习题 1.2

习题 1.2.1 用定义证明下面的结论:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5+3n}=\dfrac{1}{3}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

解

(1) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{5}{9\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n}{5+3n}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3n-(5+3n)}{3(5+3n)}\right|=\frac{5}{3(5+3n)}<\frac{5}{9n}<\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\frac{|\sin n|}{n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

(3) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon^2}-1\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon.$$

(4) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

习题 1.2.2 若数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 满足条件: 任给正数 ε, 存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ (其中 M 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 a 为极限.

M 为常数指的是 M 不依赖于 ε 和 n. 例如 $M=2, M=1000$ 等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于 $\forall M>0,\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ 成立.

习题 1.2.3 证明: 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

证明 充分性: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

必要性: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$.

习题 1.2.4 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 则

$$||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

反之不一定成立, 如数列 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$, 但 $\{a_n\}$ 发散.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 则 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $||a_n| - 0| < \varepsilon$. 则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

习题 1.2.5 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 又 $|b_n| \leqslant M, (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. 则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

习题 1.2.6 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$, 及 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

证明 按已知条件 $\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$。又 $\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$。于是令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, 则 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$。故 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$。

习题 1.2.7 证明下列数列不收敛:

(1) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$;　　(2) $a_n = 5\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) + (-1)^n$.

解

(1) 取 $a_{2n} = \dfrac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\dfrac{2n+1}{2n+2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

(2) 取 $a_{2n} = 5\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) - 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 6, \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 4$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

习题 1.2.8 求下列极限:

(1) $a_n = \dfrac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1}$;

(2) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}$;

(3) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n(n+1)/2}\right),\ n = 2, 3, \ldots$;

(4) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

(5) $a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^m}),\ (|q| < 1)$.

解

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{4+0+0}{3+0+0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1-0 = 1.$$

(3)

$$a_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{2\cdot 5\cdots(n^2+n-2)}{3\cdot 6\cdots n(n+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1+\frac{2}{n}}{2(1+\frac{1}{n})} = \frac{1+0}{2(1+0)} = \frac{1}{2}.$$

(4)

$$a_n = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^m})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{m+1}}}{1-q},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \frac{1-q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1-\lim\limits_{m\to\infty} q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

习题 1.2.9 若 $a_n \neq 0 (n=1,2,\ldots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?

解 不能. 例如 $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 可能为 0.

习题 1.2.10 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$, 是否必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$? 若还假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 回答同样的问题.

解 不一定. 例如 $a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = n(-1)^n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ 不存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 时成立. 假设 $a \neq 0$ 时, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n b_n}{a_n} = \dfrac{0}{a} = 0$.

习题 1.2.11 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性如何? 举例

说明. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 回答同样的问题.

解 设 $\{a_n\}$ 收敛于 a, $\{b_n\}$ 发散. 则 $\{a_n+b_n\}, \{a_n-b_n\}$ 都发散. 例如 $a_n=1, b_n=n$, 则 $a_n+b_n=n+1, a_n-b_n=1-n$ 都发散. 但 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的收敛性不确定. 例如 $a_n=\dfrac{1}{n}, b_n=n$, 则 $a_n\cdot b_n=1$ 收敛; 但 $a_n=1, b_n=n$, 则 $a_n\cdot b_n=n$ 发散.

若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散, 则 $\{a_n+b_n\}, \{a_n-b_n\}, \{a_n\cdot b_n\}$ 的收敛性都不确定. 例如 $a_n=n, b_n=n$, 则 $a_n+b_n=2n, a_n-b_n=0, a_n\cdot b_n=n^2$ 中只有 a_n-b_n 收敛; 又如 $a_n=n, b_n=(-1)^n n$, 则 $a_n+b_n=n+(-1)^n n, a_n-b_n=n-(-1)^n n, a_n\cdot b_n=(-1)^n n^2$ 都发散.

习题 1.2.12 下面的推理是否正确?

1. 设数列 $\{a_n\}: a_1=1, a_{n+1}=2a_n-1\ (n=1,2,3,\ldots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

   解: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 在 $a_{n+1}=2a_n-1$ 两边取极限, 得 $a=2a-1$, 即 $a=1$.

2. $$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\\ &=\underbrace{0+0+\cdots+0}_{n\text{ 个}}=0.\end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=1^n=1.$

解

1. 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为 $a_n=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.
2. 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

   $$\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}=\frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}\sim\frac{1}{n}, (k=1,2,\ldots,n).$$

   因此

   $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)\sim\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1.$$
3. 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

   $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

习题 1.2.13 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a, b. 若 $a>b$, 则从某一项开始, 有 $a_n>b_n$; 反之, 若从某项开始恒有 $a_n\geqslant b_n$, 则 $a\geqslant b$.

解 这是保序性的直接推论.

习题 1.2.14 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别收敛于 a 及 b. 记 $c_n=\max(a_n,b_n)$, $d_n=\min(a_n,b_n)$ $(n=$

$1,2,\ldots)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \max(a,b), \quad \lim_{n\to\infty} d_n = \min(a,b).$$

解 由 $\max(x,y)=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$, $\min(x,y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$, 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

习题 1.2.15 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[k]{(n+1)^k}-n^k)$, 其中 $0<k<1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+2}-n\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}\right)$.

解

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0.$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}((n+1)^k-n^k)=\lim_{n\to\infty}n^k\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k-1\right)\leqslant\lim_{n\to\infty}n^k\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^1-1\right)=\lim_{n\to\infty}n^{1-k}=0.$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\sqrt[2^k]{2}=\lim_{n\to\infty}2^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}=2^1=2.$$

(4) 由 $\dfrac{1}{n}\ln(n^2-n+2)=O\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)=o(1)$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2-n+2}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n^2-n+2}=\mathrm{e}^0=1.$$

(5)

$$1=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^1}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

习题 1.2.16 设 $a_1,a_2,\ldots,a_m$ 为 m 个正数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max(a_1,a_2,\ldots,a_m).$$

解 设 $a_k=\max(a_1,a_2,\ldots,a_m)$，则

$$a_k=\sqrt[n]{a_k^n}\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{ma_k^n}=m^{\frac{1}{n}}a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a_k=\max(a_1,a_2,\ldots,a_m).$$

习题 1.2.17 证明下列数列收敛:

(1) $a_n = \left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$;

(2) $a_n = \dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$;

(3) $a_n = \alpha_0+\alpha_1 q+\cdots+\alpha_n q^n$, 其中 $|\alpha_k| \le M, (k=1,2,\ldots)$, 而 $|q|<1$;

(4) $a_n = \dfrac{\cos 1}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2}{2\cdot 3}+\dfrac{\cos 3}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{\cos n}{n(n+1)}$.

证明

(1) 由 $1-\dfrac{1}{2^n}<1$, 可知 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n>0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 由 $a_n<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}<\frac{1}{2}$, 可知 $\{a_n\}$ 有上界, 且 $a_n>0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor \log_{|q|}\dfrac{\varepsilon(1-|q|)}{2M}\right\rfloor+1$, 则当 $m,n>N$ 时,

$$|a_m-a_n| = |\alpha_{n+1}q^{n+1}+\cdots+\alpha_m q^m| \leqslant M(|q|^{n+1}+|q|^{n+2}+\cdots) = M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}<\varepsilon.$$

(4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$, 则当 $m,n>N$ 时,

$$|a_m-a_n| = \left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{\cos m}{m(m+1)}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

习题 1.2.18 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

(1) $a_n=\sqrt[n]{n^2}$;

(2) $a_n=\dfrac{n}{c^n},\ (c>1)$;

(3) $a_1=\dfrac{c}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}\ (0\le c\le 1)$;

(4) $a>0, a_0>0, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)$ (提示: 先证明 $a_n^2\ge a$);

(5) $a_0=1,\ a_n=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$;

(6) $a_n=\sin\sin\cdots\sin 1$ (n 个 sin).

解

(1) 由 $a_n>0$, 且 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{1}{c}<1$ 在充分大时成立, **注** 详细而言, 当 $n>\dfrac{1}{c-1}$ 时, 有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1$. 但数列极限与有限项无关, 我们只需要考虑充分大的 n.
可知 $\{a_n\}$ 在充分大时单调减, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 又由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{c^{n+1}-c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^n(c-1)}=0.$$

(2)

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)$$

由 $a_2-a_1=\left(\dfrac{c}{2}\right)^2>0$, 可递归的得知 $a_{n+1}-a_n>0$, 因此 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $a_1<c$, 归纳

的可得 $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$, 因此 $\{a_n\}$ 有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$, 又由 $a_n > 0$, 可知 $a = 1 - \sqrt{1-c}$.

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)\right)^2 \geqslant a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leqslant 0$$

因此 $\{a_n\}$ 在 $n \geqslant 1$ 时单调减, 且有下界 $\sqrt{a}$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{a}\right) = \sqrt{a}$.

(4)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1} - \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}\right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1}+1)^2}$$

由 $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$ 归纳的可得 $1 + a_n - a_n^2 > 0$, 因此 $a_n - a_{n-1} > 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 有上界, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 递推式两侧取极限, 得 $a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(5) $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$, 因此 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a = \sin a \Rightarrow a = 0$.

习题 1.2.19 设 $a_n \le a \le b_n\ (n = 1, 2, \ldots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时,$|a_n - b_n| < \varepsilon$. 又由 $a_n \le a \le b_n$, 可知 $|a_n - a| = a - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$, 同理 $|b_n - a| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

例 0.1 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \ldots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

证明

(1) $a = 0$ 时,

$$0 \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \overset{\text{Stolz 定理}}{=} \frac{a_n}{1} \to 0.$$

由夹逼定理, 得证.

(2) $a > 0$ 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_n}}=a,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

由夹逼定理, 得证.

习题 1.2.20 证明: 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

解 由0.1, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\dfrac{a_2}{a_1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{l}<1$. 因此 $\exists r=\dfrac{1+\frac{1}{l}}{2}\in(0,1)$, 使得当 n 充分大时, $\sqrt[n]{\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\dfrac{a_2}{a_1}}<r$. 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}<r^n,$$

即 $a_n<a_1r^n$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

习题 1.2.21 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是正数列, 满足 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, $n=1,2,\ldots$. 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

解 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 则由 $a_n=a_1\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant a_1\cdot\dfrac{b_2}{b_1}\cdot\dfrac{b_3}{b_2}\cdots\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=a_1\cdot\dfrac{b_n}{b_1}$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b>0$, 由原式有 $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\le\dfrac{a_n}{b_n}$, 因此 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 单调减, 且 $\dfrac{a_n}{b_n}>0$, 因此 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=c$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=bc$.

习题 1.2.22 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 求下列数列的极限:

(1) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$; (2) $a_n=\left(1-\dfrac{1}{n-2}\right)^{n+1}$;

(3) $a_n=\left(\dfrac{1+2n}{2+2n}\right)^{2n^3}$; (4) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^3}$.

简要说明: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 故 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的任意子列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ 也收敛于 e. 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为 $\left(1+\dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ 的形式, 从而求出极限.

在此过程中

命题 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, $a_n>0, a>0$. $\{b_n\}$ 收敛于 b. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{b_n}=a^b$.

也相同有用.

解

(1) $\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}=\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m\Big|_{m=2n+1}\to\mathrm{e}$;

(2) $\left(1-\dfrac{1}{n-2}\right)^{n+1}=\left(1+\dfrac{1}{n-2}\right)^{n-2\cdot\frac{n+1}{n-2}}=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$;

(3) $\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)\cdot\left(-\frac{n}{n+2}\right)}=\mathrm{e}^{-1}$;

(4) $\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^3\cdot 2}=\mathrm{e}^2$.

习题 1.2.23 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, 且 $|b_n|\geq b>0\ (n=1,2,\ldots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$.

解 对 $\forall M>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时,$a_n>\dfrac{M}{b}$. 又由 $|b_n|\geq b>0$, 可知 $|a_nb_n|\geqslant a_n|b|>M$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$.

习题 1.2.24 确定 $n\to\infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}$ 与 $n\sin\dfrac{n\pi}{2}\ (n\geq 1)$ 是否有界, 是否趋于无穷大.

解 $\sqrt[n]{n!}$ 无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\overset{\text{Stolz 定理}}{=}\frac{1}{\frac{1}{n}}=n\to\infty.$$

无界, 但是不趋于无穷大. 当 $n=4k+1$ 时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2}=4k+1$, 趋于无穷大; 当 $n=4k+3$ 时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2}=-(4k+3)$, 趋于负无穷大; 当 n 为偶数时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2}=0$.

习题 1.2.25 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1=1,a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}\ (n\geq 1)$ 定义, 证明: $a_n\to+\infty\ (n\to\infty)$.

解 由 $a_{n+1}^2-a_n^2=(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n)=\dfrac{1}{a_n}(a_n+a_n+\dfrac{1}{a_n})=2+\dfrac{1}{a_n^2}>2$, 可知 $a_n^2>2(n-1)$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

习题 1.2.26 给出 $\dfrac{0}{0}$ 型 Stolz 定理的证明.