

# 数学分析讲义 (第一册)

## 习题解答

October 29, 2025

# 目录

<b>第 1 章 极限</b>	<b>1</b>
习题 1.1 . . . . .	1
习题 1.2 . . . . .	4
习题 1.3 . . . . .	15
第 1 章综合习题 . . . . .	26
<b>第 2 章 连续函数的基本概念</b>	<b>35</b>
习题 2.1 . . . . .	35
习题 2.2 . . . . .	44
第 2 章综合习题 . . . . .	48
<b>第 3 章 单变量函数的微分学</b>	<b>53</b>
习题 3.1 . . . . .	53
习题 3.2 . . . . .	70
习题 3.3 . . . . .	74
习题 3.4 . . . . .	87
习题 3.5 . . . . .	92
习题 3.6 . . . . .	101
第 3 章综合习题 . . . . .	107
习题 4.1 . . . . .	115
习题 4.2 . . . . .	135

# 第1章 极限

## 习题 1.1

**习题 1.1.1** 设  $a$  是有理数,  $b$  是无理数. 求证:  $a+b$  和  $a-b$  都是无理数; 当  $a \neq 0$  时,  $ab$  和  $\frac{b}{a}$  也都是无理数.

**解** 设  $a$  是有理数,  $b$  是无理数.

(1) 若  $a+b$  是有理数, 则  $b = (a+b) - a$  是有理数, 矛盾. 同理可证  $a-b$  是无理数.

(2) 若  $ab$  是有理数, 则  $b = \frac{ab}{a}$  是有理数, 矛盾. 同理可证  $\frac{b}{a}$  是无理数.

**习题 1.1.2** 求证: 两个不同的有理数之间有无理数.

**解** 设  $a, b$  是两个不同的有理数, 不妨设  $a < b$ . 则存在正整数  $k, N$  使得

$$(\sqrt{2})^{2k-1} a < N < (\sqrt{2})^{2k-1} b.$$

具体而言, 取  $k > \lceil \log_2(b-a) \rceil$ , 则  $k > \log_2 \frac{2\sqrt{2}}{b-a} \Rightarrow 2^k(b-a) > 2\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2})^{2k-1} b - (\sqrt{2})^{2k-1} a > 2$ . 因此, 存在整数  $N = \left\lfloor (\sqrt{2})^{2k-1} b \right\rfloor$ , 使得  $(\sqrt{2})^{2k-1} a < N < (\sqrt{2})^{2k-1} b$ . 于是

$$a < \frac{N}{(\sqrt{2})^{2k-1}} < b.$$

而  $\frac{N}{(\sqrt{2})^{2k-1}} = \frac{N\sqrt{2}}{2^k}$  是无理数.

**习题 1.1.3** 求证:  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  以及  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  都是无理数.

**解**

(1) 设  $\sqrt{2}$  是有理数, 则  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  互素. 因此  $2q^2 = p^2$ , 由素数分解的唯一性可知  $p$  是偶数, 设  $p = 2k$ , 则  $2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ , 同理可知  $q$  也是偶数, 与  $p, q$  互素矛盾. 因此  $\sqrt{2}$  是无理数.

(2) 设  $\sqrt{3}$  是有理数, 则  $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  互素. 因此  $3q^2 = p^2$ , 由素数分解的唯一性可知  $p$  是 3 的倍数, 设  $p = 3k$ , 则  $3q^2 = 9k^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2$ , 同理可知  $q$  也是 3 的倍数, 与  $p, q$  互素矛盾. 因此  $\sqrt{3}$  是无理数.

(3) 设  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  是有理数, 则  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  互素. 因此  $2 + 3 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2}$ , 与  $\sqrt{6}$  是无理数矛盾. 因此  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  是无理数.

**习题 1.1.4** 把下列循环小数表示为分数:

(1)  $0.24999\dots$ (2)  $0.\dot{3}7\dot{5}$ (3)  $4.\dot{5}1\dot{8}$ 

解

(1) 设  $x = 0.24999\dots$ , 则  $10x = 2.4999\dots$ , 因此  $9x = 2.25 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ .(2) 设  $x = 0.\dot{3}7\dot{5}$ , 则  $1000x = 375.375375\dots$ , 因此  $999x = 375 \Rightarrow x = \frac{375}{999} = \frac{125}{333}$ .(3) 设  $x = 4.\dot{5}1\dot{8}$ , 则  $1000x = 4518.518518\dots$ , 因此  $999x = 4514 \Rightarrow x = \frac{4514}{999} = \frac{122}{27}$ .习题 1.1.5 设  $r, s, t$  都是有理数. 求证:(1) 若  $r + s\sqrt{2} = 0$ , 则  $r = s = 0$ ;(2) 若  $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0$ , 则  $r = s = t = 0$ .

解

(1) 假设  $s \neq 0$ , 则  $\sqrt{2} = -\frac{r}{s}$  是有理数, 与  $\sqrt{2}$  是无理数矛盾. 因此  $s = 0$ , 从而  $r = 0$ .(2)  $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0 \Rightarrow r^2 = 2s^2 + 3t^2 + 2st\sqrt{6} \Rightarrow (r^2 - 2s^2 - 3t^2) + (-2st)\sqrt{6} = 0$  :与 (1) 类似, 若  $st \neq 0$ , 则  $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 2s^2 - 3t^2}{2st}$  是有理数, 与  $\sqrt{6}$  是无理数矛盾. 故  $st = 0$ ,(a) 若  $t = 0$ , 则  $r + s\sqrt{2} = 0$ , 由 (1) 可知  $r = s = 0$ ;(b) 若  $s = 0$ , 则  $r + t\sqrt{3} = 0$ , 同理可知  $r = t = 0$ .习题 1.1.6 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  有相同的符号, 且都大于  $-1$ . 证明:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

解 利用数学归纳法:

当  $n = 1$  时, 等式为

$$1 + a_1 \geq 1 + a_1,$$

显然成立.

假设当  $n = k$  时, 等式成立, 即

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

以此作为条件, 当  $n = k + 1$  时, 由  $a_{k+1} > -1$ , 可知  $1 + a_{k+1} > 0$ , 因此

$$\begin{aligned} (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) &\geq (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(1 + a_{k+1}) \\ &= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\ &\geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}. \end{aligned}$$

其中  $a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+1} + \cdots + a_k a_{k+1} \geq 0$ , 因为  $a_i$  与  $a_{k+1}$  符号相同.习题 1.1.7 设  $a, b$  是实数, 且  $|a| < 1, |b| < 1$ . 证明:

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1.$$

解 由  $|a| < 1, |b| < 1$ , 可知  $ab \neq -1$ . 因此

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1 \Leftrightarrow |a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow (a+b)^2 < (1+ab)^2.$$

即

$$a^2 + b^2 + 2ab < 1 + a^2b^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2 \Leftrightarrow (1-a^2)(1-b^2) > 0.$$

显然成立.

## 习题 1.2

习题 1.2.1 用定义证明下面的结论:

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5+3n} = \frac{1}{3}$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ ;  
 (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ ; (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ .

解

(1)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{5}{9\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{n}{5+3n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n - (5+3n)}{3(5+3n)} \right| = \frac{5}{3(5+3n)} < \frac{5}{9n} < \varepsilon.$$

(2)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(3)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon.$$

(4)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{n!}{n^n} - 0 \right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

习题 1.2.2 若数列  $\{a_n\}$  ( $n \geq 1$ ) 满足条件: 任给正数  $\varepsilon$ , 存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < M\varepsilon$  (其中  $M$  为常数), 则  $\{a_n\}$  必以  $a$  为极限.

$M$  为常数指的是  $M$  不依赖于  $\varepsilon$  和  $n$ . 例如  $M = 2, M = 1000$  等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于  $\forall M > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < M\varepsilon$  成立.

习题 1.2.3 证明: 当且仅当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

解 充分性: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立. 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

必要性: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立. 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ .

习题 1.2.4 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ ; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

解 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$  当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon.$  则

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$

反之不一定成立, 如数列  $a_n = (-1)^n,$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1,$  但  $\{a_n\}$  发散.

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0,$  则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$  当  $n > N$  时, 有  $||a_n| - 0| < \varepsilon.$  则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

习题 1.2.5 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$  又  $|b_n| \leq M, (n = 1, 2, \dots),$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$

解 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$  当  $n > N$  时, 有  $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.$  则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$

习题 1.2.6 证明: 若数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = a,$  及  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a,$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$

解 按已知条件  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0,$  当  $n > N_1$  时  $|x_{2n} - a| < \varepsilon.$  又  $\exists N_2 > 0,$  当  $n > N_2$  时  $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon.$  于是令  $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\},$  则  $n > N$  时恒有  $|x_n - a| < \varepsilon.$  故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$

习题 1.2.7 证明下列数列不收敛:

$$(1) a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}; \quad (2) a_n = 5 \left(1 - \frac{2}{n}\right) + (-1)^n.$$

解

- (1) 取  $a_{2n} = \frac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2},$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1,$  而如果  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1},$  矛盾.
- (2) 取  $a_{2n} = 5 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5 \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) - 1,$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 6, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 4,$  而如果  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1},$  矛盾.

习题 1.2.8 求下列极限:

- (1)  $a_n = \frac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1};$
- (2)  $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n};$
- (3)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n(n+1)/2}\right), n = 2, 3, \dots;$
- (4)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$
- (5)  $a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^m}), (|q| < 1).$

解

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

(3)

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n^2 + n - 2)/2}{n(n+1)/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{(1 \cdot 2 \cdots (n-1)) \cdot (4 \cdot 5 \cdots (n+2))}{(2 \cdot 3 \cdots (n)) \cdot (3 \cdot 4 \cdots (n+1))} = \frac{1 \cdot (n+2)}{n \cdot 3} = \frac{n+2}{3n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

(4)

$$a_n = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^n})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1 - \lim_{m \rightarrow \infty} q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

**习题 1.2.9** 若  $a_n \neq 0 (n=1, 2, \dots)$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 能否断定  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ ?

**解** 不能. 例如  $a_n = \frac{1}{2^n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ .

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  可能为 0.

**习题 1.2.10** 若数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$ , 是否必有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ? 若还假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 回答同样的问题.

**解** 不一定. 例如  $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ , 但



$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  均不存在.

当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  时成立. 假设  $a \neq 0$  时, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{0}{a} = 0$ .

**习题 1.2.11** 若数列  $\{a_n\}$  收敛, 数列  $\{b_n\}$  发散, 则数列  $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性如何? 举例说明. 若数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  皆发散, 回答同样的问题.

**解**

(1)  $\{a_n\}$  收敛, 数列  $\{b_n\}$  发散, 则

(a)  $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$  都发散可以采用反证法: 若  $\{a_n + b_n\}$  收敛, 由于  $\{a_n\}$  收敛, 容易知道  $\{a_n + b_n - a_n\} = \{b_n\}$  收敛, 这与  $\{b_n\}$  发散矛盾, 因此  $\{a_n + b_n\}$  发散,  $\{a_n - b_n\}$  同理可得.

(b)  $\{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性不确定.

I.  $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$ , 则  $a_n \cdot b_n = 1$  收敛;

II.  $a_n = 1, b_n = n$ , 则  $a_n \cdot b_n = n$  发散.

(2)  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都发散, 则

(a)  $\{a_n + b_n\}$  的收敛性不确定

I.  $a_n = n, b_n = -n$ , 则  $a_n + b_n = 0$  收敛.

II.  $a_n = n, b_n = n$ , 则  $a_n + b_n = 2n$  发散.

(b)  $\{a_n - b_n\}$  的收敛性不确定

I.  $a_n = n + \frac{1}{n}, b_n = n$ , 则  $a_n - b_n = \frac{1}{n}$ , 收敛.

II.  $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}$ , 则  $a_n - b_n = 2 \cdot (-1)^n$  发散.

(c)  $\{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性不确定.

I.  $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 则  $a_n \cdot b_n = 0$  收敛.

II.  $a_n = n, b_n = (-1)^n$ , 则  $a_n \cdot b_n = (-1)^n n$  发散;

**习题 1.2.12** 下面的推理是否正确?

(1) 设数列  $\{a_n\}: a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

解: 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 在  $a_{n+1} = 2a_n - 1$  两边取极限, 得  $a = 2a - 1$ , 即  $a = 1$ .

(2)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \underbrace{0+0+\cdots+0}_{n \text{ 个}} = 0. \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n = 1^n = 1.$$

解

(1) 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为  $a_n = 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

(2) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

并有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1.$$

(3) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**习题 1.2.13** 设数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  分别收敛于  $a, b$ . 若  $a > b$ , 则从某一项开始, 有  $a_n > b_n$ ; 反之, 若从某项开始恒有  $a_n \geq b_n$ , 则  $a \geq b$ .

解 这是保序性的直接推论.

**习题 1.2.14** 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  分别收敛于  $a$  及  $b$ . 记  $c_n = \max(a_n, b_n)$ ,  $d_n = \min(a_n, b_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \max(a, b), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \min(a, b).$$

解 由  $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ ,  $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$ , 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

**习题 1.2.15** 求下列极限:

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right];$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k)$ , 其中  $0 < k < 1$ ;
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2});$
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 2} - n);$
- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n}).$

解

(1) 由于

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = 0.$$

(2) 由于

$$0 \leq ((n+1)^k - n^k) = n^k \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right) \leq n^k \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 - 1 \right) = n^{k-1}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-1} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k) = 0.$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

(4) 由  $\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1)$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2)} = e^0 = 1.$$

(5) 由于

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} \leq \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leq \sqrt[n]{n}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} = 1.$$

**习题 1.2.16** 设  $a_1, a_2, \dots, a_m$  为  $m$  个正数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

解 设  $a_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , 则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a_k = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

**习题 1.2.17** 证明下列数列收敛:

- (1)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ ;
- (2)  $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$ ;
- (3)  $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots + \alpha_n q^n$ , 其中  $|\alpha_k| \leq M$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ), 而  $|q| < 1$ ;
- (4)  $a_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$ .

**证明**

- (1) 由  $1 - \frac{1}{2^n} < 1$ , 可知  $\{a_n\}$  单调减, 且  $a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛.
- (2) 由  $a_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} < \frac{1}{2}$ , 可知  $\{a_n\}$  有上界, 且  $a_n$  单调递增, 因此  $\{a_n\}$  收敛.
- (3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lfloor \log_{|q|} \frac{\varepsilon(1-|q|)}{2M} \right\rfloor + 1$ , 则当  $m > n > N$  时,

$$|a_m - a_n| = |\alpha_{n+1}q^{n+1} + \cdots + \alpha_m q^m| \leq M(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \cdots) = M \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon.$$

- (4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ , 则当  $m > n > N$  时,

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m}{m(m+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

**习题 1.2.18** 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

- (1)  $a_n = \frac{n}{c^n}$ , ( $c > 1$ );
- (2)  $a_1 = \frac{c}{2}$ ,  $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$  ( $0 \leq c \leq 1$ );
- (3)  $a > 0$ ,  $a_0 > 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right)$  (提示: 先证明  $a_n^2 \geq a$ );
- (4)  $a_0 = 1$ ,  $a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}$ ;
- (5)  $a_n = \sin \sin \cdots \sin 1$  ( $n \uparrow \sin$ ).

**解**

- (1) 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{c^{n+1} - c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n(c-1)} = 0.$$

- (2)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1})$$

由  $a_2 - a_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 > 0$ , 可递归的得知  $a_{n+1} - a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  单调增, 且  $a_1 < c$ , 归纳

的, 可得  $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$ , 因此  $\{a_n\}$  有上界, 故  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$ , 又由  $a_n > 0$ , 可知  $a = 1 - \sqrt{1-c}$ .

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left( \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right) \right)^2 \geq a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

因此  $\{a_n\}$  在  $n \geq 1$  时单调减, 且有下界  $\sqrt{a}$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ , 则  $l = \frac{1}{2} \left( l + \frac{a}{l} \right)$ , 解得  $l = \sqrt{a}$ .

(4)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} - \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} \right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1} + 1)^2}$$

由  $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$  归纳的, 可得  $1 + a_n - a_n^2 > 0$ , 因此  $a_n - a_{n-1} > 0$ , 即  $\{a_n\}$  单调递增, 且  $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  有上界, 因此  $\{a_n\}$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . 递推式两侧取极限, 得  $a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ; 由于  $a_n > 0$  始终成立, 故  $a \geq 0$  而  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ , 故舍去这一值, 进而得到  $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

(5)  $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$ , 因此  $\{a_n\}$  单调减, 且  $a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a = \sin a \Rightarrow a = 0$ .

**习题 1.2.19** 设  $a_n \leq a \leq b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ . 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

**解** 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $|a_n - b_n| < \varepsilon$ . 又由  $a_n \leq a \leq b_n$ , 可知  $|a_n - a| = a - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$ , 同理  $|b_n - a| < \varepsilon$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

**习题 1.2.20** 证明: 若  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**解** 先证明一个引理: 设  $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$ .

证明如下

(1)  $a = 0$  时,

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

同时, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1} = 0$$

由夹逼定理, 得证.

(2)  $a > 0$  时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = a,$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

由夹逼定理, 得证.

回到本题,

可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{l} < 1$ . 因此  $\exists r = \frac{1 + \frac{1}{l}}{2} \in (0, 1)$ , 使得当  $n$  充分大时,  $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} < r$ . 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} < r^n,$$

即  $a_n < a_1 r^n$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**习题 1.2.21** 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是正数列, 满足  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, n = 1, 2, \dots$  求证: 若  $\{b_n\}$  收敛, 则  $\{a_n\}$  收敛.

**解** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , 则由  $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = a_1 \cdot \frac{b_n}{b_1}$  可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$ , 由原式有  $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$ , 因此  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  单调减, 且  $\frac{a_n}{b_n} > 0$ , 因此  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = bc$ .

**习题 1.2.22** 利用极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1};$$

$$(2) a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1};$$

$$(3) a_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n;$$

$$(4) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}.$$

简要说明: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , 故  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  的任意子列  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$  也收敛于  $e$ . 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为  $\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$  的形式, 从而求出极限.

对于类似于  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$  的形式, 可以考虑先通分再变形去掉指数的负号即可处理.

在此过程中下列命题也相同有用:

**命题** 设数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a, a_n > 0, a > 0$ .  $\{b_n\}$  收敛于  $b$ . 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$ .

请注意, 这条结论对于  $1^\infty$  型是不能直接使用的, 即若  $a_n \rightarrow 1, b_n \rightarrow \infty$ , 则不能直接说  $a_n^{b_n} \rightarrow 1^\infty = 1$ . 但是对于  $a_n \rightarrow a > 1, b_n \rightarrow \infty$ , 则可以直接说  $a_n^{b_n} \rightarrow a^{+\infty} = +\infty$ ; 对于  $a_n \rightarrow a < 1, b_n \rightarrow +\infty$ , 则可以直接说  $a_n^{b_n} \rightarrow a^{+\infty} = 0$ .

**解**

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \Big|_{m=2n+1} = e;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{-n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{(n-3) \cdot \left(-\frac{n+1}{n-3}\right)} = e^{-1};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1) \cdot \left(-\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3 \cdot 2} = e^2.$$

**习题 1.2.23** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , 且  $|b_n| \geq b > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .

**解** 对  $\forall M > 0$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $|a_n| > \frac{M}{b}$ . 又由  $|b_n| \geq b > 0$ , 可知  $|a_n b_n| \geq |a_n| |b| > M$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .

**习题 1.2.24** 确定  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sqrt[n]{n!}$  与  $n \sin \frac{n\pi}{2}$  ( $n \geq 1$ ) 是否有界, 是否趋于无穷大.

**解**  $\sqrt[n]{n!}$  无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$$

已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty$ , 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

因此,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ .

**注** Stolz 定理规范的思路要先说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$  存在, 然后才能说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  存在. 为了方便,

我们也会省去前面的部分, 直接写  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ .

$n \sin \frac{n\pi}{2}$  无界, 但是不趋于无穷大. 当  $n = 4k + 1$  时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = 4k + 1$ , 趋于无穷大; 当  $n = 4k + 3$  时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = -(4k + 3)$ , 趋于负无穷大; 当  $n$  为偶数时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = 0$ .

**习题 1.2.25** 设数列  $\{a_n\}$  由  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$  ( $n \geq 1$ ) 定义, 证明:  $a_n \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**解** 由  $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \frac{1}{a_n}(a_n + a_n + \frac{1}{a_n}) = 2 + \frac{1}{a_n^2} > 2$ , 可知  $a_n^2 > 2(n-1)$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

**习题 1.2.26** 给出  $\frac{0}{0}$  型 Stolz 定理的证明.

**命题** ( $\frac{0}{0}$  型的 Stolz 定理) 设  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  都是无穷小量, 其中  $\{a_n\}$  还是严格单调减少数列, 又

存在 (其中  $l$  为有限或  $\pm\infty$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$

**证明**

(1) 当  $l$  为有限值时, 根据条件对  $\varepsilon > 0$  存在  $N$ , 使当  $n > N$  时成立

$$\left| \frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} - l \right| < \varepsilon.$$

由于对每个  $n$  都有  $a_n > a_{n+1}$ , 这样就有

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_{n+1}) < b_n - b_{n+1} < (l + \varepsilon)(a_n - a_{n+1}).$$

任取  $m > n$ , 并且将上述不等式中的  $n$  换成  $n+1, \dots$ , 直到  $m-1$ , 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_m) < b_n - b_m < (l + \varepsilon)(a_n - a_m),$$

以及

$$\left| \frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l \right| < \varepsilon.$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 并利用条件  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$ , 就知道当  $n > N$  时成立

$$\left| \frac{b_n}{a_n} - l \right| \leq \varepsilon.$$

(2)  $l = +\infty$  时. 根据条件对任意  $M > 0$  存在  $N$ , 使当  $n > N$  时成立

$$\frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} > M.$$

由于对每个  $n$  都有  $a_n > a_{n+1}$ , 这样就有

$$b_n - b_{n+1} > M(a_n - a_{n+1}).$$

任取  $m > n$ , 并且将上述不等式中的  $n$  换成  $n+1, \dots$ , 直到  $m-1$ , 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$b_n - b_m > M(a_n - a_m),$$

以及

$$\frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} > M.$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 并利用条件  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$ , 就知道当  $n > N$  时成立

$$\frac{b_n}{a_n} > M.$$



## 习题 1.3

习题 1.3.1 按定义证明:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, (a > 1);$  (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1;$   
 (3)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+x} = 2;$  (4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/q} = 0$  ( $q$  为正整数).

解

- (1) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $M = \log_a \varepsilon$ , 则当  $x < M$  时,  $|a^x - 0| = a^x < a^M = \varepsilon$ .  
 (2) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $M = \frac{2}{\varepsilon} + 1$ , 则当  $|x| > \max\{M, 1\}$  时,  $\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{x+1} \right| \leq \frac{2}{|x|-1} < \varepsilon$ .  
 (3) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ , 则当  $0 < |x+1| < \delta$  时,  $\left| \frac{x^2-1}{x^2+x} - 2 \right| = \left| \frac{-x^2-2x-1}{x^2+x} \right| = \left| \frac{x+1}{x} \right| < \frac{\delta}{1/2} \leq \varepsilon$ .  
 (4) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon^q$ , 则当  $0 < x < \delta$  时,  $|x^{1/q} - 0| = x^{1/q} < \delta^{1/q} = \varepsilon$ .

习题 1.3.2 求下列极限:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x} \right);$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$  ( $n$  为正整数);  
 (3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$  (4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}.$

(1) 由四则运算的极限可知,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x} \right) = 1 - 5 + 2 + 1 = -1.$$

(2)  $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$ , 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

请注意, 这里  $n$  是常数, 因此可以交换这  $n$  个极限与求和的顺序.

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(3 + \frac{6}{x}\right)^{70} \left(8 - \frac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5 - \frac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{\left(3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x}\right)^{70} \left(8 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}}$$

事实上,  $\frac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}} = \left(\frac{3^7 \cdot 2^6}{5^9}\right)^{10} = 0.000000000003572622918985825913651456872761246392142557535369616400676018940233797678923776.$

习题 1.3.3 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

(1) 用 Cauchy 收敛原理. 对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 任取  $M > 0$ , 总存在  $k = \lceil M/\pi \rceil$ , 使得  $x_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi > M$ ,  $x_2 = (k+1)\pi > M$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ), 使得  $|\sin x_1 - \sin x_2| = 1 > \varepsilon$ . 因此极限不存在.

(2) 考虑两个单边极限,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

而极限存在的充要条件是两个单边极限存在且相等, 因此极限不存在.

习题 1.3.4 设函数  $f(x)$  在正无穷大处的极限为  $l$ , 则对于任意趋于正无穷大的数列  $\{a_n\}$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ . 特别地  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$ .

(无穷版本的 Heine 定理) 解 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 由  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , 存在  $M > 0$ , 使得当  $x > M$  时,  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . 又由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $a_n > M$ . 因此当  $n > N$  时,  $|f(a_n) - l| < \varepsilon$ . 由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ . 特别地, 取  $a_n = n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$ .

习题 1.3.5 讨论下列函数在  $x = 0$  处的极限.

$$(1) f(x) = [x]; \quad (2) f(x) = \operatorname{sgn} x;$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1 + x^2, & x < 0. \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x > 0; \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$$

解 注 教材中的符号  $[x]$  表示  $x$  的整数部分, 即不大于  $x$  的最大整数. 本题中, 我们沿用此符号. 其他地方, 我们使用  $\lfloor x \rfloor$  表示对  $x$  向下取整, 使用  $\lceil x \rceil$  表示对  $x$  向上取整.

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$ . 因此极限不存在.
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$ . 左右极限均存在, 但不相等, 因此极限不存在.
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^2) = 1$ . 因此极限存在, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .
- (4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$  不存在, 因此右极限不存在. 左极限  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ . 函数在  $x = 0$  处的极限不存在.

注  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$  的极限过程等同于考虑  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ , 而该极限不存在 (与习题 1.3.3(1) 同理).

习题 1.3.6 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ .

解

- (1) 当  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sin \frac{x}{2^m} \neq 0$  时, 二倍角公式变形可得  $\cos y = \frac{\sin 2y}{2 \sin y}$ , 当  $\sin y \neq 0$ , 反复利用可知

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2^2}} \cdots \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

(2) 若存在  $m_0 \geq 1$ ,  $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$ , 有  $\frac{x}{2^{m_0}} = k\pi, x = 2^{m_0}k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . 自然的推论是  $\forall m \leq m_0$ , 有  $\sin \frac{x}{2^m} = \sin(2^{m_0-m}k\pi) = 0$ .

此时根据是否存在最大的  $m_0$ , 使得  $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$  可以分成两种情况:

(a)  $x = 0$ , 则  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , 有  $\cos \frac{x}{2^m} = 1$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = 1$ ;

(b)  $x \neq 0 \Leftrightarrow \exists m_0$ , s.t.  $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0, \sin \frac{x}{2^{m_0+1}} \neq 0$ , 也就是存在最大的  $m_0$ .

因此可以得到  $x = 2^{m_0}k\pi, k = 2l + 1, l \in \mathbb{Z}$  (如果  $k$  是偶数, 那么与  $\sin \frac{x}{2^{m_0+1}} = \sin \frac{k\pi}{2} \neq 0$  矛盾).

此时  $\cos \frac{x}{2^{m_0+1}} = \cos \frac{k\pi}{2} = \cos \left( l + \frac{1}{2} \right) \pi = 0$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = 0$ .

不过又由于  $\sin x = 0$  同样成立, 并且  $x \neq 0$ , 因此可以把结果合并进  $\frac{\sin x}{x}$ .

综上所述,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

**习题 1.3.7** 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2} \right) = \frac{\alpha}{2}$ .

**解** 我们先证明如下事实:

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, & \sin \frac{\theta}{2} \neq 0; \\ 0, & \sin \frac{\theta}{2} = 0. \end{cases}$$

我们利用积化和差

$$\sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta = \frac{1}{2} \left( \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} \left( \sum_{k=1}^n \sin k\theta \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} + \cdots + \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \sin \frac{n+1}{2} \theta \sin \frac{n}{2} \theta. \end{aligned}$$

因此, 当  $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$  自然有

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

另一种情况是显然的, 每一项都为 0.

回到本题, 首先, 如果  $\alpha \neq 0$ , 那么这意味着存在充分大的  $N$  使得  $n > N, 0 < \left| \frac{\alpha}{n^2} \right| < \pi$ , 此时,  $\sin \frac{\alpha}{2n^2} \neq 0$ . 因此  $n > N$  时,

$$\sum_{k=1}^n \sin k \frac{\alpha}{n^2} = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \sin \frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin \frac{\alpha}{2n^2}}$$

考虑  $\sin x \sim x, (x \rightarrow 0)$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin k \frac{\alpha}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \sin \frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin \frac{\alpha}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \cdot \frac{n\alpha}{2n^2}}{\frac{\alpha}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2}.$$

如果  $\alpha = 0$ , 那么每一项都为 0, 极限自然为  $0 = \frac{\alpha}{2}$ .

综上所述,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2} \right) = \frac{\alpha}{2}.$$

**习题 1.3.8** 证明: 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确. 叙述并证明, 当  $x \rightarrow +\infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  时类似的结论. (应用本题结论, 可将极限过程为  $x \rightarrow \infty$  的问题化为  $x \rightarrow 0$  处理, 或者反过来. 例如, 我们有  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ .)

解 我们先给出这条命题的完整表述:

**命题** (1) 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确;

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确;

(3) 若  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确;

**证明:**

(1) 由 Heine 定理,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l. \Rightarrow \forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ .  
反之, 若  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 由 Heine 定理,  $\forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l. \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ .

(2) 由 Heine 定理,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l. \Rightarrow \forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ .

反之, 若  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 由 Heine 定理,  $\forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ .  
 $\Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . 由 Heine 定理可知  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

(3) 由 Heine 定理,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l. \Rightarrow \forall \{y_n\}$ , 若  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^-$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = -\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ .  
 反之, 若  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 由 Heine 定理,  $\forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^-$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ .  
 $\Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^-$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . 由 Heine 定理可知  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ .

习题 1.3.9 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}.$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

(2) 由和差化积,

$$\cos x - \cos 3x = 2 \sin 2x \sin x,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$$

(3) 当  $x > \frac{7}{2}$  时, 有  $0 < \frac{x+1}{2x-1} < \frac{3}{4}$  恒成立, 因此

$$0 \leq \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x \leq \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

又由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$ , 由夹逼定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x = 0.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{2}{x^2-1} x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2-1} x^2} = e^2$$

习题 1.3.10 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1).$$

解

(1)  $\arctan x$  在  $x \rightarrow +\infty$  时有界, 而  $x \rightarrow +\infty$  时无界, 因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0.$$

具体而言,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

(2) 由夹逼定理,

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2,$$

且  $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

(4) 证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1) = +\infty.$$

由  $2x^2 - x + 1 = x^2 + (x - 1/2)^2 + 3/4 > x^2$ , 因此对  $\forall M > 0$ , 取  $N = \sqrt{M}$ , 则当  $x > N$  时,  $2x^2 - x + 1 > x^2 > N^2 = M$ . 由此可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1) = +\infty.$$

习题 1.3.11 按定义证明.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, (a > 1);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, (a > 1);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty.$$

解

(1) 对  $\forall M > 0$ , 取  $N = a^M$ , 则当  $x > N$  时,  $\log_a x > \log_a N = M$ .

(2) 对  $\forall M < 0$ , 取  $\delta = a^M$ , 则当  $0 < x < \delta$  时,  $\log_a x < \log_a \delta = M$ .

(3) 对  $\forall M > 0$ , 取  $\delta = \frac{\pi}{2} - \arctan M$ , 则当  $\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\tan x > \tan(\frac{\pi}{2} - \delta) = M$ .

(4) 对  $\forall M > 0$ , 取  $\delta = \frac{1}{\ln M}$ , 则当  $0 < x < \delta$  时,  $e^{1/x} > e^{1/\delta} = M$ .

**习题 1.3.12** 证明: 函数  $y = x \sin x$  在  $(0, +\infty)$  内无界, 但当  $x \rightarrow +\infty$  时, 这个函数并不是无穷大量.

**解**  $\forall M > 0$ , 存在  $x_0 = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k-1 > M$ , 因此  $y(x_0) = x_0 \sin x_0 = x_0 > M$ . 由此可知  $y = x \sin x$  在  $(0, +\infty)$  内无界.

$\forall X > 0$ , 总存在  $x_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k\pi > X$ , 使得  $y(x_1) = x_1 \sin x_1 = 0$ . 因此当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y = x \sin x$  并不是无穷大量.

**习题 1.3.13** 函数  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1)$  内是否有界? 又当  $x \rightarrow 0^+$  时, 这个函数是否为无穷大量?

**解** 考虑  $0^+$  处的  $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  与考虑  $+\infty$  处的  $x \cos x$  是等价的. 以与 **习题 1.3.12** 类似的方法可知,  $y = x \cos x$  在  $(0, +\infty)$  内无界, 但当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y = x \cos x$  并不是无穷大量. 因此,  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  内无界, 但当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  并不是无穷大量.

**习题 1.3.14** 本题所涉及的函数极限有着鲜明的几何意义.

记函数  $y = f(x)$  所表示的曲线为  $C$ . 若动点沿曲线无限远离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线  $C$  的一条渐近线.

(i) 垂直渐近线 易知 (垂直于  $x$  轴的) 直线  $x = x_0$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty.$$

(ii) 水平渐近线 易知 (平行于  $x$  轴的) 直线  $y = b$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

(iii) 斜渐近线 请读者证明, 方程为  $y = ax + b (a \neq 0)$  的直线  $L$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax);$$

或者

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax).$$

这里自然要假定所说的极限都存在. (提示: 以  $x \rightarrow +\infty$  为例, 设曲线  $C$  及直线  $L$  上的横坐标为  $x$  的点分别为  $M, N$ . 则  $M$  至  $L$  的距离, 是  $|MN|$  的一个常数倍. 因此, 直线  $L$  为曲线  $C$  的渐近线, 等价于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ , 由此易得所说结果.)

求下列曲线的渐近方程.

$$(1) y = x \ln \left( e + \frac{1}{x} \right);$$

$$(2) y = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1}.$$

**解** 先证明, 仅证明  $+\infty$ , 另一种同理. 正如提示所说, 由于距离  $d = \left| \frac{f(x) - (ax + b)}{\sqrt{a^2 + 1}} \right|$ , 因此  $l$  是

渐近线, 等价于  $x \rightarrow +\infty$  时  $d$  趋于 0, 等价于  $f(x) - (ax + b)$  趋于 0.

然后问题转化为了证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Leftrightarrow a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

充分性: 由  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$  可知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

必要性: 由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$  可知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

$$(1) \quad (a) \text{ 垂直渐近线, } x = -\frac{1}{e}: \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{e})^-} = -\frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = +\infty;$$

$$(b) \text{ 斜渐近线, } y = x + \frac{1}{e}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e + \frac{1}{x}) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(e + \frac{1}{x}) - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{1}{ex}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{ex})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/ex}{1/x} = \frac{1}{e} \text{ (}\pm\infty\text{ 两侧是同一条渐近线);}$$

$$(2) \quad (a) \text{ 垂直渐近线, } x = 1: \lim_{x \rightarrow 1} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1} = \infty;$$

$$(b) \text{ 斜渐近线, } y = 3x + 1: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 3, \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x - 1} = 1;$$

**习题 1.3.15** 证明: 在同一极限过程中等价的无穷小量有下列性质:

(1)  $\alpha(x) \sim \alpha(x)$  (自反性);

(2) 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\beta(x) \sim \alpha(x)$  (对称性);

(3) 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ,  $\beta(x) \sim \gamma(x)$ , 则  $\alpha(x) \sim \gamma(x)$  (传递性).

(注意, (1) 中自然需假定  $\alpha(x)$  不取零值; 而在 (2)、(3) 中, 条件蕴含着, 所说的无穷小量在极限过程中均不取零值.)

**解** 解释一下, 这里说的是 (1) 需要没有  $\alpha(x) \equiv 0$  这种情况. (2)(3) 因为有“若 xxx”的假设自然排除了这种情况.

$$(1) \text{ 显然, } \lim \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \text{ 因此 } \alpha(x) \sim \alpha(x).$$

$$(2) \text{ 由 } \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ 可知, } \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \text{ 因此 } \lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1, \text{ 即 } \beta(x) \sim \alpha(x).$$

$$(3) \text{ 由 } \alpha(x) \sim \beta(x), \beta(x) \sim \gamma(x) \text{ 可知, } \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \lim \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1, \text{ 因此 } \lim \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1, \text{ 即 } \alpha(x) \sim \gamma(x).$$



习题 1.3.16 当  $x \rightarrow 0$  时, 比较下列无穷小的阶:

(1)  $\tan x - \sin x$  与  $x^3$ ;

(2)  $x^3 + x^2$  与  $\sin^2 x$ ;

(3)  $1 - \cos x$  与  $x^2$ .

解

(1)

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x \left( \frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x}.$$

由  $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \cos x \sim 1$ , 可知

$$\tan x - \sin x \sim x \cdot \frac{x^2/2}{1} = \frac{x^3}{2}.$$

因此,

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

(2)

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \sim x^2 (x \rightarrow 0).$$

同时,

$$x^3 + x^2 = (x+1)x^2 \sim x^2 (x \rightarrow 0).$$

可得

$$x^3 + x^2 \sim \sin^2 x$$

(3)

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \cdot \left( \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2} (x \rightarrow 0).$$

习题 1.3.17 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 试比较下列无穷大量的阶:

(1)  $n$  次多项式  $P_n(x)$  与  $m$  次多项式  $P_m(x)$  ( $m, n$  均为正整数);

(2)  $x^\alpha$  与  $x^\beta$  ( $\alpha, \beta > 0$ );

(3)  $a^x$  与  $b^x$  ( $a, b > 1$ ).

解

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^m} \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots}$$

$$= \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ +\infty, & n > m. \end{cases} \text{即得到} \begin{cases} P_n(x) \sim P_m(x), & n = m; \\ P_m(x) \text{更高阶}, & n < m; \\ P_n(x) \text{更高阶}, & n > m. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 利用 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha < \beta; \\ +\infty, & \alpha > \beta. \end{cases} \text{可得} \begin{cases} x^\alpha \sim x^\beta, & \alpha = \beta; \\ x^\beta \text{更高阶}, & \alpha < \beta; \\ x^\alpha \text{更高阶}, & \alpha > \beta. \end{cases}$$

$$(3) \text{ 利用 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \begin{cases} 1, & a = b; \\ 0, & a < b; \\ +\infty, & a > b. \end{cases} \text{可得} \begin{cases} a^x \sim b^x, & a = b; \\ b^x \text{更高阶}, & a < b; \\ a^x \text{更高阶}, & a > b. \end{cases}$$

习题 1.3.18 试用等价无穷小量代换的方法计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m, n \text{ 均为正整数});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\arctan x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x}.$$

解

(1) 由  $\sin x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

(2) 由  $\tan x \sim x$ , 可知  $a \neq 0$  时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x} = a.$$

很显然该结果对  $a = 0$  也成立.

(3) 由  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ,  $\arctan x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \sin x}{x} = \frac{1}{n}.$$

(4)

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x})(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}.$$

由  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ,  $\sin x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2 (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(5) 由  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ,  $\sin x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

(6) 由  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

## 第1章综合习题

习题 1.C.1 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \text{ (提示: } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{);}$$

$$(2) a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1};$$

$$(3) \text{ 设 } a_1 > 1, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, n = 1, 2, \cdots;$$

$$(4) \text{ 设 } a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n = 1, 2, \cdots.$$

解

(1) 由

$$(2n)^2 = 4n^2 \geq 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1)$$

可得

$$\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}.$$

因此

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0$ , 故由夹逼定理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;

(2) 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}$ , 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a_n})^n = 0$ ;

(3) 由  $a_1 > 1$ , 以及若  $a_n > 1$  时,  $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} > 1$ , 归纳的可知  $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^+$ . 所以数列有下界. 再用归纳法: 当  $n = 1$  时:

$$a_2 - a_1 = 2 - \left( \frac{1}{a_1} + a_1 \right) \leq 2 - 2 = 0,$$

推出  $a_2 \leq a_1$ . 假设对  $n$  有  $a_n \leq a_{n-1}$ , 那么当  $n+1$  时

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} \leq 0.$$

所以  $\{a_n\}$  是单调减有下界数列, 因此收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 1$ . 在

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

两边取极限得

$$a = 2 - \frac{1}{a} \implies a^2 - 2a + 1 = 0$$

解得  $a = \pm 1$ . 但  $a = -1$  不合题意, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

(4)  $a_{n+2} = \frac{1}{1+a_{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}} = \frac{1+a_n}{2+a_n}$ . 假如对任何  $n$ , 有  $a_{2n} \geq a_{2n-2}$ ;  $a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$ , 那么对  $n+1$ , 有

$$a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{1}{1+a_{2n+1}} - \frac{1}{1+a_{2n-1}} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n+1}}{1+a_{2n+1}a_{2n-1}} \geq 0$$

$$a_{2n+3} - a_{2n+1} = \frac{1}{1+a_{2n+2}} - \frac{1}{1+a_{2n}} = \frac{a_{2n} - a_{2n+2}}{1+a_{2n+2}a_{2n}} \leq 0$$

推出数列  $\{a_n\}$  的子列  $\{a_{2n}\}$  单调增有上界,  $\{a_{2n-1}\}$  单调减有下界. 因此分别收敛. 对

$$a_{2n+2} = \frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}},$$

两边取极限得

$$a = \frac{1+a}{2+a} \implies a^2 + a - 1 = 0$$

解得  $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . 同理, 对

$$a_{2n+3} = \frac{1+a_{2n+1}}{2+a_{2n+1}},$$

两边取极限得

$$b = \frac{1+b}{2+b} \implies b^2 + b - 1 = 0$$

解得  $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

**习题 1.C.2** 设  $\{a_n\}$  为单调递增的数列, 并且收敛于  $a$ , 证明对一切  $n$  有  $a_n < a$ . (对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

**解** 反证法. 假设存在某个  $n_0$ , 使得  $a_{n_0} > a$ . 由数列单调递增的性质, 对一切  $n > n_0$  有  $a_n \geq a_{n_0} > a$ , 于是存在  $\varepsilon = \frac{a_{n_0} - a}{2} > 0$ , 使得  $\forall N$ , 存在  $n = \max\{n_0, N\} + 1 > N$ , 使得

$$|a_n - a| = a_n - a \geq a_{n_0} - a = 2\varepsilon > \varepsilon,$$

这与数列收敛的定义矛盾.

**习题 1.C.3** 证明下面的数列收敛:

$$(1) a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2};$$

$$(2) a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

**解**

(1) 由数列定义可知  $\{a_n\}$  单调递增. 又因为

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

所以  $\{a_n\}$  有上界. 因此  $\{a_n\}$  收敛;

(2) 由数列定义可知  $\{a_n\}$  单调递增. 又因为

$$a_n = e^{\sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{1}{2^k})} \leq e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = e^1.$$

所以  $\{a_n\}$  有上界. 又由数列定义可知  $\{a_n\}$  单调递增. 因此  $\{a_n\}$  收敛.

**习题 1.C.4** 试构造一个发散的数列  $\{a_n\}$ , 满足条件: 对任意正数  $\varepsilon$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时, 有  $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ .

**解** 取  $a_n = \sqrt{n}$ . 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N > \frac{1}{4\varepsilon^2}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

但数列  $\{a_n\}$  显然发散.

**习题 1.C.5** 若数列  $\{a_n\}$  满足: 存在常数  $M$ , 使得对一切  $n$  有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq M.$$

证明:

- (1) 数列  $\{A_n\}$  收敛;
- (2) 数列  $\{a_n\}$  也收敛.

**解**

- (1) 由数列定义可知  $\{A_n\}$  单调递增. 又因为对一切  $n$  有  $A_n \leq M$ , 所以  $\{A_n\}$  有上界. 因此  $\{A_n\}$  收敛;
- (2) 用 Cauchy 收敛准则证明. 由 (1) 知  $\{A_n\}$  收敛, 因此对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N, \forall n > N+1, p > 0$ , 有

$$|A_{n+p} - A_{n-1}| = |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

由三角不等式可知

$$|a_{n+p} - a_n| \leq |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

**习题 1.C.6** 设  $\{a_n\}$  是正严格递增数列. 求证: 若  $a_{n+1} - a_n$  有界, 则对任意  $\alpha \in (0, 1)$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ . 并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列  $\{a_n\}$  使得对任意  $\alpha \in (0, 1)$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ , 但是  $a_{n+1} - a_n$  无界. (提示: 考虑  $a_n = n \ln n$ .)

**解**

- (1) 若  $\{a_n\}$  有界, 此时由于其严格单调, 故有极限, 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ , 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = l^\alpha - l^\alpha = 0$ .
- (2) 若  $\{a_n\}$  无界, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 设  $|a_{n+1} - a_n| \leq M$ .

$$0 \leq a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha \left( \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^\alpha - 1 \right) < a_n^\alpha \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{1-\alpha}} \leq \frac{M}{a_n^{1-\alpha}}.$$

同时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M a_n^{\alpha-1} = 0.$$

因此由夹逼定理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ .

(3) 反之不对, 取  $a_n = n \ln n$ , 则

$$\begin{aligned} a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha &= (n+1)^\alpha \ln^\alpha(n+1) - n^\alpha \ln^\alpha n \\ &< ((n+1)^\alpha - n^\alpha) \ln^\alpha n \\ &= n^\alpha \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) \ln^\alpha n \\ &< n^\alpha \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right) \ln^\alpha n \\ &= n^{\alpha-1} \ln^\alpha n = \frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}} = 0,$$

因此由夹逼定理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ . 但

$$a_{n+1} - a_n = (n+1) \ln(n+1) - n \ln n = \ln(n+1) + n \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) > \ln(n+1),$$

显然无界.

**习题 1.C.7** 设数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = a$ .

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a.$$

**习题 1.C.8** 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a_n > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$ .

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{1}} = e^{\ln a} = a.$$

**习题 1.C.9** 证明: 若  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  也存在, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

解 设  $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ , ( $n > 1$ );  $b_1 = a_1$ , 则  $a_n = b_1 b_2 \cdots b_n$ . 由综合习题 1.C.8 可知结果. 直接 Stolz 也

可以得到结果.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}} \\ &= e^{\ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.\end{aligned}$$

**习题 1.C.10** 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

解

(1) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

(2) 可以用综合习题 1.C.9 来做, 记  $a_n = \frac{n^n}{n!}$  由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e.$$

**习题 1.C.11** 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 求证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}$ .

解 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{2}.$$

**习题 1.C.12** 设  $\{a_n\}$  且  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ , 又设  $\{b_n\}$  是正数列,  $c_n = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$ . 求证:

(1)  $\{c_n\}$  收敛;

(2) 若  $(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \rightarrow +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

解

(1) 记  $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 任取  $\varepsilon > 0$ , 存在  $K$ , 当  $k > K$  时,  $|a_k - a| < \varepsilon$ .

当  $n > K$ , 有

$$c_n - a = \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - a)b_k}{B_n} = \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n} + \frac{\sum_{k=K+1}^n (a_k - a)b_k}{B_n}.$$

其中

$$\left| \frac{\sum_{k=K+1}^n (a_k - a)b_k}{B_n} \right| \leq \frac{\sum_{k=K+1}^n |a_k - a|b_k}{B_n} < \varepsilon \frac{\sum_{k=K+1}^n b_k}{B_n} < \varepsilon.$$

因此

$$\left| c_n - \left( a + \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n} \right) \right| < \varepsilon.$$



而对于

$$q_n := \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n},$$

$C := \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$  是仅与  $K$  有关, 与  $n$  无关的常数,  $B_n$  单调增, 因此  $q_n$  单调有界 ( $C > 0$  时  $q_n$  单调减且  $q_n > 0$ ,  $C < 0$  时  $q_n$  单调增且  $q_n < 0$ ), 故  $q_n$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$ , 再取  $N$ , 使得当  $n, m > N$  时,  $|q_m - q_n| < \varepsilon$ , 则当  $n, m > \max\{N, K\}$  时,

$$|c_m - c_n| \leq |c_n - (a + q_n)| + |c_m - (a + q_m)| + |q_m - q_n| < 3\varepsilon.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知  $c_n$  收敛.

(2) 下给出两种方法,

(a) 由 (1) 中的过程,  $q_n = \frac{C}{B_n}$ , 由于  $B_n \rightarrow +\infty$ ,  $C$  为常数, 因此  $q_n \rightarrow 0$ , 因此存在  $N$ , 使得当  $n > N$  时,  $|q_n| < \varepsilon$ , 则当  $n > \max\{N, K\}$  时,

$$|c_n - a| \leq |c_n - (a + q_n)| + |q_n| < \varepsilon + |q_n| < 2\varepsilon.$$

(b) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

上述解答中给出了符合题目原意的证明, 即先证明  $c_n$  收敛, 然后在  $B_n$  无界时, 再证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ . 但对于这道题而言, 还可以分类  $B_n$  有界和无界来讨论, 即先做 (2), 然后对  $B_n$  有界时, 用 Cauchy 收敛准则证明  $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k b_k \right\}$  收敛, 即两种分类下以截然不同的方式来证明  $c_n$  收敛.

注  $a_n := \cdots$  中  $:=$  表示定义. 如  $a_n := \frac{1}{n}$  表示我们新定义了一个数列  $a_n$ , 其通项公式为  $a_n = \frac{1}{n}$ .

在上文中 “ $C := \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$  是仅与  $K$  有关, 与  $n$  无关的常数.” 表示: “记  $C = \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$ ,

则  $C$  是仅与  $K$  有关, 与  $n$  无关的常数.” 有的地方会写为  $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \cdots$ .

习题 1.C.13 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$

解 实际上题目中的无穷只能是  $+\infty$ .

$p > 0$  时,  $x^p \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^{x^p \cdot \frac{1}{x^{p-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}}} = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}$$

$p \leq 0$  时,  $x^p \rightarrow 0$ , 则考虑  $x > 1$  时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty.$$

**习题 1.C.14** 设  $f(x)$  为周期函数, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 证明  $f(x)$  恒为零.

**解** 设  $f(x)$  的正周期为  $T > 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 当  $|x| \geq N$  时  $|f(x)| < \varepsilon$ .

因此对于  $n = \left\lceil \frac{N}{T} \right\rceil$ , 有  $nT \geq N$ , 故对于任意  $x \in [nT, (n+1)T)$ , 有  $f(x) < \varepsilon$ .

利用周期性可以得到  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| < \varepsilon$ . 由于  $\varepsilon$  是任意的正数, 所以  $f(x)$  恒为零.

**习题 1.C.15** 证明

- (1) 函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时有极限  $l$  的充分必要条件是: 对于任意一个以  $x_0$  为极限的单调递增数列  $\{a_n\}$  ( $a_n \neq x_0$ ), 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ ;
- (2) 函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^+$  时有极限  $l$  的充分必要条件是: 对于任意一个以  $x_0$  为极限的单调递减数列  $\{a_n\}$  ( $a_n \neq x_0$ ), 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ .

**解**

- (1) (a) 必要性: 考虑任意数列  $\{a_n\}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$  且  $\{a_n\}$  单调递增, .

由于  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ , 因此,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $x_0 - \delta < x < x_0$  时, 有  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

同时对于  $\delta, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - x_0| < \delta$ , 即  $x_0 - \delta < a_n < x_0$ .

因此我们有  $m > N$  时  $|f(a_n) - l| < \varepsilon$ . 即得到数列  $\{f(a_n)\}$  收敛到  $l$ .

- (b) 充分性: 反证, 若  $x \rightarrow x_0^-$  时  $f(x)$  的极限为  $l$  不成立, 即  $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 - \delta < x < x_0$ , 使得  $|f(x) - l| \geq \varepsilon$ .

因此我们依次构造  $\delta_1 = 1, \delta_n = \min\{\frac{1}{n}, x_0 - a_{n-1}\}, (n > 2)$ , 则  $\exists a_n, x_0 - \delta_n < a_n < x_0$

, 使得  $|f(a_n) - l| \geq \varepsilon$ . 即有  $a_n > a_{n-1}$ , 且  $|x_0 - a_n| < \frac{1}{n}$ . 这意味着  $\{a_n\}$  单调递增,

且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ .

由于  $|f(a_n) - l| \geq \varepsilon$ , 所以  $\{f(a_n)\}$  不收敛到  $l$ , 矛盾, 故充分性成立.

- (2) 证明同理. 具体而言:

设  $g(x) = f(-x)$ , 则  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时有极限  $l \Leftrightarrow g(x)$  在  $x \rightarrow -x_0^+$  时有极限  $l$ . 由

(1) 可知, 这等价于对于任意一个以  $-x_0$  为极限的单调递增数列  $\{b_n\}$  ( $b_n \neq -x_0$ ), 都有

$\lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n) = l$ . 设  $a_n = -b_n$ , 则  $\{a_n\}$  是以  $x_0$  为极限的单调递减数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ .

因此 (2) 得证.

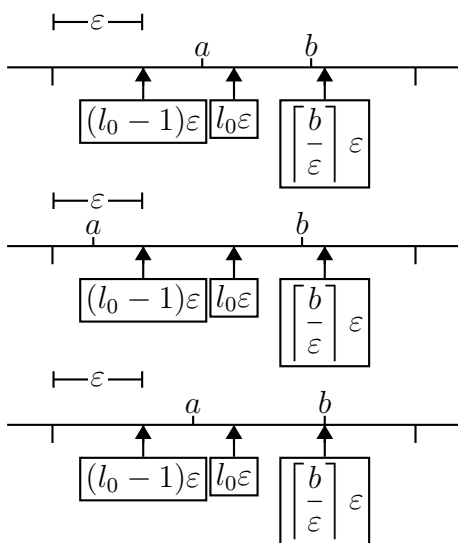
**习题 1.C.16** 设  $\xi$  是一个无理数,  $a, b$  是实数, 且  $a < b$ . 求证: 存在整数  $m, n$  使得  $m + n\xi \in (a, b)$ , 即, 集合

$$S = \{m + n\xi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

在  $\mathbb{R}$  稠密.

**解** 稠密的定义: 设  $S \subset \mathbb{R}$ , 若对任意  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , 都有  $S \cap (a, b) \neq \emptyset$ , 则称  $S$  在  $\mathbb{R}$  中稠密.

想法是这样的, 我们为了找到某个  $m + n\xi$  落在  $(a, b)$  中, 于是用  $\xi$  构造一个充分小的实数  $\varepsilon = m_0 + n_0\xi \in (0, b - a)$ . 因为这个  $\varepsilon$  够小, 所以能证明存在某个  $l_0 \in \mathbb{Z}$ , 使得  $l_0\varepsilon \in (a, b)$ , 直观理解如图 1.1 所示.



**图 1.1:**  $a, b$  之间的区间长度大于  $\varepsilon$ , 因此存在某个  $l_0 \in \mathbb{Z}$ , 使得  $l_0\varepsilon \in (a, b)$ . 这里的思路和习题 1.1.2 中证明两个无理数之间存在有理数的思路是类似的.

随后我们取  $m = l_0 m_0, n = l_0 n_0$  即有  $m + n\xi = l_0\varepsilon \in (a, b)$ .

**构造  $\varepsilon$**  实际上, 对于  $b - a > 0$ , 总存在  $k \in \mathbb{N}^*$ , 使得  $\frac{1}{k} < b - a$ . 因此我们考虑构造一个满足  $\varepsilon < \frac{1}{k}, \varepsilon \in S$  即可.

对于  $l = 1, 2, \dots, k + 1$ , 我们考虑

$$n_l = [l\xi]$$

$$x_l = l\xi - n_l \in S.$$

$x_l$  是  $l\xi$  的小数部分, 容易知道  $x_l \in [0, 1)$ , 并且  $x_l$  之间总是两两不同的, 否则  $i\xi - n_i = j\xi - n_j, i \neq j$ , 这意味着  $\xi = \frac{n_i - n_j}{i - j}$ , 这与  $\xi$  为无理数矛盾.

因此对于

$$[0, 1) = \bigcup_{j=1}^k \left[ \frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right),$$

这  $k$  个区间包括了  $k+1$  个不同实数  $x_l$ . 因此总有一个区间内部存在同时两个实数, 记为  $x_p, x_q \in S, p \neq q$ , 不妨认为  $x_q > x_p$ .

由  $x_l$  的构造  $x_p = p\xi - n_p, x_q = q\xi - n_q$ , 有

$$x_q - x_p = (q - p)\xi - (n_p - n_q) \in S,$$

且由于  $x_p, x_q$  落在同一个区间内, 而区间长度为  $\frac{1}{k}$ , 因此  $0 < x_q - x_p \leq \frac{1}{k} < b - a$ , 所以  $x_q - x_p$  满足我们对  $\varepsilon$  的要求. 我们取

$$\varepsilon = x_q - x_p.$$

**构造  $m, n$**  我们先证明  $\exists l_0 \in \mathbb{Z}, \text{ s. t. } l_0\varepsilon \in (a, b)$ : 我们取  $l_0 = \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1$ , 则

$$l_0\varepsilon = \left( \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon < \left( \frac{b}{\varepsilon} + 1 - 1 \right) \varepsilon = b.$$

同时, 由于  $\varepsilon < b - a$ , 因此

$$l_0\varepsilon = \left( \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon \geq \left( \frac{b}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon = b - \varepsilon > b - (b - a) = a.$$

因此  $l_0\varepsilon \in (a, b)$ .

于是令

$$m = l_0(n_q - n_p), n = l_0(q - p)$$

即有  $m + n\xi = l_0(n_q - n_p) + l_0(q - p)\xi = l_0((q - p)\xi - (n_p - n_q)) = l_0\varepsilon \in (a, b)$ .

## 第2章 连续函数的基本概念

### 习题 2.1

**习题 2.1.1** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  附近有定义, 且  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$ . 问  $f(x)$  是否必在  $x = x_0$  处连续?

**解** 不一定. 例如, 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(0 + h) - f(0 - h)] = \lim_{h \rightarrow 0} (0 - 0) = 0$ , 但  $f(x)$  在  $x = 0$  处不连续.

**习题 2.1.2** 设对任意正数  $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ , 函数  $f(x)$  在  $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$  上连续. 证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续.

**解** 设  $x_0 \in (a, b)$ , 则存在  $\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{b - x_0}{2}, \frac{x_0 - a}{2} \right\} > 0$ , 使得  $a + \varepsilon_0 < x_0 < b - \varepsilon_0$ . 因为  $f(x)$  在  $[a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0]$  上连续, 故  $f(x)$  在  $x_0$  处连续. 因此  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续.

**习题 2.1.3** 设在点  $x = x_0$  处, 函数  $f(x)$  连续, 而  $g(x)$  不连续, 问函数  $f(x) \pm g(x)$  与  $f(x)g(x)$  在点  $x_0$  的连续性如何? 若  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  处都不连续, 回答同样的问题.

**解**

(1)  $f(x) \pm g(x)$  与  $f(x)g(x)$  在点  $x_0$  处均不连续. 反证: 若  $f(x) + g(x)$  在点  $x_0$  处连续, 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$ , 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + g(x_0) - f(x_0) = g(x_0)$ , 矛盾. 同理可证  $f(x) - g(x)$  在点  $x_0$  处不连续.

$f(x)g(x)$  在  $x_0$  处连续性未知, 例如, 设

$$f(x) = x, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

则  $f(x)g(x) \equiv x$ , 在点  $x_0 = 0$  处连续. 又例如, 设

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

则  $f(x)g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$  在点  $x_0 = 0$  处不连续.

(2) 若  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  处都不连续, 则  $f(x) \pm g(x)$  与  $f(x)g(x)$  在点  $x_0$  处可能连续, 也可能

不连续. 例如,

(a)  $f(x) + g(x)$  在点  $x_0$  处连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

则  $f(x) + g(x) \equiv 0$ , 在点  $x_0 = 0$  处连续.

(b)  $f(x) + g(x)$  在点  $x_0$  处不连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则  $f(x) + g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0; \end{cases}$  在点  $x_0 = 0$  处不连续.

(c)  $f(x)g(x)$  在点  $x_0$  处连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则  $f(x)g(x) \equiv 0$ , 在点  $x_0 = 0$  处连续.

(d)  $f(x)g(x)$  在点  $x_0$  处不连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则  $f(x)g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$  在点  $x_0 = 0$  处不连续.

#### 习题 2.1.4

(1) 设函数  $f(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 则函数  $|f(x)|$  在点  $x = x_0$  处也连续.

(2) 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在一个区间  $I$  上连续, 证明: 函数  $M(x) = \max(f(x), g(x))$  及  $m(x) = \min(f(x), g(x))$  在区间  $I$  上均连续.

解

(1) 因为  $f(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 因此  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . 又因为

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

故  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$ , 即  $|f(x)|$  在点  $x = x_0$  处连续.

(2) 由  $M(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$ ,  $m(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$  可知, 只需

证明  $|f(x) - g(x)|$  在区间  $I$  上连续. 因为  $f(x), g(x)$  在区间  $I$  上连续, 故  $f(x) - g(x)$  在区间  $I$  上连续. 由 (1) 可知,  $|f(x) - g(x)|$  在区间  $I$  上连续.

**习题 2.1.5** 证明: 存在这样的函数  $f(x)$ , 处处不连续, 但函数  $|f(x)|$  处处连续. (提示: 适当地修改 Dirichlet 函数可得出一个例子.)

解 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

则  $f(x)$  处处不连续, 但  $|f(x)| \equiv 1$ , 处处连续.

**证明** 若  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 取  $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$ ; 取  $\{b_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(a_n) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(b_n)$ , 矛盾. 因此  $f(x)$  处处不连续.

**习题 2.1.6** 指出下列函数的间断点, 并说明其类型.

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \frac{x+1}{x-2}; & (2) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \\ (3) \quad f(x) &= \lfloor \cos x \rfloor; & (4) \quad f(x) &= \frac{1}{1 + e^{1/x}}; \\ (5) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x+7}, & -\infty < x < -7, \\ x, & -7 \leq x \leq 1, \\ (x-1) \sin \frac{1}{x-1}, & 1 < x < +\infty; \end{cases} \\ (6) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

左右极限不存在, 因此  $x = 2$  是第二类间断点.

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -\frac{\sin x}{x} \right) = -1.$$

左右极限存在但不相等, 因此  $x = 0$  是第一类间断点中的跳跃间断点.

(3) 可知  $f(x) = \begin{cases} 1, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$  在  $x = k\pi$  处,  $\lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = 0 \neq f(k\pi) = 1$ . 左右极限存在且相等,  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 是第一类间断点中的可去间断点.

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 1.$$

左右极限存在但不相等, 因此  $x = 0$  是第一类间断点中的跳跃间断点.

(5) (a) 在  $x = -7$  处

$$\lim_{x \rightarrow -7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{1}{x + 7} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = -7,$$

左极限不存在, 因此  $x = -7$  是第二类间断点.

(b) 在  $x = 1$  处:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \sin \frac{1}{x - 1} = 0, \quad f(1) = 1,$$

左右极限存在但不相等, 因此  $x = 1$  是第一类间断点中的跳跃间断点.

(6) 当  $x \neq 2$  时,  $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$ .  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$ , 但  $f(2) = 4$ , 函数值与极限值相等. 因此函数在  $x = 2$  处连续, 无间断点.

习题 2.1.7 试确定  $a$ , 使得函数  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续.

解 由  $f(0) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^0 = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + 0 = a$  可知, 当  $a = 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ , 即  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续.

习题 2.1.8 证明: 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 在点 0 处右连续, 但不左连续.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-2/x}}{1 + e^{-2/x}} = 1 = f(0)$ , 故  $f(x)$  在点 0 处右连续.

又因为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2/x} - 1}{e^{2/x} + 1} = -1 \neq f(0)$ , 故  $f(x)$  在点 0 处不左连续.

习题 2.1.9 证明: 对每个实数  $x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$  存在. 将该极限值记为  $f(x)$ , 试讨论函数  $f(x)$  的连续性.

解

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = (1+x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(x^2)^n} = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1; \\ \frac{1+x}{2}, & x = \pm 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$



即

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 1; \\ 1, & x = 1; \\ 0, & x > 1 \text{ 或 } x \leq -1. \end{cases}$$

因此,

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$ , 故  $f(x)$  在  $x = -1$  处连续;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \neq f(1)$ , 故  $f(x)$  在  $x = 1$  处不连续; 对于其他点,  $f(x)$  均连续.

综上所述,  $f(x)$  在  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$  上连续, 在  $x = 1$  处不连续.

**习题 2.1.10** 证明: 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 则存在一个正数  $\delta$ , 使得函数  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上有界. (这一结果称为连续函数的局部有界性.)

**解** 因为  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . 取  $\varepsilon = 1$ , 则当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < 1$ , 即  $-1 < f(x) - f(x_0) < 1$ , 故  $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$ . 因此, 当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时, 有  $|f(x)| \leq \max\{|f(x_0) - 1|, |f(x_0) + 1|\}$ , 即  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上有界.

**习题 2.1.11** 证明: 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 且  $f(x_0) \neq 0$ , 则存在一个正数  $\delta$ , 使得函数  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上与  $f(x_0)$  同号. (这一结果称为连续函数的局部保号性) 进一步, 存在某个正数  $\gamma$ , 使得  $f(x)$  在这一区间中满足  $|f(x)| \geq \gamma$ .

**解** 因为  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . 取  $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$ , 则当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2},$$

即

$$-\frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{|f(x_0)|}{2},$$

$$\text{故 } f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

因为  $f(x_0) \neq 0$ , 故当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时, 有

(1)  $f(x_0) > 0$  时

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

(2)  $f(x_0) < 0$  时

$$f(x) < f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} < 0.$$

因此, 当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时, 有  $f(x)$  与  $f(x_0)$  同号. 进一步地, 取  $\gamma = \frac{|f(x_0)|}{2}$ , 则当

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时, 有  $|f(x)| \geq \gamma$ .

**习题 2.1.12** 证明: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$  (从而  $x_0$  为  $g(x)$  的可去间断点),  $f(u)$  在  $u = a$  处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(a).$$

(这一结论对其他五种极限过程也成立.)

**解** 由于  $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = f(a)$ , 故  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ , 当  $|u - a| < \delta_1$  时, 有  $|f(u) - f(a)| < \varepsilon$ .

又因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ , 故对于  $\delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta_2$  时, 有  $|g(x) - a| < \delta_1$ .

因此, 当  $|x - x_0| < \delta_2$  时, 有  $|g(x) - a| < \delta_1$ , 即  $|f(g(x)) - f(a)| < \varepsilon$ . 综上所述,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(a)$ .

**习题 2.1.13** 证明: 若函数  $u(x), v(x)$  在  $x_0$  处连续, 且  $u(x_0) > 0$ , 则函数  $u(x)^{v(x)}$  也在点  $x_0$  处连续.

**解** 利用  $e^x$  在  $\mathbb{R}$  上连续,  $\ln x$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 以及复合函数的极限可交换性, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{v(x) \ln u(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln u(x)} = e^{v(x_0) \ln u(x_0)} = u(x_0)^{v(x_0)}.$$

**习题 2.1.14** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 且对于任意  $x$  有  $f(2x) = f(x)$ . 求证  $f(x)$  是常数.

**解** 即证:  $f(x) \equiv f(0)$ . 对于任意点  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 考虑任意以  $x_0$  为极限的数列,  $\{x_n\}$ , 则由连续性

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n}{2^n} \cdot 2^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n}{2^n}\right) = f(0),$$

且  $f(x_0) = f(0)$ . 由于  $x_0$  的任意性, 故  $f(x) \equiv f(0)$ .

**习题 2.1.15** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 且对于任意  $x, y$  有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . 求证  $f(x) = cx$ , 其中  $c$  是常数.

**解**

(1) 由  $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$  可知,  $f(0) = 0$ .

(2) 对  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f(nx) = f((n-1)x + x) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n \text{ 个}} = nf(x).$$

即对任意自然数  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(nx) = nf(x)$ .

(3)

$$f(-x) + f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

即对任意整数  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f(kx) = kf(x)$ .

(4) 对  $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ ,

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m \cdot \frac{1}{n} \cdot nf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$$

即对任意有理数  $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ,  $f(rx) = rf(x)$ .

(5) 对  $x \in \mathbb{R}$ , 则存在有理数列  $\{r_n\}$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ , 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(1) = xf(1).$$

由于  $f$  在  $x$  处连续, 故

$$f(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = xf(1).$$

取  $c = f(1)$ , 即有  $f(x) = xf(1) = cx$ .

**习题 2.1.16** 当  $x \rightarrow 0$  时, 用  $\sin x \sim x$ ,  $\tan x \sim x$  证明  $\arcsin x \sim x$ ,  $\arctan x \sim x$ ; 用  $\ln(1+x) \sim x$  证明  $(e^x - 1) \sim x$ .

(上述的等价无穷小, 是微积分中非常基本的事实.)

解

(1)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , 即  $f(x)$  在  $x = 0$  连续. 设  $g(x) = \arcsin x$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即  $\arcsin x \sim x$ ;

(2)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , 即  $f(x)$  在  $x = 0$  连续. 设  $g(x) = \arctan x$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \arctan x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即  $\arctan x \sim x$ ;

(3)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , 即  $f(x)$  在  $x = 0$  连续. 设  $g(x) = e^x - 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即  $(e^x - 1) \sim x$ .

**习题 2.1.17** 求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[10]{1+\tan x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{2x \sin x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin(\sin x)}{1 - \cos x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x});$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 - \frac{\sin x}{x}}.$$

解

$$(1) \sqrt{1+x+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}(x+x^2), \sin 2x \sim 2x, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4};$$

$$(2) \sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1;$$

$$(3) \sqrt[10]{1+\tan x} - 1 \sim \frac{1}{10} \tan x \sim \frac{1}{10}x, \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x, 2x \sin x \sim 2x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[10]{1+\tan x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{10}x \cdot \frac{1}{2}x}{2x^2} = \frac{1}{40};$$

$$(4) x \cdot \arcsin(\sin x) \sim x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin(\sin x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2;$$

$$(5) 1 - \cos(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}(1 - \cos x)^2 \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{1}{8}x^4, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^4}{x^4} = \frac{1}{8};$$

$$(6) \text{ 令 } y = \frac{1}{x}, \text{ 则 } y \rightarrow 0^+,$$

$$\text{并且 } x = -\frac{1}{y}, \text{ 即有 } x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = -\frac{1}{y} \left( \sqrt{\frac{1}{y^2} + 100} - \frac{1}{y} \right) = -\frac{\sqrt{1 + 100y^2} - 1}{y^2}$$

$$\text{而 } \sqrt{1 + 100y^2} - 1 \sim \frac{1}{2} \cdot 100y^2 = 50y^2, (y \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{1 + 100y^2} - 1}{y^2} = -\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{50y^2}{y^2} = -50$$

(7)

$$\begin{aligned} \left| \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \right| &= \left| 2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| \\ &= 2 \left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right| \\ &\leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \text{ 可知, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0;$$

(8)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 - \frac{\sin x}{x}} = \sqrt{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}} = \sqrt{2 - 0} = \sqrt{2}.$$

**习题 2.1.18 (旧版教材中的题目)** 函数  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  与  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  分别称为双曲正弦与双曲余弦 (统称为双曲函数), 它们均在定义域  $(-\infty, +\infty)$  上连续. 证明以下各题. (可与三角函数的性质作比较.)

$$(1) \sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x; \quad (2) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$(3) \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x; \quad (4) \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x;$$

$$(5) \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y; \quad (6) \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

解

$$(1) \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x;$$

$$(2) \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1;$$

$$(3) \sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = 2 \sinh x \cosh x;$$

$$(4) \cosh 2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2 + (e^x + e^{-x})^2}{4} = \sinh^2 x + \cosh^2 x;$$

$$(5) \sinh(x \pm y) = \frac{e^{x \pm y} - e^{-(x \pm y)}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} - e^{-x} e^{\mp y}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} - e^{-x} e^{\pm y} + e^{-x} e^{\pm y} - e^{-x} e^{\mp y}}{2} =$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} + e^{\mp y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} - e^{\mp y}}{2}\right) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y;$$

$$(6) \cosh(x \pm y) = \frac{e^{x \pm y} + e^{-(x \pm y)}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} + e^{-x} e^{\mp y}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} + e^{-x} e^{\pm y} - e^{-x} e^{\pm y} + e^{-x} e^{\mp y}}{2} =$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} + e^{\mp y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} - e^{\mp y}}{2}\right) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

## 习题 2.2

**习题 2.2.1** 证明函数  $x \cdot 2^x - 1$  在  $[0, 1]$  内有零点.

**解** 设  $f(x) = x \cdot 2^x - 1$ , 则  $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$ . 又因  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续. 故由零点定理知, 存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = 0$ .

**习题 2.2.2** 证明函数  $x - a \sin x - b$  (其中  $a, b$  为正数) 在  $(0, +\infty)$  上有零点, 且零点不超过  $a + b$ .

**解** 设  $f(x) = x - a \sin x - b$ , 该函数在  $[0, +\infty)$  连续, 同时  $f(0) = -b < 0, f(a + b + 1) = a + b + 1 - a \sin(a + b + 1) - b = a(1 - \sin(a + b + 1)) + 1 \geq 1 > 0$ . 因此由零点定理,  $(0, a + b + 1)$  上有零点, 进而  $(0, +\infty)$  上有零点.

又因对任意  $x > a + b$  有  $f(x) = x - a \sin x - b > a + b - a \sin x - b \geq 0$ , 故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的零点不超过  $a + b$ .

**习题 2.2.3** 证明函数  $x - \sin(x + 1)$  有实零点.

**解** 设  $f(x) = x - \sin(x + 1)$ , 由  $-1 \leq \sin(x + 1) \leq 1$  知, 则  $f(-2) \leq -2 + 1 = -1 < 0, f(2) \geq 2 - 1 = 1 > 0$ . 又因  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上连续, 故由零点定理知, 存在  $x_0 \in (-2, 2)$ , 使得  $f(x_0) = 0$ .

**习题 2.2.4** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且值域就是  $[a, b]$ . 证明  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必有不动点, 即有  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ .

**解** 函数  $f(x)$  的值域为  $[a, b]$ , 故存在  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_1) = a, f(x_2) = b$ . 设  $g(x) = f(x) - x$ , 则  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $g(a) = f(a) - a \geq 0, g(b) = f(b) - x_2 \leq 0$ .

故结合零点定理可简单推知, 要么  $a$  或  $b$  是  $g(x)$  的零点, 要么存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $g(x_0) = 0$ , 总之存在  $x_0 \in [a, b]$ ,  $g(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = x_0$ .

**注** 这里给出一个表述的区分.

(1) 如果严格满足零点定理的情形, 即端点处非零异号, 推出开区间内存在零点, 那么表达为由零点定理可知.

(2) 如果和本题类似, 端点处可能为零, 推出推出闭区间内存在零点, 则简单表达为结合零点定理可简单推知.

**习题 2.2.5** 设函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$ . 试证: 存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) = g(x_0)$ .

**解** 设  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $h(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $h(a) = f(a) - g(a) > 0, h(b) = f(b) - g(b) < 0$ . 故由零点定理知, 存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $h(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = g(x_0)$ .

**习题 2.2.6** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2a]$  上连续, 且  $f(0) = f(2a)$ . 证明: 在区间  $[0, a]$  上存在某个  $x_0$ , 使得  $f(x_0) = f(x_0 + a)$ .

**解** 设  $g(x) = f(x) - f(x + a)$ , 则  $g(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 且  $g(0) = f(0) - f(a), g(a) = f(a) - f(2a) =$

$f(a) - f(0) = -g(0)$ . 因此  $g(0)g(a) = -(g(0))^2 \leq 0$ . 由结合零点定理简单推知, 存在  $x_0 \in [0, a]$ , 使得  $g(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = f(x_0 + a)$ .

**习题 2.2.7** 试证: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为此区间中的任意点, 则在  $[a, b]$  中有一点  $\xi$ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)).$$

更一般地, 若  $q_1 > 0, q_2 > 0, \dots, q_n > 0$ , 且  $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$ , 则在  $[a, b]$  中有一点  $\xi$ , 使得

$$f(\xi) = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n).$$

**解**

(1) 设  $A = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$ . 若  $f(x_i) = f(x_j)$  对所有  $i, j$  成立, 则对任意  $k$ , 取  $\xi = x_k$  总是可以的. 否则取  $i, j$  使得  $f(x_i) = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}, f(x_j) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ . 则  $f(x_i) \leq A \leq f(x_j), f(x_i) < f(x_j)$ . 由介值定理知, 存在  $\xi \in (\min\{x_i, x_j\}, \max\{x_i, x_j\}) \subset [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = A$ .

(2) 设  $A = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n)$ . 若  $f(x_i) = f(x_j)$  对所有  $i, j$  成立, 则对任意  $k$ , 取  $\xi = x_k$  总是可以的. 否则取  $i, j$  使得  $f(x_i) = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}, f(x_j) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ . 则  $f(x_i) \leq A \leq f(x_j), f(x_i) < f(x_j)$ . 由介值定理知, 存在  $\xi \in (\min\{x_i, x_j\}, \max\{x_i, x_j\}) \subset [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = A$ .

**习题 2.2.8** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在. 证明  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有界.

**解** 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ . 则对于  $\varepsilon = 1 > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $x > N$  时, 有  $|f(x) - A| < 1$ , 即  $|f(x)| < |A| + 1$ . 又因函数  $f(x)$  在区间  $[a, N]$  上连续, 故在该闭区间上有界, 即存在  $K > 0$ , 使得对任意  $x \in [a, N]$  有  $|f(x)| \leq K$ . 取  $M = \max\{K, |A| + 1\}$ , 则对任意  $x \in [a, +\infty)$  有  $|f(x)| \leq M$ . 因此, 函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有界.

**习题 2.2.9** 证明函数  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界.

**解** 由习题 1.3.17 知,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4} = 0$ , 利用习题 2.2.8 知, 函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有界. 又因  $f(x)$  是偶函数, 故  $f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上也有界. 因此, 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界.

**习题 2.2.10** 是否有满足下面条件的连续函数? 说明理由.

- (1) 定义域为  $[0, 1]$ , 值域为  $(0, +\infty)$ ;
- (2) 定义域为  $[0, 1]$ , 值域为  $(0, 1)$ ;
- (3) 定义域为  $[0, 1]$ , 值域为  $[0, 1] \cup [2, 4]$ ;
- (4) 定义域为  $(0, 1)$ , 值域为  $(2, +\infty)$ .

**解**

(1) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(2) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(3) 不存在. 这与介值定理矛盾.

(4) 存在. 例如,  $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ .

**习题 2.2.11** 举例说明, 对任意正数  $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ , 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$  上有界, 不能保证  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  上有界. (比较习题 2.1 第 2 题.)

**解** 例如, 设  $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}$ , 则对任意正数  $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ , 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$  上连续, 故有界; 但在开区间  $(a, b)$  上无界.

**习题 2.2.12** 设  $y = f(x)$  在开区间  $I = (a, b)$  上连续并严格单调. 证明  $y = f(x)$  的值域  $f(I)$  也是一个开区间.

**解 注** 不能假设  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在.  $f(I)$  可能有无穷端点, 例如  $f(x) = \tan x$  在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上连续且严格单调, 但值域是  $(-\infty, +\infty)$ .

(1) 不妨假设是严格递增的, 否则类似考虑  $-f(x)$  即可. 先证明  $f(I)$  存在两个不同的点: 取  $x_1, x_2 \in I$ , 且  $x_1 < x_2$ , 由严格单调性知,  $f(x_1) < f(x_2)$ , 故  $f(I)$  中至少有两个不同的点.

**注** 如果去除单调的严格性, 则  $f(I)$  不一定是开区间, 例如  $f(x) = 1$  在  $(0, 1)$  上连续且单调, 但值域不是开区间.

(2)  $\forall y_1, y_2 \in f(I)$ , 且  $y_1 < y_2$ . 则存在  $x_1, x_2 \in I$ , 使得  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ . 因为  $f(x)$  在  $I$  上严格单调, 故  $x_1 < x_2$ . 对任意  $y \in (y_1, y_2)$ , 由介值定理知, 存在  $x \in (x_1, x_2) \subset I$ , 使得  $f(x) = y$ . 因此,  $f(I)$  是区间.

(3) 下面证明  $f(I)$  是开区间.  $\forall y \in f(I)$ , 则存在  $x_0 \in I$ , 使得  $f(x_0) = y$ . 由  $(a, b)$  是开区间知, 存在  $\delta > 0$ , 使得  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ . 设  $\eta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta) - f(x_0)\} > 0$ , 则对任意  $y' \in (y - \eta, y + \eta) \subset (f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta))$ , 由介值定理知, 存在  $x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ , 使得  $f(x') = y'$ . 因此,  $f(I)$  是开区间.

**习题 2.2.13** 设函数  $f(x)$  在有限区间  $(a, b)$  上一致连续. 求证  $f(x)$  在  $a$  点的右极限和在  $b$  点的左极限都存在.

**解**  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续, 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x_1, x_2 \in (a, b)$  且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .

现取  $x_1, x_2 \in (a, a + \delta)$ , 则  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 故  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . 因此, 函数  $f(x)$  在  $(a, a + \delta)$  上满足柯西收敛准则, 故  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  存在. 同理可证  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  也存在.

**习题 2.2.14** 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上一致连续,  $\{a_n\}$  是正收敛数列. 求证  $\{f(a_n)\}$  也收敛. 又问仅假设  $f(x)$  连续时, 结论是否还成立, 为什么?

**解**



(1) 由  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上一致连续, 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . 又因  $\{a_n\}$  是正收敛数列, 故存在  $N \in \mathbf{N}^+$ , 使得当  $n, m > N$  时, 有  $|a_n - a_m| < \delta$ , 因此, 对任意  $n, m > N$  有  $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$ . 由柯西收敛准则知, 数列  $\{f(a_n)\}$  收敛.

(2) 仅假设  $f(x)$  连续时, 结论不成立. 例如, 设  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 且数列  $a_n = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi}$  收敛于 0, 但数列  $f(a_n) = \sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right) = (-1)^n$  不收敛.

**习题 2.2.15** 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续,  $\{a_n\}$  是收敛数列. 求证  $\{f(a_n)\}$  也收敛.

**解** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a \in (-\infty, +\infty)$ . 由  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续知,  $f(x)$  在  $a$  点连续, 即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . 因此, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - a| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

又因数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 故存在  $N \in \mathbf{N}^+$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \delta$ , 因此, 对任意  $n > N$  有  $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$ . 由数列的收敛定义知, 数列  $\{f(a_n)\}$  收敛于  $f(a)$ .

**习题 2.2.16** 给出一个在  $(-\infty, +\infty)$  上连续且有界但不一致连续的函数.

**解** 例如,  $f(x) = \sin x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续且有界, 但不一致连续.

反证法: 若  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续, 则对  $\varepsilon = 1 > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$  且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$ . 但倘若我们取  $x_1 = \sqrt{2n\pi}$ ,  $x_2 = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ , 则当  $n > \left(\frac{2}{\delta}\right)^2$  时, 有  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 但  $|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \sin(2n\pi) - \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right| = 1$ , 矛盾.

## 第2章综合习题

**习题 2.C.1** 证明: 函数  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数}, \\ x, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$  仅在点  $x = 0$  处连续.

**解** 设  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在有理数列  $\{r_n\}$  与无理数列  $\{s_n\}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_0$ . 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_0.$$

当  $x_0 \neq 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = x_0$ , 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在, 因此  $f(x)$  在  $x = x_0$  处不连续.

当  $x_0 = 0$  时, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 则当  $|x - 0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$ . 因此  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ , 即  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续.

**习题 2.C.2** 设  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ , 记  $f(x) = \frac{|x - x_1| + \dots + |x - x_n|}{n}$ , 证明: 存在  $x_0 \in [0, 1]$ , 使得  $f(x_0) = \frac{1}{2}$ .

**解** 设  $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ , 则  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) &= \frac{|0 - x_1| + \dots + |0 - x_n|}{n} + \frac{|1 - x_1| + \dots + |1 - x_n|}{n} \\ &= \frac{(x_1 + (1 - x_1)) + \dots + (x_n + (1 - x_n))}{n} = 1. \end{aligned}$$

因此  $g(0) + g(1) = f(0) + f(1) - 1 = 0$ . 则  $g(0)g(1) = -(g(0))^2 \leq 0$ . 结合零点定理可简单推知, 存在  $x_0 \in [0, 1]$ , 使得  $g(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = \frac{1}{2}$ .

**习题 2.C.3** 证明: 函数  $\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$  (其中  $a_1, a_2, a_3 > 0$ , 且  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ) 在  $(\lambda_1, \lambda_2)$  与  $(\lambda_2, \lambda_3)$  内各有一个零点.

**解** 仅证明  $(\lambda_1, \lambda_2)$  内有一个零点,  $(\lambda_2, \lambda_3)$  内的证明类似.

由  $\frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$  在  $\left[\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right]$  上连续, 因此有界, 即存在  $M_1 > 0$ , 使得对任意  $x \in \left[\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right]$  有  $\left|\frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}\right| \leq M_1$ .

又由  $\lim_{x \rightarrow \lambda_1^+} \frac{a_1}{x - \lambda_1} = +\infty$ , 因此存在  $\delta_1 \in \left(0, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right)$ , 使得对任意  $x \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_1)$  有  $\frac{a_1}{x - \lambda_1} > M_1$ . 因此, 存在  $x_1 \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_1) \subset \left(\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)$ , 使得

$$\frac{a_1}{x_1 - \lambda_1} + \frac{a_2}{x_1 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_1 - \lambda_3} = \frac{a_1}{x_1 - \lambda_1} + \left(\frac{a_2}{x_1 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_1 - \lambda_3}\right) > M_1 - M_1 = 0.$$

由  $\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$  在  $\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right]$  上连续, 因此有界, 即存在  $M_2 > 0$ , 使得对任意  $x \in$

$\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right]$  有  $\left|\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}\right| \leq M_2$ .

又由  $\lim_{x \rightarrow \lambda_2^-} \frac{a_2}{x - \lambda_2} = -\infty$ , 因此存在  $\delta_2 \in \left(0, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right)$ , 使得对任意  $x \in (\lambda_2 - \delta_2, \lambda_2)$  有  $\frac{a_2}{x - \lambda_2} < -M_2$ . 因此, 存在  $x_2 \in (\lambda_2 - \delta_2, \lambda_2) \subset \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right)$ , 使得

$$\frac{a_1}{x_2 - \lambda_1} + \frac{a_2}{x_2 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_2 - \lambda_3} = \left(\frac{a_1}{x_2 - \lambda_1} + \frac{a_3}{x_2 - \lambda_3}\right) + \frac{a_2}{x_2 - \lambda_2} < M_2 - M_2 = 0.$$

综上, 存在  $x_1, x_2 \in (\lambda_1, \lambda_2)$ , 使得对于函数  $f(x) = \frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$  有  $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$ . 由介值定理知, 存在  $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (\lambda_1, \lambda_2)$ , 使得  $f(x_0) = 0$ .

同时由于  $\frac{a_1}{x - \lambda_1}, \frac{a_2}{x - \lambda_2}, \frac{a_3}{x - \lambda_3}$  在  $(\lambda_1, \lambda_2)$  上严格单调递减, 因此  $f(x)$  在  $(\lambda_1, \lambda_2)$  上严格单调递减. 因此, 零点  $x_0$  唯一.

**习题 2.C.4** 设  $f(x)$  是一个多项式, 则必存在一点  $x_0$ , 使得  $|f(x_0)| \leq |f(x)|$  对任意实数  $x$  成立.

**解** 设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , 其中  $a_n \neq 0, n \geq 1$ . 则

$$|f(x)| = |x|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right|.$$

因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n$ , 因此存在  $M > 0$ , 使得当  $|x| > M$  时, 有

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right| > \frac{|a_n|}{2}.$$

由  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{2} |x|^n = +\infty$ , 因此  $\exists X > M$ , 使得当  $|x| > X$  时, 有  $\frac{|a_n|}{2} |x|^n > |f(0)|$ . 而由  $|f(x)|$  在  $[-X, X]$  上连续, 故由最值性知, 存在  $x_0 \in [-X, X]$ , 使得  $|f(x_0)| = \inf\{f(x) : x \in [-X, X]\}$ .

特别的, 对任意  $x \in [-X, X]$  有  $|f(x_0)| \leq |f(0)|$ . 因此对于  $|x| > X$  时, 有  $|f(x)| > \frac{|a_n|}{2} |x|^n \geq |f(x_0)|$ . 综上, 对任意  $x \in \mathbb{R}$  有  $|f(x_0)| \leq |f(x)|$ .

**习题 2.C.5** 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) = f(1)$ . 证明: 对任意正整数  $n$ , 在区间  $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$  中有一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right)$ .

**解** 设  $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ , 则  $g(x)$  在  $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$  上连续, 且

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right),$$

...

$$g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(0).$$

因此  $\frac{1}{n} \left( g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) \right) = 0$ . 则  $g(0), g\left(\frac{1}{n}\right), \dots, g\left(\frac{n-1}{n}\right)$  中至少有一

个非正, 另一个非负. 由介值定理知, 存在  $\xi \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ , 使得  $g(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right)$ .

**习题 2.C.6** 证明: 存在一个实数  $x$ , 满足  $x^5 + \frac{\cos x}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 72$ .

**解** 设  $f(x) = x^5 + \frac{\cos x}{1 + x^2 + \sin^2 x}$ ,

$$f(3) = 3^5 + \frac{\cos 3}{1 + 3^2 + \sin^2 3} \geq 243 \frac{1}{1 + 3^2 - 1} > 72,$$

$$f(-3) = (-3)^5 + \frac{\cos(-3)}{1 + (-3)^2 + \sin^2(-3)} \leq -243 + \frac{1}{1 + (-3)^2 - 1} < -72.$$

由介值定理知, 存在  $x \in [-3, 3]$ , 使得  $f(x) = 72$ .

**习题 2.C.7** 若  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上或者有最大值, 或者有最小值.

**解** 记

$$S = \sup\{f(x) : x \in [a, +\infty)\}, \quad I = \inf\{f(x) : x \in [a, +\infty)\}, \quad L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

(1) 若  $S > L$ , 取  $\varepsilon = \frac{S - L}{2} > 0$ , 则存在  $X > a$ , 使得对任意  $x > X$  有  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , 即

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \text{ 因此, 对任意 } x > X \text{ 有 } f(x) < L + \varepsilon = \frac{S + L}{2} < S. \text{ 因此}$$

$$\sup\{f(x) : x \in [a, X]\} = S,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在  $x_0 \in [a, X]$ , 使得  $f(x_0) = S$ .

(2) 若  $I < L$ , 取  $\varepsilon = \frac{L - I}{2} > 0$ , 则存在  $X > a$ , 使得对任意  $x > X$  有  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , 即

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \text{ 因此, 对任意 } x > X \text{ 有 } f(x) > L - \varepsilon = \frac{I + L}{2} > I. \text{ 因此}$$

$$\inf\{f(x) : x \in [a, X]\} = I,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在  $x_0 \in [a, X]$ , 使得  $f(x_0) = I$ .

(3) 若  $S = L = I$ , 则  $f(x) \equiv L$ , 即任取  $x_0 \in [a, +\infty)$ , 均有  $f(x_0) = L$  同时为最大值和最小值.

**注** 一个只有极限没有最大值的例子是  $f(x) = \arctan x, x \in [0, +\infty)$ .

**习题 2.C.8** 设函数  $f(x)$  定义在区间  $[a, b]$  上, 满足条件:  $a \leq f(x) \leq b$  (对任意  $x \in [a, b]$ ), 且对  $[a, b]$  中任意的  $x, y$  有  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ . 这里  $k$  是常数,  $0 < k < 1$ . 证明:

(1) 存在唯一的  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ .

(2) 任取  $x_1 \in [a, b]$ , 并定义数列  $\{x_n\} : x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

(3) 给出一个在实轴上的连续函数, 使得对任意  $x \neq y$  有  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ , 但方程  $f(x) - x = 0$  无解.

**解**

(1) 先证明  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续: 设  $x_0 \in [a, b]$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ , 则对任意  $x \in [a, b]$

且  $|x - x_0| < \delta$ , 有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0| < k\delta = \varepsilon.$$

设  $g(x) = f(x) - x$ , 则  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $g(a) = f(a) - a \geq 0$ ,  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . 故结合零点定理可简单推知, 存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $g(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = x_0$ . 又因对任意  $x, y \in [a, b]$  有

$$|g(x) - g(y)| = |f(x) - f(y) - (x - y)| \geq |x - y| - |f(x) - f(y)| \geq (1 - k)|x - y|,$$

故若存在  $x_1 \neq x_0$  使得  $f(x_1) = x_1$ , 则

$$(1 - k)|x_1 - x_0| \leq |g(x_1) - g(x_0)| = |f(x_1) - f(x_0) - (x_1 - x_0)| = 0,$$

即  $x_1 = x_0$ . 因此  $x_0$  唯一.

- (2) (a) 若  $x_2 = x_1$ , 则由  $f(x_1) = x_1$  以及 (1) 中所述的唯一性, 知  $x_2 = x_1 = x_0$ , 则  $x_3 = f(x_2) = f(x_0) = x_0$ , 依此类推, 有  $x_n = x_0$  对任意  $n \geq 1$  成立. 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .  
 (b) 若  $x_2 \neq x_1$ , 对任意  $n \geq 1$  有

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq k^{n-1}|x_2 - x_1|.$$

因此, 对任意  $m > n \geq 1$  有

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (k^{m-2} + k^{m-3} + \dots + k^{n-1})|x_2 - x_1| \\ &\leq \frac{k^{n-1}}{1 - k}|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left\lceil \log_k \frac{(1 - k)\varepsilon}{|x_2 - x_1|} \right\rceil$ , 当  $m, n > N$  时, 有

$$|x_m - x_n| \leq \frac{k^{n-1}}{1 - k}|x_2 - x_1| < \varepsilon.$$

故数列  $\{x_n\}$  为 Cauchy 列, 故存在  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n := a$  存在. 又因  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 对递推式两侧取极限, 有

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(a).$$

由 (1) 中所述的唯一性, 知  $a = x_0$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

- (3) 一个不太严谨的思考过程: 我想要构造一个满足  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  的函数, 我考虑了  $|f'(x)| < 1$  的趋势为增的函数, 同时  $f(x) - x$  无解要求了  $f(x)$  应该是贴在  $y = x$  的 (不妨设为) 上方的, 于是我考虑了  $f(x) = x + g(x)$ , 并假设  $g(x)$  可导, 其中如果  $-1 < -g'(x) < 0$ , 那就能保证  $f(x)$  的导数满足要求. (当然上述思路中, 对  $g(x)$  的选取过程都只

是必要的)

$$f(x) = x + \frac{1}{1+e^x}.$$

(a) 满足  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ : 设  $x > y$ , 则

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= f(x) - f(y) = (x - y) + \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^y} \\ &= (x - y) - \frac{e^x - e^y}{(1+e^x)(1+e^y)} \\ &< x - y = |x - y|. \end{aligned}$$

(b) 方程  $f(x) - x = 0$  无解: 由  $f(x) - x = \frac{1}{1+e^x} > 0$ , 知  $f(x) - x = 0$  无解.

**习题 2.C.9** 证明: 对任意正整数  $n$ , 方程  $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$  恰有一个正根  $x_n$ ; 进一步证明数列  $\{x_n\}$  ( $n \geq 1$ ) 收敛, 并求其极限.

**解**

(1) 设  $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ , 则  $f_n(x)$  在  $(0, 1)$  上连续, 且  $f_n(0) = -1 < 0$ ,  $f_n(1) = n - 1 \geq 0$ . 故结合零点定理可简单推知, 存在  $x_n \in (0, 1]$ , 使得  $f_n(x_n) = 0$ . 由于  $f_n(x)$  的每一项都严格单调递增, 故  $f_n(x)$  也严格单调递增, 因此  $x_n$  是唯一解.

(2) 下证明数列  $\{x_n\}$  单调递减: 若  $x_{n+1} \geq x_n$ , 由  $x_n > 0$

$$1 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} > x_n^{n+1} + x_n^n + \cdots + x_n > x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1,$$

故矛盾, 因此  $x_{n+1} < x_n$ .  $\{x_n\}$  单调递减, 有 0 为下界, 故数列  $\{x_n\}$  收敛.

(3) 考虑

$$1 - x_n^n = (1 - x_n)(1 + x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^{n-1}) = 1 - x_n,$$

在两边同时取极限之前, 我们还得先考虑  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n$ . 由于  $1 = x_2 + x_2^2 \geq x_2 \cdot x_2 + x_2^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ , 对  $x_n^n < x_2^n$ , 由夹逼定理知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$ . 因此, 对数列  $\{x_n\}$  取极限, 有

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - x_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - x_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

**习题 2.C.10** 设  $a < b$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且对任意  $x \in [a, b)$  存在  $y \in (x, b)$  使得  $f(y) > f(x)$ . 求证:  $f(b) > f(a)$ .

**解** 考虑  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值  $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ , 由闭区间上连续函数的最值性, 知存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = M$ . 若  $\exists x < b, f(x) = M$ , 则由题设条件, 存在  $y \in (x, b)$ , 使得  $f(y) > f(x) = M$ , 矛盾. 因此  $f(b) = M$ , 且  $\forall x < b, f(x) < M$ . 特别的,  $f(a) < f(b)$ .

## 第 3 章 单变量函数的微分学

### 习题 3.1

习题 3.1.1 讨论下列函数在点  $x = 0$  处是否可导:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= |\sin x|; & (2) \quad f(x) &= \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0; \end{cases} \\ (3) \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} & (4) \quad f(x) &= \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x+1, & x < 0; \end{cases} \\ (5) \quad f(x) &= |x|e^x; & (6) \quad f(x) &= |x^3|. \end{aligned}$$

解

(1)

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|\sin h| - |\sin 0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|\sin h| - |\sin 0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin h}{h} = -1. \end{aligned}$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ , 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导.

(2)

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h+1) - 1}{h} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1}{h} = 0. \end{aligned}$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ , 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导.

(3)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

故  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 且  $f'(0) = 0$ .

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq f(0),$$

因此  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导.

(5)

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{he^h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} e^h = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-he^h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -e^h = -1.$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ , 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导.

(6)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h^3| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h|h = 0,$$

故  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导.

**习题 3.1.2** 求  $a, b$  的值, 使下列函数处处可导:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1; \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x < 0, \\ ax + b, & x \geq 0. \end{cases}$$

解

(1)  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  和  $(1, +\infty)$  上可导, 故只需讨论  $x = 1$  处的可导性.

由连续性得:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 1 = a + b.$$

由可导性得:

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 2 = a.$$

解得  $a = 2, b = -1$ .

(2)  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  和  $(0, +\infty)$  上可导, 故只需讨论  $x = 0$  处的可导性.

由连续性得:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow b = 0.$$

由可导性得:

$$f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow 1 = a.$$

解得  $a = 1, b = 0$ .

**习题 3.1.3** 设函数  $g(x)$  在  $x = a$  处连续, 记  $f(x) = (x - a)g(x)$ . 证明  $f'(a) = g(a)$ .

解

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h-a)g(a+h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a).$$

**习题 3.1.4** 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} = (\alpha + \beta)f'(x_0) \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数}).$$



解

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta h)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \alpha \cdot \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} + \beta \cdot \frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta h)}{\beta h} \right] \\
&= \alpha f'(x_0) + \beta f'(x_0) = (\alpha + \beta) f'(x_0).
\end{aligned}$$

**习题 3.1.5** 设函数  $f(x)$  在  $x = a$  处可导, 且  $f(a) \neq 0$ , 证明函数  $|f(x)|$  在  $x = a$  也可导. 若  $f(a) = 0$ , 结论是否仍成立?

解

(1)  $f(a) \neq 0$  时, 不妨设  $f(a) > 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $|x - a| < \delta$  时,  $f(x) > 0$ , 因此

$$|f(x)| = f(x),$$

因此  $|f(x)|$  在  $x = a$  处可导, 且  $|f'(a)| = f'(a)$ .

(2) 不成立, 如  $f(x) = x$  在  $x = 0$  处可导, 但是  $|x|$  在  $x = 0$  处不可导.

**习题 3.1.6** 求下列函数的导数.

$$(1) y = \frac{x}{3x^2 + 5x - 2};$$

$$(2) y = \sin x \tan x + \cot x;$$

$$(3) y = x^2 \log_3 x;$$

$$(4) y = \frac{x}{1 - \cos x};$$

$$(5) y = \frac{1 + \ln x}{x^2 + 1};$$

$$(6) y = \frac{(1 + x^2) \ln x}{\sin x + \cos x};$$

$$(7) y = (x^2 + 1)(3x - 1)(1 - x^3);$$

$$(8) y = x^3 \cdot \tan x \cdot \ln x.$$

解

(1)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x'(3x^2 + 5x - 2) - x(3x^2 + 5x - 2)'}{(3x^2 + 5x - 2)^2} \\
&= \frac{(3x^2 + 5x - 2) - (6x^2 + 5x)}{(3x^2 + 5x - 2)^2} = -\frac{3x^2 + 2}{(3x^2 + 5x - 2)^2}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
y' &= \left( \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)' \\
&= \frac{(2 \sin x \cos x) \cos x - \sin^2 x (-\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\sin x(1 + \cos^2 x)}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 y' &= (x^2)' \log_3 x + x^2 (\log_3 x)' \\
 &= 2x \log_3 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 3} \\
 &= 2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3}
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(x)'(1 - \cos x) - x(1 - \cos x)'}{(1 - \cos x)^2} \\
 &= \frac{1 \cdot (1 - \cos x) - x(\sin x)}{(1 - \cos x)^2} \\
 &= \frac{1 - \cos x - x \sin x}{(1 - \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(1 + \ln x)'(x^2 + 1) - (1 + \ln x)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{x}(x^2 + 1) - (1 + \ln x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{x + \frac{1}{x} - 2x - 2x \ln x}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{1 - x^2 - 2x^2 \ln x}{x(x^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{[(1 + x^2) \ln x]'(\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{[(1 + x^2)' \ln x + (1 + x^2)(\ln x)'](\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{[2x \ln x + (1 + x^2)\frac{1}{x}](\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{(2x \ln x + x + \frac{1}{x})(\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{(x + \frac{1}{x} + (x + 1)^2 \ln x) \sin x + (x + \frac{1}{x} - (x - 1)^2 \ln x) \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
 &y'(x^2 + 1)'(3x - 1)(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)'(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)(1 - x^3)' \\
 &= 2x(3x - 1)(1 - x^3) + (x^2 + 1)3(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)(-3x^2) \\
 &= -18x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 2x + 3
 \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
 y' &= (x^3)'(\tan x \cdot \ln x) + x^3(\tan x)' \ln x + x^3 \tan x (\ln x)' \\
 &= (3x^2)(\tan x \ln x) + (x^3)(\sec^2 x)(\ln x) + (x^3 \tan x) \left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= 3x^2 \tan x \ln x + x^3 \sec^2 x \ln x + x^2 \tan x \\
 &= x^2(3 \tan x \ln x + x \sec^2 x \ln x + \tan x)
 \end{aligned}$$

习题 3.1.7 求下列函数的导数:

(1)  $y = x\sqrt{1-x^2};$

(2)  $y = \sqrt{1+\ln^2 x};$

(3)  $y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}};$

(4)  $y = (\sin x + \cos x)^3;$

(5)  $y = (\sin x^3)^3;$

(6)  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$

(7)  $y = \sin[\sin(\sin x)];$

(8)  $y = \sin[\cos^5(\arctan x^3)];$

(9)  $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3;$

(10)  $y = x\sqrt{1+x^2} \sin x;$

(11)  $y = e^{\sqrt{x^2+1}};$

(12)  $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)];$

(13)  $y = x^{x^x} + x^x + x^{2^x};$

(14)  $y = (\ln x)^x;$

(15)  $y = (\tan x)^{\cot x};$

(16)  $y = 10^x \cdot (\sin x)^{\cos x};$

(17)  $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^3(x+4)^{1/2}};$

(18)  $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}.$

解

(1)

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

(2)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}} (\ln^2 x)' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}} 2 \ln x (\ln x)' = \frac{2 \ln x}{x \sqrt{1+\ln^2 x}}.$$

(3)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)' = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+4x+2}} = \sqrt{\frac{1}{-2x^2+2x+1}}.$$

(4)

$$y' = 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x) = 3(1 + \cos 2x)(\cos x - \sin x).$$

(5)

$$y' = 3 (\sin x^3)^2 (\sin x^3)' = 3 (\sin x^3)^2 (\cos x^3) 3x^2.$$

(6)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left( x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} (x + \sqrt{x})' \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right) \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} y' &= \cos[\sin(\sin x)] (\sin(\sin x))' \\ &= \cos[\sin(\sin x)] \cos(\sin x) (\sin x)' \\ &= \cos[\sin(\sin x)] \cos(\sin x) \cos x \end{aligned}$$

(8) 令  $u = \arctan x^3$ , 则  $v = \cos^5 u$ , 则  $y = \sin v$ , 则

$$\begin{aligned} y' &= \cos v \cdot v' = \cos v \cdot (-5 \sin^4 u \cdot \cos u) u' \\ &= -5 \cos \cos^5(\arctan x^3) \sin^4(\arctan x^3) \cdot \cos(\arctan x^3) \cdot \frac{3x^2}{1+x^6}. \end{aligned}$$

(9)

$$y' = \frac{12x^5 - 24x^3 + 12x}{(x^2 + 1)^3}.$$

(10)

$$y' = \frac{x \sin x + \cos x (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(11)

$$y' = e^{\sqrt{x^2+1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(12) 令  $u = \ln^3 x$ , 则  $v = \ln^2 u$ , 则  $y = \ln v$ , 则

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{v} \cdot v' = \frac{1}{v} \cdot 2 \ln u \cdot \frac{1}{u} u' \\ &= \frac{2 \ln(\ln^3 x)}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot \frac{3 \ln^2 x}{x} = \frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)}. \end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
y' &= (e^{x^x \ln x} + e^{x \ln x} + e^{2^x \ln x})' \\
&= (e^{x \ln x} \ln x)' e^{x \ln x} + (x \ln x)' e^{x \ln x} + (2^x \ln x)' e^{2^x \ln x} \\
&= \left( (1 + \ln x) e^{x \ln x} + \frac{1}{x} x^x \right) e^{x \ln x} + (1 + \ln x) e^{x \ln x} + \left( 2^x \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 \ln x \right) e^{2^x \ln x} \\
&= x^{x^x} (x^{x-1} + \ln x (\ln x + 1) x^x) + x^x (\ln x + 1) + x^{2^x} \left( 2^x \frac{1}{x} + \ln x \cdot 2^x \ln 2 \right)
\end{aligned}$$

(14)

$$y' = \frac{(\ln x)^{x+1} \ln(\ln x) + \ln(\ln x)}{\ln x}.$$

(15)

$$y' = (\tan x)^{\cot x} \csc^2(1 - \ln(\tan x))$$

(16) 设  $y = e^{2 \ln(x+5) + \frac{1}{3} \ln(x-4) - 5 \ln(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x+4)} := e^u$ , 则

$$\begin{aligned}
y' &= e^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{(x+5)^2 (x-4)^{1/3}}{(x+2)^5 (x+4)^{1/2}} \left( 2 \frac{1}{x+5} + \frac{1}{3} \frac{1}{x-4} - 5 \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+4} \right).
\end{aligned}$$

(17)

$$y' = 10^x \ln 10 \cdot (\sin x)^{\cos x} - 10^x \ln(\sin x) (\sin x)^{\cos x + 1} + 10^x \cos^2 x (\sin x)^{\cos x - 1}.$$

(18) 设  $y = e^{\ln(1-\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)} := e^u$ , 则

$$\begin{aligned}
y' &= e^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left( \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left( \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2} \right)
\end{aligned}$$

**习题 3.1.8** 设  $f(x) = x^3$ . 求  $f'(x^2)$  与  $[f(x^2)]'$ .

解

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x^2) = 3(x^2)^2 = 3x^4,$$

$$[f(x^2)]' = [(x^3)^2]' = (x^6)' = 6x^5.$$

**习题 3.1.9** 设  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ,  $g(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$ . 求  $f'[g(x)]$ ,  $[f(g(x))]'$ .

解

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'[g(x)] = \frac{1}{\sqrt{1+(e^{\sqrt{x^2+1}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}},$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(e^{\sqrt{x^2+1}})^2}} \cdot e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{(x^2+1)(1+e^{2\sqrt{x^2+1}})}}.$$

习题 3.1.10 设  $f(x)$  处处可导. 求  $\frac{dy}{dx}$ :

(1)  $y = f(x^3)$ ;

(2)  $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$ ;

(3)  $y = f(e^x + x^e)$ ;

(4)  $y = \sin[f(\sin f(x))]$ ;

(5)  $y = f[f(f(x + \cos x))]$ ;

(6)  $y = f(e^x)e^{f(x)}$ .

解

(1) 令  $u = x^3$ , 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot (3x^2) = 3x^2 f'(x^3).$$

(2) 令  $u = \sin^2 x, v = \cos^2 x$ , 则  $y = f(u) + f(v)$ . 由链式法则:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f(u) + \frac{d}{dx} f(v) \\ &= \frac{df}{du} \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \frac{dv}{dx} \\ &= f'(u) \cdot (2 \sin x \cos x) + f'(v) \cdot (2 \cos x (-\sin x)) \\ &= f'(\sin^2 x) \sin(2x) - f'(\cos^2 x) \sin(2x) \\ &= [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)] \sin(2x). \end{aligned}$$

(3) 令  $u = e^x + x^e$ , 则  $y = f(u)$ . 根据链式法则,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot (e^x + ex^{e-1}) = (e^x + ex^{e-1}) f'(e^x + x^e).$$

(4) 这是一个多次复合的函数. 反复应用链式法则:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \sin[f(\sin f(x))] \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot \frac{d}{dx} f(\sin f(x)) \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot f'(\sin f(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\sin f(x)) \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot f'(\sin f(x)) \cdot \cos(f(x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x) \\ &= f'(x) \cos(f(x)) f'(\sin f(x)) \cos[f(\sin f(x))]. \end{aligned}$$

(5) 同样, 多次应用链式法则:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f[f(f(x + \cos x))] \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot \frac{d}{dx} f(f(x + \cos x)) \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot f'(f(x + \cos x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x + \cos x) \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot f'(f(x + \cos x)) \cdot f'(x + \cos x) \cdot \frac{d}{dx} (x + \cos x) \\
 &= (1 - \sin x) f'(x + \cos x) f'(f(x + \cos x)) f'[f(f(x + \cos x))].
 \end{aligned}$$

(6) 令  $u = f(e^x)$  且  $v = e^{f(x)}$ , 则  $y = uv$ . 根据乘法法则  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$ . 分别计算:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} f(e^x) = f'(e^x) \cdot (e^x)' = e^x f'(e^x). \\
 \frac{dv}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x).
 \end{aligned}$$

将它们代入乘法法则:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= (e^x f'(e^x)) \cdot e^{f(x)} + f(e^x) \cdot (e^{f(x)} f'(x)) \\
 &= e^{f(x)} [e^x f'(e^x) + f(e^x) f'(x)].
 \end{aligned}$$

**习题 3.1.11** 求下列函数的导数:

$$(1) y = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad (2) y = |1 - 2x| \sin x.$$

解

(1) 对于  $x \neq 0$ ,

$$y' = \frac{e^{1/x} (1 - 1/x + e^{1/x})}{(1 + e^{1/x})^2}$$

对于  $x = 0$ ,

$$y'_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{he^{1/h}}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-1/h} + 1} = 1, \quad y'_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{he^{1/h}}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/h}}{e^{1/h} + 1} = 0$$

因此

$$y' = \begin{cases} \frac{e^{1/x} (1 - 1/x + e^{1/x})}{(1 + e^{1/x})^2} & x \neq 0 \\ \text{不存在} & x = 0 \end{cases}$$

- (2) (a)  $(1 - 2x) > 0$  时,  $x < \frac{1}{2}$ ,  $y' = ((1 - 2x) \sin x)' = -2 \sin x + (1 - 2x) \cos x$ .  
 (b)  $(1 - 2x) < 0$  时,  $x > \frac{1}{2}$ ,  $y' = ((2x - 1) \sin x)' = 2 \sin x + (2x - 1) \cos x$ .  
 (c)  $(1 - 2x) = 0$  时,  $y'_+ = 2 \sin \frac{1}{2} \neq y'_- = -2 \sin \frac{1}{2}$ .

综上所述,

$$y' = \begin{cases} 2 \sin x + (2x - 1) \cos x & x > \frac{1}{2} \\ -2 \sin x + (1 - 2x) \cos x & x < \frac{1}{2} \\ \text{不存在} & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**习题 3.1.12** 设  $n$  为正整数, 考虑函数  $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  证明:

- (1) 当  $n = 1$  时,  $f(x)$  在点  $x = 0$  处不可导;
- (2) 当  $n = 2$  时,  $f(x)$  在点  $x = 0$  处可导, 但导函数在  $x = 0$  处不连续 (事实上, 在这一点有第二类间断);
- (3) 当  $n \geq 3$  时,  $f(x)$  在点  $x = 0$  处可导, 且导函数在  $x = 0$  处连续.

解

- (1) 当  $n = 1$  时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{h},$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{h},$$

显然,  $f'_+(0)$  与  $f'_-(0)$  不存在, 因此  $f(x)$  在点  $x = 0$  处不可导.

- (2) 当  $n = 2$  时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

因此  $f(x)$  在点  $x = 0$  处可导, 且  $f'(0) = 0$ . 对于  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x})' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left( -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$$

不存在, 故  $f'(x)$  在  $x = 0$  处不连续.

- (3) 当  $n \geq 3$  时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$



因此  $f(x)$  在点  $x=0$  处可导, 且  $f'(0)=0$ . 对于  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = (x^n \sin \frac{1}{x})' = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} + x^n \left( -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}) = 0,$$

故  $f'(x)$  在  $x=0$  处连续.

**习题 3.1.13** 证明: 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在区间  $[-1, 1]$  上处处可导, 但导函数在这个

个区间上无界.

**解** 对于  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x^2})' = 2x \sin \frac{1}{x^2} + x^2 \left( -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

对于  $x=0$ ,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sin \frac{1}{h^2} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h \sin \frac{1}{h^2} = 0,$$

因此  $f(x)$  在点  $x=0$  处可导, 且  $f'(0)=0$ . 综上所述,  $f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上处处可导. 而对于  $x = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} (n=1, 2, 3, \dots)$ ,

$$f' \left( \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sin(n\pi) - 2\sqrt{n\pi} \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} 2\sqrt{n\pi},$$

显然, 当  $n$  趋近于无穷大时,  $\left| f' \left( \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \right) \right|$  趋近于无穷大, 故导函数在区间  $[-1, 1]$  上无界.

**习题 3.1.14** 求下列函数的反函数的微商.

(1)  $y = xe^x$ ;

(2)  $y = \arctan \frac{1}{x}$ ;

(3)  $y = 2x^3 - e^{-2x}$ ;

(4)  $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$ .

按照反函数求导定理, 我们应该写成这样:

$$(f^{-1})'(y) \stackrel{y=xe^x}{=} \frac{1}{f'(x)}$$

但是考虑到初学者对反函数求导的理解有点困难, 容易把自己绕晕. 我们给出几种推荐且合理的过程, 这几种过程几乎是等价的:

**解**

(1) 将  $x$  看成  $y$  的函数并在方程两边对  $y$  求导

$$1 = x'e^x + xx'e^x \Rightarrow x' = \frac{e^{-x}}{1+x}.$$

**注** 对于由方程  $\varphi(x, y) = 0$  给出的反函数或隐函数, 只要认准了一个变量是另一个变量的函数, 在方程两边直接对自变量求导即可. 有关详细内容将在第二册中介绍.

(2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -(1 + x^2)$$

**注** 这种写法与反函数求导定理的意义是最贴近的, 但是避免了使用重复的符号, 因此看起来清晰一点.

(3)

$$dy = 2d(x^3) - d(e^{-2x}) = 6x^2 dx + 2e^{-2x} dx \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{6x^2 + 2e^{-2x}}.$$

**注** 这在利用 3.2 节中微分的知识: 若  $y(x)$  可微且能表示为  $dx = A dy$ , 那么  $A = x'(y)$ .

(4)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}} \left( e^x + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \cdot 2e^{2x} \right) \\ &= \frac{e^{2x} + e^x \sqrt{1 + e^{2x}}}{(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}) \sqrt{1 + e^{2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}. \end{aligned}$$

则

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\sqrt{1 + e^{2x}}}{e^x}.$$

**习题 3.1.15** 证明: 可导的偶函数的导数为奇函数; 而可导的奇函数的导数为偶函数.

**解** 设  $f(x)$  为偶函数, 则  $f(-x) = f(x)$ , 则

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

则  $f'(x)$  为奇函数.

设  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(-x) = -f(x)$ , 则

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) + f(x)}{h} = f'(x),$$

则  $f'(x)$  为偶函数.

**习题 3.1.16** 证明: 可导的周期函数的导数仍是周期函数.

**解** 设  $f(x)$  为周期为  $T$  的函数, 则  $f(x+T) = f(x)$ , 则  $f'(x+T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ , 则  $f'(x)$  为周期为  $T$  的函数.

**习题 3.1.17** 求下列各式之和:

$$(1) P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1};$$

$$(2) Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1};$$

$$(3) R_n = \cos 1 + 2 \cos 2 + \cdots + n \cos n.$$

解

$$(1) \text{ 令 } A(x) = x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}, \text{ 则 } P_n = A'(x) = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.$$

$$(2) Q_n = (xA'(x))' = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

$$(3) \text{ 令 } B(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}},$$

$$\text{则 } B'(x) = \frac{(-\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2} + (n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})x)2\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}(\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x)}{(2\sin \frac{x}{2})^2}.$$

$$\text{则 } R_n = B'(1) = \frac{(-\frac{1}{2}\sin \frac{1}{2} + (n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2}))2\sin \frac{1}{2} - \cos \frac{1}{2}(\cos \frac{1}{2} - \cos(n+\frac{1}{2}))}{(2\sin \frac{1}{2})^2}.$$

习题 3.1.18 求下列函数的二阶导数:

$$(1) y = e^{-x^2};$$

$$(2) y = x^2 2^{2x};$$

$$(3) y = (1+x^2) \arctan x;$$

$$(4) y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

解

(1)

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

(2)

$$y' = 2x2^{2x}(1 + 2\ln 2), \quad y'' = 4x2^{2x}(\ln 2)^2 + 4(1 + \ln 2)2^{2x}.$$

(3)

$$y' = 1 + 2x \arctan x, \quad y'' = 2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

(4) 当  $y > 0$  时,  $y' = 2x$ ; 当  $y < 0$  时,  $y' = -2x$ ; 当  $y = 0$  时,

$$y'_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = 0 = y'_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - 0}{h} = 0$$

故  $y'(0) = 0$  存在.当  $y > 0$  时,  $y'' = 2$ ; 当  $y < 0$  时,  $y'' = -2$ ; 当  $y = 0$  时,

$$y''_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h - 0}{h} = 2 \neq y''_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h - 0}{h} = -2$$

故  $y''(0)$  不存在.习题 3.1.19 设函数  $f(x)$  处处有三阶导数, 求  $y'', y'''$ .

$$(1) y = f(x^2);$$

$$(2) y = f(e^x + x).$$

解

(1)

$$y' = f'(x^2) \cdot 2x, \quad y'' = f''(x^2) \cdot (2x)^2 + f'(x^2) \cdot 2, \quad y''' = f'''(x^2) \cdot (2x)^3 + 3f''(x^2) \cdot (2x) \cdot 2.$$

(2)

$$y' = f'(e^x + x) \cdot (e^x + 1), \quad y'' = f''(e^x + x) \cdot (e^x + 1)^2 + f'(e^x + x) \cdot e^x,$$

$$y''' = f'''(e^x + x) \cdot (e^x + 1)^3 + 3f''(e^x + x) \cdot (e^x + 1) \cdot e^x + f'(e^x + x) \cdot e^x.$$

**习题 3.1.20** 设  $f(x) = x^n|x|$  ( $n$  为正整数), 证明  $f^{(n)}(0)$  存在, 但  $f^{(n+1)}(0)$  不存在.

解

(1) 当  $k \leq n$  时当  $x > 0$  时,  $f(x) = x^{n+1}$ , 则  $f^{(k)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} x^{n+1-k} = A_{n+1}^k x^{n+1-k}$ ;

当  $x < 0$  时,  $f(x) = -x^{n+1}$ , 则  $f^{(k)}(x) = -\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} x^{n+1-k} = -A_{n+1}^k x^{n+1-k}$ ;

当  $x = 0$  时,

$$f_+^{(k)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A_{n+1}^{k-1} h^{n+2-k} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} A_{n+1}^{k-1} h^{n+1-k} = 0$$

$$f_-^{(k)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-A_{n+1}^{k-1} h^{n+2-k} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -A_{n+1}^{k-1} h^{n+1-k} = 0$$

$f_+^{(n)}(0) = f_-^{(n)}(0)$ , 故  $f^{(n)}(0) = 0$  存在.

(2) 当  $x > 0$  时,  $f^{(n)}(x) = (n+1)!x$ , 则  $f^{(n+1)}(x) = (n+1)!$ ; 当  $x < 0$  时,  $f^{(n)}(x) = (-1)(n+1)!x$ ,

则  $f^{(n+1)}(x) = (-1)(n+1)!$ ; 当  $x = 0$  时,

$$f_+^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(n+1)!h - 0}{h} = (n+1)!$$

$$f_-^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-1)(n+1)!h - 0}{h} = (-1)(n+1)!$$

$f_+^{(n+1)}(0) \neq f_-^{(n+1)}(0)$ , 故  $f^{(n+1)}(0)$  不存在.

**习题 3.1.21** 证明: 如果  $x_0$  是多项式  $P_n(x)$  的  $r$  重根, 即  $P_n(x)$  可以分解成

$$P_n(x) = (x - x_0)^r Q_{n-r}(x),$$

其中  $Q_{n-r}(x)$  是一个  $n-r$  次多项式, 且  $Q_{n-r}(x_0) \neq 0$ . 则  $P_n(x)$  满足条件

$$P_n(x_0) = 0, \quad P'_n(x_0) = 0, \quad \dots, \quad P_n^{(r-1)}(x_0) = 0, \quad P_n^{(r)}(x_0) \neq 0.$$

**解** 由题意,  $P_n(x) = (x - x_0)^r Q_{n-r}(x)$ , 则

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [(x - x_0)^r]^{(i)} \cdot Q_{n-r}^{(k-i)}(x).$$

(a) 当  $k < r$  时,  $[(x - x_0)^r]^{(i)} = 0$ , 则  $P_n^{(k)}(x_0) = 0$ .

(b) 当  $k = r$  时,  $[(x - x_0)^r]^{(r)} = r!$ , 则  $P_n^{(r)}(x_0) = r! Q_{n-r}(x_0) \neq 0$ .

习题 3.1.22 求下列函数的高阶导数:

- (1)  $(x^2 e^x)^{(n)}$ ; (2)  $[(x^2 + 1) \sin x]^{(n)}$ ;  
 (3)  $\left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)^{(n)}$ ; (4)  $(\sin x \cdot \cos x)^{(n)}$ .

我们将会直接使用如下结论:

$$(1) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(2) (e^x)^{(n)} = e^x, (a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x;$$

$$(3) \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}};$$

$$(4) (\ln(x+a))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+a)^n};$$

$$(5) (x^m)^{(n)} = \begin{cases} 0 & n < m; \\ n! & n = m; \\ n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} & n > m. \end{cases}$$

解

(1) 由莱布尼兹公式,

$$(x^2 e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{\min\{2,n\}} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} e^x.$$

$$(a) \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } (x^2 e^x)^{(1)} = (x^2)^{(0)} e^x + (x^2)^{(1)} e^x = (x^2 + 2x) e^x;$$

$$(b) \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } (x^2 e^x)^{(n)} = (x^2)^{(0)} e^x + n(x^2)^{(1)} e^x + \binom{n}{2} (x^2)^{(2)} e^x = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x.$$

(2) 由莱布尼兹公式,

$$[(x^2 + 1) \sin x]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2 + 1)^{(k)} (\sin x)^{(n-k)}.$$

$$(a) \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } [(x^2 + 1) \sin x]^{(1)} = (x^2 + 1)^{(0)} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + (x^2 + 1)^{(1)} \sin x = (x^2 + 1) \cos x + 2x \sin x;$$

(b) 当  $n \geq 2$  时,

$$\begin{aligned} [(x^2 + 1) \sin x]^{(n)} &= (x^2 + 1)^{(0)} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n(x^2 + 1)^{(1)} \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\ &\quad + \binom{n}{2} (x^2 + 1)^{(2)} \sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \\ &= (x^2 + 1) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\ &\quad + n(n-1) \sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \\ &= (x^2 + n(n-1) + 1) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

(3) 由莱布尼兹公式,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)^{(n)} &= \left( \frac{1}{(x-1)(x-2)} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{1}{x-1} \right)^{(k)} \left( \frac{1}{x-2} \right)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{(x-2)^{n-k+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)(x-2)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x-1)^k (x-2)^{n-k}} \end{aligned}$$

(4)

$$(\sin x \cdot \cos x)^{(n)} = \left( \frac{1}{2} \sin 2x \right)^{(n)} = 2^{n-1} \sin \left( 2x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

**习题 3.1.23** 求曲线  $y = \cos x$  在  $x = \frac{\pi}{4}$  处的切线方程.

**解**  $y' = -\sin x$ , 则  $y'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且  $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

或

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**习题 3.1.24** 证明: 双曲线  $xy = 1$  上任一点处的切线, 与两坐标轴构成的三角形的面积为定值.

**解** 对  $xy = 1$  两侧对  $x$  求导,  $y' = -\frac{y}{x}$ , 设切点为  $(x_0, y_0)$ , 则切线方程为

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

即

$$y = -\frac{y_0}{x_0}x + 2y_0.$$

切线与  $x$  轴交点为  $(2x_0, 0)$ , 与  $y$  轴交点为  $(0, 2y_0)$ , 则三角形面积为

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot 2y_0 = 2x_0y_0 = 2.$$

**习题 3.1.25** 有一底半径为  $r$  cm, 高为  $h$  cm 的正圆锥形容器, 现以  $a$  cm<sup>3</sup>/s 的速度自顶部向其内注水, 求水面上升的速度.

**解** 设水面高度为  $x$  cm, 则水面半径为  $\frac{r}{h}x$  cm, 则水体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi \left( \frac{r}{h}x \right)^2 x = \frac{\pi r^2}{3h^2}x^3.$$

则

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi r^2}{h^2}x^2 \frac{dx}{dt}.$$

由题意,  $\frac{dV}{dt} = a$ , 则

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ah^2}{\pi r^2 x^2}.$$

**习题 3.1.26** 水自高为 18 cm, 底半径为 6 cm 的圆锥形漏斗流入直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 已知水在漏斗中深度为 12 cm 时水平面下降的速率为 1 cm/min. 试求圆柱形筒中水面上升的速度.

**解** 设漏斗中水深为  $x$  cm, 则漏斗中水体积为

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{6}{18}x\right)^2 x = \frac{\pi}{27}x^3.$$

则

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\pi}{9}x^2 \frac{dx}{dt}.$$

由题意,  $\frac{dx}{dt} = -1$  cm/min, 当  $x = 12$  cm 时,

$$\frac{dV_1}{dt} = -16\pi \text{ cm}^3/\text{min}.$$

设圆柱形筒中水深为  $y$  cm, 则圆柱形筒中水体积为

$$V_2 = \pi 5^2 y = 25\pi y.$$

则

$$\frac{dV_2}{dt} = 25\pi \frac{dy}{dt}.$$

由题意,  $-\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt}$ , 则

$$-(-16\pi) = 25\pi \frac{dy}{dt},$$

即

$$\frac{dy}{dt} = \frac{16}{25} \text{ cm/min}.$$

## 习题 3.2

**习题 3.2.1** 设  $y = x^2 + x$ , 计算在  $x = 1$  处, 当  $\Delta x = 10, 1, 0.1, 0.01$  时, 相应的函数的改变量  $\Delta y$  和函数的微分  $dy$ , 并观察差  $\Delta y - dy$  随  $\Delta x$  减小的变化情况.

解

(1) 当  $\Delta x = 10$  时,

$$\Delta y = f(11) - f(1) = 130, dy = f'(1) dx = 3 \times 10 = 30, \Delta y - dy = 100.$$

(2) 当  $\Delta x = 1$  时,

$$\Delta y = f(2) - f(1) = 4, dy = f'(1) dx = 3 \times 1 = 3, \Delta y - dy = 1.$$

(3) 当  $\Delta x = 0.1$  时,

$$\Delta y = f(1.1) - f(1) = 0.31, dy = f'(1) dx = 3 \times 0.1 = 0.3, \Delta y - dy = 0.01.$$

(4) 当  $\Delta x = 0.01$  时,

$$\Delta y = f(1.01) - f(1) = 0.0301, dy = f'(1) dx = 3 \times 0.01 = 0.03, \Delta y - dy = 0.0001.$$

从中不难看出, 随着  $\Delta x$  的减小,  $\Delta y - dy$  也在减小, 且大体上  $\Delta y - dy$  趋于 0.

**习题 3.2.2** 求下列函数的微分:

$$(1) y = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right);$$

$$(2) y = \sin x - x \cos x;$$

$$(3) y = \arccos \frac{1}{|x|};$$

$$(4) y = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|;$$

$$(5) y = 5\sqrt[3]{\arctan x^2};$$

$$(6) y = \tan^2(1 + 2x^2);$$

$$(7) y = e^{-x} \cos(3 - x);$$

$$(8) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

解

(1)

$$dy = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}} \cdot d\left(-\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{x - 2\pi} dx.$$

(2)

$$dy = d(\sin x) - d(x \cos x) = \cos x dx - (\cos x - x \sin x) dx = x \sin x dx.$$

(3)  $x > 0$  时,

$$dy = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$



$x < 0$  时,

$$dy = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot d\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

因此

$$dy = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx, |x| > 1.$$

(4)

$$dy = d(\ln|x-1| - \ln|x+1|) = \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{x+1} dx = \frac{2}{x^2-1} dx, \quad x \neq \pm 1.$$

(5)

$$dy = 5 \cdot \frac{1}{3} (\arctan x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot d(\arctan x^2) = \frac{10x}{3(1+x^4)(\arctan x^2)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

(6)

$$dy = 2 \tan(1+2x^2) \cdot \sec^2(1+2x^2) \cdot d(1+2x^2) = 8x \tan(1+2x^2) \sec^2(1+2x^2) dx.$$

(7)

$$dy = e^{-x} \cos(3-x) \cdot d(-x) + e^{-x} \cdot d(\cos(3-x)) = e^{-x}(-\cos(3-x) + \sin(3-x)) dx.$$

(8)

$$dy = \frac{(\sqrt{x^2+1}) \cdot d(x) - x \cdot d(\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

**习题 3.2.3** 对下列函数, 求  $\frac{dy}{dx}$  及  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

$$(1) \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = \varphi \cos \varphi, \\ y = \varphi \sin \varphi; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = \cos^3 \varphi, \\ y = \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

解

(1) 对  $x = \ln(1+t^2), y = t - \arctan t$  两边求微分, 得

$$dx = \frac{2t}{1+t^2} dt, \quad dy = \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

(2) 对  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$  两边求微分, 得

$$dx = (1 - \cos t) dt, \quad dy = \sin t dt,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1 - \cos t)^2}}{1 - \cos t} = \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{(1 - \cos t)^2}.$$

(3) 对  $x = \varphi \cos \varphi, y = \varphi \sin \varphi$  两边求微分, 得

$$dx = (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) d\varphi, \quad dy = (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) d\varphi,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi + \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi - \varphi \sin \varphi}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} \\ &= \frac{(\cos \varphi + \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)(-\sin \varphi - \sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}{(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)^2} \\ &= \frac{\varphi^2 + 2}{(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)^3} \end{aligned}$$

(4) 对  $x = \cos^3 \varphi, y = \sin^3 \varphi$  两边求微分, 得

$$dx = -3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi, \quad dy = 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{3 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{-3 \cos^2 \varphi \sin \varphi} = -\tan \varphi.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{-\sec^2 \varphi}{-3 \cos^2 \varphi \sin \varphi} = \frac{1}{3 \cos^4 \varphi \sin \varphi}.$$

**习题 3.2.4** 求下列曲线在已知点处的切线方程.

$$(1) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases} \quad \text{在 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 处}; \quad (2) \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^2}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{在 } t = 2 \text{ 处}.$$

解

(1) 在  $t = \frac{\pi}{4}$  处,

$$x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t,$$

所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1.$$

切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

即

$$x + y - \sqrt{2} = 0.$$

(2) 在  $t = 2$  处,

$$x = \frac{3 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{6}{5}, \quad y = \frac{3 \times 2^2}{1 + 2^2} = \frac{12}{5}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{6t}{(1+t^2)^2}}{\frac{3(1-t^2)}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = -\frac{4}{3}.$$

切线方程为

$$y - \frac{12}{5} = -\frac{4}{3} \left( x - \frac{6}{5} \right),$$

即

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

## 习题 3.3

**习题 3.3.1** 设  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ , 确定方程  $f'(x) = 0$  的实根的个数, 并指出根所在的区间.

**解**  $f'(x)$  为三次多项式, 故  $f'(x) = 0$  最多有三个实根. 又  $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$ , 由 Rolle 定理, 在  $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$  内分别各至少有一点  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , 使得  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$ , 显然该三点互不相同. 因此  $f'(x) = 0$  有且仅有三个实根, 分别在  $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$  内.

**习题 3.3.2** 设函数  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上有二阶微商, 且  $f(1) = f(2) = 0$ . 记  $F(x) = (x-1)^2 f(x)$ , 则在区间  $(1, 2)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $F''(\xi) = 0$ .

**解** 由  $f(1) = f(2) = 0 \Rightarrow F(1) = F(2) = 0$ . 由 Rolle 定理, 在  $(1, 2)$  内至少有一点  $\xi_1$ , 使得  $F'(\xi_1) = 0$ . 又  $F'(1) = 2(1-1)f(1) + (1-1)^2 f'(1) = 0$ . 由 Rolle 定理, 在  $(1, \xi_1)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $F''(\xi) = 0$ .

**习题 3.3.3** 举例说明, 中值定理的下述意义的逆不成立: 设  $\xi \in (a, b)$  是指定的一点, 则存在  $c, d \in [a, b]$ , 使得  $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$ . (提示: 考虑函数  $f(x) = x^3, \xi = 0$ .)

**解** 设  $f(x) = x^3, \xi = 0$ , 则  $f'(\xi) = f'(0) = 0$ . 若存在  $c, d \in [-1, 1]$ , 使得  $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$ , 则有

$$\frac{c^3 - d^3}{c - d} = 0 \Rightarrow c^2 + cd + d^2 = 0 \Rightarrow c = d = 0.$$

但  $c, d$  不能相等, 故不存在  $c, d \in [-1, 1]$ , 使得  $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$ .

**习题 3.3.4** 证明下列不等式:

(1) 当  $a > b > 0, n > 1$  时, 有  $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$ ;

(2) 当  $x > 0$  时, 有  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ ;

(3) 当  $0 < a < b$  时, 有  $(a+b) \ln \frac{a+b}{2} < a \ln a + b \ln b$ .

(4) 当  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$  时, 有  $\frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \alpha} < \tan \beta - \tan \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \beta}$ .

**解**

(1) 设  $f(x) = x^n$ , 则  $f'(x) = nx^{n-1}$ . 由 Lagrange 中值定理, 在  $(b, a)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

又  $a > \xi > b > 0, f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调递增, 故  $nb^{n-1} < f'(\xi) < na^{n-1}$ , 于是

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$

(2) 设  $f(x) = \ln(1+x)$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ . 由 Lagrange 中值定理, 在  $(0, x)$  内至少有一点  $\xi$ , 使

得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

又  $x > \xi > 0$ ,  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调递减, 故  $\frac{1}{1+x} < f'(\xi) < 1$ , 于是

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

(3) 设  $f(x) = x \ln x$ , 则  $f'(x) = \ln x + 1$ . 由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ ,  $\eta \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{(a+b) \ln \frac{a+b}{2} - 2a \ln a}{b-a}$$

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{a+b}{2}} = \frac{2b \ln b - (a+b) \ln \frac{a+b}{2}}{b-a}$$

又  $a < \xi < \eta < b$ ,  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调递增, 故  $f'(\xi) < f'(\eta)$ , 于是

$$(a+b) \ln \frac{a+b}{2} < a \ln a + b \ln b.$$

(4) 设  $f(x) = \tan x$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ . 由 Lagrange 中值定理, 在  $(\alpha, \beta)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\beta - \alpha}$$

又  $\beta > \xi > \alpha > 0$ ,  $f'(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内单调递增, 故  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} < f'(\xi) < \frac{1}{\cos^2 \beta}$ , 于是

$$\frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \alpha} < \tan \beta - \tan \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \beta}.$$

**习题 3.3.5** 证明下列恒等式:

$$(1) \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(2) \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

解

(1) 设  $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 0.$$

又  $f(0) = 0$ , 故  $f(x) = 0$ , 即  $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

(2) 设  $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x}$ , 则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = 0. \quad (x \neq -1)$$

$$\text{又 } g(0) = \frac{\pi}{4}, g(-2) = -\frac{3\pi}{4}, \text{ 故 } g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

这道题使用了引理:

**引理** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上连续, 且在  $I$  内部可导. 若  $f'(x) = 0$  恒成立, 则  $f(x)$  在  $I$  上恒为常数.

**证明** 设  $x_1, x_2 \in I$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ , 则由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1).$$

因此  $f(x)$  在  $I$  上恒为常数.

**习题 3.3.6** 设  $f(x)$  是闭区间  $[0, 1]$  上的可导函数, 对任意  $x \in [0, 1]$  有  $f(x) \in (0, 1)$ ; 并且对每个  $x, f'(x) \neq 1$ . 证明在  $(0, 1)$  内有且仅有一个  $x$ , 使  $f(x) = x$ .

**解** 先证明存在性: 设  $g(x) = f(x) - x$ , 则  $g(0) = f(0) > 0, g(1) = f(1) - 1 < 0$ . 由介值定理, 在  $(0, 1)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $g(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = \xi$ .

反证法证明唯一性: 假设在  $(0, 1)$  内有两点  $\xi_1, \xi_2$ , 使得  $f(\xi_1) = \xi_1, f(\xi_2) = \xi_2$ , 则  $g(\xi_1) = g(\xi_2) = 0$ . 由 Rolle 定理, 在  $(\xi_1, \xi_2)$  内至少有一点  $\eta$ , 使得  $g'(\eta) = 0$ , 即  $f'(\eta) - 1 = 0$ , 与  $f'(x) \neq 1$  矛盾. 因此在  $(0, 1)$  内有且仅有一个  $x$ , 使  $f(x) = x$ .

**习题 3.3.7** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $|f'(x)| < 1$ , 又  $f(0) = f(1)$ . 证明: 对于  $[0, 1]$  上的任意两点  $x_1, x_2$ , 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$ .

**解** 对于  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ , 则由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3$  s. t.  $0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \xi_3 < 1$ , 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f'(\xi_3) = \frac{f(1) - f(x_2)}{1 - x_2}.$$

因此

$$|f(x_1) - f(0)| = |f'(\xi_1)|x_1 < x_1,$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi_2)|(x_2 - x_1) < x_2 - x_1,$$

$$|f(1) - f(x_2)| = |f'(\xi_3)|(1 - x_2) < 1 - x_2.$$

于是

$$\begin{aligned} 2|f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_2) - f(x_1)| + |f(1) - f(x_2) + f(x_1) - f(0)| \\ &\leq |f(x_2) - f(x_1)| + |f(1) - f(x_2)| + |f(x_1) - f(0)| \\ &< (x_2 - x_1) + (1 - x_2) + x_1 = 1. \end{aligned}$$

故  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$ .

**习题 3.3.8** 若  $f(x)$  处处可导, 且  $f'(x) = f(x)$ . 证明  $f(x) = Ce^x$ ,  $C$  为任意常数.

**解** 设  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ , 则

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x f(x) - e^x f(x)}{(e^x)^2} = 0.$$

因此  $g(x) \equiv g(0) \Rightarrow f(x) = f(0)e^x$ . 设  $C = f(0)$ .

**习题 3.3.9** 设不恒为常数的函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b)$ . 证明在  $(a, b)$  内存在一点  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) > 0$ .

**解** 由于  $f(x)$  不为常函数, 故存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) \neq f(a)$ .

(1) 若  $f(x_0) > f(a)$ , 则  $\exists \xi \in (a, x_0)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0$ .

(2) 若  $f(x_0) < f(a) = f(b)$ , 则  $\exists \eta \in (x_0, b)$ , 使得  $f'(\eta) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} > 0$ .

**习题 3.3.10** 设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上可微, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . 证明:

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

**解**

(1) 由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi_x \in (x, x+1)$ , 使得

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x).$$

又  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ , 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon, \exists X > 0$ , s. t.  $\forall x > X, |f'(x)| < \varepsilon$ . 设  $x > X$ , 则由 Lagrange 中值定理,  $\exists \eta \in (X, x)$ , 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x) - f(X)}{x - X} \Rightarrow f(x) = f'(\eta)(x - X) + f(X).$$

因此

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| = \left| f'(\eta) \left( 1 - \frac{X}{x} \right) + \frac{f(X)}{x} \right| \leq |f'(\eta)| \left| 1 - \frac{X}{x} \right| + \left| \frac{f(X)}{x} \right| < \varepsilon + \left| \frac{f(X)}{x} \right|.$$

也就是说, 当  $x > \max \left\{ X, \frac{|f(X)|}{\varepsilon} \right\}$  时,  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < 2\varepsilon$ . 因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

**习题 3.3.11** 证明: 若函数  $f(x)$  在 (有限) 开区间  $(a, b)$  内有有界的导函数, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内也有界. 如果有限区间  $(a, b)$  改为无穷区间, 结论还成立吗? 命题的逆命题是否成立?

解  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 故在  $(a, b)$  连续. 不妨设  $\forall x \in (a, b), f'(x) \leq M$ , 同时取  $c = \frac{a+b}{2}$ , 则

$$\forall x \in (a, b) \setminus \{c\}, \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| = |f'(\xi)| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq |f(c)| + M|b - a|$$

显然对于  $c, |f(c)| \leq |f(c)| + M|b - a|$  也成立, 即得  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有界.

将  $(a, b)$  改为无穷区间, 结论不成立. 考虑  $f(x) = x, f'(x) = 1$  在  $(0, +\infty)$  上有界, 但  $f(x) = x$  在  $(0, +\infty)$  上无界.

逆命题不成立. 考虑  $f(x) = \sqrt{x}, f(x) = \sqrt{x}$  在  $(0, 1)$  上有界, 但  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  在  $(0, 1)$  上无界.

**习题 3.3.12** 设对所有的实数  $x, y$ , 不等式  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^2$  ( $M$  为常数) 都成立. 证明:  $f(x)$  恒为常数.

解  $\forall x \neq y, 0 \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M|x - y|$ . 令  $y \rightarrow x$ ,

$$\lim_{y \rightarrow x} 0 = \lim_{y \rightarrow x} M|x - y| = 0 \Rightarrow |f'(x)| = \lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

故  $f(x)$  恒为常数.

**习题 3.3.16** 设  $f(x)$  在一个区间  $I$  上连续, 且 (至多) 除了有限个点外,  $f(x)$  在  $I$  内部的导数为正 (负), 则  $f(x)$  在  $I$  上严格单调递增 (减). (注意, 在例外的点处,  $f(x)$  可能不可导.)

解 设  $x_1, x_2 \in I$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ . 若  $f(x)$  在  $(x_1, x_2)$  内处处可导, 则由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

又  $f'(\xi) > 0 (f'(\xi) < 0)$ , 故  $f(x_2) > f(x_1) (f(x_2) < f(x_1))$ .

若  $f(x)$  在  $(x_1, x_2)$  内有有限个点不可导, 设这些点为  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 则将  $(x_1, x_2)$  分成  $n + 1$  个子区间  $(x_1, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_n, x_2)$ , 在每个子区间内  $f(x)$  处处可导, 由上面的结论可知,  $f(x_1) < f(y_1) < \dots < f(y_n) < f(x_2) (f(x_1) > f(y_1) > \dots > f(y_n) > f(x_2))$ .

综上所述,  $f(x)$  在  $I$  上严格单调递增 (递减).

**习题 3.3.17** 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  均在区间  $I$  上连续, 且 (至多) 除了有限个点外,  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $I$  内部满足  $f'(x) > g'(x)$ ; 设存在  $a \in I$ , 使得  $f(a) = g(a)$  ( $a$  不是区间端点), 则当  $x \in I$  且  $x > a$  时, 有  $f(x) > g(x)$ ; 当  $x \in I$  且  $x < a$  时, 有  $f(x) < g(x)$ .

解 记  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $h(x)$  在  $I$  上连续, 且 (至多) 除了有限个点外,  $h(x)$  在  $I$  内部满足  $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$ . 又  $h(a) = f(a) - g(a) = 0$ . 由上一题的结论可知, 当  $x \in I$  且  $x > a$  时,  $h(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$ ; 当  $x \in I$  且  $x < a$  时,  $h(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$ .

**习题 3.3.18** 若  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  可导,  $f(0) = 0, f'(x)$  严格递增, 证明  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  严格递增.



解 设  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ , 则由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

又由 Lagrange 中值定理,  $\exists \eta \in (0, x_1)$ , 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{f(x_1)}{x_1}.$$

因为  $f'(x)$  严格递增, 故  $f'(\xi) > f'(\eta)$ , 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow \frac{f(x_2)}{x_2} > \frac{f(x_1)}{x_1}. \quad (\text{习题 3.5.3})$$

因此  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  严格递增.

**习题 3.3.19** 设  $x_0$  是函数  $f(x)$  的一个驻点 ( $f'(x_0) = 0$ ), 且  $f(x)$  在  $x_0$  处二阶可微,  $f''(x_0) \neq 0$ . 证明: 若  $f''(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  是  $f(x)$  的一个极大值点; 若  $f''(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  是  $f(x)$  的一个极小值点.

举例说明: 若  $f''(x_0) = 0$ , 则  $x_0$  可以是  $f(x)$  的极大值点或极小值点, 也可以不是极值点.

解 若  $f''(x_0) < 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $f''(x) < 0$ . 由 Lagrange 中值定理,  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $\exists \xi = \xi(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$

又  $f''(x) < 0$ , 故  $f'(\xi) > f'(x_0) = 0 > f'(\xi_2)$ , 由习题 3.3.17 可知, 即当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f(x) < f(x_0)$ ; 当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f(x) < f(x_0)$ . 因此  $x_0$  是  $f(x)$  的一个极小值点. 即当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f(x) < f(x_0)$ ; 当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f(x) < f(x_0)$ . 因此  $x_0$  是  $f(x)$  的一个极大值点.

例: 设  $f(x) = x^4$ , 则  $f''(0) = 0$ , 但  $x = 0$  是  $f(x)$  的一个极小值点. 设  $g(x) = -x^4$ , 则  $g''(0) = 0$ , 但  $x = 0$  是  $g(x)$  的一个极大值点. 设  $h(x) = x^3$ , 则  $h''(0) = 0$ , 但  $x = 0$  不是  $h(x)$  的极值点.

**习题 3.3.20** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有二阶导数, 且  $f(0) = f'(0)$ ,  $f(1) = f'(1)$ . 求证: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 满足  $f(\xi) = f''(\xi)$ .

解 设  $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$ , 则

$$g'(x) = e^x(f(x) - f'(x)) + e^x(f'(x) - f''(x)) = e^x(f(x) - f''(x)).$$

又  $g(0) = e^0(f(0) - f'(0)) = 0$ ,  $g(1) = e^1(f(1) - f'(1)) = 0$ . 由 Rolle 定理, 在  $(0, 1)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $g'(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = f''(\xi)$ .

**习题 3.3.21** 求下列函数的单调区间与极值.

(1)  $y = 2x^3 - 3x^2$ ;

(2)  $y = x^{2/3}$ ;

(3)  $y = x^2 e^{-x^2};$

(4)  $y = x^{1/x};$

(5)  $y = \frac{(\ln x)^2}{x};$

(6)  $y = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$

解 高中的时候大家就已经很熟悉怎么用导数来求函数的单调区间与极值了, 这里仅给出答案.

(1)

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1).$$

单调区间: 在  $(-\infty, 0)$  和  $(1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(0, 1)$  上单调递减.

极值: 在  $x = 0$  处取得极大值 0, 在  $x = 1$  处取得极小值  $-1$ .

(2)

$$y' = \frac{2}{3} x^{-1/3}.$$

单调区间: 在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-\infty, 0)$  上单调递减.

极值: 在  $x = 0$  处取得极小值 0.

(3)

$$y' = 2xe^{-x^2}(1-x^2).$$

单调区间: 在  $(-1, 0)$  和  $(1, +\infty)$  上单调递减, 在  $(-\infty, -1)$  和  $(0, 1)$  上单调递增.

极值: 在  $x = \pm 1$  处取得极大值  $\frac{1}{e}$ , 在  $x = 0$  处取得极小值 0.

(4) 此函数只在  $(0, +\infty)$  有定义.

$$y' = x^{1/x} \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

单调区间: 在  $(0, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减.

极值: 在  $x = e$  处取得极大值  $e^{1/e}$ .

(5)

$$y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}.$$

单调区间: 在  $(0, 1)$  和  $(e^2, +\infty)$  上单调递减, 在  $(1, e^2)$  上单调递增.

极值: 在  $x = 1$  处取得极小值 0, 在  $x = e^2$  处取得极大值  $\frac{4}{e^2}$ .

(6)

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1-x}{1+x^2}.$$

单调区间: 在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减.

极值: 在  $x = 1$  处取得极大值  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ .

### 命题 (极值点的判别法)

(1) 设  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 若  $f'(x_0)$  在  $x_0$  两侧存在, 异号, 则  $f(x_0)$  为  $f(x)$  的极值点.  $f'(x_0)$  可

以不存在. 这即极值存在的一阶导判别法.

(2) 若  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 (< 0)$ , 则  $f(x_0)$  为  $f(x)$  的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的二阶导判别法.

(3) 若  $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, f^{(2n)} > 0 (< 0)$ , 则  $f(x_0)$  必是  $f(x)$  的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的高阶导判别法.

**习题 3.3.22** 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值.

(1)  $y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2, 2];$

(2)  $y = \sin 2x - x, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$

(3)  $y = \arctan \frac{1-x}{1+x}, [0, 1];$

(4)  $y = x \ln x, (0, +\infty).$

**解**

(1)

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y(-2) = 13, \quad y(-1) = 4, \quad y(0) = 5, \quad y(1) = 4, \quad y(2) = 13.$$

故最大值为 13, 最小值为 4.

(2)

$$y' = 2 \cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6}.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

故最大值为  $\frac{\pi}{2}$ , 最小值为  $-\frac{\pi}{2}$ .

(3)

$$y' = -\frac{2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2} < 0 \quad (x \in [0, 1]).$$

故在  $[0, 1]$  上单调递减, 最大值为  $y(0) = \frac{\pi}{4}$ , 最小值为  $y(1) = 0$ .

(4)

$$y' = \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}.$$

函数在  $\left(0, \frac{1}{e}\right]$  上单调递减, 在  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$  上单调递增且趋于  $+\infty$ . 故最小值为  $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ , 无最大值.

**习题 3.3.23** 证明下列不等式:

(1)  $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1, \quad x \in [0, 1], p > 1;$

- (2)  $\tan x > x - \frac{x^3}{3}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2});$   
 (3)  $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}, \quad 0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2};$   
 (4)  $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}, \quad x > 0;$   
 (5)  $1+x \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, \quad x \text{ 为任意实数};$   
 (6)  $\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}),$  且右端的常数  $\frac{4}{3}$  不能换为更大的数;  
 (7)  $(1-\frac{1}{x})^{x-1}(1+\frac{1}{x})^x < 4, \quad x \in (1, +\infty);$   
 (8)  $x^{a-1} + x^{a+1} \geq \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}, \quad x \in (0, 1), a \in (0, 1).$

解

- (1) 设  $f(x) = x^p + (1-x)^p$ , 则  $f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$ . 因此  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  上单调递增, 在  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  上单调递减. 故  $f(x)$  的最小值为  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$ , 最大值为  $f(0) = f(1) = 1$ , 即

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

- (2) 设  $g(x) = \tan x - x + \frac{x^3}{3}$ , 则  $g'(x) = \sec^2 x - 1 + x^2 = \tan^2 x + x^2 > 0$ . 因此  $g(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增, 又  $g(0) = 0$ , 故  $g(x) > 0$ , 即

$$\tan x > x - \frac{x^3}{3}.$$

- (3) 设  $h(x) = \frac{\tan x}{x}$ , 则  $h'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x \tan^2 x}{x^2} > 0$ . 因此  $h(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增, 故  $h(x_2) > h(x_1)$ , 即

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

- (4) 设  $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x}$ , 则

$$f'(x) = \frac{\arctan x + x^2 \arctan x + x^3 + x^2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} > 0, \quad x > 0$$

因此  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $f(0) = 0$ , 故  $f(x) > 0$ , 即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

- (4) 另解令  $f(x) = (1+x) \ln(1+x) - \arctan x$ ,  $g(x) = \arctan x, \forall x > 0$ ,

$$\exists \xi_1 \in [0, x], \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi_1) = 1 + \ln(1+x) > 1.$$

$$\exists \xi_2 \in [0, x], \frac{g(x) - g(0)}{g - 0} = \frac{g(x)}{x} = g'(\xi_2) = \frac{1}{1+\xi_2^2} < 1.$$

故

$$g(x) < x < f(x).$$

即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(5) 令  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\exists \xi \in [0, x], \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \sqrt{1+x^2} - 1$$

即

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}.$$

(6) 令  $f(x) = x - \frac{4}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin x \cos x$ , 则

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{3} \cos x + \frac{1}{3} \cos 2x = \frac{1}{3} (2 \cos x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0.$$

又  $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\sin x > 0$ ,

$$\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos x.$$

另一方面, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cos x = 0,$$

$\frac{4}{3}$  不能被替换为更大的数.

(7)

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 < 4$$

(8) 令  $f(x) = x^{a-1} + x^{a+1}$ , 则  $\forall x \in (0, 1)$ ,  $a \in (0, 1)$ ,

$$f'(x) = (a-1)x^{a-2} + (a+1)x^a = (a+1) \left(x + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) \left(x - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) x^{a-2}.$$

$$\forall x \in \left(0, \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right), f'(x) < 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

$$\forall x \in \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, 1\right), f'(x) > 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

$$\text{综上, } \forall x \in (0, 1), a \in (0, 1), x^{a-1} + x^{a+1} \geq \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

**习题 3.3.24** 试确定下列函数零点的个数及所在范围:

(1)  $x^3 - 6x^2 + 9x - 10$ ;

(2)  $ax - \ln x$  (其中  $a > 0$ ).

解

(1) 令  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$ . 我们首先分析  $f(x)$  的单调性. 求导得:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3).$$

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x_1 = 1, x_2 = 3$ .

- 当  $x \in (-\infty, 1)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.
- 当  $x \in (1, 3)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减.
- 当  $x \in (3, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.

$f(x)$  在  $x = 1$  处取得极大值,

$$f(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 10 = 1 - 6 + 9 - 10 = -6.$$

$f(x)$  在  $x = 3$  处取得极小值,

$$f(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 10 = 27 - 54 + 27 - 10 = -10.$$

同时, 考察  $x$  趋于无穷时的极限:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

由于极大值  $f(1) = -6 < 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , 所以在  $(-\infty, 1]$  上  $f(x)$  恒为负, 没有零点. 由于极小值  $f(3) = -10 < 0$ , 且极大值  $f(1) = -6 < 0$ , 所以在  $(1, 3]$  上  $f(x)$  恒为负, 没有零点. 由于  $f(3) = -10 < 0$  且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 且  $f(x)$  在  $(3, +\infty)$  上连续且单调递增, 根据零点存在定理,  $f(x)$  在  $(3, +\infty)$  上有且仅有一个零点.

又因为

$$f(4) = -6 < 0, \quad f(5) = 10 > 0.$$

所以零点在  $(4, 5)$  范围内.

该函数只有一个零点, 位于区间  $(4, 5)$  内.

(2) 令  $g(x) = ax - \ln x$ . 函数的定义域为  $(0, +\infty)$ . (题目已给出  $a > 0$ ) 我们分析  $g(x)$  的单调性. 求导得:

$$g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}.$$

令  $g'(x) = 0$ , 解得  $x = \frac{1}{a}$ .

- 当  $x \in (0, 1/a)$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减.
- 当  $x \in (1/a, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增.

因此,  $g(x)$  在  $x = 1/a$  处取得全局最小值, 最小值为:

$$g(1/a) = a \left( \frac{1}{a} \right) - \ln \left( \frac{1}{a} \right) = 1 - \ln(a^{-1}) = 1 + \ln a.$$

我们考察  $g(x)$  在定义域边界的行为:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( a - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \cdot (a - 0) = +\infty.$$

函数  $g(x)$  从  $+\infty$  递减到最小值  $1 + \ln a$ , 然后再递增到  $+\infty$ . 零点的个数取决于最小值  $1 + \ln a$  的符号:

**情况 1** 若最小值  $1 + \ln a > 0$ , 即  $\ln a > -1$ ,  $a > e^{-1}$  ( $a > 1/e$ ). 此时  $g(x)$  的最小值大于 0,  $g(x)$  恒大于 0, 故函数没有零点.

**情况 2** 若最小值  $1 + \ln a = 0$ , 即  $\ln a = -1$ ,  $a = e^{-1}$  ( $a = 1/e$ ). 此时  $g(x)$  的最小值等于 0,  $g(x)$  仅在  $x = 1/a = e$  处与  $x$  轴相切, 故函数有且仅有一个零点, 零点为  $x = e$ .

**情况 3** 若最小值  $1 + \ln a < 0$ , 即  $\ln a < -1$ ,  $0 < a < e^{-1}$  ( $0 < a < 1/e$ ). 此时  $g(x)$  的最小值小于 0. 由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$  且  $g(1/a) < 0$ ,  $g(x)$  在  $(0, 1/a)$  上连续且单调递减, 故在  $(0, 1/a)$  内必有一个零点. 由于  $g(1/a) < 0$  且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,  $g(x)$  在  $(1/a, +\infty)$  上连续且单调递增, 故在  $(1/a, +\infty)$  内必有一个零点. 故函数有两个零点.

结论:

- 若  $a > e^{-1}$ , 函数有 0 个零点.
- 若  $a = e^{-1}$ , 函数有 1 个零点, 位于  $x = e$ .
- 若  $0 < a < e^{-1}$ , 函数有 2 个零点, 一个位于  $(0, 1/a)$ , 另一个位于  $(1/a, +\infty)$ .

**习题 3.3.25** 设  $a \in (0, 1)$ ,  $b_1 = 1 - a$ ,

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{1 - e^{-b_n}} - a, \quad n = 1, 2, \dots$$

问  $\{b_n\}$  是否收敛? 若不收敛, 则给予证明, 若收敛, 则求极限.

**解** 我们记  $f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} - a, x > 0$ , 则有  $b_{n+1} = f(b_n), n = 1, 2, \dots$ , 且

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-x} - xe^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \geq 0$$

由 Lagrange 中值定理可知, 存在  $\xi_n \in (b_n, b_{n+1})$  使得

$$b_{n+2} - b_{n+1} = f(b_{n+1}) - f(b_n) = f'(\xi_n)(b_{n+2} - b_{n+1}).$$

据此可知,  $\{b_n\}$  是一个单调数列, 增减性由  $b_2 - b_1$  确定.

再设  $g(x) = \begin{cases} f(x) - x, & x > 0 \\ 1 - a, & x = 0 \end{cases}$  化简得到  $x > 0$  时,

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} - a, \quad g'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} \leq 0,$$

可知  $g(x)$  在  $x \geq 0$  处连续, 递减. 且由于  $g(0) = 1 - a > 0, g(1) = \frac{1}{1 - e^{-1}} - 1 - a < 0$ , 故存在唯一的  $c \in (0, 1)$  使得  $g(c) = 0$ , 即  $f(c) = c$ .

又由于

$$b_2 - b_1 = f(b_1) - b_1 = g(b_1) = \frac{b_1}{e^{b_1} - 1} - a = \frac{1 - a}{e^{1-a} - 1} - a = \frac{1 - ae^{1-a}}{e^{1-a} - 1} \geq 0.$$

由上述分析可知  $b_1 < c, \{b_n\}$  单调递增, 并且  $b_{n+1} - c = f(b_n) - f(c) = f'(\eta_n)(b_n - c)$ , 于是递推得到,  $b_n < c$ .

综上,  $\{b_n\}$  单调有界, 故收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 则

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(b).$$

故  $b = c$ .



## 习题 3.4

**习题 3.4.1** 试给出 Cauchy 中值定理的几何解释.

**解** 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  内可微. 根据 Cauchy 中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

几何上, 这意味着在区间  $[a, b]$  上, 存在一点  $\xi$ , 使得函数  $f(x)$  在该点的瞬时变化率 (导数) 与函数  $g(x)$  在该点的瞬时变化率之比等于它们在端点处的平均变化率之比. 换句话说, 存在一条切线, 其斜率与通过点  $(a, f(a))$  和  $(b, f(b))$  的割线的斜率成比例关系, 这个比例由函数  $g(x)$  的变化决定.

**习题 3.4.2** 试说明在闭区间  $[-1, 1]$  上 Cauchy 中值定理对函数  $f(x) = x^2$  和  $g(x) = x^3$  为什么不正确.

**解** 在闭区间  $[-1, 1]$  上, 函数  $f(x) = x^2$  和  $g(x) = x^3$  都是连续的, 并且在开区间  $(-1, 1)$  内可微. 然而, 我们计算它们在端点处的变化:

$$f(1) - f(-1) = 1^2 - (-1)^2 = 0,$$

$$g(1) - g(-1) = 1^3 - (-1)^3 = 2.$$

因此, Cauchy 中值定理要求存在  $\xi \in (-1, 1)$ , 使得

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{0}{2} = 0 = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

计算导数:

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 3x^2.$$

因此,

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} = \frac{2}{3\xi}.$$

要使得  $\frac{2}{3\xi} = 0$ , 必须有  $\xi \rightarrow \infty$ , 这显然不可能在区间  $(-1, 1)$  内实现. 因此, 在这个例子中, Cauchy 中值定理不成立.

这个例子说明了 Cauchy 中值定理的适用条件必须严格满足, 其中要求  $g'(x)$  在  $(a, b)$  内不为零, 否则可能导致分母为零的情况, 从而使得定理无法应用.

**习题 3.4.3** 设  $b > a > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可微, 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$2\xi(f(b) - f(a)) = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

解 设  $g(x) = x^2$ , 则  $g'(x) = 2x$ . 根据 Cauchy 中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{f'(\xi)}.$$

整理即得.

习题 3.4.4 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续 ( $ab > 0$ ), 在  $(a, b)$  上可微. 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

解 由 Cauchy 中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{f'(\xi)\xi - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}.$$

整理即得.

习题 3.4.5 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \alpha x} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x} \quad (m, n \text{ 为正整数}, \alpha, \beta \text{ 为实数});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + mx)^n - (1 + nx)^m}{x^2} \quad (m, n \text{ 为自然数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} \quad (\alpha \text{ 为任意实数});$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x};$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > 0);$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x};$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\tan x};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2} \right);$$

$$(12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln(1 - x)};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{2x - \pi};$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^{1/x} - e}{x};$$

$$(15) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1 - x) + \tan \frac{\pi}{2} x}{\cot \pi x};$$

$$(16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x^3)^2}{(1 - \cos x)(e^{x^2} - 1) \tan^2 x};$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(1 + x)}{x} \right)^{1/x};$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \cdot \left( 2 - \frac{x}{e^x - 1} \right);$$

$$(19) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} \quad (n \text{ 为自然数}, a > 1, k > 0);$$

$$(20) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k} \quad (n \text{ 为正整数}, k > 0).$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \alpha x} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{m}(1 + \alpha x)^{\frac{1}{m}-1} - \frac{\beta}{n}(1 + \beta x)^{\frac{1}{n}-1}}{1} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nm(1+mx)^{n-1} - mn(1+nx)^{m-1}}{2x} \\ &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nm^2(n-1)(1+mx)^{n-2} - mn^2(m-1)(1+nx)^{m-2}}{2} \\ &= \frac{mn(n-m)}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = -4.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} \stackrel{\arcsin x = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{\sin^3 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{6}.$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

(6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha.$$

(7)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{1} = 0.$$

(8)

$$\begin{aligned} ((a+x)^x)' &= (e^{x \ln(a+x)})' = \left( \frac{x}{a+x} + \ln(a+x) \right) e^{x \ln(a+x)} \\ ((a+x)^x)'' &= \left( \frac{x}{a+x} + \ln(a+x) \right)^2 e^{x \ln(a+x)} + \left( \frac{a}{(a+x)^2} + \frac{1}{a+x} \right) e^{x \ln(a+x)} \rightarrow (\ln a)^2 + \frac{2}{a} \quad (x \rightarrow 0) \\ (a^x)'' &= \ln^2(a) a^x \rightarrow \ln^2(a) \quad (x \rightarrow 0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \dots = \frac{(\ln a)^2 + \frac{2}{a} - (\ln a)^2}{2} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

(9)

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

(10)

$$\left| \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\tan x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{|\tan x|} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\cot x| = 0.$$

(11)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^2 \arctan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^4} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \arctan x)(x + \arctan x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{x - \arctan x}{x^3} \\
&\stackrel{x=\tan y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} 2 \frac{\tan y - y}{\tan^3 y} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y - y}{y^3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1-x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0
\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{(2x-\pi)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{(2x-\pi) \ln(\tan x)} = \exp \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{2x-\pi}} \right) \\
&\stackrel{L'H}{=} \exp \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x \cos^2 x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}} \right) = \exp \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-(2x-\pi)^2}{\sin 2x} \right) \\
&\stackrel{x-\frac{\pi}{2}=y}{=} \exp \left( \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-4y^2}{-\sin 2y} \right) = e^0 = 1
\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x} &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right) \right) \\
&= \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} \left( x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) - 1 \right) \right) = e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x) + \tan \frac{\pi}{2}x}{\cot \pi x} &\stackrel{y=1-x}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y + \tan \frac{\pi}{2}(1-y)}{\cot \pi(1-y)} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi y (\ln y + \tan \frac{\pi}{2}y)}{-\cos \pi y} \\
&= - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi y}{\tan \frac{\pi}{2}y} = -2
\end{aligned}$$

(16)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x^3)^2}{(1 - \cos x)(e^{x^2} - 1) \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3)^2}{(\frac{1}{2}x^2)(x^2)x^2} = 2$$

(17) 当  $x$  充分大时,  $1 < \ln(1+x) < x^{1/2}$ , 此时  $\frac{1}{x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < \frac{1}{x^{1/2}}$ , 同时

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(1/x) \right) = 1 \\
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^{1/2}} \right)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x^{-1/2}) \right) = 1
\end{aligned}$$

因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)^{1/x} = 1.$

(18)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \cdot \left(2 - \frac{x}{e^x - 1}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{x}{e^x - 1}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(1+1)}{1+x \sin x - (1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(19) 转而证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0.$$

而后由 Heine 定理即得.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{[k]}}{a^x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[k] x^{[k]-1}}{(\ln a) a^x} = \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[k]!}{(\ln a)^{[k]} a^x} = 0.$$

(20) 转而证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0.$$

而后由 Henie 定理即得.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{kx^k} = 0.$$

**习题 3.4.6** 设  $f(x)$  在区间  $[0, a]$  上有二阶连续导数,  $f'(0) = 1, f''(0) \neq 0$ , 且  $0 < f(x) < x$ ,  $x \in (0, a)$ . 令

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_1 \in (0, a).$$

(1) 求证:  $\{x_n\}$  收敛并求其极限;

(2) 试问  $\{nx_n\}$  是否收敛? 若收敛, 则求其极限.

**解**

(1)  $\{x_n\}$  是递减的, 因为  $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n < 0$ .  $\{x_n\}$  具有下界 0, 故可设  $\{x_n\}$  收敛到  $x$ . 令  $n \rightarrow \infty$ , 由  $f$  的连续性, 得  $x = f(x)$ , 故  $x = 0$ .

(2) 由泰勒展开,  $f(x) = x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$ , 因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - f(x_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + o(x_n^2)}{x_n - \left(x_n + \frac{f''(0)}{2}x_n^2 + o(x_n^2)\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{-\frac{f''(0)}{2}x_n^2 + o(x_n^2)} \\ &= -\frac{2}{f''(0)} \end{aligned}$$

## 习题 3.5

**习题 3.5.1** 证明 (Jensen (延森) 不等式): 设  $f(x)$  是区间  $I$  上的凸函数,  $x_1, \dots, x_n$  是  $I$  中  $n$  个点, 则对任意满足  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$  的正数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

**解** 采用数学归纳法. 当  $n = 2$  时, 结论显然成立.

假设当  $n = k$  时结论成立, 即对任意满足  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$  的正数  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_k f(x_k).$$

现考虑  $n = k + 1$  的情形. 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$  是满足  $\alpha_1 + \dots + \alpha_{k+1} = 1$  的正数. 记  $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ , 则有  $0 < \beta < 1$ . 因此,

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) &= f\left(\beta \left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \dots + \frac{\alpha_k}{\beta} x_k\right) + (1 - \beta) x_{k+1}\right) \\ &\leq \beta f\left(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \dots + \frac{\alpha_k}{\beta} x_k\right) + (1 - \beta) f(x_{k+1}) \quad (\text{由凸函数的定义}) \\ &\leq \beta \left(\frac{\alpha_1}{\beta} f(x_1) + \dots + \frac{\alpha_k}{\beta} f(x_k)\right) + (1 - \beta) f(x_{k+1}) \quad (\text{由归纳假设}) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}). \end{aligned}$$

由数学归纳法可知, 对任意正整数  $n$ , 结论均成立.

**习题 3.5.2** 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  都是正数, 且  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ , 证明: 有不等式

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

特别, 取  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ , 则得到算术平均不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

(提示: 考虑区间  $(0, +\infty)$  上的函数  $f(x) = -\ln x$  的凸凹性, 并利用 Jensen 不等式.)

**解** 设  $f(x) = -\ln x$ , 则  $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ , 因此  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上是凸函数. 由习题 3.5.1, 对任意满足  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$  的正数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 有

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) &\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \\ -\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) &\leq -(\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \dots + \lambda_n \ln x_n). \end{aligned}$$

即

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \ln(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}).$$

即

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

**习题 3.5.3** 设  $a, b, c, d$  满足  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ , 其中  $b > 0, d > 0$ , 证明不等式

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

**解** 由  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$  可得  $ad \leq bc$ . 因为  $b > 0, d > 0$ , 故有

$$ad + ab \leq bc + ab \Rightarrow a(d+b) \leq b(c+a) \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d}.$$

同理,

$$ad \leq bc \Rightarrow ad + cd \leq bc + cd \Rightarrow c(b+d) \geq d(a+c) \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

**习题 3.5.4** 设  $f(x)$  是区间  $I$  上的凸函数, 证明:  $f(x)$  在  $I$  的内点是连续的.

**解** 设  $x_0$  是区间  $I$  的一个内点, 即证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . 仅证右连续  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ , 左连续同理.

由于  $x_0$  是区间  $I$  的内点, 故存在  $\delta > 0$ , 使得区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ .

任取  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , 则由凸函数的定义, 对任意  $a \in (x_0 - \delta, x_0)$ , 有

$$\frac{f(x) - f(x_0 - \delta)}{x - (x_0 - \delta)} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{(x_0 + \delta) - x_0}.$$

记  $M_1 = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \delta)}{\delta}$ ,  $M_2 = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta}$ , 则  $M_1, M_2$  均为常数, 上式可写为

$$M_1(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M_2(x - x_0).$$

当  $x \rightarrow x_0^+$  时, 由夹逼定理可知,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

**习题 3.5.5** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上处处可导, 且除了有限个点之外, 均有  $f''(x) > 0$ , 证明:  $f(x)$  在  $I$  上是凸的. 将本题用于  $f(-x)$ , 就得到关于凹函数的类似结论.

**解** 由题设条件以及 **习题 3.3.16** 知, 可得  $f'(x)$  单调增, 由一阶导判别法即证.

其中, 一阶导判别法表述为:

**定理 (零阶导判别法)**  $f(x)$  在区间  $I$  上为凸函数  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$  都有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

**定理 (一阶导判别法)** 若  $f'(x)$  在  $I$  上存在, 则  $f(x)$  在  $I$  上为凸函数  $\Leftrightarrow f'(x)$  在  $I$  上单调增.

**证明** 必要求任取  $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, x_1 < x < x_2$ , 应用 3.5 中第一个不等式, 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

同理, 对  $x_1 < x' < x_2$ , 应用 3.5 中的第二个不等式, 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

并令  $x' \rightarrow x_2$ , 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_1)$$

所以  $f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ . 根据  $x_1, x_2$  的任意性, 必须性证明毕.

充分析对任意的  $x_1 < x < x_2$ , 由微分中值定理, 存在  $\xi \in (x_1, x_2), \eta \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x - x_1), \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\eta) \cdot (x_2 - x_1)$$

因为  $f'(x)$  单调增, 且  $x_1 < x < x_2$ , 即

$$f'(\xi) \leq f'(\eta)$$

可知函数  $f$  是凸函数.

**定理 (二阶导判别法)** 若  $f''(x)$  在  $I$  上存在, 则  $f(x)$  在  $I$  上为凸函数  $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0, x \in I$ .

**习题 3.5.6** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  内有连续的二阶导数. 若  $x_0$  是  $f(x)$  的一个拐点, 证明:

$$f''(x_0) = 0.$$

**解** 由拐点的定义可知, 存在  $\delta > 0$ , 使得在区间  $(x_0 - \delta, x_0)$  上,  $f(x)$  为凸函数, 在区间  $(x_0, x_0 + \delta)$  上,  $f(x)$  为凹函数. 由二阶导判别法知, 对任意  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , 有  $f''(x) \geq 0$ ; 对任意  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , 有  $f''(x) \leq 0$ . 由于  $f''(x)$  在区间  $I$  内连续, 故有

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f''(x) \geq 0, \quad f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f''(x) \leq 0.$$

因此,  $f''(x_0) = 0$ .

**习题 3.5.7** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  及其附近二阶可导, 且  $f''(x_0) = 0$ . 若  $f'''(x_0)$  存在但不为零, 证明:  $x_0$  是  $f(x)$  的拐点.

**解** 不妨设  $f'''(x_0) > 0$ . 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = f'''(x_0) > 0$ , 所以存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$\frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x) \geq 0, & x_0 < x < x_0 + \delta; \\ f''(x) \leq 0, & x_0 - \delta < x < x_0. \end{cases}$$

由二阶导判别法知,  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0)$  上为凹函数, 在区间  $(x_0, x_0 + \delta)$  上为凸函数, 因此,  $x_0$  是  $f(x)$  的拐点.

**习题 3.5.8** 求下列函数的凸、凹区间和拐点.

$$(1) y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25;$$

$$(2) y = x + \frac{1}{x};$$



(3)  $y = x^{5/3}$ ;

(4)  $y = (1 + x^2)e^x$ ;

(5)  $y = x^4$ ;

(6)  $y = x + \sin x$ .

解

(1)  $y' = 6x^2 - 6x - 36, y'' = 12x - 6$ .

- 当  $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$  时,  $y'' < 0$ , 函数在  $(-\infty, \frac{1}{2})$  上为凹函数;

- 当  $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$  时,  $y'' > 0$ , 函数在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  上为凸函数;

 $x = \frac{1}{2}$  为拐点.

(2)  $y' = 1 - \frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}$ .

- 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $y'' > 0$ , 函数在  $(0, +\infty)$  上为凸函数;

- 当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $y'' < 0$ , 函数在  $(-\infty, 0)$  上为凹函数;

 $y = y(x)$  在  $x = 0$  处无定义, 故无拐点.

(3)  $y' = \frac{5}{3}x^{2/3}, y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3}$ . 函数只在  $x \geq 0$  上有定义, 此时  $y'' > 0$ , 函数在  $[0, +\infty)$  上为凸函数, 无拐点.

(4)  $y' = (1 + 2x + x^2)e^x, y'' = (3 + 4x + x^2)e^x$ .

- 当  $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$  时,  $y'' > 0$ , 函数在  $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$  上为凸函数;

- 当  $x \in (-3, -1)$  时,  $y'' < 0$ , 函数在  $(-3, -1)$  上为凹函数;

 $x = -3, -1$  为拐点.

(5)  $y' = 4x^3, y'' = 12x^2 \geq 0$ , 函数在  $(-\infty, +\infty)$  上为凸函数, 无拐点.

(6)  $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$ .

- 当  $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$  时,  $y'' < 0$ , 函数在  $(2k\pi, (2k+1)\pi)$  上为凹函数;

- 当  $x \in ((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$  时,  $y'' > 0$ , 函数在  $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$  上为凸函数;

 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  为拐点.**习题 3.5.9** 求  $a, b$  值, 使点  $(1, 3)$  为曲线  $y = ax^3 + bx^2$  的拐点.解  $y' = 3ax^2 + 2bx, y'' = 6ax + 2b$ . 因为点  $(1, 3)$  为曲线  $y = ax^3 + bx^2$  的拐点, 故有

$$\begin{cases} 3 = a + b; \\ 0 = 6a + 2b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1; \\ b = 2. \end{cases}$$

**习题 3.5.10** 描绘下列各曲线的图形.

(1)  $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$ ;

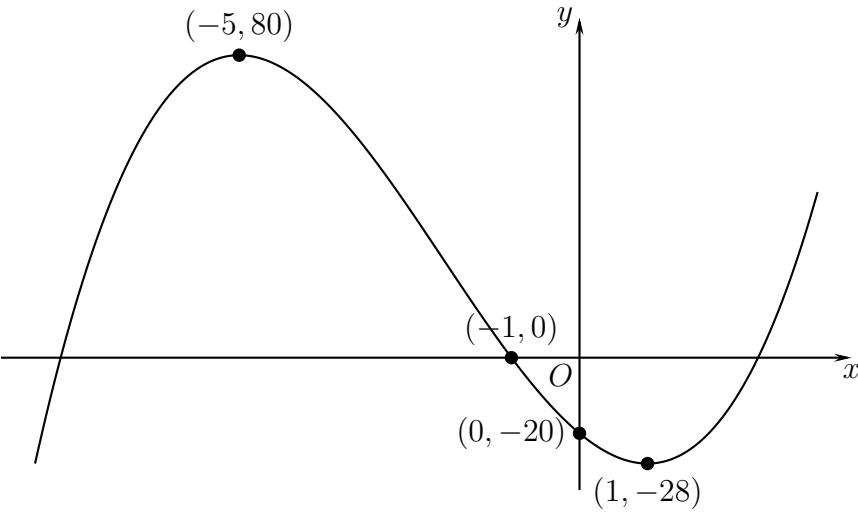
(2)  $y = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$ ;

(3)  $y = x - 2 \arctan x$ ;

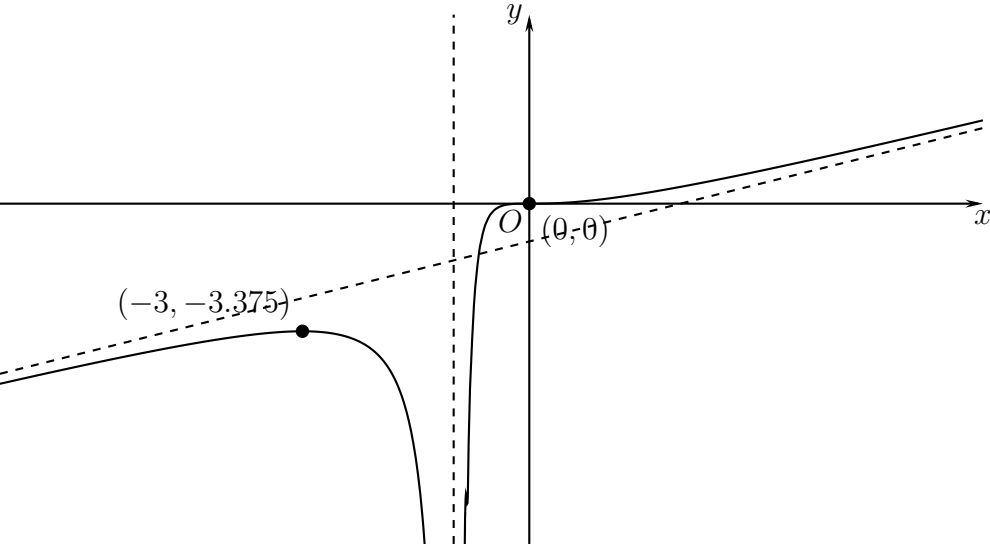
(4)  $y = xe^{-x}$ .

解

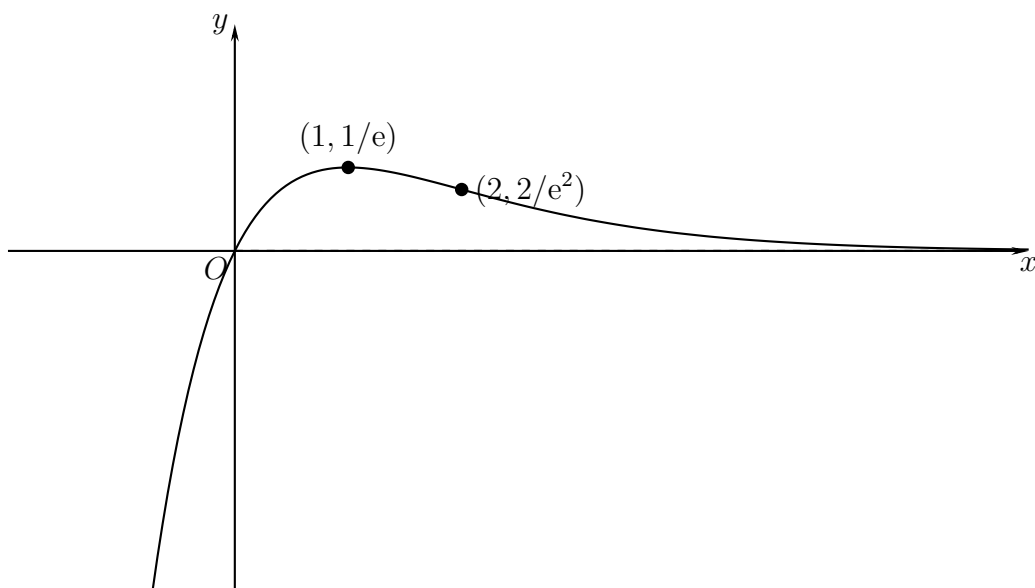
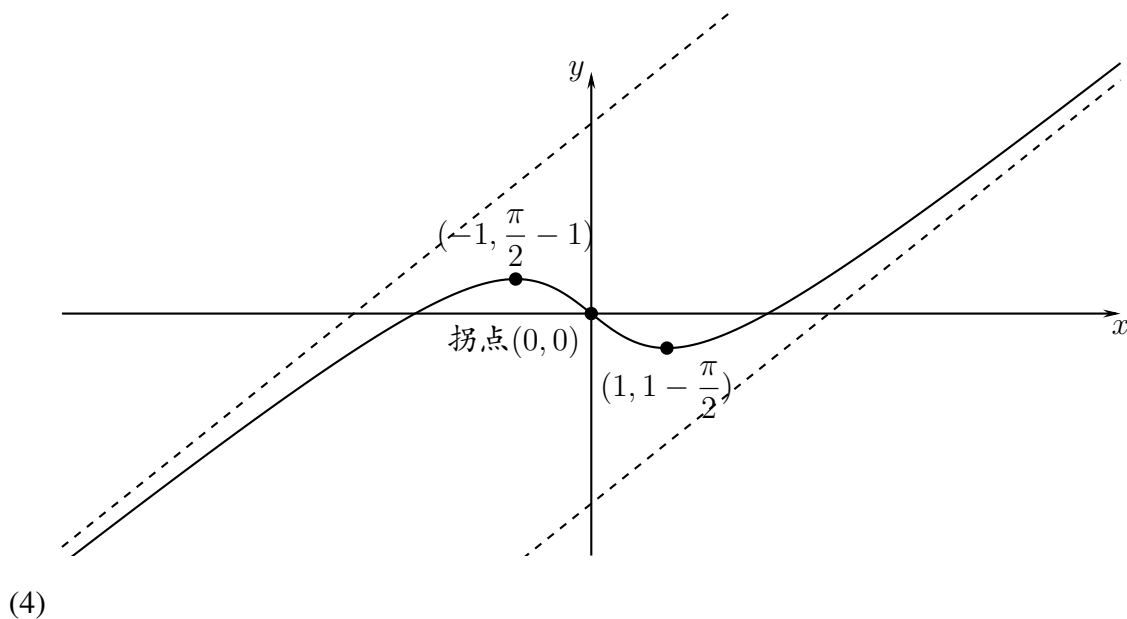
(1)



(2)



(3)



**习题 3.5.11** 设函数  $y = f(x)$  所表示的曲线为  $C$ . 记  $C$  上一点  $M(x, y)$  处的曲率为  $\kappa (\kappa \neq 0)$ , 过点  $M$  引曲线的法线, 在此法线上曲线上凸的一侧取点  $D$ , 使  $|DM| = \frac{1}{\kappa} = \rho$ . 以  $D$  为圆心,  $\rho$  为半径作圆, 这个圆称为曲线在点  $M$  处的曲率圆, 其圆心  $D$  称为曲线在点  $M$  处的曲率中心, 半径  $\rho$  称为曲线在点  $M$  处的曲率半径.

求下列曲线在指定点的曲率、曲率中心及曲率半径.

(1)  $xy = 1$  在点  $(1, 1)$  处;

(2)  $y = e^{-x^2}$  在点  $(0, 1)$  处.

解

(1) 设  $y = \frac{1}{x}$ , 则  $y' = -\frac{1}{x^2}$ ,  $y'' = \frac{2}{x^3}$ . 在点  $(1, 1)$  处, 有

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 1)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{2}.$$

曲线在点  $(1, 1)$  处的法线方程为  $y - 1 = x - 1$ , 即  $y = x$ . 因此, 曲率中心  $D$  的坐标为

$$D(2, 2).$$

(2) 设  $y = e^{-x^2}$ , 则  $y' = -2xe^{-x^2}$ ,  $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ . 在点  $(0, 1)$  处, 有

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 0)^{3/2}} = 2,$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}.$$

曲线在点  $(0, 1)$  处的法线方程为  $y - 1 = 0$ , 即  $y = 1$ . 因此, 曲率中心  $D$  的坐标为

$$D\left(0, 1 - \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

**习题 3.5.12** 求下列曲线在指定点的曲率.

$$(1) \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}, \text{ 在 } t = 1 \text{ 处}; \quad (2) \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases} \text{ 在 } t = \frac{\pi}{2} \text{ 处}.$$

解

$$(1) \text{ 对于参数方程 } \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}, \text{ 参数方程曲线的曲率公式为:}$$

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

计算各阶导数:

$$x' = 6t, \quad x'' = 6$$

$$y' = 3 - 3t^2, \quad y'' = -6t$$

在  $t = 1$  处:

$$x'(1) = 6, \quad x''(1) = 6$$

$$y'(1) = 3 - 3 = 0, \quad y''(1) = -6$$

因此曲率为:

$$\kappa = \frac{|6 \cdot (-6) - 0 \cdot 6|}{(6^2 + 0^2)^{3/2}} = \frac{|-36|}{6^3} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

$$(2) \text{ 对于参数方程 } \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}, \text{ 计算各阶导数:}$$

$$x' = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t$$

$$x'' = \cos t - t \sin t$$

$$y' = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t$$

$$y'' = \sin t + t \cos t$$

在  $t = \frac{\pi}{2}$  处:

$$x' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$x'' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$y' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$y'' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$$

因此曲率为:

$$\kappa = \frac{|0 \cdot 1 - \frac{\pi}{2} \cdot (-\frac{\pi}{2})|}{\left(0^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\left|\frac{\pi^2}{4}\right|}{\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^3}{8}} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{8}{\pi^3} = \frac{2}{\pi}$$

**习题 3.5.13** 对数曲线  $y = \ln x$  上哪一点的曲率半径最小? 并求出该点的曲率半径.

**解** 设  $y = \ln x$ , 则  $y' = \frac{1}{x}$ ,  $y'' = -\frac{1}{x^2}$ . 曲率半径  $\rho$  的表达式为

$$\rho = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{x}.$$

为了求出曲率半径的最小值, 只需求出函数  $g(x) = \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{x}$  的最小值. 计算  $g'(x)$ :

$$g'(x) = \frac{3x(x^2 + 1)^{1/2} \cdot x - (x^2 + 1)^{3/2}}{x^2} = \frac{(x^2 + 1)^{1/2}(3x^2 - (x^2 + 1))}{x^2} = \frac{(x^2 + 1)^{1/2}(2x^2 - 1)}{x^2}.$$

令  $g'(x) = 0$ , 可得  $2x^2 - 1 = 0$ , 即  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 当  $x > 0$  时,  $g'(x) < 0$  当  $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且  $g'(x) > 0$  当  $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 因此, 函数  $g(x)$  在  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  处取得最小值. 此时的曲率半径为

$$\rho_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1\right)^{3/2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

**习题 3.5.14** 设函数  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的凸函数且有界, 求证:  $f(x)$  是常数.

**解** 反证法. 假设  $f(x)$  不是常数, 则存在  $x, y \in (-\infty, +\infty)$ , 使得  $f(x) > f(y)$ . 由凸函数的定义可知, 对任意  $t \in (0, 1)$ , 有

$$f(x) \leq \lambda f\left(\frac{x - (1 - \lambda)y}{\lambda}\right) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

因此

$$\frac{f(x) - (1 - \lambda)f(y)}{\lambda} \leq f\left(\frac{x - (1 - \lambda)y}{\lambda}\right).$$

由于  $f(x) > f(y)$ ,

$$\frac{f(x) - (1 - \lambda)f(y)}{\lambda} = \frac{f(x) - f(y)}{\lambda} + f(y) \rightarrow +\infty, \quad \lambda \rightarrow 0^+.$$

所以当  $\lambda \rightarrow 0^+$  时,

$$f\left(\frac{x - (1 - \lambda)y}{\lambda}\right) \rightarrow +\infty,$$

与  $f(x)$  有界矛盾. 因此,  $f(x)$  是常数.

## 习题 3.6

习题 3.6.1 写出下列函数的（具有 Peano 余项的）Maclaurin 展开式.

$$(1) y = \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1}; \quad (2) y = \sin^2 x.$$

解

(1)

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1} = -(x^3 + 2x + 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)) \\ &= -1 - 3x - 3x^2 - 4x^3 - 4x^4 - \cdots - 4x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

习题 3.6.2 求出函数  $e^{\sin x}$  的（具有 Peano 余项的）三阶 Maclaurin 展开式.

解

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2!} + \frac{(\sin x)^3}{3!} + o((\sin x)^3) \\ &= 1 + \left( x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) + \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{6} (x + o(x))^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \right) + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

习题 3.6.3 求出函数  $\ln(\cos x)$  的（具有 Peano 余项的）六阶 Maclaurin 展开式.

解

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln(1 + (\cos x - 1)) \\
&= (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3} + o((\cos x - 1)^3) \\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\right)x^4 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\right)x^6 + o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)
\end{aligned}$$

**习题 3.6.4** 已知  $f(x)$  是一个四次多项式, 并且  $f(2) = -1, f'(2) = 0, f''(2) = 2, f'''(2) = -12, f^{(4)}(2) = 24$ . 计算  $f(-1), f'(0), f''(1)$ .

解

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 \\
&= -1 + (x-2)^2 - 2(x-2)^3 + (x-2)^4
\end{aligned}$$

因此

$$f(-1) = 143, f'(0) = -60, f''(1) = 26.$$

**习题 3.6.5** 求下列函数具有 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

(1)  $y = \tan x$  在  $x = 0$  的二阶 Taylor 展开式; (2)  $y = \frac{1}{x}$  在  $x = -1$  的  $n$  阶 Taylor 展开式.

解

(1)

$$\tan x = \tan 0 + \sec^2 0 \cdot x + \frac{2 \tan 0 \sec^2 0}{2!}x^2 + \frac{2(\sec^4 \xi + 2 \tan^2 \xi \sec^2 \xi)}{3!}x^3 = x + \frac{\sec^4 \xi}{3}x^3, \quad \xi \in (0, x).$$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{-1} + \frac{-1}{(-1)^2}(x+1) + \frac{2!}{(-1)^3 2!}(x+1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1} n!}(x+1)^n + \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{\xi^{n+2} (n+1)!}(x+1)^{n+1} \\
&= -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \cdots - (x+1)^n - \frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}, \quad \xi \in (-1, x).
\end{aligned}$$

**习题 3.6.6** 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right];$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x}.$$



解

(1)

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \quad e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4))}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{12}.$$

(2)

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4), \quad \sqrt[3]{1-x^2} = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4))}{x^2} = \frac{5}{6}.$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - \left( x - \frac{1}{2} + o(1) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} - o(1) \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) &= 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^4}{24} + o((\sin x)^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{24} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \right) + \frac{1}{24} (x^4 + o(x^4)) + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4))}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{6}.$$

**习题 3.6.7** 设函数  $f(x)$  处处有  $n+1$  阶导数, 证明:  $f(x)$  为次数不超过  $n$  的多项式的充分必要条件是  $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ .

**解** 充分性: 若  $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ , 则由 Taylor 公式可知, 考虑在点  $x=0$  处的 Taylor 展开式, 对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

因此,  $f(x)$  为次数不超过  $n$  的多项式, 各项系数分别为  $f(0), f'(0), \frac{f''(0)}{2!}, \dots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

必要性: 若  $f(x)$  为次数不超过  $n$  的多项式, 则可设

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

因此, 对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 有

$$f^{(n+1)}(x) = 0.$$

**习题 3.6.8** 设函数  $f'(x)$  在  $[0, 2]$  上二阶可导, 且对任意  $x \in [0, 2]$ , 有  $|f(x)| \leq 1$  及  $|f''(x)| \leq 1$ .

证明:  $|f'(x)| \leq 2, x \in [0, 2]$ .

解

$$f(0) = f(x) - f'(0)x - \frac{f''(\xi)}{2}x^2, \quad \xi \in (0, x).$$

$$f(2) = f(x) + f'(2)(2-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2, \quad \eta \in (x, 2).$$

因此, 对任意  $x \in [0, 2]$ , 有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \frac{f(2) - f(0) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 - \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2}{2} \right| \\ &\leq \frac{|f(2)|}{2} + \frac{|f(0)|}{2} + \frac{|f''(\xi)|x^2}{4} + \frac{|f''(\eta)|(2-x)^2}{4} \\ &\leq 1 + \frac{1}{4}(x^2 + (2-x)^2) \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

**习题 3.6.9** 设  $n$  为自然数, 考虑函数  $f(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$  证明:  $f'(0) = 0$ , 但  $f''(0)$  不存在.

(提示: 证明  $f(x)$  仅在一点  $x = 0$  可导.)

注意, 我们显然有

$$f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

但当  $n > 1$  时, 并不能断言  $f^{(k)}(0) = 0 (2 \leq k \leq n)$ . 因此, 定理 3.32 中的条件: 函数在点  $x_0$  处有  $n$  阶导数, 是至关重要的.

解

$$|f'(0)| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0.$$

但是, 当  $x \neq 0, x \in \mathbb{Q}$  时,

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow x, t \in \mathbb{Q}} \frac{t^{n+1} - x^{n+1}}{t - x} = (n+1)x^n, & t \in \mathbb{Q}, \\ \lim_{t \rightarrow x, t \notin \mathbb{Q}} \frac{0 - x^{n+1}}{t - x} = \infty, & t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

当  $x \neq 0, x \notin \mathbb{Q}$  时,

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow x, t \in \mathbb{Q}} \frac{t^{n+1} - 0}{t - x} = \infty, & t \in \mathbb{Q}, \\ \lim_{t \rightarrow x, t \notin \mathbb{Q}} \frac{0 - 0}{t - x} = 0, & t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

因此,  $f'(x)$  在  $x \neq 0$  处不存在, 故  $f''(0)$  不存在.

**习题 3.6.10** 考虑函数  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  它在  $x \neq 0$  处显然有任意阶导数. 证明:  $f(x)$  在

$x = 0$  处的任意阶导数都存在, 而且都等于零. (提示: 首先, 易用数学归纳法证明, 当  $x \neq 0$  时, 对  $n = 1, 2, \dots$  有  $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ , 这里  $P_{3n}(t)$  是  $t$  的  $3n$  次多项式; 其次, 由导数定义及 L'Hôpital 法则, 得出 (记  $y = \frac{1}{x}$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0,$$

即  $f'(0) = 0$ . 现在, 说的结论易用数学归纳法及 L'Hôpital 法则证明.)

本题意味着, 对任意的自然数  $n$ , 函数  $f$  在  $x = 0$  处的  $n$  阶 Taylor 多项式是 0; 换句话说, 余项总是等于  $f(x)$ . 因此, 即使函数在一点附近的性态, 用 (在该点的) 足够高阶的导数也未必能将其揭示出来.

**解** 设  $n$  为自然数, 当  $x \neq 0$  时, 用数学归纳法可证  $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ , 这里  $P_{3n}(t)$  是  $t$  的  $3n$  次多项式. 当  $n = 1$  时,

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}.$$

假设当  $n = k$  时结论成立, 则当  $n = k + 1$  时,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left( e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x^2}} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \left( \frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

显然,  $\frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)$  是  $\frac{1}{x}$  的  $3(k+1)$  次多项式. 因此, 结论对任意自然数  $n$  都成立.

由 L'Hôpital 法则, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0,$$

即  $f'(0) = 0$ . 假设当  $n = k$  时,  $f^{(k)}(0) = 0$ , 则当  $n = k + 1$  时,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{P_{3k}(y)}{ye^{y^2}} = 0 \end{aligned}$$

因此, 结论对任意自然数  $n$  都成立.

**习题 3.6.11** 设函数  $f(x)$  在驻点  $x_0$  处的  $n$  阶微商存在, 并且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{而 } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

证明:

- (1) 若  $n$  为奇数, 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处无极值;
- (2) 若  $n$  为偶数, 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处取得极值. 当  $f^{(n)}(x_0) > 0$  时,  $f(x)$  在点  $x_0$  处取极小值; 当  $f^{(n)}(x_0) < 0$  时,  $f(x)$  在点  $x_0$  处取极大值.

本题表明, 若函数  $f(x)$  在驻点上存在如上所述的高阶导数, 则由此可确定驻点是否为极值点. 然而, 我们注意, 上一题中的函数  $f$  在  $x = 0$  处显然有极小值, 但却不能用这一判别法判别.

**解** 不妨设  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $f^{(n)}(x) > 0$ . 由 Taylor 公式, 对任意  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \xi \in (x_0, x) \text{ 或 } (x, x_0).$$

(1) 当  $n$  为奇数时,

- 若  $x > x_0$ , 则  $(x - x_0)^n > 0$ , 故  $f(x) - f(x_0) > 0$ ;
- 若  $x < x_0$ , 则  $(x - x_0)^n < 0$ , 故  $f(x) - f(x_0) < 0$ .

因此, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处无极值.

(2) 当  $n$  为偶数时,

- 若  $x > x_0$ , 则  $(x - x_0)^n > 0$ , 故  $f(x) - f(x_0) > 0$ ;
- 若  $x < x_0$ , 则  $(x - x_0)^n > 0$ , 故  $f(x) - f(x_0) > 0$ .

因此, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处取极小值.

对于  $f^{(n)}(x_0) < 0$  的情形, 类似可证.

## 第3章综合习题

习题 3.C.1 设  $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n)$ , 求  $f'(0)$ .

解

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)(x+2)\dots(x+n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!. \end{aligned}$$

习题 3.C.2 设奇函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上具有二阶连续导数, 记函数

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 确定  $a$  的值, 使  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

(2) 对 (1) 中确定的  $a$ , 证明:  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 且导函数连续.

解

(1) 由于  $f(x)$  是奇函数, 故  $f(0) = 0 \Rightarrow g(0) = a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ .

(2)

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f'(0)x}{x^2} = \frac{f''(0)}{2}, \\ g'(x) &= \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

又

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) \cdot x + f'(x) - f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = g'(0).$$

因此,  $g'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

习题 3.C.3 设  $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + a_n = 0$ , 证明: 方程  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  在  $(0, 1)$  内至少有一个根.

解 设函数  $f(x) = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^{n-1} + \dots + a_nx$ . 则  $f(0) = 0$ , 且

$$f(1) = \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + a_n = 0.$$

由 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ , 即

$$a_0\xi^{n-1} + a_1\xi^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0.$$

习题 3.C.4 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可微, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ .

**解** 设函数  $g(x) = e^x f(x)$ , 则  $g(a) = g(b) = 0$ . 由 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$g'(\xi) = e^\xi f'(\xi) + e^\xi f(\xi) = e^\xi (f'(\xi) + f(\xi)) = 0.$$

因为  $e^\xi \neq 0$ , 故  $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ .

**习题 3.C.5** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上连续, 如果任给  $I$  中两点  $x_1, x_2$ , 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

证明:  $f(x)$  是区间  $I$  上的凸函数.

我们将此习题完整表示为以下定理:

**定理** 设  $f(x)$  在  $I$  上有定义, 若  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 以下三式等价:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1), \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (\text{A})$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (\text{B})$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{C})$$

**证明** 我们使用向前和向后两步归纳法证明此定理.

(1) 第一步我们先证明: 式 (B) 成立  $\Rightarrow$  式 (C) 成立.

(a) 由式 (B) 知式 (C) 当  $n = 2$  时成立. 现证  $n = 4$  时式 (C) 成立. 事实上, 对  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$ , 由式 (B), 我们有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) &= f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2}\right) \leq \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)}{2} \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4}. \end{aligned}$$

此即式 (C) 对  $n = 4$  成立. 一般来说, 对任一自然数  $k$ , 重复上面方法, 应用 (B) 式  $k$  次, 可知

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2^k})}{2^k}.$$

这说明式 (C) 对一切  $n = 2^k$  皆成立.

(b) 证明式 (C) 对  $n = k + 1$  成立时, 必对  $n = k$  也成立. 记  $A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}$ , 则  $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = kA$ , 所以

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + A}{k + 1}.$$

因此式 (C) 对  $n = k + 1$  成立, 故

$$f(A) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + A}{k + 1}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) + f(A)}{k + 1}.$$

不等式两边同时乘以  $k+1$ , 减去  $f(A)$ , 最后除以  $k$ . 注意

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k},$$

我们得到

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k)}{k}.$$

此式表示式 (C) 对  $n=k$  成立.

(2) 第二步我们证明: 式 (C) 成立  $\Rightarrow$  式 (A) 成立.

(a) 当  $\lambda_1 = \frac{m}{n}, \lambda_2 = \frac{n-m}{n}$  为有理数时,

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f\left(\frac{m}{n}x_1 + \frac{n-m}{n}x_2\right) \\ &= f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_1 + x_2 + \cdots + x_2}{n}\right) \\ &\leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_2)}{n} \\ &= \frac{m}{n}f(x_1) + \frac{n-m}{n}f(x_2). \end{aligned}$$

(b) 当  $\lambda_1, \lambda_2$  为无理数时, 由有理数的稠密性, 存在  $\lambda_n \rightarrow \lambda_1$ , 由  $f$  的连续性, 有

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_1 + (1 - \lambda_n)x_2\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\lambda_n x_1 + (1 - \lambda_n)x_2) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n f(x_1) + (1 - \lambda_n)f(x_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \end{aligned}$$

**习题 3.C.6** 设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的二阶可微函数,  $f(0) = f(1) = 0$ . 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

**解** 设函数  $g(x) = (1-x)f(x)$ , 则  $g(0) = g(1) = 0$ . 由 Rolle 定理, 存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得

$$g'(\eta) = -f(\eta) + (1-\eta)f'(\eta) = 0$$

同时  $g'(1) = -f(1) + (1-1)f'(1) = 0$ . 再次应用 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$ , 使得

$$g''(\xi) = -2f'(\xi) + (1-\xi)f''(\xi) = 0.$$

故

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

**习题 3.C.7** 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) = f(b) = 0, f'(a)f'(b) > 0$ . 证明: 在  $(a, b)$  内存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

解 不妨设  $f'(a) > 0, f'(b) > 0$ . 则由

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

知存在  $\delta_1 > 0$ , 使得当  $x \in (a, a + \delta_1)$  时,  $f(x) > 0$ . 同理, 由

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0,$$

知存在  $\delta_2 > 0$ , 使得当  $x \in (b - \delta_2, b)$  时,  $f(x) < 0$ . 令  $\delta = \min \left\{ \delta_1, \delta_2, \frac{b-a}{2} \right\}$ , 则  $f(a + \delta) > 0, f(b - \delta) < 0$ . 由介值定理, 存在  $\xi \in (a + \delta, b - \delta) \subset (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

习题 3.C.8 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导,  $f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{2}$ . 求证: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

解

(1) 若  $f(x) > 0$  在  $[0, 1]$  上成立, 则设函数  $g(x) = x - \frac{1}{f(x)}$ , 则  $g(0) = -1, g(1) = 1 - 2 = -1$ .

由 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$g'(\xi) = 1 + \frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 0.$$

故

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

(2) 若  $f(x) > 0$  在  $[0, 1]$  上不成立, 考虑  $x_0 := \inf\{x : f(x) = 0\}$ , 则  $f(x_0) = 0$ . 这是因为  $x_0 = \inf\{x : f(x) = 0\} \Rightarrow \exists \{x_n\}, x_n \rightarrow x_0, f(x_n) = 0$ , 由  $f$  的连续性可知  $f(x_0) = 0$ .

此时作以下分类:

(a) 若  $f'(x_0) = 0$ , 则  $f^2(x_0) + f'(x_0) = 0$  成立.

(b) 若  $f'(x_0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上单调递增. 又  $f(x_0) = 0$ , 所以当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f(x) < 0$ . 这与  $x_0 = \inf\{x : f(x) = 0\}$  矛盾.

(c) 若  $f'(x_0) < 0$ , 存在  $f(x)$  在  $[x_0, 1]$  上的极小值点  $y_0 : f(y) < 0$ , 则  $f'(y_0) = 0$ . 因此

$$f^2(x_0) + f'(x_0) = f'(x_0) < 0,$$

$$f^2(y_0) + f'(y_0) = f^2(y_0) \geq 0.$$

注 我希望对  $f^2(x) + f'(x)$  这个函数应用介值性, 但是我们只知道  $f(x)$  可导, 且不能直接说  $f(x)$  的连续性, 加  $f'(x)$  的介值性得到  $f^2(x) + f'(x)$  的介值性. 所以只好这么别扭的构造如下的  $h(x)$ .

考虑  $h(x) = e^{\int_0^x f(t) dt} f(x)$ , 则  $h'(x) = e^{f(x)} (f^2(x) + f'(x))$ . 因此  $h'(x_0) < 0, h'(y_0) \geq 0$ .



由 Darboux 定理, 存在  $\xi \in (x_0, y_0) \subset (0, 1)$ , 使得  $h'(\xi) = 0$ , 即

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

**习题 3.C.9** 设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上二阶可微, 且满足  $f(a) > 0, f'(a) < 0$ , 以及当  $x > a$  时,  $f''(x) \leq 0$ . 试证在区间  $(a, +\infty)$  内, 函数  $f(x)$  恰有一个零点.

**解** 若无零点, 取  $x > a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ , 则由拉格朗日中值定理知, 存在  $\xi \in (a, x)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{-f(a)}{x - a} > f'(a),$$

这与  $f''(x) \leq 0$  矛盾.

若有两个零点, 记为  $x_1 < x_2$ , 则由拉格朗日中值定理知, 存在  $\eta \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 > f'(a),$$

这与  $f''(x) \leq 0$  矛盾.

**习题 3.C.10** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f'(x)$  严格单调增. 若  $f(a) = f(b) = \lambda$ , 证明: 对任意  $x \in (a, b)$ , 有  $f(x) < \lambda$ .

**解** 由课本定理 3.28,  $f'(x)$  严格单调增, 故为严格凸函数. 由 Jensen 不等式, 对任意  $x \in (a, b)$ , 有

$$f(x) = f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = \lambda.$$

**习题 3.C.11** 函数  $\frac{\sin x^2}{x} (x > 0)$  表明, 若函数  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 不能保证  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在. 证明: 若已知该极限存在, 则其值必然为零.

**解** 由 L'Hôpital 法则, 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  存在且等于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ . 又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  存在, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L}{x} = 0.$$

因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

**习题 3.C.12** 设函数  $f(x)$  在  $x > 0$  时二阶可微, 且  $f''(x) < 0, f(0) = 0$ . 证明: 对任意正数  $x_1, x_2$ , 有  $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$ .

**解** 由 Lagrange 中值定理, 存在  $\xi_1 \in (0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_1 + x_2)$ , 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_1 + x_2) - f(x_1)}{x_2}.$$

由题设  $f''(x) < 0$ , 知  $f'(x)$  严格单调减, 且  $\xi_1 < \xi_2$ , 故  $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ , 即

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} > \frac{f(x_1 + x_2) - f(x_1)}{x_2}.$$

整理即得.

习题 3.C.13 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处存在二阶导数, 求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

注 不能使用 L'Hôpital 法则, 因为缺定理条件.

解

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) + f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) - 2f(x_0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0)h^2 + o(h^2)}{h^2} = f''(x_0). \end{aligned}$$

习题 3.C.14 证明下列不等式.

- (1) 对任意实数  $x$ ,  $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ ;
- (2) 对  $x > 0$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ;
- (3) 对  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ ;
- (4) 对任意实数  $x, y$ , 有  $2e^{\frac{x+y}{2}} \leq e^x + e^y$ .

解

(1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^\xi}{24}x^4 \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \xi \in (0, x).$$

(2)

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{(1+\xi)^{-3}}{3}x^3 \geq x - \frac{x^2}{2}, \xi \in (0, x), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{(1+\eta)^{-4}}{4}x^4 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \eta \in (0, x). \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos \xi}{24}x^4 \geq x - \frac{x^3}{6}, \xi \in (0, x), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{\sin \eta}{720}x^6 \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \eta \in (0, x). \end{aligned}$$

(4) 由  $e^x$  为凸函数, 以及 Jensen 不等式, 知

$$e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2}.$$

习题 3.C.15 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$ .

解

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} + o\left(\frac{k^2}{n^4}\right) \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{2n^2 + 3n + 1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= e^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

另解 由  $\ln(1+x) < x$ , 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \right) = e^{\frac{1}{2}}.$$

由  $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ , 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{1 + \frac{k}{n^2}} \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n} \right) = e^{\frac{1}{2}}.$$

习题 3.C.16 求  $\sqrt[n]{n} (n=1, 2, \dots)$  的最大值.解 设函数  $f(x) = \sqrt[x]{x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ , 则

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

当  $x = e$  时,  $f'(x) = 0$ , 且  $f'(x) > 0$  当  $x \in (0, e)$ ,  $f'(x) < 0$ . 故

$$\sqrt[n]{n} \geq \begin{cases} \sqrt[3]{3}, & n \geq 3, \\ \sqrt{2}, & n = 1, 2. \end{cases}$$

又  $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ , 故  $\sqrt[n]{n}$  的最大值为  $\sqrt[3]{3}$ , 当  $n = 3$  时取到.习题 3.C.17 试给出函数  $x \cos x$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的一个尽可能小的上界.

解

$$0.5610963381910451$$

习题 3.C.18 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上具有三阶连续导数, 且  $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$ . 证明: 存在  $\xi \in (-1, 1)$ , 使得  $f'''(\xi) = 3$ .

解 由 Taylor 展开

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\xi_1)}{6}, \quad \xi_1 \in (0, 1),$$

$$f(-1) = f(0) - f'(0) + \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\xi_2)}{6}, \quad \xi_2 \in (-1, 0).$$

整理得  $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6$ . 不妨设  $f'''(\xi_1) \geq 3$ , 则存在  $\xi \in (0, \xi_1) \subset (-1, 1)$ , 使得  $f'''(\xi) = 3$ .

**习题 3.C.19** 设  $a > 1$ , 函数  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  可微. 求证: 存在趋于无穷的正数列  $\{x_n\}$ , 使得

$$f'(x_n) < f(ax_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

**解** 反证法. 若不存在如此数列, 则存在  $M > 0$ , 使得当  $x > M$  时,  $f'(x) \geq f(ax)$ . 由 Lagrange 中值定理, 对任意  $x > M$ , 存在  $\xi \in (x, ax)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(ax) - f(x)}{(a-1)x} \leq \frac{f(ax)}{(a-1)x}.$$

因为在  $(M, +\infty)$  上,  $f'(x) > 0$ , 因此  $f'(\xi) \geq f(a\xi) \geq f(ax)$ , 另一方面取  $x > \frac{1}{a-1}$  有  $f(ax) > \frac{f(ax)}{(a-1)x}$ . 综上, 当  $x > \max\left\{M, \frac{1}{a-1}\right\}$  时,  $f'(\xi) < f(ax)$ , 矛盾.

**习题 3.C.20** 利用凸函数的性质证明 Hölder (赫尔德) 不等式: 设  $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n$  是正数,  $p, q$  是大于 1 的正数, 且  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(提示: 考虑函数  $f(x) = x^p$ .)

**解** 由题设知  $f(x) = x^p$  为凸函数, 由 Jensen 不等式, 对任意正数  $c_i$ , 有

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i}{\sum_{i=1}^n c_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n c_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n c_i}.$$

取  $c_i = b_i^q, x_i = \frac{a_i}{b_i}$ , 则

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i^q}\right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n b_i^q \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p b_i^{q-p}}{\sum_{i=1}^n b_i^q}.$$

整理得

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p b_i^{q-p} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

因为  $q-p = \frac{q}{p}$ , 所以

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

## 习题 4.1

习题 4.1.1 求下列不定积分:

(1)  $\int x(x-1)^3 dx;$

(2)  $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx;$

(3)  $\int (2^x + 3^x)^2 dx;$

(4)  $\int \tan^2 x dx;$

(5)  $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$

(6)  $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx.$

解

(1)

$$\begin{aligned}
 \int x(x-1)^3 dx &= \int (x-1)^4 + (x-1)^3 dx \\
 &= \frac{(x-1)^5}{5} + \frac{(x-1)^4}{4} + C \\
 &= \frac{1}{20}(x-1)^4(4x+1) + C \\
 &= \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int e^{2x} - e^x + 1 dx \\
 &= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \int (2^x + 3^x)^2 dx &= \int 2^{2x} + 2 \cdot 2^x 3^x + 3^{2x} dx \\
 &= \frac{1}{2 \ln 2} 2^{2x} + \frac{2}{\ln 6} 6^x + \frac{1}{2 \ln 3} 3^{2x} + C
 \end{aligned}$$

(4)

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

(5)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C$$

(6)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx &= \int \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sec^2 x dx \\
 &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \tan x + C
 \end{aligned}$$

习题 4.1.2 用第一代换法求下列不定积分:

- (1)  $\int (2x-1)^{100} dx;$  (2)  $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx;$   
 (3)  $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx;$  (4)  $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx;$   
 (5)  $\int x\sqrt{1-x^2} dx;$  (6)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$   
 (7)  $\int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx;$  (8)  $\int \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} dx;$   
 (9)  $\int \sin^2 x dx;$  (10)  $\int \sin^5 x \cos x dx.$

解

- (1) 
$$\int (2x-1)^{100} dx = \int (2x-1)^{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 dx = \int (2x-1)^{100} \cdot \frac{1}{2} d(2x-1) = \frac{(2x-1)^{101}}{202} + C.$$
- (2) 
$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \int \sin \frac{1}{x} \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int \sin \frac{1}{x} \cdot (-1) d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos \frac{1}{x} + C.$$
- (3) 
$$\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{1 + \sin x + \cos x} = \ln |1 + \sin x + \cos x| + C.$$
- (4) 
$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \int \arctan x d\arctan x = \frac{1}{2} \arctan^2 x + C.$$
- (5) 
$$\int x\sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2x) dx = \int \sqrt{1-x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) d(1-x^2) = \frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} + C.$$
- (6) 
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} dx = \int \frac{1}{1+x} \cdot 2 \cdot d\sqrt{x} = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$$
- (7) 
$$\begin{aligned} \int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx &= \int \arctan \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot (-x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int \arctan \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{2} \arctan^2 \frac{1}{x} + C. \\ \int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx &= \int \frac{\operatorname{arccot} x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arccot} x \cdot (-1) \cdot d(\operatorname{arccot} x) \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{arccot}^2 x + C. \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} dx &= \int \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot x dx \\
 &= \int \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} \cdot \frac{1}{x} d(x \ln x) \\
 &= \int \frac{1}{u} du = \ln |1 + x \ln x| + C.
 \end{aligned}$$

(9)

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C.$$

(10)

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

**习题 4.1.3** 用第二代换法求下列不定积分, 其中的  $a$  均为正常数:

$$(1) \int \sqrt{e^x - 2} dx;$$

$$(2) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx;$$

$$(3) \int \frac{1}{(x^2 - a^2)^{3/2}} dx;$$

$$(4) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx;$$

$$(5) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} dx;$$

$$(6) \int \frac{x \ln x}{(1 + x^2)^{3/2}} dx;$$

$$(7) \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx;$$

$$(8) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} dx;$$

$$(9) \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx;$$

$$(10) \int \frac{x^{1/7} + x^{1/2}}{x^{8/7} + x^{1/14}} dx;$$

$$(11) \int \frac{x-1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx;$$

$$(12) \int \frac{1}{x^8(1+x^2)} dx.$$

**解**

(1)

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{e^x - 2} dx &\stackrel{x=\ln(t^2+2)}{=} \int \sqrt{t^2} \cdot \frac{2t}{t^2+2} dt \stackrel{t \geq 0}{=} \int \frac{2t^2}{t^2+2} dt = \int \left( 2 - \frac{4}{t^2+2} \right) dt \\
 &= 2t - 2\sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C \stackrel{t=\sqrt{e^x-2}}{=} 2\sqrt{e^x-2} - 2\sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{e^x-2}}{\sqrt{2}} + C.
 \end{aligned}$$

(2) 令  $t^2 = x^2 + a^2$ , 则  $t = \sqrt{x^2 + a^2} > 0$ , 对  $t^2 = x^2 + a^2$  两侧同时取微分, 有

$$t dt = x dx,$$

因此

$$\begin{aligned}
 \int t dx &= \frac{1}{2} \int (t dx + x dt) + \frac{1}{2} \int (t dx - x dt) \\
 &= \frac{1}{2} \left( xt + a^2 \int \frac{dx}{t} \right)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\frac{dx}{t} = \frac{dt}{x} = \frac{d(x+t)}{x+t} \Rightarrow \int \frac{dx}{t} = \int \frac{d(x+t)}{x+t} = \ln|x+t| + C.$$

整理一下就是,

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \int t dx = \frac{1}{2} (xt + a^2 \ln|x+t| + C) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

注 当然这道题有更简单的计算方式, 但是我们仿照以上过程可以得到一个快速计算式:

$$\int p dq = \frac{1}{2} \left( pq + c^2 \int \frac{dq}{p} \right), \quad \int \frac{dq}{p} = \begin{cases} \ln|p+q| + C, & p^2 - q^2 = c^2; \\ \arctan \frac{q}{p} + C, & p^2 + q^2 = c^2; \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &\stackrel{x=a \tan t}{=} \int a \sec t \cdot a \sec^2 t dt = a^2 \int \sec^3 t dt = \frac{a^2}{2} (\sec t \tan t + \ln|\sec t + \tan t|) + C \\ &\stackrel{\tan t = \frac{x}{a}, \sec t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}}{=} \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &\stackrel{x=a \sinh t}{=} \int a \cosh t \cdot a \cosh t dt = a^2 \int \cosh^2 t dt = \frac{a^2}{2} (\sinh t \cosh t + t) + C \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

注  $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

(3)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 - a^2)^{3/2}} dx &\stackrel{x=a \sec t}{=} \int \frac{a \sec t \tan t}{(a^2 \tan^2 t)^{3/2}} dt = \frac{1}{a^2} \int \csc t \cot t dt = -\frac{1}{a^2} \csc t + C \\ &\stackrel{\csc t = \frac{\sec t}{\sqrt{\sec^2 t - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{=} -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} + C. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx &\stackrel{x=a \sin t}{=} \int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int \sin^2 t dt = a^2 \left( \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t \right) + C \\ &\stackrel{\sin t = \frac{x}{a}, \cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}{=} \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

(4) 记  $p = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $q = x$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{q^2}{p} dq &= -\frac{1}{2} \left( \int p dq + q dp \right) + \frac{1}{2} \int \frac{p^2 + q^2}{p} dq \\ &= -\frac{1}{2} pq + \frac{a^2}{2} \int \frac{dq}{p} = -\frac{1}{2} pq + \frac{a^2}{2} \arctan \frac{q}{p} + C. \\ &= -\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C. \end{aligned}$$



(5)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}} dx \stackrel{t=\sqrt{x+1}}{=} \int \frac{2t}{1+t} dt = \int \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt = 2t - 2\ln|1+t| + C$$

$$\stackrel{t=\sqrt{x+1}}{=} 2\sqrt{x+1} - 2\ln|1+\sqrt{x+1}| + C.$$

(6)

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \ln x + (\sqrt{1+x^2} - 1)$$

(6)

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx &= \int \ln x d\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(\ln x) \\ &= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx \end{aligned}$$

对于  $I_1 = \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$ , 令  $t = 1/x$ , 则  $dx = -1/t^2 dt$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{(1/t)\sqrt{1+1/t^2}} d\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \int \frac{t}{\sqrt{(t^2+1)/t^2}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= -\int \frac{t^2}{t^2\sqrt{t^2+1}} dt = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= -\ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C = -\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right| + C \\ &= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C. \end{aligned}$$

所以, 原式  $= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right| + C$ .

(7) 令  $t = \frac{\ln x}{x}$ , 则  $dt = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} dx = \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx &= \int \frac{1 - \ln x}{x^2(1 - \frac{\ln x}{x})^2} dx = \int \frac{1}{(1-t)^2} dt \\ &= \frac{1}{1-t} + C = \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} + C = \frac{x}{x - \ln x} + C. \end{aligned}$$

(8) 令  $x = a \tan t$ ,  $dx = a \sec^2 t dt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \int \frac{a \sec^2 t}{(a \tan t)^2 \sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2}} dt \\ &= \int \frac{a \sec^2 t}{a^2 \tan^2 t \cdot a \sec t} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{\sec t}{\tan^2 t} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1/\cos t}{\sin^2 t / \cos^2 t} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \cot t \csc t dt = -\frac{1}{a^2} \csc t + C \\ &\stackrel{\tan t = x/a}{=} -\frac{1}{a^2} \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

(9) 令  $t = \sqrt[3]{2x+1}$ , 则  $t^3 = 2x+1$ ,  $x = \frac{t^3-1}{2}$ ,  $dx = \frac{3t^2}{2} dt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx &= \int \frac{\frac{t^3-1}{2} + 2}{t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt = \int \frac{t^3+3}{2t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt \\ &= \frac{3}{4} \int (t^3+3)t dt = \frac{3}{4} \int (t^4+3t) dt \\ &= \frac{3}{4} \left( \frac{t^5}{5} + \frac{3t^2}{2} \right) + C = \frac{3}{20} t^5 + \frac{9}{8} t^2 + C \\ &= \frac{3}{20} (2x+1)^{5/3} + \frac{9}{8} (2x+1)^{2/3} + C. \end{aligned}$$

(10) 令  $t = x^{1/14}$ , 则  $x = t^{14}$ ,  $dx = 14t^{13} dt$ ,  $u = t^5 = x^{5/14}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{1/7} + x^{1/2}}{x^{8/7} + x^{1/14}} dx &= \int \frac{t^2 + t^7}{t^{16} + t} \cdot 14t^{13} dt = 14 \int \frac{t^{14}}{t^{10} - t^5 + 1} dt \\ &= \frac{14}{5} \int \left( 1 + \frac{u - \frac{1}{2}}{(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right) du \\ &= \frac{14}{5} \left( u + \frac{1}{2} \ln |u^2 - u + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u-1}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= \frac{14}{5} \left( x^{\frac{5}{14}} + \frac{1}{2} \ln |x^{\frac{10}{14}} - x^{\frac{5}{14}} + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^{\frac{5}{14}} - 1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \int \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \end{aligned}$$

对于  $I_1 = \int \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx$ , 令  $x = \sec t$ ,  $dx = \sec t \tan t dt$ .

$$I_1 = \int \frac{\sec t \tan t}{\sec t \tan t} dt = t + C_1 = \operatorname{arcsec} x + C_1.$$

对于  $I_2 = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx$ , 令  $x = \sec t$ ,  $dx = \sec t \tan t dt$ .

$$I_2 = \int \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t} dt = \int \cos t dt = \sin t + C_2$$

$$\stackrel{\sec t = x}{=} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C_2.$$

$$\text{原式} = I_1 - I_2 = \operatorname{arcsec} x - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C.$$

(12) 令  $t = 1/x$ ,  $x = 1/t$ ,  $dx = -1/t^2 dt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^8(1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{(1/t)^8(1+1/t^2)} d\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \int \frac{t^8}{(t^2+1)/t^2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= -\int \frac{t^8}{t^2+1} dt = -\int \frac{t^8-1+1}{t^2+1} dt \\ &= -\int \frac{(t^4-1)(t^4+1)}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= -\int (t^2-1)(t^4+1) dt - \arctan t + C \\ &= -\int (t^6-t^4+t^2-1) dt - \arctan t + C \\ &= -\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t\right) - \arctan t + C \\ &= -\frac{1}{7x^7} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan(1/x) + C. \end{aligned}$$

习题 4.1.4 求下列不定积分:

(1)  $\int |x| dx$ ;

(2)  $\int \max\{1, x^2\} dx$ .

解

(1)

$$\int |x| dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C, & x \geq 0; \\ -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < 0. \end{cases}$$

(2)

$$\int \max\{1, x^2\} dx = \begin{cases} x - 1 + C, & |x| \leq 1; \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

习题 4.1.5 用分部积分法求下列不定积分:

(1)  $\int x \sin x dx$ ;

(2)  $\int x^2 \ln x dx$ ;

(3)  $\int \cos(\ln x) dx$ ;

(4)  $\int x^2 \cos 5x dx$ ;

(5)  $\int \sec^3 x dx$ ;

(6)  $\int x^2 e^x dx$ ;

$$(7) \int x \arcsin x dx;$$

$$(8) \int x(\arctan x)^2 dx;$$

$$(9) \int (\arcsin x)^2 dx;$$

$$(10) \int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx.$$

解

(1)

$$\int x \sin x dx = \int x d(-\cos x) = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

(2)

$$\int x^2 \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C.$$

(3)

$$\begin{aligned} I &= \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) - \int x d(\cos(\ln x)) \\ &= x \cos(\ln x) - \int x \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx \\ &= x \cos(\ln x) + \left( x \sin(\ln x) - \int x d(\sin(\ln x)) \right) \\ &= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I \end{aligned}$$

移项得  $2I = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C_1$ ,

$$\Rightarrow I = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$$

(4)

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos 5x dx &= \int x^2 d\left(\frac{1}{5} \sin 5x\right) \\ &= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \int \frac{1}{5} \sin 5x d(x^2) \\ &= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \frac{2}{5} \int x \sin 5x dx \\ &= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \frac{2}{5} \int x d\left(-\frac{1}{5} \cos 5x\right) \\ &= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \frac{2}{5} \left[ -\frac{1}{5} x \cos 5x + \int \frac{1}{5} \cos 5x dx \right] \\ &= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x + \frac{2}{25} x \cos 5x - \frac{2}{25} \int \cos 5x dx \\ &= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x + \frac{2}{25} x \cos 5x - \frac{2}{125} \sin 5x + C \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
I &= \int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx = \int \sec x \, d(\tan x) \\
&= \sec x \tan x - \int \tan x \, d(\sec x) \\
&= \sec x \tan x - \int \tan x (\sec x \tan x) \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - I + \ln |\sec x + \tan x|
\end{aligned}$$

移项得  $2I = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C_1$ ,

$$\implies I = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C$$

(6)

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x \, dx &= \int x^2 \, d(e^x) \\
&= x^2 e^x - \int e^x \, d(x^2) = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx \\
&= x^2 e^x - 2 \int x \, d(e^x) \\
&= x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int e^x \, dx \right) \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
\int x \arcsin x \, dx &= \int \arcsin x \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2}{2} \, d(\arcsin x) \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{-(1-x^2)+1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} \, dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) - \frac{1}{2} \arcsin x + C \\
&= \frac{2x^2-1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
\int x(\arctan x)^2 dx &= \int (\arctan x)^2 d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{2} d((\arctan x)^2) \\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} \arctan x dx \\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \arctan x dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \left(x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx\right) + \int \arctan x d(\arctan x) \\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C \\
&= \frac{x^2+1}{2}(\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
\int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 - \int x d((\arcsin x)^2) \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int x \cdot 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int \arcsin x \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int \arcsin x d(-2\sqrt{1-x^2}) \\
&= x(\arcsin x)^2 - \left[-2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int -2\sqrt{1-x^2} d(\arcsin x)\right] \\
&= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int 2\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C
\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}
\int \ln(x + \sqrt{x^2+1}) dx &= x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \int x d(\ln(x + \sqrt{x^2+1})) \\
&= x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx \\
&= x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \int (x^2+1)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} d(x^2+1) \\
&= x \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C
\end{aligned}$$

习题 4.1.6 导出下列不定积分的递推公式:

$$(1) \int \sin^n x dx \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (2) \int x^n e^x dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

解

$$(1) \text{ 记 } I_n = \int \sin^n x dx, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx = \int \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

$$\text{移项得 } nI_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} + C,$$

$$\implies I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} + C.$$

$$(2) \text{ 记 } J_n = \int x^n e^x dx, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} J_n &= \int x^n d(e^x) = x^n e^x - \int e^x d(x^n) \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n J_{n-1} \end{aligned}$$

习题 4.1.7 求下列不定积分:

$$(1) \int \frac{1}{1+e^x} dx;$$

$$(2) \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx;$$

$$(3) \int \frac{1}{x^4+x^6} dx;$$

$$(4) \int x\sqrt{x-2} dx;$$

$$(5) \int \frac{\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1}}{x} dx;$$

$$(6) \int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x-2}} dx;$$

$$(7) \int x e^x \sin x dx;$$

$$(8) \int \frac{1}{(1+\tan x) \sin^2 x} dx;$$

$$(9) \int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx;$$

$$(10) \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x^2} dx;$$

$$(11) \int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^3} dx;$$

$$(12) \int \frac{x}{1+\sin x} dx;$$

$$(13) \int \arcsin \sqrt{x} dx;$$

$$(14) \int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx;$$

$$(15) \int x \sin^2 x dx;$$

$$(16) \int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx;$$

$$(17) \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx;$$

$$(18) \int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx;$$

$$(19) \int e^{2x}(1 + \tan x)^2 dx;$$

$$(20) \int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx;$$

$$(21) \int \frac{\cos x \cos 2x}{\cos 3x} dx;$$

$$(22) \int \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx;$$

$$(23) \int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx;$$

$$(24) \int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx;$$

$$(25) \int e^{-x^2/2} \frac{\cos x - 2x \sin x}{2\sqrt{\sin x}} dx;$$

$$(26) \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx.$$

解

(1) 令  $u = e^x$ , 则  $dx = \frac{du}{u}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+e^x} dx &= \int \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1}{u} du = \int \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du \\ &= \ln|u| - \ln|u+1| + C \\ &= \ln(e^x) - \ln(1+e^x) + C = x - \ln(1+e^x) + C. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx &= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{(x+\frac{1}{x})^2-1} dx \end{aligned}$$

令  $u = x + \frac{1}{x}$ , 则  $du = (1 - \frac{1}{x^2})dx$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u^2-1} du &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

(3) 令  $t = \frac{1}{x}$ , 则  $x = \frac{1}{t}$ ,  $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^4(1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{(\frac{1}{t})^4(1+\frac{1}{t^2})} d\left(-\frac{1}{t^2}\right) \\ &= \int \frac{t^4}{t^2+1} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{t^4}{t^2+1} dt \\ &= -\int \frac{(t^4-1)+1}{t^2+1} dt = -\int \left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right) dt \\ &= -\left(\frac{t^3}{3} - t + \arctan t\right) + C \\ &= -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + C. \end{aligned}$$



(4) 令  $t = \sqrt{x-2}$ , 则  $t^2 = x-2$ ,  $x = t^2 + 2$ ,  $dx = 2t dt$ .

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-2}dx &= \int (t^2+2) \cdot t \cdot (2t dt) = 2 \int (t^4 + 2t^2) dt \\ &= 2 \left( \frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} \right) + C = \frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

(5) 令  $t = \sqrt{x-1}$ , 则  $t^2 = x-1$ ,  $x = t^2 + 1$ ,  $dx = 2t dt$ .

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{t \arctan t}{t^2+1} (2t dt) = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} \arctan t dt \\ &= 2 \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} \arctan t dt \\ &= 2 \int \arctan t dt - 2 \int \frac{\arctan t}{1+t^2} dt \\ &= 2t \arctan t - \ln(1+t^2) - (\arctan t)^2 + C \\ &= 2\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1} - \ln x - (\arctan \sqrt{x-1})^2 + C.\end{aligned}$$

(6) 令  $u = e^x - 2$ , 则  $u+2 = e^x$ , 于是  $x = \ln(u+2)$ . 同时,  $du = e^x dx$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}} dx &= \int \frac{\ln(u+2)}{\sqrt{u}} du \\ &= \int \ln(u+2) \cdot u^{-\frac{1}{2}} du\end{aligned}$$

接下来使用分部积分法:

$$\begin{aligned}\int \ln(u+2) u^{-\frac{1}{2}} du &= 2\sqrt{u} \ln(u+2) - \int \frac{1}{u+2} \cdot 2\sqrt{u} du \\ &= 2\sqrt{u} \ln(u+2) - 2 \int \frac{\sqrt{u}}{u+2} du\end{aligned}$$

对于  $I_2 = \int \frac{\sqrt{u}}{u+2} du$ , 令  $t = \sqrt{u}$ , 则  $u = t^2$ ,  $du = 2t dt$ .

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \frac{t}{t^2+2} \cdot (2t dt) = \int \frac{2t^2}{t^2+2} dt \\ &= \int \frac{2(t^2+2)-4}{t^2+2} dt \\ &= \int \left( 2 - \frac{4}{t^2+2} \right) dt \\ &= 2t - 4 \int \frac{1}{t^2 + (\sqrt{2})^2} dt \\ &= 2t - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C_1 \\ &= 2\sqrt{u} - 2\sqrt{2} \arctan \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}} \right) + C_1\end{aligned}$$

将  $I_2$  代回原式:

$$\begin{aligned} I &= 2\sqrt{u} \ln(u+2) - 2 \left[ 2\sqrt{u} - 2\sqrt{2} \arctan \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}} \right) \right] + C \\ &= 2\sqrt{u} \ln(u+2) - 4\sqrt{u} + 4\sqrt{2} \arctan \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}} \right) + C \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= 2\sqrt{e^x-2} \ln(e^x-2+2) - 4\sqrt{e^x-2} + 4\sqrt{2} \arctan \left( \frac{\sqrt{e^x-2}}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &= 2x\sqrt{e^x-2} - 4\sqrt{e^x-2} + 4\sqrt{2} \arctan \left( \sqrt{\frac{e^x-2}{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} I &= \int (x \sin x) d(e^x) \\ &= xe^x \sin x - \int e^x (x \cos x + \sin x) dx \\ &= xe^x \sin x - \int xe^x \cos x dx - \int e^x \sin x dx \\ &= xe^x \sin x - \int (x \cos x) d(e^x) - \int \sin x d(e^x) \\ &= xe^x \sin x - \left[ xe^x \cos x - \int e^x (\cos x - x \sin x) dx \right] - \left[ e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \right] \\ &= (x-1)e^x \sin x - xe^x \cos x + 2 \int e^x \cos x dx - \int xe^x \sin x dx \\ &= (x-1)e^x \sin x - xe^x \cos x + 2 \int e^x \cos x dx - I \end{aligned}$$

已知  $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C'$ .

$$2I = (x-1)e^x \sin x - xe^x \cos x + e^x(\sin x + \cos x) + C_1$$

$$2I = e^x(x \sin x - x \cos x + \cos x) + C_1$$

$$I = \frac{e^x}{2}(x(\sin x - \cos x) + \cos x) + C.$$

(8) 令  $u = 1 + \cot x$ , 则  $du = -\csc^2 x dx$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{\csc^2 x}{1 + \tan x} dx &= \int \frac{\csc^2 x}{1 + \frac{1}{\cot x}} dx = \int \frac{\cot x \csc^2 x}{\cot x + 1} dx \\ &= \int \frac{u-1}{u} (-du) = \int \left( -1 + \frac{1}{u} \right) du \\ &= -u + \ln |u| + C = -(1 + \cot x) + \ln |1 + \cot x| + C. \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx + \int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx\end{aligned}$$

其中

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int \sqrt{x} d(-\sqrt{1-x}) = -\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}-1} \right) + C_1,$$

因此

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx = -(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x} + 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}-1} \right) + C.$$

或者

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx = -(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x} + \arcsin \sqrt{x} + C.$$

(10) 令  $x = \sec t$ ,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x^2} dx &= \int \sqrt{\frac{\sec t - 1}{\sec t + 1}} \cdot \cos^2 t \cdot \sec t \tan t dt = \int 1 - \cos t dt \\ &= t - \sin t + C = \operatorname{arcsec} x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C \\ &= \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.\end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned}I &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} - \int -\frac{1}{4(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx\end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx. \quad \text{令 } x = \tan t, dx = \sec^2 t dt.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{(\sec^2 t)^3} \sec^2 t dt = \int \cos^4 t dt = \int \left( \frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{1}{4} \int \left( 1 + 2 \cos 2t + \frac{1 + \cos 4t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2} t + \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t \right) + C_1 \\ &= \frac{3}{8} \arctan x + \frac{1}{4} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right) + \frac{1}{32} \left( \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \right) + C_1 \\ I &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{8} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{x(1-x^2)}{8(1+x^2)^2} \right] + C \\ &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{x(3x^2+5)}{32(1+x^2)^2} + \frac{3}{32} \arctan x + C \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{x-x\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int x \sec^2 x dx - \int x \sec x \tan x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x d(\tan x) = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \ln |\sec x| + C_1. \\ I_2 &= \int x d(\sec x) = x \sec x - \int \sec x dx = x \sec x - \ln |\sec x + \tan x| + C_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= I_1 - I_2 = (x \tan x - \ln |\sec x|) - (x \sec x - \ln |\sec x + \tan x|) + C \\ &= x(\tan x - \sec x) + \ln \left| \frac{\sec x + \tan x}{\sec x} \right| + C \\ &= x \left( \frac{\sin x - 1}{\cos x} \right) + \ln |1 + \sin x| + C. \end{aligned}$$

(13) 令  $t = \sqrt{x}$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ .

$$\begin{aligned}
 I &= \int \arcsin t \cdot (2t dt) = 2 \int t \arcsin t dt \\
 &= 2 \left[ \frac{t^2}{2} \arcsin t - \int \frac{t^2}{2\sqrt{1-t^2}} dt \right] \\
 &= t^2 \arcsin t - \int \frac{-(1-t^2)+1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= t^2 \arcsin t + \int \sqrt{1-t^2} dt - \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= t^2 \arcsin t + \left( \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t \right) - \arcsin t + C \\
 &= \left( t^2 - \frac{1}{2} \right) \arcsin t + \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + C \\
 &= \frac{2x-1}{2} \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x(1-x)} + C.
 \end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{x}{1+\cos x} dx + \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx \\
 I_1 &= \int \frac{x}{2\cos^2(\frac{x}{2})} dx = \frac{1}{2} \int x \sec^2(\frac{x}{2}) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ x(2\tan(\frac{x}{2})) - \int 2\tan(\frac{x}{2}) dx \right] \\
 &= x \tan(\frac{x}{2}) - \int \tan(\frac{x}{2}) dx = x \tan(\frac{x}{2}) - 2 \ln |\sec(\frac{x}{2})| + C_1.
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx. \text{ 令 } u = 1+\cos x, du = -\sin x dx.$$

$$I_2 = \int \frac{1}{u} (-du) = -\ln |u| + C_2 = -\ln(1+\cos x) + C_2.$$

$$\begin{aligned}
 I &= I_1 + I_2 = x \tan(\frac{x}{2}) - 2 \ln |\sec(\frac{x}{2})| - \ln(2\cos^2(\frac{x}{2})) + C_3 \\
 &= x \tan(\frac{x}{2}) - 2 \ln |\sec(\frac{x}{2})| - \ln 2 - 2 \ln |\cos(\frac{x}{2})| + C_3 = x \tan(\frac{x}{2}) + C.
 \end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}
 I &= \int x \left( \frac{1-\cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx \\
 I_1 &= \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}. \\
 I_2 &= \frac{1}{2} \int x d \left( \frac{1}{2} \sin 2x \right) = \frac{1}{4} \left[ x \sin 2x - \int \sin 2x dx \right] \\
 &= \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{2} \cos 2x \right) + C' = \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C'.
 \end{aligned}$$

$$I = I_1 - I_2 = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.$$

(16) 令  $u = 1 + x^2$ , 则  $x^2 = u - 1, du = 2x dx$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} d\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}) du \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] + C \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C.\end{aligned}$$

(17)

$$\begin{aligned}I &= \arctan x \left( -\frac{1}{x} - \arctan x \right) - \int \left( -\frac{1}{x} - \arctan x \right) \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{\arctan x}{x} - (\arctan x)^2 + \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\ I_1 &= \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1. \quad I_2 = \int \arctan x d(\arctan x) = \\ &\quad \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C_2. \\ I &= -\frac{\arctan x}{x} - (\arctan x)^2 + \left( \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C \\ &= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

(18) 令  $u = e^x, du = e^x dx$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx &= \int \frac{\arctan u}{u^2} du = \int \arctan u d\left(-\frac{1}{u}\right) \\ &= -\frac{\arctan u}{u} + \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1+u^2} du \\ &= -\frac{\arctan u}{u} + \ln \left| \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right| + C \\ &= -\frac{\arctan e^x}{e^x} + \ln \left| \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right| + C.\end{aligned}$$

(19)

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{2x}(1 + 2 \tan x + \tan^2 x) dx \\
&= \int e^{2x}(\sec^2 x + 2 \tan x) dx \\
&= \int e^{2x} \sec^2 x dx + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= \int e^{2x} d(\tan x) + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= \left[ e^{2x} \tan x - \int \tan x d(e^{2x}) \right] + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= e^{2x} \tan x - \int \tan x \cdot (2e^{2x}) dx + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= e^{2x} \tan x + C.
\end{aligned}$$

(20)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx &= \int \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx \\
&= \int \frac{x}{\cos x} d\left(-\frac{1}{x \sin x + \cos x}\right) \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} - \int \left(-\frac{1}{x \sin x + \cos x}\right) d\left(\frac{x}{\cos x}\right) \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{x \sin x + \cos x} \left(\frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}\right) dx \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \tan x + C \\
&= \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} + C.
\end{aligned}$$

(21)

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int \cos^2 2x + \cos 2x \cos 4x dx \\
&= \frac{1}{4} \int 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x dx \\
&= \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + C.
\end{aligned}$$

(22)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2} dx \\
&= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(x+1) - (x-1)} dx = \frac{1}{2} \int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + C \\
&= \frac{1}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t+1}} \cdot 2t dt \quad (t = \sqrt{x}, dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx) \\
&= \frac{4}{3} (t-2) \sqrt{t+1} + C \\
&= \frac{4}{3} (\sqrt{x}-2) \sqrt{\sqrt{x}+1} + C.
\end{aligned}$$

(24)

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}} d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3} (-2) \sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}} + C = -\frac{4}{3} \sqrt{1-x\sqrt{x}} + C.$$

(25)

$$\begin{aligned}
\int e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\cos x - 2x \sin x}{2\sqrt{\sin x}} dx &= \int \frac{\cos x - 2x \sin x}{(-x) \cdot 2\sqrt{\sin x}} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) \\
&= - \int \frac{\cos x}{2x\sqrt{\sin x}} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) + \left( \frac{2x \sin x}{2x\sqrt{\sin x}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \int e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{\sin x}{\sqrt{\sin x}}\right) \right) \\
&= - \int \frac{\cos x}{2x\sqrt{\sin x}} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) + e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{\sin x} - \int e^{-\frac{x^2}{2}} d(\sqrt{\sin x}) \\
&= e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{\sin x}
\end{aligned}$$

(26)

$$\begin{aligned}
\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx &= -\frac{xe^x}{1+x} - \int \left(-\frac{1}{1+x}\right) e^x (1+x) dx \\
&= -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + C \\
&= e^x \left(1 - \frac{x}{1+x}\right) + C = \frac{e^x}{1+x} + C.
\end{aligned}$$



## 习题 4.2

我没招了,这一节实在不想写过程了,算法在教材上都有,算就是了.

习题 4.2.1 求下列有理函数的不定积分:

$$(1) \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$$

$$(2) \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

$$(3) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} dx$$

$$(4) \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + x)} dx$$

$$(5) \int \frac{x}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} dx$$

$$(6) \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

$$(7) \int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1} dx$$

$$(8) \int \frac{x^{15}}{(x^8 + 1)^2} dx$$

解

(1)

$$\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

(2)

$$\frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.$$

(3)

$$x + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$$

(4)

$$\ln \left| \frac{x}{\sqrt{x+1}\sqrt[4]{x^2+1}} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

(5)

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(6)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \arctan(\sqrt{2}x + 1) - \arctan(1 - \sqrt{2}x) \right) + C.$$

(7)

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \right| + C.$$

(8)

$$\frac{1}{8} \left( \frac{1}{x^8 + 1} + \ln |x^8 + 1| \right) + C.$$

习题 4.2.2 求下列三角函数有理式的不定积分, 其中  $a, b$  是常数:

$$(1) \int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$$

$$(2) \int \frac{\sin^5 x}{\cos x} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx$$

$$(4) \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$(5) \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$$

$$(6) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$$

$$(7) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$(8) \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} dx$$

$$(9) \int \frac{1}{2 \sin x + \sin 2x} dx$$

$$(10) \int \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x} dx, a^2 + b^2 \neq 0.$$

解

(1)

$$\frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{2}} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

(2)

$$-\ln |\cos x| - \frac{1}{4} \sin^4 x + \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

(3)

$$\tan x - 2 \cot x - \frac{1}{3} \cot^3 x + C.$$

(4)

$$\frac{1}{8}(-\sin 2x + 2 \cos 2x) + 2 \ln |\sin x + \cos x| + C.$$

(5)

$$\frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x) + C.$$

(6)

$$x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x)$$

(7)

$$\frac{1}{2} \left( \sin x - \cos x + \operatorname{arctanh} \left( \frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2}} \right) \right) + C.$$

$$\frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

(8)

$$\frac{-3 \cos 2x + \cos 6x}{6 \cos^3 x \sin^3 x} + C.$$

(9)

$$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\cos x + 1} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right) + C.$$

$$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\cos x + 1} + \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| \right) + C.$$

(10)

$$\frac{a \ln |a \sin x + b \cos x| + bx}{a^2 + b^2} + C.$$