数学分析讲义 (第一册)
习题解答

如有疏漏, 欢迎指正. 联系邮箱: liuyue22@mail.ustc.edu.cn

目录

第 1 章 极限

习题 1.1

习题 1.1.1 设 a 是有理数, b 是无理数. 求证: $a+b$ 和 $a-b$ 都是无理数; 当 $a \neq 0$ 时, ab 和 $\dfrac{b}{a}$ 也都是无理数.

解 设 a 是有理数,b 是无理数.

(1) 若 $a+b$ 是有理数, 则 $b=(a+b)-a$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $a-b$ 是无理数.

(2) 若 ab 是有理数, 则 $b=\dfrac{ab}{a}$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $\dfrac{b}{a}$ 是无理数.

习题 1.1.2 求证: 两个不同的有理数之间有无理数.

解 设 a, b 是两个不同的有理数, 不妨设 $a<b$. 则存在正整数 k, N 使得

$$\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} a < N < \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b.$$

具体而言, 取 $k > \lceil \log_2(b-a) \rceil$, 则 $k > \log_2 \dfrac{2\sqrt{2}}{b-a} \Rightarrow 2^k(b-a) > 2\sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b - \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} a > 2$. 因此, 存在整数 $N = \left\lfloor \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b \right\rfloor$, 使得 $\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} a < N < \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b$. 于是

$$a < \frac{N}{\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}} < b.$$

而 $\dfrac{N}{\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}} = \dfrac{N\sqrt{2}}{2^k}$ 是无理数.

习题 1.1.3 求证: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 以及 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 都是无理数.

解

(1) 设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $2q^2=p^2$, 由素数分解的唯一性可知 p 是偶数, 设 $p=2k$, 则 $2q^2=4k^2 \Rightarrow q^2=2k^2$, 同理可知 q 也是偶数, 与 p, q 互素矛盾. 因此 $\sqrt{2}$ 是无理数.

(2) 设 $\sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $3q^2=p^2$, 由素数分解的唯一性可知 p 是 3 的倍数, 设 $p=3k$, 则 $3q^2=9k^2 \Rightarrow q^2=3k^2$, 同理可知 q 也是 3 的倍数, 与 p, q 互素矛盾. 因此 $\sqrt{3}$ 是无理数.

(3) 设 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p, q 互素. 因此 $2+3+2\sqrt{6}=\dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6}=\dfrac{p^2-5q^2}{2q^2}$, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 因此 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数.

习题 1.1.4 把下列循环小数表示为分数:

(1) $0.24999\ldots$ (2) $0.\dot{3}7\dot{5}$ (3) $4.\dot{5}1\dot{8}$

解

(1) 设 $x = 0.24999\ldots$, 则 $10x = 2.4999\ldots$, 因此 $9x = 2.25 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

(2) 设 $x = 0.\dot{3}7\dot{5}$, 则 $1000x = 375.375375\ldots$, 因此 $999x = 375 \Rightarrow x = \dfrac{375}{999} = \dfrac{125}{333}$.

(3) 设 $x = 4.\dot{5}1\dot{8}$, 则 $1000x = 4518.518518\ldots$, 因此 $999x = 4514 \Rightarrow x = \dfrac{4514}{999} = \dfrac{122}{27}$.

习题 1.1.5 设 r, s, t 都是有理数. 求证:

(1) 若 $r + s\sqrt{2} = 0$, 则 $r = s = 0$;

(2) 若 $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0$, 则 $r = s = t = 0$.

解

(1) 假设 $s \neq 0$, 则 $\sqrt{2} = -\dfrac{r}{s}$ 是有理数, 与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾. 因此 $s = 0$, 从而 $r = 0$.

(2) $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0 \Rightarrow r^2 = 2s^2 + 3t^2 + 2st\sqrt{6} \Rightarrow \left(r^2 - 2s^2 - 3t^2\right) + (-2st)\sqrt{6} = 0.$:

与 (1) 类似, 若 $st \neq 0$, 则 $\sqrt{6} = \dfrac{r^2 - 2s^2 - 3t^2}{2st}$ 是有理数, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 故 $st = 0$,

(a) 若 $t = 0$, 则 $r + s\sqrt{2} = 0$, 由 (1) 可知 $r = s = 0$;

(b) 若 $s = 0$, 则 $r + t\sqrt{3} = 0$, 同理可知 $r = t = 0$.

习题 1.1.6 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 有相同的符号, 且都大于 -1. 证明:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

解 利用数学归纳法:

当 $n = 1$ 时, 等式为

$$1 + a_1 \geqslant 1 + a_1,$$

显然成立.

假设当 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_k) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

以此作为条件, 当 $n = k + 1$ 时, 由 $a_{k+1} > -1$, 可知 $1 + a_{k+1} > 0$, 因此

$$\begin{aligned}(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_k)(1 + a_{k+1}) &\geqslant (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(1 + a_{k+1}) \\ &= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\ &\geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}.\end{aligned}$$

其中 $a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \cdots + a_ka_{k+1} \geqslant 0$, 因为 a_i 与 a_{k+1} 符号相同.

习题 1.1.7 设 a, b 是实数, 且 $|a| < 1, |b| < 1$. 证明:

$$\left|\frac{a + b}{1 + ab}\right| < 1.$$

解 由 $|a|<1, |b|<1$, 可知 $ab \neq -1$. 因此

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1 \Leftrightarrow |a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow (a+b)^2 < (1+ab)^2.$$

即

$$a^2+b^2+2ab < 1+a^2b^2+2ab \Leftrightarrow a^2+b^2 < 1+a^2b^2 \Leftrightarrow (1-a^2)(1-b^2) > 0.$$

显然成立.

习题 1.2

习题 1.2.1 用定义证明下面的结论:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5+3n}=\dfrac{1}{3}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

解

(1) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{5}{9\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n}{5+3n}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3n-(5+3n)}{3(5+3n)}\right|=\frac{5}{3(5+3n)}<\frac{5}{9n}<\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\frac{|\sin n|}{n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

(3) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon^2}-1\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon.$$

(4) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

习题 1.2.2 若数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 满足条件: 任给正数 ε, 存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ (其中 M 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 a 为极限.

M 为常数指的是 M 不依赖于 ε 和 n. 例如 $M=2, M=1000$ 等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于 $\forall M>0,\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ 成立.

习题 1.2.3 证明: 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

证明 充分性: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

必要性: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$.

习题 1.2.4 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 则

$$||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

反之不一定成立, 如数列 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$, 但 $\{a_n\}$ 发散.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 则 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $||a_n| - 0| < \varepsilon$. 则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

习题 1.2.5 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 又 $|b_n| \leqslant M, (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. 则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

习题 1.2.6 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$, 及 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

解 按已知条件 $\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$. 又 $\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$. 于是令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, 则 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

习题 1.2.7 证明下列数列不收敛:

(1) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$; (2) $a_n = 5\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) + (-1)^n$.

解

(1) 取 $a_{2n} = \dfrac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\dfrac{2n+1}{2n+2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

(2) 取 $a_{2n} = 5\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5\left(1 - \dfrac{2}{2n+1}\right) - 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 6, \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 4$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

习题 1.2.8 求下列极限:

(1) $a_n = \dfrac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1}$;

(2) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}$;

(3) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{6}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n(n+1)/2}\right)$, $n = 2, 3, \ldots$;

(4) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

(5) $a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^m})$, $(|q| < 1)$.

解

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}} = \frac{4+0+0}{3+0+0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1-0 = 1.$$

(3)

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{(n^2+n-2)/2}{n(n+1)/2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ =& \frac{(1\cdot 2\cdots(n-1))\cdot(4\cdot 5\cdots(n+2))}{(2\cdot 3\cdots(n))\cdot(3\cdot 4\cdots(n+1))} = \frac{1\cdot(n+2)}{n\cdot 3} = \frac{n+2}{3n}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

(4)

$$a_n = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-\lim\limits_{m\to\infty} q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

习题 1.2.9 若 $a_n \neq 0 (n=1,2,\ldots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?

解 不能. 例如 $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 可能为 0.

习题 1.2.10 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$, 是否必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$? 若还假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 回答同样的问题.

解 不一定. 例如 $a_n = \begin{cases} 1, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}$, $b_n = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 1, & n\text{为偶数} \end{cases}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, 但

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均不存在.

当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 时成立. 假设 $a \neq 0$ 时, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n b_n}{a_n} = \dfrac{0}{a} = 0$.

习题 1.2.11 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性如何? 举例说明. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 回答同样的问题.

解

(1) $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则

(a) $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ 都发散可以采用反证法: 若 $\{a_n + b_n\}$ 收敛, 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 容易知道 $\{a_n + b_n - a_n\} = \{b_n\}$ 收敛, 这与 $\{b_n\}$ 发散矛盾, 因此 $\{a_n + b_n\}$ 发散, $\{a_n - b_n\}$ 同理可得.

(b) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

I. $a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = 1$ 收敛;

II. $a_n = 1, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = n$ 发散.

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散, 则

(a) $\{a_n + b_n\}$ 的收敛性不确定

I. $a_n = n, b_n = -n$, 则 $a_n + b_n = 0$ 收敛.

II. $a_n = n, b_n = n$, 则 $a_n + b_n = 2n$ 发散.

(b) $\{a_n - b_n\}$ 的收敛性不确定

I. $a_n = n + \dfrac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n - b_n = \dfrac{1}{n}$, 收敛.

II. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}$, 则 $a_n - b_n = 2 \cdot (-1)^n$ 发散.

(c) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

I. $a_n = \begin{cases} 1, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 1, & n\text{为偶数} \end{cases}$, 则 $a_n \cdot b_n = 0$ 收敛.

II. $a_n = n, b_n = (-1)^n$, 则 $a_n \cdot b_n = (-1)^n n$ 发散;

习题 1.2.12 下面的推理是否正确?

(1) 设数列 $\{a_n\} : a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 在 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 两边取极限, 得 $a = 2a - 1$, 即 $a = 1$.

(2)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\
&= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n\text{个}} = 0.
\end{aligned}
$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=1^n=1.$

解

(1) 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为 $a_n=1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(2) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

并有

$$\lim_{n\to}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1,\lim_{n\to}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

(3) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

习题 1.2.13 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a,b. 若 $a>b$, 则从某一项开始, 有 $a_n>b_n$; 反之, 若从某项开始恒有 $a_n\geqslant b_n$, 则 $a\geqslant b$.

解 这是保序性的直接推论.

习题 1.2.14 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别收敛于 a 及 b. 记 $c_n=\max(a_n,b_n)$, $d_n=\min(a_n,b_n)$ $(n=1,2,\ldots)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\max(a,b),\quad \lim_{n\to\infty}d_n=\min(a,b).$$

解 由 $\max(x,y)=\dfrac{x+y+|x-y|}{2},\min(x,y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$, 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

习题 1.2.15 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}((n+1)^k-n^k)$, 其中 $0<k<1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+2}-n\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}\right)$.

解

(1) 由于

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = 0.$$

(2) 由于

$$0 \leqslant ((n+1)^k - n^k) = n^k \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) \leqslant n^k \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^1 - 1\right) = n^{k-1}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0,\ \lim_{n\to\infty} n^{k-1} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} ((n+1)^k - n^k) = 0.$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

(4) 由 $\frac{1}{n}\ln(n^2-n+2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1)$, 故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-n+2} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(n^2-n+2\right)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(n^2-n+2\right)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(5) 由于

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} \leqslant \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leqslant \sqrt[n]{n}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} = 1.$$

习题 1.2.16 设 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 为 m 个正数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

解 设 $a_k = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, 则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leqslant \sqrt[n]{m a_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a_k=\max(a_1,a_2,\ldots,a_m).$$

习题 1.2.17 证明下列数列收敛:

(1) $a_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$;

(2) $a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$;

(3) $a_n=\alpha_0+\alpha_1 q+\cdots+\alpha_n q^n$, 其中 $|\alpha_k|\leqslant M,(k=1,2,\ldots)$, 而 $|q|<1$;

(4) $a_n=\dfrac{\cos 1}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2}{2\cdot 3}+\dfrac{\cos 3}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{\cos n}{n(n+1)}$.

证明

(1) 由 $1-\dfrac{1}{2^n}<1$, 可知 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n>0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 由 $a_n<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}<\frac{1}{2}$, 可知 $\{a_n\}$ 有上界, 且 a_n 单调递增, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor\log_{|q|}\dfrac{\varepsilon(1-|q|)}{2M}\right\rfloor+1$, 则当 $m>n>N$ 时,

$$|a_m-a_n|=|\alpha_{n+1}q^{n+1}+\cdots+\alpha_m q^m|\leqslant M(|q|^{n+1}+|q|^{n+2}+\cdots)=M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}<\varepsilon.$$

(4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$, 则当 $m>n>N$ 时,

$$|a_m-a_n|=\left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{\cos m}{m(m+1)}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

习题 1.2.18 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

(1) $a_n=\dfrac{n}{c^n}$, $(c>1)$;

(2) $a_1=\dfrac{c}{2}$, $a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}$ $(0\leqslant c\leqslant 1)$;

(3) $a>0,a_0>0,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)$ (提示: 先证明 $a_n^2\geqslant a$);

(4) $a_0=1$, $a_n=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$;

(5) $a_n=\sin\sin\cdots\sin 1$ (n 个 sin).

解

(1) 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{c^{n+1}-c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^n(c-1)}=0.$$

(2)

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})$$

由 $a_2-a_1=\left(\dfrac{c}{2}\right)^2>0$, 可递归的得知 $a_{n+1}-a_n>0$, 因此 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $a_1<c$, 归纳

的可得 $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$, 因此 $\{a_n\}$ 有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$, 又由 $a_n > 0$, 可知 $a = 1 - \sqrt{1-c}$.

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)\right)^2 \geqslant a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leqslant 0$$

因此 $\{a_n\}$ 在 $n \geqslant 1$ 时单调减, 且有下界 $\sqrt{a}$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则 $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right)$, 解得 $l = \sqrt{a}$.

(4)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1} - \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}\right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1}+1)^2}$$

由 $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$ 归纳的可得 $1 + a_n - a_n^2 > 0$, 因此 $a_n - a_{n-1} > 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 有上界, 因此 $\{a_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 递推式两侧取极限, 得 $a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; 由于 $a_n > 0$ 始终成立, 故 $a \geqslant 0$ 而 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, 故舍去这一值, 进而得到 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(5) $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$, 因此 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a = \sin a \Rightarrow a = 0$.

习题 1.2.19 设 $a_n \leqslant a \leqslant b_n\ (n = 1, 2, \ldots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时,$|a_n - b_n| < \varepsilon$. 又由 $a_n \leqslant a \leqslant b_n$, 可知 $|a_n - a| = a - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$, 同理 $|b_n - a| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

习题 1.2.20 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

解 先证明一个引理: 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \ldots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

证明如下

(1) $a = 0$ 时,

$$0 \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

同时, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = 0$$

由夹逼定理,得证.

(2) $a>0$ 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_n}}=a,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

由夹逼定理,得证.

回到本题,

可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{l}<1$. 因此 $\exists r=\frac{1+\frac{1}{l}}{2}\in(0,1)$, 使得当 n 充分大时, $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}}<r$. 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}<r^n,$$

即 $a_n<a_1r^n$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

习题 1.2.21 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是正数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n=1,2,\ldots$. 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

解 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 则由 $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant a_1\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}=a_1\cdot\frac{b_n}{b_1}$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b>0$, 由原式有 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 单调减, 且 $\frac{a_n}{b_n}>0$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=bc$.

习题 1.2.22 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 求下列数列的极限:

(1) $a_n=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$; (2) $a_n=\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$;

(3) $a_n=\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$; (4) $a_n=\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}$.

简要说明: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 故 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的任意子列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ 也收敛于 e. 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为 $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ 的形式, 从而求出极限. 对于类似于 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ 的形式, 可以考虑先通分再变形去掉指数的负号即可处理.

在此过程中下列命题也相同有用:

命题 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a, a_n > 0, a > 0$. $\{b_n\}$ 收敛于 b. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

请注意, 这条结论对于 1^∞ 型是不能直接使用的, 即若 $a_n \to 1, b_n \to \infty$, 则不能直接说 $a_n^{b_n} \to 1^\infty = 1$. 但是对于 $a_n \to a > 1, b_n \to \infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \to a^{+\infty} = +\infty$; 对于 $a_n \to a < 1, b_n \to +\infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \to a^{+\infty} = 0$.

解

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^{m}\Bigg|_{m=2n+1} = \mathrm{e}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n-2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^{-n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^{(n-3)\cdot\left(-\frac{n+1}{n-3}\right)} = \mathrm{e}^{-1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{n+1}\right)} = \mathrm{e}^{-1}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{2n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^3\cdot 2} = \mathrm{e}^2$.

习题 1.2.23 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 且 $|b_n| \geqslant b > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

解 对 $\forall M > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时,$|a_n| > \dfrac{M}{b}$. 又由 $|b_n| \geqslant b > 0$, 可知 $|a_n b_n| \geqslant |a_n||b| > M$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

习题 1.2.24 确定 $n \to \infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}$ 与 $n \sin \dfrac{n\pi}{2}\ (n \geqslant 1)$ 是否有界, 是否趋于无穷大.

解 $\sqrt[n]{n!}$ 无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty$, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

因此,$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

注 Stolz 定理规范的思路要先说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 然后才能说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ 存在. 为了方便, 我们也会省去前面的部分, 直接写 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

$n \sin \dfrac{n\pi}{2}$ 无界, 但是不趋于无穷大. 当 $n = 4k+1$ 时,$n \sin \dfrac{n\pi}{2} = 4k+1$, 趋于无穷大; 当 $n = 4k+3$ 时,$n \sin \dfrac{n\pi}{2} = -(4k+3)$, 趋于负无穷大; 当 n 为偶数时,$n \sin \dfrac{n\pi}{2} = 0$.

习题 1.2.25 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}\ (n \geqslant 1)$ 定义, 证明: $a_n \to +\infty\ (n \to \infty)$.

解 由 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n) = \dfrac{1}{a_n}(a_n + a_n + \dfrac{1}{a_n}) = 2 + \dfrac{1}{a_n^2} > 2$, 可知 $a_n^2 > 2(n-1)$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

习题 1.2.26 给出 $\dfrac{0}{0}$ 型 Stolz 定理的证明.

命题 ($\dfrac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小量, 其中 $\{a_n\}$ 还是严格单调减少数列, 又

存在 (其中 l 为有限或 $\pm\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

证明

(1) 当 l 为有限值时, 根据条件对 $\varepsilon>0$ 存在 N, 使当 $n>N$ 时成立

$$\left|\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}-l\right|<\varepsilon.$$

由于对每个 n 都有 $a_n>a_{n+1}$, 这样就有

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_{n+1})<b_n-b_{n+1}<(l+\varepsilon)(a_n-a_{n+1}).$$

任取 $m>n$, 并且将上述不等式中的 n 换成 $n+1,\ldots,$ 直到$m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_m)<b_n-b_m<(l+\varepsilon)(a_n-a_m),$$

以及

$$\left|\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}-l\right|<\varepsilon.$$

令 $m\to\infty$, 并利用条件 $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=\lim\limits_{m\to\infty}b_m=0$, 就知道当 $n>N$ 时成立

$$\left|\frac{b_n}{a_n}-l\right|\leqslant\varepsilon.$$

(2) $l=+\infty$ 时. 根据条件对任意 $M>0$ 存在 N, 使当 $n>N$ 时成立

$$\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}>M.$$

由于对每个 n 都有 $a_n>a_{n+1}$, 这样就有

$$b_n-b_{n+1}>M(a_n-a_{n+1}).$$

任取 $m>n$, 并且将上述不等式中的 n 换成 $n+1,\ldots,$ 直到$m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$b_n-b_m>M(a_n-a_m),$$

以及

$$\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}>M.$$

令 $m\to\infty$, 并利用条件 $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=\lim\limits_{m\to\infty}b_m=0$, 就知道当 $n>N$ 时成立

$$\frac{b_n}{a_n}>M.$$

习题 1.3

习题 1.3.1 按定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0, (a > 1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$;

(3) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x} = 2$;

(4) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{1/q} = 0$ (q 为正整数).

解

(1) 对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $M = \log_a \varepsilon$, 则当 $x < M$ 时, $|a^x - 0| = a^x < a^M = \varepsilon$.

(2) 对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $M = \dfrac{2}{\varepsilon} + 1$, 则当 $|x| > \max\{M, 1\}$ 时, $\left|\dfrac{x-1}{x+1} - 1\right| = \left|\dfrac{-2}{x+1}\right| \leqslant \dfrac{2}{|x|-1} < \varepsilon$.

(3) 对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$, 则当 $0 < |x+1| < \delta$ 时, $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+x} - 2\right| = \left|\dfrac{-x^2-2x-1}{x^2+x}\right| = \left|\dfrac{x+1}{x}\right| < \dfrac{\delta}{1/2} \leqslant \varepsilon$.

(4) 对 $\forall\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon^q$, 则当 $0 < x < \delta$ 时, $|x^{1/q} - 0| = x^{1/q} < \delta^{1/q} = \varepsilon$.

习题 1.3.2 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1} \left(x^5 - 5x + 2 + \dfrac{1}{x}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$ (n 为正整数);

(3) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

(1) 由四则运算的极限可知,

$$\lim_{x\to1} \left(x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x}\right) = 1 - 5 + 2 + 1 = -1.$$

(2) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$, 因此

$$\lim_{x\to1} \frac{x^n-1}{x-1} = \lim_{x\to1}(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

请注意, 这里 n 是常数, 因此可以交换这 n 个极限与求和的顺序.

(3)

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(4)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(3 + \dfrac{6}{x}\right)^{70} (8 - \dfrac{5}{x})^{20}}{\left(5 - \dfrac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{\left(3 + \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6}{x}\right)^{70} \left(8 - \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5 - \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}}$$

事实上, $\dfrac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}} = \left(\dfrac{3^7 \cdot 2^6}{5^9}\right)^{10} = 0.0000000000035726229189858259136514568727612$ $4639214255753536961640067601894023379767892377 6.$

习题 1.3.3 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$.

(1) 用 Cauchy 收敛原理. 对 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, 任取 $M>0$, 总总存在 $k=\lceil M/\pi\rceil$, 使得 $x_1=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi>M, x_2=(k+1)\pi>M(k\in\mathbb{N}^*)$, 使得 $|\sin x_1-\sin x_2|=1>\varepsilon$. 因此极限不存在.

(2) 考虑两个单边极限,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}-1=-1.$$

而极限存在的充要条件是两个单边极限存在且相等, 因此极限不存在.

习题 1.3.4 设函数 $f(x)$ 在正无穷大处的极限为 l, 则对于任意趋于正无穷大的数列 $\{a_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$. 特别地 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$.

(无穷版本的 Heine 定理) **解** 对 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 存在 $M>0$, 使得当 $x>M$ 时, $|f(x)-l|<\varepsilon$. 又由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, $a_n>M$. 因此当 $n>N$ 时, $|f(a_n)-l|<\varepsilon$. 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$. 特别地, 取 $a_n=n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$.

习题 1.3.5 讨论下列函数在 $x=0$ 处的极限.

(1) $f(x)=[x]$;　　(2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$;

(3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ 1+x^2, & x<0.\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0;\\ x, & x\leqslant 0.\end{cases}$

解 注 教材中的符号 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 即不大于 x 的最大整数. 本题中, 我们沿用此符号. 其他地方, 我们使用 $\lfloor x\rfloor$ 表示对 x 向下取整, 使用 $\lceil x\rceil$ 表示对 x 向上取整.

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$. 因此极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}x=1,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}x=-1$. 左右极限均存在, 但不相等, 因此极限不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}2^x=1,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}(1+x^2)=1$. 因此极限存在, 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在, 因此右极限不存在. 左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$. 函数在 $x=0$ 处的极限不存在.

注 $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 的极限过程等同于考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$, 而该极限不存在 (与习题 1.3.3(1)同理).

习题 1.3.6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

解

(1) 当 $\forall m\in\mathbb{N}^*, \sin\dfrac{x}{2^m}\neq 0$ 时, 二倍角公式变形可得 $\cos y=\dfrac{\sin 2y}{2\sin y}$, 当 $\sin y\neq 0$, 反复利用可知

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}}\cdots\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(2) 若存在 $m_0\geqslant 1,\sin\dfrac{x}{2^m}=0$, 有 $\dfrac{x}{2^{m_0}}=k\pi,x=2^{m_0}k\pi,k\in\mathbb{Z}$. 自然的推论是 $\forall m\leqslant m_0$, 有 $\sin\dfrac{x}{2^m}=\sin(2^{m_0-m}k\pi)=0$.

此时根据是否存在最大的 m_0, 使得 $\sin\dfrac{x}{2^{m_0}}=0$ 可以分成两种情况:

(a) $x=0$, 则 $\forall m\in\mathbb{N}^*$, 有 $\cos\dfrac{x}{2^m}=1$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=1$;

(b) $x\neq 0\Leftrightarrow\exists\, m_0,\text{s.t.}\sin\dfrac{x}{2^{m_0}}=0,\sin\dfrac{x}{2^{m_0+1}}\neq 0$, 也就是存在最大的 m_0.

因此可以得到 $x=2^{m_0}k\pi,k=2l+1,l\in\mathbb{Z}$(如果 k 是偶数, 那么与 $\sin\dfrac{x}{2^{m_0+1}}=\sin\dfrac{k\pi}{2}\neq 0$ 矛盾).

此时 $\cos\dfrac{x}{2^{m_0+1}}=\cos\dfrac{k\pi}{2}=\cos\left(l+\dfrac{1}{2}\right)\pi=0$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=0$.

不过又由于 $\sin x=0$ 同样成立, 并且 $x\neq 0$, 因此可以把结果合并进 $\dfrac{\sin x}{x}$.

综上所述,

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

习题 1.3.7 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\alpha}{n^2}+\sin\dfrac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n\alpha}{n^2}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$.

解 我们先证明如下事实:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}, & \sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0;\\ 0, & \sin\dfrac{\theta}{2}=0.\end{cases}$$

我们利用积化和差

$$\sin\frac{\theta}{2}\sin k\theta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{\theta}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\right)=&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}-\cos\frac{5\theta}{2}+\cdots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\ =&\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta.\end{aligned}$$

因此, 当 $\sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0$ 自然有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

另一种情况是显然的, 每一项都为 0.

回到本题, 首先, 如果 $\alpha\neq 0$, 那么这意味着存在充分大的 N 使得 $n>N, 0<\left|\dfrac{\alpha}{n^2}\right|<\pi$, 此时, $\sin\dfrac{\alpha}{2n^2}\neq 0$. 因此 $n>N$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\frac{\alpha}{n^2}=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\sin\frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}$$

考虑 $\sin x\sim x, (x\to 0)$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin k\frac{\alpha}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\sin\frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\cdot\frac{n\alpha}{2n^2}}{\frac{\alpha}{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\alpha}{2n}=\frac{\alpha}{2}.$$

如果 $\alpha=0$, 那么每一项都为 0, 极限自然为 $0=\dfrac{\alpha}{2}$.

综上所述,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2}\right)=\frac{\alpha}{2}.$$

习题 1.3.8 证明: 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确. 叙述并证明, 当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时类似的结论. (应用本题结论, 可将极限过程为 $x\to\infty$ 的问题化为 $x\to 0$ 处理, 或者反过来. 例如, 我们有 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$.)

解 我们先给出这条命题的完整表述:

命题 (1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

(3) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

证明:

(1) 由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l\Rightarrow\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. $\Rightarrow\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$.
反之, 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. $\Rightarrow\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$.

(2) 由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l\Rightarrow\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. $\Rightarrow\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$.

反之, 若 $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = l$. $\Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

(3) 由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. $\Rightarrow \forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0^-$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = -\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = l$. 反之, 若 $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0^-$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = l$. $\Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0^-$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

习题 1.3.9 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

解

(1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

(2) 由和差化积,

$$\cos x - \cos 3x = 2\sin 2x \sin x,$$

因此

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$$

(3) 当 $x > \dfrac{7}{2}$ 时, 有 $0 < \dfrac{x+1}{2x-1} < \dfrac{3}{4}$ 恒成立, 因此

$$0 \leqslant \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^x = 0$, 由夹逼定理可知

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x = 0.$$

(4)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{2}{x^2-1}x^2} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2-1}x^2} = \mathrm{e}^2$$

习题 1.3.10 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x+1)$.

解

(1) $\arctan x$ 在 $x\to+\infty$ 时有界, 而 $x\to+\infty$ 时无界, 因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}=0.$$

具体而言,

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

(2) 由夹逼定理,

$$-x^2\leqslant x^2\sin\frac{1}{x}\leqslant x^2,$$

且 $\lim\limits_{x\to 0}-x^2=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, 因此

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$$

(3)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)x^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}x^2=4.$$

(4) 证明:

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2-x+1)=+\infty.$$

由 $2x^2-x+1=x^2+(x-1/2)^2+3/4>x^2$, 因此对 $\forall M>0$, 取 $N=\sqrt{M}$, 则当 $x>N$ 时, $2x^2-x+1>x^2>N^2=M$. 由此可知

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2-x+1)=+\infty.$$

习题 1.3.11 按定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty, (a>1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty, (a>1)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\tan x=+\infty$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{1/x}=+\infty$.

解

(1) 对 $\forall M>0$, 取 $N=a^M$, 则当 $x>N$ 时, $\log_a x>\log_a N=M$.

(2) 对 $\forall M<0$, 取 $\delta=a^M$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $\log_a x<\log_a\delta=M$.

(3) 对 $\forall M>0$, 取 $\delta=\dfrac{\pi}{2}-\arctan M$, 则当 $\dfrac{\pi}{2}-\delta<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\tan x>\tan(\dfrac{\pi}{2}-\delta)=M$.

(4) 对 $\forall M>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{\ln M}$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $\mathrm{e}^{1/x}>\mathrm{e}^{1/\delta}=M$.

习题 1.3.12 证明: 函数 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界, 但当 $x\to+\infty$ 时, 这个函数并不是无穷大量.

解 $\forall M>0$, 存在 $x_0=(2k-1)\pi, k\in\mathbb{N}^*, 2k-1>M$, 因此 $y(x_0)=x_0\sin x_0=x_0>M$. 由此可知 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界.

$\forall X>0$, 总存在 $x_1=2k\pi, k\in\mathbb{N}^*, 2k\pi>X$, 使得 $y(x_1)=x_1\sin x_1=0$. 因此当 $x\to+\infty$ 时, $y=x\sin x$ 并不是无穷大量.

习题 1.3.13 函数 $y=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是否有界? 又当 $x\to0^+$ 时, 这个函数是否为无穷大量?

解 考虑 0^+ 处的 $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 与考虑 $+\infty$ 处的 $x\cos x$ 是等价的. 以与习题 1.3.12类似的方法可知, $y=x\cos x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界, 但当 $x\to+\infty$ 时, $y=x\cos x$ 并不是无穷大量. 因此, $y=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界, 但当 $x\to0^+$ 时, $y=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 并不是无穷大量.

习题 1.3.14 本题所涉及的函数极限有着鲜明的几何意义.

记函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线为 C. 若动点沿曲线无限远离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线 C 的一条渐近线.

(i) 垂直渐近线　易知 (垂直于 x 轴的) 直线 $x=x_0$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty \quad \text{或} \quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty.$$

(ii) 水平渐近线　易知 (平行于 x 轴的) 直线 $y=b$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \quad \text{或} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b.$$

(iii) 斜渐近线　请读者证明, 方程为 $y=ax+b\,(a\neq0)$ 的直线 L 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax);$$

或者

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax).$$

这里自然要假定所说的极限都存在. (提示: 以 $x\to+\infty$ 为例, 设曲线 C 及直线 L 上的横坐标为 x 的点分别为 M,N. 则 M 至 L 的距离, 是 $|MN|$ 的一个常数倍. 因此, 直线 L 为曲线 C 的渐近线, 等价于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$, 由此易得所说结果.)

求下列曲线的渐近方程.

(1) $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\frac{1}{x}\right)$;　　(2) $y=\frac{3x^2-2x+3}{x-1}$.

解 先证明, 仅证明 $+\infty$, 另一种同理. 正如提示所说, 由于距离 $d=\left|\frac{f(x)-(ax+b)}{\sqrt{a^2+1}}\right|$, 因此 l 是

渐近线, 等价于 $x \to +\infty$ 时 d 趋于 0, 等价于 $f(x)-(ax+b)$ 趋于 0.

然后问题转化为了证明

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0 \Leftrightarrow a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax).$$

充分性: 由 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ 可知,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0.$$

必要性: 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ 可知,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b.$$

(1) (a) 垂直渐近线, $x=-\frac{1}{\mathrm{e}}$: $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{\mathrm{e}})^-}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim\limits_{y\to0^+}\ln y=+\infty$;

(b) 斜渐近线, $y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(y(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})-1)=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{\mathrm{e}x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{\mathrm{e}x})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/\mathrm{e}x}{1/x}=\frac{1}{\mathrm{e}}$ ($\pm\infty$ 两侧是同一条渐近线);

(2) (a) 垂直渐近线, $x=1$: $\lim\limits_{x\to1}y(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x+3}{x-1}=\infty$;

(b) 斜渐近线, $y=3x+1$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(y(x)-3x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-1}=1$;

习题 1.3.15 证明: 在同一极限过程中等价的无穷小量有下列性质:

(1) $\alpha(x)\sim\alpha(x)$ (自反性);

(2) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$, 则 $\beta(x)\sim\alpha(x)$ (对称性);

(3) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $\beta(x)\sim\gamma(x)$, 则 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$ (传递性).

(注意, (1) 中自然需假定 $\alpha(x)$ 不取零值; 而在 (2)、(3) 中, 条件蕴含着, 所说的无穷小量在极限过程中均不取零值.)

解 解释一下, 这里说的是 (1) 需要没有 $\alpha(x)\equiv0$ 这种情况.(2)(3) 因为有"若 xxx"的假设自然排除了这种情况.

(1) 显然, $\lim\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$, 因此 $\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

(2) 由 $\alpha(x)\sim\beta(x)$ 可知, $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 因此 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$, 即 $\beta(x)\sim\alpha(x)$.

(3) 由 $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $\beta(x)\sim\gamma(x)$ 可知, $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, $\lim\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1$, 因此 $\lim\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\lim\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1$, 即 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$.

习题 1.3.16 当 $x \to 0$ 时, 比较下列无穷小的阶:

(1) $\tan x - \sin x$ 与 x^3;

(2) $x^3 + x^2$ 与 $\sin^2 x$;

(3) $1 - \cos x$ 与 x^2.

解

(1)

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x}.$$

由 $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, \cos x \sim 1$, 可知

$$\tan x - \sin x \sim x \cdot \frac{x^2/2}{1} = \frac{x^3}{2}.$$

因此,

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2} x^3.$$

(2)

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \sim x^2 (x \to 0).$$

同时,

$$x^3 + x^2 = (x+1)x^2 \sim x^2 (x \to 0).$$

可得

$$x^3 + x^2 \sim \sin^2 x$$

(3)

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2} (x \to 0).$$

习题 1.3.17 当 $x \to +\infty$ 时, 试比较下列无穷大量的阶:

(1) n 次多项式 $P_n(x)$ 与 m 次多项式 $P_m(x)$ (m, n 均为正整数);

(2) x^α 与 x^β ($\alpha, \beta > 0$);

(3) a^x 与 b^x ($a, b > 1$).

解

(1) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \cdots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{x^m} \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \cdots}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \cdots}$

$$=\frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to+\infty}x^{n-m}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ +\infty, & n>m.\end{cases}\text{，即得到}\begin{cases}P_n(x)\sim P_m(x), & n=m;\\ P_m(x)\text{更高阶}, & n<m;\\ P_n(x)\text{更高阶}, & n>m.\end{cases}$$

(2) 利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha-\beta}=\begin{cases}1, & \alpha=\beta;\\ 0, & \alpha<\beta;\\ +\infty, & \alpha>\beta.\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x^\alpha\sim x^\beta, & \alpha=\beta;\\ x^\beta\text{更高阶}, & \alpha<\beta;\\ x^\alpha\text{更高阶}, & \alpha>\beta.\end{cases}$

(3) 利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{b^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\begin{cases}1, & a=b;\\ 0, & a<b;\\ +\infty, & a>b.\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a^x\sim b^x, & a=b;\\ b^x\text{更高阶}, & a<b;\\ a^x\text{更高阶}, & a>b.\end{cases}$

习题 1.3.18 试用等价无穷小量代换的方法计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m,n 均为正整数);

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

解

(1) 由 $\sin x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}.$$

(2) 由 $\tan x\sim x$, 可知 $a\neq0$ 时,

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{x}=a.$$

很显然该结果对 $a=0$ 也成立.

(3) 由 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $\arctan x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{n}\sin x}{x}=\frac{1}{n}.$$

(4)

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}.$$

由 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, $\sin x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(5) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \sin x \sim x$, 可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

(6) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, 可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

第 1 章综合习题

习题 1.C.1 求下列数列的极限:

(1) $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$ (提示: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$);

(2) $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$;

(3) 设 $a_1 > 1, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, n = 1, 2, \cdots$;

(4) 设 $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n = 1, 2, \cdots$.

解

(1) 由

$$(2n)^2 = 4n^2 \geqslant 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1)$$

可得

$$\frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}.$$

因此

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0$, 故由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}$, 知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a_n}\right)^n = 0$;

(3) 由 $a_1 > 1$, 以及若 $a_n > 1$ 时, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} > 1$, 归纳的可知 $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^+$. 所以数列有下界. 再用归纳法: 当 $n = 1$ 时:

$$a_2 - a_1 = 2 - \left(\frac{1}{a_1} + a_1\right) \leqslant 2 - 2 = 0,$$

推出 $a_2 \leqslant a_1$. 假设对 n 有 $a_n \leqslant a_{n-1}$, 那么当 $n+1$ 时

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} \leqslant 0.$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调减有下界数列, 因此收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geqslant 1$. 在

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

两边取极限得

$$a = 2 - \frac{1}{a} \implies a^2 - 2a + 1 = 0$$

解得 $a=\pm 1$. 但 $a=-1$ 不合题意, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(4) $a_{n+2}=\dfrac{1}{1+a_{n+1}}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}}=\dfrac{1+a_n}{2+a_n}$. 假如对任何 n, 有 $a_{2n}\geqslant a_{2n-2}$; $a_{2n+1}\leqslant a_{2n-1}$, 那么对 $n+1$, 有

$$a_{2n+2}-a_{2n}=\frac{1}{1+a_{2n+1}}-\frac{1}{1+a_{2n-1}}=\frac{a_{2n-1}-a_{2n+1}}{1+a_{2n+1}a_{2n-1}}\geqslant 0$$

$$a_{2n+3}-a_{2n+1}=\frac{1}{1+a_{2n+2}}-\frac{1}{1+a_{2n}}=\frac{a_{2n}-a_{2n+2}}{1+a_{2n+2}a_{2n}}\leqslant 0$$

推出数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{2n}\}$ 单调增有上界, $\{a_{2n-1}\}$ 单调减有下界. 因此分别收敛. 对

$$a_{2n+2}=\frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}},$$

两边取极限得

$$a=\frac{1+a}{2+a}\implies a^2+a-1=0$$

解得 $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 同理, 对

$$a_{2n+3}=\frac{1+a_{2n+1}}{2+a_{2n+1}},$$

两边取极限得

$$b=\frac{1+b}{2+b}\implies b^2+b-1=0$$

解得 $b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

习题 1.C.2 设 $\{a_n\}$ 为单调递增的数列, 并且收敛于 a, 证明对一切 n 有 $a_n<a$. (对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

解 反证法. 假设存在某个 n_0, 使得 $a_{n_0}>a$. 由数列单调递增的性质, 对一切 $n>n_0$ 有 $a_n\geqslant a_{n_0}>a$, 于是存在 $\varepsilon=\dfrac{a_{n_0}-a}{2}>0$, 使得 $\forall N$, 存在 $n=\max\{n_0,N\}+1>N$, 使得

$$|a_n-a|=a_n-a\geqslant a_{n_0}-a=2\varepsilon>\varepsilon,$$

这与数列收敛的定义矛盾.

习题 1.C.3 证明下面的数列收敛:

(1) $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$;

(2) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

解

(1) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=2-\frac{1}{n}<2,$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 因此 $\{a_n\}$ 收敛;

(2) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{\sum_{k=1}\frac{1}{2^k}} = \mathrm{e}^1.$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 又由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

习题 1.C.4 试构造一个发散的数列 $\{a_n\}$, 满足条件: 对任意正数 ε, 存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

解 取 $a_n = \sqrt{n}$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > \dfrac{1}{4\varepsilon^2}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

但数列 $\{a_n\}$ 显然发散.

习题 1.C.5 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在常数 M, 使得对一切 n 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leqslant M.$$

证明:

(1) 数列 $\{A_n\}$ 收敛;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

解

(1) 由数列定义可知 $\{A_n\}$ 单调递增. 又因为对一切 n 有 $A_n \leqslant M$, 所以 $\{A_n\}$ 有上界. 因此 $\{A_n\}$ 收敛;

(2) 用 Cauchy 收敛准则证明. 由 (1) 知 $\{A_n\}$ 收敛, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, $\forall n > N+1, p > 0$, 有

$$|A_{n+p} - A_{n-1}| = |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

由三角不等式可知

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

习题 1.C.6 设 $\{a_n\}$ 是正严格递增数列. 求证: 若 $a_{n+1} - a_n$ 有界, 则对任意 $\alpha \in (0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$. 并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列 $\{a_n\}$ 使得对任意 $\alpha \in (0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$, 但是 $a_{n+1} - a_n$ 无界. (提示: 考虑 $a_n = n\ln n$.)

解

(1) 若 $\{a_n\}$ 有界, 此时由于其严格单调, 故有极限, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = l^\alpha - l^\alpha = 0$.

(2) 若 $\{a_n\}$ 无界, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 设 $|a_{n+1} - a_n| \leqslant M$.

$$0 \leqslant a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha\left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^\alpha - 1\right) < a_n^\alpha\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{1-\alpha}} \leqslant \frac{M}{a_n^{1-\alpha}}.$$

同时,

$$\lim_{n\to\infty} Ma_n^{\alpha-1}=0.$$

因此由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha})=0$.

(3) 反之不对, 取 $a_n=n\ln n$, 则

$$\begin{aligned}a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}&=(n+1)^{\alpha}\ln^{\alpha}(n+1)-n^{\alpha}\ln^{\alpha}\\&<((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha})\ln^{\alpha}n\\&=n^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)\ln^{\alpha}n\\&<n^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)\ln^{\alpha}n\\&=n^{\alpha-1}\ln^{\alpha}n=\frac{\ln^{\alpha}n}{n^{1-\alpha}}.\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{\alpha}n}{n^{1-\alpha}}=0,$$

因此由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha})=0$. 但

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)\ln(n+1)-n\ln n=\ln(n+1)+n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>\ln(n+1),$$

显然无界.

习题 1.C.7 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=a$.

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a.$$

习题 1.C.8 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 且 $a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}{n}}\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{1}}=\mathrm{e}^{\ln a}=a.$$

习题 1.C.9 证明: 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 也存在, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

解 设 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}},(n>1);b_1=a_1$, 则 $a_n=b_1b_2\cdots b_n$. 由综合习题 1.C.8可知结果. 直接 Stolz 也

可以得到结果.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln a_n}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n}}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}}\\&=\mathrm{e}^{\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.\end{aligned}$$

习题 1.C.10 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解

(1) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$$

(2) 可以用综合习题 1.C.9来做, 记 $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$ 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\mathrm{e}.$$

习题 1.C.11 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\dfrac{a}{2}$.

解 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a}{2}.$$

习题 1.C.12 设 $\{a_n\}$ 且 $a_n\to a\in\mathbb{R}$, 又设 $\{b_n\}$ 是正数列, $c_n=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 求证:

(1) $\{c_n\}$ 收敛;

(2) 若 $(b_1+b_2+\cdots+b_n)\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

解

(1) 记 $B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 任取 $\varepsilon>0$, 存在 K, 当 $k>K$ 时,$|a_k-a|<\varepsilon$. 当 $n>K$, 有

$$c_n-a=\frac{\sum_{k=1}^n(a_k-a)b_k}{B_n}=\frac{\sum_{k=1}^K(a_k-a)b_k}{B_n}+\frac{\sum_{k=K+1}^n(a_k-a)b_k}{B_n}.$$

其中

$$\left|\frac{\sum_{k=K+1}^n(a_k-a)b_k}{B_n}\right|\leqslant\frac{\sum_{k=K+1}^n|a_k-a|b_k}{B_n}<\varepsilon\frac{\sum_{k=K+1}^n b_k}{B_n}<\varepsilon.$$

因此

$$\left|c_n-\left(a+\frac{\sum_{k=1}^K(a_k-a)b_k}{B_n}\right)\right|<\varepsilon.$$

而对于

$$q_n := \frac{\sum_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k}{B_n},$$

$C := \sum_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k$ 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数,B_n 单调增, 因此 q_n 单调有界 ($C>0$ 时 q_n 单调减且 $q_n>0$, $C<0$ 时 q_n 单调增且 $q_n<0$), 故 q_n 收敛, 设 $\lim_{n\to\infty} q_n = q$, 再取 N, 使得当 $n,m>N$ 时,$|q_m-q_n|<\varepsilon$, 则当 $n,m>\max\{N,K\}$ 时,

$$|c_m-c_n| \leqslant |c_n-(a+q_n)|+|c_m-(a+q_m)|+|q_m-q_n|<3\varepsilon.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 c_n 收敛.

(2) 下给出两种方法,

(a) 由 (1) 中的过程,$q_n=\dfrac{C}{B_n}$, 由于 $B_n\to+\infty$, C 为常数, 因此 $q_n\to 0$, 因此存在 N, 使得当 $n>N$ 时,$|q_n|<\varepsilon$, 则当 $n>\max\{N,K\}$ 时,

$$|c_n-a| \leqslant |c_n-(a+q_n)|+|q_n|<\varepsilon+|q_n|<2\varepsilon.$$

(b) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

上述解答中给出了符合题目原意的证明, 即先证明 c_n 收敛, 然后在 B_n 无界时, 再证明 $\lim_{n\to\infty} c_n = a$. 但对于这道题而言, 还可以分类 B_n 有界和无界来讨论, 即先做 (2), 然后对 B_n 有界时, 用 Cauchy 收敛准则证明 $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_nb_n\right\}$ 收敛, 即两种分类下以截然不同的方式来证明 c_n 收敛.

注 $a_n := \cdots$ 中 $:=$ 表示定义. 如 $a_n := \dfrac{1}{n}$ 表示我们新定义了一个数列 a_n, 其通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n}$. 在上文中 “$C := \sum_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k$ 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数.” 表示: “记 $C=\sum_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k$, 则 C 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数.” 有的地方会写为 $a_n \overset{\text{def}}{=} \cdots$.

习题 1.C.13 证明: $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^p}\right)^x = \begin{cases} 1, & p>1, \\ \mathrm{e}, & p=1, \\ \infty, & p<1. \end{cases}$

解 实际上题目中的无穷只能是 $+\infty$.

$p > 0$ 时, $x^p \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{x^p\cdot\frac{1}{x^{p-1}}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{p-1}}} = \begin{cases} 1, & p>1, \\ \mathrm{e}, & p=1, \\ +\infty, & p<1. \end{cases}$$

$p \leqslant 0$ 时, $x^p \to 0$, 则考虑 $x > 1$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x \geqslant \lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty.$$

习题 1.C.14 设 $f(x)$ 为周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, 证明 $f(x)$ 恒为零.

解 设 $f(x)$ 的正周期为 $T > 0, \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $|x| \geqslant N$ 时 $|f(x)| < \varepsilon$.

因此对于 $n = \left\lceil\dfrac{N}{T}\right\rceil$, 有 $nT \geqslant N$, 故对于任意 $x \in [nT, (n+1)T)$, 有 $f(x) < \varepsilon$.

利用周期性可以得到 $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| < \varepsilon$. 由于 ε 是任意的正数, 所以 $f(x)$ 恒为零.

习题 1.C.15 证明

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0^-$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递增数列 $\{a_n\}\,(a_n \neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$;

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0^+$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递减数列 $\{a_n\}\,(a_n \neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$.

解

(1) (a) 必要性: 考虑任意数列 $\{a_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ 且 $\{a_n\}$ 单调递增, .

由于 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$, 因此, $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$, 当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 有 $|f(x) - l| < \varepsilon$.

同时对于 $\delta, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - x_0| < \delta$, 即 $x_0 - \delta < a_n < x_0$.

因此我们有 $m > N$ 时 $|f(a_n) - l| < \varepsilon$. 即得到数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛到 l.

(b) 充分性: 反证, 若 $x \to x_0^-$ 时 $f(x)$ 的极限为 l 不成立, 即 $\exists\varepsilon > 0, \forall\delta > 0, \exists x_0 - \delta < x < x_0$, 使得 $|f(x) - l| \geqslant \varepsilon$.

因此我们依次构造 $\delta_1 = 1, \delta_n = \min\{\dfrac{1}{n}, x_0 - a_{n-1}\}, (n > 2)$, 则 $\exists a_n, x_0 - \delta_n < a_n < x_0$, 使得 $|f(a_n) - l| \geqslant \varepsilon$. 即有 $a_n > a_{n-1}$, 且 $|x_0 - a_n| < \dfrac{1}{n}$. 这意味着 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$.

由于 $|f(a_n) - l| \geqslant \varepsilon$, 所以 $\{f(a_n)\}$ 不收敛到 l, 矛盾, 故充分性成立.

(2) 证明同理. 具体而言:

设 $g(x) = f(-x)$, 则 $f(x)$ 在 $x \to x_0^-$ 时有极限 $l \Leftrightarrow g(x)$ 在 $x \to -x_0^+$ 时有极限 l. 由 (1) 可知, 这等价于对于任意一个以 $-x_0$ 为极限的单调递增数列 $\{b_n\}\,(b_n \neq -x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} g(b_n) = l$. 设 $a_n = -b_n$, 则 $\{a_n\}$ 是以 x_0 为极限的单调递减数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$. 因此 (2) 得证.

习题 1.C.16 设 ξ 是一个无理数, a,b 是实数, 且 $a<b$. 求证: 存在整数 m,n 使得 $m+n\xi\in(a,b)$, 即, 集合

$$S=\{m+n\xi\mid m,n\in\mathbb{Z}\}$$

在 $\mathbb{R}$ 稠密.

解 稠密的定义: 设 $S\subset\mathbb{R}$, 若对任意 $a,b\in\mathbb{R},a<b$, 都有 $S\cap(a,b)\neq\varnothing$, 则称 S 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

想法是这样的, 我们为了找到某个 $m+n\xi$ 落在 (a,b) 中, 于是用 ξ 构造一个充分小的实数 $\varepsilon=m_0+n_0\xi\in(0,b-a)$. 因为这个 ε 够小, 所以能证明存在某个 $l_0\in\mathbb{Z}$, 使得 $l_0\varepsilon\in(a,b)$, 直观理解如图 1.1 所示.

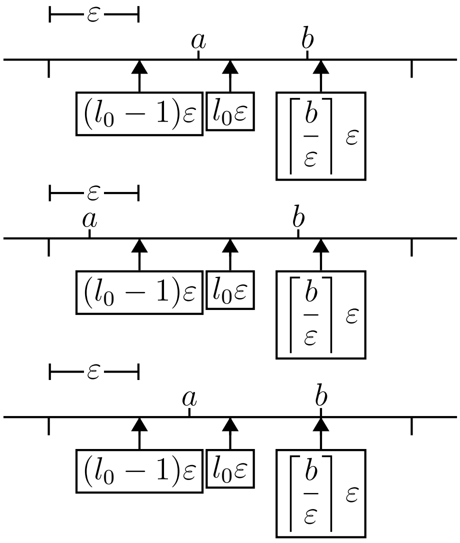

图 1.1: a,b 之间的区间长度大于 ε, 因此存在某个 $l_0\in\mathbb{Z}$, 使得 $l_0\varepsilon\in(a,b)$.
这里的思路和习题 1.1.2中证明两个无理数之间存在有理数的思路是类似的.

随后我们取 $m=l_0m_0,n=l_0n_0$ 即有 $m+n\xi=l_0\varepsilon\in(a,b)$.

构造 ε 实际上, 对于 $b-a>0$, 总存在 $k\in\mathbb{N}^*$, 使得 $\dfrac{1}{k}<b-a$. 因此我们考虑构造一个满足 $\varepsilon<\dfrac{1}{k},\varepsilon\in S$ 即可.

对于 $l=1,2,\cdots,k+1$, 我们考虑

$$n_l=\lfloor l\xi\rfloor$$

$$x_l=l\xi-n_l\in S.$$

x_l 是 $l\xi$ 的小数部分, 容易知道 $x_l\in[0,1)$, 并且 x_l 之间总是两两不同的, 否则 $i\xi-n_i=j\xi-n_j,i\neq j$, 这意味着 $\xi=\dfrac{n_i-n_j}{i-j}$, 这与 ξ 为无理数矛盾.

因此对于

$$[0,1)=\bigcup_{j=1}^{k}\left[\frac{j-1}{k},\frac{j}{k}\right),$$

这 k 个区间包括了 $k+1$ 个不同实数 x_l. 因此总有一个区间内部存在同时两个实数, 记为 $x_p, x_q \in S, p \neq q$, 不妨认为 $x_q > x_p$.

由 x_l 的构造 $x_p = p\xi - n_p, x_q = q\xi - n_q$, 有

$$x_q - x_p = (q-p)\xi - (n_p - x_q) \in S,$$

且由于 x_p, x_q 落在同一个区间内, 而区间长度为 $\dfrac{1}{k}$, 因此 $0 < x_q - x_p \leqslant \dfrac{1}{k} < b - a$, 所以 $x_q - x_p$ 满足我们对 ε 的要求. 我们取

$$\varepsilon = x_q - x_p.$$

构造 m, n　我们先证明 $\exists l_0 \in \mathbb{Z}, \mathrm{s.\,t.}\, l_0\varepsilon \in (a,b)$: 我们取 $l_0 = \left\lceil \dfrac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1$, 则

$$l_0\varepsilon = \left(\left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right)\varepsilon < \left(\frac{b}{\varepsilon} + 1 - 1 \right)\varepsilon = b.$$

同时, 由于 $\varepsilon < b - a$, 因此

$$l_0\varepsilon = \left(\left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right)\varepsilon \geqslant \left(\frac{b}{\varepsilon} - 1 \right)\varepsilon = b - \varepsilon > b - (b-a) = a.$$

因此 $l_0\varepsilon \in (a,b)$.

于是令

$$m = l_0(n_q - n_p), n = l_0(q - p)$$

即有 $m + n\xi = l_0(n_q - n_p) + l_0(q-p)\xi = l_0\left((q-p)\xi - (n_p - n_q)\right) = l_0\varepsilon \in (a,b)$.

第 2 章 连续函数的基本概念

习题 2.1

习题 2.1.1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义, 且 $\lim\limits_{h\to 0^+}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$. 问 $f(x)$ 是否必在 $x=x_0$ 处连续?

解 不一定. 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{h\to 0^+}[f(0+h)-f(0-h)]=\lim\limits_{h\to 0^+}(0-0)=0$, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

习题 2.1.2 设对任意正数 $\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上连续. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

解 设 $x_0\in(a,b)$, 则存在 $\varepsilon_0=\min\left\{\dfrac{b-x_0}{2},\dfrac{x_0-a}{2}\right\}>0$, 使得 $a+\varepsilon_0<x_0<b-\varepsilon_0$. 因为 $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon_0,b-\varepsilon_0]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 因此 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

习题 2.1.3 设在点 $x=x_0$ 处, 函数 $f(x)$ 连续, 而 $g(x)$ 不连续, 问函数 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 的连续性如何? 若 $f(x),g(x)$ 在 x_0 处都不连续, 回答同样的问题.

解

(1) $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处均不连续. 反证: 若 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=f(x_0)+g(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)+g(x_0)-f(x_0)=g(x_0)$, 矛盾. 同理可证 $f(x)-g(x)$ 在点 x_0 处不连续.

$f(x)g(x)$ 在 x_0 处连续性未知, 例如, 设

$$f(x)=x,\quad g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)\equiv x$, 在点 $x_0=0$ 处连续. 又例如, 设

$$f(x)=1,\quad g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 处不连续.

(2) 若 $f(x),g(x)$ 在 x_0 处都不连续, 则 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处可能连续, 也可能

不连续. 例如,

(a) $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ -1, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)+g(x)\equiv 0$, 在点 $x_0=0$ 处连续.

(b) $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处不连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)+g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 2, & x=0;\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 处不连续.

(c) $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)\equiv 0$, 在点 $x_0=0$ 处连续.

(d) $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处不连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 处不连续.

习题 2.1.4

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=x_0$ 处也连续.

(2) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在一个区间 I 上连续, 证明: 函数 $M(x)=\max(f(x),g(x))$ 及 $m(x)=\min(f(x),g(x))$ 在区间 I 上均连续.

解

(1) 因为 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 因此 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 又因为

$$||f(x)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$, 即 $|f(x)|$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

(2) 由 $M(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}+\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$, $m(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}-\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$ 可知, 只需

证明 $|f(x)-g(x)|$ 在区间 I 上连续. 因为 $f(x),g(x)$ 在区间 I 上连续, 故 $f(x)-g(x)$ 在区间 I 上连续. 由 (1) 可知, $|f(x)-g(x)|$ 在区间 I 上连续.

习题 2.1.5 证明: 存在这样的函数 $f(x)$, 处处不连续, 但函数 $|f(x)|$ 处处连续. (提示: 适当地修改 Dirichlet 函数可得出一个例子.)

解 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 处处不连续, 但 $|f(x)|\equiv 1$, 处处连续.

证明 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 取 $\{a_n\}\subset\mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=1$; 取 $\{b_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=-1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(a_n)\neq\lim\limits_{x\to x_0}f(b_n)$, 矛盾. 因此 $f(x)$ 处处不连续.

习题 2.1.6 指出下列函数的间断点, 并说明其类型.

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\lfloor|\cos x|\rfloor$;

(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$;

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7,\\ x, & -7\leqslant x\leqslant 1,\\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty;\end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ 4, & x=2.\end{cases}$

习题 2.1.7 试确定 a, 使得函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

解 由 $f(0)=a$, $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\mathrm{e}^0=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=a+0=a$ 可知, 当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

习题 2.1.8 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{-1/x}}{\mathrm{e}^{1/x}+\mathrm{e}^{-1/x}}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$, 在点 0 处右连续, 但不左连续.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{-1/x}}{\mathrm{e}^{1/x}+\mathrm{e}^{-1/x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2/x}}{1+\mathrm{e}^{-2/x}}=1=f(0)$, 故 $f(x)$ 在点 0 处右连续.

又因为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\mathrm{e}^{1/x} - \mathrm{e}^{-1/x}}{\mathrm{e}^{1/x} + \mathrm{e}^{-1/x}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\mathrm{e}^{2/x} - 1}{\mathrm{e}^{2/x} + 1} = -1 \neq f(0)$, 故 $f(x)$ 在点 0 处不左连续.

习题 2.1.9 证明: 对每个实数 x, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 存在. 将该极限值记为 $f(x)$, 试讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

解

(a) $x < -1$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1+x}{1+x^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{x^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^{2n-1}} = 0$;

(b) $x = -1$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1+x}{1+x^{2n}} = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+x}{1+1} = 0$;

(c) $-1 < x < 1$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} 1 + x^{2n} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+x}{1+x^{2n}} = 1 + x$;

(d) $x = 1$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1+x}{1+x^{2n}} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+x}{1+1} = 1$;

(e) $x > 1$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1+x}{1+x^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{x^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^{2n-1}} = 0$.

因此, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = 0 = f(-1)$, $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$, 故 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处连续; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 \neq f(1)$, 故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不连续; 对于其他点, $f(x)$ 均连续. 综上所述, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ 上连续, 在 $x = 1$ 处不连续.

习题 2.1.10 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则存在一个正数 δ, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有界. (这一结果称为连续函数的局部有界性.)

解 因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = 1$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < 1$, 即 $-1 < f(x) - f(x_0) < 1$, 故 $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$. 因此, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \leqslant \max\{|f(x_0) - 1|, |f(x_0) + 1|\}$, 即 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上有界.

习题 2.1.11 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 且 $f(x_0) \neq 0$, 则存在一个正数 δ, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上与 $f(x_0)$ 同号. (这一结果称为连续函数的局部保号性) 进一步, 存在某个正数 γ, 使得 $f(x)$ 在这一区间中满足 $|f(x)| \geqslant \gamma$.

解 因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. 取 $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \dfrac{|f(x_0)|}{2}$, 即 $-\dfrac{|f(x_0)|}{2} < f(x) - f(x_0) < \dfrac{|f(x_0)|}{2}$, 故 $f(x_0) - \dfrac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \dfrac{|f(x_0)|}{2}$. 因为 $f(x_0) \neq 0$, 故当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有

$$|f(x)| \geqslant |f(x_0)| - \frac{|f(x_0)|}{2} = \frac{|f(x_0)|}{2} > 0.$$

因此, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号. 进一步地, 取 $\gamma = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$, 则当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \geqslant \gamma$.

习题 2.1.12 证明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$ (从而 x_0 为 $g(x)$ 的可去间断点), $f(u)$ 在 $u = a$ 处连

续, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(a).$$

(这一结论对其他五种极限过程也成立.)

解 由于 $\lim_{u\to a} f(u) = f(a)$, 故 $\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta_1>0$, 当 $|u-a|<\delta_1$ 时, 有 $|f(u)-f(a)|<\varepsilon$. 又因为 $\lim_{x\to x_0} g(x)=a$, 故 $\forall\delta_1>0, \exists\,\delta_2>0$, 当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时, 有 $|g(x)-a|<\delta_1$. 因此, 当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时, 有 $|g(x)-a|<\delta_1$, 即 $|f(g(x))-f(a)|<\varepsilon$. 综上所述, $\lim_{x\to x_0} f(g(x))=f(a)$.

习题 2.1.13 证明: 若函数 $u(x), v(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $u(x_0)>0$, 则函数 $u(x)^{v(x)}$ 也在点 x_0 处连续.

证明 利用 e^x 在 $\mathbb{R}$ 上连续,$\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 以及复合函数的极限可交换性, 有

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{v(x_0)\ln u(x_0)} = u(x_0)^{v(x_0)}.$$

习题 2.1.14 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且对于任意 x 有 $f(2x)=f(x)$. 求证 $f(x)$ 是常数.

解 即证:$f(x)\equiv f(0)$. 对于任意点 $x_0\in\mathbb{R}$, 考虑任意以 x_0 为极限的数列,$\{x_n\}$, 则 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_n}{2^n}\cdot 2^n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_n}{2^n}\right) = f(0)$, 因此 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $f(x_0)=f(0)$. 由于 x_0 的任意性, 故 $f(x)\equiv f(0)$.

习题 2.1.15 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且对于任意 x,y 有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 求证 $f(x)=cx$, 其中 c 是常数.

解 由 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$ 可知,$f(0)=0$. 又由 $f(-x)+f(x)=f(0)=0$ 可知,$f(-x)=-f(x)$. 因此,$f(nx)=nf(x)$ 对任意整数 n 成立. 又由 $f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{1}{n}f(mx)=\frac{m}{n}f(x)$ 对任意有理数 $\frac{m}{n}$ 成立.

设 $x_0\in\mathbb{R}$, 则存在有理数列 $\{r_n\}$ 使得 $\lim_{n\to\infty} r_n = x_0$. 因此,$\lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n f(1) = x_0 f(1)$. 由于 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 故 $f(x_0)=x_0 f(1)$. 由于 x_0 的任意性, 故 $f(x)=cx$, 其中 $c=f(1)$.

习题 2.1.16 当 $x\to 0$ 时, 用 $\sin x\sim x, \tan x\sim x$ 证明 $\arcsin x\sim x, \arctan x\sim x$; 用 $\ln(1+x)\sim x$ 证明 $(\mathrm{e}^x-1)\sim x$.

(上述的等价无穷小, 是微积分中非常基本的事实.)

解

(1) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 则 $\lim_{x\to 0} f(x)=1$. 设 $g(x)=\arcsin x$, 则 $\lim_{x\to 0} g(x)=0$. 因此 $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x\to 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right) = f(0)=1$, 即 $\arcsin x\sim x$;

(2) $f(x)=\frac{\tan x}{x}$, 则 $\lim_{x\to 0} f(x)=1$. 设 $g(x)=\arctan x$, 则 $\lim_{x\to 0} g(x)=0$. 因此 $\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right) = f(0)=1$, 即 $\arctan x\sim x$;

(3) $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x}$, 则 $\lim_{x\to 0} f(x)=1$. 设 $g(x)=\mathrm{e}^x-1$, 则 $\lim_{x\to 0} g(x)=0$. 因此 $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = f\left(\lim\limits_{x\to 0} g(x)\right) = f(0) = 1$, 即 $(\mathrm{e}^x - 1) \sim x$.

习题 2.1.17 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sqrt[10]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\arcsin(\sin x)}{1-\cos x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$;

(6) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$;

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$;

(8) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{2 - \dfrac{\sin x}{x}}$.

解 下述过程省略了 $\sim$ 中 $x\to 0, x\to -\infty, x\to +\infty$ 等极限过程的说明.

(1) $\sqrt{1+x+x^2}-1 \sim \dfrac{1}{2}(x+x^2), \sin 2x \sim 2x$, 故

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4};$$

(2) $\sqrt{1+x^2}-1 \sim \dfrac{1}{2}x^2, 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$, 故

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1;$$

(3) $\sqrt[10]{1+\tan x}-1 \sim \dfrac{1}{10}\tan x \sim \dfrac{1}{10}x, \sqrt{1+x}-1 \sim \dfrac{1}{2}x, 2x\sin x \sim 2x^2$, 故

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[10]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{10}x\cdot\frac{1}{2}x}{2x^2} = \frac{1}{40};$$

(4) $x\cdot\arcsin(\sin x) \sim x^2, 1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$, 故

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\arcsin(\sin x)}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2;$$

(5) $1-\cos(1-\cos x) \sim \dfrac{1}{2}(1-\cos x)^2 \sim \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^2 = \dfrac{1}{8}x^4$, 故

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{8}x^4}{x^4} = \frac{1}{8};$$

(6) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x) = \lim\limits_{|x|\to +\infty} -|x|(\sqrt{x^2+100}-|x|) = \lim\limits_{|x|\to +\infty} -|x|^2\left(\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-1\right) =$ $\lim\limits_{|x|\to +\infty} -|x|^2\cdot\dfrac{100}{2x^2} = -50$;

(7) $\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right| = \left|2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| \leqslant 2\cdot 1\cdot\left|\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| \leqslant$ $2\cdot 1\cdot\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$, 由 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$ 可知, $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}) = 0$;

(8) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}} = \sqrt{2-\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}} = \sqrt{2-0} = \sqrt{2}$.

习题 2.1.18 函数 $\sinh x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ 与 $\cosh x = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$ 分别称为双曲正弦与双曲余弦 (统称为双曲函数), 它们均在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 证明以下各题. (可与三角函数的性质作比较.)

(1) $\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x$; (2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;

(3) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$; (4) $\cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x$;

(5) $\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$; (6) $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$.

解

(1) $\sinh(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = -\sinh x, \cosh(-x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2} = \cosh x$;

(2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} - \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 2 + \mathrm{e}^{-2x}}{4} = 1$;

(3) $\sinh 2x = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \dfrac{(\mathrm{e}^x)^2 - (\mathrm{e}^{-x})^2}{2} = \dfrac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}{2} = 2\sinh x \cosh x$;

(4) $\cosh 2x = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{-2x}}{2} = \dfrac{(\mathrm{e}^x)^2 + (\mathrm{e}^{-x})^2}{2} = \dfrac{(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2 + (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2}{4} = \sinh^2 x + \cosh^2 x$;

(5) $\sinh(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{e}^{x \pm y} - \mathrm{e}^{-(x \pm y)}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y} - \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y} - \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y} + \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y} - \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2} = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y} + \mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right) + \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y} - \mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y$;

(6) $\cosh(x \pm y) = \dfrac{\mathrm{e}^{x \pm y} + \mathrm{e}^{-(x \pm y)}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y} + \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2} = \dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y} + \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y} - \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y} + \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2} = \left(\dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y} + \mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right) + \left(\dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y} - \mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$.

习题 2.2

习题 2.2.1 证明函数 $x \cdot 2^x - 1$ 在 $[0,1]$ 内有零点.

解 设 $f(x) = x \cdot 2^x - 1$, 则 $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$. 又因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 故由介值定理知, 存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

习题 2.2.2 证明函数 $x - a\sin x - b$ (其中 a, b 为正数) 在 $(0, +\infty)$ 上有零点, 且零点不超过 $a+b$.

解 设 $f(x) = x - a\sin x - b$, 则 $f(0) = -b < 0, f(a+b) = a+b-a\sin(a+b)-b = a(1-\sin(a+b)) \geqslant 0$. 又因 $f(x)$ 在 $[0, a+b]$ 上连续, 故由介值定理知, 存在 $x_0 \in (0, a+b)$, 使得 $f(x_0) = 0$. 又因对任意 $x > a+b$ 有 $f(x) = x - a\sin x - b > a + b - a\sin x - b \geqslant 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点不超过 $a+b$.

习题 2.2.3 证明函数 $x - \sin(x+1)$ 有实零点.

解 设 $f(x) = x - \sin(x+1)$, 由 $-1 \leqslant \sin(x+1) \leqslant 1$ 知, 则 $f(-2) \leqslant -2+1 = -1 < 0, f(2) \geqslant 2-1 = 1 > 0$. 又因 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续, 故由介值定理知, 存在 $x_0 \in (-2,2)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

习题 2.2.4 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且值域就是 $[a,b]$. 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有不动点, 即有 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

解 函数 $f(x)$ 的值域为 $[a,b]$, 故存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$, 使得 $f(x_1) = a, f(x_2) = b$. 设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x_1) = a - x_1 \leqslant 0, g(x_2) = b - x_2 \geqslant 0$. 故由介值定理知, 存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = x_0$.

习题 2.2.5 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$. 试证: 存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$.

解 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $h(a) = f(a) - g(a) > 0, h(b) = f(b) - g(b) < 0$. 故由介值定理知, 存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = g(x_0)$.

习题 2.2.6 设函数 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$. 证明: 在区间 $[0,a]$ 上存在某个 x_0, 使得 $f(x_0) = f(x_0+a)$.

解 设 $g(x) = f(x) - f(x+a)$, 则 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 且 $g(0) = f(0) - f(a), g(a) = f(a) - f(2a) = f(a) - f(0) = -g(0)$. 因此 $g(0)g(a) = -(g(0))^2 \leqslant 0$. 由介值定理知, 存在 $x_0 \in [0,a]$, 使得 $g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = f(x_0+a)$.

习题 2.2.7 试证: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为此区间中的任意点, 则在 $[a,b]$ 中有一点 ξ, 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)).$$

更一般地, 若 $q_1 > 0, q_2 > 0, \ldots, q_n > 0$, 且 $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$, 则在 $[a, b]$ 中有一点 ξ, 使得

$$f(\xi) = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n).$$

解

(1) 设 $A = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$. 若 $f(x_i) = A$ 对某个 i 成立, 则取 $\xi = x_i$. 否则, 设 $f(x_k) = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}, f(x_m) = \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$. 则 $f(x_k) < A < f(x_m)$. 由介值定理知, 存在 $\xi \in (x_k, x_m)$, 使得 $f(\xi) = A$.

(2) 设 $A = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n)$. 若 $f(x_i) = A$ 对某个 i 成立, 则取 $\xi = x_i$. 否则, 设 $f(x_k) = \min\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}, f(x_m) = \max\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$. 则 $f(x_k) < A < f(x_m)$. 由介值定理知, 存在 $\xi \in (x_k, x_m)$, 使得 $f(\xi) = A$.

习题 2.2.8 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 存在. 证明 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

解 设 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, 则存在 $M > 0$, 使得当 $x > M$ 时, 有 $|f(x) - A| < 1$, 即 $|f(x)| < |A| + 1$. 又因函数 $f(x)$ 在区间 $[a, M]$ 上连续, 故在该闭区间上有界, 即存在 $K > 0$, 使得对任意 $x \in [a, M]$ 有 $|f(x)| \leqslant K$. 取 $N = \max\{K, |A| + 1\}$, 则对任意 $x \in [a, +\infty)$ 有 $|f(x)| \leqslant N$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

习题 2.2.9 证明函数 $f(x) = \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2 + x^4}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

解 由习题 1.3.17 知, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 + x^2}{1 - x^2 + x^4} = 0$, 利用习题 2.2.8 知, 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界. 又因 $f(x)$ 是偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上也有界. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

习题 2.2.10 是否有满足下面条件的连续函数? 说明理由.

(1) 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $(0, +\infty)$;

(2) 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $(0, 1)$;

(3) 定义域为 $[0, 1]$, 值域为 $[0, 1] \cup [2, 4]$;

(4) 定义域为 $(0, 1)$, 值域为 $(2, +\infty)$.

解

(1) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(2) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(3) 不存在. 这与介值定理矛盾.

(4) 存在. 例如, $f(x) = \dfrac{1}{x} + 2$.

习题 2.2.11 举例说明, 对任意正数 $\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$ 上有界, 不能保证 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 上有界. (比较习题 2.1 第 2 题.)

解 例如, 设 $f(x) = \dfrac{1}{x - a} + \dfrac{1}{b - x}$, 则对任意正数 $\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$

上有界, 但在开区间 (a,b) 上无界.

习题 2.2.12 设 $y=f(x)$ 在开区间 $I=(a,b)$ 上连续并严格单调. 证明 $y=f(x)$ 的值域 $f(I)$ 也是一个开区间.

解 **注** 不能假设 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 存在. $f(I)$ 可能有无穷端点, 例如 $f(x)=\tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上连续且严格单调, 但值域是 $(-\infty,+\infty)$.

先证明 $f(I)$ 存在两个不同的点: 取 $x_1,x_2\in I$, 且 $x_1<x_2$, 由严格单调性知, $f(x_1)<f(x_2)$, 故 $f(I)$ 中至少有两个不同的点. **注** 如果去除单调的严格性, 则 $f(I)$ 不一定是开区间, 例如 $f(x)=1$ 在 $(0,1)$ 上连续且单调, 但值域不是开区间.

$\forall y_1,y_2\in f(I)$, 且 $y_1<y_2$. 则存在 $x_1,x_2\in I$, 使得 $f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2$. 因为 $f(x)$ 在 I 上严格单调, 故 $x_1<x_2$. 对任意 $y\in(y_1,y_2)$, 由介值定理知, 存在 $x\in(x_1,x_2)\subset I$, 使得 $f(x)=y$. 因此, $f(I)$ 是区间.

下面证明 $f(I)$ 是开区间. $\forall y\in f(I)$, 则存在 $x_0\in I$, 使得 $f(x_0)=y$. 由 (a,b) 是开区间知, 存在 $\delta>0$, 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$. 设 $\eta=\min\{f(x_0)-f(x_0-\delta), f(x_0+\delta)-f(x_0)\}>0$, 则对任意 $y'\in(y-\eta,y+\eta)\subset(f(x_0-\delta),f(x_0+\delta))$, 由介值定理知, 存在 $x'\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$, 使得 $f(x')=y'$. 因此, $f(I)$ 是开区间.

习题 2.2.13 设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 上一致连续. 求证 $f(x)$ 在 a 点的右极限和在 b 点的左极限都存在.

解 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 现取 $x_1,x_2\in(a,a+\delta)$, 则 $|x_1-x_2|<\delta$, 故 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 上满足柯西收敛准则, 故 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在. 同理可证 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 也存在.

习题 2.2.14 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续, $\{a_n\}$ 是正收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛. 又问仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论是否还成立, 为什么?

解 由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 又因 $\{a_n\}$ 是正收敛数列, 故存在 $N\in\mathbf{N}^+$, 使得当 $n,m>N$ 时, 有 $|a_n-a_m|<\delta$. 因此, 对任意 $n,m>N$ 有 $|f(a_n)-f(a_m)|<\varepsilon$. 由柯西收敛准则知, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛.

仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论不成立. 例如, 设 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 且数列 $a_n=\dfrac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$ 收敛于 0, 但数列 $f(a_n)=\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)=(-1)^n$ 不收敛.

习题 2.2.15 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $\{a_n\}$ 是收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛.

解 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则 $a\in(-\infty,+\infty)$. 由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续知, $f(x)$ 在 a 点连续, 即 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. 因此, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. 又因数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 故存在 $N\in\mathbf{N}^+$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\delta$. 因此, 对任意 $n>N$

有 $|f(a_n)-f(a)|<\varepsilon$. 由数列的收敛定义知, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛于 $f(a)$.

习题 2.2.16 给出一个在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界但不一致连续的函数.

解 例如, $f(x)=\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界, 但不一致连续. 反证法: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon=1$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<1$. 现取 $x_1=\sqrt{2n\pi}, x_2=\sqrt{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$, 则当 $n>\left(\dfrac{2}{\delta}\right)^2$ 时, 有 $|x_1-x_2|<\delta$, 但 $|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sin(2n\pi)-\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=1$, 矛盾.

第 2 章综合习题

习题 2.C.1 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为有理数}, \\ x, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$ 仅在点 $x=0$ 处连续.

解 设 $x_0\in\mathbb{R}$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在有理数列 $\{r_n\}$ 与无理数列 $\{s_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=x_0$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} 0=0, \quad \lim_{n\to\infty} f(s_n)=\lim_{n\to\infty} s_n=x_0.$$

当 $x_0\neq 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n)=x_0$, 故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续.

当 $x_0=0$ 时, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $|x-0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leqslant|x|<\delta=\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

习题 2.C.2 设 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[0,1]$, 记 $f(x)=\dfrac{|x-x_1|+\cdots+|x-x_n|}{n}$, 证明: 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

解 设 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$\begin{aligned} f(0)+f(1) &= \frac{|0-x_1|+\cdots+|0-x_n|}{n}+\frac{|1-x_1|+\cdots+|1-x_n|}{n} \\ &= \frac{(x_1+(1-x_1))+\cdots+(x_n+(1-x_n))}{n}=1. \end{aligned}$$

因此 $g(0)+g(1)=f(0)+f(1)-1=0$. 则 $g(0)g(1)=-(g(0))^2\leqslant 0$. 由介值定理知, 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

习题 2.C.3 证明: 函数 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ (其中 $a_1,a_2,a_3>0$, 且 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$) 在 (λ_1,λ_2) 与 (λ_2,λ_3) 内各有一个零点.

解 仅证明 (λ_1,λ_2) 内有一个零点, (λ_2,λ_3) 内的证明类似.

由 $\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在 $\left[\lambda_1,\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right]$ 上连续, 因此有界, 即存在 $M_1>0$, 使得对任意 $x\in\left[\lambda_1,\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right]$ 有 $|\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}|\leqslant M$.

又由 $\lim\limits_{x\to\lambda_1^+}\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}=+\infty$, 因此存在 $\delta_1\in\left(0,\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta_1)$ 有 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}>M_1$. 因此, 存在 $x_1\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta_1)\subset\left(\lambda_1,\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)$, 使得

$$\frac{a_1}{x_1-\lambda_1}+\frac{a_2}{x_1-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_1-\lambda_3}=\frac{a_1}{x_1-\lambda_1}+\left(\frac{a_2}{x_1-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_1-\lambda_3}\right)>M_1-M_1=0.$$

由 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在 $\left[\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right]$ 上连续, 因此有界, 即存在 $M_2>0$, 使得对任意 $x\in$

$\left[\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right]$ 有 $\left|\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}\right|\leqslant M_2$.

又由 $\lim\limits_{x\to\lambda_2^-}\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}=-\infty$, 因此存在 $\delta_2\in\left(0,\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x\in(\lambda_2-\delta_2,\lambda_2)$ 有 $\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}<-M_2$. 因此, 存在 $x_2\in(\lambda_2-\delta_2,\lambda_2)\subset\left(\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right)$, 使得

$$\frac{a_1}{x_2-\lambda_1}+\frac{a_2}{x_2-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_2-\lambda_3}=\left(\frac{a_1}{x_2-\lambda_1}+\frac{a_3}{x_2-\lambda_3}\right)+\frac{a_2}{x_2-\lambda_2}<M_2-M_2=0.$$

综上, 存在 $x_1,x_2\in(\lambda_1,\lambda_2)$, 使得对于函数 $f(x)=\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 有 $f(x_1)>0,f(x_2)<0$. 由介值定理知, 存在 $x_0\in(x_1,x_2)\subset(\lambda_1,\lambda_2)$, 使得 $f(x_0)=0$.

同时由于 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1},\dfrac{a_2}{x-\lambda_2},\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在 (λ_1,λ_2) 上单调递减, 因此 $f(x)$ 在 (λ_1,λ_2) 上单调递减. 因此, 零点 x_0 唯一.

习题 2.C.4 设 $f(x)$ 是一个多项式, 则必存在一点 x_0, 使得 $|f(x_0)|\leqslant|f(x)|$ 对任意实数 x 成立.

解 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 其中 $a_n\neq0,n\geqslant1$. 则

$$|f(x)|=|x|^n\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right|.$$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}\right)=a_n$, 因此存在 $M>0$, 使得当 $|x|>M$ 时, 有

$$\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right|>\frac{|a_n|}{2}.$$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|a_n|}{2}|x|^n=+\infty$, 因此 $\exists X>M$, 使得当 $|x|>X$ 时, 有 $\dfrac{|a_n|}{2}|x|^n>|f(0)|$. 而由 $|f(x)|$ 在 $[-X,X]$ 上连续, 故由最值性知, 存在 $x_0\in[-X,X]$, 使得 $|f(x_0)|=\inf\{f(x):x\in[-X,X]\}$. 特别的, 对任意 $x\in[-X,X]$ 有 $|f(x_0)|\leqslant|f(0)|$. 因此对于 $|x|>X$ 时, 有 $|f(x)|>\dfrac{|a_n|}{2}|x|^n\geqslant|f(x_0)|$. 综上, 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $|f(x_0)|\leqslant|f(x)|$.

习题 2.C.5 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$. 证明: 对任意正整数 n, 在区间 $\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$ 中有一点 ξ, 使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)$.

解 设 $g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$, 则 $g(x)$ 在 $\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$ 上连续, 且

$$g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$g\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right),$$
$$\cdots$$
$$g\left(\frac{n-1}{n}\right)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(0).$$

因此 $\dfrac{1}{n}\left(g(0)+g\left(\dfrac{1}{n}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)=0$. 则 $g(0),g\left(\dfrac{1}{n}\right),\ldots,g\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ 中至少有一

个非正, 另一个非负. 由介值定理知, 存在 $\xi \in \left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right]$, 使得 $g(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)$.

习题 2.C.6 证明: 存在一个实数 x, 满足 $x^5+\dfrac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}=72$.

解

$$
\begin{aligned}
f(3)&=3^5+\frac{\cos 3}{1+3^2+\sin^2 3}\geqslant 243-\frac{1}{1+3^2-1}>0,\\
f(-3)&=(-3)^5+\frac{\cos(-3)}{1+(-3)^2+\sin^2(-3)}\leqslant -243+\frac{1}{1+(-3)^2-1}<0.
\end{aligned}
$$

由介值定理知, 存在 $x\in[-3,3]$, 使得 $f(x)=72$.

习题 2.C.7 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上或者有最大值, 或者有最小值.

解 记

$$
S=\sup\{f(x): x\in[a,+\infty)\},\ I=\inf\{f(x): x\in[a,+\infty)\},\ L=\lim_{x\to+\infty} f(x).
$$

(1) 若 $S>L$, 取 $\varepsilon=\dfrac{S-L}{2}>0$, 则存在 $X>a$, 使得对任意 $x>X$ 有 $|f(x)-L|<\varepsilon$, 即 $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$. 因此, 对任意 $x>X$ 有 $f(x)<L+\varepsilon=\dfrac{S+L}{2}<S$. 因此

$$
\sup\{f(x): x\in[a,X]\}=S,
$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0\in[a,X]$, 使得 $f(x_0)=S$.

(2) 若 $I<L$, 取 $\varepsilon=\dfrac{L-I}{2}>0$, 则存在 $X>a$, 使得对任意 $x>X$ 有 $|f(x)-L|<\varepsilon$, 即 $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$. 因此, 对任意 $x>X$ 有 $f(x)>L-\varepsilon=\dfrac{I+L}{2}>I$. 因此

$$
\inf\{f(x): x\in[a,X]\}=I,
$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0\in[a,X]$, 使得 $f(x_0)=I$.

(3) 若 $S=L=I$, 则 $f(x)\equiv L$, 即任取 $x_0\in[a,+\infty)$, 均有 $f(x_0)=L$ 同时为最大值和最小值.

注 一个只有极限没有最大值或最小值的例子是 $f(x)=\arctan x, x\in[0,+\infty)$.

习题 2.C.8 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上, 满足条件: $a\leqslant f(x)\leqslant b$ (对任意 $x\in[a,b]$), 且对 $[a,b]$ 中任意的 x,y 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$. 这里 k 是常数, $0<k<1$. 证明:

(1) 存在唯一的 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

(2) 任取 $x_1\in[a,b]$, 并定义数列 $\{x_n\}: x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\ldots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$.

(3) 给出一个在实轴上的连续函数, 使得对任意 $x\neq y$ 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$, 但方程 $f(x)-x=0$ 无解.

解

(1) 先证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续: 设 $x_0\in[a,b]$, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{k}>0$, 则对任意 $x\in[a,b]$

且 $|x-x_0|<\delta$, 有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant k|x-x_0|<k\delta=\varepsilon.$$

设 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(a)=f(a)-a\geqslant 0, g(b)=f(b)-b\leqslant 0$. 故由介值定理知, 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=x_0$. 又因对任意 $x,y\in[a,b]$ 有

$$|g(x)-g(y)|=|f(x)-f(y)-(x-y)|\geqslant ||x-y|-|f(x)-f(y)||\geqslant(1-k)|x-y|,$$

故若存在 $x_1\neq x_0$ 使得 $f(x_1)=x_1$, 则

$$(1-k)|x_1-x_0|\leqslant|g(x_1)-g(x_0)|=|f(x_1)-f(x_0)-(x_1-x_0)|=0,$$

即 $x_1=x_0$. 因此 x_0 唯一.

(2) (a) 若 $x_2=x_1$, 则由 $f(x_1)=x_1$ 以及 (1) 中所述的唯一性, 知 $x_2=x_1=x_0$, 则 $x_3=f(x_2)=f(x_0)=x_0$, 依此类推, 有 $x_n=x_0$ 对任意 $n\geqslant 1$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(b) 若 $x_2\neq x_1$, 对任意 $n\geqslant 1$ 有

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|\leqslant\ldots\leqslant k^{n-1}|x_2-x_1|.$$

因此, 对任意 $m>n\geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant(k^{m-2}+k^{m-3}+\cdots+k^{n-1})|x_2-x_1|\\&\leqslant\frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2-x_1|.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left\lceil\log_k\dfrac{(1-k)\varepsilon}{|x_2-x_1|}\right\rceil$, 当 $m,n>N$ 时, 有

$$|x_m-x_n|\leqslant\frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2-x_1|<\varepsilon.$$

故数列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 故存在 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n:=a$ 存在. 又因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 对递推式两侧取极限, 有

$$a=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=f(a).$$

由 (1) 中所述的唯一性, 知 $a=x_0$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(3) 一个不太严谨的思考过程: 我想要构造一个满足 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ 的函数, 我考虑了 $|f'(x)|<1$ 的趋势为增的函数, 同时 $f(x)-x$ 无解要求了 $f(x)$ 应该是贴在 $y=x$ 的 (不妨设为) 上方的, 于是我考虑了 $f(x)=x+g(x)$, 其中 (也假设 $g(x)$ 可导), 如果 $-1<-g'(x)<0$, 那就能保证 $f(x)$ 的导数满足要求.(当然上述思路中, 对 $g(x)$ 的选取过

程都只是必要的)

$$f(x) = x + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

(a) 满足 $|f(x)-f(y)| < |x-y|$: 设 $x > y$, 则

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| = f(x)-f(y) &= (x-y) + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^y}\\ &= (x-y) - \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^y)}\\ &< x-y = |x-y|.\end{aligned}$$

(b) 方程 $f(x)-x=0$ 无解: 由 $f(x)-x = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} > 0$, 知 $f(x)-x=0$ 无解.

习题 2.C.9 证明: 对任意正整数 n, 方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 恰有一个正根 x_n; 进一步证明数列 $\{x_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 收敛, 并求其极限.

解 设 $f(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$, 则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续, 且 $f(0) = -1 < 0, f(1) = n > 0$. 故由介值定理知, 存在 $x_n \in (0,1)$, 使得 $f(x_n) = 0$. 若 $y_n \in (0,1)$ 且 $y_n \neq x_n$, 则由

$$\begin{aligned}x^n - y^n &= (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1})\\ x^{n-1} - y^{n-1} &= (x-y)(x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + y^{n-2})\\ &\vdots\\ x - y &= (x-y)\end{aligned}$$

可知

$$\begin{aligned}0 &= f(x_n) - f(y_n)\\ &= (x_n-y_n)(x_n^{n-1} + x_n^{n-2}y_n + \cdots + y_n^{n-1} + x_n^{n-2} + x_n^{n-3}y_n + \cdots + y_n^{n-2} + \cdots + 1)\\ &= (x_n-y_n)\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i} x_n^j y_n^{i-j}\right).\end{aligned}$$

因为 $x_n, y_n \in (0,1)$, 故 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i} x_n^j y_n^{i-j} > 0$, 因此 $x_n - y_n = 0$, 即 $x_n = y_n$. 因此 x_n 唯一.

下证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减: 若 $x_{n+1} \geqslant x_n$, 由 $x_n > 0$

$$1 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} \geqslant x_n^{n+1} + x_n^n + \cdots + x_n > x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1,$$

故矛盾, 因此 $x_{n+1} < x_n$. 单调减有 0 为下界, 故数列 $\{x_n\}$ 收敛, 考虑

$$1 - x_n^n = (1-x_n)(1 + x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^{n-1}) = 1 - x_n,$$

在两边同时取极限之前, 我们还得先考虑 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n$. 由于 $1 = x_2 + x_2^2 \geqslant x_2 \cdot x_2 + x_2^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_2 \leqslant$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, 对 $x_n^n < x_2^n$, 由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = 0$. 因此, 对数列 $\{x_n\}$ 取极限, 有

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 - x_n^n = \lim_{n\to\infty} 1 - x_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

习题 2.C.10 设 $a < b$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且对任意 $x \in [a, b)$ 存在 $y \in (x, b)$ 使得 $f(y) > f(x)$. 求证: $f(b) > f(a)$.

解 考虑 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值 $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, 由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = M$. 若 $x_0 \neq b$, 则由题设条件, 存在 $y \in (x_0, b)$, 使得 $f(y) > f(x_0) = M$, 矛盾. 因此 $x_0 = b$, 即 $f(b) = M$. 又因 $f(a) \leqslant M$, 若 $f(b) = f(a)$, 则 $f(x) \equiv f(a)$, 与题设条件矛盾. 因此 $f(b) > f(a)$.

第 3 章 单变量函数的微分学

习题 3.1

习题 3.1.1 讨论下列函数在点 $x=0$ 处是否可导:

(1) $f(x)=|\sin x|$;

(2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0; \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0; \end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\geqslant 0,\\ x+1, & x<0; \end{cases}$

(5) $f(x)=|x|\mathrm{e}^x$;

(6) $f(x)=|x^3|$.

习题 3.1.2 求 a,b 的值, 使下列函数处处可导:

(1) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1; \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x<0,\\ ax+b, & x\geqslant 0. \end{cases}$

习题 3.1.3 设函数 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 记 $f(x)=(x-a)g(x)$. 证明 $f'(a)=g(a)$.

习题 3.1.4 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=(\alpha+\beta)f'(x_0)\quad(\alpha,\beta\text{为常数}).$$

习题 3.1.5 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)\neq 0$, 证明函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 也可导. 若 $f(a)=0$, 结论是否仍成立?

习题 3.1.6 求下列函数的导数.

(1) $y=\dfrac{x}{3x^2+5x-2}$;

(2) $y=\sin x\tan x+\cot x$;

(3) $y=x^2\log_3 x$;

(4) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$;

(5) $y=\dfrac{1+\ln x}{x^2+1}$;

(6) $y=\dfrac{(1+x^2)\ln x}{\sin x+\cos x}$;

(7) $y=(x^2+1)(3x-1)(1-x^3)$;

(8) $y=x^3\cdot\tan x\cdot\ln x$.

习题 3.1.7 求下列函数的导数:

(1) $y=x\sqrt{1-x^2}$;

(2) $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$;

(3) $y=\arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

(4) $y=(\sin x+\cos x)^3$;

(5) $y=(\sin x^3)^3$;

(6) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(7) $y=\sin[\sin(\sin x)]$;

(8) $y=\sin[\cos^5(\arctan x^3)]$;

(9) $y=\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3$;

(10) $y=x\sqrt{1+x^2}\sin x$;

(11) $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$;

(12) $y=\ln[\ln^2(\ln^3 x)]$;

(13) $y=x^{x^x}+x^x+x^{2^x}$;

(14) $y=(\ln x)^x$;

(15) $y=(\tan x)^{\cot x}$;

(16) $y=10^x,\quad (\sin x)^{\cos x}$;

(17) $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^3(x+4)^{1/2}}$;

(18) $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}}$.

习题 3.1.8 设 $f(x)=x^3$. 求 $f'(x^2)$ 与 $[f(x^2)]'$.

习题 3.1.9 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2}), g(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$. 求 $f'[g(x)], [f(g(x))]'$.

习题 3.1.10 设 $f(x)$ 处处可导. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $y=f(x^3)$;

(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

(3) $y=f(\mathrm{e}^x+x^{\mathrm{e}})$;

(4) $y=\sin[f(\sin f(x))]$;

(5) $y=f[f(f(x+\cos x))]$;

(6) $y=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}$.

习题 3.1.11 求下列函数的导数:

(1) $y=\begin{cases} x\mathrm{e}^{1/x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$

(2) $y=|1-2x|\sin x$.

习题 3.1.12 设 n 为正整数, 考虑函数 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 证明:

(1) 当 $n=1$ 时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导;

(2) 当 $n=2$ 时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 但导函数在 $x=0$ 处不连续 (事实上, 在这一点有第二类间断);

(3) 当 $n\geqslant 3$ 时, $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且导函数在 $x=0$ 处连续.

习题 3.1.13 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在区间 $[-1,1]$ 上处处可导, 但导函数在这个区间上无界.

习题 3.1.14 求下列函数的反函数的微商.

(1) $y=x\mathrm{e}^x$;

(2) $y=\arctan\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=2x^3-\mathrm{e}^{-2x}$;

(4) $y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})$.

习题 3.1.15 证明: 可导的偶函数的导数为奇函数; 而可导的奇函数的导数为偶函数.

习题 3.1.16 证明: 可导的周期函数的导数仍是周期函数.

习题 3.1.17 求下列各式之和:

(1) $P_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$;

(2) $Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$;

(3) $R_n=\cos x+2\cos 2x+\cdots+n\cos nx$.

习题 3.1.18 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$;

(2) $y=x^2 2^{2x}$;

(3) $y=(1+x^2)\arctan x$;

(4) $y=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0. \end{cases}$

习题 3.1.19 设函数 $f(x)$ 处处有三阶导数, 求 y'', y'''.

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=f(\mathrm{e}^x+x)$.

习题 3.1.20 设 $f(x)=x^n|x|$ (n 为正整数), 证明 $f^{(n)}(0)$ 存在, 但 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

习题 3.1.21 证明: 如果 x_0 是多项式 $P_n(x)$ 的 r 重根, 即 $P_n(x)$ 可以分解成

$$P_n(x)=(x-x_0)^r Q_{n-r}(x),$$

其中 $Q_{n-r}(x)$ 是一个 $n-r$ 次多项式, 且 $Q_{n-r}(x_0)\neq 0$. 则 $P_n(x)$ 满足条件

$$P_n(x_0)=0,\quad P_n'(x_0)=0,\quad \ldots,\quad P_n^{(r-1)}(x_0)=0,\quad P_n^{(r)}(x_0)\neq 0.$$

习题 3.1.22 求下列函数的高阶导数:

(1) $(x^2\mathrm{e}^x)^{(n)}$;

(2) $[(x^2+1)\sin x]^{(n)}$;

(3) $\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)}$;

(4) $(\sin x\cdot\cos x)^{(n)}$.

习题 3.1.23 求曲线 $y = \cos x$ 在 $x = \dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

习题 3.1.24 证明: 双曲线 $xy = 1$ 上任一点处的切线, 与两坐标轴构成的三角形的面积为定值.

习题 3.1.25 有一底半径为 r cm, 高为 h cm 的正圆锥形容器, 现以 $a\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 的速度自顶部向其内注水, 求水面上升的速度.

习题 3.1.26 水自高为 18 cm, 底半径为 6 cm 的圆锥形漏斗流入直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 已知水在漏斗中深度为 12 cm 时水平面下降的速率为 1 cm/min. 试求圆柱形筒中水面上升的速度.

习题 3.2

习题 3.2.1 设 $y = x^2 + x$, 计算在 $x = 1$ 处, 当 $\Delta x = 10, 1, 0.1, 0.01$ 时, 相应的函数的改变量 Δy 和函数的微分 $\mathrm{d}y$, 并观察差 $\Delta y - \mathrm{d}y$ 随 Δx 减小的变化情况.

习题 3.2.2 求下列函数的微分:

(1) $y = \ln(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{x}{4})$;

(2) $y = \sin x - x\cos x$;

(3) $y = \arccos\dfrac{1}{|x|}$;

(4) $y = \ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$;

(5) $y = 5\sqrt[3]{\arctan x^2}$;

(6) $y = \tan^2(1+2x^2)$;

(7) $y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)$;

(8) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

习题 3.2.3 对下列函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \varphi\cos\varphi, \\ y = \varphi\sin\varphi; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x = \cos^3\varphi, \\ y = \sin^3\varphi. \end{cases}$

习题 3.2.4 求下列曲线在已知点处的切线方程.

(1) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{4}$ 处;

(2) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^2} \end{cases}$ 在 $t = 2$ 处.

习题 3.3

习题 3.3.1 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 确定方程 $f'(x)=0$ 的实根的个数, 并指出根所在的区间.

习题 3.3.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上有二阶微商, 且 $f(1)=f(2)=0$. 记 $F(x)=(x-1)^2f(x)$, 则在区间 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ, 使得 $F''(\xi)=0$.

习题 3.3.3 举例说明, 中值定理的下述意义的逆不成立: 设 $\xi\in(a,b)$ 是指定的一点, 则存在 $c,d\in[a,b]$, 使得 $\dfrac{f(c)-f(d)}{c-d}=f'(\xi)$. (提示: 考虑函数 $f(x)=x^3,\xi=0$.)

习题 3.3.4 证明下列不等式:

(1) 当 $a>b>0,n>1$ 时, 有 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$;

(2) 当 $x>0$ 时, 有 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$;

(3) 当 $0<a<b$ 时, 有 $(a+b)\ln\dfrac{a+b}{2}<a\ln a+b\ln b$.

(4) 当 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有 $\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$.

习题 3.3.5 证明下列恒等式:

(1) $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(2) $\arctan x+\arctan\dfrac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & x>-1,\\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x<-1.\end{cases}$

习题 3.3.6 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的可导函数, 对任意 $x\in[0,1]$ 有 $f(x)\in(0,1)$; 并且对每个 $x, f'(x)\neq 1$. 证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x, 使 $f(x)=x$.

习题 3.3.7 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $|f'(x)|<1$, 又 $f(0)=f(1)$. 证明: 对于 $[0,1]$ 上的任意两点 x_1,x_2, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$.

习题 3.3.8 若 $f(x)$ 处处可导, 且 $f'(x)=f(x)$. 证明 $f(x)=C\mathrm{e}^x, C$ 为任意常数.

习题 3.3.9 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)$. 证明在 (a,b) 内存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)>0$.

习题 3.3.10 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

习题 3.3.11 证明: 若函数 $f(x)$ 在 (有限) 开区间 (a,b) 内有有界的导函数, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内也有界. 如果有限区间 (a,b) 改为无穷区间, 结论还成立吗? 命题的逆命题是否成立?

习题 3.3.12 设对所有的实数 x,y, 不等式 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^2$ (M 为常数) 都成立. 证明: $f(x)$ 恒为常数.

习题 3.3.13 设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_0, x_0+\delta]$ 上连续 (这里 $\delta > 0$), 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内可导. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = l$ (这里的 l 可以是无穷大), 则 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数也为 l, 即

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

(将区间 $[x_0, x_0+\delta]$ 换为 $[x_0-\delta, x_0]$, 有类似的结论.)

习题 3.3.14 应用上一题的结论证明:

(1) 函数 $x^{1/3}$ 在 $x=0$ 处不可导;

(2) 函数 $\arcsin x, \arccos x$ 在 $x=1$ 处没有左导数, 在 $x=-1$ 处没有右导数.

习题 3.3.15 证明: 若函数 $f(x)$ 在一个区间内处处可导, 则导函数 $f'(x)$ 不能有第一类间断点, 即在 (区间内) 每一点处, $f'(x)$ 或者连续, 或者有第二类间断. (由本题推出, 具有第一类间断点的函数, 如 $\operatorname{sgn} x$, 不能成为某个函数的导函数.)

习题 3.3.16 设 $f(x)$ 在一个区间 I 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外, $f(x)$ 在 I 内部的导数为正 (负), 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增 (减). (注意, 在例外的点处, $f(x)$ 可能不可导.)

习题 3.3.17 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 I 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 I 内部满足 $f'(x) > g'(x)$; 设存在 $a \in I$, 使得 $f(a) = g(a)$ (a 不是区间端点), 则当 $x \in I$ 且 $x > a$ 时, 有 $f(x) > g(x)$; 当 $x \in I$ 且 $x < a$ 时, 有 $f(x) < g(x)$.

习题 3.3.18 若 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 可导, $f(0) = 0$, $f'(x)$ 严格递增, 证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 严格递增.

习题 3.3.19 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个可疑极值点, 且 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可微, $f''(x_0) \neq 0$. 证明: 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点; 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点. (提示: 现在必有 $f'(x_0) = 0$.)

举例说明: 若 $f''(x_0) = 0$, 则 x_0 可以是 $f(x)$ 的极大值点或极小值点, 也可以不是极值点.

习题 3.3.20 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0), f(1) = f'(1)$. 求证: 存在 $\xi \in (0,1)$, 满足 $f(\xi) = f''(\xi)$.

习题 3.3.21 求下列函数的单调区间与极值.

(1) $y = 2x^3 - 3x^2$;

(2) $y = x^{2/3}$;

(3) $y = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$;

(4) $y = x^{1/x}$;

(5) $y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$;

(6) $y = \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

习题 3.3.22 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值.

(1) $y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2, 2]$;

(2) $y = \sin 2x - x, [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$;

(3) $y = \arctan \dfrac{1-x}{1+x}, [0, 1]$;

(4) $y = x \ln x, (0, +\infty)$.

习题 3.3.23 证明下列不等式:

(1) $\dfrac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1, \quad x \in [0,1], p > 1;$

(2) $\tan x > x - \dfrac{x^3}{3}, \quad x \in (0, \dfrac{\pi}{2});$

(3) $\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}, \quad 0 < x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{2};$

(4) $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x}, \quad x > 0;$

(5) $1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2}, \quad x$ 为任意实数;

(6) $\dfrac{x}{\sin x} > \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}\cos x, \quad x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, 且右端的常数 $\dfrac{4}{3}$ 不能换为更大的数;

(7) $(1 - \dfrac{1}{x})^{x-1}(1 + \dfrac{1}{x})^x < 4, \quad x \in (1, +\infty);$

(8) $x^{a-1} + x^{a+1} \geqslant \left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}, \quad x \in (0,1), a \in (0,1).$

习题 3.3.24 试确定下列函数零点的个数及所在范围:

(1) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10;$

(2) $ax - \ln x$ (其中 $a > 0$).

习题 3.3.25 设 $a \in (0,1), b_1 = 1 - a$,

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{1 - \mathrm{e}^{-b_n}} - a, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

问 $\{b_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则给予证明, 若收敛, 则求极限.