{25}{9} \left(\frac{3}{5}\right)^6 = \frac{5^2}{3^2} \cdot \frac{3^6}{5^6} = \frac{3^4}{5^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625} \text{ m/s}$$

$$\text{换算成 km/h: } \frac{81}{625} \cdot \frac{3600}{1000} = \frac{81}{625} \cdot \frac{18}{5} = \frac{1458}{3125} \approx 0.46656 \text{ km/h.}$$

(2) 求 $t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ 后所走的路程 $s(60)$. 路程是速度对时间的积分: $s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$.

$$s(60) = \int_0^{60} \frac{25}{9}e^{-\frac{k}{m}\tau} d\tau = \frac{25}{9} \left[-\frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}\tau}\right]_0^{60}$$

我们知道 $\frac{k}{m} = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{5}{3}\right)$, 所以 $\frac{m}{k} = \frac{20}{\ln(5/3)}$.

$$\begin{aligned}s(60) &= \frac{25}{9} \left(-\frac{m}{k}\right) \left(e^{-\frac{k}{m} \cdot 60} - e^0\right) \\&= -\frac{25}{9} \frac{20}{\ln(5/3)} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{60}{20}} - 1\right) \\&= -\frac{500}{9 \ln(5/3)} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^3 - 1\right) \\&= -\frac{500}{9 \ln(5/3)} \left(\frac{27}{125} - 1\right) = -\frac{500}{9 \ln(5/3)} \left(-\frac{98}{125}\right) \\&= \frac{500 \cdot 98}{9 \cdot 125 \ln(5/3)} = \frac{4 \cdot 125 \cdot 98}{9 \cdot 125 \ln(5/3)} = \frac{392}{9 \ln(5/3)} \text{ m.}\end{aligned}$$

$$\ln(5/3) \approx \ln(1.667) \approx 0.5108. s(60) \approx \frac{392}{9 \cdot 0.5108} \approx \frac{392}{4.5972} \approx 85.27 \text{ m.}$$

习题 6.1.12 求解下列二阶方程.

$$(1) xy'' = y';$$

$$(2) y'' = \frac{y'}{x} + x;$$

$$(3) y'' = y' + x;$$

$$(4) y'' + (y')^2 = 2e^{-y}.$$

解

(1) 令 $p = y'$, 则 $y'' = p'$. 方程变为 $xp' = p$. 这是一个可分离变量方程: $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$. 积分得

$$\ln|p| = \ln|x| + C_1, \text{ 所以 } p = C'_1 x. \text{ 即 } y' = C'_1 x. \text{ 再次积分: } y = \int C'_1 x dx = \frac{1}{2} C'_1 x^2 + C_2.$$

令 $C_1 = C'_1/2$, 解为 $y = C_1 x^2 + C_2$.

(2) 令 $p = y'$, 则 $y'' = p'$. 方程变为 $p' = \frac{p}{x} + x$, 即 $p' - \frac{1}{x}p = x$. 这是一个线性方程.

$$\int P(x)dx = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln|x|. \text{ 通解为:}$$

$$\begin{aligned}p &= e^{-(\ln|x|)} \left(\int x e^{-\ln|x|} dx + C_1 \right) \\&= |x| \left(\int x \frac{1}{|x|} dx + C_1 \right) \\&= x \left(\int dx + C_1 \right) \quad (\text{假设 } x > 0) \\&= x(x + C_1) = x^2 + C_1 x.\end{aligned}$$

$$\text{即 } y' = x^2 + C_1 x. \text{ 再次积分: } y = \int (x^2 + C_1 x) dx = \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2.$$

(3) 令 $p = y'$, 则 $y'' = p'$. 方程变为 $p' = p + x$, 即 $p' - p = x$. 这是一个线性方程. $\int P(x)dx =$

$$\int -1 \mathrm{d}x = -x. \text{ 通解为:}$$

$$\begin{aligned} p &= e^{-(x)} \left(\int x e^{-x} \mathrm{d}x + C_1 \right) \\ &= e^x (-x - 1)e^{-x} + C_1 \quad (\text{分部积分}) \\ &= -(x + 1) + C_1 e^x. \end{aligned}$$

即 $y' = C_1 e^x - x - 1$. 再次积分: $y = \int (C_1 e^x - x - 1) \mathrm{d}x = C_1 e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + C_2$.

(4) 方程不显含 x . 令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 方程变为 $p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 2e^{-y}$. 令 $u = p^2$, 则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2p \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 方程化为:

$$\frac{1}{2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + u = 2e^{-y} \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + 2u = 4e^{-y}.$$

这是一个关于 $u(y)$ 的线性方程. $\int P(y) \mathrm{d}y = \int 2 \mathrm{d}y = 2y$. 通解为:

$$\begin{aligned} u &= e^{-2y} \left(\int 4e^{-y} e^{2y} \mathrm{d}y + C_1 \right) \\ &= e^{-2y} \left(\int 4e^y \mathrm{d}y + C_1 \right) = e^{-2y}(4e^y + C_1) = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}. \end{aligned}$$

因为 $u = p^2 = (y')^2$, 所以 $(y')^2 = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}$.

$$\begin{aligned} y' &= \pm \sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}} \\ \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}} &= \pm \int \mathrm{d}x \implies \int \frac{e^y \mathrm{d}y}{\sqrt{4e^y + C_1}} = \pm x + C_2. \end{aligned}$$

令 $w = \sqrt{4e^y + C_1}$, 则 $w^2 = 4e^y + C_1$, $2w \mathrm{d}w = 4e^y \mathrm{d}y$.

$$\int \frac{w/2 \mathrm{d}w}{w} = \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_1}.$$

所以 $\frac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_1} = \pm x + C_2$.

$$\sqrt{4e^y + C_1} = \pm 2x + 2C_2 \implies 4e^y + C_1 = (C'_1 \pm 2x)^2.$$

解为 $4e^y = (C_1 \pm 2x)^2 - C_2$. 或者写为

$$e^y = x^2 + C_1 x + C_2.$$

习题 6.1.13 求下列二阶方程满足初值条件的特解.

$$(1) \ y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, y(1) = 1, y'(1) = 0; \quad (2) \ y^3 y'' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

解

(1) 方程在 $y' = 0$ 时无定义. 我们对方程变形: $y'y'' - \frac{(y')^2}{x} = x^2$. 令 $u = (y')^2$, 则 $u' = 2y'y''$.

方程变为:

$$\frac{1}{2}u' - \frac{u}{x} = x^2 \implies u' - \frac{2}{x}u = 2x^2.$$

这是一个线性方程. $\int P(x)dx = \int -\frac{2}{x}dx = -2\ln x = \ln(x^{-2})$. 通解为:

$$\begin{aligned} u &= e^{-\ln(x^{-2})} \left(\int 2x^2 e^{\ln(x^{-2})} dx + C \right) \\ &= x^2 \left(\int 2x^2 \cdot x^{-2} dx + C \right) = x^2 \left(\int 2 dx + C \right) = x^2(2x + C). \end{aligned}$$

所以 $(y')^2 = 2x^3 + Cx^2$. 使用初值条件 $y'(1) = 0$:

$$0^2 = 2(1)^3 + C(1)^2 \implies 2 + C = 0 \implies C = -2.$$

于是 $(y')^2 = 2x^3 - 2x^2 = 2x^2(x-1)$. $y' = \pm\sqrt{2x}\sqrt{x-1}$. 再次积分:

$$y = \int \pm\sqrt{2x}\sqrt{x-1} dx$$

令 $t = \sqrt{x-1}$, 则 $x = t^2 + 1$, $dx = 2tdt$.

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1}dx &= \int (t^2 + 1)t \cdot 2tdt = \int (2t^4 + 2t^2)dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C' = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C'. \end{aligned}$$

所以 $y = \pm\sqrt{2} \left(\frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \right) + C_2$. 使用初值条件 $y(1) = 1$:

$$1 = \pm\sqrt{2}(0+0) + C_2 \implies C_2 = 1.$$

特解为 $y = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{15}(3(x-1) + 5)(x-1)^{3/2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{15}(3x+2)(x-1)^{3/2}$.

(2) 方程不显含 x . 令 $p = y'$, 则 $y'' = p\frac{dp}{dy}$. 方程变为

$$y^3 p \frac{dp}{dy} = -1$$

分离变量:

$$p dp = -y^{-3} dy$$

积分后整理得

$$p^2 = \frac{1}{y^2} + 2C_1,$$

即

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C.$$

使用初值条件 $y(1) = 1, y'(1) = 0$: $0^2 = \frac{1}{1^2} + C \implies C = -1$. 所以

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2} \Rightarrow y' = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

分离变量后积分:

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = -\sqrt{1-y^2}$$

所以

$$-\sqrt{1-y^2} = \pm x + C_2.$$

使用初值条件 $y(1) = 1$

$$-\sqrt{1-1^2} = 0 = \pm 1 + C_2 \implies C_2 = \mp 1$$

所以

$$-\sqrt{1-y^2} = \pm x \mp 1 = \pm(x-1)$$

两边平方:

$$1-y^2 = (x-1)^2 \Rightarrow y^2 + (x-1)^2 = 1$$

由于 $y(1) = 1 > 0$, 我们取上半圆, 即特解为 $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$.

习题 6.2

习题 6.2.1 在下列方程中, 已知方程的一个特解 y_1 , 试求它们的通解.

- (1) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, y_1 = \frac{\sin x}{x};$
- (2) $y'' \sin^2 x = 2y, y_1 = \cot x;$
- (3) $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, y_1 = x.$

解

- (1) 微分方程在 $x \neq 0$ 上有解, 在 $x > 0$ 中取 $x_0 = 1$, 则

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_1^x p(t) dt} dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{\sin x}{x} \int \csc^2 x dx = \frac{\sin x}{x} (-\cot x + C) = \frac{\cos x}{x} + C \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

在 $x < 0$ 中取 $x_0 = -1$, 同理可得相同的结果, 所以通解为

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} (-\cot x) = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}.$$

- (2) 微分方程在 $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 上有解, 在 $(0, \pi)$ 中取 $x_0 = \frac{\pi}{2}$, 则

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_{\frac{\pi}{2}}^x p(t) dt} dx = \cot x \int \tan^2 x dx = \cot x (\tan x - x + C) = 1 - x \cot x + C \cot x.$$

在 $(-\pi, 0)$ 中取 $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, 同理可得相同的结果, 所以通解为

$$y = C_1 \cot x + C_2 (1 - x \cot x).$$

- (3) 微分方程在 $(-1, 1)$ 上有解, 取 $x_0 = 0$, 则

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_0^x p(t) dt} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\int_0^x \frac{-2t}{1-t^2} dt} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1-x^2} dx = x \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \right) = -1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + Cx. \end{aligned}$$

所以通解为

$$y = C_1 x + C_2 \left(-1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right).$$

注 严格来说, 上述解有独立的三支, 分别位于 $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$ 上. 三支的通解形式相同, 但常数 C_1, C_2 是独立的. 所以整体解应写为

$$y = C_1^{(-\infty, -1)} x + C_2^{(-\infty, -1)} \left(-1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right), \quad x < -1;$$

$$y = C_1^{(-1, 1)} x + C_2^{(-1, 1)} \left(-1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right), \quad -1 < x < 1;$$

$$y = C_1^{(1, +\infty)} x + C_2^{(1, +\infty)} \left(-1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right), \quad x > 1.$$

习题 6.2.2 先用观察法求下列齐次方程的一个非零特解, 然后求方程的通解.

$$(1) \quad x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, x \neq 0; \quad (2) \quad xy'' - (1+x)y' + y = 0, x \neq 0.$$

解

(1) 观察可得一个特解 $y_1 = x$. 取 $x_0 = 1$, 则

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_1^x p(t) dt} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\int_1^x \frac{2}{t} dt} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^2} \cdot x^2 dx = x(x+C) = x^2 + Cx. \end{aligned}$$

所以通解为

$$y = C_1x + C_2x^2.$$

(2) 观察可得一个特解 $y_1 = x + 1$. 取 $x_0 = 1$, 则

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_1^x p(t) dt} dx = (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} e^{\int_1^x \frac{1+t}{t} dt} dx \\ &= (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot xe^x dx = (x+1) \left(\frac{e^x}{x+1} + C \right) = e^x + C(x+1). \end{aligned}$$

因此通解为

$$y = C_1(x+1) + C_2 e^x.$$

习题 6.2.3 已知方程 $(1+x^2)y'' + 2xy' - 6x^2 - 2 = 0$ 的一个特解 $y_1 = x^2$, 试求该方程满足初值条件 $y(-1) = 0, y'(-1) = 0$ 的特解.

解 先求齐次方程 $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$ 的通解. 令 $p = y'$, 则齐次方程化为 $(1+x^2)p' + 2xp = 0$.

分离变量得

$$\ln |p| = -\ln(1+x^2) + C \implies p = \frac{C}{1+x^2}.$$

因此齐次方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 \arctan x.$$

又有非齐次方程的一个特解 $y_1 = x^2$, 故非齐次方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 \arctan x + x^2.$$

由初值条件 $y(-1) = 0, y'(-1) = 0$ 可得

$$\begin{cases} C_1 - \frac{\pi}{4}C_2 + 1 = 0, \\ \frac{C_2}{2} - 2 = 0. \end{cases}$$

解得 $C_1 = \pi - 1, C_2 = 4$. 因此所求特解为

$$y = \pi - 1 + 4 \arctan x + x^2.$$

习题 6.2.4 求下列常系数齐次方程的通解.

- (1) $y'' - 2y' - y = 0$; (2) $y'' + 2y' + 2y = 0$;
 (3) $y'' + y' - 6y = 0$.

解

(1) 特征方程为 $r^2 - 2r - 1 = 0$, 解得 $r_1 = 1 + \sqrt{2}, r_2 = 1 - \sqrt{2}$. 因此通解为

$$y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}.$$

(2) 特征方程为 $r^2 + 2r + 2 = 0$, 解得 $r_{1,2} = -1 \pm i$. 因此通解为

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

(3) 特征方程为 $r^2 + r - 6 = 0$, 解得 $r_1 = 2, r_2 = -3$. 因此通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

习题 6.2.5 求下列常系数非齐次方程的一个特解.

- (1) $y'' + y = 2 \sin \frac{x}{2}$; (2) $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{2x}$.

解

(1) 设特解形如 $y = C(x) \sin \frac{x}{2}$, 代入方程得

$$\begin{aligned} & \left(\left(C''(x) - \frac{C(x)}{4} \right) \sin \frac{x}{2} + \frac{C'(x)}{2} \cos \frac{x}{2} \right) + C(x) \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \\ & \implies \left(C''(x) + \frac{3}{4}C(x) \right) \sin \frac{x}{2} + \frac{C'(x)}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

比对 $y'' + y = 2 \sin \frac{x}{2}$ 的系数可得

$$\left\{ \begin{array}{l} C'' + \frac{3}{4}C = 2, \end{array} \right.$$

取 $C = \frac{8}{3}$ 可解得上式, 因此一个特解为

$$y^* = \frac{8}{3} \sin \frac{x}{2}.$$

(2) 设特解形如 $y = (Ax + B)e^{2x}$, 代入方程得

$$\begin{aligned} & ((4Ax + 4B + 4A) - 6(2Ax + 2B + A) + 9(Ax + B)) e^{2x} = (x+1)e^{2x} \\ & \implies (Ax + (B - 2A))e^{2x} = (x+1)e^{2x} \end{aligned}$$

比对 $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{2x}$ 的系数可得

$$\left\{ \begin{array}{l} A = 1, \\ B - 2A = 1. \end{array} \right.$$

解得 $A = 1, B = 3$, 因此一个特解为

$$y^* = (x + 3)e^{2x}.$$

此类待定系数中, 所使用的特解形式有如下命题

命题 ($f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型)

求解非齐次方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$ 时候, 可设特解为:

$$y^* = x^k P_m(x) e^{\lambda x}$$

其中:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda x} \text{照抄}, \\ P_m(x) \text{为 } m \text{ 次一般多项式}, \\ k = \begin{cases} 0, & \text{当 } \lambda \text{ 不是特征根,} \\ 1, & \text{当 } \lambda \text{ 是特征单根,} \\ 2, & \text{当 } \lambda \text{ 是特征重根.} \end{cases} \end{array} \right.$$

命题 ($f(x) = e^{\lambda x} (P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x)$ 型)

求解非齐次方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$ 时候, 可设特解为:

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [P_m(x) \cos \omega x + Q_m(x) \sin \omega x]$$

其中:

$$\left\{ \begin{array}{l} e^{\lambda x} \text{照抄}, \\ m = \max\{l, n\}, P_m(x) \text{ 和 } Q_m(x) \text{ 分别为 } m \text{ 次一般多项式}, \\ k = \begin{cases} 0, & \text{当 } \lambda + \omega i \text{ 不是特征根,} \\ 1, & \text{当 } \lambda + \omega i \text{ 是特征根.} \end{cases} \end{array} \right.$$

习题 6.2.6 验证函数组 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 在实轴上线性无关, 函数组 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在实轴上线性相关.

解 设存在常数 C_0, C_1, \dots, C_n 使得

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

则上式为一个恒等式, 对 x 求导 n 次可得

$$n! C_n = 0 \implies C_n = 0.$$

依此类推可得 $C_{n-1} = 0, C_{n-2} = 0, \dots, C_0 = 0$. 因此函数组 $1, x, x^2, \dots, x^n$ 在实轴上线性无关.

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

因此函数组 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 在实轴上线性相关.

习题 6.2.7 证明: 在区间 I 上任何线性相关的两个函数 $y_1(x), y_2(x)$, 它们的 Wronski 行列式一定恒为零.

解 设 y_1, y_2 在区间 I 上线性相关, 则存在常数 C_1, C_2 , 不全为零, 使得

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

对上式求导可得

$$C_1 y'_1(x) + C_2 y'_2(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

将上述两式联立可得

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in I.$$

因此 y_1, y_2 的 Wronski 行列式恒为零.

习题 6.2.8 证明下列函数在区间 $(0, 2)$ 上是线性无关的, 但是它们的 Wronski 行列式却恒为零:

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

解 设存在常数 C_1, C_2 使得

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, \quad \forall x \in (0, 2).$$

当 $0 < x < 1$ 时, 上式化为 $C_1(x-1)^2 = 0$, 因此 $C_1 = 0$; 当 $1 < x < 2$ 时, 上式化为 $C_2(x-1)^2 = 0$, 因此 $C_2 = 0$. 所以函数组 y_1, y_2 在区间 $(0, 2)$ 上线性无关.

又因为

$$y'_1(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad y'_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2(x-1), & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

所以

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in (0, 2).$$

因此 y_1, y_2 的 Wronski 行列式恒为零.

习题 6.2.9 求下列方程的通解.

$$(1) \quad x''' + 3x'' + 3x' + x = 0;$$

$$(2) \quad x''' - 2x'' + x' - 2x = 0;$$

(3) $x^{(4)} - 8x'' + 18x = 0;$

(4) $x^{(4)} + 2x'' + x = 0.$

解

(1) 特征方程为 $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$, 解得 $r_1 = -1$ 为三重根. 因此通解为

$$x = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2) e^{-t}.$$

(2) 特征方程为 $r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0$, 解得 $r_1 = 2, r_{2,3} = \pm i$, 因此通解为

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$$

(3) 特征方程为 $r^4 - 8r^2 + 18 = 0$, 解得 $r_{1,2} = 2 + i, r_{3,4} = 2 - i$. 因此通解为

$$x = e^{2t} (C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 t \cos t + C_4 t \sin t).$$

(4) 特征方程为 $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$, 解得 $r_{1,2} = i, r_{3,4} = -i$. 因此通解为

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3 t \cos t + C_4 t \sin t.$$

第 7 章 无穷级数

习题 7.1

习题 7.1.1 证明下列等式:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} = \ln 2;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

解

(1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) &= \sum_{n=1}^{\infty} ((\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{2} - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - (\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n - \ln(n+1) + \ln(2n+1) - \ln(2n-1)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 1 - \ln(n+1) + \ln 3 - \ln(2n-1)) = \ln 2. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} + 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \end{aligned}$$

习题 7.1.2 研究下列级数的敛散性:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001};$
- (2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}-1};$
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}};$
- (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n;$
- (5) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n};$
- (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}};$
- (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n};$
- (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+\frac{1}{n})^n};$
- (9) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{\pi}{4n};$
- (10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!};$
- (11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$
- (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n};$
- (13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}};$
- (14) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^k};$
- (15) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n} \right)^{n^3};$
- (16) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1} \right)^n (a > 0).$

解

- (1) 发散, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0.001} = 1$.
- (2) 收敛, 因为 $\frac{1}{n\sqrt{n}-1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$, 而 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛.
- (3) 发散, 因为 $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} \sim \frac{1}{2n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散.
- (4) 发散, 因为 $\sin n$ 不趋于零.
- (5) 收敛, 因为 $2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \sim \frac{2^n \pi}{3^n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \pi}{3^n}$ 收敛.
- (6) 发散, 因为 $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.
- (7) 收敛, 因为 $\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{2^n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛.
- (8) 收敛, 因为 $\frac{n}{(n+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{n}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛.
- (9) 发散, 因为 $\arctan \frac{\pi}{4n} \sim \frac{\pi}{4n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4n}$ 发散.
- (10) 收敛, 因为 $\frac{1000^n}{n!} \sim \frac{1000^n}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$ 收敛.
- (11) 收敛, 因为 $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{(n!)^2}{\sqrt{4\pi n}} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{n+k} \leq \prod_{k=1}^n \frac{1}{\frac{n+k}{2}} = \frac{1}{2^n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛.

(12) 收敛, 因为 $\frac{3+(-1)^n}{2^n} \leq \frac{4}{2^n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$ 收敛.

(13) 收敛, 因为 $\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}} = o\left(\frac{\sqrt[8]{n}}{\sqrt[4]{n^5}}\right) = o\left(\frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}\right)$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}$ 收敛.

(14) 级数收敛性同

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)(\ln \ln x)^k} dx = \int_{\ln \ln 3}^{\infty} \frac{1}{t^k} dt,$$

故 $k > 1$ 时, 级数收敛; $k \leq 1$ 时, 级数发散.

(15) 收敛, 因为

$$\left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3} = e^{n^3 \ln(\cos \frac{1}{n})} \sim e^{n^3 (\ln(1 - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})))} \sim e^{-\frac{n}{2}, n \rightarrow \infty},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{2}}$ 收敛.

(16) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha n}{n+1} = \alpha$. 当 $\alpha < 1$ 时, 收敛; 当 $\alpha \geq 1$ 时, 发散.

习题 7.1.3 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 也收敛. 试举例说明逆命题不成立; 但若 $a_n > 0$ 则逆命题成立.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_1$$

收敛.

反例: 令 $a_n = (-1)^{n-1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

若 $a_n > 0$, 由比较判别法, 因为 $a_n + a_{n+1} \geq a_n$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 推出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

习题 7.1.4 证明或回答下面论断:

(1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a \neq 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 是否有 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$?

(3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

解

(1) 正确, 因为 $a_n \sim \frac{a}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$ 发散.

(2) 不一定, 如 $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = (-1)^{n-1}$ 不存在.

(3) 正确,

$$\sum_{n=1}^{N+1} a_n = \sum_{n=1}^N n(a_n - a_{n+1}) + (N+1)a_{N+1}.$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, $\sum_{n=1}^N n(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 故

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N n(a_n - a_{n+1})$$

存在; 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$, 故

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (N+1)a_{N+1} = a$$

也存在, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

习题 7.1.5 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 试问反之是否成立?

解

(1) 由教材推论 7.8, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

(2) 反之不成立, 例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

习题 7.1.6 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个非负数列, 满足 $a_{n+1} < a_n + b_n$, 而且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在.

解 由

$$0 \leq a_n < a_{n-1} + b_{n-1} < a_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-1} < \cdots < a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k,$$

故 $\{a_n\}$ 有界, 因此存在收敛子列, 设为 $\{a_{n_k}\} \rightarrow a$. $\forall n, \exists k$, s.t. $n_k < n < n_{k+1}$, 则

$$a_{n_k} - \sum_{i=n_k}^{n-1} b_i < a_n < a_{n_{k+1}} + \sum_{i=n}^{n_{k+1}-1} b_i.$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $k \rightarrow \infty$, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可知, $\sum_{i=n_k}^{n-1} b_i \rightarrow 0$, $\sum_{i=n}^{n_{k+1}-1} b_i \rightarrow 0$, 由夹逼定理可知, $a_n \rightarrow a$.

习题 7.1.7 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

解

(1) 由柯西-施瓦茨不等式, 有

$$\sum_{n=1}^N |a_n b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N a_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N b_n^2}.$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 右端有界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛.

(2) 正项级数满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 收敛.

(3) 由柯西-施瓦茨不等式, 有

$$\sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{n} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N a_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}}.$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 右端有界, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

习题 7.1.8 求下列极限 (其中 $p > 1$):

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{p^{2n}} \right).$$

解

(1) 因为

$$\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} \leq n \cdot \frac{1}{(n+1)^p} = \frac{n}{(n+1)^p} \leq \frac{1}{(n+1)^{p-1}},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} \right) = 0$.

(2) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{p^{2n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/p^{n+1}(1 - (1/p)^n)}{1 - 1/p} = 0.$$

习题 7.1.9 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 试问 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n$ 是否收敛? 说明理由.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 发散, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. 又因为 $\{a_n\}$ 单调递减, 故存在常数 $a > 0$, 使得当 n 足够大时, 有 $a_n \geq a$. 因此, 当 n 足够大时,

$$\left(\frac{1}{a_n + 1} \right)^n \leq \left(\frac{1}{a + 1} \right)^n.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$ 收敛, 故由比较判别法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

习题 7.1.10 设 $a_n > 0, a_n > a_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

是收敛的.

解 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

又因为

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{n a_{n+1} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n(n+1)} < 0,$$

故数列 $\left\{ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right\}$ 单调递减. 由 Leibniz 判别法, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

收敛.

习题 7.1.11 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 求证: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 绝对收敛.

解 由三角不等式, 有

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 故由比较判别法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$ 收敛, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 绝对收敛.

习题 7.1.12 研究下列级数的条件收敛性与绝对收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1);$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right);$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{p}{n} \right);$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{n} \right)^p.$$

解

(1) 绝对收敛. $\left| (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n \right| \sim \left(\frac{2}{3} \right)^n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n$ 收敛.

(2) 绝对收敛. $\left| \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛.

(3) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left| (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} \right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故绝对发散. 又因为

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1+100} - \frac{\sqrt{n}}{n+100} = \frac{100 - \sqrt{n(n+1)}}{(n+1+100)(n+100)} < 0,$$

在 n 充分大时成立, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(4) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left| (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n} \right| \sim \frac{1}{n},$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故绝对发散. 又因为 $\sin \frac{1}{n}$ 单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(5) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left| (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n} \right| \sim \frac{\ln n}{n},$$

且 $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln^2 x$ 发散, 故绝对发散. 又因为 $\frac{\ln n}{n}$ 在 n 充分大时单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(6) (a) $p \leq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$, 级数发散.

(b) $0 < p \leq 1$ 时, 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \right| = \frac{1}{n^p},$$

且 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 发散, 故绝对发散. 又因为 $\frac{1}{n^p}$ 单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(c) $p > 1$ 时, 绝对收敛. 因为

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \right| = \frac{1}{n^p},$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故绝对收敛.

(7) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left| (-1)^n (\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1) \right| \sim \frac{1}{n},$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故绝对发散. 又因为 $e^{\frac{1}{n}} - 1$ 单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(8) 绝对收敛. 因为

$$\left| (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) \right| = \frac{1}{n} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2n^2},$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 故绝对收敛.

(9) (a) $p \neq 0$ 时绝对收敛. 因为

$$\left| (-1)^n \left(1 - \cos \frac{p}{n} \right) \right| \sim \frac{p^2}{2n^2},$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2}{2n^2}$ 收敛, 故绝对收敛.

(b) $p = 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos 0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ 收敛.

(10) 由 $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$ 以及 (6) 的结论可知,

(a) $p \geq \frac{1}{2}$ 时, 绝对收敛.

(b) $0 < p < \frac{1}{2}$ 时, 条件收敛, 绝对发散.

(c) $p \leq 0$ 时, 发散.

习题 7.1.13 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 证明: S_n^{\pm} 当 $n \rightarrow \infty$ 时有极限且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^+}{S_n^-} = 1$. 这里, S_n^{\pm}

是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$ 的部分和, a_n^+, a_n^- 的定义由 7.1.3 小节给出.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$, 又 S_n^- 发散到 $+\infty$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^+ - S_n^-}{S_n^-} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{S_n^-} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S}{S_n^-} = 0,$$

习题 7.1.14 证明: 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 并且从某项之后有

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

解 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 故 $b_n > 0$. 由题设不等式变形得

$$\frac{|a_{n+1}|}{b_{n+1}} < \frac{|a_n|}{b_n}.$$

因此 $\exists M > 0$, 使得 $\forall n$ 充分大时, $\frac{|a_n|}{b_n} < M$, 即 $|a_n| < Mb_n$. 由比较判别法可知, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收

敛.

习题 7.1.15 研究下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n};$$

$$(2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{\ln n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{100\sqrt[3]{n}}.$$

解

$$(1) (a) x = k\pi \text{ 时}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \text{ 收敛.}$$

$$(b) x \neq k\pi \text{ 时}, \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \text{ 的部分和有}$$

$$\sum_{n=1}^N \sin nx = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \cos\frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

部分和有界 $\frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$, 又 $\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法, 级数条件收敛.

同时

$$\left| \frac{\sin nx}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n},$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ 条件收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n} \right|$ 发散, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 绝对发散.

(2) 记 $S_1 = 0$, 则

$$\begin{aligned} S_{4n+1} &= \sum_{k=2}^n (S_{4k+1} - S_{4(k-1)+1}) \\ &= \sum_{k=2}^n (-1)^k \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \log(4k-1)} + \frac{1}{\log(4k)} + \frac{\sqrt{2}}{2 \log(4k+1)} \right) \end{aligned}$$

由 Leibniz 判别法, $\{S_{4n+1}\}$ 条件收敛, 设为 S . $\forall n, \exists k, s.t. 4k+1 \leq n < 4(k+1)+1$, 则

$$\begin{aligned} |S_n - S| &\leq |S_n - S_{4k+1}| + |S_{4k+1} - x| \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2 \log(4k+3)} + \frac{1}{\log(4k+4)} + \frac{\sqrt{2}}{2 \log(4k+5)} \right) + |S_{4k+1} - x| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

即证条件收敛.

同时

$$\left| \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{\ln n} \right| \geq \frac{|\cos \frac{n\pi}{4}|^2}{\ln n} = \frac{1}{2 \ln n} + \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2 \ln n},$$

其中 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2 \ln n}$ 发散, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2 \ln n}$ 条件收敛, 故 $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{\ln n} \right|$ 发散, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{\ln n}$ 绝对发散.

(3) 因为

$$\frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{\sin n}{\sqrt{n}} e,$$

故只需要考虑 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

其中 $\sum_{n=1}^N \sin n$ 的部分和有

$$\sum_{n=1}^N \sin n = \frac{\cos(n + \frac{1}{2}) - \cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}},$$

部分和有界 $\frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$, 又 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法, 级数条件收敛.

同时

$$\left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right| \geq \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}},$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$ 条件收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right|$ 发散, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 绝对发散.

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{100 \sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/100}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(n+1)n^{1/100}}$$

其中第一项条件收敛, 第二项绝对收敛, 故原级数条件收敛.

习题 7.2

习题 7.2.1 证明: 两个在共同区间 I 上一致收敛的级数的和, 也在 I 上一致收敛.

解 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1, N_2 , 当 $m > n \geq N_1$ 时, 有

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

当 $m > n \geq N_2$ 时, 有

$$\left| \sum_{k=n}^m v_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $m > n \geq N$ 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^m [u_k(x) + v_k(x)] \right| &= \left| \sum_{k=n}^m u_k(x) + \sum_{k=n}^m v_k(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n}^m v_k(x) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) + v_n(x)]$ 在区间 I 上一致收敛.

习题 7.2.2 确定下列函数项级数的收敛域.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx};$$

$$(2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}} \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n-3^n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x}{n} \right)^n;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

解

(1)

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-x} \rightarrow e^{-x}.$$

故当 $x > 0$ 时, 级数收敛; 当 $x \leq 0$ 时, 级数发散. 收敛域为 $(0, +\infty)$.

(2)

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{|x|^{n^2}}{n}} = \frac{|x|^n}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow |x|^n.$$

故当 $|x| < 1$ 时, 级数收敛; 当 $|x| > 1$ 时, 级数发散; 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散; 当

$x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. 收敛域为 $[-1, 1]$.

(3)

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^n} = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}} \rightarrow \left| \frac{1-x}{1+x} \right|.$$

故当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 级数发散; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 级数收敛; 当 $x = 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$

由 Liebnitz 判别法收敛. 收敛域为 $[0, +\infty)$.

(4)

$$\frac{1}{x^{2n}} \sin \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{(2x)^n}.$$

故当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时, 级数收敛; 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时, 级数发散; 当 $x = \pm \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$ 发散.

收敛域为 $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

(5)

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{|x-3|^n}{|n-3^n|}} = \frac{|x-3|}{\sqrt[n]{|n-3^n|}} \rightarrow \frac{|x-3|}{3}.$$

故当 $|x-3| < 3$ 时, 级数收敛; 当 $|x-3| > 3$ 时, 级数发散; 当 $x = 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n-3^n}$

发散; 当 $x = 6$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3^n}$ 发散,. 收敛域为 $(0, 6)$.

(6)

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)! \left(\frac{x}{n+1} \right)^{n+1}}{n! \left(\frac{x}{n} \right)^n} = \frac{x}{n} \rightarrow 0.$$

故级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛. 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(7) $x \neq 0$ 时, $\cos nx$ 的部分和

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}.$$

故当 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 时, 级数收敛; 当 $x = 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 发散. 收敛域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(8)

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}}{\frac{x^n}{1-x^n}} = \frac{x(1-x^n)}{1-x^{n+1}} \rightarrow x.$$

故当 $|x| < 1$ 时, 级数收敛; 当 $|x| > 1$ 时, 级数发散; 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - 1^n}$ 无定义;

当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - (-1)^n}$ 发散. 收敛域为 $(-1, 1)$.

习题 7.2.3 在区间 $[0, 1]$ 上, 定义

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{1}{n}, \\ 0, & x \neq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 但是它没有 Weierstrass 判别法中的控制级数.

解 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $m > n \geq N$ 时, 对任意 $x \in [0, 1]$, 有

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n}^m \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

若存在控制级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 使得对任意 $x \in [0, 1]$, 均有 $|u_n(x)| \leq M_n$, 则取 $x = \frac{1}{n}$ 时, 有

$$\frac{1}{n} = \left| u_n \left(\frac{1}{n} \right) \right| \leq M_n,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 发散, 与控制级数矛盾. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 没有控制级数.

习题 7.2.4 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性:

- | | |
|--|---|
| (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, -\infty < x < +\infty;$ | (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+(nx)^2)}, -\infty < x < +\infty;$ |
| (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n, -1 < x < 1;$ | (4) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leq x < +\infty;$ |
| (5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, 0 \leq x < +\infty;$ | (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, 1 < x < +\infty;$ |
| (7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, 0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta;$ | (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(ne^n)^x}, 0 \leq x < +\infty.$ |

解

(1)

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(2)

$$|u_n(x)| = \left| \frac{1}{2^n(1+(nx)^2)} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+(nx)^2)}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(3)

$$\sup_{x \in (-1,1)} |u_n(x)| = \sup_{x \in (-1,1)} |(-1)^{n-1}x^n| = 1.$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (-1,1)} |u_n(x)| \neq 0$. 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^n$ 在 $(-1,1)$ 上不一致收敛.

(4) 考虑函数 $f(x) = x^2 e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值, 由 $f'(x) = 2xe^{-nx} - nx^2 e^{-nx} = xe^{-nx}(2-nx)$ 可知, 当 $x = \frac{2}{n}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 即

$$\sup_{x \in [0,+\infty)} |u_n(x)| = f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2} e^{-2}.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

(5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0,+\infty)} \left| \frac{(-1)^n}{x+n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

(6) $\forall N, \forall n > N, \exists p = n, x = 1 + \frac{1}{\ln 2N} \in (1, +\infty)$, 使得

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^x} \cdot \frac{1}{k^{\ln 2N}} \\ &> \frac{1}{(2N)^{\frac{1}{\ln 2N}}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \frac{1}{e} \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{e} \ln \frac{2n+1}{n+1} > \frac{1}{e} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 上不一致收敛.

(7) $\cos nx$ 的部分和

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

有界, 且 $\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致收

敛.

(8) 由(4)知, $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛, 且 $\frac{1}{n^x} \leq 1$ 对 x 单调, 对 n, x 一致有界, 由

Abell 判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(ne^n)^x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

习题 7.2.5 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $0 \leq x < +\infty$ 中一致收敛.

解 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 作为函数列时, 对 x 而言是常数, 故对 x 一致收敛. 同时 $\frac{1}{e^{nx}} \leq 1$ 对 x 单调, 对 n, x 一

致有界, 由 Abell 判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{nx}}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

习题 7.2.6 证明: 函数 $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内连续, 且具有的各阶导数.

解

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 中并不一致收敛, 但对每一点 $x \in (1, +\infty)$, 总是存在 $1 < \alpha < x < \beta$, 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上, 有

$$\left| \frac{(-\ln n)^k}{n^x} \right| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^\alpha}.$$

由 Cauchy 根值判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^\alpha}$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛. 由教材定理 7.36 知, $\zeta(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上处处可微.

递推的可以得到, $\zeta(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上具有任意阶导数, 由 x 的任意性知, $\zeta(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 内连续, 且具有各阶导数.

习题 7.2.7 证明: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$ 当 $|x| < +\infty$ 时, 具有连续的二阶微商.

解

$$|u'(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$|u''(x)| = \left| -\frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛. 因此 $f''(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4} \right)'' = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$.

因为 $\frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 由教材定理 7.34 知, $f''(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

习题 7.2.8 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 及 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

解

$$\left| \frac{x^n}{(1+2x)^n} \cos \frac{n\pi}{x} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(n\pi)}{(1+2x)^n}$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致收敛.

又 $u_n(x) = \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 由教材定理 7.34 知, $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n \cos n\pi}{(1+2 \cdot 1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = -\frac{1}{4}.$$

习题 7.2.9 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$, 求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$.

解

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} n e^{-nx} dx = -e^{-nx} \Big|_{x=\ln 2}^{x=\ln 3} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}.$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

收敛, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ 在 $[\ln 2, \ln 3]$ 上一致收敛, 故可以交换积分和求和顺序, 有

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} n e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2}.$$

习题 7.2.10 递归定义 $[0, 1]$ 上的连续可微函数列 $\{f_n\}$ 如下: $f_1 = 1$, 在 $(0, 1)$ 上有

$$f'_{n+1}(x) = f_n(x)f_{n+1}(x), \quad f_{n+1}(0) = 1.$$

求证: 对每个 $x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 存在, 并求出其极限函数.

解 设 $f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} x^n$, 则由 $f'_{k+1}(x) = f_k(x)f_{k+1}(x)$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{(k+1)} x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k+1)} x^n \right).$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+1) a_{n+1}^{(k+1)} - \sum_{m=0}^n a_m^{(k)} a_{n-m}^{(k+1)} \right) x^n = 0.$$

因此 $(n+1)a_{n+1}^{(k+1)} - \sum_{m=0}^n a_m^{(k)} a_{n-m}^{(k+1)} = 0$, 且 $a_0^{(k+1)} = f_{k+1}(0) = 1$, 由此可得

$$a_{n+1}^{(k+1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n a_m^{(k)} a_{n-m}^{(k+1)}.$$

于是

$$a_0^{(2)} = 1,$$

$$a_1^{(2)} = a_0^{(1)} a_0^{(2)} = 1,$$

$$a_2^{(2)} = \frac{1}{2}(a_0^{(1)} a_1^{(2)} + a_1^{(1)} a_0^{(2)}) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2},$$

$$a_0^{(3)} = 1,$$

$$a_1^{(3)} = a_0^{(2)} a_0^{(3)} = 1,$$

$$a_2^{(3)} = \frac{1}{2}(a_0^{(2)} a_1^{(3)} + a_1^{(2)} a_0^{(3)}) = \frac{1}{2}(1+1) = 1,$$

$$a_3^{(3)} = \frac{1}{3}(a_0^{(2)} a_2^{(3)} + a_1^{(2)} a_1^{(3)} + a_2^{(2)} a_0^{(3)}) = \frac{1}{3}(1+1+\frac{1}{2}) = \frac{5}{6}.$$

依此类推可得

$$a_0^{(k)} = a_1^{(k)} = \cdots = a_{k-1}^{(k)} = 1,$$

或者说 $a_n^{(k)} = 1, \forall n < k$.

由此我们能写出部分和函数 $S_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^n a_m^{(k)} x^m$, 当 $n < k$ 时,

$$S_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^n x^m = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

因为 $\sum_{m=0}^n x^m$ 在 $(0, 1)$ 上内闭一致收敛到 $\frac{1}{1-x}$, 故对每个给定的 $x \in (0, 1)$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $S_n^{(k)}(x) \rightarrow \frac{1}{1-x}$, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{1}{1-x}$.

习题 7.2.11 证明 Dini (迪尼) 定理:

- (1) 设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的非负连续函数列, 且在此区间上逐点收敛到零. 若对任意固定的 $x \in [a, b]$, 数列 $\{u_n(x)\}$ 是单调递减的, 则 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到零.
- (2) 如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上逐点收敛到 $S(x)$, 且通项 $u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上是连续且非负的, 那么函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续的充分必要条件是此级数在 $[a, b]$ 上一致收敛.

解

(1) 对于任给的 $\varepsilon > 0, \forall x \in [a, b]$, 存在 $N_x, U(x)$, 使得当 $n \geq N_x$ 且 $x \in U(x)$ 时, $u_n(x) < \varepsilon$.

由 $[a, b]$ 的紧性, 或者说闭区间的有限覆盖定理, 存在 x_1, x_2, \dots, x_m , 使得 $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^m U(x_i)$.

取 $N = \max\{N_{x_1}, N_{x_2}, \dots, N_{x_m}\}$, 则当 $n \geq N$ 时, 对任意 $x \in [a, b]$, 存在 $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 使得 $x \in U(x_i)$, 因此有

$$u_n(x) \leq u_n(x_i) < \varepsilon.$$

故 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到零.

(2) 对部分和函数 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, 由(1)知, $\{S(x) - S_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到零, 即级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛.

反之, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则部分和函数 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛到 $S(x)$, 且每个 $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 由教材定理 7.34 知, $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

习题 7.3

习题 7.3.1 求下列幂级数的收敛半径.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} (a > 0, b > 0);$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$$

解

(1)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$.

(2)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{2/n}}{(2n)!^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(2n)(2n-1)} = \frac{1}{4},$$

故收敛半径 $R = 4$.

(3)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|2^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt{2},$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(4)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{a^n + b^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n + b^n}} = \frac{1}{\max\{a, b\}},$$

故收敛半径 $R = \max\{a, b\}$.

(5)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n-1]{\left| \frac{1}{(2n-1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{(2n-1)!}} = 0,$$

故收敛半径 $R = +\infty$.

(6)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{3^n + (-2)^n}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3^n + (-2)^n}}{\sqrt[n]{n}} = 3,$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{3}$.

(7)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$.

(8)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{2^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$.

习题 7.3.2 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $|x| < R$ 时收敛, 若 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 也收敛, 则

$$\int_0^R f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$$

(注意: 这里不管 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 是否收敛). 应用这个结果证明:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

解

(1) 先求幂级数 $\frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 的收敛半径: 任取 $x_0 \in (-R, R)$, 存在 $r : |x_0| < r < R$, 使得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-r, r)$ 内一致收敛. 同时 $|a_n r^n| < M$ 有界, 因此

$$\left| \frac{a_n}{n+1} R^{n+1} \right| = \left| a_n r^n \cdot \frac{R^{n+1}}{(n+1)r^n} \right| \leq M \cdot \frac{R^{n+1}}{(n+1)r^n}.$$

由比较判别法可知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 在 $(-\frac{r}{R}R, \frac{r}{R}R)$ 内一致收敛, 因此收敛半径 $R' \geq R$.

若 $R' > R$, 则存在 $x_0 : R < |x_0| < R'$, 使得幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 在 $(-|x_0|, |x_0|)$ 内一致收敛, 矛盾, 因此 $R' = R$.

作为幂级数的, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$ 在 $(-R, R)$ 内的任意闭子区间 $[-r, r]$ 上一致收敛, 所以

$$\int_0^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1},$$

由 r 的任意性知在 $(0, R)$ 上成立.

习题 7.3.3 求下列幂级数的收敛区域及其和函数.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}.$$

解

(1)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{|(-1)^n|} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$. 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$ 收敛; 当 $x = -1$ 时, 级数

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{-1}{2n+1}$ 收敛. 因此收敛区域为 $[-1, 1]$.

当 $|x| < 1$ 时,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x.$$

(2)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n+1|} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$. 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)$ 发散; 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$ 发散. 因此收敛区域为 $(-1, 1)$.

当 $|x| < 1$ 时,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(3)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|n(n+1)|} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$. 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$ 发散; 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(n+1)$ 发散. 因此收敛区域为 $(-1, 1)$.

当 $|x| < 1$ 时,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(1-x)^2} \right) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

(4)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n(n+1)} \right|} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$. 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛; 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 收敛. 因此收敛区域为 $[-1, 1]$.

当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \\ &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt \\ &= \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t} dt \\ &= \frac{(1-x)\ln(1-x) + x}{x}. \end{aligned}$$

(5)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n-1]{\left| \frac{1}{(2n-1)!!} \right|} = 0,$$

故收敛半径 $R = +\infty$.

当 $x \in \mathbb{R}$ 时, 注意到 $y' = xy + 1, y(0) = 0$, 解得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} = y = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

习题 7.3.4 求下列级数的和.

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n};$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}.$$

解

(1) 考虑幂级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1},$$

其收敛半径 $R = 1$. 当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) x^n \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) x^n \right) \\ &= \frac{x^2 - 2x^2 \ln(1-x) + 2x + 2 \ln(1-x)}{4x}. \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2 - 1)2^n} = S|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.$$

(2) 考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (n^2 - n + 1),$$

其收敛半径 $R = 1$. 当 $|x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n (n^2 - n + 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x^2 - 2x + 1}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n} = S|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{22}{27}.$$

(3) 考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1},$$

其收敛半径 $R = 1$. 当 $|x| < 1$ 时,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^{-1} \frac{x}{1-x^3} dx = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(4) 考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n,$$

其收敛半径 $R = +\infty$. 当 $x \in \mathbb{R}$ 时,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n \\ &= x^2 e^x + 3x e^x + e^x \\ &= (x^2 + 3x + 1)e^x. \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = S|_{x=1} = 5e.$$

习题 7.3.5 求下列函数在指定点处的 Taylor 展开式, 并给出收敛区域.

$$(1) x^3 - 2x^2 + 5x - 7, x = 1;$$

$$(2) e^x, x = a;$$

$$(3) \ln x, x = 1;$$

$$(4) \frac{1}{x^2 + 3x + 2}, x = -4;$$

$$(5) \ln(1 + x - 2x^2), x = 0;$$

$$(6) \cos x, x = \frac{\pi}{4}.$$

解

(1) 记 $y = x - 1$, 则

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = (y+1)^3 - 2(y+1)^2 + 5(y+1) - 7 = y^3 + y^2 + 4y - 3.$$

收敛区域为 \mathbb{R} .

(2)

$$e^x = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

收敛区域为 \mathbb{R} .

(3) 记 $y = x - 1$, 则

$$\ln x = \ln(y+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n}.$$

收敛区域为 $(-1, 1]$.

(4) 记 $y = x + 4$, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} &= \frac{1}{(y-4)^2 + 3(y-4) + 2} \\ &= \frac{1}{y^2 - 5y + 6} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{3n+1} \right) y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{3n+1} \right) (x+4)^n \end{aligned}$$

收敛区域为 $(-6, -2)$.

(5) $\ln(1 + x - 2x^2) = \ln(1 + 2x) + \ln(1 - x)$. 故

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-2)^n - 1}{n} x^n.$$

收敛区间为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

(6)

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2!} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!} + \dots$$

符号规则以 4 为周期: $+, -, -, +, \dots$. 收敛区间为 \mathbb{R} .

习题 7.3.6 求下列函数的 Maclaurin 展开式, 并给出收敛区域.

- (1) $\sin^2 x$;
- (3) $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$;
- (5) $\int_0^x \cos t^2 dt$;
- (7) $\int_0^x e^{-t^2} dt$.

- (2) $\arcsin x$;
- (4) $(1+x) \ln(1+x)$;
- (6) $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$;

解

(1)

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}.\end{aligned}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{2^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{(2n+2)(2n+1)} = 0,$$

故收敛半径 $R = +\infty$, 收敛区域为 $(-\infty, +\infty)$.

(2)

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.\end{aligned}$$

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{\left| \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} \right|} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$, 当 $x = \pm 1$ 时, 级数由比值判别法知收敛. 因此收敛区域为 $[-1, 1]$.

(3)

$$\begin{aligned}
\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \\
&= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(-1)^{n-1} - (-1)^{2n-1}] x^n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(-1)^{n-1} + 1] x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

$$L = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k+1]{\left| \frac{1}{2k+1} \right|} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$, 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum \frac{1}{2k+1}$ 发散; 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum \frac{-1}{2k+1}$ 发散. 因此收敛区域为 $(-1, 1)$.

(4)

$$\begin{aligned}
(1+x) \ln(1+x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n+1} \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} \right] x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n.
\end{aligned}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n-1)}} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$, 当 $x = \pm 1$ 时, 级数 $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ 绝对收敛. 因此收敛区域为 $[-1, 1]$.

(5)

$$\begin{aligned}\cos t^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (t^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{4n}. \\ \int_0^x \cos t^2 dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{4n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x t^{4n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} x^{4n+1}. \\ L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4n+1]{\left| \frac{1}{(2n)!(4n+1)} \right|} = 0,\end{aligned}$$

故收敛半径 $R = +\infty$, 收敛区域为 $(-\infty, +\infty)$.

(6)

$$\begin{aligned}\frac{\sin t}{t} &= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}. \\ \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}. \\ L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{\left| \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} \right|} = 0,\end{aligned}$$

故收敛半径 $R = +\infty$, 收敛区域为 $(-\infty, +\infty)$.

(7)

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}. \\ \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}. \\ L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{\left| \frac{1}{n!(2n+1)} \right|} = 0,\end{aligned}$$

故收敛半径 $R = +\infty$, 收敛区域为 $(-\infty, +\infty)$.

习题 7.3.7 方程 $y + \lambda \sin y = x (\lambda \neq -1)$ 在 $x = 0$ 附近确定了一个隐函数 $y(x)$, 试求它的幂级数展开式中的前四项.

解 设 $y(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$ 是 Maclaurin 展开式. 由 $y(0) + \lambda \sin(y(0)) = 0$, 得 $y(0) = 0$.

对 $y + \lambda \sin y = x$ 求导:

$$y'(1 + \lambda \cos y) = 1$$

代入 $x = 0$:

$$y'(0)(1 + \lambda \cos 0) = 1 \Rightarrow y'(0) = \frac{1}{1 + \lambda}.$$

对 $y'(1 + \lambda \cos y) = 1$ 求导:

$$y''(1 + \lambda \cos y) + y'(\lambda(-\sin y)y') = 0$$

代入 $x = 0$:

$$y''(0)(1 + \lambda) + y'(0)(\lambda(-\sin 0)y'(0)) = 0 \Rightarrow y''(0) = 0.$$

对 $y''(1 + \lambda \cos y) = \lambda(\sin y)(y')^2$ 求导:

$$y'''(1 + \lambda \cos y) + y''(\lambda(-\sin y)y') = \lambda(\cos y)(y')^3 + \lambda(\sin y)2y'y''$$

代入 $x = 0$ (利用 $y(0) = 0, y''(0) = 0$):

$$\begin{aligned} y'''(0)(1 + \lambda) &= \lambda(\cos 0)(y'(0))^3 + 0 \\ y'''(0)(1 + \lambda) &= \lambda \left(\frac{1}{1 + \lambda} \right)^3 \Rightarrow y'''(0) = \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^4}. \end{aligned}$$

因此 $y(x)$ 的 Maclaurin 展开式为:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\ &= 0 + \left(\frac{1}{1 + \lambda} \right) x + 0 \cdot x^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda}{(1 + \lambda)^4} \right) x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1 + \lambda} x + \frac{\lambda}{6(1 + \lambda)^4} x^3 + \dots \end{aligned}$$

习题 7.4

习题 7.4.1 求下列积分:

$$(1) \int_0^1 e^{-x^2} dx;$$

$$(2) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$$

解

(1) 考虑展开式 $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, 则

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

故级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots \end{aligned}$$

(2) 考虑展开式 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, 则

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n+1)!}} = 0,$$

故级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots \end{aligned}$$

习题 7.4.2 求方程 $y'' - xy' + y = 0$ 的幂级数解.

解 设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

$$-xy' = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n,$$

$$y'' - xy' + y = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n + a_n] x^n = 0.$$

故有递推关系 $(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n-1)a_n$, 即 $a_{n+2} = \frac{(n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n$.

当 n 为奇数时, a_1 为任意常数, $a_3 = 0, a_5 = 0, \dots$, 故奇数项系数均为 0;

当 n 为偶数时, a_0 为任意常数, $a_2 = -\frac{1}{2}a_0, a_4 = -\frac{1}{8}a_0, a_6 = -\frac{1}{48}a_0, \dots$, 故偶数项系数为 $a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^k k!} a_0$.

因此幂级数解为

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \dots \right) + a_1 x.$$

习题 7.4.3 求方程 $y'' + y \sin x = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的幂级数解至 x^5 项.

解 设 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 由初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$, 得 $a_0 = 1, a_1 = 0$.

$$y''(0) + y(0) \sin 0 = 0 \Rightarrow 2a_2 + 0 = 0 \Rightarrow a_2 = 0.$$

$$y''' + y \cos x + y' \sin x = 0$$

$$y'''(0) + y(0) \cos 0 + y'(0) \sin 0 = 0$$

$$6a_3 + 1 + 0 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{6}.$$

$$y^{(4)} + y'' \sin x + 2y' \cos x - y \sin x = 0$$

$$y^{(4)}(0) + y''(0) \sin 0 + 2y'(0) \cos 0 - y(0) \sin 0 = 0$$

$$24a_4 + 0 + 0 - 0 = 0 \Rightarrow a_4 = 0.$$

$$y^{(5)} + y''' \sin x + 3y'' \cos x - 3y' \sin x - y \cos x = 0$$

$$y^{(5)}(0) + y'''(0) \sin 0 + 3y''(0) \cos 0 - 3y'(0) \sin 0 - y(0) \cos 0 = 0$$

$$120a_5 + 0 + 0 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{120}.$$

因此幂级数解至 x^5 项为

$$y = 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

习题 7.4.4 利用 Stirling 公式求极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

解

(1) 由 Stirling 公式知, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n^2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= 1 \cdot 1 = 1.$$

(2) 由 Stirling 公式知, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(2\pi n)^{-\frac{1}{2n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-1}}{e} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{-\frac{1}{2n}} \cdot e = 1 \cdot e = e. \end{aligned}$$

习题 7.4.5 研究下列级数的敛散性.

$$(1) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}} \quad (p \text{ 是实数}).$$

解

(1) 由 Stirling 公式知, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, 故

$$\ln(n!) = O(\ln \sqrt{n} + n \ln n - n) = O(n \ln n),$$

故级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 与 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 同敛散性, 而 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 故原级数发散.

(2) 由 Stirling 公式知,

$$\frac{n!e^n}{n^{n+p}} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^n}{n^{n+p}} = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{1}{n^p} = O\left(\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}\right),$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ 同敛散性, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ 当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p \leq \frac{3}{2}$ 时发散,

故原级数当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p \leq \frac{3}{2}$ 时发散.

习题 7.4.6 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\ln(n!) \sim \ln n^n$.

解 由 Stirling 公式知, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, 故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{\ln n^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n)}{\ln n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{2\pi n} + n \ln n - n}{n \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{2\pi n}}{n \ln n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \ln n} = 0 + 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

因此 $\ln(n!) \sim \ln n^n$.

第 7 章综合习题

习题 7.C.1 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ 的和.

解 由 Abell 求和公式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \sum_{n=k}^N \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时, 由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 以及 $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln N}{N+1} = 0$, 得级数和为 $\frac{\pi^2}{6}$.

习题 7.C.2 证明: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = 1$.

解

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} (-1)^n &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) (-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= 1 + (-1)^{N+1} \frac{1}{N+2} \rightarrow 1, \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

习题 7.C.3 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

解 若 a_n 有上界 M , 则

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \sum_{n=1}^N \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \leqslant \frac{1}{a_1} \sum_{n=1}^N (a_{n+1} - a_n) = \frac{a_{N+1} - a_1}{a_1} \leqslant \frac{M - a_1}{a_1},$$

故正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$ 收敛.

若 a_n 无上界, 则对任意 $M > 0$, 存在 a_n 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 使得 $a_{n_{k+1}} \geqslant 2a_{n_k}$, 则对任意 $k \in \mathbb{N}^+$,

有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n_{k+1}}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n_{k+1}}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

因此正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$ 发散.

习题 7.C.4 设 $\alpha > 0$, $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^\alpha}$ 收敛.

解 记 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则 b_n 为正的递减数列, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) b_n^\alpha \leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) b_1^\alpha = b_1^\alpha \lim_{N \rightarrow \infty} (b_1 - b_{N+1}) \leq b_1^{\alpha+1} < +\infty.$$

故级数收敛.

习题 7.C.5 设 $\phi(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上正的严格增函数, $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 是三个非负数列, 满足

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n \phi(a_n) + c_n a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty.$$

求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

习题 7.C.6 设 $\{a_n\}$ 是正数数列使得 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛. 求证: 存在常数 $M > 0$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

习题 7.C.7 设 $\{a_n\}$ 是一个严格单调递增的实数列, 且对任意正整数 n 有 $a_n \leq n^2 \ln n$.

求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n}$ 发散.

习题 7.C.8 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$ 收敛, 就称数列 $\{a_n\}$ 是具有有界变差的.

(1) 证明: 具有有界变差的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛;

(2) 构造一个发散的无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 使得其通项构成的数列 $\{a_n\}$ 是一个具有有界变差的数列.

解

(1) 由 Cauchy 收敛准则, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^+$, 当 $m > n > N$ 时, 有

$$|a_n - a_m| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| < \varepsilon,$$

故数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 取 $a_n = \frac{1}{n}$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 < +\infty,$$

习题 7.C.9 设函数列 $\{f_n(x)\}, n = 1, 2, \dots$ 在区间 $[0, 1]$ 上由等式

$$f_0(x) = 1, \quad f_n(x) = \sqrt{xf_{n-1}(x)}$$

定义. 证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 函数列在 $[0, 1]$ 上一致收敛到一个连续函数.

解

$$f_n(x) = x^{1-\frac{1}{2^n}},$$

由于每个 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且固定 x 时, $f_n(x)$ 单调递增有极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x,$$

且逐点极限 $f(x) = x$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 由 Dini 定理知, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛到 $f(x) = x$.

习题 7.C.10 递归定义连续可微函数列 $f_1, f_2, \dots : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 如下: $f_1 = 1$, 在 $(0, 1)$ 上有

$$f'_{n+1} = f_n f_{n+1},$$

且 $f_{n+1}(0) = 1$. 求证: 对每一个 $x \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ 存在, 并求出其极限函数.

解 在习题 7.2.10 中我们将 $f_n(x)$ 展开为幂级数来处理, 这里给出法二.

解微分方程得

$$f_{n+1}(x) = e^{\int_0^x f_n(t) dt}.$$

首先归纳的证明 $f_n(x) \leq \frac{1}{1-x}$, $n = 1$ 时已知成立, 假设 $n = k$ 时成立, 则

$$f_{k+1}(x) = e^{\int_0^x f_k(t) dt} \leq e^{\int_0^x \frac{1}{1-t} dt} = \frac{1}{1-x},$$

故对任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 有 $f_n(x) \leq \frac{1}{1-x}$.

再归纳的证明

$$f_n(x) \geq 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1},$$

$n = 1$ 时已知成立, 假设 $n = k$ 时成立, 则

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= e^{\int_0^x f_k(t) dt} \geq e^{\int_0^x (1+t+t^2+\cdots+t^{k-1}) dt} \\ &= e^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^k}{k}} \geq 1 + x + x^2 + \cdots + x^k. \end{aligned}$$

故对任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 有 $f_n(x) \geq 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$.

综上, 对任意 $x \in (0, 1)$, 有

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1-x},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$.

习题 7.C.11 设 $f_0(x)$ 是区间 $[0, a]$ 上的连续函数, 证明: 按照下列公式

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(u) du$$

定义的函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0, a]$ 上一致收敛于 0.

解 由 $f_0(x)$ 在 $[0, a]$ 上连续, 故存在 $M > 0$, 使得对任意 $x \in [0, a]$, 有 $|f_0(x)| \leq M$. 下归纳的证明: $f_n(x) \leq \frac{Ma^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$ 当 $n = 0$ 时由 M 的定义已知. 假设 $n = k - 1$ 时成立, 则当 $x \in [0, a]$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq \int_0^x |f_{n-1}(u)| du \\ &\leq \int_0^x \frac{Mu^{n-1}}{(n-1)!} du = \frac{Mx^n}{n!} \end{aligned}$$

故对任意 $n \in \mathbb{N}$, 有 $|f_n(x)| \leq \frac{Ma^n}{n!}$. 因此, 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $m > n > N$ 时, 有

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x)| + |f_m(x)| \leq \frac{Ma^n}{n!} + \frac{Ma^m}{m!} < \varepsilon,$$

故函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0, a]$ 上一致收敛于 0.

习题 7.C.12 利用二项式级数, 计算 $\sqrt{2}$ 到四位小数.

解 由二项式级数, 有

$$\sqrt{2} = (1+1)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} 1^n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \dots$$

取前五项和为 1.4140625.