

## 习题 1.1

**习题 1.1.1** 设  $a$  是有理数,  $b$  是无理数. 求证:  $a+b$  和  $a-b$  都是无理数; 当  $a \neq 0$  时,  $ab$  和  $\frac{b}{a}$  也都是无理数.

**解** 设  $a$  是有理数,  $b$  是无理数.

(1) 若  $a+b$  是有理数, 则  $b = (a+b) - a$  是有理数, 矛盾. 同理可证  $a-b$  是无理数.

(2) 若  $ab$  是有理数, 则  $b = \frac{ab}{a}$  是有理数, 矛盾. 同理可证  $\frac{b}{a}$  是无理数.

**习题 1.1.2** 求证: 两个不同的有理数之间有无理数.

**解** 设  $a, b$  是两个不同的有理数, 不妨设  $a < b$ . 则存在正整数  $k, N$  使得

$$(\sqrt{2})^{2k-1} a < N < (\sqrt{2})^{2k-1} b.$$

具体而言, 取  $k > \lceil \log_2(b-a) \rceil$ , 则  $k > \log_2 \frac{2\sqrt{2}}{b-a} \Rightarrow 2^k(b-a) > 2\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2})^{2k-1} b - (\sqrt{2})^{2k-1} a > 2$ . 因此, 存在整数  $N = \left\lfloor (\sqrt{2})^{2k-1} b \right\rfloor$ , 使得  $(\sqrt{2})^{2k-1} a < N < (\sqrt{2})^{2k-1} b$ . 于是

$$a < \frac{N}{(\sqrt{2})^{2k-1}} < b.$$

而  $\frac{N}{(\sqrt{2})^{2k-1}} = \frac{N\sqrt{2}}{2^k}$  是无理数.

**习题 1.1.3** 求证:  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  以及  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  都是无理数.

**解**

(1) 设  $\sqrt{2}$  是有理数, 则  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  互素. 因此  $2q^2 = p^2$ , 由素数分解的唯一性可知  $p$  是偶数, 设  $p = 2k$ , 则  $2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ , 同理可知  $q$  也是偶数, 与  $p, q$  互素矛盾. 因此  $\sqrt{2}$  是无理数.

(2) 设  $\sqrt{3}$  是有理数, 则  $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  互素. 因此  $3q^2 = p^2$ , 由素数分解的唯一性可知  $p$  是 3 的倍数, 设  $p = 3k$ , 则  $3q^2 = 9k^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2$ , 同理可知  $q$  也是 3 的倍数, 与  $p, q$  互素矛盾. 因此  $\sqrt{3}$  是无理数.

(3) 设  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  是有理数, 则  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  互素. 因此  $2 + 3 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2}$ , 与  $\sqrt{6}$  是无理数矛盾. 因此  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  是无理数.

**习题 1.1.4** 把下列循环小数表示为分数:

(1)  $0.24999\dots$

(2)  $0.\dot{3}7\dot{5}$

(3)  $4.\dot{5}1\dot{8}$

**解**

- (1) 设  $x = 0.24999\dots$ , 则  $10x = 2.4999\dots$ , 因此  $9x = 2.25 \Rightarrow x = \frac{9}{40}$ .
- (2) 设  $x = 0.\dot{3}7\dot{5}$ , 则  $1000x = 375.375375\dots$ , 因此  $999x = 375 \Rightarrow x = \frac{375}{999} = \frac{125}{333}$ .
- (3) 设  $x = 4.\dot{5}1\dot{8}$ , 则  $1000x = 4518.518518\dots$ , 因此  $999x = 4514 \Rightarrow x = \frac{4514}{999} = \frac{122}{27}$ .

**习题 1.1.5** 设  $r, s, t$  都是有理数. 求证:

1. 若  $r + s\sqrt{2} = 0$ , 则  $r = s = 0$ ;
2. 若  $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0$ , 则  $r = s = t = 0$ .

**解**

- (1) 假设  $s \neq 0$ , 则  $\sqrt{2} = -\frac{r}{s}$  是有理数, 与  $\sqrt{2}$  是无理数矛盾. 因此  $s = 0$ , 从而  $r = 0$ .
- (2)  $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0 \Rightarrow r^2 = 2s^2 + 3t^2 + 2st\sqrt{6} \Rightarrow (r^2 - 2s^2 - 3t^2) + (-2st)\sqrt{6} = 0$ . :
- 与 (1) 类似, 若  $st \neq 0$ , 则  $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 2s^2 - 3t^2}{2st}$  是有理数, 与  $\sqrt{6}$  是无理数矛盾. 故  $st = 0$ ,
- (a). 若  $t = 0$ , 则  $r + s\sqrt{2} = 0$ , 由 (1) 可知  $r = s = 0$ ;
- (b). 若  $s = 0$ , 则  $r + t\sqrt{3} = 0$ , 同理可知  $r = t = 0$ .

**习题 1.1.6** 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  有相同的符号, 且都大于  $-1$ . 证明:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

**解** 利用数学归纳法:

当  $n = 1$  时, 等式为

$$1 + a_1 \geq 1 + a_1,$$

显然成立.

假设当  $n = k$  时, 等式成立, 即

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

以此作为条件, 当  $n = k + 1$  时, 由  $a_{k+1} > -1$ , 可知  $1 + a_{k+1} > 0$ , 因此

$$\begin{aligned} (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) &\geq (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(1 + a_{k+1}) \\ &= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\ &\geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}. \end{aligned}$$

其中  $a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+1} + \cdots + a_k a_{k+1} \geq 0$ , 因为  $a_i$  与  $a_{k+1}$  符号相同.

**习题 1.1.7** 设  $a, b$  是实数, 且  $|a| < 1, |b| < 1$ . 证明:

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1.$$

**解** 由  $|a| < 1, |b| < 1$ , 可知  $ab \neq -1$ . 因此

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1 \Leftrightarrow |a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow (a+b)^2 < (1+ab)^2.$$

即

$$a^2 + b^2 + 2ab < 1 + a^2b^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2 \Leftrightarrow (1 - a^2)(1 - b^2) > 0.$$

显然成立.

## 习题 1.2

习题 1.2.1 用定义证明下面的结论:

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5+3n} = \frac{1}{3};$    | (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0;$ |
| (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0;$ | (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$   |

解

(1)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{5}{9\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{n}{5+3n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n - (5+3n)}{3(5+3n)} \right| = \frac{5}{3(5+3n)} < \frac{5}{9n} < \varepsilon.$$

(2)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(3)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon.$$

(4)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{n!}{n^n} - 0 \right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

习题 1.2.2 若数列  $\{a_n\}$  ( $n \geq 1$ ) 满足条件: 任给正数  $\varepsilon$ , 存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < M\varepsilon$  (其中  $M$  为常数), 则  $\{a_n\}$  必以  $a$  为极限.

$M$  为常数指的是  $M$  不依赖于  $\varepsilon$  和  $n$ . 例如  $M = 2, M = 1000$  等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于  $\forall M > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < M\varepsilon$  成立.

习题 1.2.3 证明: 当且仅当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

证明 充分性: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立. 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

必要性: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立. 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0.$$

**习题 1.2.4** 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ ; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0, \text{ 则有 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

**证明** 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - a| < \varepsilon.$  则

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$$

反之不一定成立, 如数列  $a_n = (-1)^n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ , 但  $\{a_n\}$  发散.

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } ||a_n| - 0| < \varepsilon.$  则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

**习题 1.2.5** 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 又  $|b_n| \leq M, (n = 1, 2, \dots)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ .

**证明** 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.$  则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$$

**习题 1.2.6** 证明: 若数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = a$ , 及  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**解** 按已知条件  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0, \text{ 当 } n > N_1 \text{ 时 } |x_{2n} - a| < \varepsilon.$  又  $\exists N_2 > 0, \text{ 当 } n > N_2 \text{ 时 } |x_{2n+1} - a| < \varepsilon.$  于是令  $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$ , 则  $n > N$  时恒有  $|x_n - a| < \varepsilon.$  故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$

**习题 1.2.7** 证明下列数列不收敛:

$$(1) a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1};$$

$$(2) a_n = 5 \left(1 - \frac{2}{n}\right) + (-1)^n.$$

**解**

(1) 取  $a_{2n} = \frac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1$ , 而如果  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$ , 矛盾.

(2) 取  $a_{2n} = 5 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5 \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) - 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 6, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 4$ , 而如果  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$ , 矛盾.

**习题 1.2.8** 求下列极限:

$$(1) a_n = \frac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1};$$

$$(2) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n};$$

$$(3) a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n(n+1)/2}\right), n = 2, 3, \dots;$$

- (4)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ;  
 (5)  $a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^m})$ , ( $|q| < 1$ ).

解

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

(3)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n^2+n-2)/2}{n(n+1)/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ &= \frac{(1 \cdot 2 \cdots (n-1)) \cdot (4 \cdot 5 \cdots (n+2))}{(2 \cdot 3 \cdots (n)) \cdot (3 \cdot 4 \cdots (n+1))} = \frac{1 \cdot (n+2)}{n \cdot 3} = \frac{n+2}{3n}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(4)

$$a_n = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^n})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1 - \lim_{m \rightarrow \infty} q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

**习题 1.2.9** 若  $a_n \neq 0 (n=1, 2, \dots)$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 能否断定  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ ?

解 不能. 例如  $a_n = \frac{1}{2^n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ .

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  可能为 0.

**习题 1.2.10** 若数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$ , 是否必有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ? 若还

假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 回答同样的问题.

解 不一定. 例如  $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  均不存在.

当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  时成立. 假设  $a \neq 0$  时, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{0}{a} = 0$ .

**习题 1.2.11** 若数列  $\{a_n\}$  收敛, 数列  $\{b_n\}$  发散, 则数列  $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性如何? 举例说明. 若数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  皆发散, 回答同样的问题.

解

1.  $\{a_n\}$  收敛, 数列  $\{b_n\}$  发散, 则

(a).  $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$  都发散可以采用反证法: 若  $\{a_n + b_n\}$  收敛, 由于  $\{a_n\}$  收敛, 容易知道  $\{a_n + b_n - a_n\} = \{b_n\}$  收敛, 这与  $\{b_n\}$  发散矛盾, 因此  $\{a_n + b_n\}$  发散,  $\{a_n - b_n\}$  同理可得.

(b).  $\{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性不确定.

I.  $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$ , 则  $a_n \cdot b_n = 1$  收敛;

II.  $a_n = 1, b_n = n$ , 则  $a_n \cdot b_n = n$  发散.

2.  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都发散, 则

(a).  $\{a_n + b_n\}$  的收敛性不确定

I.  $a_n = n, b_n = -n$ , 则  $a_n + b_n = 0$  收敛.

II.  $a_n = n, b_n = n$ , 则  $a_n + b_n = 2n$  发散.

(b).  $\{a_n - b_n\}$  的收敛性不确定

I.  $a_n = n + \frac{1}{n}, b_n = n$ , 则  $a_n - b_n = \frac{1}{n}$ , 收敛.

II.  $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}$ , 则  $a_n - b_n = 2 \cdot (-1)^n$  发散.

(c).  $\{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性不确定.

I.  $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 则  $a_n \cdot b_n = 0$  收敛.

II.  $a_n = n, b_n = (-1)^n$ , 则  $a_n \cdot b_n = (-1)^n n$  发散;

**习题 1.2.12** 下面的推理是否正确?

1. 设数列  $\{a_n\}: a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

解: 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 在  $a_{n+1} = 2a_n - 1$  两边取极限, 得  $a = 2a - 1$ , 即  $a = 1$ .

2.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \underbrace{0+0+\cdots+0}_{n \uparrow} = 0. \end{aligned}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right]^n = 1^n = 1.$$

解

1. 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为  $a_n = 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

2. 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

并有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1.$$

3. 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

**习题 1.2.13** 设数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  分别收敛于  $a, b$ . 若  $a > b$ , 则从某一项开始, 有  $a_n > b_n$ ; 反之, 若从某项开始恒有  $a_n \geq b_n$ , 则  $a \geq b$ .

解 这是保序性的直接推论.

**习题 1.2.14** 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  分别收敛于  $a$  及  $b$ . 记  $c_n = \max(a_n, b_n)$ ,  $d_n = \min(a_n, b_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \max(a, b), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \min(a, b).$$

解 由  $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ ,  $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ , 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

**习题 1.2.15** 求下列极限:

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right];$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k)$ , 其中  $0 < k < 1$ ;
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2});$

- 
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 2} - n)$ ;  
 (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n})$ .

解

(1) 由于

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = 0.$$

(2) 由于

$$0 \leq ((n+1)^k - n^k) = n^k \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right) \leq n^k \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 - 1 \right) = n^{k-1}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-1} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k) = 0.$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

(4) 由  $\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1)$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2)} = e^0 = 1.$$

(5) 由于

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} \leq \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leq \sqrt[n]{n}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} = 1.$$



习题 1.2.16 设  $a_1, a_2, \dots, a_m$  为  $m$  个正数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

解 设  $a_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , 则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = a_k = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

习题 1.2.17 证明下列数列收敛:

- (1)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ ;
- (2)  $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \dots + \frac{1}{3^n+1}$ ;
- (3)  $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 q + \dots + \alpha_n q^n$ , 其中  $|\alpha_k| \leq M, (k = 1, 2, \dots)$ , 而  $|q| < 1$ ;
- (4)  $a_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$ .

证明

- (1) 由  $1 - \frac{1}{2^n} < 1$ , 可知  $\{a_n\}$  单调减, 且  $a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛.
- (2) 由  $a_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} < \frac{1}{2}$ , 可知  $\{a_n\}$  有上界, 且  $a_n$  单调递增, 因此  $\{a_n\}$  收敛.
- (3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lfloor \log_{|q|} \frac{\varepsilon(1-|q|)}{2M} \right\rfloor + 1$ , 则当  $m > n > N$  时,

$$|a_m - a_n| = |\alpha_{n+1} q^{n+1} + \dots + \alpha_m q^m| \leq M(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \dots) = M \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon.$$

- (4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ , 则当  $m > n > N$  时,

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{\cos m}{m(m+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

习题 1.2.18 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

- (1)  $a_n = \frac{n}{c^n}, (c > 1)$ ;
- (2)  $a_1 = \frac{c}{2}, a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} (0 \leq c \leq 1)$ ;
- (3)  $a > 0, a_0 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right)$  (提示: 先证明  $a_n^2 \geq a$ );
- (4)  $a_0 = 1, a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}$ ;
- (5)  $a_n = \sin \sin \cdots \sin 1$  ( $n$  个  $\sin$ ).

解

(1) 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{c^{n+1} - c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n(c-1)} = 0.$$

(2)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1})$$

由  $a_2 - a_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 > 0$ , 可递归的得知  $a_{n+1} - a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  单调增, 且  $a_1 < c$ , 归纳的可得  $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$ , 因此  $\{a_n\}$  有上界, 故  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$ , 又由  $a_n > 0$ , 可知  $a = 1 - \sqrt{1-c}$ .

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)\right)^2 \geq a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

因此  $\{a_n\}$  在  $n \geq 1$  时单调减, 且有下界  $\sqrt{a}$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ , 则  $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right)$ , 解得  $l = \sqrt{a}$ .

(4)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} - \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}\right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1} + 1)^2}$$

由  $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$  归纳的可得  $1 + a_n - a_n^2 > 0$ , 因此  $a_n - a_{n-1} > 0$ , 即  $\{a_n\}$  单调递增, 且  $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  有上界, 因此  $\{a_n\}$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . 递推式两

侧取极限, 得  $a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ; 由于  $a_n > 0$  始终成立, 故  $a \geq 0$  而  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ , 故舍去这一值, 进而得到  $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

(5)  $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$ , 因此  $\{a_n\}$  单调减, 且  $a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a = \sin a \Rightarrow a = 0$ .

**习题 1.2.19** 设  $a_n \leq a \leq b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ . 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .  
解 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $|a_n - b_n| < \varepsilon$ . 又由  $a_n \leq a \leq b_n$ , 可知  $|a_n - a| = a - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$ , 同理  $|b_n - a| < \varepsilon$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

**习题 1.2.20** 证明: 若  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

解 先证明一个引理: 设  $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$ .

证明如下

(1)  $a = 0$  时,

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

同时, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1} = 0$$

由夹逼定理, 得证.

(2)  $a > 0$  时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = a,$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

由夹逼定理, 得证.

回到本题,

可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{l} < 1$ . 因此  $\exists r = \frac{1 + \frac{1}{l}}{2} \in (0, 1)$ , 使得当  $n$  充分大时,  $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} < r$ . 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} < r^n,$$

即  $a_n < a_1 r^n$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**习题 1.2.21** 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是正数列, 满足  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, n = 1, 2, \dots$  求证: 若  $\{b_n\}$  收敛, 则  $\{a_n\}$  收敛.

解 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , 则由  $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = a_1 \cdot \frac{b_n}{b_1}$  可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$ , 由原式有  $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$ , 因此  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  单调减, 且  $\frac{a_n}{b_n} > 0$ , 因此  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  收敛, 设

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = bc$ .

**习题 1.2.22** 利用极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}; \quad (2) a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1};$$

$$(3) a_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n; \quad (4) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}.$$

简要说明: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , 故  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  的任意子列  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$  也收敛于  $e$ . 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为  $\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$  的形式, 从而求出极限.

对于类似于  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$  的形式, 可以考虑先通分再变形去掉指数的负号即可处理.

在此过程中下列命题也相同有用:

**命题** 设数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a, a_n > 0, a > 0$ .  $\{b_n\}$  收敛于  $b$ . 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$ .

请注意, 这条结论对于  $1^\infty$  型是不能直接使用的, 即若  $a_n \rightarrow 1, b_n \rightarrow \infty$ , 则不能直接说  $a_n^{b_n} \rightarrow 1^\infty = 1$ . 但是对于  $a_n \rightarrow a > 1, b_n \rightarrow \infty$ , 则可以直接说  $a_n^{b_n} \rightarrow a^{+\infty} = +\infty$ ; 对于  $a_n \rightarrow a < 1, b_n \rightarrow +\infty$ , 则可以直接说  $a_n^{b_n} \rightarrow a^{+\infty} = 0$ .

**解**

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \Big|_{m=2n+1} = e; \\ (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{-n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{(n-3) \cdot \left(-\frac{n+1}{n-3}\right)} = e^{-1}; \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1) \cdot \left(-\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1}; \\ (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3 \cdot 2} = e^2. \end{aligned}$$

**习题 1.2.23** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , 且  $|b_n| \geq b > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .

**解** 对  $\forall M > 0$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $|a_n| > \frac{M}{b}$ . 又由  $|b_n| \geq b > 0$ , 可知  $|a_n b_n| \geq |a_n| |b| > M$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .

**习题 1.2.24** 确定  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sqrt[n]{n!}$  与  $n \sin \frac{n\pi}{2}$  ( $n \geq 1$ ) 是否有界, 是否趋于无穷大.

**解**  $\sqrt[n]{n!}$  无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$$

已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty$ , 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

因此,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ .

**注** Stolz 定理规范的思路要先说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$  存在, 然后才能说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  存在. 为了方便,

我们也会省去前面的部分, 直接写  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ .

$n \sin \frac{n\pi}{2}$  无界, 但是不趋于无穷大. 当  $n = 4k + 1$  时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = 4k + 1$ , 趋于无穷大; 当

$n = 4k + 3$  时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = -(4k + 3)$ , 趋于负无穷大; 当  $n$  为偶数时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = 0$ .

**习题 1.2.25** 设数列  $\{a_n\}$  由  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} (n \geq 1)$  定义, 证明:  $a_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ .

**解** 由  $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \frac{1}{a_n}(a_n + a_n + \frac{1}{a_n}) = 2 + \frac{1}{a_n^2} > 2$ , 可知  $a_n^2 > 2(n-1)$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

**习题 1.2.26** 给出  $\frac{0}{0}$  型 Stolz 定理的证明.

**命题 ( $\frac{0}{0}$  型的 Stolz 定理)** 设  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  都是无穷小量, 其中  $\{a_n\}$  还是严格单调减少数列, 又存在 (其中  $l$  为有限或  $\pm\infty$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$

**证明**

(1) 当  $l$  为有限值时, 根据条件对  $\varepsilon > 0$  存在  $N$ , 使当  $n > N$  时成立

$$\left| \frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} - l \right| < \varepsilon.$$

由于对每个  $n$  都有  $a_n > a_{n+1}$ , 这样就有

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_{n+1}) < b_n - b_{n+1} < (l + \varepsilon)(a_n - a_{n+1}).$$

任取  $m > n$ , 并且将上述不等式中的  $n$  换成  $n+1, \dots$ , 直到  $m-1$ , 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_m) < b_n - b_m < (l + \varepsilon)(a_n - a_m),$$

以及

$$\left| \frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l \right| < \varepsilon.$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 并利用条件  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$ , 就知道当  $n > N$  时成立

$$\left| \frac{b_n}{a_n} - l \right| \leq \varepsilon.$$

(2)  $l = +\infty$  时. 根据条件对任意  $M > 0$  存在  $N$ , 使当  $n > N$  时成立

$$\frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} > M.$$

由于对每个  $n$  都有  $a_n > a_{n+1}$ , 这样就有

$$b_n - b_{n+1} > M(a_n - a_{n+1}).$$

任取  $m > n$ , 并且将上述不等式中的  $n$  换成  $n+1, \dots$ , 直到  $m-1$ , 然后将所有这些不等

式相加, 就得到

$$b_n - b_m > M(a_n - a_m),$$

以及

$$\frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} > M.$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 并利用条件  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$ , 就知道当  $n > N$  时成立

$$\frac{b_n}{a_n} > M.$$

## 习题 1.3

习题 1.3.1 按定义证明:

- |  |  |
|--|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, (a > 1);$   | (2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1;$       |
| (3) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+x} = 2;$ | (4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/q} = 0 (q \text{ 为正整数}).$ |

解

- (1) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $M = \log_a \varepsilon$ , 则当  $x < M$  时,  $|a^x - 0| = a^x < a^M = \varepsilon$ .
- (2) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $M = \frac{2}{\varepsilon} + 1$ , 则当  $|x| > \max\{M, 1\}$  时,  $\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{x+1} \right| \leq \frac{2}{|x|-1} < \varepsilon$ .
- (3) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ , 则当  $0 < |x+1| < \delta$  时,  $\left| \frac{x^2-1}{x^2+x} - 2 \right| = \left| \frac{-x^2-2x-1}{x^2+x} \right| = \left| \frac{x+1}{x} \right| < \frac{\delta}{1/2} \leq \varepsilon$ .
- (4) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon^q$ , 则当  $0 < x < \delta$  时,  $|x^{1/q} - 0| = x^{1/q} < \delta^{1/q} = \varepsilon$ .

习题 1.3.2 求下列极限:

- |   |  |
|---|--|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 1} \left( x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x} \right);$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} (n \text{ 为正整数});$           |
| (3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$              | (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}.$ |

(1) 由四则运算的极限可知,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x} \right) = 1 - 5 + 2 + 1 = -1.$$

(2)  $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$ , 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

请注意, 这里  $n$  是常数, 因此可以交换这  $n$  个极限与求和的顺序.

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(3 + \frac{6}{x}\right)^{70} \left(8 - \frac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5 - \frac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{\left(3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x}\right)^{70} \left(8 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}}$$

事实上,  $\frac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}} = \left(\frac{3^7 \cdot 2^6}{5^9}\right)^{10} = 0.000000000003572622918985825913651456872761246392142557535369616400676018940233797678923776.$

**习题 1.3.3** 证明下列极限不存在:

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x;$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$

(1) 用 Cauchy 收敛原理. 对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 任取  $M > 0$ , 总存在  $k = \lceil M/\pi \rceil$ , 使得  $x_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi > M$ ,  $x_2 = (k+1)\pi > M$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ), 使得  $|\sin x_1 - \sin x_2| = 1 > \varepsilon$ . 因此极限不存在.

(2) 考虑两个单边极限,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

而极限存在的充要条件是两个单边极限存在且相等, 因此极限不存在.

**习题 1.3.4** 设函数  $f(x)$  在正无穷大处的极限为  $l$ , 则对于任意趋于正无穷大的数列  $\{a_n\}$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l. \text{ 特别地 } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l.$$

(无穷版本的 Heine 定理) 解 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 由  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , 存在  $M > 0$ , 使得当  $x > M$  时,  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . 又由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $a_n > M$ . 因此当  $n > N$  时,  $|f(a_n) - l| < \varepsilon$ . 由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ . 特别地, 取  $a_n = n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$ .

**习题 1.3.5** 讨论下列函数在  $x = 0$  处的极限.

(1)  $f(x) = [x];$

(2)  $f(x) = \operatorname{sgn} x;$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1 + x^2, & x < 0. \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x > 0; \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$$

**解注** 教材中的符号  $[x]$  表示  $x$  的整数部分, 即不大于  $x$  的最大整数. 本题中, 我们沿用此符号.

其他地方, 我们使用  $\lfloor x \rfloor$  表示对  $x$  向下取整, 使用  $\lceil x \rceil$  表示对  $x$  向上取整.

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1.$  因此极限不存在.

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$ . 左右极限均存在, 但不相等, 因此极限不存在.

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x^2) = 1$ . 因此极限存在, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$  不存在, 因此右极限不存在. 左极限  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ . 函数在  $x = 0$  处的极限不存在.

注  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$  的极限过程等同于考虑  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ , 而该极限不存在 (与习题 1.3.3(1) 同理).

习题 1.3.6 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ .

解

(1) 当  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sin \frac{x}{2^m} \neq 0$  时, 二倍角公式变形可得  $\cos y = \frac{\sin 2y}{2 \sin y}$ , 当  $\sin y \neq 0$ , 反复利用可知

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2^2}} \cdots \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

(2) 若存在  $m_0 \geq 1$ ,  $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$ , 有  $\frac{x}{2^{m_0}} = k\pi$ ,  $x = 2^{m_0}k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 自然的推论是  $\forall m \leq m_0$ , 有  $\sin \frac{x}{2^m} = \sin(2^{m_0-m}k\pi) = 0$ .

此时根据是否存在最大的  $m_0$ , 使得  $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$  可以分成两种情况:

(a).  $x = 0$ , 则  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , 有  $\cos \frac{x}{2^m} = 1$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = 1$ ;

(b).  $x \neq 0 \Leftrightarrow \exists m_0$ , s.t.  $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$ ,  $\sin \frac{x}{2^{m_0+1}} \neq 0$ , 也就是存在最大的  $m_0$ .

因此可以得到  $x = 2^{m_0}k\pi$ ,  $k = 2l + 1$ ,  $l \in \mathbb{Z}$  (如果  $k$  是偶数, 那么与  $\sin \frac{x}{2^{m_0+1}} = \sin \frac{k\pi}{2} \neq 0$  矛盾).

此时  $\cos \frac{x}{2^{m_0+1}} = \cos \frac{k\pi}{2} = \cos \left( l + \frac{1}{2} \right) \pi = 0$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = 0$ .

不过又由于  $\sin x = 0$  同样成立, 并且  $x \neq 0$ , 因此可以把结果合并进  $\frac{\sin x}{x}$ .

综上所述,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

习题 1.3.7 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2} \right) = \frac{\alpha}{2}$ .

解 我们先证明如下事实:

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, & \sin \frac{\theta}{2} \neq 0; \\ 0, & \sin \frac{\theta}{2} = 0. \end{cases}$$



我们利用积化和差

$$\sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta = \frac{1}{2} \left( \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} \left( \sum_{k=1}^n \sin k\theta \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} + \cdots + \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \sin \frac{n+1}{2} \theta \sin \frac{n}{2} \theta. \end{aligned}$$

因此, 当  $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$  自然有

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2} \theta \sin \frac{n}{2} \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

另一种情况是显然的, 每一项都为 0.

回到本题, 首先, 如果  $\alpha \neq 0$ , 那么这意味着存在充分大的  $N$  使得  $n > N, 0 < \left| \frac{\alpha}{n^2} \right| < \pi$ , 此时,  $\sin \frac{\alpha}{2n^2} \neq 0$ . 因此  $n > N$  时,

$$\sum_{k=1}^n \sin k \frac{\alpha}{n^2} = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \sin \frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin \frac{\alpha}{2n^2}}$$

考虑  $\sin x \sim x, (x \rightarrow 0)$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin k \frac{\alpha}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \sin \frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin \frac{\alpha}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \cdot \frac{n\alpha}{2n^2}}{\frac{\alpha}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2}.$$

如果  $\alpha = 0$ , 那么每一项都为 0, 极限自然为  $0 = \frac{\alpha}{2}$ .

综上所述,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2} \right) = \frac{\alpha}{2}.$$

**习题 1.3.8** 证明: 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确. 叙述并证明, 当  $x \rightarrow +\infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  时类似的结论. (应用本题结论, 可将极限过程为  $x \rightarrow \infty$  的问题化为  $x \rightarrow 0$  处理, 或者反过来. 例如, 我们有  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ .)

**解** 我们先给出这条命题的完整表述:

**命题** (1) 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确;

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确;

(3) 若  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确;

证明:

- (1) 由 Heine 定理,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l. \Rightarrow \forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ .  
反之, 若  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 由 Heine 定理,  $\forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l. \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ .
- (2) 由 Heine 定理,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l. \Rightarrow \forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ .  
反之, 若  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 由 Heine 定理,  $\forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l. \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .
- (3) 由 Heine 定理,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l. \Rightarrow \forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^-$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = -\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ .  
反之, 若  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 由 Heine 定理,  $\forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^-$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l. \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^-$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ .

习题 1.3.9 求下列极限:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x};$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2};$   
(3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x;$  (4)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}.$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

(2) 由和差化积,

$$\cos x - \cos 3x = 2 \sin 2x \sin x,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$$

(3) 当  $x > \frac{7}{2}$  时, 有  $0 < \frac{x+1}{2x-1} < \frac{3}{4}$  恒成立, 因此

$$0 \leq \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x \leq \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

又由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$ , 由夹逼定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x = 0.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{2}{x^2-1} x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2-1} x^2} = e^2$$

习题 1.3.10 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1).$$

解

(1)  $\arctan x$  在  $x \rightarrow +\infty$  时有界, 而  $x \rightarrow +\infty$  时无界, 因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0.$$

具体而言,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

(2) 由夹逼定理,

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2,$$

且  $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)x^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

(4) 证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1) = +\infty.$$

由  $2x^2 - x + 1 = x^2 + (x - 1/2)^2 + 3/4 > x^2$ , 因此对  $\forall M > 0$ , 取  $N = \sqrt{M}$ , 则当  $x > N$  时,  $2x^2 - x + 1 > x^2 > N^2 = M$ . 由此可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1) = +\infty.$$

习题 1.3.11 按定义证明.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, (a > 1);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, (a > 1);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty.$$

解

(1) 对  $\forall M > 0$ , 取  $N = a^M$ , 则当  $x > N$  时,  $\log_a x > \log_a N = M$ .

(2) 对  $\forall M < 0$ , 取  $\delta = a^M$ , 则当  $0 < x < \delta$  时,  $\log_a x < \log_a \delta = M$ .

(3) 对  $\forall M > 0$ , 取  $\delta = \frac{\pi}{2} - \arctan M$ , 则当  $\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\tan x > \tan(\frac{\pi}{2} - \delta) = M$ .

(4) 对  $\forall M > 0$ , 取  $\delta = \frac{1}{\ln M}$ , 则当  $0 < x < \delta$  时,  $e^{1/x} > e^{1/\delta} = M$ .

习题 1.3.12 证明: 函数  $y = x \sin x$  在  $(0, +\infty)$  内无界, 但当  $x \rightarrow +\infty$  时, 这个函数并不是无穷大量.

解  $\forall M > 0$ , 存在  $x_0 = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k-1 > M$ , 因此  $y(x_0) = x_0 \sin x_0 = x_0 > M$ . 由此可知  $y = x \sin x$  在  $(0, +\infty)$  内无界.

$\forall X > 0$ , 总存在  $x_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k\pi > X$ , 使得  $y(x_1) = x_1 \sin x_1 = 0$ . 因此当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y = x \sin x$  并不是无穷大量.

习题 1.3.13 函数  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1)$  内是否有界? 又当  $x \rightarrow 0^+$  时, 这个函数是否为无穷大量?

解 考虑  $0^+$  处的  $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  与考虑  $+\infty$  处的  $x \cos x$  是等价的. 以与习题 1.3.12 类似的方法可知,  $y = x \cos x$  在  $(0, +\infty)$  内无界, 但当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y = x \cos x$  并不是无穷大量. 因此,  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  内无界, 但当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  并不是无穷大量.

习题 1.3.14 本题所涉及的函数极限有着鲜明的几何意义.

记函数  $y = f(x)$  所表示的曲线为  $C$ . 若动点沿曲线无限远离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线  $C$  的一条渐近线.

(i) 垂直渐近线 易知 (垂直于  $x$  轴的) 直线  $x = x_0$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty.$$

(ii) 水平渐近线 易知 (平行于  $x$  轴的) 直线  $y = b$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

(iii) 斜渐近线 请读者证明, 方程为  $y = ax + b (a \neq 0)$  的直线  $L$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax);$$

或者

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax).$$

这里自然要假定所说的极限都存在. (提示: 以  $x \rightarrow +\infty$  为例, 设曲线  $C$  及直线  $L$  上的横坐标为  $x$  的点分别为  $M, N$ . 则  $M$  至  $L$  的距离, 是  $|MN|$  的一个常数倍. 因此, 直线  $L$  为曲线  $C$  的渐近线, 等价于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ , 由此易得所说结果.)

求下列曲线的渐近方程.

$$(1) y = x \ln \left( e + \frac{1}{x} \right); \quad (2) y = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1}.$$

**解** 先证明, 仅证明  $+\infty$ , 另一种同理. 正如提示所说, 由于距离  $d = \left| \frac{f(x) - (ax + b)}{\sqrt{a^2 + 1}} \right|$ , 因此  $l$  是渐近线, 等价于  $x \rightarrow +\infty$  时  $d$  趋于 0, 等价于  $f(x) - (ax + b)$  趋于 0.

然后问题转化为了证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Leftrightarrow a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

充分性: 由  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$  可知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

必要性: 由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$  可知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

$$(1) (a). \text{ 垂直渐近线, } x = -\frac{1}{e}: \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{e})^-} = -\frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = +\infty;$$

$$(b). \text{ 斜渐近线, } y = x + \frac{1}{e}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e + \frac{1}{x}) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(e + \frac{1}{x}) - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{1}{ex}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{ex})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/ex}{1/x} = \frac{1}{e} \text{ (}\pm\infty\text{ 两侧是同一条渐近线);}$$

$$(2) (a). \text{ 垂直渐近线, } x = 1: \lim_{x \rightarrow 1} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1} = \infty;$$

$$(b). \text{ 斜渐近线, } y = 3x + 1: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 3, \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x - 1} = 1;$$

**习题 1.3.15** 证明: 在同一极限过程中等价的无穷小量有下列性质:

1.  $\alpha(x) \sim \alpha(x)$  (自反性);
2. 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\beta(x) \sim \alpha(x)$  (对称性);
3. 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ,  $\beta(x) \sim \gamma(x)$ , 则  $\alpha(x) \sim \gamma(x)$  (传递性).

(注意, (1) 中自然需假定  $\alpha(x)$  不取零值; 而在 (2)、(3) 中, 条件蕴含着, 所说的无穷小量在极限过程中均不取零值.)

**解** 解释一下, 这里说的是 (1) 需要没有  $\alpha(x) \equiv 0$  这种情况. (2)(3) 因为有“若 xxx”的假设自然排除了这种情况.

(1) 显然,  $\lim \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$ , 因此  $\alpha(x) \sim \alpha(x)$ .

(2) 由  $\alpha(x) \sim \beta(x)$  可知,  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , 因此  $\lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$ , 即  $\beta(x) \sim \alpha(x)$ .

(3) 由  $\alpha(x) \sim \beta(x), \beta(x) \sim \gamma(x)$  可知,  $\lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \lim \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1$ , 因此  $\lim \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1$ , 即  $\alpha(x) \sim \gamma(x)$ .

**习题 1.3.16** 当  $x \rightarrow 0$  时, 比较下列无穷小的阶:

(1)  $\tan x - \sin x$  与  $x^3$ ;

(2)  $x^3 + x^2$  与  $\sin^2 x$ ;

(3)  $1 - \cos x$  与  $x^2$ .

**解**

(1)

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x \left( \frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x}.$$

由  $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \cos x \sim 1$ , 可知

$$\tan x - \sin x \sim x \cdot \frac{x^2/2}{1} = \frac{x^3}{2}.$$

因此,

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

(2)

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \sim x^2 (x \rightarrow 0).$$

同时,

$$x^3 + x^2 = (x + 1)x^2 \sim x^2 (x \rightarrow 0).$$

可得

$$x^3 + x^2 \sim \sin^2 x$$

(3)

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \cdot \left( \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2} (x \rightarrow 0).$$

**习题 1.3.17** 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 试比较下列无穷大量的阶:

(1)  $n$  次多项式  $P_n(x)$  与  $m$  次多项式  $P_m(x)$  ( $m, n$  均为正整数);

(2)  $x^\alpha$  与  $x^\beta$  ( $\alpha, \beta > 0$ );

(3)  $a^x$  与  $b^x$  ( $a, b > 1$ ).

解

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^m} \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots}$$

$$= \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ +\infty, & n > m. \end{cases} \text{ 即得到 } \begin{cases} P_n(x) \sim P_m(x), & n = m; \\ P_m(x) \text{ 更高阶}, & n < m; \\ P_n(x) \text{ 更高阶}, & n > m. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 利用 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha < \beta; \\ +\infty, & \alpha > \beta. \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x^\alpha \sim x^\beta, & \alpha = \beta; \\ x^\beta \text{ 更高阶}, & \alpha < \beta; \\ x^\alpha \text{ 更高阶}, & \alpha > \beta. \end{cases}$$

$$(3) \text{ 利用 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \begin{cases} 1, & a = b; \\ 0, & a < b; \\ +\infty, & a > b. \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} a^x \sim b^x, & a = b; \\ b^x \text{ 更高阶}, & a < b; \\ a^x \text{ 更高阶}, & a > b. \end{cases}$$

习题 1.3.18 试用等价无穷小量代换的方法计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m, n \text{ 均为正整数});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\arctan x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x}.$$

解

(1) 由  $\sin x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

(2) 由  $\tan x \sim x$ , 可知  $a \neq 0$  时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x} = a.$$

很显然该结果对  $a = 0$  也成立.

(3) 由  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ,  $\arctan x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \sin x}{x} = \frac{1}{n}.$$

(4)

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x})(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}{\sin^2 x(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}.$$

由  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ,  $\sin x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(5) 由  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ,  $\sin x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

(6) 由  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

**习题 1.C.1** 求下列数列的极限:

(1)  $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$  (提示:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ );

(2)  $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$ ;

(3) 设  $a_1 > 1$ ,  $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;

(4) 设  $a_1 = 3$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

解

(1) 由

$$(2n)^2 = 4n^2 \geq 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1)$$

可得

$$\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}.$$

因此

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0$ , 故由夹逼定理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;

(2) 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}$ , 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a_n})^n = 0$ ;

(3) 由  $a_1 > 1$ , 以及若  $a_n > 1$  时,  $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} > 1$ , 归纳的可知  $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^+$ . 所以数列



有下界. 再用归纳法: 当  $n = 1$  时:

$$a_2 - a_1 = 2 - \left( \frac{1}{a_1} + a_1 \right) \leq 2 - 2 = 0,$$

推出  $a_2 \leq a_1$ . 假设对  $n$  有  $a_n \leq a_{n-1}$ , 那么当  $n+1$  时

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} \leq 0.$$

所以  $\{a_n\}$  是单调减有下界数列, 因此收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 1$ . 在

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

两边取极限得

$$a = 2 - \frac{1}{a} \implies a^2 - 2a + 1 = 0$$

解得  $a = \pm 1$ . 但  $a = -1$  不合题意, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

(4)  $a_{n+2} = \frac{1}{1+a_{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}} = \frac{1+a_n}{2+a_n}$ . 假如对任何  $n$ , 有  $a_{2n} \geq a_{2n-2}$ ;  $a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$ , 那么对  $n+1$ , 有

$$\begin{aligned} a_{2n+2} - a_{2n} &= \frac{1}{1+a_{2n+1}} - \frac{1}{1+a_{2n-1}} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n+1}}{1+a_{2n+1}a_{2n-1}} \geq 0 \\ a_{2n+3} - a_{2n+1} &= \frac{1}{1+a_{2n+2}} - \frac{1}{1+a_{2n}} = \frac{a_{2n} - a_{2n+2}}{1+a_{2n+2}a_{2n}} \leq 0 \end{aligned}$$

推出数列  $\{a_n\}$  的子列  $\{a_{2n}\}$  单调增有上界,  $\{a_{2n-1}\}$  单调减有下界. 因此分别收敛. 对

$$a_{2n+2} = \frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}},$$

两边取极限得

$$a = \frac{1+a}{2+a} \implies a^2 + a - 1 = 0$$

解得  $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . 同理, 对

$$a_{2n+3} = \frac{1+a_{2n+1}}{2+a_{2n+1}},$$

两边取极限得

$$b = \frac{1+b}{2+b} \implies b^2 + b - 1 = 0$$

解得  $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

**习题 1.C.2** 设  $\{a_n\}$  为单调递增的数列, 并且收敛于  $a$ , 证明对一切  $n$  有  $a_n < a$ . (对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

**解** 反证法. 假设存在某个  $n_0$ , 使得  $a_{n_0} > a$ . 由数列单调递增的性质, 对一切  $n > n_0$  有  $a_n \geq$

$a_{n_0} > a$ , 于是存在  $\varepsilon = \frac{a_{n_0} - a}{2} > 0$ , 使得  $\forall N$ , 存在  $n = \max\{n_0, N\} + 1 > N$ , 使得

$$|a_n - a| = a_n - a \geq a_{n_0} - a = 2\varepsilon > \varepsilon,$$

这与数列收敛的定义矛盾.

**习题 1.C.3** 证明下面的数列收敛:

(1)  $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ ;

(2)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$ .

解

(1) 由数列定义可知  $\{a_n\}$  单调递增. 又因为

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

所以  $\{a_n\}$  有上界. 因此  $\{a_n\}$  收敛;

(2) 由数列定义可知  $\{a_n\}$  单调递增. 又因为

$$a_n = e^{\sum_{k=1}^n \ln(1 + \frac{1}{2^k})} \leq e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = e^1.$$

所以  $\{a_n\}$  有上界. 又由数列定义可知  $\{a_n\}$  单调递增. 因此  $\{a_n\}$  收敛.

**习题 1.C.4** 试构造一个发散的数列  $\{a_n\}$ , 满足条件: 对任意正数  $\varepsilon$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时, 有  $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ .

解 取  $a_n = \sqrt{n}$ . 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N > \frac{1}{4\varepsilon^2}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

但数列  $\{a_n\}$  显然发散.

**习题 1.C.5** 若数列  $\{a_n\}$  满足: 存在常数  $M$ , 使得对一切  $n$  有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq M.$$

证明:

(1) 数列  $\{A_n\}$  收敛;

(2) 数列  $\{a_n\}$  也收敛.

解

(1) 由数列定义可知  $\{A_n\}$  单调递增. 又因为对一切  $n$  有  $A_n \leq M$ , 所以  $\{A_n\}$  有上界. 因此  $\{A_n\}$  收敛;

(2) 用 Cauchy 收敛准则证明. 由 (1) 知  $\{A_n\}$  收敛, 因此对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N, \forall n > N + 1, p > 0$ , 有

$$|A_{n+p} - A_{n-1}| = |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

由三角不等式可知

$$|a_{n+p} - a_n| \leq |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

**习题 1.C.6** 设  $\{a_n\}$  是正严格递增数列. 求证: 若  $a_{n+1} - a_n$  有界, 则对任意  $\alpha \in (0, 1)$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ . 并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列  $\{a_n\}$  使得对任意  $\alpha \in (0, 1)$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ , 但是  $a_{n+1} - a_n$  无界. (提示: 考虑  $a_n = n \ln n$ .)

解

(1) 若  $\{a_n\}$  有界, 此时由于其严格单调, 故有极限, 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ , 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = l^\alpha - l^\alpha = 0$ .

(2) 若  $\{a_n\}$  无界, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 设  $|a_{n+1} - a_n| \leq M$ .

$$0 \leq a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha \left( \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^\alpha - 1 \right) < a_n^\alpha \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{1-\alpha}} \leq \frac{M}{a_n^{1-\alpha}}.$$

同时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M a_n^{\alpha-1} = 0.$$

因此由夹逼定理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ .

(3) 反之不对, 取  $a_n = n \ln n$ , 则

$$\begin{aligned} a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha &= (n+1)^\alpha \ln^\alpha(n+1) - n^\alpha \ln^\alpha n \\ &< ((n+1)^\alpha - n^\alpha) \ln^\alpha n \\ &= n^\alpha \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^\alpha - 1 \right) \ln^\alpha n \\ &< n^\alpha \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - 1 \right) \ln^\alpha n \\ &= n^{\alpha-1} \ln^\alpha n = \frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}} = 0,$$

因此由夹逼定理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ . 但

$$a_{n+1} - a_n = (n+1) \ln(n+1) - n \ln n = \ln(n+1) + n \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) > \ln(n+1),$$

显然无界.

**习题 1.C.7** 设数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = a$ .

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a.$$

习题 1.C.8 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a_n > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$ .

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{1}} = e^{\ln a} = a.$$

习题 1.C.9 证明: 若  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  也存在, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

解 设  $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ , ( $n > 1$ );  $b_1 = a_1$ , 则  $a_n = b_1 b_2 \cdots b_n$ . 由综合习题 1.C.8 可知结果. 直接 Stolz 也可以得到结果.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}} \\ &= e^{\ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}. \end{aligned}$$

习题 1.C.10 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

解

(1) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

(2) 可以用综合习题 1.C.9 来做, 记  $a_n = \frac{n^n}{n!}$  由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e.$$

习题 1.C.11 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 求证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}$ .

解 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{2}.$$

习题 1.C.12 设  $\{a_n\}$  且  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ , 又设  $\{b_n\}$  是正数列,  $c_n = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$ . 求证:

(1)  $\{c_n\}$  收敛;

(2) 若  $(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \rightarrow +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

解

(1) 记  $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 任取  $\varepsilon > 0$ , 存在  $K$ , 当  $k > K$  时,  $|a_k - a| < \varepsilon$ .

当  $n > K$ , 有

$$c_n - a = \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - a)b_k}{B_n} = \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n} + \frac{\sum_{k=K+1}^n (a_k - a)b_k}{B_n}.$$

其中

$$\left| \frac{\sum_{k=K+1}^n (a_k - a)b_k}{B_n} \right| \leq \frac{\sum_{k=K+1}^n |a_k - a|b_k}{B_n} < \varepsilon \frac{\sum_{k=K+1}^n b_k}{B_n} < \varepsilon.$$

因此

$$\left| c_n - \left( a + \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n} \right) \right| < \varepsilon.$$

而对于

$$q_n := \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n},$$

$C := \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$  是仅与  $K$  有关, 与  $n$  无关的常数,  $B_n$  单调增, 因此  $q_n$  单调有界 ( $C > 0$  时  $q_n$  单调减且  $q_n > 0$ ,  $C < 0$  时  $q_n$  单调增且  $q_n < 0$ ), 故  $q_n$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$ , 再取  $N$ , 使得当  $n, m > N$  时,  $|q_m - q_n| < \varepsilon$ , 则当  $n, m > \max\{N, K\}$  时,

$$|c_m - c_n| \leq |c_n - (a + q_n)| + |c_m - (a + q_m)| + |q_m - q_n| < 3\varepsilon.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知  $c_n$  收敛.

(2) 下给出两种方法,

(a). 由 (1) 中的过程,  $q_n = \frac{C}{B_n}$ , 由于  $B_n \rightarrow +\infty$ ,  $C$  为常数, 因此  $q_n \rightarrow 0$ , 因此存在  $N$ , 使得当  $n > N$  时,  $|q_n| < \varepsilon$ , 则当  $n > \max\{N, K\}$  时,

$$|c_n - a| \leq |c_n - (a + q_n)| + |q_n| < \varepsilon + |q_n| < 2\varepsilon.$$

(b). 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

上述解答中给出了符合题目原意的证明, 即先证明  $c_n$  收敛, 然后在  $B_n$  无界时, 再证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ . 但对于这道题而言, 还可以分类  $B_n$  有界和无界来讨论, 即先做 (2), 然后对  $B_n$  有界时, 用 Cauchy 收敛准则证明  $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k b_k \right\}$  收敛, 即两种分类下以截然不同的方式来证明  $c_n$  收敛.

注  $a_n := \cdots$  中  $:=$  表示定义. 如  $a_n := \frac{1}{n}$  表示我们新定义了一个数列  $a_n$ , 其通项公式为  $a_n = \frac{1}{n}$ .

在上文中 “ $C := \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$  是仅与  $K$  有关, 与  $n$  无关的常数.” 表示: “记  $C = \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$ , 则  $C$  是仅与  $K$  有关, 与  $n$  无关的常数.” 有的地方会写为  $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \cdots$ .

习题 1.C.13 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$

解 实际上题目中的无穷只能是  $+\infty$ .

$p > 0$  时,  $x^p \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^{x^p \cdot \frac{1}{x^{p-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}}} = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}$$

$p \leq 0$  时,  $x^p \rightarrow 0$ , 则考虑  $x > 1$  时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty.$$

习题 1.C.14 设  $f(x)$  为周期函数, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 证明  $f(x)$  恒为零.

解 设  $f(x)$  的正周期为  $T > 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 当  $|x| \geq N$  时  $|f(x)| < \varepsilon$ .

因此对于  $n = \left\lceil \frac{N}{T} \right\rceil$ , 有  $nT \geq N$ , 故对于任意  $x \in [nT, (n+1)T)$ , 有  $f(x) < \varepsilon$ .

利用周期性可以得到  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| < \varepsilon$ . 由于  $\varepsilon$  是任意的正数, 所以  $f(x)$  恒为零.

习题 1.C.15 证明

- (1) 函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时有极限  $l$  的充分必要条件是: 对于任意一个以  $x_0$  为极限的单调递增数列  $\{a_n\}$  ( $a_n \neq x_0$ ), 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ ;
- (2) 函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^+$  时有极限  $l$  的充分必要条件是: 对于任意一个以  $x_0$  为极限的单调递减数列  $\{a_n\}$  ( $a_n \neq x_0$ ), 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ .

解

- (1) (a). 必要性: 考虑任意数列  $\{a_n\}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$  且  $\{a_n\}$  单调递增, .

由于  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ , 因此,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $x_0 - \delta < x < x_0$  时, 有  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

同时对于  $\delta, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - x_0| < \delta$ , 即  $x_0 - \delta < a_n < x_0$ .

因此我们有  $m > N$  时  $|f(a_n) - l| < \varepsilon$ . 即得到数列  $\{f(a_n)\}$  收敛到  $l$ .

- (b). 充分性: 反证, 若  $x \rightarrow x_0^-$  时  $f(x)$  的极限为  $l$  不成立, 即  $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 - \delta < x < x_0$ , 使得  $|f(x) - l| \geq \varepsilon$ .

因此我们依次构造  $\delta_1 = 1, \delta_n = \min\{\frac{1}{n}, x_0 - a_{n-1}\}, (n > 2)$ , 则  $\exists a_n, x_0 - \delta_n < a_n < x_0$ , 使得  $|f(a_n) - l| \geq \varepsilon$ . 即有  $a_n > a_{n-1}$ , 且  $|x_0 - a_n| < \frac{1}{n}$ . 这意味着  $\{a_n\}$  单调递增,

且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ .

由于  $|f(a_n) - l| \geq \varepsilon$ , 所以  $\{f(a_n)\}$  不收敛到  $l$ , 矛盾, 故充分性成立.

(2) 证明同理. 具体而言:

设  $g(x) = f(-x)$ , 则  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时有极限  $l \Leftrightarrow g(x)$  在  $x \rightarrow -x_0^+$  时有极限  $l$ . 由

(1) 可知, 这等价于对于任意一个以  $-x_0$  为极限的单调递增数列  $\{b_n\}$  ( $b_n \neq -x_0$ ), 都有

$\lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n) = l$ . 设  $a_n = -b_n$ , 则  $\{a_n\}$  是以  $x_0$  为极限的单调递减数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ .

因此 (2) 得证.

**习题 1.C.16** 设  $\xi$  是一个无理数,  $a, b$  是实数, 且  $a < b$ . 求证: 存在整数  $m, n$  使得  $m + n\xi \in (a, b)$ , 即, 集合

$$S = \{m + n\xi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

在  $\mathbb{R}$  稠密.

**解** 稠密的定义: 设  $S \subset \mathbb{R}$ , 若对任意  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , 都有  $S \cap (a, b) \neq \emptyset$ , 则称  $S$  在  $\mathbb{R}$  中稠密.

想法是这样的, 我们为了找到某个  $m + n\xi$  落在  $(a, b)$  中, 于是用  $\xi$  构造一个充分小的实数  $\varepsilon = m_0 + n_0\xi \in (0, b - a)$ , 因为这个  $\varepsilon$  够小, 因此在  $\mathbb{R}$  的分割  $\mathbb{R} = \bigcup_{l \in \mathbb{Z}} [l\varepsilon, (l+1)\varepsilon]$  中, 每一段的长度  $\varepsilon$  严格小于  $b - a$ . 这样就能证明  $\{l\varepsilon \mid l \in \mathbb{Z}\} \cap (a, b) \neq \emptyset$ , 也就是存在某个  $l_0 \in \mathbb{Z}$ , 使得  $l_0\varepsilon \in (a, b)$ . 随后我们取  $m = l_0m_0, n = l_0n_0$  即有  $m + n\xi = l_0\varepsilon \in (a, b)$ .

**构造  $\varepsilon$**  实际上, 对于  $b - a > 0$ , 总存在  $k \in \mathbb{N}^*$ , 使得  $\frac{1}{k} < b - a$ . 因此我们考虑构造一个满足  $\varepsilon < \frac{1}{k}, \varepsilon \in S$  即可.

对于  $l = 1, 2, \dots, k+1$ , 我们考虑

$$n_l = [l\xi]$$

$$x_l = l\xi - n_l \in S.$$

$x_l$  是  $l\xi$  的小数部分, 容易知道  $x_l \in [0, 1)$ , 并且  $x_l$  之间总是两两不同的, 否则  $i\xi - n_i = j\xi - n_j, i \neq j$ , 这意味着  $\xi = \frac{n_i - n_j}{i - j}$ , 这与  $\xi$  为无理数矛盾.

因此对于

$$[0, 1) = \bigcup_{j=1}^k \left[ \frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right),$$

这  $k$  个区间包括了  $k+1$  个不同实数  $x_l$ . 因此总有一个区间内部存在同时两个实数, 记为  $x_p, x_q \in S, p \neq q$ , 不妨认为  $x_q > x_p$ .

由  $x_l$  的构造  $x_p = p\xi - n_p, x_q = q\xi - n_q$ , 有

$$x_q - x_p = (q - p)\xi - (n_p - n_q) \in S,$$

且由于  $x_p, x_q$  落在同一个区间内, 而区间长度为  $\frac{1}{k}$ , 因此  $0 < x_q - x_p \leq \frac{1}{k} < b - a$ , 所以  $x_q - x_p$

---

满足我们对  $\varepsilon$  的要求. 我们取

$$\varepsilon = x_q - x_p.$$

**构造  $m, n$**  我们先证明  $\exists l_0 \in \mathbb{Z}, \text{ s. t. } l_0\varepsilon \in (a, b)$ : 我们取  $l_0 = \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1$ , 则

$$l_0\varepsilon = \left( \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon < \left( \frac{b}{\varepsilon} + 1 - 1 \right) \varepsilon = b.$$

同时, 由于  $\varepsilon \leq b - a$ , 因此

$$l_0\varepsilon = \left( \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon \geq \left( \frac{b}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon = b - \varepsilon > b - (b - a) = a.$$

因此取  $l_0\varepsilon \in (a, b)$ , 因此

$$m = l_0(n_q - n_p), n = l_0(q - p)$$

即有  $m + n\xi = l_0(n_q - n_p) + l_0(q - p)\xi = l_0((q - p)\xi - (n_p - n_q)) = l_0\varepsilon \in (a, b)$ .