

ge

# 数学分析讲义 (第一册)

## 习题解答

November 7, 2025

# 目录

<b>第 1 章 极限</b>	<b>1</b>
习题 1.1 . . . . .	1
习题 1.2 . . . . .	4
习题 1.3 . . . . .	15
第 1 章综合习题 . . . . .	26
<b>第 2 章 连续函数的基本概念</b>	<b>35</b>
习题 2.1 . . . . .	35
习题 2.2 . . . . .	44
第 2 章综合习题 . . . . .	48
<b>第 3 章 单变量函数的微分学</b>	<b>53</b>
习题 3.1 . . . . .	53
习题 3.2 . . . . .	70
习题 3.3 . . . . .	74
习题 3.4 . . . . .	88
习题 3.5 . . . . .	92
习题 3.6 . . . . .	101
第 3 章综合习题 . . . . .	107
<b>第 4 章 不定积分</b>	<b>115</b>
习题 4.1 . . . . .	115
习题 4.2 . . . . .	135
<b>第 5 章 单变量函数的积分</b>	<b>138</b>
习题 5.1 . . . . .	138
习题 5.2 . . . . .	157
习题 5.3 . . . . .	159
习题 5.4 . . . . .	164
第 5 章综合习题 . . . . .	169

---

第 6 章 常微分方程初步	182
习题 6.1 . . . . .	182
习题 6.2 . . . . .	201
第 7 章 无穷级数	207
习题 7.1 . . . . .	207
习题 7.2 . . . . .	217
习题 7.3 . . . . .	225
习题 7.4 . . . . .	235
第 7 章综合习题 . . . . .	238

# 第1章 极限

## 习题 1.1

**习题 1.1.1** 设  $a$  是有理数,  $b$  是无理数. 求证:  $a+b$  和  $a-b$  都是无理数; 当  $a \neq 0$  时,  $ab$  和  $\frac{b}{a}$  也都是无理数.

**解** 设  $a$  是有理数,  $b$  是无理数.

(1) 若  $a+b$  是有理数, 则  $b = (a+b) - a$  是有理数, 矛盾. 同理可证  $a-b$  是无理数.

(2) 若  $ab$  是有理数, 则  $b = \frac{ab}{a}$  是有理数, 矛盾. 同理可证  $\frac{b}{a}$  是无理数.

**习题 1.1.2** 求证: 两个不同的有理数之间有无理数.

**解** 设  $a, b$  是两个不同的有理数, 不妨设  $a < b$ . 则存在正整数  $k, N$  使得

$$(\sqrt{2})^{2k-1} a < N < (\sqrt{2})^{2k-1} b.$$

具体而言, 取  $k > \lceil \log_2(b-a) \rceil$ , 则  $k > \log_2 \frac{2\sqrt{2}}{b-a} \Rightarrow 2^k(b-a) > 2\sqrt{2} \Rightarrow (\sqrt{2})^{2k-1} b - (\sqrt{2})^{2k-1} a > 2$ . 因此, 存在整数  $N = \left\lfloor (\sqrt{2})^{2k-1} b \right\rfloor$ , 使得  $(\sqrt{2})^{2k-1} a < N < (\sqrt{2})^{2k-1} b$ . 于是

$$a < \frac{N}{(\sqrt{2})^{2k-1}} < b.$$

而  $\frac{N}{(\sqrt{2})^{2k-1}} = \frac{N\sqrt{2}}{2^k}$  是无理数.

**习题 1.1.3** 求证:  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  以及  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  都是无理数.

**解**

(1) 设  $\sqrt{2}$  是有理数, 则  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  互素. 因此  $2q^2 = p^2$ , 由素数分解的唯一性可知  $p$  是偶数, 设  $p = 2k$ , 则  $2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$ , 同理可知  $q$  也是偶数, 与  $p, q$  互素矛盾. 因此  $\sqrt{2}$  是无理数.

(2) 设  $\sqrt{3}$  是有理数, 则  $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  互素. 因此  $3q^2 = p^2$ , 由素数分解的唯一性可知  $p$  是 3 的倍数, 设  $p = 3k$ , 则  $3q^2 = 9k^2 \Rightarrow q^2 = 3k^2$ , 同理可知  $q$  也是 3 的倍数, 与  $p, q$  互素矛盾. 因此  $\sqrt{3}$  是无理数.

(3) 设  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  是有理数, 则  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q$  互素. 因此  $2 + 3 + 2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6} = \frac{p^2 - 5q^2}{2q^2}$ , 与  $\sqrt{6}$  是无理数矛盾. 因此  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  是无理数.

**习题 1.1.4** 把下列循环小数表示为分数:

(1)  $0.24999\dots$ (2)  $0.\dot{3}7\dot{5}$ (3)  $4.\dot{5}1\dot{8}$ 

解

(1) 设  $x = 0.24999\dots$ , 则  $10x = 2.4999\dots$ , 因此  $9x = 2.25 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ .(2) 设  $x = 0.\dot{3}7\dot{5}$ , 则  $1000x = 375.375375\dots$ , 因此  $999x = 375 \Rightarrow x = \frac{375}{999} = \frac{125}{333}$ .(3) 设  $x = 4.\dot{5}1\dot{8}$ , 则  $1000x = 4518.518518\dots$ , 因此  $999x = 4514 \Rightarrow x = \frac{4514}{999} = \frac{122}{27}$ .习题 1.1.5 设  $r, s, t$  都是有理数. 求证:(1) 若  $r + s\sqrt{2} = 0$ , 则  $r = s = 0$ ;(2) 若  $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0$ , 则  $r = s = t = 0$ .

解

(1) 假设  $s \neq 0$ , 则  $\sqrt{2} = -\frac{r}{s}$  是有理数, 与  $\sqrt{2}$  是无理数矛盾. 因此  $s = 0$ , 从而  $r = 0$ .(2)  $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0 \Rightarrow r^2 = 2s^2 + 3t^2 + 2st\sqrt{6} \Rightarrow (r^2 - 2s^2 - 3t^2) + (-2st)\sqrt{6} = 0$  :与 (1) 类似, 若  $st \neq 0$ , 则  $\sqrt{6} = \frac{r^2 - 2s^2 - 3t^2}{2st}$  是有理数, 与  $\sqrt{6}$  是无理数矛盾. 故  $st = 0$ ,(a) 若  $t = 0$ , 则  $r + s\sqrt{2} = 0$ , 由 (1) 可知  $r = s = 0$ ;(b) 若  $s = 0$ , 则  $r + t\sqrt{3} = 0$ , 同理可知  $r = t = 0$ .习题 1.1.6 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  有相同的符号, 且都大于  $-1$ . 证明:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

解 利用数学归纳法:

当  $n = 1$  时, 等式为

$$1 + a_1 \geq 1 + a_1,$$

显然成立.

假设当  $n = k$  时, 等式成立, 即

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

以此作为条件, 当  $n = k + 1$  时, 由  $a_{k+1} > -1$ , 可知  $1 + a_{k+1} > 0$ , 因此

$$\begin{aligned} (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_k)(1 + a_{k+1}) &\geq (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(1 + a_{k+1}) \\ &= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\ &\geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}. \end{aligned}$$

其中  $a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+1} + \cdots + a_k a_{k+1} \geq 0$ , 因为  $a_i$  与  $a_{k+1}$  符号相同.习题 1.1.7 设  $a, b$  是实数, 且  $|a| < 1, |b| < 1$ . 证明:

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1.$$

解 由  $|a| < 1, |b| < 1$ , 可知  $ab \neq -1$ . 因此

$$\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1 \Leftrightarrow |a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow (a+b)^2 < (1+ab)^2.$$

即

$$a^2 + b^2 + 2ab < 1 + a^2b^2 + 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 < 1 + a^2b^2 \Leftrightarrow (1-a^2)(1-b^2) > 0.$$

显然成立.

## 习题 1.2

习题 1.2.1 用定义证明下面的结论:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5+3n} = \frac{1}{3};$

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0;$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0;$

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$

解

(1)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{5}{9\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{n}{5+3n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n - (5+3n)}{3(5+3n)} \right| = \frac{5}{3(5+3n)} < \frac{5}{9n} < \varepsilon.$$

(2)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(3)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon.$$

(4)  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{n!}{n^n} - 0 \right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

习题 1.2.2 若数列  $\{a_n\}$  ( $n \geq 1$ ) 满足条件: 任给正数  $\varepsilon$ , 存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < M\varepsilon$  (其中  $M$  为常数), 则  $\{a_n\}$  必以  $a$  为极限. $M$  为常数指的是  $M$  不依赖于  $\varepsilon$  和  $n$ . 例如  $M = 2, M = 1000$  等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于  $\forall M > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < M\varepsilon$  成立.习题 1.2.3 证明: 当且仅当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)解 充分性: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立. 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .必要性: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立. 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ .习题 1.2.4 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ ; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

解 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$  当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon.$  则

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$

反之不一定成立, 如数列  $a_n = (-1)^n,$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1,$  但  $\{a_n\}$  发散.

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0,$  则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$  当  $n > N$  时, 有  $||a_n| - 0| < \varepsilon.$  则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

习题 1.2.5 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$  又  $|b_n| \leq M, (n = 1, 2, \dots),$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$

解 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$  当  $n > N$  时, 有  $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.$  则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$

习题 1.2.6 证明: 若数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = a,$  及  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a,$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$

解 按已知条件  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0,$  当  $n > N_1$  时  $|x_{2n} - a| < \varepsilon.$  又  $\exists N_2 > 0,$  当  $n > N_2$  时  $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon.$  于是令  $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\},$  则  $n > N$  时恒有  $|x_n - a| < \varepsilon.$  故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$

习题 1.2.7 证明下列数列不收敛:

$$(1) a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1};$$

$$(2) a_n = 5 \left(1 - \frac{2}{n}\right) + (-1)^n.$$

解

(1) 取  $a_{2n} = \frac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2},$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1,$  而如果  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1},$  矛盾.

(2) 取  $a_{2n} = 5 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5 \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) - 1,$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 6, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 4,$  而如果  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1},$  矛盾.

习题 1.2.8 求下列极限:

$$(1) a_n = \frac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1};$$

$$(2) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n};$$

$$(3) a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n(n+1)/2}\right), n = 2, 3, \dots;$$

$$(4) a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(5) a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^m}), (|q| < 1).$$

解

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

(3)

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n^2 + n - 2)/2}{n(n+1)/2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$$

$$= \frac{(1 \cdot 2 \cdots (n-1)) \cdot (4 \cdot 5 \cdots (n+2))}{(2 \cdot 3 \cdots (n)) \cdot (3 \cdot 4 \cdots (n+1))} = \frac{1 \cdot (n+2)}{n \cdot 3} = \frac{n+2}{3n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

(4)

$$a_n = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^n})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1 - \lim_{m \rightarrow \infty} q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

**习题 1.2.9** 若  $a_n \neq 0 (n=1, 2, \dots)$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 能否断定  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ ?

**解** 不能. 例如  $a_n = \frac{1}{2^n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ .

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  可能为 0.

**习题 1.2.10** 若数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$ , 是否必有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ? 若还假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 回答同样的问题.

**解** 不一定. 例如  $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ , 但

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  均不存在.

当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  时成立. 假设  $a \neq 0$  时, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{0}{a} = 0$ .

**习题 1.2.11** 若数列  $\{a_n\}$  收敛, 数列  $\{b_n\}$  发散, 则数列  $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性如何? 举例说明. 若数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  皆发散, 回答同样的问题.

解

(1)  $\{a_n\}$  收敛, 数列  $\{b_n\}$  发散, 则

(a)  $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$  都发散可以采用反证法: 若  $\{a_n + b_n\}$  收敛, 由于  $\{a_n\}$  收敛, 容易知道  $\{a_n + b_n - a_n\} = \{b_n\}$  收敛, 这与  $\{b_n\}$  发散矛盾, 因此  $\{a_n + b_n\}$  发散,  $\{a_n - b_n\}$  同理可得.

(b)  $\{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性不确定.

I.  $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$ , 则  $a_n \cdot b_n = 1$  收敛;

II.  $a_n = 1, b_n = n$ , 则  $a_n \cdot b_n = n$  发散.

(2)  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都发散, 则

(a)  $\{a_n + b_n\}$  的收敛性不确定

I.  $a_n = n, b_n = -n$ , 则  $a_n + b_n = 0$  收敛.

II.  $a_n = n, b_n = n$ , 则  $a_n + b_n = 2n$  发散.

(b)  $\{a_n - b_n\}$  的收敛性不确定

I.  $a_n = n + \frac{1}{n}, b_n = n$ , 则  $a_n - b_n = \frac{1}{n}$ , 收敛.

II.  $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}$ , 则  $a_n - b_n = 2 \cdot (-1)^n$  发散.

(c)  $\{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性不确定.

I.  $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ , 则  $a_n \cdot b_n = 0$  收敛.

II.  $a_n = n, b_n = (-1)^n$ , 则  $a_n \cdot b_n = (-1)^n n$  发散;

**习题 1.2.12** 下面的推理是否正确?

(1) 设数列  $\{a_n\}: a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

解: 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 在  $a_{n+1} = 2a_n - 1$  两边取极限, 得  $a = 2a - 1$ , 即  $a = 1$ .

(2)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \underbrace{0+0+\cdots+0}_{n \text{ 个}} = 0. \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right]^n = 1^n = 1.$$

解

(1) 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为  $a_n = 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

(2) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

并有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right) = 1.$$

(3) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

**习题 1.2.13** 设数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  分别收敛于  $a, b$ . 若  $a > b$ , 则从某一项开始, 有  $a_n > b_n$ ; 反之, 若从某项开始恒有  $a_n \geq b_n$ , 则  $a \geq b$ .

解 这是保序性的直接推论.

**习题 1.2.14** 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  分别收敛于  $a$  及  $b$ . 记  $c_n = \max(a_n, b_n)$ ,  $d_n = \min(a_n, b_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \max(a, b), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \min(a, b).$$

解 由  $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ ,  $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$ , 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

**习题 1.2.15** 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right];$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k), \text{ 其中 } 0 < k < 1;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2});$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 2} - n);$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n}).$$

解

(1) 由于

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} = 0.$$

(2) 由于

$$0 \leq ((n+1)^k - n^k) = n^k \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right) \leq n^k \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 - 1 \right) = n^{k-1}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-1} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k) = 0.$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

(4) 由  $\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1)$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2)} = e^0 = 1.$$

(5) 由于

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} \leq \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leq \sqrt[n]{n}.$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} = 1.$$

**习题 1.2.16** 设  $a_1, a_2, \dots, a_m$  为  $m$  个正数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

解 设  $a_k = \max\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , 则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a_k = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

**习题 1.2.17** 证明下列数列收敛:

- (1)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ ;
- (2)  $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$ ;
- (3)  $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots + \alpha_n q^n$ , 其中  $|\alpha_k| \leq M$ , ( $k = 1, 2, \dots$ ), 而  $|q| < 1$ ;
- (4)  $a_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$ .

**证明**

- (1) 由  $1 - \frac{1}{2^n} < 1$ , 可知  $\{a_n\}$  单调减, 且  $a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛.
- (2) 由  $a_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} < \frac{1}{2}$ , 可知  $\{a_n\}$  有上界, 且  $a_n$  单调递增, 因此  $\{a_n\}$  收敛.
- (3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lfloor \log_{|q|} \frac{\varepsilon(1-|q|)}{2M} \right\rfloor + 1$ , 则当  $m > n > N$  时,

$$|a_m - a_n| = |\alpha_{n+1}q^{n+1} + \cdots + \alpha_m q^m| \leq M(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \cdots) = M \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon.$$

- (4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ , 则当  $m > n > N$  时,

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m}{m(m+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

**习题 1.2.18** 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

- (1)  $a_n = \frac{n}{c^n}$ , ( $c > 1$ );
- (2)  $a_1 = \frac{c}{2}$ ,  $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$  ( $0 \leq c \leq 1$ );
- (3)  $a > 0$ ,  $a_0 > 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right)$  (提示: 先证明  $a_n^2 \geq a$ );
- (4)  $a_0 = 1$ ,  $a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}$ ;
- (5)  $a_n = \sin \sin \cdots \sin 1$  ( $n \uparrow \sin$ ).

**解**

- (1) 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{c^{n+1} - c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n(c-1)} = 0.$$

- (2)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1})$$

由  $a_2 - a_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 > 0$ , 可递归的得知  $a_{n+1} - a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  单调增, 且  $a_1 < c$ , 归纳

的, 可得  $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$ , 因此  $\{a_n\}$  有上界, 故  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$ , 又由  $a_n > 0$ , 可知  $a = 1 - \sqrt{1-c}$ .

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left( \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right) \right)^2 \geq a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

因此  $\{a_n\}$  在  $n \geq 1$  时单调减, 且有下界  $\sqrt{a}$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ , 则  $l = \frac{1}{2} \left( l + \frac{a}{l} \right)$ , 解得  $l = \sqrt{a}$ .

(4)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} - \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} \right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1} + 1)^2}$$

由  $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$  归纳的, 可得  $1 + a_n - a_n^2 > 0$ , 因此  $a_n - a_{n-1} > 0$ , 即  $\{a_n\}$  单调递增, 且  $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  有上界, 因此  $\{a_n\}$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . 递推式两侧取极限, 得  $a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ; 由于  $a_n > 0$  始终成立, 故  $a \geq 0$  而  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ , 故舍去这一值, 进而得到  $a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

(5)  $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$ , 因此  $\{a_n\}$  单调减, 且  $a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a = \sin a \Rightarrow a = 0$ .

**习题 1.2.19** 设  $a_n \leq a \leq b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ . 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

**解** 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $|a_n - b_n| < \varepsilon$ . 又由  $a_n \leq a \leq b_n$ , 可知  $|a_n - a| = a - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$ , 同理  $|b_n - a| < \varepsilon$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

**习题 1.2.20** 证明: 若  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**解** 先证明一个引理: 设  $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$ .

证明如下

(1)  $a = 0$  时,

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

同时, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1} = 0$$

由夹逼定理, 得证.

(2)  $a > 0$  时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = a,$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

由夹逼定理, 得证.

回到本题,

可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{l} < 1$ . 因此  $\exists r = \frac{1 + \frac{1}{l}}{2} \in (0, 1)$ , 使得当  $n$  充分大时,  $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} < r$ . 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} < r^n,$$

即  $a_n < a_1 r^n$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**习题 1.2.21** 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是正数列, 满足  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . 求证: 若  $\{b_n\}$  收敛, 则  $\{a_n\}$  收敛.

**解** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , 则由  $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = a_1 \cdot \frac{b_n}{b_1}$  可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  
若  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$ , 由原式有  $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$ , 因此  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  单调减, 且  $\frac{a_n}{b_n} > 0$ , 因此  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = bc$ .

**习题 1.2.22** 利用极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1};$$

$$(2) a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1};$$

$$(3) a_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n;$$

$$(4) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}.$$

简要说明: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , 故  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  的任意子列  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$  也收敛于  $e$ . 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为  $\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$  的形式, 从而求出极限.

对于类似于  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$  的形式, 可以考虑先通分再变形去掉指数的负号即可处理.

在此过程中下列命题也相同有用:

**命题** 设数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a, a_n > 0, a > 0$ .  $\{b_n\}$  收敛于  $b$ . 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$ .

请注意, 这条结论对于  $1^\infty$  型是不能直接使用的, 即若  $a_n \rightarrow 1, b_n \rightarrow \infty$ , 则不能直接说  $a_n^{b_n} \rightarrow 1^\infty = 1$ . 但是对于  $a_n \rightarrow a > 1, b_n \rightarrow \infty$ , 则可以直接说  $a_n^{b_n} \rightarrow a^{+\infty} = +\infty$ ; 对于  $a_n \rightarrow a < 1, b_n \rightarrow +\infty$ , 则可以直接说  $a_n^{b_n} \rightarrow a^{+\infty} = 0$ .

**解**

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \Big|_{m=2n+1} = e;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{-n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-3}\right)^{(n-3) \cdot \left(-\frac{n+1}{n-3}\right)} = e^{-1};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1) \cdot \left(-\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-1};$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{2n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3 \cdot 2} = e^2.$$

**习题 1.2.23** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , 且  $|b_n| \geq b > 0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .

**解** 对  $\forall M > 0$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $|a_n| > \frac{M}{b}$ . 又由  $|b_n| \geq b > 0$ , 可知  $|a_n b_n| \geq |a_n| |b| > M$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .

**习题 1.2.24** 确定  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sqrt[n]{n!}$  与  $n \sin \frac{n\pi}{2}$  ( $n \geq 1$ ) 是否有界, 是否趋于无穷大.

**解**  $\sqrt[n]{n!}$  无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$$

已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty$ , 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

因此,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ .

**注** Stolz 定理规范的思路要先说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$  存在, 然后才能说明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  存在. 为了方便,

我们也会省去前面的部分, 直接写  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ .

$n \sin \frac{n\pi}{2}$  无界, 但是不趋于无穷大. 当  $n = 4k + 1$  时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = 4k + 1$ , 趋于无穷大; 当  $n = 4k + 3$  时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = -(4k + 3)$ , 趋于负无穷大; 当  $n$  为偶数时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = 0$ .

**习题 1.2.25** 设数列  $\{a_n\}$  由  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$  ( $n \geq 1$ ) 定义, 证明:  $a_n \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

**解** 由  $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \frac{1}{a_n}(a_n + a_n + \frac{1}{a_n}) = 2 + \frac{1}{a_n^2} > 2$ , 可知  $a_n^2 > 2(n-1)$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

**习题 1.2.26** 给出  $\frac{0}{0}$  型 Stolz 定理的证明.

**命题** ( $\frac{0}{0}$  型的 Stolz 定理) 设  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  都是无穷小量, 其中  $\{a_n\}$  还是严格单调减少数列, 又

存在 (其中  $l$  为有限或  $\pm\infty$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = l,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = l.$$

**证明**

(1) 当  $l$  为有限值时, 根据条件对  $\varepsilon > 0$  存在  $N$ , 使当  $n > N$  时成立

$$\left| \frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} - l \right| < \varepsilon.$$

由于对每个  $n$  都有  $a_n > a_{n+1}$ , 这样就有

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_{n+1}) < b_n - b_{n+1} < (l + \varepsilon)(a_n - a_{n+1}).$$

任取  $m > n$ , 并且将上述不等式中的  $n$  换成  $n+1, \dots$ , 直到  $m-1$ , 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$(l - \varepsilon)(a_n - a_m) < b_n - b_m < (l + \varepsilon)(a_n - a_m),$$

以及

$$\left| \frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} - l \right| < \varepsilon.$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 并利用条件  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$ , 就知道当  $n > N$  时成立

$$\left| \frac{b_n}{a_n} - l \right| \leq \varepsilon.$$

(2)  $l = +\infty$  时. 根据条件对任意  $M > 0$  存在  $N$ , 使当  $n > N$  时成立

$$\frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} > M.$$

由于对每个  $n$  都有  $a_n > a_{n+1}$ , 这样就有

$$b_n - b_{n+1} > M(a_n - a_{n+1}).$$

任取  $m > n$ , 并且将上述不等式中的  $n$  换成  $n+1, \dots$ , 直到  $m-1$ , 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$b_n - b_m > M(a_n - a_m),$$

以及

$$\frac{b_n - b_m}{a_n - a_m} > M.$$

令  $m \rightarrow \infty$ , 并利用条件  $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 0$ , 就知道当  $n > N$  时成立

$$\frac{b_n}{a_n} > M.$$

## 习题 1.3

习题 1.3.1 按定义证明:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, (a > 1);$  (2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1;$   
 (3)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+x} = 2;$  (4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/q} = 0$  ( $q$  为正整数).

解

- (1) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $M = \log_a \varepsilon$ , 则当  $x < M$  时,  $|a^x - 0| = a^x < a^M = \varepsilon$ .  
 (2) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $M = \frac{2}{\varepsilon} + 1$ , 则当  $|x| > \max\{M, 1\}$  时,  $\left| \frac{x-1}{x+1} - 1 \right| = \left| \frac{-2}{x+1} \right| \leq \frac{2}{|x|-1} < \varepsilon$ .  
 (3) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$ , 则当  $0 < |x+1| < \delta$  时,  $\left| \frac{x^2-1}{x^2+x} - 2 \right| = \left| \frac{-x^2-2x-1}{x^2+x} \right| = \left| \frac{x+1}{x} \right| < \frac{\delta}{1/2} \leq \varepsilon$ .  
 (4) 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon^q$ , 则当  $0 < x < \delta$  时,  $|x^{1/q} - 0| = x^{1/q} < \delta^{1/q} = \varepsilon$ .

习题 1.3.2 求下列极限:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x} \right);$  (2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$  ( $n$  为正整数);  
 (3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$  (4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}.$

(1) 由四则运算的极限可知,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( x^5 - 5x + 2 + \frac{1}{x} \right) = 1 - 5 + 2 + 1 = -1.$$

(2)  $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$ , 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

请注意, 这里  $n$  是常数, 因此可以交换这  $n$  个极限与求和的顺序.

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(3 + \frac{6}{x}\right)^{70} \left(8 - \frac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5 - \frac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{\left(3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x}\right)^{70} \left(8 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}\right)^{90}} = \frac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}}$$

事实上,  $\frac{3^{70} \cdot 8^{20}}{5^{90}} = \left(\frac{3^7 \cdot 2^6}{5^9}\right)^{10} = 0.000000000003572622918985825913651456872761246392142557535369616400676018940233797678923776.$

习题 1.3.3 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x; \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}.$$

(1) 用 Cauchy 收敛原理. 对  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , 任取  $M > 0$ , 总存在  $k = \lceil M/\pi \rceil$ , 使得  $x_1 = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi > M$ ,  $x_2 = (k+1)\pi > M$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ), 使得  $|\sin x_1 - \sin x_2| = 1 > \varepsilon$ . 因此极限不存在.

(2) 考虑两个单边极限,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1.$$

而极限存在的充要条件是两个单边极限存在且相等, 因此极限不存在.

习题 1.3.4 设函数  $f(x)$  在正无穷大处的极限为  $l$ , 则对于任意趋于正无穷大的数列  $\{a_n\}$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ . 特别地  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$ .

(无穷版本的 Heine 定理) 解 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 由  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , 存在  $M > 0$ , 使得当  $x > M$  时,  $|f(x) - l| < \varepsilon$ . 又由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $a_n > M$ . 因此当  $n > N$  时,  $|f(a_n) - l| < \varepsilon$ . 由此可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ . 特别地, 取  $a_n = n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = l$ .

习题 1.3.5 讨论下列函数在  $x = 0$  处的极限.

$$(1) f(x) = [x]; \quad (2) f(x) = \operatorname{sgn} x;$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 2^x, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1 + x^2, & x < 0. \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x > 0; \\ x, & x \leq 0. \end{cases}$$

解 注 教材中的符号  $[x]$  表示  $x$  的整数部分, 即不大于  $x$  的最大整数. 本题中, 我们沿用此符号. 其他地方, 我们使用  $\lfloor x \rfloor$  表示对  $x$  向下取整, 使用  $\lceil x \rceil$  表示对  $x$  向上取整.

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$ . 因此极限不存在.
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$ . 左右极限均存在, 但不相等, 因此极限不存在.
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^x = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + x^2) = 1$ . 因此极限存在, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .
- (4)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$  不存在, 因此右极限不存在. 左极限  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$ . 函数在  $x = 0$  处的极限不存在.

注  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos \frac{1}{x}$  的极限过程等同于考虑  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ , 而该极限不存在 (与习题 1.3.3(1) 同理).

习题 1.3.6 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$ .

解

- (1) 当  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sin \frac{x}{2^m} \neq 0$  时, 二倍角公式变形可得  $\cos y = \frac{\sin 2y}{2 \sin y}$ , 当  $\sin y \neq 0$ , 反复利用可知

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2^2}} \cdots \frac{\sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x}.$$

(2) 若存在  $m_0 \geq 1$ ,  $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$ , 有  $\frac{x}{2^{m_0}} = k\pi, x = 2^{m_0}k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . 自然的推论是  $\forall m \leq m_0$ , 有  $\sin \frac{x}{2^m} = \sin(2^{m_0-m}k\pi) = 0$ .

此时根据是否存在最大的  $m_0$ , 使得  $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0$  可以分成两种情况:

(a)  $x = 0$ , 则  $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , 有  $\cos \frac{x}{2^m} = 1$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = 1$ ;

(b)  $x \neq 0 \Leftrightarrow \exists m_0$ , s.t.  $\sin \frac{x}{2^{m_0}} = 0, \sin \frac{x}{2^{m_0+1}} \neq 0$ , 也就是存在最大的  $m_0$ .

因此可以得到  $x = 2^{m_0}k\pi, k = 2l + 1, l \in \mathbb{Z}$  (如果  $k$  是偶数, 那么与  $\sin \frac{x}{2^{m_0+1}} = \sin \frac{k\pi}{2} \neq 0$  矛盾).

此时  $\cos \frac{x}{2^{m_0+1}} = \cos \frac{k\pi}{2} = \cos \left( l + \frac{1}{2} \right) \pi = 0$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = 0$ .

不过又由于  $\sin x = 0$  同样成立, 并且  $x \neq 0$ , 因此可以把结果合并进  $\frac{\sin x}{x}$ .

综上所述,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

**习题 1.3.7** 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2} \right) = \frac{\alpha}{2}$ .

**解** 我们先证明如下事实:

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, & \sin \frac{\theta}{2} \neq 0; \\ 0, & \sin \frac{\theta}{2} = 0. \end{cases}$$

我们利用积化和差

$$\sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta = \frac{1}{2} \left( \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} \left( \sum_{k=1}^n \sin k\theta \right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left( \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} + \cdots + \cos \left( n - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} - \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \right) \\ &= \sin \frac{n+1}{2} \theta \sin \frac{n}{2} \theta. \end{aligned}$$

因此, 当  $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$  自然有

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

另一种情况是显然的, 每一项都为 0.

回到本题, 首先, 如果  $\alpha \neq 0$ , 那么这意味着存在充分大的  $N$  使得  $n > N, 0 < \left| \frac{\alpha}{n^2} \right| < \pi$ , 此时,  $\sin \frac{\alpha}{2n^2} \neq 0$ . 因此  $n > N$  时,

$$\sum_{k=1}^n \sin k \frac{\alpha}{n^2} = \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \sin \frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin \frac{\alpha}{2n^2}}$$

考虑  $\sin x \sim x, (x \rightarrow 0)$ , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin k \frac{\alpha}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \sin \frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin \frac{\alpha}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)\alpha}{2n^2} \cdot \frac{n\alpha}{2n^2}}{\frac{\alpha}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\alpha}{2n} = \frac{\alpha}{2}.$$

如果  $\alpha = 0$ , 那么每一项都为 0, 极限自然为  $0 = \frac{\alpha}{2}$ .

综上所述,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2} \right) = \frac{\alpha}{2}.$$

**习题 1.3.8** 证明: 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确. 叙述并证明, 当  $x \rightarrow +\infty$  及  $x \rightarrow -\infty$  时类似的结论. (应用本题结论, 可将极限过程为  $x \rightarrow \infty$  的问题化为  $x \rightarrow 0$  处理, 或者反过来. 例如, 我们有  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ .)

解 我们先给出这条命题的完整表述:

**命题** (1) 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确;

(2) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确;

(3) 若  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 反之亦正确;

**证明:**

(1) 由 Heine 定理,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l. \Rightarrow \forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ .  
反之, 若  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 由 Heine 定理,  $\forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l. \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ .

(2) 由 Heine 定理,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l. \Rightarrow \forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ .

反之, 若  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 由 Heine 定理,  $\forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ .  
 $\Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^+$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . 由 Heine 定理可知  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

(3) 由 Heine 定理,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l \Rightarrow \forall \{y_n\}$ , 若  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^-$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{y_n} = -\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ . 由 Heine 定理可知  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ .  
 反之, 若  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$ , 由 Heine 定理,  $\forall \{y_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0^-$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{y_n}\right) = l$ .  
 $\Rightarrow \forall \{x_n\}$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 0^-$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ . 由 Heine 定理可知  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ .

**习题 1.3.9** 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}.$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

(2) 由和差化积,

$$\cos x - \cos 3x = 2 \sin 2x \sin x,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$$

(3) 当  $x > \frac{7}{2}$  时, 有  $0 < \frac{x+1}{2x-1} < \frac{3}{4}$  恒成立, 因此

$$0 \leq \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x \leq \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

又由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^x = 0$ , 由夹逼定理可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x = 0.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{2}{x^2-1} x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2-1} x^2} = e^2$$

**习题 1.3.10** 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1).$$

解

(1)  $\arctan x$  在  $x \rightarrow +\infty$  时有界, 而  $x \rightarrow +\infty$  时无界, 因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x}{x} = 0.$$

具体而言,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

(2) 由夹逼定理,

$$-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2,$$

且  $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)x^2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

(4) 证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1) = +\infty.$$

由  $2x^2 - x + 1 = x^2 + (x - 1/2)^2 + 3/4 > x^2$ , 因此对  $\forall M > 0$ , 取  $N = \sqrt{M}$ , 则当  $x > N$  时,  $2x^2 - x + 1 > x^2 > N^2 = M$ . 由此可知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1) = +\infty.$$

习题 1.3.11 按定义证明.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, (a > 1);$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, (a > 1);$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty.$$

解

(1) 对  $\forall M > 0$ , 取  $N = a^M$ , 则当  $x > N$  时,  $\log_a x > \log_a N = M$ .

(2) 对  $\forall M < 0$ , 取  $\delta = a^M$ , 则当  $0 < x < \delta$  时,  $\log_a x < \log_a \delta = M$ .

(3) 对  $\forall M > 0$ , 取  $\delta = \frac{\pi}{2} - \arctan M$ , 则当  $\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $\tan x > \tan(\frac{\pi}{2} - \delta) = M$ .

(4) 对  $\forall M > 0$ , 取  $\delta = \frac{1}{\ln M}$ , 则当  $0 < x < \delta$  时,  $e^{1/x} > e^{1/\delta} = M$ .

**习题 1.3.12** 证明: 函数  $y = x \sin x$  在  $(0, +\infty)$  内无界, 但当  $x \rightarrow +\infty$  时, 这个函数并不是无穷大量.

**解**  $\forall M > 0$ , 存在  $x_0 = (2k-1)\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k-1 > M$ , 因此  $y(x_0) = x_0 \sin x_0 = x_0 > M$ . 由此可知  $y = x \sin x$  在  $(0, +\infty)$  内无界.

$\forall X > 0$ , 总存在  $x_1 = 2k\pi, k \in \mathbb{N}^*, 2k\pi > X$ , 使得  $y(x_1) = x_1 \sin x_1 = 0$ . 因此当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y = x \sin x$  并不是无穷大量.

**习题 1.3.13** 函数  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  在区间  $(0, 1)$  内是否有界? 又当  $x \rightarrow 0^+$  时, 这个函数是否为无穷大量?

**解** 考虑  $0^+$  处的  $\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  与考虑  $+\infty$  处的  $x \cos x$  是等价的. 以与 **习题 1.3.12** 类似的方法可知,  $y = x \cos x$  在  $(0, +\infty)$  内无界, 但当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $y = x \cos x$  并不是无穷大量. 因此,  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  在  $(0, 1)$  内无界, 但当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $y = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$  并不是无穷大量.

**习题 1.3.14** 本题所涉及的函数极限有着鲜明的几何意义.

记函数  $y = f(x)$  所表示的曲线为  $C$ . 若动点沿曲线无限远离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线  $C$  的一条渐近线.

(i) 垂直渐近线 易知 (垂直于  $x$  轴的) 直线  $x = x_0$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty.$$

(ii) 水平渐近线 易知 (平行于  $x$  轴的) 直线  $y = b$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

(iii) 斜渐近线 请读者证明, 方程为  $y = ax + b (a \neq 0)$  的直线  $L$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax);$$

或者

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax).$$

这里自然要假定所说的极限都存在. (提示: 以  $x \rightarrow +\infty$  为例, 设曲线  $C$  及直线  $L$  上的横坐标为  $x$  的点分别为  $M, N$ . 则  $M$  至  $L$  的距离, 是  $|MN|$  的一个常数倍. 因此, 直线  $L$  为曲线  $C$  的渐近线, 等价于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ , 由此易得所说结果.)

求下列曲线的渐近方程.

$$(1) y = x \ln \left( e + \frac{1}{x} \right);$$

$$(2) y = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1}.$$

**解** 先证明, 仅证明  $+\infty$ , 另一种同理. 正如提示所说, 由于距离  $d = \left| \frac{f(x) - (ax + b)}{\sqrt{a^2 + 1}} \right|$ , 因此  $l$  是

渐近线, 等价于  $x \rightarrow +\infty$  时  $d$  趋于 0, 等价于  $f(x) - (ax + b)$  趋于 0.

然后问题转化为了证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \Leftrightarrow a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax).$$

充分性: 由  $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$  可知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

必要性: 由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$  可知,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

$$(1) \quad (a) \text{ 垂直渐近线, } x = -\frac{1}{e}: \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{e})^-} = -\frac{1}{e} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = +\infty;$$

$$(b) \text{ 斜渐近线, } y = x + \frac{1}{e}: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(e + \frac{1}{x}) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(\ln(e + \frac{1}{x}) - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{1}{ex}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{ex})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/ex}{1/x} = \frac{1}{e} \text{ (}\pm\infty\text{ 两侧是同一条渐近线);}$$

$$(2) \quad (a) \text{ 垂直渐近线, } x = 1: \lim_{x \rightarrow 1} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1} = \infty;$$

$$(b) \text{ 斜渐近线, } y = 3x + 1: \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 3, \lim_{x \rightarrow +\infty} (y(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3}{x - 1} = 1;$$

**习题 1.3.15** 证明: 在同一极限过程中等价的无穷小量有下列性质:

(1)  $\alpha(x) \sim \alpha(x)$  (自反性);

(2) 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ , 则  $\beta(x) \sim \alpha(x)$  (对称性);

(3) 若  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ,  $\beta(x) \sim \gamma(x)$ , 则  $\alpha(x) \sim \gamma(x)$  (传递性).

(注意, (1) 中自然需假定  $\alpha(x)$  不取零值; 而在 (2)、(3) 中, 条件蕴含着, 所说的无穷小量在极限过程中均不取零值.)

**解** 解释一下, 这里说的是 (1) 需要没有  $\alpha(x) \equiv 0$  这种情况. (2)(3) 因为有“若 xxx”的假设自然排除了这种情况.

$$(1) \text{ 显然, } \lim \frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1, \text{ 因此 } \alpha(x) \sim \alpha(x).$$

$$(2) \text{ 由 } \alpha(x) \sim \beta(x) \text{ 可知, } \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \text{ 因此 } \lim \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1, \text{ 即 } \beta(x) \sim \alpha(x).$$

$$(3) \text{ 由 } \alpha(x) \sim \beta(x), \beta(x) \sim \gamma(x) \text{ 可知, } \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \lim \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1, \text{ 因此 } \lim \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1, \text{ 即 } \alpha(x) \sim \gamma(x).$$

习题 1.3.16 当  $x \rightarrow 0$  时, 比较下列无穷小的阶:

(1)  $\tan x - \sin x$  与  $x^3$ ;

(2)  $x^3 + x^2$  与  $\sin^2 x$ ;

(3)  $1 - \cos x$  与  $x^2$ .

解

(1)

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x \left( \frac{1}{\cos x} - 1 \right) = \sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x}.$$

由  $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \cos x \sim 1$ , 可知

$$\tan x - \sin x \sim x \cdot \frac{x^2/2}{1} = \frac{x^3}{2}.$$

因此,

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

(2)

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \sim x^2 (x \rightarrow 0).$$

同时,

$$x^3 + x^2 = (x+1)x^2 \sim x^2 (x \rightarrow 0).$$

可得

$$x^3 + x^2 \sim \sin^2 x$$

(3)

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \cdot \left( \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{x^2}{2} (x \rightarrow 0).$$

习题 1.3.17 当  $x \rightarrow +\infty$  时, 试比较下列无穷大量的阶:

(1)  $n$  次多项式  $P_n(x)$  与  $m$  次多项式  $P_m(x)$  ( $m, n$  均为正整数);

(2)  $x^\alpha$  与  $x^\beta$  ( $\alpha, \beta > 0$ );

(3)  $a^x$  与  $b^x$  ( $a, b > 1$ ).

解

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{x^m} \frac{a_n + a_{n-1} \frac{1}{x} + \dots}{b_m + b_{m-1} \frac{1}{x} + \dots}$$

$$= \frac{a_n}{b_m} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ +\infty, & n > m. \end{cases} \text{即得到} \begin{cases} P_n(x) \sim P_m(x), & n = m; \\ P_m(x) \text{更高阶}, & n < m; \\ P_n(x) \text{更高阶}, & n > m. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 利用 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta; \\ 0, & \alpha < \beta; \\ +\infty, & \alpha > \beta. \end{cases} \text{可得} \begin{cases} x^\alpha \sim x^\beta, & \alpha = \beta; \\ x^\beta \text{更高阶}, & \alpha < \beta; \\ x^\alpha \text{更高阶}, & \alpha > \beta. \end{cases}$$

$$(3) \text{ 利用 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \begin{cases} 1, & a = b; \\ 0, & a < b; \\ +\infty, & a > b. \end{cases} \text{可得} \begin{cases} a^x \sim b^x, & a = b; \\ b^x \text{更高阶}, & a < b; \\ a^x \text{更高阶}, & a > b. \end{cases}$$

习题 1.3.18 试用等价无穷小量代换的方法计算下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad (m, n \text{ 均为正整数});$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\arctan x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin 2x};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{1 - \cos x}.$$

解

(1) 由  $\sin x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

(2) 由  $\tan x \sim x$ , 可知  $a \neq 0$  时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{x} = a.$$

很显然该结果对  $a = 0$  也成立.

(3) 由  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ,  $\arctan x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + \sin x} - 1}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{n} \sin x}{x} = \frac{1}{n}.$$

(4)

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \frac{(\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x})(\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})}.$$

由  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ ,  $\sin x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2 (\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x})} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(5) 由  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ,  $\sin x \sim x$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

(6) 由  $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$ ,  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ , 可知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

## 第1章综合习题

习题 1.C.1 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \text{ (提示: } \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{);}$$

$$(2) a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1};$$

$$(3) \text{ 设 } a_1 > 1, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, n = 1, 2, \cdots;$$

$$(4) \text{ 设 } a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n = 1, 2, \cdots.$$

解

(1) 由

$$(2n)^2 = 4n^2 \geq 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1)$$

可得

$$\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}.$$

因此

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leq \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0$ , 故由夹逼定理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ;

(2) 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}$ , 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a_n})^n = 0$ ;

(3) 由  $a_1 > 1$ , 以及若  $a_n > 1$  时,  $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} > 1$ , 归纳的可知  $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^+$ . 所以数列有下界. 再用归纳法: 当  $n = 1$  时:

$$a_2 - a_1 = 2 - \left( \frac{1}{a_1} + a_1 \right) \leq 2 - 2 = 0,$$

推出  $a_2 \leq a_1$ . 假设对  $n$  有  $a_n \leq a_{n-1}$ , 那么当  $n+1$  时

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} \leq 0.$$

所以  $\{a_n\}$  是单调减有下界数列, 因此收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 1$ . 在

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

两边取极限得

$$a = 2 - \frac{1}{a} \implies a^2 - 2a + 1 = 0$$

解得  $a = \pm 1$ . 但  $a = -1$  不合题意, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

(4)  $a_{n+2} = \frac{1}{1+a_{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}} = \frac{1+a_n}{2+a_n}$ . 假如对任何  $n$ , 有  $a_{2n} \geq a_{2n-2}$ ;  $a_{2n+1} \leq a_{2n-1}$ , 那么对  $n+1$ , 有

$$a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{1}{1+a_{2n+1}} - \frac{1}{1+a_{2n-1}} = \frac{a_{2n-1} - a_{2n+1}}{1+a_{2n+1}a_{2n-1}} \geq 0$$

$$a_{2n+3} - a_{2n+1} = \frac{1}{1+a_{2n+2}} - \frac{1}{1+a_{2n}} = \frac{a_{2n} - a_{2n+2}}{1+a_{2n+2}a_{2n}} \leq 0$$

推出数列  $\{a_n\}$  的子列  $\{a_{2n}\}$  单调增有上界,  $\{a_{2n-1}\}$  单调减有下界. 因此分别收敛. 对

$$a_{2n+2} = \frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}},$$

两边取极限得

$$a = \frac{1+a}{2+a} \implies a^2 + a - 1 = 0$$

解得  $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . 同理, 对

$$a_{2n+3} = \frac{1+a_{2n+1}}{2+a_{2n+1}},$$

两边取极限得

$$b = \frac{1+b}{2+b} \implies b^2 + b - 1 = 0$$

解得  $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1}$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .

**习题 1.C.2** 设  $\{a_n\}$  为单调递增的数列, 并且收敛于  $a$ , 证明对一切  $n$  有  $a_n < a$ . (对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

**解** 反证法. 假设存在某个  $n_0$ , 使得  $a_{n_0} > a$ . 由数列单调递增的性质, 对一切  $n > n_0$  有  $a_n \geq a_{n_0} > a$ , 于是存在  $\varepsilon = \frac{a_{n_0} - a}{2} > 0$ , 使得  $\forall N$ , 存在  $n = \max\{n_0, N\} + 1 > N$ , 使得

$$|a_n - a| = a_n - a \geq a_{n_0} - a = 2\varepsilon > \varepsilon,$$

这与数列收敛的定义矛盾.

**习题 1.C.3** 证明下面的数列收敛:

$$(1) a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2};$$

$$(2) a_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

**解**

(1) 由数列定义可知  $\{a_n\}$  单调递增. 又因为

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

所以  $\{a_n\}$  有上界. 因此  $\{a_n\}$  收敛;

(2) 由数列定义可知  $\{a_n\}$  单调递增. 又因为

$$a_n = e^{\sum_{k=1}^n \ln(1+\frac{1}{2^k})} \leq e^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = e^1.$$

所以  $\{a_n\}$  有上界. 又由数列定义可知  $\{a_n\}$  单调递增. 因此  $\{a_n\}$  收敛.

**习题 1.C.4** 试构造一个发散的数列  $\{a_n\}$ , 满足条件: 对任意正数  $\varepsilon$ , 存在正整数  $N$ , 使当  $n > N$  时, 有  $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$ .

**解** 取  $a_n = \sqrt{n}$ . 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N > \frac{1}{4\varepsilon^2}$ , 当  $n > N$  时, 有

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

但数列  $\{a_n\}$  显然发散.

**习题 1.C.5** 若数列  $\{a_n\}$  满足: 存在常数  $M$ , 使得对一切  $n$  有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq M.$$

证明:

- (1) 数列  $\{A_n\}$  收敛;
- (2) 数列  $\{a_n\}$  也收敛.

**解**

- (1) 由数列定义可知  $\{A_n\}$  单调递增. 又因为对一切  $n$  有  $A_n \leq M$ , 所以  $\{A_n\}$  有上界. 因此  $\{A_n\}$  收敛;
- (2) 用 Cauchy 收敛准则证明. 由 (1) 知  $\{A_n\}$  收敛, 因此对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在正整数  $N, \forall n > N+1, p > 0$ , 有

$$|A_{n+p} - A_{n-1}| = |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

由三角不等式可知

$$|a_{n+p} - a_n| \leq |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

**习题 1.C.6** 设  $\{a_n\}$  是正严格递增数列. 求证: 若  $a_{n+1} - a_n$  有界, 则对任意  $\alpha \in (0, 1)$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ . 并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列  $\{a_n\}$  使得对任意  $\alpha \in (0, 1)$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ , 但是  $a_{n+1} - a_n$  无界. (提示: 考虑  $a_n = n \ln n$ .)

**解**

- (1) 若  $\{a_n\}$  有界, 此时由于其严格单调, 故有极限, 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ , 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = l^\alpha - l^\alpha = 0$ .
- (2) 若  $\{a_n\}$  无界, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 设  $|a_{n+1} - a_n| \leq M$ .

$$0 \leq a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha \left( \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^\alpha - 1 \right) < a_n^\alpha \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{1-\alpha}} \leq \frac{M}{a_n^{1-\alpha}}.$$

同时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M a_n^{\alpha-1} = 0.$$

因此由夹逼定理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ .

(3) 反之不对, 取  $a_n = n \ln n$ , 则

$$\begin{aligned} a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha &= (n+1)^\alpha \ln^\alpha(n+1) - n^\alpha \ln^\alpha n \\ &< ((n+1)^\alpha - n^\alpha) \ln^\alpha n \\ &= n^\alpha \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - 1 \right) \ln^\alpha n \\ &< n^\alpha \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right) \ln^\alpha n \\ &= n^{\alpha-1} \ln^\alpha n = \frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^{1-\alpha}} = 0,$$

因此由夹逼定理可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$ . 但

$$a_{n+1} - a_n = (n+1) \ln(n+1) - n \ln n = \ln(n+1) + n \ln \left( \frac{n+1}{n} \right) > \ln(n+1),$$

显然无界.

**习题 1.C.7** 设数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = a$ .

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = a.$$

**习题 1.C.8** 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 且  $a_n > 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$ .

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n)}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{1}} = e^{\ln a} = a.$$

**习题 1.C.9** 证明: 若  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  存在, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$  也存在, 并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

解 设  $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ , ( $n > 1$ );  $b_1 = a_1$ , 则  $a_n = b_1 b_2 \cdots b_n$ . 由综合习题 1.C.8 可知结果. 直接 Stolz 也

可以得到结果.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln a_n}{n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{1}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}} \\ &= e^{\ln \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.\end{aligned}$$

**习题 1.C.10** 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}; \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

解

(1) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1;$$

(2) 可以用综合习题 1.C.9 来做, 记  $a_n = \frac{n^n}{n!}$  由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot n!}{n^n \cdot (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e.$$

**习题 1.C.11** 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 求证  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}$ .

解 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a}{2}.$$

**习题 1.C.12** 设  $\{a_n\}$  且  $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$ , 又设  $\{b_n\}$  是正数列,  $c_n = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$ . 求证:

(1)  $\{c_n\}$  收敛;

(2) 若  $(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \rightarrow +\infty$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ .

解

(1) 记  $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 任取  $\varepsilon > 0$ , 存在  $K$ , 当  $k > K$  时,  $|a_k - a| < \varepsilon$ .

当  $n > K$ , 有

$$c_n - a = \frac{\sum_{k=1}^n (a_k - a)b_k}{B_n} = \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n} + \frac{\sum_{k=K+1}^n (a_k - a)b_k}{B_n}.$$

其中

$$\left| \frac{\sum_{k=K+1}^n (a_k - a)b_k}{B_n} \right| \leq \frac{\sum_{k=K+1}^n |a_k - a|b_k}{B_n} < \varepsilon \frac{\sum_{k=K+1}^n b_k}{B_n} < \varepsilon.$$

因此

$$\left| c_n - \left( a + \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n} \right) \right| < \varepsilon.$$

而对于

$$q_n := \frac{\sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k}{B_n},$$

$C := \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$  是仅与  $K$  有关, 与  $n$  无关的常数,  $B_n$  单调增, 因此  $q_n$  单调有界 ( $C > 0$  时  $q_n$  单调减且  $q_n > 0$ ,  $C < 0$  时  $q_n$  单调增且  $q_n < 0$ ), 故  $q_n$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q$ , 再取  $N$ , 使得当  $n, m > N$  时,  $|q_m - q_n| < \varepsilon$ , 则当  $n, m > \max\{N, K\}$  时,

$$|c_m - c_n| \leq |c_n - (a + q_n)| + |c_m - (a + q_m)| + |q_m - q_n| < 3\varepsilon.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知  $c_n$  收敛.

(2) 下给出两种方法,

(a) 由 (1) 中的过程,  $q_n = \frac{C}{B_n}$ , 由于  $B_n \rightarrow +\infty$ ,  $C$  为常数, 因此  $q_n \rightarrow 0$ , 因此存在  $N$ , 使得当  $n > N$  时,  $|q_n| < \varepsilon$ , 则当  $n > \max\{N, K\}$  时,

$$|c_n - a| \leq |c_n - (a + q_n)| + |q_n| < \varepsilon + |q_n| < 2\varepsilon.$$

(b) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

上述解答中给出了符合题目原意的证明, 即先证明  $c_n$  收敛, 然后在  $B_n$  无界时, 再证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ . 但对于这道题而言, 还可以分类  $B_n$  有界和无界来讨论, 即先做 (2), 然后对  $B_n$  有界时, 用 Cauchy 收敛准则证明  $\left\{ \sum_{k=1}^n a_k b_k \right\}$  收敛, 即两种分类下以截然不同的方式来证明  $c_n$  收敛.

注  $a_n := \cdots$  中  $:=$  表示定义. 如  $a_n := \frac{1}{n}$  表示我们新定义了一个数列  $a_n$ , 其通项公式为  $a_n = \frac{1}{n}$ .

在上文中 “ $C := \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$  是仅与  $K$  有关, 与  $n$  无关的常数.” 表示: “记  $C = \sum_{k=1}^K (a_k - a)b_k$ ,

则  $C$  是仅与  $K$  有关, 与  $n$  无关的常数.” 有的地方会写为  $a_n \stackrel{\text{def}}{=} \cdots$ .

习题 1.C.13 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ \infty, & p < 1. \end{cases}$

解 实际上题目中的无穷只能是  $+\infty$ .

$p > 0$  时,  $x^p \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^{x^p \cdot \frac{1}{x^{p-1}}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}}} = \begin{cases} 1, & p > 1, \\ e, & p = 1, \\ +\infty, & p < 1. \end{cases}$$

$p \leq 0$  时,  $x^p \rightarrow 0$ , 则考虑  $x > 1$  时,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^p}\right)^x \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty.$$

**习题 1.C.14** 设  $f(x)$  为周期函数, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ , 证明  $f(x)$  恒为零.

**解** 设  $f(x)$  的正周期为  $T > 0$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 当  $|x| \geq N$  时  $|f(x)| < \varepsilon$ .

因此对于  $n = \left\lceil \frac{N}{T} \right\rceil$ , 有  $nT \geq N$ , 故对于任意  $x \in [nT, (n+1)T)$ , 有  $f(x) < \varepsilon$ .

利用周期性可以得到  $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| < \varepsilon$ . 由于  $\varepsilon$  是任意的正数, 所以  $f(x)$  恒为零.

**习题 1.C.15** 证明

- (1) 函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时有极限  $l$  的充分必要条件是: 对于任意一个以  $x_0$  为极限的单调递增数列  $\{a_n\}$  ( $a_n \neq x_0$ ), 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ ;
- (2) 函数  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^+$  时有极限  $l$  的充分必要条件是: 对于任意一个以  $x_0$  为极限的单调递减数列  $\{a_n\}$  ( $a_n \neq x_0$ ), 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ .

**解**

- (1) (a) 必要性: 考虑任意数列  $\{a_n\}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$  且  $\{a_n\}$  单调递增, .

由于  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ , 因此,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $x_0 - \delta < x < x_0$  时, 有  $|f(x) - l| < \varepsilon$ .

同时对于  $\delta, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - x_0| < \delta$ , 即  $x_0 - \delta < a_n < x_0$ .

因此我们有  $m > N$  时  $|f(a_n) - l| < \varepsilon$ . 即得到数列  $\{f(a_n)\}$  收敛到  $l$ .

- (b) 充分性: 反证, 若  $x \rightarrow x_0^-$  时  $f(x)$  的极限为  $l$  不成立, 即  $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_0 - \delta < x < x_0$ , 使得  $|f(x) - l| \geq \varepsilon$ .

因此我们依次构造  $\delta_1 = 1, \delta_n = \min\{\frac{1}{n}, x_0 - a_{n-1}\}, (n > 2)$ , 则  $\exists a_n, x_0 - \delta_n < a_n < x_0$ , 使得  $|f(a_n) - l| \geq \varepsilon$ . 即有  $a_n > a_{n-1}$ , 且  $|x_0 - a_n| < \frac{1}{n}$ . 这意味着  $\{a_n\}$  单调递增, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ .

由于  $|f(a_n) - l| \geq \varepsilon$ , 所以  $\{f(a_n)\}$  不收敛到  $l$ , 矛盾, 故充分性成立.

- (2) 证明同理. 具体而言:

设  $g(x) = f(-x)$ , 则  $f(x)$  在  $x \rightarrow x_0^-$  时有极限  $l \Leftrightarrow g(x)$  在  $x \rightarrow -x_0^+$  时有极限  $l$ . 由

(1) 可知, 这等价于对于任意一个以  $-x_0$  为极限的单调递增数列  $\{b_n\}$  ( $b_n \neq -x_0$ ), 都有

$\lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n) = l$ . 设  $a_n = -b_n$ , 则  $\{a_n\}$  是以  $x_0$  为极限的单调递减数列, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$ .

因此 (2) 得证.

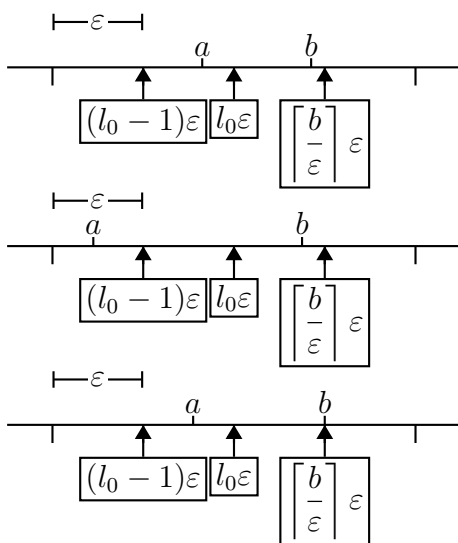
**习题 1.C.16** 设  $\xi$  是一个无理数,  $a, b$  是实数, 且  $a < b$ . 求证: 存在整数  $m, n$  使得  $m + n\xi \in (a, b)$ , 即, 集合

$$S = \{m + n\xi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

在  $\mathbb{R}$  稠密.

**解** 稠密的定义: 设  $S \subset \mathbb{R}$ , 若对任意  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , 都有  $S \cap (a, b) \neq \emptyset$ , 则称  $S$  在  $\mathbb{R}$  中稠密.

想法是这样的, 我们为了找到某个  $m + n\xi$  落在  $(a, b)$  中, 于是用  $\xi$  构造一个充分小的实数  $\varepsilon = m_0 + n_0\xi \in (0, b - a)$ . 因为这个  $\varepsilon$  够小, 所以能证明存在某个  $l_0 \in \mathbb{Z}$ , 使得  $l_0\varepsilon \in (a, b)$ , 直观理解如图 1.1 所示.



**图 1.1:**  $a, b$  之间的区间长度大于  $\varepsilon$ , 因此存在某个  $l_0 \in \mathbb{Z}$ , 使得  $l_0\varepsilon \in (a, b)$ . 这里的思路和习题 1.1.2 中证明两个无理数之间存在有理数的思路是类似的.

随后我们取  $m = l_0 m_0, n = l_0 n_0$  即有  $m + n\xi = l_0\varepsilon \in (a, b)$ .

**构造  $\varepsilon$**  实际上, 对于  $b - a > 0$ , 总存在  $k \in \mathbb{N}^*$ , 使得  $\frac{1}{k} < b - a$ . 因此我们考虑构造一个满足  $\varepsilon < \frac{1}{k}, \varepsilon \in S$  即可.

对于  $l = 1, 2, \dots, k + 1$ , 我们考虑

$$n_l = [l\xi]$$

$$x_l = l\xi - n_l \in S.$$

$x_l$  是  $l\xi$  的小数部分, 容易知道  $x_l \in [0, 1)$ , 并且  $x_l$  之间总是两两不同的, 否则  $i\xi - n_i = j\xi - n_j, i \neq j$ , 这意味着  $\xi = \frac{n_i - n_j}{i - j}$ , 这与  $\xi$  为无理数矛盾.

因此对于

$$[0, 1) = \bigcup_{j=1}^k \left[ \frac{j-1}{k}, \frac{j}{k} \right),$$

这  $k$  个区间包括了  $k+1$  个不同实数  $x_l$ . 因此总有一个区间内部存在同时两个实数, 记为  $x_p, x_q \in S, p \neq q$ , 不妨认为  $x_q > x_p$ .

由  $x_l$  的构造  $x_p = p\xi - n_p, x_q = q\xi - n_q$ , 有

$$x_q - x_p = (q - p)\xi - (n_p - n_q) \in S,$$

且由于  $x_p, x_q$  落在同一个区间内, 而区间长度为  $\frac{1}{k}$ , 因此  $0 < x_q - x_p \leq \frac{1}{k} < b - a$ , 所以  $x_q - x_p$  满足我们对  $\varepsilon$  的要求. 我们取

$$\varepsilon = x_q - x_p.$$

**构造  $m, n$**  我们先证明  $\exists l_0 \in \mathbb{Z}, \text{ s. t. } l_0\varepsilon \in (a, b)$ : 我们取  $l_0 = \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1$ , 则

$$l_0\varepsilon = \left( \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon < \left( \frac{b}{\varepsilon} + 1 - 1 \right) \varepsilon = b.$$

同时, 由于  $\varepsilon < b - a$ , 因此

$$l_0\varepsilon = \left( \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon \geq \left( \frac{b}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon = b - \varepsilon > b - (b - a) = a.$$

因此  $l_0\varepsilon \in (a, b)$ .

于是令

$$m = l_0(n_q - n_p), n = l_0(q - p)$$

即有  $m + n\xi = l_0(n_q - n_p) + l_0(q - p)\xi = l_0((q - p)\xi - (n_p - n_q)) = l_0\varepsilon \in (a, b)$ .

## 第2章 连续函数的基本概念

### 习题 2.1

**习题 2.1.1** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  附近有定义, 且  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0 - h)] = 0$ . 问  $f(x)$  是否必在  $x = x_0$  处连续?

**解** 不一定. 例如, 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则  $\lim_{h \rightarrow 0} [f(0 + h) - f(0 - h)] = \lim_{h \rightarrow 0} (0 - 0) = 0$ , 但  $f(x)$  在  $x = 0$  处不连续.

**习题 2.1.2** 设对任意正数  $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ , 函数  $f(x)$  在  $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$  上连续. 证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续.

**解** 设  $x_0 \in (a, b)$ , 则存在  $\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{b - x_0}{2}, \frac{x_0 - a}{2} \right\} > 0$ , 使得  $a + \varepsilon_0 < x_0 < b - \varepsilon_0$ . 因为  $f(x)$  在  $[a + \varepsilon_0, b - \varepsilon_0]$  上连续, 故  $f(x)$  在  $x_0$  处连续. 因此  $f(x)$  在  $(a, b)$  内连续.

**习题 2.1.3** 设在点  $x = x_0$  处, 函数  $f(x)$  连续, 而  $g(x)$  不连续, 问函数  $f(x) \pm g(x)$  与  $f(x)g(x)$  在点  $x_0$  的连续性如何? 若  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  处都不连续, 回答同样的问题.

**解**

(1)  $f(x) \pm g(x)$  与  $f(x)g(x)$  在点  $x_0$  处均不连续. 反证: 若  $f(x) + g(x)$  在点  $x_0$  处连续, 则

$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = f(x_0) + g(x_0)$ , 即  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) + g(x_0) - f(x_0) = g(x_0)$ , 矛盾. 同理可证  $f(x) - g(x)$  在点  $x_0$  处不连续.

$f(x)g(x)$  在  $x_0$  处连续性未知, 例如, 设

$$f(x) = x, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

则  $f(x)g(x) \equiv x$ , 在点  $x_0 = 0$  处连续. 又例如, 设

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

则  $f(x)g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$  在点  $x_0 = 0$  处不连续.

(2) 若  $f(x), g(x)$  在  $x_0$  处都不连续, 则  $f(x) \pm g(x)$  与  $f(x)g(x)$  在点  $x_0$  处可能连续, 也可能

不连续. 例如,

(a)  $f(x) + g(x)$  在点  $x_0$  处连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

则  $f(x) + g(x) \equiv 0$ , 在点  $x_0 = 0$  处连续.

(b)  $f(x) + g(x)$  在点  $x_0$  处不连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则  $f(x) + g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0; \end{cases}$  在点  $x_0 = 0$  处不连续.

(c)  $f(x)g(x)$  在点  $x_0$  处连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则  $f(x)g(x) \equiv 0$ , 在点  $x_0 = 0$  处连续.

(d)  $f(x)g(x)$  在点  $x_0$  处不连续: 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则  $f(x)g(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$  在点  $x_0 = 0$  处不连续.

#### 习题 2.1.4

(1) 设函数  $f(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 则函数  $|f(x)|$  在点  $x = x_0$  处也连续.

(2) 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在一个区间  $I$  上连续, 证明: 函数  $M(x) = \max(f(x), g(x))$  及  $m(x) = \min(f(x), g(x))$  在区间  $I$  上均连续.

解

(1) 因为  $f(x)$  在点  $x = x_0$  处连续, 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 因此  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . 又因为

$$||f(x)| - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

故  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |f(x_0)|$ , 即  $|f(x)|$  在点  $x = x_0$  处连续.

(2) 由  $M(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} + \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$ ,  $m(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} - \frac{|f(x) - g(x)|}{2}$  可知, 只需

证明  $|f(x) - g(x)|$  在区间  $I$  上连续. 因为  $f(x), g(x)$  在区间  $I$  上连续, 故  $f(x) - g(x)$  在区间  $I$  上连续. 由 (1) 可知,  $|f(x) - g(x)|$  在区间  $I$  上连续.

**习题 2.1.5** 证明: 存在这样的函数  $f(x)$ , 处处不连续, 但函数  $|f(x)|$  处处连续. (提示: 适当地修改 Dirichlet 函数可得出一个例子.)

解 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

则  $f(x)$  处处不连续, 但  $|f(x)| \equiv 1$ , 处处连续.

**证明** 若  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 取  $\{a_n\} \subset \mathbb{Q}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 1$ ; 取  $\{b_n\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = x_0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(a_n) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(b_n)$ , 矛盾. 因此  $f(x)$  处处不连续.

**习题 2.1.6** 指出下列函数的间断点, 并说明其类型.

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \frac{x+1}{x-2}; & (2) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \\ (3) \quad f(x) &= \lfloor \cos x \rfloor; & (4) \quad f(x) &= \frac{1}{1 + e^{1/x}}; \\ (5) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{x+7}, & -\infty < x < -7, \\ x, & -7 \leq x \leq 1, \\ (x-1) \sin \frac{1}{x-1}, & 1 < x < +\infty; \end{cases} \\ (6) \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2, \\ 4, & x = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty.$$

左右极限不存在, 因此  $x = 2$  是第二类间断点.

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( -\frac{\sin x}{x} \right) = -1.$$

左右极限存在但不相等, 因此  $x = 0$  是第一类间断点中的跳跃间断点.

(3) 可知  $f(x) = \begin{cases} 1, & x = k\pi, k \in \mathbb{Z}; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$  在  $x = k\pi$  处,  $\lim_{x \rightarrow k\pi} f(x) = 0 \neq f(k\pi) = 1$ . 左右极限存在且相等,  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 是第一类间断点中的可去间断点.

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = 1.$$

左右极限存在但不相等, 因此  $x = 0$  是第一类间断点中的跳跃间断点.

(5) (a) 在  $x = -7$  处

$$\lim_{x \rightarrow -7^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -7^-} \frac{1}{x + 7} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = -7,$$

左极限不存在, 因此  $x = -7$  是第二类间断点.

(b) 在  $x = 1$  处:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) \sin \frac{1}{x - 1} = 0, \quad f(1) = 1,$$

左右极限存在但不相等, 因此  $x = 1$  是第一类间断点中的跳跃间断点.

(6) 当  $x \neq 2$  时,  $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$ .  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$ , 但  $f(2) = 4$ , 函数值与极限值相等. 因此函数在  $x = 2$  处连续, 无间断点.

习题 2.1.7 试确定  $a$ , 使得函数  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0 \end{cases}$  在  $x = 0$  处连续.

解 由  $f(0) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = e^0 = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a + 0 = a$  可知, 当  $a = 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$ , 即  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续.

习题 2.1.8 证明: 函数  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 在点 0 处右连续, 但不左连续.

解 因为  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-2/x}}{1 + e^{-2/x}} = 1 = f(0)$ , 故  $f(x)$  在点 0 处右连续.

又因为  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2/x} - 1}{e^{2/x} + 1} = -1 \neq f(0)$ , 故  $f(x)$  在点 0 处不左连续.

习题 2.1.9 证明: 对每个实数  $x$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$  存在. 将该极限值记为  $f(x)$ , 试讨论函数  $f(x)$  的连续性.

解

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = (1+x) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(x^2)^n} = \begin{cases} 1+x, & |x| < 1; \\ \frac{1+x}{2}, & x = \pm 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

即

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 1; \\ 1, & x = 1; \\ 0, & x > 1 \text{ 或 } x \leq -1. \end{cases}$$

因此,

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0 = f(-1)$ , 故  $f(x)$  在  $x = -1$  处连续;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \neq f(1)$ , 故  $f(x)$  在  $x = 1$  处不连续; 对于其他点,  $f(x)$  均连续.

综上所述,  $f(x)$  在  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$  上连续, 在  $x = 1$  处不连续.

**习题 2.1.10** 证明: 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 则存在一个正数  $\delta$ , 使得函数  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上有界. (这一结果称为连续函数的局部有界性.)

**解** 因为  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . 取  $\varepsilon = 1$ , 则当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < 1$ , 即  $-1 < f(x) - f(x_0) < 1$ , 故  $f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1$ . 因此, 当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时, 有  $|f(x)| \leq \max\{|f(x_0) - 1|, |f(x_0) + 1|\}$ , 即  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上有界.

**习题 2.1.11** 证明: 若函数  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 且  $f(x_0) \neq 0$ , 则存在一个正数  $\delta$ , 使得函数  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上与  $f(x_0)$  同号. (这一结果称为连续函数的局部保号性) 进一步, 存在某个正数  $\gamma$ , 使得  $f(x)$  在这一区间中满足  $|f(x)| \geq \gamma$ .

**解** 因为  $f(x)$  在点  $x_0$  连续, 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 即  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ . 取  $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$ , 则当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|f(x_0)|}{2},$$

即

$$-\frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{|f(x_0)|}{2},$$

$$\text{故 } f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

因为  $f(x_0) \neq 0$ , 故当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时, 有

(1)  $f(x_0) > 0$  时

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

(2)  $f(x_0) < 0$  时

$$f(x) < f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} < 0.$$

因此, 当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时, 有  $f(x)$  与  $f(x_0)$  同号. 进一步地, 取  $\gamma = \frac{|f(x_0)|}{2}$ , 则当

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时, 有  $|f(x)| \geq \gamma$ .

**习题 2.1.12** 证明: 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$  (从而  $x_0$  为  $g(x)$  的可去间断点),  $f(u)$  在  $u = a$  处连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) = f(a).$$

(这一结论对其他五种极限过程也成立.)

**解** 由于  $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = f(a)$ , 故  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ , 当  $|u - a| < \delta_1$  时, 有  $|f(u) - f(a)| < \varepsilon$ .

又因为  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$ , 故对于  $\delta_1 > 0, \exists \delta_2 > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta_2$  时, 有  $|g(x) - a| < \delta_1$ .

因此, 当  $|x - x_0| < \delta_2$  时, 有  $|g(x) - a| < \delta_1$ , 即  $|f(g(x)) - f(a)| < \varepsilon$ . 综上所述,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(a)$ .

**习题 2.1.13** 证明: 若函数  $u(x), v(x)$  在  $x_0$  处连续, 且  $u(x_0) > 0$ , 则函数  $u(x)^{v(x)}$  也在点  $x_0$  处连续.

**解** 利用  $e^x$  在  $\mathbb{R}$  上连续,  $\ln x$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 以及复合函数的极限可交换性, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{v(x) \ln u(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \ln u(x)} = e^{v(x_0) \ln u(x_0)} = u(x_0)^{v(x_0)}.$$

**习题 2.1.14** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 且对于任意  $x$  有  $f(2x) = f(x)$ . 求证  $f(x)$  是常数.

**解** 即证:  $f(x) \equiv f(0)$ . 对于任意点  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 考虑任意以  $x_0$  为极限的数列,  $\{x_n\}$ , 则由连续性

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n}{2^n} \cdot 2^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n}{2^n}\right) = f(0),$$

且  $f(x_0) = f(0)$ . 由于  $x_0$  的任意性, 故  $f(x) \equiv f(0)$ .

**习题 2.1.15** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 且对于任意  $x, y$  有  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . 求证  $f(x) = cx$ , 其中  $c$  是常数.

**解**

(1) 由  $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$  可知,  $f(0) = 0$ .

(2) 对  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$f(nx) = f((n-1)x + x) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n \text{ 个}} = nf(x).$$

即对任意自然数  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f(nx) = nf(x)$ .

(3)

$$f(-x) + f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

即对任意整数  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $f(kx) = kf(x)$ .

(4) 对  $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ ,

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m \cdot \frac{1}{n} \cdot nf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$$

即对任意有理数  $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ,  $f(rx) = rf(x)$ .

(5) 对  $x \in \mathbb{R}$ , 则存在有理数列  $\{r_n\}$  使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ , 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n f(1) = xf(1).$$

由于  $f$  在  $x$  处连续, 故

$$f(x) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = xf(1).$$

取  $c = f(1)$ , 即有  $f(x) = xf(1) = cx$ .

**习题 2.1.16** 当  $x \rightarrow 0$  时, 用  $\sin x \sim x$ ,  $\tan x \sim x$  证明  $\arcsin x \sim x$ ,  $\arctan x \sim x$ ; 用  $\ln(1+x) \sim x$  证明  $(e^x - 1) \sim x$ .

(上述的等价无穷小, 是微积分中非常基本的事实.)

解

(1)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , 即  $f(x)$  在  $x = 0$  连续. 设  $g(x) = \arcsin x$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \arcsin x}{\arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即  $\arcsin x \sim x$ ;

(2)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , 即  $f(x)$  在  $x = 0$  连续. 设  $g(x) = \arctan x$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \arctan x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即  $\arctan x \sim x$ ;

(3)  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ , 即  $f(x)$  在  $x = 0$  连续. 设  $g(x) = e^x - 1$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . 因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + e^x - 1)}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 0} g(x)\right) = f(0) = 1,$$

即  $(e^x - 1) \sim x$ .

**习题 2.1.17** 求极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[10]{1+\tan x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{2x \sin x};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin(\sin x)}{1 - \cos x};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4};$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x);$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x});$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 - \frac{\sin x}{x}}.$$

解

$$(1) \sqrt{1+x+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}(x+x^2), \sin 2x \sim 2x, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4};$$

$$(2) \sqrt{1+x^2} - 1 \sim \frac{1}{2}x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1;$$

$$(3) \sqrt[10]{1+\tan x} - 1 \sim \frac{1}{10} \tan x \sim \frac{1}{10}x, \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{1}{2}x, 2x \sin x \sim 2x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[10]{1+\tan x} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{10}x \cdot \frac{1}{2}x}{2x^2} = \frac{1}{40};$$

$$(4) x \cdot \arcsin(\sin x) \sim x^2, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \arcsin(\sin x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2;$$

$$(5) 1 - \cos(1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}(1 - \cos x)^2 \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{1}{8}x^4, (x \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{8}x^4}{x^4} = \frac{1}{8};$$

$$(6) \text{ 令 } y = \frac{1}{x}, \text{ 则 } y \rightarrow 0^+,$$

$$\text{并且 } x = -\frac{1}{y}, \text{ 即有 } x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = -\frac{1}{y} \left( \sqrt{\frac{1}{y^2} + 100} - \frac{1}{y} \right) = -\frac{\sqrt{1 + 100y^2} - 1}{y^2}$$

$$\text{而 } \sqrt{1 + 100y^2} - 1 \sim \frac{1}{2} \cdot 100y^2 = 50y^2, (y \rightarrow 0), \text{故}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{1 + 100y^2} - 1}{y^2} = -\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{50y^2}{y^2} = -50$$

(7)

$$\begin{aligned} \left| \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x} \right| &= \left| 2 \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| \\ &= 2 \left| \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2} \sin \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \right| \\ &\leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \text{ 可知, } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0;$$

(8)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2 - \frac{\sin x}{x}} = \sqrt{2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}} = \sqrt{2 - 0} = \sqrt{2}.$$

**习题 2.1.18 (旧版教材中的题目)** 函数  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$  与  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  分别称为双曲正弦与双曲余弦 (统称为双曲函数), 它们均在定义域  $(-\infty, +\infty)$  上连续. 证明以下各题. (可与三角函数的性质作比较.)

$$(1) \sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x; \quad (2) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

$$(3) \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x; \quad (4) \cosh 2x = \sinh^2 x + \cosh^2 x;$$

$$(5) \sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y; \quad (6) \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

解

$$(1) \sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x;$$

$$(2) \cosh^2 x - \sinh^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1;$$

$$(3) \sinh 2x = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 - (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})}{2} = 2 \sinh x \cosh x;$$

$$(4) \cosh 2x = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \frac{(e^x)^2 + (e^{-x})^2}{2} = \frac{(e^x - e^{-x})^2 + (e^x + e^{-x})^2}{4} = \sinh^2 x + \cosh^2 x;$$

$$(5) \sinh(x \pm y) = \frac{e^{x \pm y} - e^{-(x \pm y)}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} - e^{-x} e^{\mp y}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} - e^{-x} e^{\pm y} + e^{-x} e^{\pm y} - e^{-x} e^{\mp y}}{2} =$$

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} + e^{\mp y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} - e^{\mp y}}{2}\right) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y;$$

$$(6) \cosh(x \pm y) = \frac{e^{x \pm y} + e^{-(x \pm y)}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} + e^{-x} e^{\mp y}}{2} = \frac{e^x e^{\pm y} + e^{-x} e^{\pm y} - e^{-x} e^{\pm y} + e^{-x} e^{\mp y}}{2} =$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} + e^{\mp y}}{2}\right) + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^{\pm y} - e^{\mp y}}{2}\right) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y.$$

## 习题 2.2

**习题 2.2.1** 证明函数  $x \cdot 2^x - 1$  在  $[0, 1]$  内有零点.

**解** 设  $f(x) = x \cdot 2^x - 1$ , 则  $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$ . 又因  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续. 故由零点定理知, 存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $f(x_0) = 0$ .

**习题 2.2.2** 证明函数  $x - a \sin x - b$  (其中  $a, b$  为正数) 在  $(0, +\infty)$  上有零点, 且零点不超过  $a + b$ .

**解** 设  $f(x) = x - a \sin x - b$ , 该函数在  $[0, +\infty)$  连续, 同时  $f(0) = -b < 0, f(a + b + 1) = a + b + 1 - a \sin(a + b + 1) - b = a(1 - \sin(a + b + 1)) + 1 \geq 1 > 0$ . 因此由零点定理,  $(0, a + b + 1)$  上有零点, 进而  $(0, +\infty)$  上有零点.

又因对任意  $x > a + b$  有  $f(x) = x - a \sin x - b > a + b - a \sin x - b \geq 0$ , 故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的零点不超过  $a + b$ .

**习题 2.2.3** 证明函数  $x - \sin(x + 1)$  有实零点.

**解** 设  $f(x) = x - \sin(x + 1)$ , 由  $-1 \leq \sin(x + 1) \leq 1$  知, 则  $f(-2) \leq -2 + 1 = -1 < 0, f(2) \geq 2 - 1 = 1 > 0$ . 又因  $f(x)$  在  $[-2, 2]$  上连续, 故由零点定理知, 存在  $x_0 \in (-2, 2)$ , 使得  $f(x_0) = 0$ .

**习题 2.2.4** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且值域就是  $[a, b]$ . 证明  $f(x)$  在  $[a, b]$  上必有不动点, 即有  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ .

**解** 函数  $f(x)$  的值域为  $[a, b]$ , 故存在  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_1) = a, f(x_2) = b$ . 设  $g(x) = f(x) - x$ , 则  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $g(a) = f(a) - a \geq 0, g(b) = f(b) - x_2 \leq 0$ .

故结合零点定理可简单推知, 要么  $a$  或  $b$  是  $g(x)$  的零点, 要么存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $g(x_0) = 0$ , 总之存在  $x_0 \in [a, b]$ ,  $g(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = x_0$ .

**注** 这里给出一个表述的区分.

(1) 如果严格满足零点定理的情形, 即端点处非零异号, 推出开区间内存在零点, 那么表达为由零点定理可知.

(2) 如果和本题类似, 端点处可能为零, 推出推出闭区间内存在零点, 则简单表达为结合零点定理可简单推知.

**习题 2.2.5** 设函数  $f(x), g(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$ . 试证: 存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) = g(x_0)$ .

**解** 设  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $h(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $h(a) = f(a) - g(a) > 0, h(b) = f(b) - g(b) < 0$ . 故由零点定理知, 存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $h(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = g(x_0)$ .

**习题 2.2.6** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 2a]$  上连续, 且  $f(0) = f(2a)$ . 证明: 在区间  $[0, a]$  上存在某个  $x_0$ , 使得  $f(x_0) = f(x_0 + a)$ .

**解** 设  $g(x) = f(x) - f(x + a)$ , 则  $g(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 且  $g(0) = f(0) - f(a), g(a) = f(a) - f(2a) =$

$f(a) - f(0) = -g(0)$ . 因此  $g(0)g(a) = -(g(0))^2 \leq 0$ . 由结合零点定理简单推知, 存在  $x_0 \in [0, a]$ , 使得  $g(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = f(x_0 + a)$ .

**习题 2.2.7** 试证: 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为此区间中的任意点, 则在  $[a, b]$  中有一点  $\xi$ , 使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)).$$

更一般地, 若  $q_1 > 0, q_2 > 0, \dots, q_n > 0$ , 且  $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$ , 则在  $[a, b]$  中有一点  $\xi$ , 使得

$$f(\xi) = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n).$$

**解**

(1) 设  $A = \frac{1}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n))$ . 若  $f(x_i) = f(x_j)$  对所有  $i, j$  成立, 则对任意  $k$ , 取  $\xi = x_k$  总是可以的. 否则取  $i, j$  使得  $f(x_i) = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}, f(x_j) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ . 则  $f(x_i) \leq A \leq f(x_j), f(x_i) < f(x_j)$ . 由介值定理知, 存在  $\xi \in (\min\{x_i, x_j\}, \max\{x_i, x_j\}) \subset [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = A$ .

(2) 设  $A = q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n)$ . 若  $f(x_i) = f(x_j)$  对所有  $i, j$  成立, 则对任意  $k$ , 取  $\xi = x_k$  总是可以的. 否则取  $i, j$  使得  $f(x_i) = \min\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}, f(x_j) = \max\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ . 则  $f(x_i) \leq A \leq f(x_j), f(x_i) < f(x_j)$ . 由介值定理知, 存在  $\xi \in (\min\{x_i, x_j\}, \max\{x_i, x_j\}) \subset [a, b]$ , 使得  $f(\xi) = A$ .

**习题 2.2.8** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在. 证明  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有界.

**解** 设  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ . 则对于  $\varepsilon = 1 > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $x > N$  时, 有  $|f(x) - A| < 1$ , 即  $|f(x)| < |A| + 1$ . 又因函数  $f(x)$  在区间  $[a, N]$  上连续, 故在该闭区间上有界, 即存在  $K > 0$ , 使得对任意  $x \in [a, N]$  有  $|f(x)| \leq K$ . 取  $M = \max\{K, |A| + 1\}$ , 则对任意  $x \in [a, +\infty)$  有  $|f(x)| \leq M$ . 因此, 函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上有界.

**习题 2.2.9** 证明函数  $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界.

**解** 由习题 1.3.17 知,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2+x^4} = 0$ , 利用习题 2.2.8 知, 函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上有界. 又因  $f(x)$  是偶函数, 故  $f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上也有界. 因此, 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有界.

**习题 2.2.10** 是否有满足下面条件的连续函数? 说明理由.

- (1) 定义域为  $[0, 1]$ , 值域为  $(0, +\infty)$ ;
- (2) 定义域为  $[0, 1]$ , 值域为  $(0, 1)$ ;
- (3) 定义域为  $[0, 1]$ , 值域为  $[0, 1] \cup [2, 4]$ ;
- (4) 定义域为  $(0, 1)$ , 值域为  $(2, +\infty)$ .

**解**

(1) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(2) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(3) 不存在. 这与介值定理矛盾.

(4) 存在. 例如,  $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ .

**习题 2.2.11** 举例说明, 对任意正数  $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ , 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$  上有界, 不能保证  $f(x)$  在开区间  $(a, b)$  上有界. (比较习题 2.1 第 2 题.)

**解** 例如, 设  $f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-x}$ , 则对任意正数  $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ , 函数  $f(x)$  在闭区间  $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$  上连续, 故有界; 但在开区间  $(a, b)$  上无界.

**习题 2.2.12** 设  $y = f(x)$  在开区间  $I = (a, b)$  上连续并严格单调. 证明  $y = f(x)$  的值域  $f(I)$  也是一个开区间.

**解 注** 不能假设  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  存在.  $f(I)$  可能有无穷端点, 例如  $f(x) = \tan x$  在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上连续且严格单调, 但值域是  $(-\infty, +\infty)$ .

(1) 不妨假设是严格递增的, 否则类似考虑  $-f(x)$  即可. 先证明  $f(I)$  存在两个不同的点: 取  $x_1, x_2 \in I$ , 且  $x_1 < x_2$ , 由严格单调性知,  $f(x_1) < f(x_2)$ , 故  $f(I)$  中至少有两个不同的点.

**注** 如果去除单调的严格性, 则  $f(I)$  不一定是开区间, 例如  $f(x) = 1$  在  $(0, 1)$  上连续且单调, 但值域不是开区间.

(2)  $\forall y_1, y_2 \in f(I)$ , 且  $y_1 < y_2$ . 则存在  $x_1, x_2 \in I$ , 使得  $f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$ . 因为  $f(x)$  在  $I$  上严格单调, 故  $x_1 < x_2$ . 对任意  $y \in (y_1, y_2)$ , 由介值定理知, 存在  $x \in (x_1, x_2) \subset I$ , 使得  $f(x) = y$ . 因此,  $f(I)$  是区间.

(3) 下面证明  $f(I)$  是开区间.  $\forall y \in f(I)$ , 则存在  $x_0 \in I$ , 使得  $f(x_0) = y$ . 由  $(a, b)$  是开区间知, 存在  $\delta > 0$ , 使得  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ . 设  $\eta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta) - f(x_0)\} > 0$ , 则对任意  $y' \in (y - \eta, y + \eta) \subset (f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta))$ , 由介值定理知, 存在  $x' \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ , 使得  $f(x') = y'$ . 因此,  $f(I)$  是开区间.

**习题 2.2.13** 设函数  $f(x)$  在有限区间  $(a, b)$  上一致连续. 求证  $f(x)$  在  $a$  点的右极限和在  $b$  点的左极限都存在.

**解**  $f(x)$  在  $(a, b)$  上一致连续, 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x_1, x_2 \in (a, b)$  且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ .

现取  $x_1, x_2 \in (a, a + \delta)$ , 则  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 故  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . 因此, 函数  $f(x)$  在  $(a, a + \delta)$  上满足柯西收敛准则, 故  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  存在. 同理可证  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$  也存在.

**习题 2.2.14** 设函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上一致连续,  $\{a_n\}$  是正收敛数列. 求证  $\{f(a_n)\}$  也收敛. 又问仅假设  $f(x)$  连续时, 结论是否还成立, 为什么?

**解**

(1) 由  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上一致连续, 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$  且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ . 又因  $\{a_n\}$  是正收敛数列, 故存在  $N \in \mathbf{N}^+$ , 使得当  $n, m > N$  时, 有  $|a_n - a_m| < \delta$ , 因此, 对任意  $n, m > N$  有  $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$ . 由柯西收敛准则知, 数列  $\{f(a_n)\}$  收敛.

(2) 仅假设  $f(x)$  连续时, 结论不成立. 例如, 设  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上连续, 且数列  $a_n = \frac{1}{(n + \frac{1}{2})\pi}$  收敛于 0, 但数列  $f(a_n) = \sin \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \right) = (-1)^n$  不收敛.

**习题 2.2.15** 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续,  $\{a_n\}$  是收敛数列. 求证  $\{f(a_n)\}$  也收敛.

**解** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a \in (-\infty, +\infty)$ . 由  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续知,  $f(x)$  在  $a$  点连续, 即  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . 因此, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - a| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

又因数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 故存在  $N \in \mathbf{N}^+$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \delta$ , 因此, 对任意  $n > N$  有  $|f(a_n) - f(a)| < \varepsilon$ . 由数列的收敛定义知, 数列  $\{f(a_n)\}$  收敛于  $f(a)$ .

**习题 2.2.16** 给出一个在  $(-\infty, +\infty)$  上连续且有界但不一致连续的函数.

**解** 例如,  $f(x) = \sin x^2$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续且有界, 但不一致连续.

反证法: 若  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致连续, 则对  $\varepsilon = 1 > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$  且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$ . 但倘若我们取  $x_1 = \sqrt{2n\pi}$ ,  $x_2 = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ , 则当  $n > \left(\frac{2}{\delta}\right)^2$  时, 有  $|x_1 - x_2| < \delta$ , 但  $|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \sin(2n\pi) - \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right| = 1$ , 矛盾.

## 第2章综合习题

**习题 2.C.1** 证明: 函数  $f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ 为有理数}, \\ x, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$  仅在点  $x = 0$  处连续.

**解** 设  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在有理数列  $\{r_n\}$  与无理数列  $\{s_n\}$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_0$ . 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = x_0.$$

当  $x_0 \neq 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = x_0$ , 故  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  不存在, 因此  $f(x)$  在  $x = x_0$  处不连续.

当  $x_0 = 0$  时, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \varepsilon$ , 则当  $|x - 0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$ . 因此  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ , 即  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续.

**习题 2.C.2** 设  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ , 记  $f(x) = \frac{|x - x_1| + \dots + |x - x_n|}{n}$ , 证明: 存在  $x_0 \in [0, 1]$ , 使得  $f(x_0) = \frac{1}{2}$ .

**解** 设  $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$ , 则  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) &= \frac{|0 - x_1| + \dots + |0 - x_n|}{n} + \frac{|1 - x_1| + \dots + |1 - x_n|}{n} \\ &= \frac{(x_1 + (1 - x_1)) + \dots + (x_n + (1 - x_n))}{n} = 1. \end{aligned}$$

因此  $g(0) + g(1) = f(0) + f(1) - 1 = 0$ . 则  $g(0)g(1) = -(g(0))^2 \leq 0$ . 结合零点定理可简单推知, 存在  $x_0 \in [0, 1]$ , 使得  $g(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = \frac{1}{2}$ .

**习题 2.C.3** 证明: 函数  $\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$  (其中  $a_1, a_2, a_3 > 0$ , 且  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ ) 在  $(\lambda_1, \lambda_2)$  与  $(\lambda_2, \lambda_3)$  内各有一个零点.

**解** 仅证明  $(\lambda_1, \lambda_2)$  内有一个零点,  $(\lambda_2, \lambda_3)$  内的证明类似.

由  $\frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$  在  $\left[\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right]$  上连续, 因此有界, 即存在  $M_1 > 0$ , 使得对任意  $x \in \left[\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right]$  有  $\left|\frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}\right| \leq M_1$ .

又由  $\lim_{x \rightarrow \lambda_1^+} \frac{a_1}{x - \lambda_1} = +\infty$ , 因此存在  $\delta_1 \in \left(0, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right)$ , 使得对任意  $x \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_1)$  有  $\frac{a_1}{x - \lambda_1} > M_1$ . 因此, 存在  $x_1 \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta_1) \subset \left(\lambda_1, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)$ , 使得

$$\frac{a_1}{x_1 - \lambda_1} + \frac{a_2}{x_1 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_1 - \lambda_3} = \frac{a_1}{x_1 - \lambda_1} + \left(\frac{a_2}{x_1 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_1 - \lambda_3}\right) > M_1 - M_1 = 0.$$

由  $\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$  在  $\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right]$  上连续, 因此有界, 即存在  $M_2 > 0$ , 使得对任意  $x \in$

$\left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right]$  有  $\left|\frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}\right| \leq M_2$ .

又由  $\lim_{x \rightarrow \lambda_2^-} \frac{a_2}{x - \lambda_2} = -\infty$ , 因此存在  $\delta_2 \in \left(0, \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}\right)$ , 使得对任意  $x \in (\lambda_2 - \delta_2, \lambda_2)$  有  $\frac{a_2}{x - \lambda_2} < -M_2$ . 因此, 存在  $x_2 \in (\lambda_2 - \delta_2, \lambda_2) \subset \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \lambda_2\right)$ , 使得

$$\frac{a_1}{x_2 - \lambda_1} + \frac{a_2}{x_2 - \lambda_2} + \frac{a_3}{x_2 - \lambda_3} = \left(\frac{a_1}{x_2 - \lambda_1} + \frac{a_3}{x_2 - \lambda_3}\right) + \frac{a_2}{x_2 - \lambda_2} < M_2 - M_2 = 0.$$

综上, 存在  $x_1, x_2 \in (\lambda_1, \lambda_2)$ , 使得对于函数  $f(x) = \frac{a_1}{x - \lambda_1} + \frac{a_2}{x - \lambda_2} + \frac{a_3}{x - \lambda_3}$  有  $f(x_1) > 0, f(x_2) < 0$ . 由介值定理知, 存在  $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (\lambda_1, \lambda_2)$ , 使得  $f(x_0) = 0$ .

同时由于  $\frac{a_1}{x - \lambda_1}, \frac{a_2}{x - \lambda_2}, \frac{a_3}{x - \lambda_3}$  在  $(\lambda_1, \lambda_2)$  上严格单调递减, 因此  $f(x)$  在  $(\lambda_1, \lambda_2)$  上严格单调递减. 因此, 零点  $x_0$  唯一.

**习题 2.C.4** 设  $f(x)$  是一个多项式, 则必存在一点  $x_0$ , 使得  $|f(x_0)| \leq |f(x)|$  对任意实数  $x$  成立.

**解** 设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ , 其中  $a_n \neq 0, n \geq 1$ . 则

$$|f(x)| = |x|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right|.$$

因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right) = a_n$ , 因此存在  $M > 0$ , 使得当  $|x| > M$  时, 有

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right| > \frac{|a_n|}{2}.$$

由  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{2} |x|^n = +\infty$ , 因此  $\exists X > M$ , 使得当  $|x| > X$  时, 有  $\frac{|a_n|}{2} |x|^n > |f(0)|$ . 而由  $|f(x)|$  在  $[-X, X]$  上连续, 故由最值性知, 存在  $x_0 \in [-X, X]$ , 使得  $|f(x_0)| = \inf\{|f(x)| : x \in [-X, X]\}$ .

特别的, 对任意  $x \in [-X, X]$  有  $|f(x_0)| \leq |f(x)|$ . 因此对于  $|x| > X$  时, 有  $|f(x)| > \frac{|a_n|}{2} |x|^n \geq |f(x_0)|$ . 综上, 对任意  $x \in \mathbb{R}$  有  $|f(x_0)| \leq |f(x)|$ .

**习题 2.C.5** 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) = f(1)$ . 证明: 对任意正整数  $n$ , 在区间  $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$  中有一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right)$ .

**解** 设  $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ , 则  $g(x)$  在  $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$  上连续, 且

$$g(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right),$$

...

$$g\left(\frac{n-1}{n}\right) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(0).$$

因此  $\frac{1}{n} \left( g(0) + g\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + g\left(\frac{n-1}{n}\right) \right) = 0$ . 则  $g(0), g\left(\frac{1}{n}\right), \dots, g\left(\frac{n-1}{n}\right)$  中至少有一

个非正, 另一个非负. 由介值定理知, 存在  $\xi \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ , 使得  $g(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = f\left(\xi + \frac{1}{n}\right)$ .

**习题 2.C.6** 证明: 存在一个实数  $x$ , 满足  $x^5 + \frac{\cos x}{1 + x^2 + \sin^2 x} = 72$ .

**解** 设  $f(x) = x^5 + \frac{\cos x}{1 + x^2 + \sin^2 x}$ ,

$$f(3) = 3^5 + \frac{\cos 3}{1 + 3^2 + \sin^2 3} \geq 243 \frac{1}{1 + 3^2 - 1} > 72,$$

$$f(-3) = (-3)^5 + \frac{\cos(-3)}{1 + (-3)^2 + \sin^2(-3)} \leq -243 + \frac{1}{1 + (-3)^2 - 1} < -72.$$

由介值定理知, 存在  $x \in [-3, 3]$ , 使得  $f(x) = 72$ .

**习题 2.C.7** 若  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 则  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上或者有最大值, 或者有最小值.

**解** 记

$$S = \sup\{f(x) : x \in [a, +\infty)\}, \quad I = \inf\{f(x) : x \in [a, +\infty)\}, \quad L = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

(1) 若  $S > L$ , 取  $\varepsilon = \frac{S - L}{2} > 0$ , 则存在  $X > a$ , 使得对任意  $x > X$  有  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , 即

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \text{ 因此, 对任意 } x > X \text{ 有 } f(x) < L + \varepsilon = \frac{S + L}{2} < S. \text{ 因此}$$

$$\sup\{f(x) : x \in [a, X]\} = S,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在  $x_0 \in [a, X]$ , 使得  $f(x_0) = S$ .

(2) 若  $I < L$ , 取  $\varepsilon = \frac{L - I}{2} > 0$ , 则存在  $X > a$ , 使得对任意  $x > X$  有  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , 即

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon. \text{ 因此, 对任意 } x > X \text{ 有 } f(x) > L - \varepsilon = \frac{I + L}{2} > I. \text{ 因此}$$

$$\inf\{f(x) : x \in [a, X]\} = I,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在  $x_0 \in [a, X]$ , 使得  $f(x_0) = I$ .

(3) 若  $S = L = I$ , 则  $f(x) \equiv L$ , 即任取  $x_0 \in [a, +\infty)$ , 均有  $f(x_0) = L$  同时为最大值和最小值.

**注** 一个只有极限没有最大值的例子是  $f(x) = \arctan x, x \in [0, +\infty)$ .

**习题 2.C.8** 设函数  $f(x)$  定义在区间  $[a, b]$  上, 满足条件:  $a \leq f(x) \leq b$  (对任意  $x \in [a, b]$ ), 且对  $[a, b]$  中任意的  $x, y$  有  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ . 这里  $k$  是常数,  $0 < k < 1$ . 证明:

(1) 存在唯一的  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = x_0$ .

(2) 任取  $x_1 \in [a, b]$ , 并定义数列  $\{x_n\} : x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

(3) 给出一个在实轴上的连续函数, 使得对任意  $x \neq y$  有  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ , 但方程  $f(x) - x = 0$  无解.

**解**

(1) 先证明  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续: 设  $x_0 \in [a, b]$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$ , 则对任意  $x \in [a, b]$

且  $|x - x_0| < \delta$ , 有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0| < k\delta = \varepsilon.$$

设  $g(x) = f(x) - x$ , 则  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $g(a) = f(a) - a \geq 0$ ,  $g(b) = f(b) - b \leq 0$ . 故结合零点定理可简单推知, 存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $g(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = x_0$ . 又因对任意  $x, y \in [a, b]$  有

$$|g(x) - g(y)| = |f(x) - f(y) - (x - y)| \geq |x - y| - |f(x) - f(y)| \geq (1 - k)|x - y|,$$

故若存在  $x_1 \neq x_0$  使得  $f(x_1) = x_1$ , 则

$$(1 - k)|x_1 - x_0| \leq |g(x_1) - g(x_0)| = |f(x_1) - f(x_0) - (x_1 - x_0)| = 0,$$

即  $x_1 = x_0$ . 因此  $x_0$  唯一.

- (2) (a) 若  $x_2 = x_1$ , 则由  $f(x_1) = x_1$  以及 (1) 中所述的唯一性, 知  $x_2 = x_1 = x_0$ , 则  $x_3 = f(x_2) = f(x_0) = x_0$ , 依此类推, 有  $x_n = x_0$  对任意  $n \geq 1$  成立. 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .  
 (b) 若  $x_2 \neq x_1$ , 对任意  $n \geq 1$  有

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq k|x_n - x_{n-1}| \leq \dots \leq k^{n-1}|x_2 - x_1|.$$

因此, 对任意  $m > n \geq 1$  有

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (k^{m-2} + k^{m-3} + \dots + k^{n-1})|x_2 - x_1| \\ &\leq \frac{k^{n-1}}{1 - k}|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left\lceil \log_k \frac{(1 - k)\varepsilon}{|x_2 - x_1|} \right\rceil$ , 当  $m, n > N$  时, 有

$$|x_m - x_n| \leq \frac{k^{n-1}}{1 - k}|x_2 - x_1| < \varepsilon.$$

故数列  $\{x_n\}$  为 Cauchy 列, 故存在  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n := a$  存在. 又因  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 对递推式两侧取极限, 有

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(a).$$

由 (1) 中所述的唯一性, 知  $a = x_0$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ .

- (3) 一个不太严谨的思考过程: 我想要构造一个满足  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$  的函数, 我考虑了  $|f'(x)| < 1$  的趋势为增的函数, 同时  $f(x) - x$  无解要求了  $f(x)$  应该是贴在  $y = x$  的 (不妨设为) 上方的, 于是我考虑了  $f(x) = x + g(x)$ , 并假设  $g(x)$  可导, 其中如果  $-1 < -g'(x) < 0$ , 那就能保证  $f(x)$  的导数满足要求. (当然上述思路中, 对  $g(x)$  的选取过程都只

是必要的)

$$f(x) = x + \frac{1}{1+e^x}.$$

(a) 满足  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ : 设  $x > y$ , 则

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= f(x) - f(y) = (x - y) + \frac{1}{1+e^x} - \frac{1}{1+e^y} \\ &= (x - y) - \frac{e^x - e^y}{(1+e^x)(1+e^y)} \\ &< x - y = |x - y|. \end{aligned}$$

(b) 方程  $f(x) - x = 0$  无解: 由  $f(x) - x = \frac{1}{1+e^x} > 0$ , 知  $f(x) - x = 0$  无解.

**习题 2.C.9** 证明: 对任意正整数  $n$ , 方程  $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$  恰有一个正根  $x_n$ ; 进一步证明数列  $\{x_n\}$  ( $n \geq 1$ ) 收敛, 并求其极限.

解

(1) 设  $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$ , 则  $f_n(x)$  在  $(0, 1)$  上连续, 且  $f_n(0) = -1 < 0$ ,  $f_n(1) = n - 1 \geq 0$ . 故结合零点定理可简单推知, 存在  $x_n \in (0, 1]$ , 使得  $f_n(x_n) = 0$ . 由于  $f_n(x)$  的每一项都严格单调递增, 故  $f_n(x)$  也严格单调递增, 因此  $x_n$  是唯一解.

(2) 下证明数列  $\{x_n\}$  单调递减: 若  $x_{n+1} \geq x_n$ , 由  $x_n > 0$

$$1 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} > x_n^{n+1} + x_n^n + \cdots + x_n > x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1,$$

故矛盾, 因此  $x_{n+1} < x_n$ .  $\{x_n\}$  单调递减, 有 0 为下界, 故数列  $\{x_n\}$  收敛.

(3) 考虑

$$1 - x_n^n = (1 - x_n)(1 + x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^{n-1}) = 1 - x_n,$$

在两边同时取极限之前, 我们还得先考虑  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n$ . 由于  $1 = x_2 + x_2^2 \geq x_2 \cdot x_2 + x_2^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ , 对  $x_n^n < x_2^n$ , 由夹逼定理知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$ . 因此, 对数列  $\{x_n\}$  取极限, 有

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - x_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - x_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

**习题 2.C.10** 设  $a < b$ ,  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且对任意  $x \in [a, b)$  存在  $y \in (x, b)$  使得  $f(y) > f(x)$ . 求证:  $f(b) > f(a)$ .

解 考虑  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值  $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ , 由闭区间上连续函数的最值性, 知存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = M$ . 若  $\exists x < b, f(x) = M$ , 则由题设条件, 存在  $y \in (x, b)$ , 使得  $f(y) > f(x) = M$ , 矛盾. 因此  $f(b) = M$ , 且  $\forall x < b, f(x) < M$ . 特别的,  $f(a) < f(b)$ .

## 第 3 章 单变量函数的微分学

### 习题 3.1

习题 3.1.1 讨论下列函数在点  $x = 0$  处是否可导:

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= |\sin x|; & (2) \quad f(x) &= \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0; \end{cases} \\ (3) \quad f(x) &= \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} & (4) \quad f(x) &= \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 0, \\ x+1, & x < 0; \end{cases} \\ (5) \quad f(x) &= |x|e^x; & (6) \quad f(x) &= |x^3|. \end{aligned}$$

解

(1)

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|\sin h| - |\sin 0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sin h}{h} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|\sin h| - |\sin 0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin h}{h} = -1. \end{aligned}$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ , 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导.

(2)

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(h+1) - 1}{h} = 1, \\ f'_-(0) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1 - 1}{h} = 0. \end{aligned}$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ , 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导.

(3)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h} = 0.$$

故  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导, 且  $f'(0) = 0$ .

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq f(0),$$

因此  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导.

(5)

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{he^h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} e^h = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-he^h - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -e^h = -1.$$

$f'_+(0) \neq f'_-(0)$ , 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处不可导.

(6)

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h^3| - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h|h = 0,$$

故  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导.

**习题 3.1.2** 求  $a, b$  的值, 使下列函数处处可导:

$$(1) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1, \\ ax + b, & x > 1; \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x < 0, \\ ax + b, & x \geq 0. \end{cases}$$

解

(1)  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  和  $(1, +\infty)$  上可导, 故只需讨论  $x = 1$  处的可导性.

由连续性得:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow 1 = a + b.$$

由可导性得:

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 2 = a.$$

解得  $a = 2, b = -1$ .

(2)  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  和  $(0, +\infty)$  上可导, 故只需讨论  $x = 0$  处的可导性.

由连续性得:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow b = 0.$$

由可导性得:

$$f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow 1 = a.$$

解得  $a = 1, b = 0$ .

**习题 3.1.3** 设函数  $g(x)$  在  $x = a$  处连续, 记  $f(x) = (x - a)g(x)$ . 证明  $f'(a) = g(a)$ .

解

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h-a)g(a+h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} g(a+h) = g(a).$$

**习题 3.1.4** 若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处可导, 证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} = (\alpha + \beta)f'(x_0) \quad (\alpha, \beta \text{ 为常数}).$$

解

$$\begin{aligned}
& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta h)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \alpha \cdot \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} + \beta \cdot \frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta h)}{\beta h} \right] \\
&= \alpha f'(x_0) + \beta f'(x_0) = (\alpha + \beta) f'(x_0).
\end{aligned}$$

**习题 3.1.5** 设函数  $f(x)$  在  $x = a$  处可导, 且  $f(a) \neq 0$ , 证明函数  $|f(x)|$  在  $x = a$  也可导. 若  $f(a) = 0$ , 结论是否仍成立?

解

(1)  $f(a) \neq 0$  时, 不妨设  $f(a) > 0$ , 则  $\exists \delta > 0$ , 当  $|x - a| < \delta$  时,  $f(x) > 0$ , 因此

$$|f(x)| = f(x),$$

因此  $|f(x)|$  在  $x = a$  处可导, 且  $|f'(a)| = f'(a)$ .

(2) 不成立, 如  $f(x) = x$  在  $x = 0$  处可导, 但是  $|x|$  在  $x = 0$  处不可导.

**习题 3.1.6** 求下列函数的导数.

$$(1) y = \frac{x}{3x^2 + 5x - 2};$$

$$(2) y = \sin x \tan x + \cot x;$$

$$(3) y = x^2 \log_3 x;$$

$$(4) y = \frac{x}{1 - \cos x};$$

$$(5) y = \frac{1 + \ln x}{x^2 + 1};$$

$$(6) y = \frac{(1 + x^2) \ln x}{\sin x + \cos x};$$

$$(7) y = (x^2 + 1)(3x - 1)(1 - x^3);$$

$$(8) y = x^3 \cdot \tan x \cdot \ln x.$$

解

(1)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{x'(3x^2 + 5x - 2) - x(3x^2 + 5x - 2)'}{(3x^2 + 5x - 2)^2} \\
&= \frac{(3x^2 + 5x - 2) - (6x^2 + 5x)}{(3x^2 + 5x - 2)^2} = -\frac{3x^2 + 2}{(3x^2 + 5x - 2)^2}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
y' &= \left( \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)' \\
&= \frac{(2 \sin x \cos x) \cos x - \sin^2 x (-\sin x)}{\cos^2 x} + \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} \\
&= \frac{\sin x(1 + \cos^2 x)}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 y' &= (x^2)' \log_3 x + x^2 (\log_3 x)' \\
 &= 2x \log_3 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 3} \\
 &= 2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3}
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(x)'(1 - \cos x) - x(1 - \cos x)'}{(1 - \cos x)^2} \\
 &= \frac{1 \cdot (1 - \cos x) - x(\sin x)}{(1 - \cos x)^2} \\
 &= \frac{1 - \cos x - x \sin x}{(1 - \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{(1 + \ln x)'(x^2 + 1) - (1 + \ln x)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{x}(x^2 + 1) - (1 + \ln x)(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{x + \frac{1}{x} - 2x - 2x \ln x}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{1 - x^2 - 2x^2 \ln x}{x(x^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{[(1 + x^2) \ln x]'(\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{[(1 + x^2)' \ln x + (1 + x^2)(\ln x)'](\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{[2x \ln x + (1 + x^2)\frac{1}{x}](\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{(2x \ln x + x + \frac{1}{x})(\sin x + \cos x) - (1 + x^2) \ln x (\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\
 &= \frac{(x + \frac{1}{x} + (x + 1)^2 \ln x) \sin x + (x + \frac{1}{x} - (x - 1)^2 \ln x) \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}
 \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
 &y'(x^2 + 1)'(3x - 1)(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)'(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)(1 - x^3)' \\
 &= 2x(3x - 1)(1 - x^3) + (x^2 + 1)3(1 - x^3) + (x^2 + 1)(3x - 1)(-3x^2) \\
 &= -18x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 2x + 3
 \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
y' &= (x^3)'(\tan x \cdot \ln x) + x^3(\tan x)' \ln x + x^3 \tan x (\ln x)' \\
&= (3x^2)(\tan x \ln x) + (x^3)(\sec^2 x)(\ln x) + (x^3 \tan x) \left(\frac{1}{x}\right) \\
&= 3x^2 \tan x \ln x + x^3 \sec^2 x \ln x + x^2 \tan x \\
&= x^2(3 \tan x \ln x + x \sec^2 x \ln x + \tan x)
\end{aligned}$$

习题 3.1.7 求下列函数的导数:

(1)  $y = x\sqrt{1-x^2};$

(2)  $y = \sqrt{1+\ln^2 x};$

(3)  $y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}};$

(4)  $y = (\sin x + \cos x)^3;$

(5)  $y = (\sin x^3)^3;$

(6)  $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}};$

(7)  $y = \sin[\sin(\sin x)];$

(8)  $y = \sin[\cos^5(\arctan x^3)];$

(9)  $y = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3;$

(10)  $y = x\sqrt{1+x^2} \sin x;$

(11)  $y = e^{\sqrt{x^2+1}};$

(12)  $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)];$

(13)  $y = x^{x^x} + x^x + x^{2^x};$

(14)  $y = (\ln x)^x;$

(15)  $y = (\tan x)^{\cot x};$

(16)  $y = 10^x \cdot (\sin x)^{\cos x};$

(17)  $y = \frac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^3(x+4)^{1/2}};$

(18)  $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}.$

解

(1)

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

(2)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}} (\ln^2 x)' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}} 2 \ln x (\ln x)' = \frac{2 \ln x}{x \sqrt{1+\ln^2 x}}.$$

(3)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)' = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+4x+2}} = \sqrt{\frac{1}{-2x^2+2x+1}}.$$

(4)

$$y' = 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x) = 3(1 + \cos 2x)(\cos x - \sin x).$$

(5)

$$y' = 3 (\sin x^3)^2 (\sin x^3)' = 3 (\sin x^3)^2 (\cos x^3) 3x^2.$$

(6)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left( x + \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} (x + \sqrt{x})' \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right) \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} y' &= \cos[\sin(\sin x)] (\sin(\sin x))' \\ &= \cos[\sin(\sin x)] \cos(\sin x) (\sin x)' \\ &= \cos[\sin(\sin x)] \cos(\sin x) \cos x \end{aligned}$$

(8) 令  $u = \arctan x^3$ , 则  $v = \cos^5 u$ , 则  $y = \sin v$ , 则

$$\begin{aligned} y' &= \cos v \cdot v' = \cos v \cdot (-5 \sin^4 u \cdot \cos u) u' \\ &= -5 \cos \cos^5(\arctan x^3) \sin^4(\arctan x^3) \cdot \cos(\arctan x^3) \cdot \frac{3x^2}{1+x^6}. \end{aligned}$$

(9)

$$y' = \frac{12x^5 - 24x^3 + 12x}{(x^2 + 1)^3}.$$

(10)

$$y' = \frac{x \sin x + \cos x (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

(11)

$$y' = e^{\sqrt{x^2+1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(12) 令  $u = \ln^3 x$ , 则  $v = \ln^2 u$ , 则  $y = \ln v$ , 则

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{v} \cdot v' = \frac{1}{v} \cdot 2 \ln u \cdot \frac{1}{u} u' \\ &= \frac{2 \ln(\ln^3 x)}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot \frac{3 \ln^2 x}{x} = \frac{6}{x \ln x \ln(\ln^3 x)}. \end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
y' &= (e^{x^x \ln x} + e^{x \ln x} + e^{2^x \ln x})' \\
&= (e^{x \ln x} \ln x)' e^{x \ln x} + (x \ln x)' e^{x \ln x} + (2^x \ln x)' e^{2^x \ln x} \\
&= \left( (1 + \ln x) e^{x \ln x} + \frac{1}{x} x^x \right) e^{x \ln x} + (1 + \ln x) e^{x \ln x} + \left( 2^x \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 \ln x \right) e^{2^x \ln x} \\
&= x^{x^x} (x^{x-1} + \ln x (\ln x + 1) x^x) + x^x (\ln x + 1) + x^{2^x} \left( 2^x \frac{1}{x} + \ln x \cdot 2^x \ln 2 \right)
\end{aligned}$$

(14)

$$y' = \frac{(\ln x)^{x+1} \ln(\ln x) + \ln(\ln x)}{\ln x}.$$

(15)

$$y' = (\tan x)^{\cot x} \csc^2(1 - \ln(\tan x))$$

(16) 设  $y = e^{2 \ln(x+5) + \frac{1}{3} \ln(x-4) - 5 \ln(x+2) - \frac{1}{2} \ln(x+4)} := e^u$ , 则

$$\begin{aligned}
y' &= e^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{(x+5)^2 (x-4)^{1/3}}{(x+2)^5 (x+4)^{1/2}} \left( 2 \frac{1}{x+5} + \frac{1}{3} \frac{1}{x-4} - 5 \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+4} \right).
\end{aligned}$$

(17)

$$y' = 10^x \ln 10 \cdot (\sin x)^{\cos x} - 10^x \ln(\sin x) (\sin x)^{\cos x + 1} + 10^x \cos^2 x (\sin x)^{\cos x - 1}.$$

(18) 设  $y = e^{\ln(1-\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)} := e^u$ , 则

$$\begin{aligned}
y' &= e^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left( \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left( \frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2} \right) \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left( \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2} \right)
\end{aligned}$$

**习题 3.1.8** 设  $f(x) = x^3$ . 求  $f'(x^2)$  与  $[f(x^2)]'$ .

解

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x^2) = 3(x^2)^2 = 3x^4,$$

$$[f(x^2)]' = [(x^3)^2]' = (x^6)' = 6x^5.$$

**习题 3.1.9** 设  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ,  $g(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$ . 求  $f'[g(x)]$ ,  $[f(g(x))]'$ .

解

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f'[g(x)] = \frac{1}{\sqrt{1+(e^{\sqrt{x^2+1}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}},$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(e^{\sqrt{x^2+1}})^2}} \cdot e^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{xe^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{(x^2+1)(1+e^{2\sqrt{x^2+1}})}}.$$

习题 3.1.10 设  $f(x)$  处处可导. 求  $\frac{dy}{dx}$ :

(1)  $y = f(x^3)$ ;

(2)  $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$ ;

(3)  $y = f(e^x + x^e)$ ;

(4)  $y = \sin[f(\sin f(x))]$ ;

(5)  $y = f[f(f(x + \cos x))]$ ;

(6)  $y = f(e^x)e^{f(x)}$ .

解

(1) 令  $u = x^3$ , 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot (3x^2) = 3x^2 f'(x^3).$$

(2) 令  $u = \sin^2 x, v = \cos^2 x$ , 则  $y = f(u) + f(v)$ . 由链式法则:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f(u) + \frac{d}{dx} f(v) \\ &= \frac{df}{du} \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \frac{dv}{dx} \\ &= f'(u) \cdot (2 \sin x \cos x) + f'(v) \cdot (2 \cos x (-\sin x)) \\ &= f'(\sin^2 x) \sin(2x) - f'(\cos^2 x) \sin(2x) \\ &= [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)] \sin(2x). \end{aligned}$$

(3) 令  $u = e^x + x^e$ , 则  $y = f(u)$ . 根据链式法则,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot (e^x + ex^{e-1}) = (e^x + ex^{e-1}) f'(e^x + x^e).$$

(4) 这是一个多次复合的函数. 反复应用链式法则:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \sin[f(\sin f(x))] \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot \frac{d}{dx} f(\sin f(x)) \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot f'(\sin f(x)) \cdot \frac{d}{dx} (\sin f(x)) \\ &= \cos[f(\sin f(x))] \cdot f'(\sin f(x)) \cdot \cos(f(x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x) \\ &= f'(x) \cos(f(x)) f'(\sin f(x)) \cos[f(\sin f(x))]. \end{aligned}$$

(5) 同样, 多次应用链式法则:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f[f(f(x + \cos x))] \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot \frac{d}{dx} f(f(x + \cos x)) \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot f'(f(x + \cos x)) \cdot \frac{d}{dx} f(x + \cos x) \\
 &= f'[f(f(x + \cos x))] \cdot f'(f(x + \cos x)) \cdot f'(x + \cos x) \cdot \frac{d}{dx} (x + \cos x) \\
 &= (1 - \sin x) f'(x + \cos x) f'(f(x + \cos x)) f'[f(f(x + \cos x))].
 \end{aligned}$$

(6) 令  $u = f(e^x)$  且  $v = e^{f(x)}$ , 则  $y = uv$ . 根据乘法法则  $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$ . 分别计算:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dx} &= \frac{d}{dx} f(e^x) = f'(e^x) \cdot (e^x)' = e^x f'(e^x). \\
 \frac{dv}{dx} &= \frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x).
 \end{aligned}$$

将它们代入乘法法则:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= (e^x f'(e^x)) \cdot e^{f(x)} + f(e^x) \cdot (e^{f(x)} f'(x)) \\
 &= e^{f(x)} [e^x f'(e^x) + f(e^x) f'(x)].
 \end{aligned}$$

**习题 3.1.11** 求下列函数的导数:

$$(1) y = \begin{cases} \frac{xe^{1/x}}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases} \quad (2) y = |1 - 2x| \sin x.$$

解

(1) 对于  $x \neq 0$ ,

$$y' = \frac{e^{1/x} (1 - 1/x + e^{1/x})}{(1 + e^{1/x})^2}$$

对于  $x = 0$ ,

$$y'_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{he^{1/h}}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{-1/h} + 1} = 1, \quad y'_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\frac{he^{1/h}}{1+e^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/h}}{e^{1/h} + 1} = 0$$

因此

$$y' = \begin{cases} \frac{e^{1/x} (1 - 1/x + e^{1/x})}{(1 + e^{1/x})^2} & x \neq 0 \\ \text{不存在} & x = 0 \end{cases}$$

- (2) (a)  $(1 - 2x) > 0$  时,  $x < \frac{1}{2}$ ,  $y' = ((1 - 2x) \sin x)' = -2 \sin x + (1 - 2x) \cos x$ .  
 (b)  $(1 - 2x) < 0$  时,  $x > \frac{1}{2}$ ,  $y' = ((2x - 1) \sin x)' = 2 \sin x + (2x - 1) \cos x$ .  
 (c)  $(1 - 2x) = 0$  时,  $y'_+ = 2 \sin \frac{1}{2} \neq y'_- = -2 \sin \frac{1}{2}$ .

综上所述,

$$y' = \begin{cases} 2 \sin x + (2x - 1) \cos x & x > \frac{1}{2} \\ -2 \sin x + (1 - 2x) \cos x & x < \frac{1}{2} \\ \text{不存在} & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

**习题 3.1.12** 设  $n$  为正整数, 考虑函数  $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  证明:

- (1) 当  $n = 1$  时,  $f(x)$  在点  $x = 0$  处不可导;
- (2) 当  $n = 2$  时,  $f(x)$  在点  $x = 0$  处可导, 但导函数在  $x = 0$  处不连续 (事实上, 在这一点有第二类间断);
- (3) 当  $n \geq 3$  时,  $f(x)$  在点  $x = 0$  处可导, 且导函数在  $x = 0$  处连续.

解

- (1) 当  $n = 1$  时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{h},$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{h},$$

显然,  $f'_+(0)$  与  $f'_-(0)$  不存在, 因此  $f(x)$  在点  $x = 0$  处不可导.

- (2) 当  $n = 2$  时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

因此  $f(x)$  在点  $x = 0$  处可导, 且  $f'(0) = 0$ . 对于  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x})' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left( -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$$

不存在, 故  $f'(x)$  在  $x = 0$  处不连续.

- (3) 当  $n \geq 3$  时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$

因此  $f(x)$  在点  $x=0$  处可导, 且  $f'(0)=0$ . 对于  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = (x^n \sin \frac{1}{x})' = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} + x^n \left( -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x}) = 0,$$

故  $f'(x)$  在  $x=0$  处连续.

**习题 3.1.13** 证明: 函数  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在区间  $[-1, 1]$  上处处可导, 但导函数在这个

个区间上无界.

**解** 对于  $x \neq 0$ ,

$$f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x^2})' = 2x \sin \frac{1}{x^2} + x^2 \left( -\frac{2}{x^3} \cos \frac{1}{x^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

对于  $x=0$ ,

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sin \frac{1}{h^2} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h \sin \frac{1}{h^2} = 0,$$

因此  $f(x)$  在点  $x=0$  处可导, 且  $f'(0)=0$ . 综上所述,  $f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上处处可导. 而对于  $x = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} (n=1, 2, 3, \dots)$ ,

$$f' \left( \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \right) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \sin(n\pi) - 2\sqrt{n\pi} \cos(n\pi) = (-1)^{n+1} 2\sqrt{n\pi},$$

显然, 当  $n$  趋近于无穷大时,  $\left| f' \left( \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \right) \right|$  趋近于无穷大, 故导函数在区间  $[-1, 1]$  上无界.

**习题 3.1.14** 求下列函数的反函数的微商.

(1)  $y = xe^x$ ;

(2)  $y = \arctan \frac{1}{x}$ ;

(3)  $y = 2x^3 - e^{-2x}$ ;

(4)  $y = \ln(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}})$ .

按照反函数求导定理, 我们应该写成这样:

$$(f^{-1})'(y) \stackrel{y=xe^x}{=} \frac{1}{f'(x)}$$

但是考虑到初学者对反函数求导的理解有点困难, 容易把自己绕晕. 我们给出几种推荐且合理的过程, 这几种过程几乎是等价的:

**解**

(1) 将  $x$  看成  $y$  的函数并在方程两边对  $y$  求导

$$1 = x'e^x + xx'e^x \Rightarrow x' = \frac{e^{-x}}{1+x}.$$

**注** 对于由方程  $\varphi(x, y) = 0$  给出的反函数或隐函数, 只要认准了一个变量是另一个变量的函数, 在方程两边直接对自变量求导即可. 有关详细内容将在第二册中介绍.

(2)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{1 + x^2} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = -(1 + x^2)$$

**注** 这种写法与反函数求导定理的意义是最贴近的, 但是避免了使用重复的符号, 因此看起来清晰一点.

(3)

$$dy = 2d(x^3) - d(e^{-2x}) = 6x^2 dx + 2e^{-2x} dx \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{6x^2 + 2e^{-2x}}.$$

**注** 这在利用 3.2 节中微分的知识: 若  $y(x)$  可微且能表示为  $dx = A dy$ , 那么  $A = x'(y)$ .

(4)

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}} \left( e^x + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + e^{2x}}} \cdot 2e^{2x} \right) \\ &= \frac{e^{2x} + e^x \sqrt{1 + e^{2x}}}{(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}) \sqrt{1 + e^{2x}}} = \frac{e^x}{\sqrt{1 + e^{2x}}}. \end{aligned}$$

则

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{\sqrt{1 + e^{2x}}}{e^x}.$$

**习题 3.1.15** 证明: 可导的偶函数的导数为奇函数; 而可导的奇函数的导数为偶函数.

**解** 设  $f(x)$  为偶函数, 则  $f(-x) = f(x)$ , 则

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{h} = f'(x),$$

则  $f'(x)$  为奇函数.

设  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(-x) = -f(x)$ , 则

$$f'(-x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) + f(x)}{h} = f'(x),$$

则  $f'(x)$  为偶函数.

**习题 3.1.16** 证明: 可导的周期函数的导数仍是周期函数.

**解** 设  $f(x)$  为周期为  $T$  的函数, 则  $f(x+T) = f(x)$ , 则  $f'(x+T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ , 则  $f'(x)$  为周期为  $T$  的函数.

**习题 3.1.17** 求下列各式之和:

$$(1) P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1};$$

$$(2) Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1};$$

$$(3) R_n = \cos 1 + 2 \cos 2 + \cdots + n \cos n.$$

解

$$(1) \text{ 令 } A(x) = x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}, \text{ 则 } P_n = A'(x) = \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}.$$

$$(2) Q_n = (xA'(x))' = \frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

$$(3) \text{ 令 } B(x) = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}},$$

$$\text{则 } B'(x) = \frac{(-\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2} + (n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})x)2\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}(\cos \frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x)}{(2\sin \frac{x}{2})^2}.$$

$$\text{则 } R_n = B'(1) = \frac{(-\frac{1}{2}\sin \frac{1}{2} + (n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2}))2\sin \frac{1}{2} - \cos \frac{1}{2}(\cos \frac{1}{2} - \cos(n+\frac{1}{2}))}{(2\sin \frac{1}{2})^2}.$$

习题 3.1.18 求下列函数的二阶导数:

$$(1) y = e^{-x^2};$$

$$(2) y = x^2 2^{2x};$$

$$(3) y = (1+x^2) \arctan x;$$

$$(4) y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

解

(1)

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

(2)

$$y' = 2x2^{2x}(1 + 2\ln 2), \quad y'' = 4x2^{2x}(\ln 2)^2 + 4(1 + \ln 2)2^{2x}.$$

(3)

$$y' = 1 + 2x \arctan x, \quad y'' = 2 \arctan x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

(4) 当  $y > 0$  时,  $y' = 2x$ ; 当  $y < 0$  时,  $y' = -2x$ ; 当  $y = 0$  时,

$$y'_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = 0 = y'_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h^2 - 0}{h} = 0$$

故  $y'(0) = 0$  存在.当  $y > 0$  时,  $y'' = 2$ ; 当  $y < 0$  时,  $y'' = -2$ ; 当  $y = 0$  时,

$$y''_+ = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h - 0}{h} = 2 \neq y''_- = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2h - 0}{h} = -2$$

故  $y''(0)$  不存在.习题 3.1.19 设函数  $f(x)$  处处有三阶导数, 求  $y'', y'''$ .

$$(1) y = f(x^2);$$

$$(2) y = f(e^x + x).$$

解

(1)

$$y' = f'(x^2) \cdot 2x, \quad y'' = f''(x^2) \cdot (2x)^2 + f'(x^2) \cdot 2, \quad y''' = f'''(x^2) \cdot (2x)^3 + 3f''(x^2) \cdot (2x) \cdot 2.$$

(2)

$$y' = f'(e^x + x) \cdot (e^x + 1), \quad y'' = f''(e^x + x) \cdot (e^x + 1)^2 + f'(e^x + x) \cdot e^x,$$

$$y''' = f'''(e^x + x) \cdot (e^x + 1)^3 + 3f''(e^x + x) \cdot (e^x + 1) \cdot e^x + f'(e^x + x) \cdot e^x.$$

**习题 3.1.20** 设  $f(x) = x^n|x|$  ( $n$  为正整数), 证明  $f^{(n)}(0)$  存在, 但  $f^{(n+1)}(0)$  不存在.

解

$$(1) \text{ 当 } k \leq n \text{ 时当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = x^{n+1}, \text{ 则 } f^{(k)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} x^{n+1-k} = A_{n+1}^k x^{n+1-k};$$

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } f(x) = -x^{n+1}, \text{ 则 } f^{(k)}(x) = -\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} x^{n+1-k} = -A_{n+1}^k x^{n+1-k};$$

当  $x = 0$  时,

$$f_+^{(k)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A_{n+1}^{k-1} h^{n+2-k} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} A_{n+1}^{k-1} h^{n+1-k} = 0$$

$$f_-^{(k)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-A_{n+1}^{k-1} h^{n+2-k} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -A_{n+1}^{k-1} h^{n+1-k} = 0$$

$$f_+^{(n)}(0) = f_-^{(n)}(0), \text{ 故 } f^{(n)}(0) = 0 \text{ 存在.}$$

$$(2) \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } f^{(n)}(x) = (n+1)!x, \text{ 则 } f^{(n+1)}(x) = (n+1)!; \text{ 当 } x < 0 \text{ 时, } f^{(n)}(x) = (-1)(n+1)!x,$$

则  $f^{(n+1)}(x) = (-1)(n+1)!; \text{ 当 } x = 0 \text{ 时,}$

$$f_+^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(n+1)!h - 0}{h} = (n+1)!$$

$$f_-^{(n+1)}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(-1)(n+1)!h - 0}{h} = (-1)(n+1)!$$

$$f_+^{(n+1)}(0) \neq f_-^{(n+1)}(0), \text{ 故 } f^{(n+1)}(0) \text{ 不存在.}$$

**习题 3.1.21** 证明: 如果  $x_0$  是多项式  $P_n(x)$  的  $r$  重根, 即  $P_n(x)$  可以分解成

$$P_n(x) = (x - x_0)^r Q_{n-r}(x),$$

其中  $Q_{n-r}(x)$  是一个  $n-r$  次多项式, 且  $Q_{n-r}(x_0) \neq 0$ . 则  $P_n(x)$  满足条件

$$P_n(x_0) = 0, \quad P'_n(x_0) = 0, \quad \dots, \quad P_n^{(r-1)}(x_0) = 0, \quad P_n^{(r)}(x_0) \neq 0.$$

**解** 由题意,  $P_n(x) = (x - x_0)^r Q_{n-r}(x)$ , 则

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} [(x - x_0)^r]^{(i)} \cdot Q_{n-r}^{(k-i)}(x).$$

$$(a) \text{ 当 } k < r \text{ 时, } [(x - x_0)^r]^{(i)} = 0, \text{ 则 } P_n^{(k)}(x_0) = 0.$$

$$(b) \text{ 当 } k = r \text{ 时, } [(x - x_0)^r]^{(r)} = r!, \text{ 则 } P_n^{(r)}(x_0) = r! Q_{n-r}(x_0) \neq 0.$$

习题 3.1.22 求下列函数的高阶导数:

- (1)  $(x^2 e^x)^{(n)}$ ; (2)  $[(x^2 + 1) \sin x]^{(n)}$ ;  
 (3)  $\left(\frac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)^{(n)}$ ; (4)  $(\sin x \cdot \cos x)^{(n)}$ .

我们将会直接使用如下结论:

$$(1) (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(2) (e^x)^{(n)} = e^x, (a^x)^{(n)} = (\ln a)^n a^x;$$

$$(3) \left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}};$$

$$(4) (\ln(x+a))^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+a)^n};$$

$$(5) (x^m)^{(n)} = \begin{cases} 0 & n < m; \\ n! & n = m; \\ n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} & n > m. \end{cases}$$

解

(1) 由莱布尼兹公式,

$$(x^2 e^x)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{\min\{2,n\}} \binom{n}{k} (x^2)^{(k)} e^x.$$

$$(a) \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } (x^2 e^x)^{(1)} = (x^2)^{(0)} e^x + (x^2)^{(1)} e^x = (x^2 + 2x) e^x;$$

$$(b) \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } (x^2 e^x)^{(n)} = (x^2)^{(0)} e^x + n(x^2)^{(1)} e^x + \binom{n}{2} (x^2)^{(2)} e^x = (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x.$$

(2) 由莱布尼兹公式,

$$[(x^2 + 1) \sin x]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^2 + 1)^{(k)} (\sin x)^{(n-k)}.$$

$$(a) \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } [(x^2 + 1) \sin x]^{(1)} = (x^2 + 1)^{(0)} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + (x^2 + 1)^{(1)} \sin x = (x^2 + 1) \cos x + 2x \sin x;$$

(b) 当  $n \geq 2$  时,

$$\begin{aligned} [(x^2 + 1) \sin x]^{(n)} &= (x^2 + 1)^{(0)} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + n(x^2 + 1)^{(1)} \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\ &\quad + \binom{n}{2} (x^2 + 1)^{(2)} \sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \\ &= (x^2 + 1) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \\ &\quad + n(n-1) \sin\left(x + \frac{(n-2)\pi}{2}\right) \\ &= (x^2 + n(n-1) + 1) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 2nx \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

(3) 由莱布尼兹公式,

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)^{(n)} &= \left( \frac{1}{(x-1)(x-2)} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( \frac{1}{x-1} \right)^{(k)} \left( \frac{1}{x-2} \right)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}} \cdot \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{(x-2)^{n-k+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)(x-2)} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(x-1)^k (x-2)^{n-k}} \end{aligned}$$

(4)

$$(\sin x \cdot \cos x)^{(n)} = \left( \frac{1}{2} \sin 2x \right)^{(n)} = 2^{n-1} \sin \left( 2x + \frac{n\pi}{2} \right).$$

**习题 3.1.23** 求曲线  $y = \cos x$  在  $x = \frac{\pi}{4}$  处的切线方程.

**解**  $y' = -\sin x$ , 则  $y'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且  $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

或

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**习题 3.1.24** 证明: 双曲线  $xy = 1$  上任一点处的切线, 与两坐标轴构成的三角形的面积为定值.

**解** 对  $xy = 1$  两侧对  $x$  求导,  $y' = -\frac{y}{x}$ , 设切点为  $(x_0, y_0)$ , 则切线方程为

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

即

$$y = -\frac{y_0}{x_0}x + 2y_0.$$

切线与  $x$  轴交点为  $(2x_0, 0)$ , 与  $y$  轴交点为  $(0, 2y_0)$ , 则三角形面积为

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot 2y_0 = 2x_0y_0 = 2.$$

**习题 3.1.25** 有一底半径为  $r$  cm, 高为  $h$  cm 的正圆锥形容器, 现以  $a$  cm<sup>3</sup>/s 的速度自顶部向其内注水, 求水面上升的速度.

**解** 设水面高度为  $x$  cm, 则水面半径为  $\frac{r}{h}x$  cm, 则水体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi \left( \frac{r}{h}x \right)^2 x = \frac{\pi r^2}{3h^2}x^3.$$

则

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi r^2}{h^2}x^2 \frac{dx}{dt}.$$

由题意,  $\frac{dV}{dt} = a$ , 则

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ah^2}{\pi r^2 x^2}.$$

**习题 3.1.26** 水自高为 18 cm, 底半径为 6 cm 的圆锥形漏斗流入直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 已知水在漏斗中深度为 12 cm 时水平面下降的速率为 1 cm/min. 试求圆柱形筒中水面上升的速度.

**解** 设漏斗中水深为  $x$  cm, 则漏斗中水体积为

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{6}{18}x\right)^2 x = \frac{\pi}{27}x^3.$$

则

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{\pi}{9}x^2 \frac{dx}{dt}.$$

由题意,  $\frac{dx}{dt} = -1$  cm/min, 当  $x = 12$  cm 时,

$$\frac{dV_1}{dt} = -16\pi \text{ cm}^3/\text{min}.$$

设圆柱形筒中水深为  $y$  cm, 则圆柱形筒中水体积为

$$V_2 = \pi 5^2 y = 25\pi y.$$

则

$$\frac{dV_2}{dt} = 25\pi \frac{dy}{dt}.$$

由题意,  $-\frac{dV_1}{dt} = \frac{dV_2}{dt}$ , 则

$$-(-16\pi) = 25\pi \frac{dy}{dt},$$

即

$$\frac{dy}{dt} = \frac{16}{25} \text{ cm/min}.$$

## 习题 3.2

**习题 3.2.1** 设  $y = x^2 + x$ , 计算在  $x = 1$  处, 当  $\Delta x = 10, 1, 0.1, 0.01$  时, 相应的函数的改变量  $\Delta y$  和函数的微分  $dy$ , 并观察差  $\Delta y - dy$  随  $\Delta x$  减小的变化情况.

解

(1) 当  $\Delta x = 10$  时,

$$\Delta y = f(11) - f(1) = 130, dy = f'(1) dx = 3 \times 10 = 30, \Delta y - dy = 100.$$

(2) 当  $\Delta x = 1$  时,

$$\Delta y = f(2) - f(1) = 4, dy = f'(1) dx = 3 \times 1 = 3, \Delta y - dy = 1.$$

(3) 当  $\Delta x = 0.1$  时,

$$\Delta y = f(1.1) - f(1) = 0.31, dy = f'(1) dx = 3 \times 0.1 = 0.3, \Delta y - dy = 0.01.$$

(4) 当  $\Delta x = 0.01$  时,

$$\Delta y = f(1.01) - f(1) = 0.0301, dy = f'(1) dx = 3 \times 0.01 = 0.03, \Delta y - dy = 0.0001.$$

从中不难看出, 随着  $\Delta x$  的减小,  $\Delta y - dy$  也在减小, 且大体上  $\Delta y - dy$  趋于 0.

**习题 3.2.2** 求下列函数的微分:

$$(1) y = \ln\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right);$$

$$(2) y = \sin x - x \cos x;$$

$$(3) y = \arccos \frac{1}{|x|};$$

$$(4) y = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|;$$

$$(5) y = 5\sqrt[3]{\arctan x^2};$$

$$(6) y = \tan^2(1 + 2x^2);$$

$$(7) y = e^{-x} \cos(3 - x);$$

$$(8) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

解

(1)

$$dy = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}} \cdot d\left(-\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{x - 2\pi} dx.$$

(2)

$$dy = d(\sin x) - d(x \cos x) = \cos x dx - (\cos x - x \sin x) dx = x \sin x dx.$$

(3)  $x > 0$  时,

$$dy = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

$x < 0$  时,

$$dy = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot d\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

因此

$$dy = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx, |x| > 1.$$

(4)

$$dy = d(\ln|x-1| - \ln|x+1|) = \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{x+1} dx = \frac{2}{x^2-1} dx, \quad x \neq \pm 1.$$

(5)

$$dy = 5 \cdot \frac{1}{3} (\arctan x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot d(\arctan x^2) = \frac{10x}{3(1+x^4)(\arctan x^2)^{\frac{2}{3}}} dx.$$

(6)

$$dy = 2 \tan(1+2x^2) \cdot \sec^2(1+2x^2) \cdot d(1+2x^2) = 8x \tan(1+2x^2) \sec^2(1+2x^2) dx.$$

(7)

$$dy = e^{-x} \cos(3-x) \cdot d(-x) + e^{-x} \cdot d(\cos(3-x)) = e^{-x}(-\cos(3-x) + \sin(3-x)) dx.$$

(8)

$$dy = \frac{(\sqrt{x^2+1}) \cdot d(x) - x \cdot d(\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

**习题 3.2.3** 对下列函数, 求  $\frac{dy}{dx}$  及  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

$$(1) \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x = \varphi \cos \varphi, \\ y = \varphi \sin \varphi; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x = \cos^3 \varphi, \\ y = \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

解

(1) 对  $x = \ln(1+t^2), y = t - \arctan t$  两边求微分, 得

$$dx = \frac{2t}{1+t^2} dt, \quad dy = \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\frac{1}{2}}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

(2) 对  $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t$  两边求微分, 得

$$dx = (1 - \cos t) dt, \quad dy = \sin t dt,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1 - \cos t)^2}}{1 - \cos t} = \frac{\cos t - 1}{(1 - \cos t)^3} = -\frac{1}{(1 - \cos t)^2}.$$

(3) 对  $x = \varphi \cos \varphi, y = \varphi \sin \varphi$  两边求微分, 得

$$dx = (\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) d\varphi, \quad dy = (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi) d\varphi,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{\sin \varphi + \varphi \cos \varphi}{\cos \varphi - \varphi \sin \varphi}.$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} \\ &= \frac{(\cos \varphi + \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - (\sin \varphi + \varphi \cos \varphi)(-\sin \varphi - \sin \varphi - \varphi \cos \varphi)}{(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)^2} \\ &= \frac{\varphi^2 + 2}{(\cos \varphi - \varphi \sin \varphi)^3} \end{aligned}$$

(4) 对  $x = \cos^3 \varphi, y = \sin^3 \varphi$  两边求微分, 得

$$dx = -3 \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi, \quad dy = 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi,$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{3 \sin^2 \varphi \cos \varphi}{-3 \cos^2 \varphi \sin \varphi} = -\tan \varphi.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{dy}{dx} \right) \bigg/ \frac{dx}{d\varphi} = \frac{-\sec^2 \varphi}{-3 \cos^2 \varphi \sin \varphi} = \frac{1}{3 \cos^4 \varphi \sin \varphi}.$$

**习题 3.2.4** 求下列曲线在已知点处的切线方程.

$$(1) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t \end{cases} \quad \text{在 } t = \frac{\pi}{4} \text{ 处}; \quad (2) \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^2}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \text{在 } t = 2 \text{ 处}.$$

解

(1) 在  $t = \frac{\pi}{4}$  处,

$$x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\cot t,$$

所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1.$$

切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1 \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

即

$$x + y - \sqrt{2} = 0.$$

(2) 在  $t = 2$  处,

$$x = \frac{3 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{6}{5}, \quad y = \frac{3 \times 2^2}{1 + 2^2} = \frac{12}{5}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \bigg/ \frac{dx}{dt} = \frac{\frac{6t}{(1+t^2)^2}}{\frac{3(1-t^2)}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

所以

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} = -\frac{4}{3}.$$

切线方程为

$$y - \frac{12}{5} = -\frac{4}{3} \left( x - \frac{6}{5} \right),$$

即

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

## 习题 3.3

**习题 3.3.1** 设  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ , 确定方程  $f'(x) = 0$  的实根的个数, 并指出根所在的区间.

**解**  $f'(x)$  为三次多项式, 故  $f'(x) = 0$  最多有三个实根. 又  $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$ , 由 Rolle 定理, 在  $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$  内分别各至少有一点  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , 使得  $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = f'(\xi_3) = 0$ , 显然该三点互不相同. 因此  $f'(x) = 0$  有且仅有三个实根, 分别在  $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$  内.

**习题 3.3.2** 设函数  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上有二阶微商, 且  $f(1) = f(2) = 0$ . 记  $F(x) = (x-1)^2 f(x)$ , 则在区间  $(1, 2)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $F''(\xi) = 0$ .

**解** 由  $f(1) = f(2) = 0 \Rightarrow F(1) = F(2) = 0$ . 由 Rolle 定理, 在  $(1, 2)$  内至少有一点  $\xi_1$ , 使得  $F'(\xi_1) = 0$ . 又  $F'(1) = 2(1-1)f(1) + (1-1)^2 f'(1) = 0$ . 由 Rolle 定理, 在  $(1, \xi_1)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $F''(\xi) = 0$ .

**习题 3.3.3** 举例说明, 中值定理的下述意义的逆不成立: 设  $\xi \in (a, b)$  是指定的一点, 则存在  $c, d \in [a, b]$ , 使得  $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$ . (提示: 考虑函数  $f(x) = x^3, \xi = 0$ .)

**解** 设  $f(x) = x^3, \xi = 0$ , 则  $f'(\xi) = f'(0) = 0$ . 若存在  $c, d \in [-1, 1]$ , 使得  $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$ , 则有

$$\frac{c^3 - d^3}{c - d} = 0 \Rightarrow c^2 + cd + d^2 = 0 \Rightarrow c = d = 0.$$

但  $c, d$  不能相等, 故不存在  $c, d \in [-1, 1]$ , 使得  $\frac{f(c) - f(d)}{c - d} = f'(\xi)$ .

**习题 3.3.4** 证明下列不等式:

(1) 当  $a > b > 0, n > 1$  时, 有  $nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b)$ ;

(2) 当  $x > 0$  时, 有  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ ;

(3) 当  $0 < a < b$  时, 有  $(a+b) \ln \frac{a+b}{2} < a \ln a + b \ln b$ .

(4) 当  $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$  时, 有  $\frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \alpha} < \tan \beta - \tan \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \beta}$ .

**解**

(1) 设  $f(x) = x^n$ , 则  $f'(x) = nx^{n-1}$ . 由 Lagrange 中值定理, 在  $(b, a)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

又  $a > \xi > b > 0, f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调递增, 故  $nb^{n-1} < f'(\xi) < na^{n-1}$ , 于是

$$nb^{n-1}(a-b) < a^n - b^n < na^{n-1}(a-b).$$

(2) 设  $f(x) = \ln(1+x)$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ . 由 Lagrange 中值定理, 在  $(0, x)$  内至少有一点  $\xi$ , 使

得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

又  $x > \xi > 0$ ,  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调递减, 故  $\frac{1}{1+x} < f'(\xi) < 1$ , 于是

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

(3) 设  $f(x) = x \ln x$ , 则  $f'(x) = \ln x + 1$ . 由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ ,  $\eta \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a)}{\frac{a+b}{2} - a} = \frac{(a+b) \ln \frac{a+b}{2} - 2a \ln a}{b-a}$$

$$f'(\eta) = \frac{f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b - \frac{a+b}{2}} = \frac{2b \ln b - (a+b) \ln \frac{a+b}{2}}{b-a}$$

又  $a < \xi < \eta < b$ ,  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  内单调递增, 故  $f'(\xi) < f'(\eta)$ , 于是

$$(a+b) \ln \frac{a+b}{2} < a \ln a + b \ln b.$$

(4) 设  $f(x) = \tan x$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ . 由 Lagrange 中值定理, 在  $(\alpha, \beta)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{\beta - \alpha}$$

又  $\beta > \xi > \alpha > 0$ ,  $f'(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内单调递增, 故  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} < f'(\xi) < \frac{1}{\cos^2 \beta}$ , 于是

$$\frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \alpha} < \tan \beta - \tan \alpha < \frac{\beta - \alpha}{\cos^2 \beta}.$$

**习题 3.3.5** 证明下列恒等式:

$$(1) \arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(2) \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x} = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

解

(1) 设  $f(x) = \arctan x - \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ , 则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} \cdot \frac{(1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = 0.$$

又  $f(0) = 0$ , 故  $f(x) = 0$ , 即  $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

(2) 设  $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1-x}{1+x}$ , 则

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = 0. \quad (x \neq -1)$$

$$\text{又 } g(0) = \frac{\pi}{4}, g(-2) = -\frac{3\pi}{4}, \text{ 故 } g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\frac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

这道题使用了引理:

**引理** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上连续, 且在  $I$  内部可导. 若  $f'(x) = 0$  恒成立, 则  $f(x)$  在  $I$  上恒为常数.

**证明** 设  $x_1, x_2 \in I$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ , 则由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1).$$

因此  $f(x)$  在  $I$  上恒为常数.

**习题 3.3.6** 设  $f(x)$  是闭区间  $[0, 1]$  上的可导函数, 对任意  $x \in [0, 1]$  有  $f(x) \in (0, 1)$ ; 并且对每个  $x, f'(x) \neq 1$ . 证明在  $(0, 1)$  内有且仅有一个  $x$ , 使  $f(x) = x$ .

**解** 先证明存在性: 设  $g(x) = f(x) - x$ , 则  $g(0) = f(0) > 0, g(1) = f(1) - 1 < 0$ . 由介值定理, 在  $(0, 1)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $g(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = \xi$ .

反证法证明唯一性: 假设在  $(0, 1)$  内有两点  $\xi_1, \xi_2$ , 使得  $f(\xi_1) = \xi_1, f(\xi_2) = \xi_2$ , 则  $g(\xi_1) = g(\xi_2) = 0$ . 由 Rolle 定理, 在  $(\xi_1, \xi_2)$  内至少有一点  $\eta$ , 使得  $g'(\eta) = 0$ , 即  $f'(\eta) - 1 = 0$ , 与  $f'(x) \neq 1$  矛盾. 因此在  $(0, 1)$  内有且仅有一个  $x$ , 使  $f(x) = x$ .

**习题 3.3.7** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $|f'(x)| < 1$ , 又  $f(0) = f(1)$ . 证明: 对于  $[0, 1]$  上的任意两点  $x_1, x_2$ , 有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$ .

**解** 对于  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ , 则由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3$  s. t.  $0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \xi_3 < 1$ , 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f'(\xi_3) = \frac{f(1) - f(x_2)}{1 - x_2}.$$

因此

$$|f(x_1) - f(0)| = |f'(\xi_1)|x_1 < x_1,$$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(\xi_2)|(x_2 - x_1) < x_2 - x_1,$$

$$|f(1) - f(x_2)| = |f'(\xi_3)|(1 - x_2) < 1 - x_2.$$

于是

$$\begin{aligned} 2|f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_2) - f(x_1)| + |f(1) - f(x_2) + f(x_1) - f(0)| \\ &\leq |f(x_2) - f(x_1)| + |f(1) - f(x_2)| + |f(x_1) - f(0)| \\ &< (x_2 - x_1) + (1 - x_2) + x_1 = 1. \end{aligned}$$

故  $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{1}{2}$ .

**习题 3.3.8** 若  $f(x)$  处处可导, 且  $f'(x) = f(x)$ . 证明  $f(x) = Ce^x$ ,  $C$  为任意常数.

**解** 设  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ , 则

$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x f(x) - e^x f(x)}{(e^x)^2} = 0.$$

因此  $g(x) \equiv g(0) \Rightarrow f(x) = f(0)e^x$ . 设  $C = f(0)$ .

**习题 3.3.9** 设不恒为常数的函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a) = f(b)$ . 证明在  $(a, b)$  内存在一点  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) > 0$ .

**解** 由于  $f(x)$  不为常函数, 故存在  $x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) \neq f(a)$ .

(1) 若  $f(x_0) > f(a)$ , 则  $\exists \xi \in (a, x_0)$ , 使得  $f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0$ .

(2) 若  $f(x_0) < f(a) = f(b)$ , 则  $\exists \eta \in (x_0, b)$ , 使得  $f'(\eta) = \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} > 0$ .

**习题 3.3.10** 设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上可微, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . 证明:

(1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$ ;

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

**解**

(1) 由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi_x \in (x, x+1)$ , 使得

$$f'(\xi_x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} = f(x+1) - f(x).$$

又  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ , 故  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = 0$ .

(2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon, \exists X > 0$ , s. t.  $\forall x > X, |f'(x)| < \varepsilon$ . 设  $x > X$ , 则由 Lagrange 中值定理,  $\exists \eta \in (X, x)$ , 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x) - f(X)}{x - X} \Rightarrow f(x) = f'(\eta)(x - X) + f(X).$$

因此

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| = \left| f'(\eta) \left( 1 - \frac{X}{x} \right) + \frac{f(X)}{x} \right| \leq |f'(\eta)| \left| 1 - \frac{X}{x} \right| + \left| \frac{f(X)}{x} \right| < \varepsilon + \left| \frac{f(X)}{x} \right|.$$

也就是说, 当  $x > \max \left\{ X, \frac{|f(X)|}{\varepsilon} \right\}$  时,  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| < 2\varepsilon$ . 因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

**习题 3.3.11** 证明: 若函数  $f(x)$  在 (有限) 开区间  $(a, b)$  内有有界的导函数, 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  内也有界. 如果有限区间  $(a, b)$  改为无穷区间, 结论还成立吗? 命题的逆命题是否成立?

解  $f(x)$  在  $(a, b)$  内可导, 故在  $(a, b)$  连续. 不妨设  $\forall x \in (a, b), f'(x) \leq M$ , 同时取  $c = \frac{a+b}{2}$ , 则

$$\forall x \in (a, b) \setminus \{c\}, \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right| = |f'(\xi)| \leq M \Rightarrow |f(x)| \leq |f(c)| + M|b - a|$$

显然对于  $c, |f(c)| \leq |f(c)| + M|b - a|$  也成立, 即得  $f(x)$  在  $(a, b)$  内有界.

将  $(a, b)$  改为无穷区间, 结论不成立. 考虑  $f(x) = x, f'(x) = 1$  在  $(0, +\infty)$  上有界, 但  $f(x) = x$  在  $(0, +\infty)$  上无界.

逆命题不成立. 考虑  $f(x) = \sqrt{x}, f(x) = \sqrt{x}$  在  $(0, 1)$  上有界, 但  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  在  $(0, 1)$  上无界.

**习题 3.3.12** 设对所有的实数  $x, y$ , 不等式  $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^2$  ( $M$  为常数) 都成立. 证明:  $f(x)$  恒为常数.

解  $\forall x \neq y, 0 \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq M|x - y|$ . 令  $y \rightarrow x$ ,

$$\lim_{y \rightarrow x} 0 = \lim_{y \rightarrow x} M|x - y| = 0 \Rightarrow |f'(x)| = \lim_{y \rightarrow x} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

故  $f(x)$  恒为常数.

**习题 3.3.13** 设  $f(x)$  在一个区间  $I$  上连续, 且 (至多) 除了有限个点外,  $f(x)$  在  $I$  内部的导数为正 (负), 则  $f(x)$  在  $I$  上严格单调递增 (减). (注意, 在例外的点处,  $f(x)$  可能不可导.)

解 设  $x_1, x_2 \in I$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ . 若  $f(x)$  在  $(x_1, x_2)$  内处处可导, 则由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

又  $f'(\xi) > 0 (f'(\xi) < 0)$ , 故  $f(x_2) > f(x_1) (f(x_2) < f(x_1))$ .

若  $f(x)$  在  $(x_1, x_2)$  内有有限个点不可导, 设这些点为  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 则将  $(x_1, x_2)$  分成  $n + 1$  个子区间  $(x_1, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_n, x_2)$ , 在每个子区间内  $f(x)$  处处可导, 由上面的结论可知,  $f(x_1) < f(y_1) < \dots < f(y_n) < f(x_2) (f(x_1) > f(y_1) > \dots > f(y_n) > f(x_2))$ .

综上所述,  $f(x)$  在  $I$  上严格单调递增 (递减).

**习题 3.3.14** 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  均在区间  $I$  上连续, 且 (至多) 除了有限个点外,  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $I$  内部满足  $f'(x) > g'(x)$ ; 设存在  $a \in I$ , 使得  $f(a) = g(a)$  ( $a$  不是区间端点), 则当  $x \in I$  且  $x > a$  时, 有  $f(x) > g(x)$ ; 当  $x \in I$  且  $x < a$  时, 有  $f(x) < g(x)$ .

解 记  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 则  $h(x)$  在  $I$  上连续, 且 (至多) 除了有限个点外,  $h(x)$  在  $I$  内部满足  $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$ . 又  $h(a) = f(a) - g(a) = 0$ . 由上一题的结论可知, 当  $x \in I$  且  $x > a$  时,  $h(x) > 0 \Rightarrow f(x) > g(x)$ ; 当  $x \in I$  且  $x < a$  时,  $h(x) < 0 \Rightarrow f(x) < g(x)$ .

**习题 3.3.15** 若  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  可导,  $f(0) = 0, f'(x)$  严格递增, 证明  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  严格递增.

解 设  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ , 则由 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

又由 Lagrange 中值定理,  $\exists \eta \in (0, x_1)$ , 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{f(x_1)}{x_1}.$$

因为  $f'(x)$  严格递增, 故  $f'(\xi) > f'(\eta)$ , 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow \frac{f(x_2)}{x_2} > \frac{f(x_1)}{x_1}. \quad (\text{习题 3.5.3})$$

因此  $\frac{f(x)}{x}$  在  $(0, +\infty)$  严格递增.

**习题 3.3.16** 设  $x_0$  是函数  $f(x)$  的一个驻点 ( $f'(x_0) = 0$ ), 且  $f(x)$  在  $x_0$  处二阶可微,  $f''(x_0) \neq 0$ . 证明: 若  $f''(x_0) < 0$ , 则  $x_0$  是  $f(x)$  的一个极大值点; 若  $f''(x_0) > 0$ , 则  $x_0$  是  $f(x)$  的一个极小值点.

举例说明: 若  $f''(x_0) = 0$ , 则  $x_0$  可以是  $f(x)$  的极大值点或极小值点, 也可以不是极值点.

解 若  $f''(x_0) < 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $f''(x) < 0$ . 由 Lagrange 中值定理,  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $\exists \xi = \xi(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$

又  $f''(x) < 0$ , 故  $f'(\xi) > f'(x_0) = 0 > f'(\xi_2)$ , 由习题 3.3.17 可知, 即当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f(x) < f(x_0)$ ; 当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f(x) < f(x_0)$ . 因此  $x_0$  是  $f(x)$  的一个极小值点. 即当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f(x) < f(x_0)$ ; 当  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  时,  $f(x) < f(x_0)$ . 因此  $x_0$  是  $f(x)$  的一个极大值点.

例: 设  $f(x) = x^4$ , 则  $f''(0) = 0$ , 但  $x = 0$  是  $f(x)$  的一个极小值点. 设  $g(x) = -x^4$ , 则  $g''(0) = 0$ , 但  $x = 0$  是  $g(x)$  的一个极大值点. 设  $h(x) = x^3$ , 则  $h''(0) = 0$ , 但  $x = 0$  不是  $h(x)$  的极值点.

**习题 3.3.17** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有二阶导数, 且  $f(0) = f'(0)$ ,  $f(1) = f'(1)$ . 求证: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 满足  $f(\xi) = f''(\xi)$ .

解 设  $g(x) = e^x(f(x) - f'(x))$ , 则

$$g'(x) = e^x(f(x) - f'(x)) + e^x(f'(x) - f''(x)) = e^x(f(x) - f''(x)).$$

又  $g(0) = e^0(f(0) - f'(0)) = 0$ ,  $g(1) = e^1(f(1) - f'(1)) = 0$ . 由 Rolle 定理, 在  $(0, 1)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得  $g'(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = f''(\xi)$ .

**习题 3.3.18** 求下列函数的单调区间与极值.

(1)  $y = 2x^3 - 3x^2$ ;

(2)  $y = x^{2/3}$ ;

(3)  $y = x^2 e^{-x^2};$

(4)  $y = x^{1/x};$

(5)  $y = \frac{(\ln x)^2}{x};$

(6)  $y = \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2).$

解 高中的时候大家就已经很熟悉怎么用导数来求函数的单调区间与极值了, 这里仅给出答案.

(1)

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1).$$

单调区间: 在  $(-\infty, 0)$  和  $(1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(0, 1)$  上单调递减.

极值: 在  $x = 0$  处取得极大值 0, 在  $x = 1$  处取得极小值  $-1$ .

(2)

$$y' = \frac{2}{3} x^{-1/3}.$$

单调区间: 在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-\infty, 0)$  上单调递减.

极值: 在  $x = 0$  处取得极小值 0.

(3)

$$y' = 2xe^{-x^2}(1-x^2).$$

单调区间: 在  $(-1, 0)$  和  $(1, +\infty)$  上单调递减, 在  $(-\infty, -1)$  和  $(0, 1)$  上单调递增.

极值: 在  $x = \pm 1$  处取得极大值  $\frac{1}{e}$ , 在  $x = 0$  处取得极小值 0.

(4) 此函数只在  $(0, +\infty)$  有定义.

$$y' = x^{1/x} \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

单调区间: 在  $(0, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减.

极值: 在  $x = e$  处取得极大值  $e^{1/e}$ .

(5)

$$y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}.$$

单调区间: 在  $(0, 1)$  和  $(e^2, +\infty)$  上单调递减, 在  $(1, e^2)$  上单调递增.

极值: 在  $x = 1$  处取得极小值 0, 在  $x = e^2$  处取得极大值  $\frac{4}{e^2}$ .

(6)

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1-x}{1+x^2}.$$

单调区间: 在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减.

极值: 在  $x = 1$  处取得极大值  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ .

### 命题 (极值点的判别法)

(1) 设  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 若  $f'(x_0)$  在  $x_0$  两侧存在, 异号, 则  $f(x_0)$  为  $f(x)$  的极值点.  $f'(x_0)$  可

以不存在. 这即极值存在的一阶导判别法.

(2) 若  $f'(x_0) = 0, f''(x_0) > 0 (< 0)$ , 则  $f(x_0)$  为  $f(x)$  的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的二阶导判别法.

(3) 若  $f'(x_0) = f''(x_0) = f^{(2n-1)}(x_0) = 0, f^{(2n)} > 0 (< 0)$ , 则  $f(x_0)$  必是  $f(x)$  的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的高阶导判别法.

**习题 3.3.19** 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值.

(1)  $y = x^4 - 2x^2 + 5, [-2, 2];$

(2)  $y = \sin 2x - x, [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}];$

(3)  $y = \arctan \frac{1-x}{1+x}, [0, 1];$

(4)  $y = x \ln x, (0, +\infty).$

**解**

(1)

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y(-2) = 13, \quad y(-1) = 4, \quad y(0) = 5, \quad y(1) = 4, \quad y(2) = 13.$$

故最大值为 13, 最小值为 4.

(2)

$$y' = 2 \cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6}.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}, \quad y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

故最大值为  $\frac{\pi}{2}$ , 最小值为  $-\frac{\pi}{2}$ .

(3)

$$y' = -\frac{2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2} < 0 \quad (x \in [0, 1]).$$

故在  $[0, 1]$  上单调递减, 最大值为  $y(0) = \frac{\pi}{4}$ , 最小值为  $y(1) = 0$ .

(4)

$$y' = \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}.$$

函数在  $\left(0, \frac{1}{e}\right]$  上单调递减, 在  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$  上单调递增且趋于  $+\infty$ . 故最小值为  $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ , 无最大值.

**习题 3.3.20** 证明下列不等式:

(1)  $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1, \quad x \in [0, 1], p > 1;$

- (2)  $\tan x > x - \frac{x^3}{3}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2});$   
 (3)  $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}, \quad 0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2};$   
 (4)  $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}, \quad x > 0;$   
 (5)  $1+x \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, \quad x \text{ 为任意实数};$   
 (6)  $\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2}), \text{ 且右端的常数 } \frac{4}{3} \text{ 不能换为更大的数};$   
 (7)  $(1-\frac{1}{x})^{x-1}(1+\frac{1}{x})^x < 4, \quad x \in (1, +\infty);$   
 (8)  $x^{a-1} + x^{a+1} \geq \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}, \quad x \in (0, 1), a \in (0, 1).$

解

- (1) 设  $f(x) = x^p + (1-x)^p$ , 则  $f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$ . 因此  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  上单调递增, 在  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  上单调递减. 故  $f(x)$  的最小值为  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$ , 最大值为  $f(0) = f(1) = 1$ , 即

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1.$$

- (2) 设  $g(x) = \tan x - x + \frac{x^3}{3}$ , 则  $g'(x) = \sec^2 x - 1 + x^2 = \tan^2 x + x^2 > 0$ . 因此  $g(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增, 又  $g(0) = 0$ , 故  $g(x) > 0$ , 即

$$\tan x > x - \frac{x^3}{3}.$$

- (3) 设  $h(x) = \frac{\tan x}{x}$ , 则  $h'(x) = \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x \tan^2 x}{x^2} > 0$ . 因此  $h(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递增, 故  $h(x_2) > h(x_1)$ , 即

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

- (4) 设  $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x}$ , 则

$$f'(x) = \frac{\arctan x + x^2 \arctan x + x^3 + x^2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} > 0, \quad x > 0$$

因此  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $f(0) = 0$ , 故  $f(x) > 0$ , 即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

- (4) 另解令  $f(x) = (1+x) \ln(1+x) - \arctan x, g(x) = \arctan x, \forall x > 0$ ,

$$\exists \xi_1 \in [0, x], \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi_1) = 1 + \ln(1+x) > 1.$$

$$\exists \xi_2 \in [0, x], \frac{g(x) - g(0)}{g - 0} = \frac{g(x)}{x} = g'(\xi_2) = \frac{1}{1 + \xi_2^2} < 1.$$

故

$$g(x) < x < f(x).$$

即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(5) 令  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\exists \xi \in [0, x], \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} \geq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \sqrt{1+x^2} - 1$$

即

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}.$$

(6) 令  $f(x) = x - \frac{4}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin x \cos x$ , 则

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{3} \cos x + \frac{1}{3} \cos 2x = \frac{1}{3} (2 \cos x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0.$$

又  $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\sin x > 0$ ,

$$\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos x.$$

另一方面, 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cos x = 0,$$

$\frac{4}{3}$  不能被替换为更大的数.

(7)

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{x-1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 < 4$$

(8) 令  $f(x) = x^{a-1} + x^{a+1}$ , 则  $\forall x \in (0, 1)$ ,  $a \in (0, 1)$ ,

$$f'(x) = (a-1)x^{a-2} + (a+1)x^a = (a+1) \left(x + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) \left(x - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) x^{a-2}.$$

$$\forall x \in \left(0, \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right), f'(x) < 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

$$\forall x \in \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, 1\right), f'(x) > 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

$$\text{综上, } \forall x \in (0, 1), a \in (0, 1), x^{a-1} + x^{a+1} \geq \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

**习题 3.3.21** 试确定下列函数零点的个数及所在范围:

(1)  $x^3 - 6x^2 + 9x - 10$ ;

(2)  $ax - \ln x$  (其中  $a > 0$ ).

解

(1) 令  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$ . 我们首先分析  $f(x)$  的单调性. 求导得:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3).$$

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x_1 = 1, x_2 = 3$ .

- 当  $x \in (-\infty, 1)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.
- 当  $x \in (1, 3)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减.
- 当  $x \in (3, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.

$f(x)$  在  $x = 1$  处取得极大值,

$$f(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 10 = 1 - 6 + 9 - 10 = -6.$$

$f(x)$  在  $x = 3$  处取得极小值,

$$f(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 10 = 27 - 54 + 27 - 10 = -10.$$

同时, 考察  $x$  趋于无穷时的极限:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

由于极大值  $f(1) = -6 < 0$ , 且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , 所以在  $(-\infty, 1]$  上  $f(x)$  恒为负, 没有零点. 由于极小值  $f(3) = -10 < 0$ , 且极大值  $f(1) = -6 < 0$ , 所以在  $(1, 3]$  上  $f(x)$  恒为负, 没有零点. 由于  $f(3) = -10 < 0$  且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , 且  $f(x)$  在  $(3, +\infty)$  上连续且单调递增, 根据零点存在定理,  $f(x)$  在  $(3, +\infty)$  上有且仅有一个零点.

又因为

$$f(4) = -6 < 0, \quad f(5) = 10 > 0.$$

所以零点在  $(4, 5)$  范围内.

该函数只有一个零点, 位于区间  $(4, 5)$  内.

(2) 令  $g(x) = ax - \ln x$ . 函数的定义域为  $(0, +\infty)$ . (题目已给出  $a > 0$ ) 我们分析  $g(x)$  的单调性. 求导得:

$$g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}.$$

令  $g'(x) = 0$ , 解得  $x = \frac{1}{a}$ .

- 当  $x \in (0, 1/a)$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减.
- 当  $x \in (1/a, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增.

因此,  $g(x)$  在  $x = 1/a$  处取得全局最小值, 最小值为:

$$g(1/a) = a \left( \frac{1}{a} \right) - \ln \left( \frac{1}{a} \right) = 1 - \ln(a^{-1}) = 1 + \ln a.$$

我们考察  $g(x)$  在定义域边界的行为:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - \ln x) = 0 - (-\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( a - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty \cdot (a - 0) = +\infty.$$

函数  $g(x)$  从  $+\infty$  递减到最小值  $1 + \ln a$ , 然后再递增到  $+\infty$ . 零点的个数取决于最小值  $1 + \ln a$  的符号:

**情况 1** 若最小值  $1 + \ln a > 0$ , 即  $\ln a > -1$ ,  $a > e^{-1}$  ( $a > 1/e$ ). 此时  $g(x)$  的最小值大于 0,  $g(x)$  恒大于 0, 故函数没有零点.

**情况 2** 若最小值  $1 + \ln a = 0$ , 即  $\ln a = -1$ ,  $a = e^{-1}$  ( $a = 1/e$ ). 此时  $g(x)$  的最小值等于 0,  $g(x)$  仅在  $x = 1/a = e$  处与  $x$  轴相切, 故函数有且仅有一个零点, 零点为  $x = e$ .

**情况 3** 若最小值  $1 + \ln a < 0$ , 即  $\ln a < -1$ ,  $0 < a < e^{-1}$  ( $0 < a < 1/e$ ). 此时  $g(x)$  的最小值小于 0. 由于  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$  且  $g(1/a) < 0$ ,  $g(x)$  在  $(0, 1/a)$  上连续且单调递减, 故在  $(0, 1/a)$  内必有一个零点. 由于  $g(1/a) < 0$  且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ,  $g(x)$  在  $(1/a, +\infty)$  上连续且单调递增, 故在  $(1/a, +\infty)$  内必有一个零点. 故函数有两个零点.

结论:

- 若  $a > e^{-1}$ , 函数有 0 个零点.
- 若  $a = e^{-1}$ , 函数有 1 个零点, 位于  $x = e$ .
- 若  $0 < a < e^{-1}$ , 函数有 2 个零点, 一个位于  $(0, 1/a)$ , 另一个位于  $(1/a, +\infty)$ .

**习题 3.3.22** 设  $a \in (0, 1)$ ,  $b_1 = 1 - a$ ,

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{1 - e^{-b_n}} - a, \quad n = 1, 2, \dots$$

问  $\{b_n\}$  是否收敛? 若不收敛, 则给予证明, 若收敛, 则求极限.

**解** 我们记  $f(x) = \frac{x}{1 - e^{-x}} - a, x > 0$ , 则有  $b_{n+1} = f(b_n), n = 1, 2, \dots$ , 且

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-x} - xe^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} \geq 0$$

由 Lagrange 中值定理可知, 存在  $\xi_n \in (b_n, b_{n+1})$  使得

$$b_{n+2} - b_{n+1} = f(b_{n+1}) - f(b_n) = f'(\xi_n)(b_{n+2} - b_{n+1}).$$

据此可知,  $\{b_n\}$  是一个单调数列, 增减性由  $b_2 - b_1$  确定.

再设  $g(x) = \begin{cases} f(x) - x, & x > 0 \\ 1 - a, & x = 0 \end{cases}$  化简得到  $x > 0$  时,

$$g(x) = \frac{x}{e^x - 1} - a, \quad g'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} \leq 0,$$

可知  $g(x)$  在  $x \geq 0$  处连续, 递减. 且由于  $g(0) = 1 - a > 0, g(1) = \frac{1}{1 - e^{-1}} - 1 - a < 0$ , 故存在唯一的  $c \in (0, 1)$  使得  $g(c) = 0$ , 即  $f(c) = c$ .

又由于

$$b_2 - b_1 = f(b_1) - b_1 = g(b_1) = \frac{b_1}{e^{b_1} - 1} - a = \frac{1 - a}{e^{1-a} - 1} - a = \frac{1 - ae^{1-a}}{e^{1-a} - 1} \geq 0.$$

由上述分析可知  $b_1 < c, \{b_n\}$  单调递增, 并且  $b_{n+1} - c = f(b_n) - f(c) = f'(\eta_n)(b_n - c)$ , 于是递推得到,  $b_n < c$ .

综上,  $\{b_n\}$  单调有界, 故收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 则

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(b).$$

故  $b = c$ .

**习题 3.3.23** 试给出 Cauchy 中值定理的几何解释.

**解** 设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 在开区间  $(a, b)$  内可微. 根据 Cauchy 中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

几何上, 这意味着在区间  $[a, b]$  上, 存在一点  $\xi$ , 使得函数  $f(x)$  在该点的瞬时变化率 (导数) 与函数  $g(x)$  在该点的瞬时变化率之比等于它们在端点处的平均变化率之比. 换句话说, 存在一条切线, 其斜率与通过点  $(a, f(a))$  和  $(b, f(b))$  的割线的斜率成比例关系, 这个比例由函数  $g(x)$  的变化决定.

**习题 3.3.24** 试说明在闭区间  $[-1, 1]$  上 Cauchy 中值定理对函数  $f(x) = x^2$  和  $g(x) = x^3$  为什么不正确.

**解** 在闭区间  $[-1, 1]$  上, 函数  $f(x) = x^2$  和  $g(x) = x^3$  都是连续的, 并且在开区间  $(-1, 1)$  内可微. 然而, 我们计算它们在端点处的变化:

$$f(1) - f(-1) = 1^2 - (-1)^2 = 0,$$

$$g(1) - g(-1) = 1^3 - (-1)^3 = 2.$$

因此, Cauchy 中值定理要求存在  $\xi \in (-1, 1)$ , 使得

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = \frac{0}{2} = 0 = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

计算导数:

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 3x^2.$$

因此,

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} = \frac{2}{3\xi}.$$

要使得  $\frac{2}{3\xi} = 0$ , 必须有  $\xi \rightarrow \infty$ , 这显然不可能在区间  $(-1, 1)$  内实现. 因此, 在这个例子中, Cauchy 中值定理不成立.

这个例子说明了 Cauchy 中值定理的适用条件必须严格满足, 其中要求  $g'(x)$  在  $(a, b)$  内不为零, 否则可能导致分母为零的情况, 从而使得定理无法应用.

**习题 3.3.25** 设  $b > a > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可微, 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$2\xi(f(b) - f(a)) = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

**解** 设  $g(x) = x^2$ , 则  $g'(x) = 2x$ . 根据 Cauchy 中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{f'(\xi)}.$$

整理即得.

**习题 3.3.26** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续 ( $ab > 0$ ), 在  $(a, b)$  上可微. 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

**解** 由 Cauchy 中值定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{f'(\xi)\xi - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}.$$

整理即得.

## 习题 3.4

习题 3.4.1 求下列极限.

- (1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$  ( $m, n$  为正整数,  $\alpha, \beta$  为实数);
- (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$  ( $m, n$  为自然数);
- (3)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}$ ;
- (4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}$ ;
- (5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ ;
- (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$  ( $\alpha$  为任意实数);
- (7)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$ ;
- (8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$  ( $a > 0$ );
- (9)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ ;
- (10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\tan x}$ ;
- (11)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$ ;
- (12)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln(1-x)}$ ;
- (13)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{2x-\pi}$ ;
- (14)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x}$ ;
- (15)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x) + \tan \frac{\pi}{2} x}{\cot \pi x}$ ;
- (16)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x^3)^2}{(1-\cos x)(e^{x^2}-1)\tan^2 x}$ ;
- (17)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{1/x}$ ;
- (18)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \cdot \left( 2 - \frac{x}{e^x - 1} \right)$ ;
- (19)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n}$  ( $n$  为自然数,  $a > 1, k > 0$ );
- (20)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k}$  ( $n$  为正整数,  $k > 0$ ).

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha}{n}(1+\alpha x)^{\frac{1}{n}-1} - \frac{\beta}{n}(1+\beta x)^{\frac{1}{n}-1}}{1} = \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nm(1+mx)^{n-1} - mn(1+nx)^{m-1}}{2x} \\ &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{nm^2(n-1)(1+mx)^{n-2} - mn^2(m-1)(1+nx)^{m-2}}{2} \\ &= \frac{mn(n-m)}{2} \end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = -4.$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{x^3} \stackrel{\arcsin x = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{\sin^3 t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{t^3} = -\frac{1}{6}.$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = 1.$$

(6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha.$$

(7)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{1} = 0.$$

(8)

$$\begin{aligned} ((a+x)^x)' &= (e^{x \ln(a+x)})' = \left( \frac{x}{a+x} + \ln(a+x) \right) e^{x \ln(a+x)} \\ ((a+x)^x)'' &= \left( \frac{x}{a+x} + \ln(a+x) \right)^2 e^{x \ln(a+x)} + \left( \frac{a}{(a+x)^2} + \frac{1}{a+x} \right) e^{x \ln(a+x)} \rightarrow (\ln a)^2 + \frac{2}{a} \quad (x \rightarrow 0) \\ (a^x)'' &= \ln^2(a) a^x \rightarrow \ln^2(a) \quad (x \rightarrow 0) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} &\stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \dots = \frac{(\ln a)^2 + \frac{2}{a} - (\ln a)^2}{2} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

(9)

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

(10)

$$\left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\tan x} \right| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

(11)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\arctan^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^2 \arctan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \arctan^2 x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \cdot \frac{x + \arctan x}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \\ &\stackrel{x = \tan y}{=} 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y - y}{\tan^3 y} = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y - y}{y^3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1-x) \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = 0 \end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{(2x-\pi)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{(2x-\pi) \ln(\tan x)} = \exp \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{2x-\pi}} \right) \\
&\stackrel{L'H}{=} \exp \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\tan x \cos^2 x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}} \right) = \exp \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-(2x-\pi)^2}{\sin 2x} \right) \\
&\stackrel{x-\frac{\pi}{2}=y}{=} \exp \left( \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{-4y^2}{-\sin 2y} \right) = e^0 = 1
\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1+x)^{1/x}}{e} \right)^{1/x} &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} \ln(1+x) - 1 \right) \right) \\
&= \exp \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} \left( x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) - 1 \right) \right) = e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x) + \tan \frac{\pi}{2}x}{\cot \pi x} &\stackrel{y=1-x}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y + \tan \frac{\pi}{2}(1-y)}{\cot \pi(1-y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln y + \cot \frac{\pi}{2}y}{-\cot \pi y} \\
&\stackrel{L'H}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{y} - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2}y}}{\pi \frac{1}{\sin^2 \pi y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin^2 \pi y}{\pi y} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \pi y}{\sin^2 \frac{\pi}{2}y} \right) \\
&= 0 - 2 = -2
\end{aligned}$$

(16)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin x^3)^2}{(1 - \cos x)(e^{x^2} - 1) \tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^3)^2}{\frac{1}{2}x^2 \cdot x^2 \cdot x^2} = 2$$

(17)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right)^{1/x} &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln(1+x) - \ln x}{x} \right) = \exp \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\ln(1+x)} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x}}{1} \right) \\
&= \exp 0 = 1
\end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}} \cdot \left( 2 - \frac{x}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1+x \sin x} + \sqrt{\cos x})}{1+x \sin x - \cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 - \frac{x}{e^x - 1} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot (1+1)}{1+x \sin x - \cos x} \cdot (2-1) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sin x + x \cos x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\frac{2 \sin x}{x} + \cos x} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

(19) 只需证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} = 0.$$

再由 Heine 定理即得.

对于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{a^x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{[k]}}{a^x} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[k] x^{[k]-1}}{(\ln a) a^x} = \cdots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[k]!}{(\ln a)^{[k]} a^x} = 0.$$

(20) 只需证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} = 0.$$

再由 Heine 定理即得.

对于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^k} \stackrel{\text{L'Hôpital 法则}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{kx^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{kx^k} = 0.$$

**习题 3.4.2** 设  $f(x)$  在区间  $[0, a]$  上有二阶连续导数,  $f'(0) = 1, f''(0) \neq 0$ , 且  $0 < f(x) < x$ ,  $x \in (0, a)$ . 令

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_1 \in (0, a).$$

(1) 求证:  $\{x_n\}$  收敛并求其极限;

(2) 试问  $\{nx_n\}$  是否收敛? 若收敛, 则求其极限.

解

(1)  $\{x_n\}$  是递减的, 因为  $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_n < 0$ .  $\{x_n\}$  具有下界 0, 故可设  $\{x_n\}$  收敛到  $x$ . 令  $n \rightarrow \infty$ , 由  $f$  的连续性, 得  $x = f(x)$ , 同时利用夹逼准则可知  $f(0) = 0$  是唯一满足  $x = f(x)$  的, 故  $x = 0$ .

(2) 由泰勒展开,  $f(x) = x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2)$ , 因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n &\stackrel{\text{Stolz}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n x_{n+1}}{x_n - f(x_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2 + o(x_n^2)}{x_n - \left(x_n + \frac{f''(0)}{2}x_n^2 + o(x_n^2)\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{-\frac{f''(0)}{2}x_n^2 + o(x_n^2)} \\ &= -\frac{2}{f''(0)} \end{aligned}$$

## 习题 3.5

**习题 3.5.1** 证明 (Jensen (延森) 不等式): 设  $f(x)$  是区间  $I$  上的凸函数,  $x_1, \dots, x_n$  是  $I$  中  $n$  个点, 则对任意满足  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$  的正数  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n).$$

**解** 采用数学归纳法. 当  $n = 2$  时, 结论显然成立.

假设当  $n = k$  时结论成立, 即对任意满足  $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$  的正数  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , 有

$$f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_k f(x_k).$$

现考虑  $n = k + 1$  的情形. 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$  是满足  $\alpha_1 + \dots + \alpha_{k+1} = 1$  的正数. 记  $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ , 则有  $0 < \beta < 1$ . 因此,

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{k+1} x_{k+1}) &= f(\beta(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \dots + \frac{\alpha_k}{\beta} x_k) + (1 - \beta)x_{k+1}) \\ &\leq \beta f(\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \dots + \frac{\alpha_k}{\beta} x_k) + (1 - \beta)f(x_{k+1}) \quad (\text{由凸函数的定义}) \\ &\leq \beta(\frac{\alpha_1}{\beta} f(x_1) + \dots + \frac{\alpha_k}{\beta} f(x_k)) + (1 - \beta)f(x_{k+1}) \quad (\text{由归纳假设}) \\ &= \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_k f(x_k) + \alpha_{k+1} f(x_{k+1}). \end{aligned}$$

由数学归纳法可知, 对任意正整数  $n$ , 结论均成立.

**习题 3.5.2** 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  和  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  都是正数, 且  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ , 证明: 有不等式

$$x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n.$$

特别, 取  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$ , 则得到算术平均不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

(提示: 考虑区间  $(0, +\infty)$  上的函数  $f(x) = -\ln x$  的凸凹性, 并利用 Jensen 不等式.)

**解** 设  $f(x) = -\ln x$ , 则  $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$ , 因此  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上是凸函数. 由习题 3.5.1, 对任意满足  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$  的正数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 有

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) &\leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \dots + \lambda_n f(x_n) \\ -\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) &\leq -(\lambda_1 \ln x_1 + \lambda_2 \ln x_2 + \dots + \lambda_n \ln x_n). \end{aligned}$$

即

$$\ln(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \ln(x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}).$$

即

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \geq x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}.$$

**习题 3.5.3** 设  $a, b, c, d$  满足  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ , 其中  $b > 0, d > 0$ , 证明不等式

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

**解** 由  $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$  可得  $ad \leq bc$ . 因为  $b > 0, d > 0$ , 故有

$$ad + ab \leq bc + ab \Rightarrow a(d+b) \leq b(c+a) \Rightarrow \frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d}.$$

同理,

$$ad \leq bc \Rightarrow ad + cd \leq bc + cd \Rightarrow c(b+d) \geq d(a+c) \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}.$$

**习题 3.5.4** 设  $f(x)$  是区间  $I$  上的凸函数, 证明:  $f(x)$  在  $I$  的内点是连续的.

**解** 设  $x_0$  是区间  $I$  的一个内点, 即证明  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ . 仅证右连续  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ , 左连续同理.

由于  $x_0$  是区间  $I$  的内点, 故存在  $\delta > 0$ , 使得区间  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$ .

任取  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , 则由凸函数的定义, 对任意  $a \in (x_0 - \delta, x_0)$ , 有

$$\frac{f(x) - f(x_0 - \delta)}{x - (x_0 - \delta)} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{(x_0 + \delta) - x_0}.$$

记  $M_1 = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \delta)}{\delta}$ ,  $M_2 = \frac{f(x_0 + \delta) - f(x_0)}{\delta}$ , 则  $M_1, M_2$  均为常数, 上式可写为

$$M_1(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M_2(x - x_0).$$

当  $x \rightarrow x_0^+$  时, 由夹逼定理可知,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

**习题 3.5.5** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上处处可导, 且除了有限个点之外, 均有  $f''(x) > 0$ , 证明:  $f(x)$  在  $I$  上是凸的. 将本题用于  $f(-x)$ , 就得到关于凹函数的类似结论.

**解** 由题设条件以及 **习题 3.3.13** 知, 可得  $f'(x)$  单调增, 由一阶导判别法即证.

其中, 一阶导判别法表述为:

**定理 (零阶导判别法)**  $f(x)$  在区间  $I$  上为凸函数  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$  都有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

**定理 (一阶导判别法)** 若  $f'(x)$  在  $I$  上存在, 则  $f(x)$  在  $I$  上为凸函数  $\Leftrightarrow f'(x)$  在  $I$  上单调增.

**证明** 必要求任取  $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, x_1 < x < x_2$ , 应用 3.5 中第一个不等式, 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

同理, 对  $x_1 < x' < x_2$ , 应用 3.5 中的第二个不等式, 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

并令  $x' \rightarrow x_2$ , 有

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_1)$$

所以  $f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ . 根据  $x_1, x_2$  的任意性, 必须性证明毕.

充分析对任意的  $x_1 < x < x_2$ , 由微分中值定理, 存在  $\xi \in (x_1, x_2), \eta \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f(x) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x - x_1), \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\eta) \cdot (x_2 - x_1)$$

因为  $f'(x)$  单调增, 且  $x_1 < x < x_2$ , 即

$$f'(\xi) \leq f'(\eta)$$

可知函数  $f$  是凸函数.

**定理 (二阶导判别法)** 若  $f''(x)$  在  $I$  上存在, 则  $f(x)$  在  $I$  上为凸函数  $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0, x \in I$ .

**习题 3.5.6** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  内有连续的二阶导数. 若  $x_0$  是  $f(x)$  的一个拐点, 证明:

$$f''(x_0) = 0.$$

**解** 由拐点的定义可知, 存在  $\delta > 0$ , 使得在区间  $(x_0 - \delta, x_0)$  上,  $f(x)$  为凸函数, 在区间  $(x_0, x_0 + \delta)$  上,  $f(x)$  为凹函数. 由 **二阶导判别法** 知, 对任意  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ , 有  $f''(x) \geq 0$ ; 对任意  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , 有  $f''(x) \leq 0$ . 由于  $f''(x)$  在区间  $I$  内连续, 故有

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f''(x) \geq 0, \quad f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f''(x) \leq 0.$$

因此,  $f''(x_0) = 0$ .

**习题 3.5.7** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  及其附近二阶可导, 且  $f''(x_0) = 0$ . 若  $f'''(x_0)$  存在但不为零, 证明:  $x_0$  是  $f(x)$  的拐点.

**解** 不妨设  $f'''(x_0) > 0$ . 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = f'''(x_0) > 0$ , 所以存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有

$$\frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x) \geq 0, & x_0 < x < x_0 + \delta; \\ f''(x) \leq 0, & x_0 - \delta < x < x_0. \end{cases}$$

由 **二阶导判别法** 知,  $f(x)$  在区间  $(x_0 - \delta, x_0)$  上为凹函数, 在区间  $(x_0, x_0 + \delta)$  上为凸函数, 因此,  $x_0$  是  $f(x)$  的拐点.

**习题 3.5.8** 求下列函数的凸、凹区间和拐点.

$$(1) y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25;$$

$$(2) y = x + \frac{1}{x};$$

(3)  $y = x^{5/3}$ ;

(4)  $y = (1 + x^2)e^x$ ;

(5)  $y = x^4$ ;

(6)  $y = x + \sin x$ .

解

(1)  $y' = 6x^2 - 6x - 36, y'' = 12x - 6$ .

- 当  $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$  时,  $y'' < 0$ , 函数在  $(-\infty, \frac{1}{2})$  上为凹函数;

- 当  $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$  时,  $y'' > 0$ , 函数在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  上为凸函数;

 $x = \frac{1}{2}$  为拐点.

(2)  $y' = 1 - \frac{1}{x^2}, y'' = \frac{2}{x^3}$ .

- 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $y'' > 0$ , 函数在  $(0, +\infty)$  上为凸函数;

- 当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $y'' < 0$ , 函数在  $(-\infty, 0)$  上为凹函数;

 $y = y(x)$  在  $x = 0$  处无定义, 故无拐点.

(3)  $y' = \frac{5}{3}x^{2/3}, y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3}$ . 函数只在  $x \geq 0$  上有定义, 此时  $y'' > 0$ , 函数在  $[0, +\infty)$  上为凸函数, 无拐点.

(4)  $y' = (1 + 2x + x^2)e^x, y'' = (3 + 4x + x^2)e^x$ .

- 当  $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$  时,  $y'' > 0$ , 函数在  $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$  上为凸函数;

- 当  $x \in (-3, -1)$  时,  $y'' < 0$ , 函数在  $(-3, -1)$  上为凹函数;

 $x = -3, -1$  为拐点.

(5)  $y' = 4x^3, y'' = 12x^2 \geq 0$ , 函数在  $(-\infty, +\infty)$  上为凸函数, 无拐点.

(6)  $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$ .

- 当  $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$  时,  $y'' < 0$ , 函数在  $(2k\pi, (2k+1)\pi)$  上为凹函数;

- 当  $x \in ((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$  时,  $y'' > 0$ , 函数在  $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$  上为凸函数;

 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  为拐点.**习题 3.5.9** 求  $a, b$  值, 使点  $(1, 3)$  为曲线  $y = ax^3 + bx^2$  的拐点.解  $y' = 3ax^2 + 2bx, y'' = 6ax + 2b$ . 因为点  $(1, 3)$  为曲线  $y = ax^3 + bx^2$  的拐点, 故有

$$\begin{cases} 3 = a + b; \\ 0 = 6a + 2b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1; \\ b = 2. \end{cases}$$

**习题 3.5.10** 描绘下列各曲线的图形.

(1)  $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$ ;

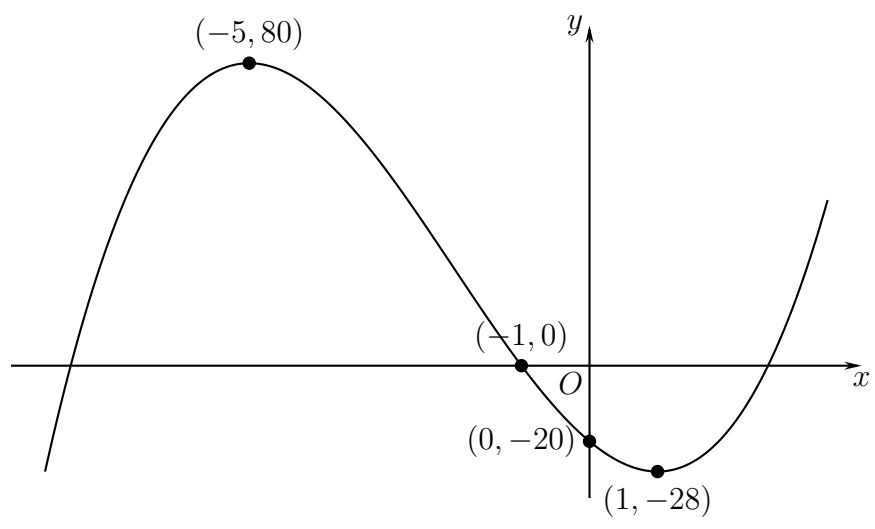
(2)  $y = \frac{x^3}{2(1+x)^2}$ ;

(3)  $y = x - 2 \arctan x$ ;

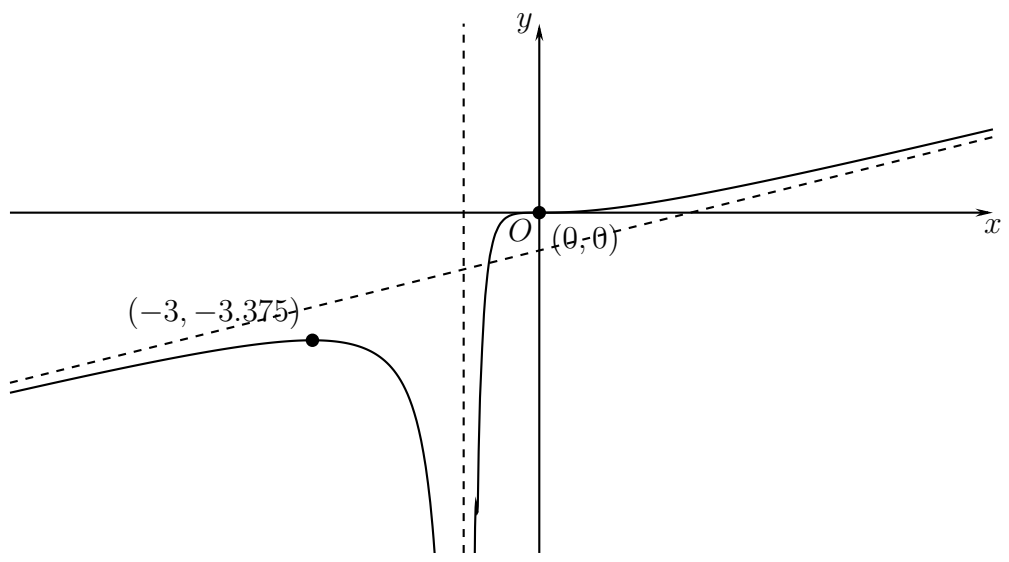
(4)  $y = xe^{-x}$ .

解

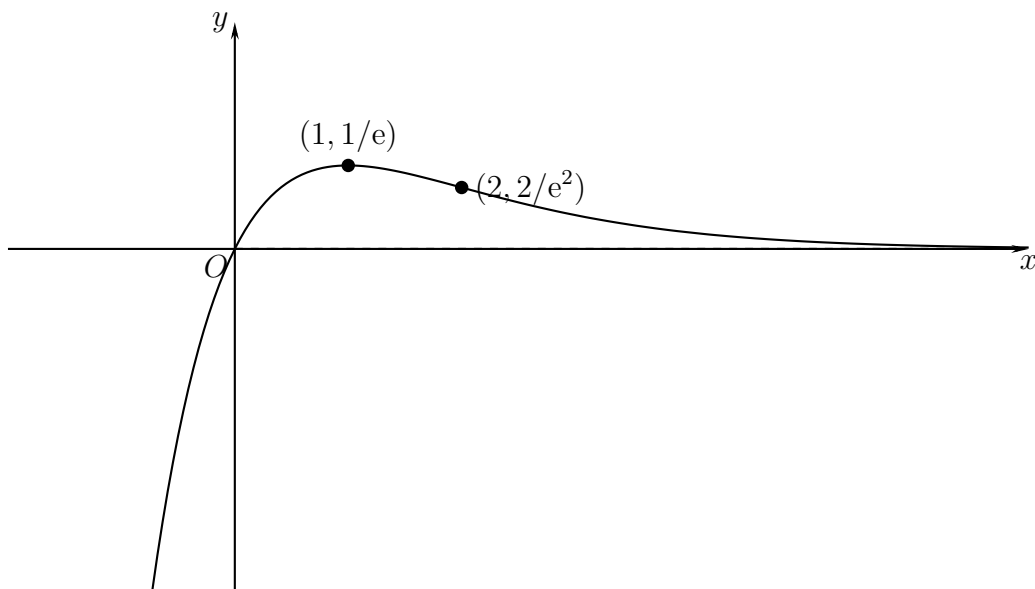
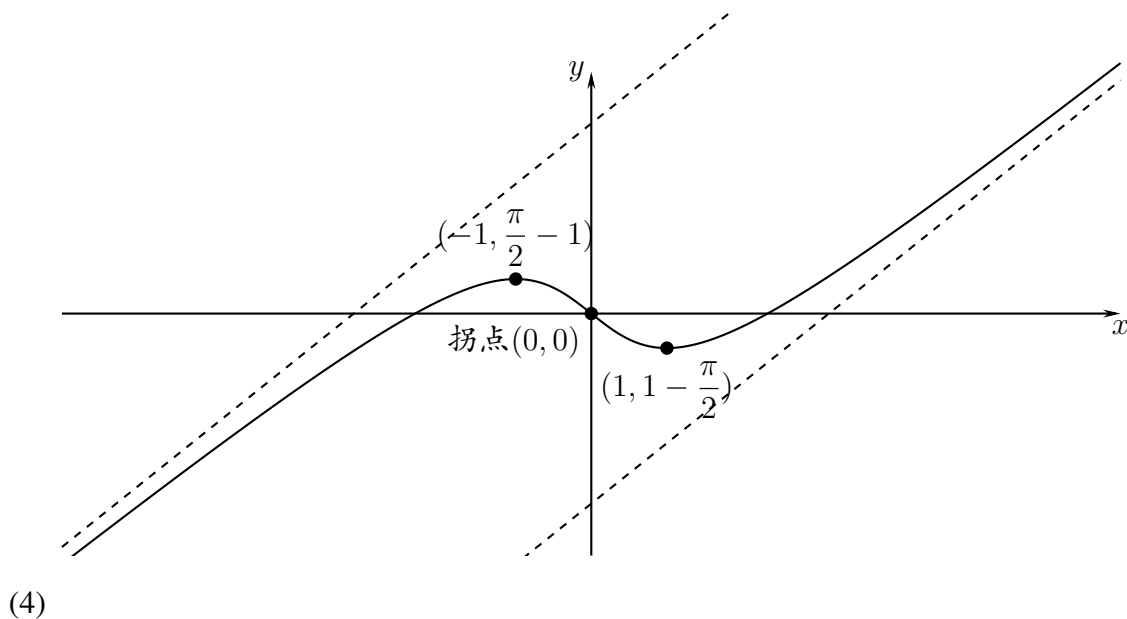
(1)



(2)



(3)



**习题 3.5.11** 设函数  $y = f(x)$  所表示的曲线为  $C$ . 记  $C$  上一点  $M(x, y)$  处的曲率为  $\kappa (\kappa \neq 0)$ , 过点  $M$  引曲线的法线, 在此法线上曲线上凸的一侧取点  $D$ , 使  $|DM| = \frac{1}{\kappa} = \rho$ . 以  $D$  为圆心,  $\rho$  为半径作圆, 这个圆称为曲线在点  $M$  处的曲率圆, 其圆心  $D$  称为曲线在点  $M$  处的曲率中心, 半径  $\rho$  称为曲线在点  $M$  处的曲率半径.

求下列曲线在指定点的曲率、曲率中心及曲率半径.

(1)  $xy = 1$  在点  $(1, 1)$  处;

(2)  $y = e^{-x^2}$  在点  $(0, 1)$  处.

解

(1) 设  $y = \frac{1}{x}$ , 则  $y' = -\frac{1}{x^2}$ ,  $y'' = \frac{2}{x^3}$ . 在点  $(1, 1)$  处, 有

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 1)^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{2}.$$

曲线在点  $(1, 1)$  处的法线方程为  $y - 1 = x - 1$ , 即  $y = x$ . 因此, 曲率中心  $D$  的坐标为

$$D(2, 2).$$

(2) 设  $y = e^{-x^2}$ , 则  $y' = -2xe^{-x^2}$ ,  $y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$ . 在点  $(0, 1)$  处, 有

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 0)^{3/2}} = 2,$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}.$$

曲线在点  $(0, 1)$  处的法线方程为  $y - 1 = 0$ , 即  $y = 1$ . 因此, 曲率中心  $D$  的坐标为

$$D\left(0, 1 - \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

**习题 3.5.12** 求下列曲线在指定点的曲率.

$$(1) \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}, \text{ 在 } t = 1 \text{ 处}; \quad (2) \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases} \text{ 在 } t = \frac{\pi}{2} \text{ 处}.$$

解

$$(1) \text{ 对于参数方程 } \begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}, \text{ 参数方程曲线的曲率公式为:}$$

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

计算各阶导数:

$$x' = 6t, \quad x'' = 6$$

$$y' = 3 - 3t^2, \quad y'' = -6t$$

在  $t = 1$  处:

$$x'(1) = 6, \quad x''(1) = 6$$

$$y'(1) = 3 - 3 = 0, \quad y''(1) = -6$$

因此曲率为:

$$\kappa = \frac{|6 \cdot (-6) - 0 \cdot 6|}{(6^2 + 0^2)^{3/2}} = \frac{|-36|}{6^3} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

$$(2) \text{ 对于参数方程 } \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}, \text{ 计算各阶导数:}$$

$$x' = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t$$

$$x'' = \cos t - t \sin t$$

$$y' = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t$$

$$y'' = \sin t + t \cos t$$

在  $t = \frac{\pi}{2}$  处:

$$x' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$x'' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$y' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$y'' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$$

因此曲率为:

$$\kappa = \frac{|0 \cdot 1 - \frac{\pi}{2} \cdot (-\frac{\pi}{2})|}{(0^2 + (\frac{\pi}{2})^2)^{3/2}} = \frac{\left| \frac{\pi^2}{4} \right|}{(\frac{\pi^2}{4})^{3/2}} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^3}{8}} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{8}{\pi^3} = \frac{2}{\pi}$$

**习题 3.5.13** 对数曲线  $y = \ln x$  上哪一点的曲率半径最小? 并求出该点的曲率半径.

**解** 设  $y = \ln x$ , 则  $y' = \frac{1}{x}$ ,  $y'' = -\frac{1}{x^2}$ . 曲率半径  $\rho$  的表达式为

$$\rho = \frac{(1 + (y')^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{(1 + \frac{1}{x^2})^{3/2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{x}.$$

为了求出曲率半径的最小值, 只需求出函数  $g(x) = \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{x}$  的最小值. 计算  $g'(x)$ :

$$g'(x) = \frac{3x(x^2 + 1)^{1/2} \cdot x - (x^2 + 1)^{3/2}}{x^2} = \frac{(x^2 + 1)^{1/2}(3x^2 - (x^2 + 1))}{x^2} = \frac{(x^2 + 1)^{1/2}(2x^2 - 1)}{x^2}.$$

令  $g'(x) = 0$ , 可得  $2x^2 - 1 = 0$ , 即  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 当  $x > 0$  时,  $g'(x) < 0$  当  $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 且  $g'(x) > 0$  当  $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 因此, 函数  $g(x)$  在  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  处取得最小值. 此时的曲率半径为

$$\rho_{\min} = g \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\left( \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 1 \right)^{3/2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

**习题 3.5.14** 设函数  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, +\infty)$  上的凸函数且有界, 求证:  $f(x)$  是常数.

**解** 反证法. 假设  $f(x)$  不是常数, 则存在  $x, y \in (-\infty, +\infty)$ , 使得  $f(x) > f(y)$ . 由凸函数的定义可知, 对任意  $t \in (0, 1)$ , 有

$$f(x) \leq \lambda f \left( \frac{x - (1 - \lambda)y}{\lambda} \right) + (1 - \lambda)f(y), \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

因此

$$\frac{f(x) - (1 - \lambda)f(y)}{\lambda} \leq f\left(\frac{x - (1 - \lambda)y}{\lambda}\right).$$

由于  $f(x) > f(y)$ ,

$$\frac{f(x) - (1 - \lambda)f(y)}{\lambda} = \frac{f(x) - f(y)}{\lambda} + f(y) \rightarrow +\infty, \quad \lambda \rightarrow 0^+.$$

所以当  $\lambda \rightarrow 0^+$  时,

$$f\left(\frac{x - (1 - \lambda)y}{\lambda}\right) \rightarrow +\infty,$$

与  $f(x)$  有界矛盾. 因此,  $f(x)$  是常数.

## 习题 3.6

习题 3.6.1 写出下列函数的（具有 Peano 余项的）Maclaurin 展开式.

$$(1) y = \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1};$$

$$(2) y = \sin^2 x.$$

解

(1)

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^3 + 2x + 1}{x - 1} = -(x^3 + 2x + 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)) \\ &= -1 - 3x - 3x^2 - 4x^3 - 4x^4 - \cdots - 4x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \right) \\ &= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n}). \end{aligned}$$

习题 3.6.2 求出函数  $e^{\sin x}$  的（具有 Peano 余项的）三阶 Maclaurin 展开式.

解

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2!} + \frac{(\sin x)^3}{3!} + o((\sin x)^3) \\ &= 1 + \left( x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right) + \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{6} (x + o(x))^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \right) + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) x^3 + o(x^3) \\ &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

习题 3.6.3 求出函数  $\ln(\cos x)$  的（具有 Peano 余项的）六阶 Maclaurin 展开式.

解

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln(1 + (\cos x - 1)) \\
&= (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + \frac{(\cos x - 1)^3}{3} + o((\cos x - 1)^3) \\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\right)x^4 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4!}\right) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\right)x^6 + o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)
\end{aligned}$$

**习题 3.6.4** 已知  $f(x)$  是一个四次多项式, 并且  $f(2) = -1, f'(2) = 0, f''(2) = 2, f'''(2) = -12, f^{(4)}(2) = 24$ . 计算  $f(-1), f'(0), f''(1)$ .

解

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 \\
&= -1 + (x-2)^2 - 2(x-2)^3 + (x-2)^4
\end{aligned}$$

因此

$$f(-1) = 143, f'(0) = -60, f''(1) = 26.$$

**习题 3.6.5** 求下列函数具有 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

(1)  $y = \tan x$  在  $x = 0$  的二阶 Taylor 展开式; (2)  $y = \frac{1}{x}$  在  $x = -1$  的  $n$  阶 Taylor 展开式.

解

(1)

$$\tan x = \tan 0 + \sec^2 0 \cdot x + \frac{2 \tan 0 \sec^2 0}{2!}x^2 + \frac{2(\sec^4 \xi + 2 \tan^2 \xi \sec^2 \xi)}{3!}x^3 = x + \frac{\sec^4 \xi}{3}x^3, \quad \xi \in (0, x).$$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{-1} + \frac{-1}{(-1)^2}(x+1) + \frac{2!}{(-1)^3 2!}(x+1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1} n!}(x+1)^n + \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{\xi^{n+2} (n+1)!}(x+1)^{n+1} \\
&= -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \cdots - (x+1)^n - \frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}, \quad \xi \in (-1, x).
\end{aligned}$$

**习题 3.6.6** 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right];$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x}.$$

解

(1)

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \quad e^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4))}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{12}.$$

(2)

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4), \quad \sqrt[3]{1-x^2} = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4))}{x^2} = \frac{5}{6}.$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x - \left( x - \frac{1}{2} + o(1) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} - o(1) \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \cos(\sin x) &= 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^4}{24} + o((\sin x)^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 + \frac{1}{24} \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left( x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) \right) + \frac{1}{24} (x^4 + o(x^4)) + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)) - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4))}{x^4 + o(x^4)} = \frac{1}{6}.$$

**习题 3.6.7** 设函数  $f(x)$  处处有  $n+1$  阶导数, 证明:  $f(x)$  为次数不超过  $n$  的多项式的充分必要条件是  $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ .

**解** 充分性: 若  $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$ , 则由 Taylor 公式可知, 考虑在点  $x=0$  处的 Taylor 展开式, 对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

因此,  $f(x)$  为次数不超过  $n$  的多项式, 各项系数分别为  $f(0), f'(0), \frac{f''(0)}{2!}, \dots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ .

必要性: 若  $f(x)$  为次数不超过  $n$  的多项式, 则可设

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

因此, 对任意  $x \in \mathbb{R}$ , 有

$$f^{(n+1)}(x) = 0.$$

**习题 3.6.8** 设函数  $f'(x)$  在  $[0, 2]$  上二阶可导, 且对任意  $x \in [0, 2]$ , 有  $|f(x)| \leq 1$  及  $|f''(x)| \leq 1$ .

证明:  $|f'(x)| \leq 2, x \in [0, 2]$ .

解

$$f(0) = f(x) - f'(0)x - \frac{f''(\xi)}{2}x^2, \quad \xi \in (0, x).$$

$$f(2) = f(x) + f'(2)(2-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2, \quad \eta \in (x, 2).$$

因此, 对任意  $x \in [0, 2]$ , 有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \frac{f(2) - f(0) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 - \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2}{2} \right| \\ &\leq \frac{|f(2)|}{2} + \frac{|f(0)|}{2} + \frac{|f''(\xi)|x^2}{4} + \frac{|f''(\eta)|(2-x)^2}{4} \\ &\leq 1 + \frac{1}{4}(x^2 + (2-x)^2) \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

**习题 3.6.9** 设  $n$  为自然数, 考虑函数  $f(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$  证明:  $f'(0) = 0$ , 但  $f''(0)$  不存在.

(提示: 证明  $f(x)$  仅在一点  $x = 0$  可导.)

注意, 我们显然有

$$f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

但当  $n > 1$  时, 并不能断言  $f^{(k)}(0) = 0 (2 \leq k \leq n)$ . 因此, 定理 3.32 中的条件: 函数在点  $x_0$  处有  $n$  阶导数, 是至关重要的.

解

$$|f'(0)| = \left| \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0.$$

但是, 当  $x \neq 0, x \in \mathbb{Q}$  时,

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow x, t \in \mathbb{Q}} \frac{t^{n+1} - x^{n+1}}{t - x} = (n+1)x^n, & t \in \mathbb{Q}, \\ \lim_{t \rightarrow x, t \notin \mathbb{Q}} \frac{0 - x^{n+1}}{t - x} = \infty, & t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

当  $x \neq 0, x \notin \mathbb{Q}$  时,

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow x, t \in \mathbb{Q}} \frac{t^{n+1} - 0}{t - x} = \infty, & t \in \mathbb{Q}, \\ \lim_{t \rightarrow x, t \notin \mathbb{Q}} \frac{0 - 0}{t - x} = 0, & t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

因此,  $f'(x)$  在  $x \neq 0$  处不存在, 故  $f''(0)$  不存在.

**习题 3.6.10** 考虑函数  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  它在  $x \neq 0$  处显然有任意阶导数. 证明:  $f(x)$  在

$x = 0$  处的任意阶导数都存在, 而且都等于零. (提示: 首先, 易用数学归纳法证明, 当  $x \neq 0$  时, 对  $n = 1, 2, \dots$  有  $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ , 这里  $P_{3n}(t)$  是  $t$  的  $3n$  次多项式; 其次, 由导数定义及 L'Hôpital 法则, 得出 (记  $y = \frac{1}{x}$ )

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0,$$

即  $f'(0) = 0$ . 现在, 说的结论易用数学归纳法及 L'Hôpital 法则证明.)

本题意味着, 对任意的自然数  $n$ , 函数  $f$  在  $x = 0$  处的  $n$  阶 Taylor 多项式是 0; 换句话说, 余项总是等于  $f(x)$ . 因此, 即使函数在一点附近的性态, 用 (在该点的) 足够高阶的导数也未必能将其揭示出来.

**解** 设  $n$  为自然数, 当  $x \neq 0$  时, 用数学归纳法可证  $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ , 这里  $P_{3n}(t)$  是  $t$  的  $3n$  次多项式. 当  $n = 1$  时,

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}.$$

假设当  $n = k$  时结论成立, 则当  $n = k + 1$  时,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left( e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) \right)' \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x^2}} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \left( \frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \end{aligned}$$

显然,  $\frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)$  是  $\frac{1}{x}$  的  $3(k+1)$  次多项式. 因此, 结论对任意自然数  $n$  都成立.

由 L'Hôpital 法则, 可得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0,$$

即  $f'(0) = 0$ . 假设当  $n = k$  时,  $f^{(k)}(0) = 0$ , 则当  $n = k + 1$  时,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{P_{3k}(y)}{ye^{y^2}} = 0 \end{aligned}$$

因此, 结论对任意自然数  $n$  都成立.

**习题 3.6.11** 设函数  $f(x)$  在驻点  $x_0$  处的  $n$  阶微商存在, 并且

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad \text{而 } f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

证明:

- (1) 若  $n$  为奇数, 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处无极值;
- (2) 若  $n$  为偶数, 则函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处取得极值. 当  $f^{(n)}(x_0) > 0$  时,  $f(x)$  在点  $x_0$  处取极小值; 当  $f^{(n)}(x_0) < 0$  时,  $f(x)$  在点  $x_0$  处取极大值.

本题表明, 若函数  $f(x)$  在驻点上存在如上所述的高阶导数, 则由此可确定驻点是否为极值点. 然而, 我们注意, 上一题中的函数  $f$  在  $x = 0$  处显然有极小值, 但却不能用这一判别法判别.

**解** 不妨设  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $f^{(n)}(x) > 0$ . 由 Taylor 公式, 对任意  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n, \quad \xi \in (x_0, x) \text{ 或 } (x, x_0).$$

(1) 当  $n$  为奇数时,

- 若  $x > x_0$ , 则  $(x - x_0)^n > 0$ , 故  $f(x) - f(x_0) > 0$ ;
- 若  $x < x_0$ , 则  $(x - x_0)^n < 0$ , 故  $f(x) - f(x_0) < 0$ .

因此, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处无极值.

(2) 当  $n$  为偶数时,

- 若  $x > x_0$ , 则  $(x - x_0)^n > 0$ , 故  $f(x) - f(x_0) > 0$ ;
- 若  $x < x_0$ , 则  $(x - x_0)^n > 0$ , 故  $f(x) - f(x_0) > 0$ .

因此, 函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处取极小值.

对于  $f^{(n)}(x_0) < 0$  的情形, 类似可证.

## 第3章综合习题

习题 3.C.1 设  $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+n)$ , 求  $f'(0)$ .

解

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)(x+2)\dots(x+n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!. \end{aligned}$$

习题 3.C.2 设奇函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上具有二阶连续导数, 记函数

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 确定  $a$  的值, 使  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

(2) 对 (1) 中确定的  $a$ , 证明:  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上可导, 且导函数连续.

解

(1) 由于  $f(x)$  是奇函数, 故  $f(0) = 0 \Rightarrow g(0) = a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$ .

(2)

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x} - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f'(0)x}{x^2} = \frac{f''(0)}{2}, \\ g'(x) &= \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

又

$$\lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) \cdot x + f'(x) - f'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(0)}{2} = g'(0).$$

因此,  $g'(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

习题 3.C.3 设  $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + a_n = 0$ , 证明: 方程  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  在  $(0, 1)$  内至少有一个根.

解 设函数  $f(x) = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^{n-1} + \dots + a_nx$ . 则  $f(0) = 0$ , 且

$$f(1) = \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \dots + a_n = 0.$$

由 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ , 即

$$a_0\xi^{n-1} + a_1\xi^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 0.$$

习题 3.C.4 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可微, 且  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ .

**解** 设函数  $g(x) = e^x f(x)$ , 则  $g(a) = g(b) = 0$ . 由 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$g'(\xi) = e^\xi f'(\xi) + e^\xi f(\xi) = e^\xi (f'(\xi) + f(\xi)) = 0.$$

因为  $e^\xi \neq 0$ , 故  $f'(\xi) + f(\xi) = 0$ .

**习题 3.C.5** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上连续, 如果任给  $I$  中两点  $x_1, x_2$ , 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

证明:  $f(x)$  是区间  $I$  上的凸函数.

我们将此习题完整表示为以下定理:

**定理** 设  $f(x)$  在  $I$  上有定义, 若  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 以下三式等价:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1), \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad (\text{A})$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (\text{B})$$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{C})$$

**证明** 我们使用向前和向后两步归纳法证明此定理.

(1) 第一步我们先证明: 式 (B) 成立  $\Rightarrow$  式 (C) 成立.

(a) 由式 (B) 知式 (C) 当  $n = 2$  时成立. 现证  $n = 4$  时式 (C) 成立. 事实上, 对  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in I$ , 由式 (B), 我们有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) &= f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{2}\right) \leq \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)}{2} \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4)}{4}. \end{aligned}$$

此即式 (C) 对  $n = 4$  成立. 一般来说, 对任一自然数  $k$ , 重复上面方法, 应用 (B) 式  $k$  次, 可知

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2^k}}{2^k}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2^k})}{2^k}.$$

这说明式 (C) 对一切  $n = 2^k$  皆成立.

(b) 证明式 (C) 对  $n = k + 1$  成立时, 必对  $n = k$  也成立. 记  $A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}$ , 则  $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = kA$ , 所以

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + A}{k + 1}.$$

因此式 (C) 对  $n = k + 1$  成立, 故

$$f(A) = f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k + A}{k + 1}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k) + f(A)}{k + 1}.$$

不等式两边同时乘以  $k+1$ , 减去  $f(A)$ , 最后除以  $k$ . 注意

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k},$$

我们得到

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_k}{k}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_k)}{k}.$$

此式表示式 (C) 对  $n=k$  成立.

(2) 第二步我们证明: 式 (C) 成立  $\Rightarrow$  式 (A) 成立.

(a) 当  $\lambda_1 = \frac{m}{n}, \lambda_2 = \frac{n-m}{n}$  为有理数时,

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f\left(\frac{m}{n}x_1 + \frac{n-m}{n}x_2\right) \\ &= f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_1 + x_2 + \cdots + x_2}{n}\right) \\ &\leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_2)}{n} \\ &= \frac{m}{n}f(x_1) + \frac{n-m}{n}f(x_2). \end{aligned}$$

(b) 当  $\lambda_1, \lambda_2$  为无理数时, 由有理数的稠密性, 存在  $\lambda_n \rightarrow \lambda_1$ , 由  $f$  的连续性, 有

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_1 + (1 - \lambda_n)x_2\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(\lambda_n x_1 + (1 - \lambda_n)x_2) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n f(x_1) + (1 - \lambda_n)f(x_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2). \end{aligned}$$

**习题 3.C.6** 设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上的二阶可微函数,  $f(0) = f(1) = 0$ . 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

**解** 设函数  $g(x) = (1-x)f(x)$ , 则  $g(0) = g(1) = 0$ . 由 Rolle 定理, 存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使得

$$g'(\eta) = -f(\eta) + (1-\eta)f'(\eta) = 0$$

同时  $g'(1) = -f(1) + (1-1)f'(1) = 0$ . 再次应用 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$ , 使得

$$g''(\xi) = -2f'(\xi) + (1-\xi)f''(\xi) = 0.$$

故

$$f''(\xi) = \frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

**习题 3.C.7** 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) = f(b) = 0, f'(a)f'(b) > 0$ . 证明: 在  $(a, b)$  内存在一点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

解 不妨设  $f'(a) > 0, f'(b) > 0$ . 则由

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

知存在  $\delta_1 > 0$ , 使得当  $x \in (a, a + \delta_1)$  时,  $f(x) > 0$ . 同理, 由

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0,$$

知存在  $\delta_2 > 0$ , 使得当  $x \in (b - \delta_2, b)$  时,  $f(x) < 0$ . 令  $\delta = \min \left\{ \delta_1, \delta_2, \frac{b-a}{2} \right\}$ , 则  $f(a + \delta) > 0, f(b - \delta) < 0$ . 由介值定理, 存在  $\xi \in (a + \delta, b - \delta) \subset (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ .

习题 3.C.8 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导,  $f(0) = 1, f(1) = \frac{1}{2}$ . 求证: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

解

(1) 若  $f(x) > 0$  在  $[0, 1]$  上成立, 则设函数  $g(x) = x - \frac{1}{f(x)}$ , 则  $g(0) = -1, g(1) = 1 - 2 = -1$ .

由 Rolle 定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$g'(\xi) = 1 + \frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)} = 0.$$

故

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

(2) 若  $f(x) > 0$  在  $[0, 1]$  上不成立, 考虑  $x_0 := \inf\{x : f(x) = 0\}$ , 则  $f(x_0) = 0$ . 这是因为  $x_0 = \inf\{x : f(x) = 0\} \Rightarrow \exists \{x_n\}, x_n \rightarrow x_0, f(x_n) = 0$ , 由  $f$  的连续性可知  $f(x_0) = 0$ .

此时作以下分类:

(a) 若  $f'(x_0) = 0$ , 则  $f^2(x_0) + f'(x_0) = 0$  成立.

(b) 若  $f'(x_0) > 0$ , 则存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f$  在  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  上单调递增. 又  $f(x_0) = 0$ , 所以当  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  时,  $f(x) < 0$ . 这与  $x_0 = \inf\{x : f(x) = 0\}$  矛盾.

(c) 若  $f'(x_0) < 0$ , 存在  $f(x)$  在  $[x_0, 1]$  上的极小值点  $y_0 : f(y) < 0$ , 则  $f'(y_0) = 0$ . 因此

$$f^2(x_0) + f'(x_0) = f'(x_0) < 0,$$

$$f^2(y_0) + f'(y_0) = f^2(y_0) \geq 0.$$

注 我希望对  $f^2(x) + f'(x)$  这个函数应用介值性, 但是我们只知道  $f(x)$  可导, 且不能直接说  $f(x)$  的连续性, 加  $f'(x)$  的介值性得到  $f^2(x) + f'(x)$  的介值性. 所以只好这么别扭的构造如下的  $h(x)$ .

考虑  $h(x) = e^{\int_0^x f(t) dt} f(x)$ , 则  $h'(x) = e^{f(x)} (f^2(x) + f'(x))$ . 因此  $h'(x_0) < 0, h'(y_0) \geq 0$ .

由 Darboux 定理, 存在  $\xi \in (x_0, y_0) \subset (0, 1)$ , 使得  $h'(\xi) = 0$ , 即

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

**习题 3.C.9** 设函数  $f(x)$  在  $[a, +\infty)$  上二阶可微, 且满足  $f(a) > 0, f'(a) < 0$ , 以及当  $x > a$  时,  $f''(x) \leq 0$ . 试证在区间  $(a, +\infty)$  内, 函数  $f(x)$  恰有一个零点.

**解** 若无零点, 取  $x > a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ , 则由拉格朗日中值定理知, 存在  $\xi \in (a, x)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{-f(a)}{x - a} > f'(a),$$

这与  $f''(x) \leq 0$  矛盾.

若有两个零点, 记为  $x_1 < x_2$ , 则由拉格朗日中值定理知, 存在  $\eta \in (x_1, x_2)$ , 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 > f'(a),$$

这与  $f''(x) \leq 0$  矛盾.

**习题 3.C.10** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f'(x)$  严格单调增. 若  $f(a) = f(b) = \lambda$ , 证明: 对任意  $x \in (a, b)$ , 有  $f(x) < \lambda$ .

**解** 由课本定理 3.28,  $f'(x)$  严格单调增, 故为严格凸函数. 由 Jensen 不等式, 对任意  $x \in (a, b)$ , 有

$$f(x) = f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = \lambda.$$

**习题 3.C.11** 函数  $\frac{\sin x^2}{x} (x > 0)$  表明, 若函数  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上可导, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  存在, 不能保证  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在. 证明: 若已知该极限存在, 则其值必然为零.

**解** 由 L'Hôpital 法则, 已知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  存在, 则  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  存在且等于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ . 又因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  存在, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L}{x} = 0.$$

因此  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

**习题 3.C.12** 设函数  $f(x)$  在  $x > 0$  时二阶可微, 且  $f''(x) < 0, f(0) = 0$ . 证明: 对任意正数  $x_1, x_2$ , 有  $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$ .

**解** 由 Lagrange 中值定理, 存在  $\xi_1 \in (0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_1 + x_2)$ , 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_1 + x_2) - f(x_1)}{x_1}.$$

由题设  $f''(x) < 0$ , 知  $f'(x)$  严格单调减, 且  $\xi_1 < \xi_2$ , 故  $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$ , 即

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} > \frac{f(x_1 + x_2) - f(x_1)}{x_1}.$$

整理即得.

习题 3.C.13 设函数  $f(x)$  在  $x_0$  处存在二阶导数, 求

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

注 不能使用 L'Hôpital 法则, 因为缺定理条件.

解

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) + f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + o(h^2) - 2f(x_0)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x_0)h^2 + o(h^2)}{h^2} = f''(x_0). \end{aligned}$$

习题 3.C.14 证明下列不等式.

- (1) 对任意实数  $x$ ,  $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ ;
- (2) 对  $x > 0$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ ;
- (3) 对  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ,  $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ ;
- (4) 对任意实数  $x, y$ , 有  $2e^{\frac{x+y}{2}} \leq e^x + e^y$ .

解

(1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^\xi}{24}x^4 \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \xi \in (0, x).$$

(2)

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{(1+\xi)^{-3}}{3}x^3 \geq x - \frac{x^2}{2}, \xi \in (0, x), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{(1+\eta)^{-4}}{4}x^4 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \eta \in (0, x). \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos \xi}{24}x^4 \geq x - \frac{x^3}{6}, \xi \in (0, x), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{\sin \eta}{720}x^6 \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \eta \in (0, x). \end{aligned}$$

(4) 由  $e^x$  为凸函数, 以及 Jensen 不等式, 知

$$e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2}.$$

习题 3.C.15 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$ .

解

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{k=1}^n \left( \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} + o\left(\frac{k^2}{n^4}\right) \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2n^4} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{2n^2 + 3n + 1}{12n^3} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
&= e^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

另解 由  $\ln(1+x) < x$ , 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \right) = e^{\frac{1}{2}}.$$

由  $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ , 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n^2}}{1 + \frac{k}{n^2}} \right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left( \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + n} \right) = e^{\frac{1}{2}}.$$

习题 3.C.16 求  $\sqrt[n]{n} (n=1, 2, \dots)$  的最大值.解 设函数  $f(x) = \sqrt[x]{x} = e^{\frac{\ln x}{x}}$ , 则

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

当  $x = e$  时,  $f'(x) = 0$ , 且  $f'(x) > 0$  当  $x \in (0, e)$ ,  $f'(x) < 0$ . 故

$$\sqrt[n]{n} \geq \begin{cases} \sqrt[3]{3}, & n \geq 3, \\ \sqrt{2}, & n = 1, 2. \end{cases}$$

又  $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ , 故  $\sqrt[n]{n}$  的最大值为  $\sqrt[3]{3}$ , 当  $n = 3$  时取到.习题 3.C.17 试给出函数  $x \cos x$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上的一个尽可能小的上界.

解

$$0.5610963381910451$$

习题 3.C.18 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上具有三阶连续导数, 且  $f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$ . 证明: 存在  $\xi \in (-1, 1)$ , 使得  $f'''(\xi) = 3$ .

解 由 Taylor 展开

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2} + \frac{f'''(\xi_1)}{6}, \quad \xi_1 \in (0, 1),$$

$$f(-1) = f(0) - f'(0) + \frac{f''(0)}{2} - \frac{f'''(\xi_2)}{6}, \quad \xi_2 \in (-1, 0).$$

整理得  $f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2) = 6$ . 不妨设  $f'''(\xi_1) \geq 3$ , 则存在  $\xi \in (0, \xi_1) \subset (-1, 1)$ , 使得  $f'''(\xi) = 3$ .

**习题 3.C.19** 设  $a > 1$ , 函数  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  可微. 求证: 存在趋于无穷的正数列  $\{x_n\}$ , 使得

$$f'(x_n) < f(ax_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

**解** 反证法. 若不存在如此数列, 则存在  $M > 0$ , 使得当  $x > M$  时,  $f'(x) \geq f(ax)$ . 由 Lagrange 中值定理, 对任意  $x > M$ , 存在  $\xi \in (x, ax)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(ax) - f(x)}{(a-1)x} \leq \frac{f(ax)}{(a-1)x}.$$

因为在  $(M, +\infty)$  上,  $f'(x) > 0$ , 因此  $f'(\xi) \geq f(a\xi) \geq f(ax)$ , 另一方面取  $x > \frac{1}{a-1}$  有  $f(ax) > \frac{f(ax)}{(a-1)x}$ . 综上, 当  $x > \max\left\{M, \frac{1}{a-1}\right\}$  时,  $f'(\xi) < f(ax)$ , 矛盾.

**习题 3.C.20** 利用凸函数的性质证明 Hölder (赫尔德) 不等式: 设  $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, n$  是正数,  $p, q$  是大于 1 的正数, 且  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 则有

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(提示: 考虑函数  $f(x) = x^p$ .)

**解** 由题设知  $f(x) = x^p$  为凸函数, 由 Jensen 不等式, 对任意正数  $c_i$ , 有

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n c_i x_i}{\sum_{i=1}^n c_i}\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n c_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n c_i}.$$

取  $c_i = b_i^q, x_i = \frac{a_i}{b_i}$ , 则

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sum_{i=1}^n b_i^q}\right)^p \leq \frac{\sum_{i=1}^n b_i^q \left(\frac{a_i}{b_i}\right)^p}{\sum_{i=1}^n b_i^q} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p b_i^{q-p}}{\sum_{i=1}^n b_i^q}.$$

整理得

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p b_i^{q-p} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

因为  $q-p = \frac{q}{p}$ , 所以

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

## 第 4 章 不定积分

### 习题 4.1

习题 4.1.1 求下列不定积分:

(1)  $\int x(x-1)^3 dx;$

(2)  $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx;$

(3)  $\int (2^x + 3^x)^2 dx;$

(4)  $\int \tan^2 x dx;$

(5)  $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$

(6)  $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx.$

解

(1)

$$\begin{aligned}\int x(x-1)^3 dx &= \int (x-1)^4 + (x-1)^3 dx \\&= \frac{(x-1)^5}{5} + \frac{(x-1)^4}{4} + C \\&= \frac{1}{20}(x-1)^4(4x+1) + C \\&= \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx &= \int \frac{(e^x + 1)(e^{2x} - e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int e^{2x} - e^x + 1 dx \\&= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int (2^x + 3^x)^2 dx &= \int 2^{2x} + 2 \cdot 2^x 3^x + 3^{2x} dx \\&= \frac{1}{2 \ln 2} 2^{2x} + \frac{2}{\ln 6} 6^x + \frac{1}{2 \ln 3} 3^{2x} + C\end{aligned}$$

(4)

$$\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \tan x - x + C$$

(5)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = x - \arctan x + C$$

(6)

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx &= \int \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sec^2 x dx \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \tan x + C\end{aligned}$$

习题 4.1.2 用第一代换法求下列不定积分:

(1)  $\int (2x - 1)^{100} dx;$

(2)  $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx;$

(3)  $\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx;$

(4)  $\int \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx;$

(5)  $\int x \sqrt{1 - x^2} dx;$

(6)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx;$

(7)  $\int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1 + x^2} dx;$

(8)  $\int \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} dx;$

(9)  $\int \sin^2 x dx;$

(10)  $\int \sin^5 x \cos x dx.$

解

(1)

$$\int (2x - 1)^{100} dx = \int (2x - 1)^{100} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 dx = \int (2x - 1)^{100} \cdot \frac{1}{2} d(2x - 1) = \frac{(2x - 1)^{101}}{202} + C.$$

(2)

$$\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx = \int \sin \frac{1}{x} \cdot (-1) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx = \int \sin \frac{1}{x} \cdot (-1) d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos \frac{1}{x} + C.$$

(3)

$$\int \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{1 + \sin x + \cos x} = \ln |1 + \sin x + \cos x| + C.$$

(4)

$$\int \frac{\arctan x}{1 + x^2} dx = \int \arctan x d \arctan x = \frac{1}{2} \arctan^2 x + C.$$

(5)

$$\int x \sqrt{1 - x^2} dx = \int \sqrt{1 - x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2x) dx = \int \sqrt{1 - x^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) d(1 - x^2) = \frac{1}{3} (1 - x^2)^{3/2} + C.$$

(6)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} dx = \int \frac{1}{1+x} \cdot 2 \cdot d\sqrt{x} = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$$

(7)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx &= \int \arctan \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot (-x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \int \arctan \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} d\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{2} \arctan^2 \frac{1}{x} + C. \\
\int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx &= \int \frac{\operatorname{arccot} x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arccot} x \cdot (-1) \cdot d(\operatorname{arccot} x) \\
&= -\frac{1}{2} \operatorname{arccot}^2 x + C.
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} dx &= \int \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot x dx \\
&= \int \frac{1+\ln x}{1+x \ln x} \cdot \frac{1}{x} d(x \ln x) \\
&= \int \frac{1}{u} du = \ln |1+x \ln x| + C.
\end{aligned}$$

(9)

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x + C.$$

(10)

$$\int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

**习题 4.1.3** 用第二代换法求下列不定积分, 其中的  $a$  均为正常数:

$$(1) \int \sqrt{e^x - 2} dx;$$

$$(2) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx;$$

$$(3) \int \frac{1}{(x^2 - a^2)^{3/2}} dx;$$

$$(4) \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx;$$

$$(5) \int \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} dx;$$

$$(6) \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx;$$

$$(7) \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx;$$

$$(8) \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} dx;$$

$$(9) \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx;$$

$$(10) \int \frac{x^{1/7} + x^{1/2}}{x^{8/7} + x^{1/14}} dx;$$

$$(11) \int \frac{x-1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx;$$

$$(12) \int \frac{1}{x^8(1+x^2)} dx.$$

解

(1)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x - 2} dx &\stackrel{x=\ln(t^2+2)}{=} \int \sqrt{t^2} \cdot \frac{2t}{t^2+2} dt \stackrel{t \geq 0}{=} \int \frac{2t^2}{t^2+2} dt = \int \left( 2 - \frac{4}{t^2+2} \right) dt \\ &= 2t - 2\sqrt{2} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C \stackrel{t=\sqrt{e^x-2}}{=} 2\sqrt{e^x-2} - 2\sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{e^x-2}}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

(2) 令  $t^2 = x^2 + a^2$ , 则  $t = \sqrt{x^2 + a^2} > 0$ , 对  $t^2 = x^2 + a^2$  两侧同时取微分, 有

$$t dt = x dx,$$

因此

$$\begin{aligned} \int t dx &= \frac{1}{2} \int (t dx + x dt) + \frac{1}{2} \int (t dx - x dt) \\ &= \frac{1}{2} \left( xt + a^2 \int \frac{dx}{t} \right) \end{aligned}$$

其中,

$$\frac{dx}{t} = \frac{dt}{x} = \frac{d(x+t)}{x+t} \Rightarrow \int \frac{dx}{t} = \int \frac{d(x+t)}{x+t} = \ln|x+t| + C.$$

整理一下就是,

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \int t dx = \frac{1}{2} (xt + a^2 \ln|x+t| + C) = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C.$$

**注** 当然这道题有更简单的计算方式, 但是我们仿照以上过程可以得到一个快速计算式:

$$\int p dq = \frac{1}{2} \left( pq + c^2 \int \frac{dq}{p} \right), \quad \int \frac{dq}{p} = \begin{cases} \ln|p+q| + C, & p^2 - q^2 = c^2; \\ \arctan \frac{q}{p} + C, & p^2 + q^2 = c^2; \end{cases}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &\stackrel{x=a \tan t}{=} \int a \sec t \cdot a \sec^2 t dt = a^2 \int \sec^3 t dt = \frac{a^2}{2} (\sec t \tan t + \ln|\sec t + \tan t|) + C \\ &\stackrel{\tan t = \frac{x}{a}, \sec t = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}}{=} \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &\stackrel{x=a \sinh t}{=} \int a \cosh t \cdot a \cosh t dt = a^2 \int \cosh^2 t dt = \frac{a^2}{2} (\sinh t \cosh t + t) + C \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsinh} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

**注**  $\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

(3)

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2 - a^2)^{3/2}} dx &\stackrel{x=a \sec t}{=} \int \frac{a \sec t \tan t}{(a^2 \tan^2 t)^{3/2}} dt = \frac{1}{a^2} \int \csc t \cot t dt = -\frac{1}{a^2} \csc t + C \\ &\stackrel{\csc t = \frac{\sec t}{\sqrt{\sec^2 t - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}}{=} -\frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 - a^2}} + C. \end{aligned}$$

(4)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \stackrel{x=a \sin t}{=} \int \frac{a^2 \sin^2 t}{a \cos t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int \sin^2 t dt = a^2 \left( \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t \right) + C$$

$$\stackrel{\sin t = \frac{x}{a}, \cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}}{=} \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

(4) 记  $p = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $q = x$ , 则

$$\begin{aligned} \int \frac{q^2}{p} dq &= -\frac{1}{2} \left( \int p dq + q dp \right) + \frac{1}{2} \int \frac{p^2 + q^2}{p} dq \\ &= -\frac{1}{2} pq + \frac{a^2}{2} \int \frac{dq}{p} = -\frac{1}{2} pq + \frac{a^2}{2} \arctan \frac{q}{p} + C. \\ &= -\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C. \end{aligned}$$

(5)

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}} dx \stackrel{t=\sqrt{x+1}}{=} \int \frac{2t}{1+t} dt = \int \left( 2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = 2t - 2 \ln |1+t| + C$$

$$\stackrel{t=\sqrt{x+1}}{=} 2\sqrt{x+1} - 2 \ln |1 + \sqrt{x+1}| + C.$$

(6)

$$\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx = \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \ln x + \left( \sqrt{1+x^2} - 1 \right)$$

(6)

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^{3/2}} dx &= \int \ln x d \left( -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \\ &= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(\ln x) \\ &= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} + \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx \end{aligned}$$

对于  $I_1 = \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$ , 令  $t = 1/x$ , 则  $dx = -1/t^2 dt$ .

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{(1/t)\sqrt{1+1/t^2}} d \left( -\frac{1}{t^2} \right) = \int \frac{t}{\sqrt{(t^2+1)/t^2}} \left( -\frac{1}{t^2} \right) dt \\ &= -\int \frac{t^2}{t^2 \sqrt{t^2+1}} dt = -\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= -\ln |t + \sqrt{t^2+1}| + C = -\ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right| + C \\ &= -\ln \left| \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

所以, 原式  $= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x} \right| + C.$

(7) 令  $t = \frac{\ln x}{x}$ , 则  $dt = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} dx = \frac{1 - \ln x}{x^2} dx$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx &= \int \frac{1 - \ln x}{x^2(1 - \frac{\ln x}{x})^2} dx = \int \frac{1}{(1 - t)^2} dt \\ &= \frac{1}{1 - t} + C = \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} + C = \frac{x}{x - \ln x} + C. \end{aligned}$$

(8) 令  $x = a \tan t$ ,  $dx = a \sec^2 t dt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} dx &= \int \frac{a \sec^2 t}{(a \tan t)^2 \sqrt{a^2 \tan^2 t + a^2}} dt \\ &= \int \frac{a \sec^2 t}{a^2 \tan^2 t \cdot a \sec t} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{\sec t}{\tan^2 t} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{1/\cos t}{\sin^2 t / \cos^2 t} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt \\ &= \frac{1}{a^2} \int \cot t \csc t dt = -\frac{1}{a^2} \csc t + C \\ &\stackrel{\tan t = x/a}{=} -\frac{1}{a^2} \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

(9) 令  $t = \sqrt[3]{2x+1}$ , 则  $t^3 = 2x+1$ ,  $x = \frac{t^3-1}{2}$ ,  $dx = \frac{3t^2}{2} dt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx &= \int \frac{\frac{t^3-1}{2} + 2}{t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt = \int \frac{t^3+3}{2t} \cdot \frac{3t^2}{2} dt \\ &= \frac{3}{4} \int (t^3+3)t dt = \frac{3}{4} \int (t^4+3t) dt \\ &= \frac{3}{4} \left( \frac{t^5}{5} + \frac{3t^2}{2} \right) + C = \frac{3}{20} t^5 + \frac{9}{8} t^2 + C \\ &= \frac{3}{20} (2x+1)^{5/3} + \frac{9}{8} (2x+1)^{2/3} + C. \end{aligned}$$

(10) 令  $t = x^{1/14}$ , 则  $x = t^{14}$ ,  $dx = 14t^{13} dt$ ,  $u = t^5 = x^{5/14}$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{1/7} + x^{1/2}}{x^{8/7} + x^{1/14}} dx &= \int \frac{t^2 + t^7}{t^{16} + t} \cdot 14t^{13} dt = 14 \int \frac{t^{14}}{t^{10} - t^5 + 1} dt \\ &= \frac{14}{5} \int \left( 1 + \frac{u - \frac{1}{2}}{(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{\frac{1}{2}}{(u - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \right) du \\ &= \frac{14}{5} \left( u + \frac{1}{2} \ln |u^2 - u + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2u-1}{\sqrt{3}} \right) + C \\ &= \frac{14}{5} \left( x^{\frac{5}{14}} + \frac{1}{2} \ln |x^{\frac{10}{14}} - x^{\frac{5}{14}} + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^{\frac{5}{14}} - 1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx &= \int \frac{x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \int \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} dx - \int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \end{aligned}$$

对于  $I_1 = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$ , 令  $x = \sec t$ ,  $dx = \sec t \tan t dt$ .

$$I_1 = \int \frac{\sec t \tan t}{\sec t \tan t} dt = t + C_1 = \operatorname{arcsec} x + C_1.$$

对于  $I_2 = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} dx$ , 令  $x = \sec t$ ,  $dx = \sec t \tan t dt$ .

$$I_2 = \int \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t} dt = \int \cos t dt = \sin t + C_2$$

$$\stackrel{\sec t=x}{=} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C_2.$$

$$\text{原式} = I_1 - I_2 = \operatorname{arcsec} x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

(12) 令  $t = 1/x$ ,  $x = 1/t$ ,  $dx = -1/t^2 dt$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^8(1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{(1/t)^8(1+1/t^2)} d\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \int \frac{t^8}{(t^2+1)/t^2} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= -\int \frac{t^8}{t^2+1} dt = -\int \frac{t^8-1+1}{t^2+1} dt \\ &= -\int \frac{(t^4-1)(t^4+1)}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= -\int (t^2-1)(t^4+1) dt - \arctan t + C \\ &= -\int (t^6-t^4+t^2-1) dt - \arctan t + C \\ &= -\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t\right) - \arctan t + C \\ &= -\frac{1}{7x^7} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan(1/x) + C. \end{aligned}$$

**习题 4.1.4** 求下列不定积分:

(1)  $\int |x| dx;$

(2)  $\int \max\{1, x^2\} dx.$

解

(1)

$$\int |x| dx = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C, & x \geq 0; \\ -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < 0. \end{cases}$$

(2)

$$\int \max\{1, x^2\} dx = \begin{cases} x - 1 + C, & |x| \leq 1; \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

**习题 4.1.5** 用分部积分法求下列不定积分:

(1)  $\int x \sin x dx;$

(2)  $\int x^2 \ln x dx;$

(3)  $\int \cos(\ln x) dx;$

(4)  $\int x^2 \cos 5x dx;$

(5)  $\int \sec^3 x dx;$

(6)  $\int x^2 e^x dx;$

(7)  $\int x \arcsin x dx;$

(8)  $\int x (\arctan x)^2 dx;$

(9)  $\int (\arcsin x)^2 dx;$

(10)  $\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx.$

解

(1)

$$\int x \sin x dx = \int x d(-\cos x) = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

(2)

$$\int x^2 \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C.$$

(3)

$$\begin{aligned} I &= \int \cos(\ln x) dx = x \cos(\ln x) - \int x d(\cos(\ln x)) \\ &= x \cos(\ln x) - \int x \cdot (-\sin(\ln x)) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx \\ &= x \cos(\ln x) + \left( x \sin(\ln x) - \int x d(\sin(\ln x)) \right) \\ &= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int x \cdot \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - I \end{aligned}$$

移项得  $2I = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C_1,$ 

$$\Rightarrow I = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos 5x \, dx &= \int x^2 \, d\left(\frac{1}{5} \sin 5x\right) \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \int \frac{1}{5} \sin 5x \, d(x^2) \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \frac{2}{5} \int x \sin 5x \, dx \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \frac{2}{5} \int x \, d\left(-\frac{1}{5} \cos 5x\right) \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x - \frac{2}{5} \left[-\frac{1}{5} x \cos 5x + \int \frac{1}{5} \cos 5x \, dx\right] \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x + \frac{2}{25} x \cos 5x - \frac{2}{25} \int \cos 5x \, dx \\
&= \frac{1}{5} x^2 \sin 5x + \frac{2}{25} x \cos 5x - \frac{2}{125} \sin 5x + C
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
I &= \int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx = \int \sec x \, d(\tan x) \\
&= \sec x \tan x - \int \tan x \, d(\sec x) \\
&= \sec x \tan x - \int \tan x (\sec x \tan x) \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - I + \ln |\sec x + \tan x|
\end{aligned}$$

移项得  $2I = \sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x| + C_1$ ,

$$\implies I = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C$$

(6)

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x \, dx &= \int x^2 \, d(e^x) \\
&= x^2 e^x - \int e^x \, d(x^2) = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx \\
&= x^2 e^x - 2 \int x \, d(e^x) \\
&= x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int e^x \, dx \right) \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
\int x \arcsin x \, dx &= \int \arcsin x \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{x^2}{2} d(\arcsin x) \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{-(1-x^2)+1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x \right) - \frac{1}{2} \arcsin x + C \\
&= \frac{2x^2-1}{4} \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
\int x(\arctan x)^2 \, dx &= \int (\arctan x)^2 \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{2} d((\arctan x)^2) \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2 \arctan x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} \arctan x \, dx \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \int \arctan x \, dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - \left( x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx \right) + \int \arctan x \, d(\arctan x) \\
&= \frac{x^2}{2} (\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C \\
&= \frac{x^2+1}{2} (\arctan x)^2 - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
\int (\arcsin x)^2 dx &= x(\arcsin x)^2 - \int x d((\arcsin x)^2) \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int x \cdot 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int \arcsin x \left( \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int \arcsin x d(-2\sqrt{1-x^2}) \\
&= x(\arcsin x)^2 - \left[ -2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int -2\sqrt{1-x^2} d(\arcsin x) \right] \\
&= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int 2\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C
\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}
\int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx &= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int x d(\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) \\
&= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \\
&= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int (x^2 + 1)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} d(x^2 + 1) \\
&= x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C
\end{aligned}$$

习题 4.1.6 导出下列不定积分的递推公式:

$$(1) \int \sin^n x dx \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (2) \int x^n e^x dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

解

(1) 记  $I_n = \int \sin^n x dx$ , 则

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx = \int \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n
\end{aligned}$$

移项得  $nI_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I_{n-2} + C$ ,

$$\implies I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2} + C.$$

(2) 记  $J_n = \int x^n e^x dx$ , 则

$$\begin{aligned} J_n &= \int x^n d(e^x) = x^n e^x - \int e^x d(x^n) \\ &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n J_{n-1} \end{aligned}$$

习题 4.1.7 求下列不定积分:

(1)  $\int \frac{1}{1+e^x} dx;$

(2)  $\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1} dx;$

(3)  $\int \frac{1}{x^4+x^6} dx;$

(4)  $\int x\sqrt{x-2} dx;$

(5)  $\int \frac{\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1}}{x} dx;$

(6)  $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-2}} dx;$

(7)  $\int xe^x \sin x dx;$

(8)  $\int \frac{1}{(1+\tan x) \sin^2 x} dx;$

(9)  $\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx;$

(10)  $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x^2} dx;$

(11)  $\int \frac{x \arctan x}{(1+x^2)^3} dx;$

(12)  $\int \frac{x}{1+\sin x} dx;$

(13)  $\int \arcsin \sqrt{x} dx;$

(14)  $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} dx;$

(15)  $\int x \sin^2 x dx;$

(16)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx;$

(17)  $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx;$

(18)  $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx;$

(19)  $\int e^{2x} (1+\tan x)^2 dx;$

(20)  $\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx;$

(21)  $\int \frac{\cos x \cos 2x}{\cos 3x} dx;$

(22)  $\int \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} dx;$

(23)  $\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx;$

(24)  $\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx;$

(25)  $\int e^{-x^2/2} \frac{\cos x - 2x \sin x}{2\sqrt{\sin x}} dx;$

(26)  $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx.$

解

(1) 令  $u = e^x$ , 则  $dx = \frac{du}{u}$ .

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+u} \cdot \frac{1}{u} du = \int \left( \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du$$

$$= \ln |u| - \ln |u+1| + C$$

$$= \ln(e^x) - \ln(1+e^x) + C = x - \ln(1+e^x) + C.$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx &= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{(x + \frac{1}{x})^2 - 1} dx\end{aligned}$$

令  $u = x + \frac{1}{x}$ , 则  $du = (1 - \frac{1}{x^2})dx$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2 - 1} du &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u - 1}{u + 1} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + \frac{1}{x} - 1}{x + \frac{1}{x} + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right| + C.\end{aligned}$$

(3) 令  $t = \frac{1}{x}$ , 则  $x = \frac{1}{t}$ ,  $dx = -\frac{1}{t^2}dt$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4(1+x^2)} dx &= \int \frac{1}{(\frac{1}{t})^4(1+\frac{1}{t^2})} d\left(-\frac{1}{t^2}\right) \\ &= \int \frac{t^4}{\frac{t^2+1}{t^2}} \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int \frac{t^4}{t^2+1} dt \\ &= -\int \frac{(t^4-1)+1}{t^2+1} dt = -\int \left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right) dt \\ &= -\left(\frac{t^3}{3} - t + \arctan t\right) + C \\ &= -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + C.\end{aligned}$$

(4) 令  $t = \sqrt{x-2}$ , 则  $t^2 = x-2$ ,  $x = t^2+2$ ,  $dx = 2tdt$ .

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-2}dx &= \int (t^2+2) \cdot t \cdot (2tdt) = 2 \int (t^4+2t^2)dt \\ &= 2\left(\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3}\right) + C = \frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

(5) 令  $t = \sqrt{x-1}$ , 则  $t^2 = x-1$ ,  $x = t^2+1$ ,  $dx = 2tdt$ .

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{t \arctan t}{t^2+1} (2tdt) = 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} \arctan t dt \\ &= 2 \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1} \arctan t dt \\ &= 2 \int \arctan t dt - 2 \int \frac{\arctan t}{1+t^2} dt \\ &= 2t \arctan t - \ln(1+t^2) - (\arctan t)^2 + C \\ &= 2\sqrt{x-1} \arctan \sqrt{x-1} - \ln x - (\arctan \sqrt{x-1})^2 + C.\end{aligned}$$

(6) 令  $u = e^x - 2$ , 则  $u + 2 = e^x$ , 于是  $x = \ln(u + 2)$ . 同时,  $du = e^x dx$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 2}} dx &= \int \frac{\ln(u + 2)}{\sqrt{u}} du \\ &= \int \ln(u + 2) \cdot u^{-\frac{1}{2}} du\end{aligned}$$

接下来使用分部积分法:

$$\begin{aligned}\int \ln(u + 2) u^{-\frac{1}{2}} du &= 2\sqrt{u} \ln(u + 2) - \int \frac{1}{u + 2} \cdot 2\sqrt{u} du \\ &= 2\sqrt{u} \ln(u + 2) - 2 \int \frac{\sqrt{u}}{u + 2} du\end{aligned}$$

对于  $I_2 = \int \frac{\sqrt{u}}{u + 2} du$ , 令  $t = \sqrt{u}$ , 则  $u = t^2$ ,  $du = 2t dt$ .

$$\begin{aligned}I_2 &= \int \frac{t}{t^2 + 2} \cdot (2t dt) = \int \frac{2t^2}{t^2 + 2} dt \\ &= \int \frac{2(t^2 + 2) - 4}{t^2 + 2} dt \\ &= \int \left( 2 - \frac{4}{t^2 + 2} \right) dt \\ &= 2t - 4 \int \frac{1}{t^2 + (\sqrt{2})^2} dt \\ &= 2t - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C_1 \\ &= 2\sqrt{u} - 2\sqrt{2} \arctan \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}} \right) + C_1\end{aligned}$$

将  $I_2$  代回原式:

$$\begin{aligned}I &= 2\sqrt{u} \ln(u + 2) - 2 \left[ 2\sqrt{u} - 2\sqrt{2} \arctan \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}} \right) \right] + C \\ &= 2\sqrt{u} \ln(u + 2) - 4\sqrt{u} + 4\sqrt{2} \arctan \left( \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}} \right) + C\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}I &= 2\sqrt{e^x - 2} \ln(e^x - 2 + 2) - 4\sqrt{e^x - 2} + 4\sqrt{2} \arctan \left( \frac{\sqrt{e^x - 2}}{\sqrt{2}} \right) + C \\ &= 2x\sqrt{e^x - 2} - 4\sqrt{e^x - 2} + 4\sqrt{2} \arctan \left( \sqrt{\frac{e^x - 2}{2}} \right) + C.\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
I &= \int (x \sin x) d(e^x) \\
&= xe^x \sin x - \int e^x (x \cos x + \sin x) dx \\
&= xe^x \sin x - \int xe^x \cos x dx - \int e^x \sin x dx \\
&= xe^x \sin x - \int (x \cos x) d(e^x) - \int \sin x d(e^x) \\
&= xe^x \sin x - \left[ xe^x \cos x - \int e^x (\cos x - x \sin x) dx \right] - \left[ e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \right] \\
&= (x-1)e^x \sin x - xe^x \cos x + 2 \int e^x \cos x dx - \int xe^x \sin x dx \\
&= (x-1)e^x \sin x - xe^x \cos x + 2 \int e^x \cos x dx - I
\end{aligned}$$

已知  $\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C'$ .

$$2I = (x-1)e^x \sin x - xe^x \cos x + e^x(\sin x + \cos x) + C_1$$

$$2I = e^x(x \sin x - x \cos x + \cos x) + C_1$$

$$I = \frac{e^x}{2}(x(\sin x - \cos x) + \cos x) + C.$$

(8) 令  $u = 1 + \cot x$ , 则  $du = -\csc^2 x dx$ .

$$\begin{aligned}
\int \frac{\csc^2 x}{1 + \tan x} dx &= \int \frac{\csc^2 x}{1 + \frac{1}{\cot x}} dx = \int \frac{\cot x \csc^2 x}{\cot x + 1} dx \\
&= \int \frac{u-1}{u} (-du) = \int \left( -1 + \frac{1}{u} \right) du \\
&= -u + \ln |u| + C = -(1 + \cot x) + \ln |1 + \cot x| + C.
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} dx + \int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx
\end{aligned}$$

其中

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int \sqrt{x} d(-\sqrt{1-x}) = -\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}-1} \right) + C_1,$$

因此

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx = -(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x} + 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}-1} \right) + C.$$

或者

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} dx = -(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x} + \arcsin \sqrt{x} + C.$$

(10) 令  $x = \sec t$ ,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{x^2} dx &= \int \sqrt{\frac{\sec t - 1}{\sec t + 1}} \cdot \cos^2 t \cdot \sec t \tan t dt = \int 1 - \cos t dt \\ &= t - \sin t + C = \operatorname{arcsec} x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C \\ &= \arctan \sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C. \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} - \int -\frac{1}{4(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^3} dx. \text{ 令 } x = \tan t, dx = \sec^2 t dt.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{(\sec^2 t)^3} \sec^2 t dt = \int \cos^4 t dt = \int \left( \frac{1+\cos 2t}{2} \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{4} \int (1+2\cos 2t+\cos^2 2t) dt = \frac{1}{4} \int \left( 1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{3}{2}t + \sin 2t + \frac{1}{8}\sin 4t \right) + C_1 \\ &= \frac{3}{8} \arctan x + \frac{1}{4} \left( \frac{2x}{1+x^2} \right) + \frac{1}{32} \left( \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \right) + C_1 \\ I &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4} \left[ \frac{3}{8} \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{x(1-x^2)}{8(1+x^2)^2} \right] + C \\ &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{x(3x^2+5)}{32(1+x^2)^2} + \frac{3}{32} \arctan x + C \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x} dx = \int \frac{x-x\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int x \sec^2 x dx - \int x \sec x \tan x dx \end{aligned}$$

$$I_1 = \int x d(\tan x) = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x - \ln |\sec x| + C_1. \quad I_2 = \int x d(\sec x) =$$

$$x \sec x - \int \sec x dx = x \sec x - \ln |\sec x + \tan x| + C_2.$$

$$\begin{aligned} I &= I_1 - I_2 = (x \tan x - \ln |\sec x|) - (x \sec x - \ln |\sec x + \tan x|) + C \\ &= x(\tan x - \sec x) + \ln \left| \frac{\sec x + \tan x}{\sec x} \right| + C \\ &= x \left( \frac{\sin x - 1}{\cos x} \right) + \ln |1 + \sin x| + C. \end{aligned}$$

(13) 令  $t = \sqrt{x}$ , 则  $x = t^2$ ,  $dx = 2t dt$ .

$$\begin{aligned} I &= \int \arcsin t \cdot (2t dt) = 2 \int t \arcsin t dt \\ &= 2 \left[ \frac{t^2}{2} \arcsin t - \int \frac{t^2}{2\sqrt{1-t^2}} dt \right] \\ &= t^2 \arcsin t - \int \frac{-(1-t^2)+1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= t^2 \arcsin t + \int \sqrt{1-t^2} dt - \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= t^2 \arcsin t + \left( \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t \right) - \arcsin t + C \\ &= \left( t^2 - \frac{1}{2} \right) \arcsin t + \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + C \\ &= \frac{2x-1}{2} \arcsin \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt{x(1-x)} + C. \end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{1+\cos x} dx + \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx \\ I_1 &= \int \frac{x}{2\cos^2(\frac{x}{2})} dx = \frac{1}{2} \int x \sec^2(\frac{x}{2}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[ x(2\tan(\frac{x}{2})) - \int 2\tan(\frac{x}{2}) dx \right] \\ &= x \tan(\frac{x}{2}) - \int \tan(\frac{x}{2}) dx = x \tan(\frac{x}{2}) - 2 \ln |\sec(\frac{x}{2})| + C_1. \end{aligned}$$

$$I_2 = \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx. \text{ 令 } u = 1 + \cos x, du = -\sin x dx.$$

$$I_2 = \int \frac{1}{u} (-du) = -\ln |u| + C_2 = -\ln(1 + \cos x) + C_2.$$

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = x \tan(\frac{x}{2}) - 2 \ln |\sec(\frac{x}{2})| - \ln(2 \cos^2(\frac{x}{2})) + C_3 \\ &= x \tan(\frac{x}{2}) - 2 \ln |\sec(\frac{x}{2})| - \ln 2 - 2 \ln |\cos(\frac{x}{2})| + C_3 = x \tan(\frac{x}{2}) + C. \end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}
I &= \int x \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx \\
I_1 &= \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}. \\
I_2 &= \frac{1}{2} \int x d \left( \frac{1}{2} \sin 2x \right) = \frac{1}{4} \left[ x \sin 2x - \int \sin 2x dx \right] \\
&= \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{2} \cos 2x \right) + C' = \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C'. \\
I &= I_1 - I_2 = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.
\end{aligned}$$

(16) 令  $u = 1 + x^2$ , 则  $x^2 = u - 1, du = 2x dx$ .

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 \cdot x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} d \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \int (u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}}) du \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right] + C \\
&= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C.
\end{aligned}$$

(17)

$$\begin{aligned}
I &= \arctan x \left( -\frac{1}{x} - \arctan x \right) - \int \left( -\frac{1}{x} - \arctan x \right) \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= -\frac{\arctan x}{x} - (\arctan x)^2 + \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx + \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\
I_1 &= \int \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1. \quad I_2 = \int \arctan x d(\arctan x) = \\
&\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C_2. \\
I &= -\frac{\arctan x}{x} - (\arctan x)^2 + \left( \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) + \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C \\
&= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.
\end{aligned}$$

(18) 令  $u = e^x, du = e^x dx$ .

$$\begin{aligned}
\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx &= \int \frac{\arctan u}{u^2} du = \int \arctan u d \left( -\frac{1}{u} \right) \\
&= -\frac{\arctan u}{u} + \int \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1+u^2} du \\
&= -\frac{\arctan u}{u} + \ln \left| \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \right| + C \\
&= -\frac{\arctan e^x}{e^x} + \ln \left| \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right| + C.
\end{aligned}$$

(19)

$$\begin{aligned}
I &= \int e^{2x}(1 + 2 \tan x + \tan^2 x) dx \\
&= \int e^{2x}(\sec^2 x + 2 \tan x) dx \\
&= \int e^{2x} \sec^2 x dx + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= \int e^{2x} d(\tan x) + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= \left[ e^{2x} \tan x - \int \tan x d(e^{2x}) \right] + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= e^{2x} \tan x - \int \tan x \cdot (2e^{2x}) dx + \int 2e^{2x} \tan x dx \\
&= e^{2x} \tan x + C.
\end{aligned}$$

(20)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x \sin x + \cos x)^2} dx &= \int \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx \\
&= \int \frac{x}{\cos x} d\left(-\frac{1}{x \sin x + \cos x}\right) \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} - \int \left(-\frac{1}{x \sin x + \cos x}\right) d\left(\frac{x}{\cos x}\right) \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{x \sin x + \cos x} \left(\frac{\cos x + x \sin x}{\cos^2 x}\right) dx \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \int \frac{1}{\cos^2 x} dx \\
&= -\frac{x}{\cos x(x \sin x + \cos x)} + \tan x + C \\
&= \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x + \cos x} + C.
\end{aligned}$$

(21)

$$\begin{aligned}
\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx &= \frac{1}{2} \int \cos^2 2x + \cos 2x \cos 4x dx \\
&= \frac{1}{4} \int 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x dx \\
&= \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} \sin 2x + \frac{1}{16} \sin 4x + \frac{1}{24} \sin 6x + C.
\end{aligned}$$

(22)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2} dx \\
&= \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{(x+1) - (x-1)} dx = \frac{1}{2} \int (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + C \\
&= \frac{1}{3} (x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + C.
\end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{t+1}} \cdot 2t dt \quad (t = \sqrt{x}, dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx) \\
&= \frac{4}{3} (t-2)\sqrt{t+1} + C \\
&= \frac{4}{3} (\sqrt{x}-2)\sqrt{\sqrt{x}+1} + C.
\end{aligned}$$

(24)

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}} d(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3} (-2) \sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}} + C = -\frac{4}{3} \sqrt{1-x\sqrt{x}} + C.$$

(25)

$$\begin{aligned}
\int e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\cos x - 2x \sin x}{2\sqrt{\sin x}} dx &= \int \frac{\cos x - 2x \sin x}{(-x) \cdot 2\sqrt{\sin x}} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) \\
&= - \int \frac{\cos x}{2x\sqrt{\sin x}} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) + \left( \frac{2x \sin x}{2x\sqrt{\sin x}} e^{-\frac{x^2}{2}} - \int e^{-\frac{x^2}{2}} d\left(\frac{\sin x}{\sqrt{\sin x}}\right) \right) \\
&= - \int \frac{\cos x}{2x\sqrt{\sin x}} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) + e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{\sin x} - \int e^{-\frac{x^2}{2}} d(\sqrt{\sin x}) \\
&= e^{-\frac{x^2}{2}} \sqrt{\sin x}
\end{aligned}$$

(26)

$$\begin{aligned}
\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx &= -\frac{xe^x}{1+x} - \int \left( -\frac{1}{1+x} \right) e^x (1+x) dx \\
&= -\frac{xe^x}{1+x} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{1+x} + e^x + C \\
&= e^x \left( 1 - \frac{x}{1+x} \right) + C = \frac{e^x}{1+x} + C.
\end{aligned}$$

## 习题 4.2

我没招了,这一节实在不想写过程了,算法在教材上都有,算就是了.

习题 4.2.1 求下列有理函数的不定积分:

$$(1) \int \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$$

$$(2) \int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$

$$(3) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - x} dx$$

$$(4) \int \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + x)} dx$$

$$(5) \int \frac{x}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)} dx$$

$$(6) \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx$$

$$(7) \int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1} dx$$

$$(8) \int \frac{x^{15}}{(x^8 + 1)^2} dx$$

解

(1)

$$\frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

(2)

$$\frac{x^3}{3} - x + \arctan x + C.$$

(3)

$$x + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$$

(4)

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C.$$

(5)

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

(6)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left( \arctan(\sqrt{2}x + 1) - \arctan(1 - \sqrt{2}x) \right) + C.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x - x^{-1}}{\sqrt{2}} + C.$$

(7)

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}x^2 + 1}{x^4 + \sqrt{2}x^2 + 1} \right| + C.$$

(8)

$$\frac{1}{8} \left( \frac{1}{x^8 + 1} + \ln |x^8 + 1| \right) + C.$$

习题 4.2.2 求下列三角函数有理式的不定积分, 其中  $a, b$  是常数:

$$(1) \int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$$

$$(2) \int \frac{\sin^5 x}{\cos x} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} dx$$

$$(4) \int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$(5) \int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$$

$$(6) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$$

$$(7) \int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$(8) \int \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} dx$$

$$(9) \int \frac{1}{2 \sin x + \sin 2x} dx$$

$$(10) \int \frac{\cos x}{a \sin x + b \cos x} dx, a^2 + b^2 \neq 0.$$

解

(1)

$$\frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{2}} + \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

(2)

$$-\ln |\cos x| - \frac{1}{4} \sin^4 x + \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$$

(3)

$$\tan x - 2 \cot x - \frac{1}{3} \cot^3 x + C.$$

(4)

$$\frac{1}{8} (-\sin 2x + 2 \cos 2x) + 2 \ln |\sin x + \cos x| + C.$$

(5)

$$\frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x) + C.$$

(6)

$$x - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \tan x)$$

(7)

$$\frac{1}{2} \left( \sin x - \cos x + \operatorname{arctanh} \left( \frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{2}} \right) \right) + C.$$

$$\frac{\tan \frac{x}{2} - 1}{\tan^2 \frac{x}{2} + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}}{\tan \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}} \right| + C.$$

(8)

$$\frac{-3 \cos 2x + \cos 6x}{6 \cos^3 x \sin^3 x} + C.$$

(9)

$$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\cos x + 1} + \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| \right) + C.$$

$$\frac{1}{4} \left( \frac{1}{\cos x + 1} + \ln \left| \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right| \right) + C.$$

(10)

$$\frac{a \ln |a \sin x + b \cos x| + bx}{a^2 + b^2} + C.$$

## 第 5 章 单变量函数的积分

### 习题 5.1

习题 5.1.1 指出下面的哪些函数在区间  $[0, 1]$  上可积, 并说明理由.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$$
$$(3) f(x) = \begin{cases} \left[ \frac{1}{x} \right], & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

解

- (1) 函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 故可积.
- (2) 函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上有界, 且只有一点间断, 故可积.
- (3) 函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上无界, 故不可积.

习题 5.1.2 证明: Dirichlet 函数在任意区间  $[a, b]$  上不可积. (因此有界的函数未必可积.)

解 设  $f(x)$  是 Dirichlet 函数, 即

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

取区间  $[a, b]$  上的任意一个分点集  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , 则对每一个子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 由于  $\mathbb{Q}$  和  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  在  $\mathbb{R}$  上稠密, 故在该子区间内既有有理数也有无理数.

- 当  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  为有理数时,  $f(\xi_i) = 1$ ;

$$S_n(T) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = b - a;$$

- 当  $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$  为无理数时,  $f(\eta_i) = 0$ ;

$$S_n(T) = \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

因此, 不同的取样点所对应的 Riemann 和可以取到不同的值, 即不存在  $I$ , 使得  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(T) = I$ .

习题 5.1.3 举例说明, 一个函数的绝对值函数在  $[a, b]$  上可积, 不能保证该函数在  $[a, b]$  上可积. (提示: 适当地修改 Dirichlet 函数可得出这样的例子. 比较习题 2.1 中第 5 题.)

解 设函数  $f(x)$  如下定义:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

则  $|f(x)| = 1$  在区间  $[a, b]$  上连续, 故  $|f(x)|$  在区间  $[a, b]$  上可积. 但

$$S_n(T) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \begin{cases} b-a, & \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \cap \mathbb{Q} \\ -(b-a), & \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

即证明了  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上不可积.

#### 习题 5.1.4

- (1) 设可积函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上非负, 且在一点  $c$  处连续 (这里  $a \leq c \leq b$ ), 若  $f(c) > 0$ , 则  $\int_a^b f(x) dx > 0$ ;
- (2) 证明: 若  $f$  是区间  $[a, b]$  上非负连续函数, 且不恒为零, 则  $\int_a^b f(x) dx > 0$ ;
- (3) 举例说明, 有这样的可积函数  $f$ , 在区间  $[a, b]$  上非负且不恒为零, 但  $f$  在该区间上的积分为 0.

解

- (1) 由  $f(c) > 0$  和  $f(x)$  在  $c$  处连续, 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - c| < \delta$  时, 有  $f(x) > \frac{f(c)}{2} > 0$ . 取区间  $[c - \delta, c + \delta] \cap [a, b]$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) dx \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2} dx = f(c)\delta > 0.$$

- (2) 由  $f$  在  $[a, b]$  上不恒为零, 存在  $c \in [a, b]$ , 使得  $f(c) > 0$ . 由 (1) 可知  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .
- (3) 函数  $f(x)$  定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ -1 & \frac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases}$$

则  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上非负且不恒为零, 但

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} 1 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (-1) dx = 0.$$

习题 5.1.5 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递增, 证明:

$$(b-a)f(a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(b).$$

若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递减, 应该有什么样的不等式?

解

$$f \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f(b) dx = (b-a)f(b).$$

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b f(a) dx = (b-a)f(a).$$

若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调递减, 则

$$(b-a)f(b) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(a).$$

**习题 5.1.6** 证明下列不等式:

- (1)  $\int_0^{2\pi} |a \sin x + b \cos x| dx \leq 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$  ( $a, b$  为常数);  
 (2)  $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$  ( $m > 0, n > 0$  均为常数).

**解**

(1)

$$\int_0^{2\pi} |a \sin x + b \cos x| dx \leq \int_0^{2\pi} \sqrt{(a^2 + b^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dx = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(2) 对  $f(x) = x^m (1-x)^n$  求导:

$$f'(x) = mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1} = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m(1-x) - nx].$$

令  $f'(x) = 0$ , 得到  $m(1-x) = nx$ , 即  $x = \frac{m}{m+n}$ .

在这点处,  $f\left(\frac{m}{m+n}\right) = \left(\frac{m}{m+n}\right)^m \left(\frac{n}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$

由于  $f(0) = f(1) = 0$ , 且  $f(x) \geq 0$  在  $[0, 1]$  上, 所以  $\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$  是  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最大值.

因此

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx \leq \int_0^1 \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} dx = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

**习题 5.1.7**

(1) 证明: 积分中值定理中的  $\xi$  值, 可取在区间  $[a, b]$  内部;

(提示: 由该定理的证明可见, 只要指出当  $f$  的最大值  $M$  或最小值  $m$  在区间端点取得, 且等于  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  时, 结论成立.)

(2) 举例说明, 积分中值定理中连续性的条件是必需的.

(提示: 在  $[-1, 1]$  上,  $f(x) = x$  的积分为 0; 而改变  $f(x)$  在某个点处的值, 不改变积分值.)

**解**

(1) 反证法: 若积分中值定理仅在边界, 不妨设为点  $a$  处取到, 则  $\int_a^b f(x) dx = f(a)(b-a) \neq f(\xi)(b-a), \forall \xi \in (a, b).$

不妨假设  $f(x) > f(a) \Rightarrow f(x) - f(a) > 0$ , 则由习题 5.1.4 可得

$$\int_a^b (f(x) - f(a)) dx > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx > \int_a^b f(a) dx = (b-a)f(a),$$

矛盾.

(2) 函数  $f(x)$  定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a \leq x \leq \frac{a+b}{2} \\ -1 & \frac{a+b}{2} < x \leq b \end{cases}$$

则  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上非负且不恒为零, 但

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} 1 dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (-1) dx = 0.$$

**习题 5.1.8** 设  $f(x)$  是区间  $[a, b]$  上的连续函数. 证明: 若  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  中至少有一个零点. (因此, 由函数的积分这一整体信息, 能够推断函数值的某些性质.)

**解** 反证法: 若  $f(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ , 则  $f(x)$  在  $(a, b)$  上恒为正或恒为负. 不妨设  $f(x) > 0, \forall x \in (a, b)$ .

由习题 5.1.4 可得

$$\int_a^b f(x) dx > 0,$$

这与题设  $\int_a^b f(x) dx = 0$  矛盾.

### 习题 5.1.9

(1) 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 而  $g(x)$  在  $[a, b]$  上可积且非负 (或非正) 的, 证明:

存在  $\xi \in [a, b]$ , 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

(提示: 与积分中值定理类似地证明.)

**注** (1) 中的结果也称为积分中值定理的加权推广. 这种加权的积分中值定理也提供了估计积分的一个手段: 当  $\int_a^b \varphi(x)dx$  不易计算时, 可试着将  $\varphi(x)$  写成  $f(x)g(x)$ , 其中  $f(x)$

和  $g(x)$  满足上面 (1) 中的条件, 且使得  $\int_a^b g(x)dx$  易于计算. 由此导出

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx,$$

这里  $M, m$  分别是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的最大值及最小值. 易见,  $\int_a^b \varphi(x)dx$  这一上、下界估计, 优于直接用定理 5.11 所得的结果.

(2) 举例说明, (1) 中对于函数  $g(x)$  的假设是必需的. (提示: 在  $[-1, 1]$  上, 取  $f(x) = g(x) = x$ .)

**解**

(1) 在证明积分中值定理前我们先证明一个引理:

**引理 5.1** 设  $f \in R[a, b]$ , 且  $I = \int_a^b f(x) dx > 0$ , 则有子区间  $[c, d] \subset [a, b]$  和  $\mu > 0$ , 使在区间  $[c, d]$  上成立  $f(x) \geq \mu$ .

**证明** 证 1

从积分定义可知, 存在  $[a, b]$  的一个分划  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , 使得对从属于  $P$  的任何介点集  $\xi$ , 成立

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i > \frac{I}{2} > 0.$$

记  $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 并对于上面的和式取下确界, 就得到

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \geq \frac{I}{2} > 0.$$

显然在和式中至少有一项大于 0. 设这一项是第  $k$  项, 则就可取  $\mu = m_k$ ,  $[c, d] = [x_{k-1}, x_k]$ .

**证明** 证 2

用反证法. 若结论不成立, 则 (由对偶法则) 对于每个  $\mu > 0$  和每个子区间  $[c, d]$ , 存在  $\xi \in [c, d]$ , 满足  $f(\xi) < \mu$ . 在  $f$  的 Riemann 和式中对于任何分划都取满足这个要求的介点集, 这样就得到

$$\int_a^b f(x) dx \leq \mu(b-a).$$

由于  $\mu > 0$  是任意的, 因此只能得到

$$\int_a^b f(x) dx \leq 0,$$

与条件矛盾.

这里加强, 证明  $\xi \in (a, b)$ .

**证明** 下列三种情况是平凡的, 不需要多加讨论:

(a) 如果积分  $\int_a^b g(x) dx = 0$ , 则积分第一中值定理可以通过不等式左边也等于 0, 于是  $\xi$  可取, 结论已成立.

(b) 如果  $f$  在  $[a, b]$  的最小值和最大值相等, 即  $m = M$ , 则  $f$  为常值函数, 因此  $\xi$  也可取.

(c) 如果  $m < M$ , 且  $\eta \in (m, M)$  时, 连续函数的介值性可知存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = \eta$ .

要讨论的只是以上三种情况之外的问题. 不妨设  $g$  在区间  $[a, b]$  上非负, 且有  $\int_a^b g(x) dx > 0$ . 又由于  $f(x) - m$  和  $g(x)$  在  $[a, b]$  上均非负, 因此得到

$$0 = \int_a^b (f(x) - m)g(x) dx \geq \int_c^d (f(x) - m) dx > 0,$$

可以上式右边的积分仍等于 0. 由于  $f \in C[c, d]$ , 这只能导致在区间  $[c, d]$  上成立  $f(x) \equiv$

$m$ .

因此在  $c, d \in (a, b)$  中任取一点作为中值点即可.

(2) 设  $f(x) = x, g(x) = x$ , 则

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

但对于任意  $\xi \in [-1, 1]$ , 有

$$f(\xi) \int_{-1}^1 g(x)dx = \xi \int_{-1}^1 x dx = 0.$$

因此不存在  $\xi \in [-1, 1]$ , 使得

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_{-1}^1 g(x)dx.$$

**习题 5.1.10** 举例说明: 在定理 5.13 中, 函数  $f(x)$  在  $x = c$  处连续, 不是  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$  在  $x = c$  处可导的必要条件.

**解** 设函数  $f(x)$  如下定义:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则  $f(x)$  在  $x = 0$  处连续, 但

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = 0,$$

故  $F(x)$  在  $x = 0$  处可导, 且  $F'(0) = 0$ .

**习题 5.1.11** 求下列函数的导数.

$$(1) f(x) = \int_0^x \sin t^2 dt;$$

$$(2) f(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2+\cos^2 t} dt;$$

$$(3) f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt;$$

$$(4) f(x) = \sin \left( \int_0^x \sin \left( \int_0^y \sin t^2 dt \right) dy \right).$$

**解**

(1)

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin t^2 dt = \sin x^2.$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2+\cos^2 t} dt = \frac{d}{d\left(\frac{1}{x}\right)} \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2+\cos^2 t} dt \cdot \frac{d\frac{1}{x}}{dx} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1+x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt = \frac{d}{d(x^2)} \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt \cdot \frac{d(x^2)}{dx} \\ &= e^{-(x^2)^2} \cdot 2x = 2xe^{-x^4}. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \sin \left( \int_0^x \sin \left( \int_0^y \sin t^2 dt \right) dy \right) \\ &= \cos \left( \int_0^x \sin \left( \int_0^y \sin t^2 dt \right) dy \right) \cdot \frac{d}{dx} \left( \int_0^x \sin \left( \int_0^y \sin t^2 dt \right) dy \right) \\ &= \cos \left( \int_0^x \sin \left( \int_0^y \sin t^2 dt \right) dy \right) \cdot \sin \left( \int_0^x \sin t^2 dt \right). \end{aligned}$$

**习题 5.1.12** 对下面的函数, 求  $(f^{-1})'(0)$ , 这里  $f^{-1}$  表示函数  $f$  的反函数.

$$(1) f(x) = \int_0^x (1 + \sin(\sin t)) dt; \quad (2) f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt.$$

解

(1) 设  $y = f(x)$ ,

$$dy = f'(x) dx = (1 + \sin(\sin x)) dx.$$

因此

$$(f^{-1})'(0) = \frac{dx}{dy} \Big|_{y=0} = \frac{1}{1 + \sin(\sin x)} \Big|_{x=0} = 1.$$

(2) 设  $y = f(x)$ ,

$$dy = f'(x) dx = e^{-x^2} dx.$$

因此

$$(f^{-1})'(0) = \frac{dx}{dy} \Big|_{y=0} = e^{x^2} \Big|_{x=1} = e.$$

**习题 5.1.13** 设函数  $f(x)$  处处连续.  $F(x) = \int_0^x xf(t)dt$ , 求  $F'(x)$ .

解

$$F'(x) = \left( x \int_0^x f(t) dt \right)' = \int_0^x f(t) dt + x \cdot \left( \int_0^x f(t) dt \right)' = \int_0^x f(t) dt + xf(x).$$

**习题 5.1.14** 设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上为正值连续函数. 证明: 当  $x > 0$  时, 函数

$$G(x) = \frac{\int_0^x tf(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$$

单调递增.

解

$$G'(x) = \frac{(\int_0^x tf(t)dt)' \int_0^x f(t)dt - (\int_0^x f(t)dt)' \int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2}.$$

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{(\int_0^x tf(t)dt)' \int_0^x f(t)dt - (\int_0^x f(t)dt)' \int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2} \\ &= \frac{xf(x) \int_0^x f(t)dt - f(x) \int_0^x tf(t)dt}{(\int_0^x f(t)dt)^2} \\ &= \frac{f(x)}{(\int_0^x f(t)dt)^2} \int_0^x (x-t)f(t)dt \geq 0. \end{aligned}$$

习题 5.1.15 用 Newton-Leibniz 公式计算下列积分.

(1)  $\int_0^x \sin x dx;$

(2)  $\int_0^x x^\alpha dx, \alpha \text{ 为常数}, \alpha > 0;$

(3)  $\int_1^{e^2} \ln x dx;$

(4)  $\int_2^3 \frac{1}{2x^2 + 3x - 2} dx.$

解

(1)

$$\int_0^x \sin x dx = -\cos x \Big|_0^x = 1 - \cos x.$$

(2)

$$\int_0^x x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \Big|_0^x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

(3)

$$\int_1^{e^2} \ln x dx = x \ln x - x \Big|_1^{e^2} = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

(4)

$$\int_2^3 \frac{1}{2x^2 + 3x - 2} dx = \int_2^3 \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+2} \right) dx = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{2} \ln |2x-1| - \frac{1}{2} \ln |x+2| \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}.$$

习题 5.1.16 设  $f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1, \end{cases}$  求  $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ , 并研究  $F(x)$  在  $[-1, 1]$  上的

可微性.

解

• 当  $x \in [-1, 0)$  时,

$$F(x) = \int_{-1}^x -1 dt = -x - 1;$$

- 当  $x = 0$  时,

$$F(0) = \int_{-1}^0 -1 dt = -0 - 1 = -1;$$

- 当  $x \in (0, 1]$  时,

$$F(x) = \int_{-1}^0 -1 dt + \int_0^x 1 dt = -0 - 1 + x - 0 = x - 1.$$

即

$$F(x) = \begin{cases} -x - 1, & -1 \leq x < 0, \\ -1, & x = 0, \\ x - 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

显然,  $F(x)$  在  $(-1, 0)$  和  $(0, 1)$  上可微, 且

$$F'(x) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

考察  $x = 0$  处的可微性:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h - 1 - 0}{h} = -1; \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h - 1 - 0}{h} = 1. \end{aligned}$$

因此  $F(x)$  在  $x = 0$  处不可微.

**习题 5.1.17** 计算下面平面图形的面积.

- (1) 由曲线  $y = \sqrt{x}$  与  $y = x^2$  所围成的图形;
- (2) 由曲线  $y = x^2$ ,  $y = \frac{1}{4}x^2$  及  $y = 1$  所围成的图形.

解

- (1) 曲线  $y = \sqrt{x}$  与  $y = x^2$  的交点为  $(0, 0)$  和  $(1, 1)$ .

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left( \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

- (2) 曲线  $y = x^2$  与  $y = 1$  的交点为  $(-1, 1)$  和  $(1, 1)$ ; 曲线  $y = \frac{1}{4}x^2$  与  $y = 1$  的交点为  $(-2, 1)$  和  $(2, 1)$ .

$$S = \int_{-2}^{-1} \left( 1 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx + \int_{-1}^1 \left( x^2 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx + \int_1^2 \left( 1 - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \frac{4}{3}.$$

**习题 5.1.18** 求下列极限.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^3 x} \int_0^{\tan x} \arcsin t^2 dt;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right);$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}, p \text{ 是常数}, p > 0.$$

解

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^3 dt}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{4x^3} = \frac{1}{4}.$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^3 x} \int_0^{\tan x} \arcsin t^2 dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\tan x} \arcsin t^2 dt}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(\tan x)^2 \sec^2 x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin(\tan x)^2)}{3x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x)^2}{3x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^4 x} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 - (n-1)^2}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left( \frac{k}{n} \right)^p \\ &= \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

习题 5.1.19 求下列极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-nx^2} dx, \text{ 这里 } a, b \text{ 为常数, 且 } 0 < a < b;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx;$$

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x} dx$ , 这里  $a$  为常数, 且  $a > 0$ .

(注意: 对于 (2) 若用积分中值定理, 则积分为  $\frac{\xi^n}{1+\xi}$ , 其中  $0 < \xi < 1$ ; 但这时  $\xi$  与  $n$  有关, 故在  $n \rightarrow \infty$  时, 不能断言  $\xi^n \rightarrow 0$ .)

解

(1)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b e^{-nx^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{n} \cdot ne^{-nx^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{2n} e^{-nx^2} \Big|_a^b \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n \cdot \frac{1}{1+x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{1}{(n+1)(x+1)} dx^{n+1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)} \Big|_0^1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(1+1)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2} dx \end{aligned}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)(1+1)} = 0,$$

且

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \rightarrow 0,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$$

(3)

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+a} \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+a} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln x \Big|_n^{n+a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+a}{n} = 0.$$

**习题 5.1.20** 设函数  $f(x)$  在区间  $[-a, a]$  上连续. 证明:

(1) 若  $f(x)$  是奇函数, 则  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ ;

(2) 若  $f(x)$  是偶函数, 则  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

(本题在几何上看是十分明显的.)

解

(1) 由于  $f(x)$  是奇函数, 则对任意的  $x \in [-a, a]$ , 有  $f(-x) = -f(x)$ . 因此

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= -\int_a^0 f(-t)dt \Big|_{t=-x} + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a -f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 0.\end{aligned}$$

(2) 由于  $f(x)$  是偶函数, 则对任意的  $x \in [-a, a]$ , 有  $f(-x) = f(x)$ . 因此

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= -\int_a^0 f(-t)dt \Big|_{t=-x} + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.\end{aligned}$$

**习题 5.1.21** 设  $f(x)$  为具有周期  $T$  的连续函数, 证明: 对任意的常数  $a$ , 有

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

(提示: 证明  $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ , 这在几何上是显然的.)

**解** 由于  $f(x)$  为具有周期  $T$  的连续函数, 则对任意的  $x \in \mathbb{R}$ , 有  $f(x+T) = f(x)$ . 因此

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(x)dx &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx \\ &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(t+T)dt \Big|_{t=x-T} \\ &= \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(t)dt \\ &= \int_0^T f(x)dx.\end{aligned}$$

**习题 5.1.22** 计算下面的积分.

(1)  $\int_0^{2\pi} |\cos x|dx;$

(2)  $\int_{-3}^4 [x]dx;$

(3)  $\int_{-1}^1 \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx;$

(4)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx;$

(5)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx;$

(6)  $\int_0^1 x \arcsin x dx;$

(7)  $\int_0^1 x^3 e^x dx;$

(8)  $\int_0^a \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dx;$

(9)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} dx;$

(10)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx \quad (a > 0, b > 0);$

(11)  $\int_{-1}^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx;$

(12)  $\int_0^{2\pi} \sin^6 x dx;$

$$(13) \int_{-1}^1 e^{|x|} \arctan e^x dx;$$

$$(14) \int_0^\pi \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx.$$

解

(1)

$$\int_0^{2\pi} |\cos x| dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 4.$$

(2)

$$\int_{-3}^4 [x] dx = \sum_{k=-3}^3 \int_k^{k+1} k dx = \sum_{k=-3}^3 k = 0.$$

(3)

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \ln \frac{1-x}{1+x} = -\ln \frac{1+x}{1-x}.$$

因此被积函数为奇函数, 故

$$\int_{-1}^1 \cos x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = 0.$$

(4)

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^{-t}} \cos^3(-t)(-dt) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^t}{1+e^t} \cos^3 t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+e^x} \cos^3 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{\sin x - \sin^3 x/3}{1} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx &\stackrel{x=\ln t, dx=\frac{1}{t} dt}{=} \int_1^2 \sqrt{1-\frac{1}{t^2}} \cdot \frac{1}{t} dt \stackrel{t=\sec u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos^2 u} \cdot \frac{1}{\sec u} \cdot \sec u \tan u du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin u \tan u du \stackrel{\sin u=v}{=} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{v^2}{1-v^2} dv = \left( -v + \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v} \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

(6)

$$\int_0^1 x \arcsin x dx = \frac{1}{4} \left( x\sqrt{1-x^2} + (2x^2-1) \arcsin x \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

(7)

$$\int_0^1 x^3 e^x dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \Big|_0^1 = 6 - 2e.$$

(8)

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{x + \sqrt{a^2 - x^2}} dx &\stackrel{x=a \sin t, dx=a \cos t dt}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a \cos t}{a \sin t + a \cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}(\sin t + \cos t) + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)}{\sin t + \cos t} dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \ln(\sin t + \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x} dx &\stackrel{\tan x=t^2, dx=\frac{2t}{1+t^4} dt}{=} \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^4} dt = \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} \right) \Big|_0^{1-} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(3 - 2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx &\stackrel{t=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 \tan^2 x + b^2 \cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2 t^2 + b^2} dt \\ &= \frac{1}{ab} \arctan \left( \frac{at}{b} \right) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2ab} \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx &\stackrel{x=\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt \\ &= \pi \left( \frac{4!!}{3!!} \right) \left( \frac{3!!}{4!!} - \frac{5!!}{6!!} \right) = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^6 x dx &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx \\ &= 4 \cdot \frac{5!!}{6!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{5}{8} \pi \end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 e^{|x|} \arctan e^x dx &= \int_0^1 e^x \arctan e^x dx - \int_{-1}^0 e^{-x} \arctan e^x dx \\
&\stackrel{e^x=t}{=} \int_1^e \arctan t dt + \int_1^e \arctan \frac{1}{t} dt \\
&= \int_1^e \left( \arctan t + \arctan \frac{1}{t} \right) dt \\
&= \int_1^e \frac{\pi}{2} dt \\
&= \frac{\pi}{2}(e-1)
\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} dx &\stackrel{u=\tan x}{=} \int_0^1 \frac{1}{2 + u^2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

**习题 5.1.23** 设  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 证明:

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx,$$

并用这一结果计算  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ .

**解** 设  $I = \int_0^\pi x f(\sin x) dx$ , 则

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) dt \stackrel{\sin(\pi-t)=\sin t}{=} \int_0^\pi (\pi - t) f(\sin t) dt \\
&= \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - \int_0^\pi t f(\sin t) dt = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt - I.
\end{aligned}$$

因此

$$2I = \pi \int_0^\pi f(\sin t) dt,$$

即

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin t) dt.$$

由此, 可得

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} (-\arctan(\cos x)) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}.$$

**习题 5.1.24** 证明:  $\frac{1}{6} < \int_0^1 \sin x^2 dx < \frac{1}{3}$ . (注意: 求解问题中的积分将是徒劳的. 解答本题的一个方法在本节的正文中已提到.)

解 由于在区间  $[0, 1]$  上, 对任意的  $x$ , 有

$$x^2 - \frac{x^6}{6} < \sin x^2 < x^2,$$

故

$$\int_0^1 \left( x^2 - \frac{x^6}{6} \right) dx < \int_0^1 \sin x^2 dx < \int_0^1 x^2 dx,$$

即

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{42} < \int_0^1 \sin x^2 dx < \frac{1}{3},$$

从而得到

$$\frac{1}{6} < \int_0^1 \sin x^2 dx < \frac{1}{3}.$$

**习题 5.1.25** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 我们将  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  定义为函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上的平均值. 对下列函数, 计算在指定区间上的平均值, 以及最大、最小值.

- (1)  $f(x) = x$ , 区间  $[0, 1]$  及  $[0, 10^5]$ ;
- (2)  $f(x) = e^{-x}$ , 区间  $[0, 1]$  及  $[0, 10^5]$ ;
- (3)  $f(x) = xe^{-x}$ , 区间  $[0, 1]$  及  $[0, 10^5]$ .

解

- (1) (a) 区间  $[0, 1]$  上, 平均值为

$$\frac{1}{1-0} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2};$$

最大值为 1; 最小值为 0.

- (b) 区间  $[0, 10^5]$  上, 平均值为

$$\frac{1}{10^5 - 0} \int_0^{10^5} x dx = \frac{10^5}{2};$$

最大值为  $10^5$ ; 最小值为 0.

- (2) (a) 区间  $[0, 1]$  上, 平均值为

$$\frac{1}{1-0} \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e};$$

最大值为 1; 最小值为  $\frac{1}{e}$ .

- (b) 区间  $[0, 10^5]$  上, 平均值为

$$\frac{1}{10^5 - 0} \int_0^{10^5} e^{-x} dx = \frac{1 - e^{-10^5}}{10^5};$$

最大值为 1; 最小值为  $e^{-10^5}$ .

(3) (a) 区间  $[0, 1]$  上, 平均值为

$$\frac{1}{1-0} \int_0^1 x e^{-x} dx = \frac{2}{e};$$

最大值为  $\frac{1}{e}$ ; 最小值为 0.

(b) 区间  $[0, 10^5]$  上, 平均值为

$$\frac{1}{10^5 - 0} \int_0^{10^5} x e^{-x} dx = \frac{1 - (10^5 + 1)e^{-10^5}}{10^5};$$

最大值为  $\frac{1}{e}$ ; 最小值为 0.

**习题 5.1.26** 考虑积分  $I = \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx$ .

(1) 试给出  $I$  的尽可能好的上、下界估计;

(2) 求出  $I$  的近似值, 精确到 0.0001. (提醒: 本题用本节中的知识就能解决.)

解

(1)

**习题 5.2.27**

(1) 设  $f(x)$  是  $[0, 1]$  上单调递减的连续函数, 证明: 对任意  $\alpha \in (0, 1)$ , 有

$$\int_0^\alpha f(x) dx \geq \alpha \int_0^1 f(x) dx;$$

(2) 若仅仅设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递减, 证明同样的结论.

(提示: (1) 有几种证法. 第一种方法: 利用  $\int_0^\alpha f(x) dx = \alpha \int_0^1 f(\alpha x) dx$ ; 第二种方法: 考虑  $g(\alpha) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha f(x) dx$  ( $0 < \alpha < 1$ ), 证明  $g(\alpha)$  是减函数. 注意, 这两种方法都需要  $f(x)$  连续这一假设, 因此都不适用于解决 (2).)

解

解

(1)

$$\int_0^\alpha f(x) dx = \alpha \int_0^1 f(\alpha x) dx \geq \alpha \int_0^1 f(x) dx.$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha f(x) dx - \alpha \int_0^1 f(x) dx &= (1-\alpha) \int_0^\alpha f(x) dx - \alpha \int_\alpha^1 f(x) dx \\ &\geq (1-\alpha)\alpha f(\alpha) - \alpha(1-\alpha)f(\alpha) = 0 \end{aligned}$$

**习题 5.2.28** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可微, 且  $|f'(x)| \leq M$  (对任意  $x \in [a, b]$ ).

(1) 若  $f(a) = 0$ , 证明:

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{M}{2} (b-a)^2;$$

(2) 若  $f(a) = f(b) = 0$ , 证明:

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \frac{M}{4}(b-a)^2.$$

(提示: 通过对积分的上限求导能得出 (1) 的一个证明, 即考虑函数  $G(t) = \int_a^t |f(x)| dx - \frac{M}{2}(t-a)^2, a \leq t \leq b$ .)

解

(1) 由 Lagrange 中值定理,  $|f(x)| = |f(x) - f(a)| = |f'(\xi)|(x-a) \leq M(x-a)$ , 则对它取积分:

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b M(x-a) dx = \frac{M}{2}(b-a)^2$$

(2) 对于  $x \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ ,

$$|f(x)| = |f(x) - f(a)| \leq M(x-a);$$

对于  $x \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ ,

$$|f(x)| = |f(x) - f(b)| \leq M(b-x).$$

则

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)| dx \\ &\leq \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x) dx \\ &= \frac{M}{4}(b-a)^2 \end{aligned}$$

**习题 5.2.29** 利用变换  $u = \sin x$ , 将下列积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}}$$

变为椭圆积分的形式.

解 由  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2u^2$ , 则

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\cos 2x}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-2u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-2u^2)}}.$$

**习题 5.2.30** 利用

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt = \int_a^x f'(t) d(t-x)$$

经过多次分部积分, 详细推导出 Taylor 展开式和它的余项的积分表示式.

解 由题意, 我们有

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) d(t-x).$$

对积分部分进行分部积分, 令  $u = f'(t)$ ,  $dv = d(t-x)$ , 则  $du = f''(t)dt$ ,  $v = t-x$ . 因此,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(t)(t-x)|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f''(t)(t-x)dt \\ &= f(a) + f'(x)(x-x) - f'(a)(a-x) - \int_a^x f''(t)(t-x)dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)dt. \end{aligned}$$

重复上述过程, 对  $\int_a^x f''(t)(x-t)dt$  进行分部积分, 令  $u = f''(t)$ ,  $dv = (x-t)dt$ , 则  $du = f'''(t)dt$ ,  $v = \frac{(x-t)^2}{2}$ . 因此,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}dt. \end{aligned}$$

重复上述过程  $n$  次, 我们得到

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

这就是 Taylor 展开式, 其中积分余项为

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

**习题 5.2.31** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 令

$$g(x, y) = \int_0^x (f(t+y) - f(t))dt,$$

求证:  $g(x, y) = g(y, x)$ .

**解**

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_0^x (f(t+y) - f(t))dt = \left( \int_y^{x+y} - \int_0^x \right) f(t)dt = \left( \int_0^{x+y} - \int_0^y - \int_0^x \right) f(t)dt \\ g(y, x) &= \int_0^y (f(t+x) - f(t))dt = \left( \int_x^{x+y} - \int_0^y \right) f(t)dt = \left( \int_0^{x+y} - \int_0^x - \int_0^y \right) f(t)dt \end{aligned}$$

因此,  $g(x, y) = g(y, x)$ .

## 习题 5.2

习题 5.2.1 求区间  $[0, 1]$  上 Dirichlet 函数的上积分和下积分.

解 设  $f(x)$  是区间  $[0, 1]$  上的 Dirichlet 函数. 对任意分划  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , 因为每个子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上既有有理数也有无理数, 所以

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 1, \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) = 0.$$

因此

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 1,$$

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \inf_P U(f, P) = 1, \\ \int_0^1 f(x) dx &= \sup_P L(f, P) = 0. \end{aligned}$$

习题 5.2.2 试给出 Darboux 上和与下的几何解释.

解 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上有界. 对任意分划  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , 记

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

则 Darboux 上和与下可以分别表示为

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i.$$

几何上,  $U(f, P)$  表示由各子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的最大值  $M_i$  所构成的矩形条形图的面积之和; 而  $L(f, P)$  则表示由各子区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上的最小值  $m_i$  所构成的矩形条形图的面积之和.

习题 5.2.3 证明: 如果函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积, 则  $|f(x)|$  在区间  $[a, b]$  上也可积, 而且有

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

解 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积. 对任意分划  $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , 记

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad \omega_i = M_i - m_i, \\ M'_i &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)|, \quad m'_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x)|, \quad \omega'_i = M'_i - m'_i. \end{aligned}$$

因为  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积, 所以  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$ . 又因为

$$\omega'_i = M'_i - m'_i \leq |M_i| + |m_i| \leq |M_i - m_i| = \omega_i,$$

所以  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega'_i \Delta x_i = 0$ . 因此  $|f(x)|$  在区间  $[a, b]$  上可积.

对  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  两边同时积分, 得

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

即

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

**习题 5.2.4** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积, 且  $f(x) \geq c > 0$ . 求证:  $\frac{1}{f(x)}$  在区间  $[a, b]$  上也可积.

**解** 设  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积, 且  $f(x) \geq c > 0$ . 对任意分划  $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , 记

$$\begin{aligned} M_i &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), & m_i &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), & \omega_i &= M_i - m_i, \\ M'_i &= \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{f(x)}, & m'_i &= \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \frac{1}{f(x)}, & \omega'_i &= M'_i - m'_i. \end{aligned}$$

因为  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上可积, 所以  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = 0$ . 又因为

$$\omega'_i = M'_i - m'_i = \frac{1}{m_i} - \frac{1}{M_i} = \frac{M_i - m_i}{M_i m_i} = \frac{\omega_i}{M_i m_i} \leq \frac{\omega_i}{c^2},$$

所以  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega'_i \Delta x_i = 0$ . 因此  $\frac{1}{f(x)}$  在区间  $[a, b]$  上可积.

## 习题 5.3

习题 5.3.1 求下列曲线弧的弧长.

(1) 抛物线  $y = x^2$  在  $x = -a$  到  $x = a$  之间的弧;(2) 星形线  $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi, a > 0 \text{ 为常数});$ (3) Archimedes 螺线  $r = a\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ .

解

(1) 假设  $a > 0$ , 则

$$\begin{aligned}
 l &= 2 \int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \\
 &= 2 \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2} dx \\
 &= 2 \left( \frac{1}{2} x \sqrt{4x^2 + 1} + \frac{1}{4} \log (\sqrt{4x^2 + 1} + 2x) \right) \Big|_0^a \\
 &= a \sqrt{1 + 4a^2} + \frac{1}{2} \log (\sqrt{1 + 4a^2} + 2a)
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
 &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3 \cos^2 t \sin t)^2 + (3 \sin^2 t \cos t)^2} dt \\
 &= \frac{3}{2} a \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt \\
 &= 6a
 \end{aligned}$$

(3) 假设  $a > 0$ , 则

$$\begin{aligned}
 l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\theta) + r'(\theta)^2} d\theta \\
 &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta \\
 &= a \left( \frac{1}{2} \theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \frac{1}{2} \log (\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) \right) \Big|_0^{2\pi} \\
 &= \frac{1}{2} a \left( 2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \log (2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \right)
 \end{aligned}$$

习题 5.3.2 计算下面的曲线所围成的平面图形的面积.

(1) 双纽线  $r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}], a \text{ 为正常数});$

$$(2) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ 及 } x \text{ 轴};$$

$$(3) y = e^x, y = e^{-x} \text{ 及 } x = 1.$$

解

(1)

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{8};$$

(2)

$$S = \int_0^{2\pi} |y'(t)| |dx(t)| = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 dt = \pi;$$

(3)

$$S = \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx = e + \frac{1}{e} - 2.$$

习题 5.3.3 计算下列旋转体的体积.

(1)  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 与  $x$  轴围成的图形分别绕  $x$  轴及  $y$  轴旋转一周;(2)  $y = e^{x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 与  $y$  轴围成的图形绕  $y$  轴旋转一周;

$$(3) \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \text{ 与 } x \text{ 轴围成的图形绕 } x \text{ 轴旋转一周}.$$

解

(1)

$$V_x = \int_0^\pi \pi y^2 dx = \frac{1}{2} \pi^2$$

$$V_y = \int_0^\pi 2\pi x \sin x dx = 2\pi^2;$$

(2)

$$V_y = \int_0^1 2\pi x \cdot e^{x^2} dx = \pi(e - 1);$$

(3)

$$V_x = \int_0^{2\pi} \pi y^2(t) dx(t) = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2$$

习题 5.3.4 求证: 以  $R$  为半径, 高为  $h$  的球缺的体积为  $\pi h^2 \left( R - \frac{h}{3} \right)$ .

解

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^h \pi(R^2 - (R - y)^2) dy \\
 &= \pi \int_0^h (2Ry - y^2) dy \\
 &= \pi \left( Rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)
 \end{aligned}$$

习题 5.3.5 求下列曲线绕旋转一周后所得立体的侧面积.

(1)  $x^2 + y^2 = r^2$  绕  $x$  轴, 其中常数  $r > 0$ ;(2)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  绕  $y$  轴, 这里  $a > b > 0$ ;(3)  $y = a \cosh x$  ( $0 \leq x \leq a$ ) 绕  $x$  轴;(4)  $r = a(1 + \cos \theta)$  绕极轴,  $a > 0$ .

解

(1) 设  $x = r \cos t, y = r \sin t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ), 则

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^\pi 2\pi y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \\
 &= \int_0^\pi 2\pi r \sin t \cdot r dt \\
 &= 4\pi r^2
 \end{aligned}$$

(2)

$$S = \int_{-b}^b 2\pi x(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy = \int_{-b}^b 2\pi a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{\sqrt{b^2 - y^2}} dy = \frac{4\pi a^2 b}{b} = 4\pi ab;$$

(3)

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^a 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx \\
 &= 2\pi \int_0^a a \cosh x \sqrt{1 + a^2 \sinh^2 x} dx \\
 &= 2\pi \int_0^a \sqrt{1 + a^2 \sinh^2 x} d(a \sinh x) \\
 &= \pi \left( s\sqrt{1 + s^2} + \log(s + \sqrt{1 + s^2}) \right) \Big|_0^{a \sinh a} \\
 &= \pi \left( a \sinh a \sqrt{1 + a^2 \sinh^2 a} + \log(a \sinh a + \sqrt{1 + a^2 \sinh^2 a}) \right)
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_0^\pi a(1 + \cos \theta) \sin \theta \sqrt{(a(1 + \cos \theta))^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta \\
 &= 2\pi \sqrt{2} a^2 \int_0^\pi (1 + \cos \theta)^{3/2} \sin \theta d\theta \\
 &= 2\pi \sqrt{2} a^2 \frac{2}{5} (1 + \cos \theta)^{5/2} \Big|_\pi^0 \\
 &= \frac{32}{5} \pi a^2
 \end{aligned}$$

**习题 5.3.6** 半径为  $r$  的球沉入水中, 与水面相切 (球的密度为 1), 现将球从水中捞出, 需做多少功?

**解** 设球心距水面高度为  $h$  ( $0 \leq h \leq 2r$ ), 则球被提起  $dh$  时, 有  $dW = \rho g V(h) dh$ , 其中  $V(h)$  为球露出水面的体积, 则

$$\begin{aligned}
 V(h) &= \int_0^h \pi(r^2 - (r - y)^2) dy \\
 &= \pi \int_0^h (2ry - y^2) dy \\
 &= \pi \left( rh^2 - \frac{h^3}{3} \right)
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 W &= \int_0^{2r} \rho g V(h) dh \\
 &= \rho g \pi \int_0^{2r} \left( rh^2 - \frac{h^3}{3} \right) dh \\
 &= \rho g \pi \left( \frac{2}{3} r^4 - \frac{4}{12} r^4 \right) \\
 &= \frac{4}{3} \rho g \pi r^4
 \end{aligned}$$

**习题 5.3.7** 两条长为  $L$ , 质量为  $m$  的均匀细杆位于同一直线上, 两杆近端距离为  $l$ , 求两杆之间的引力.

**解** 设两杆的线密度均为  $\lambda = \frac{m}{L}$ , 记一杆位于  $[0, L]$ , 另一杆位于  $[L + l, 2L + l]$ , 两杆微元长度  $dx, dy$  之间的引力为

$$dF = G \frac{\lambda dx \cdot \lambda dy}{(y - x)^2} = G \frac{m^2}{L^2} \frac{dx dy}{(y - x)^2},$$

则两杆之间的引力为

$$\begin{aligned} F &= \int_0^L \int_{L+l}^{2L+l} G \frac{m^2}{L^2} \frac{dx dy}{(y-x)^2} \\ &= G \frac{m^2}{L^2} \int_0^L \left( \frac{1}{L+l-x} - \frac{1}{2L+l-x} \right) dx \\ &= G \frac{m^2}{L^2} \left( \log \frac{L+l}{l} - \log \frac{2L+l}{L+l} \right) \\ &= G \frac{m^2}{L^2} \log \frac{(L+l)^2}{l(2L+l)} \end{aligned}$$

## 习题 5.4

习题 5.4.1 判断下列反常积分是否收敛, 并求出收敛的反常积分的值.

$$(1) \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} x \sin x dx;$$

$$(3) \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx;$$

$$(5) \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx;$$

$$(6) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx;$$

$$(7) \int_0^1 \ln x dx;$$

$$(8) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(9) \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1-x^2)^{3/2}} dx;$$

$$(10) \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x^2} dx;$$

$$(11) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \quad (n \text{ 为自然数});$$

$$(12) \int_0^1 (\ln x)^n dx \quad (n \text{ 为自然数}).$$

解

(1)

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-(x+1)e^{-x}]_0^A = 1;$$

(2)

$$\int_0^{+\infty} x \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-x \cos x + \sin x]_0^A \stackrel{\text{取 } A = n\pi \rightarrow +\infty}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n+1} n\pi \quad (\text{发散});$$

(3)

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_2^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} (\ln A)^2 - \frac{1}{2} (\ln 2)^2 \right) = +\infty \quad (\text{发散});$$

(4)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\pi/4}{x} dx = \frac{\pi}{4} \lim_{A \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^A = +\infty \quad (\text{发散});$$

(5)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x) \right]_0^A = \frac{1}{2};$$

(6)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} [\arctan(x+1)]_A^0 + \lim_{B \rightarrow +\infty} [\arctan(x+1)]_0^B \\ &= \left( \arctan(1) - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) + \left( \frac{\pi}{2} - \arctan(1) \right) = \pi; \end{aligned}$$

(7)

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [x \ln x - x]_{\varepsilon}^1 = -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) = -1;$$

(8)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_0^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [\arcsin x]_{-1+\varepsilon}^0 + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [\arcsin x]_0^{1-\delta} \\ &= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi; \end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x \ln x}{(1-x^2)^{3/2}} dx &= \int_0^1 \ln x d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) \\ &= \ln x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) dx \\ &= 0 - \int_0^1 \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}\right) dx \\ &\stackrel{t=\sqrt{1-x^2}}{=} \int_0^1 \frac{1}{1-t^2} - \frac{t}{1-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{2} \ln(1-t^2) \\ &= -\ln 2 \end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln \frac{1}{1-x^2} dx &= -\int_0^1 \ln(1-x) dx - \int_0^1 \ln(1+x) dx \\ &= -\lim_{\delta \rightarrow 0^+} [(1-x) \ln(1-x) - (1-x)]_0^{1-\delta} - [(1+x) \ln(1+x) - (1+x)]_0^1 \\ &= -(0 - (-1)) - [(2 \ln 2 - 2) - (-1)] \\ &= -1 - (2 \ln 2 - 1) = 2 - 2 \ln 2; \end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx &= [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} n x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= 0 + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \\ &= n \cdot (n-1) \int_0^{+\infty} x^{n-2} e^{-x} dx = \dots \\ &= n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = n!; \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (\ln x)^n dx &= [x(\ln x)^n]_0^1 - \int_0^1 x \cdot n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= 0 - n \int_0^1 (\ln x)^{n-1} dx \\
&= (-n) \cdot (-n+1) \int_0^1 (\ln x)^{n-2} dx = \dots \\
&= (-1)^n n! \int_0^1 dx = (-1)^n n!;
\end{aligned}$$

**习题 5.4.2** 反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  的 Cauchy 主值定义为

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^B f(x)dx.$$

显然, 若反常积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  收敛, 则其 Cauchy 主值也收敛, 但反过来不一定成立.

研究下列反常积分 Cauchy 主值的收敛性.

$$(1) \text{ P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx; \quad (2) \text{ P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx.$$

解

(1)

$$\begin{aligned}
\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^B \frac{x}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_{-B}^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} (0) = 0;
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2} dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^B \frac{|x|}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{B \rightarrow +\infty} \left( \int_{-B}^0 \frac{-x}{1+x^2} dx + \int_0^B \frac{x}{1+x^2} dx \right) \\
&= 2 \lim_{B \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^B = \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln(1+B^2) = +\infty \text{ (发散)}.
\end{aligned}$$

**习题 5.4.3** 若函数  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上连续, 并且以  $a$  为瑕点, 则反常积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  定义为

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx,$$

这是本节讲的两类反常积分的组合, 其中  $b > a$  是任一实数. 当上面两个反常积分都收敛时, 我们称  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  收敛; 否则称其发散.

(1) 证明  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$  收敛, 并求其值;

(2) 证明: 对任意实数  $\alpha$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  发散.

解

(1)

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx &= \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx + \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx\end{aligned}$$

设  $x-1=u^2$ , 则

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{1}{(u^2+1)u} 2u du = 2 \int \frac{1}{u^2+1} du = 2 \arctan u + C \\ &= 2 \arctan \sqrt{x-1} + C\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx &= \lim_{t \rightarrow 1^+} [2 \arctan \sqrt{x-1}]_t^2 + \lim_{A \rightarrow +\infty} [2 \arctan \sqrt{x-1}]_2^A \\ &= 2(\arctan 1 - \arctan 0) + 2\left(\frac{\pi}{2} - \arctan 1\right) = \pi\end{aligned}$$

(2)

**命题 (第一类  $p$  积分)**  $I(p) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx, a > 0$ , 当  $p > 1$  时, 积分收敛, 当  $p \leq 1$  时, 积分发散.

**证明** 当  $p > 1$  时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1-p} x^{1-p} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} b^{1-p} \right) = \frac{1}{p-1},$$

当  $p \leq 1$  时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^p} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1-p} x^{1-p} \right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} b^{1-p} \right) = +\infty.$$

**命题 (第二类  $p$  积分)**  $J(p) = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx, a > 0$ , 当  $p \geq 1$  时, 积分发散, 当  $p < 1$  时, 积分收敛.

**证明** 当  $p \geq 1$  时,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1-p} x^{1-p} \right) \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} \varepsilon^{1-p} \right) = +\infty,$$

当  $p < 1$  时,

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1-p} x^{1-p} \right) \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} \varepsilon^{1-p} \right) = \frac{1}{1-p}.$$

综上, 当  $\alpha \leq 1$  时,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  发散; 当  $\alpha \geq 1$  时,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  收敛, 因此  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$  收敛.

**习题 5.4.4** 设  $a < c < b$ , 点  $c$  是函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  内唯一的瑕点, 则积分  $\int_a^b f(x) dx$  定义

为两个瑕积分  $\int_a^c f(x)dx$  与  $\int_c^b f(x)dx$  的和. 求:

$$(1) \int_{-1}^4 \frac{1}{x^2+x-2} dx; \quad (2) \int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}} dx.$$

解

(1)

$$\int_{-1}^4 \frac{1}{x^2+x-2} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+x-2} dx + \int_1^4 \frac{1}{x^2+x-2} dx$$

其中

$$\int \frac{1}{x^2+x-2} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+2)} dx = \frac{1}{3} \int \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C;$$

因此,  $\int_1^4 \frac{1}{x^2+x-2} dx$  发散. 故  $\int_{-1}^4 \frac{1}{x^2+x-2} dx$  发散. 事实上,  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+x-2} dx$  也发散.

(2) 注 这里认为  $x^{-\frac{1}{3}}$  在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上有定义,  $x=0$  为瑕点.

$$\int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = \int_{-1}^0 x^{-\frac{1}{3}} dx + \int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} dx$$

其中

$$\int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C;$$

因此,

$$\int_{-1}^0 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \left[ \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{-1}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^-} \left( \frac{3}{2} \varepsilon^{\frac{2}{3}} - \left( \frac{3}{2} \right) \right) = -\frac{3}{2};$$

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[ \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{\delta}^1 = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \delta^{\frac{2}{3}} \right) = \frac{3}{2};$$

$$\text{故 } \int_{-1}^1 x^{-\frac{1}{3}} dx = 0.$$

## 第5章综合习题

习题 5.C.1 设  $m, n$  为正整数, 证明:

$$(1) \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0;$$

$$(2) \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi, & \text{如 } m = n, \\ 0, & \text{如 } m \neq n. \end{cases}$$

(本题的结论, 在以后要讲的 Fourier (傅里叶) 级数理论中具有基本的重要性.)

解

(1)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx \\ &= \begin{cases} \pi, & \text{如 } m = n, \\ 0, & \text{如 } m \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

习题 5.C.2 设  $m, n$  为正整数, 记

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx.$$

证明: (1)  $B(m, n) = B(n, m)$ ; (2)  $B(m, n) = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$ .

解

(1) 由变量替换  $x = 1 - t$  可得

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 (1-t)^{m-1} t^{n-1} dt \\ &= B(n, m) \end{aligned}$$

(2) 由分部积分可得

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \\ &= -\frac{1}{n} x^{m-1} (1-x)^n \Big|_0^1 + \frac{m-1}{n} \int_0^1 x^{m-2} (1-x)^n dx \\ &= \frac{m-1}{n} B(m-1, n+1) \end{aligned}$$

重复使用上式, 可得

$$\begin{aligned}
 B(m, n) &= \frac{(m-1)(m-2)\cdots 1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)} B(1, n+m-1) \\
 &= \frac{(m-1)!}{(n+m-1)!/(n-1)!} \cdot \frac{1}{n+m-1} \\
 &= \frac{m!n!}{(m+n-1)!(m+n)} \\
 &= \frac{m!n!}{(m+n+1)!}
 \end{aligned}$$

习题 5.C.3 计算下列积分.

- (1)  $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$ ;
- (2)  $\int_0^{n\pi} x |\sin x| dx$  ( $n$  为自然数);
- (3) 设  $f(x) = \int_x^{x+2\pi} (1 + e^{\sin t} - e^{-\sin t}) dt + \frac{1}{1+x} \int_0^x f(t) dt$ , 求  $\int_0^1 f(x) dx$ .

解

(1)

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^2 d \left( x e^{x+\frac{1}{x}} \right) \\
 &= x e^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 \\
 &= \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}.
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{n\pi} |x \sin x| dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x |\sin x| dx \\
 &\stackrel{x=u+k\pi}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} (u+k\pi) |\sin(u+k\pi)| du \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} (u+k\pi) \sin u du \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_0^{\pi} u \sin u du + k\pi \int_0^{\pi} \sin u du \right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (\pi + 2k\pi) \\
 &= n\pi + 2\pi \frac{(n-1)n}{2} = n^2\pi.
 \end{aligned}$$

(3)  $(1 + e^{\sin t} - e^{-\sin t})$  为以  $2\pi$  为周期的函数, 由习题 5.1.21 可知

$$\begin{aligned}
 \int_x^{x+2\pi} (1 + e^{\sin t} - e^{-\sin t}) dt &= \int_0^{2\pi} (1 + e^{\sin t} - e^{-\sin t}) dt \\
 &= 2\pi + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} dt - \int_0^{2\pi} e^{-\sin t} dt \\
 &= 2\pi + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} dt + \int_0^{-2\pi} e^{\sin u} du \quad (u = -t) \\
 &= 2\pi + \int_0^{2\pi} e^{\sin t} dt + \int_{2\pi}^0 e^{\sin u} du \\
 &= 2\pi.
 \end{aligned}$$

因此  $f(x) = 2\pi + \frac{1}{x+1} \int_0^1 f(t) dt$ ,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可积, 两边对  $x$  从 0 到 1 积分得

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left( 2\pi + \frac{1}{x+1} I \right) dx \\
 &= 2\pi + I \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = 2\pi + I \ln 2.
 \end{aligned}$$

$$\text{解得 } I = \frac{2\pi}{1 - \ln 2}.$$

习题 5.C.4 证明:  $\frac{1}{2n+2} < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx < \frac{1}{2n} \quad (n = 1, 2, \dots)$ .

解

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-1} x \cdot \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-1} x \cdot \frac{1}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2n} \tan^n x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n}; \\
 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \frac{2 \cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \frac{1}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2n+2} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+2}.
 \end{aligned}$$

习题 5.C.5 设函数  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 且  $\int_a^b f(x) dx > 0$ , 证明: 必有一个区间  $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ , 使得对任意  $x \in [\alpha, \beta]$ , 有  $f(x) > 0$ . (比较习题 5.1 中第 8 题.)

(提示: 假设结论不成立, 则对  $[a, b]$  的任一分割  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , 在区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上都存在  $\xi_i$ , 使  $f(\xi_i) \leq 0$ . 由此产生一个非正的积分和, 过渡到极限, 产生矛盾.)

解 反证法. 假设结论不成立, 则对  $[a, b]$  的任一分割  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , 在区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上都存在  $\xi_i$ , 使  $f(\xi_i) \leq 0$ . 由此产生一个非正的积分和

$$S = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 0.$$

过渡到极限, 可得

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max(x_i - x_{i-1}) \rightarrow 0} S \leq 0,$$

这与题设  $\int_a^b f(x) dx > 0$  矛盾. 因此假设不成立, 结论成立.

习题 5.C.6

- (1) 设  $f$  是处处连续的偶函数, 证明:  $f$  必有一个原函数为奇函数;  
 (2) 设  $f$  是处处连续的奇函数, 证明:  $f$  的任一原函数都是偶函数. (试比较习题 3.1 第 15 题.)

解

- (1) 设  $F(x)$  是  $f$  的一个原函数, 则

$$\begin{aligned} G(x) &= F(x) - F(0) \\ &= \int_0^x f(t) dt \\ &= \int_0^{-x} f(-u)(-du) \quad (u = -t) \\ &= -\int_0^{-x} f(u) du \\ &= -F(-x) + F(0) \end{aligned}$$

因此  $G(-x) = -G(x)$ , 即  $G(x)$  是奇函数, 且  $G'(x) = F'(x) = f(x)$ .

- (2) 设  $F(x)$  是  $f$  的一个原函数, 则

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt \\ &= \int_0^x f(-u)(-du) \quad (u = -t) \\ &= -\int_0^x (-f(u)) du \\ &= \int_0^x f(u) du \\ &= F(x) \end{aligned}$$

因此  $F(-x) = F(x)$ , 即  $F(x)$  是偶函数.

**习题 5.C.7** 举例说明, 存在一个连续的周期函数  $f$ , 使得  $f$  的原函数都不是周期函数.

(试比较习题 3.1 第 16 题.) (提示: 选一个连续的周期函数  $f$ , 使它能保证  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  不是周期函数. 注意, 不必考虑  $F(x)$  的显式表示.)

**解** 设  $f(x) \equiv 1$ , 则  $f$  为周期函数.  $f(x)$  的所有原函数为  $F(x) = x + C$ , 显然  $F(x)$  不是周期函数.

**习题 5.C.8** 设  $\frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0$ . 证明: 多项式  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$  在  $(0, 1)$  内至少有一个零点. (本题是第 3 章综合习题的第 3 题, 这里要求用积分的解法来论证. 可利用习题 5.1 中第 8 题的结果.)

解 设  $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ , 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n)dx \\ &= \frac{a_0}{n+1} + \frac{a_1}{n} + \cdots + a_n \\ &= 0\end{aligned}$$

由习题 5.1.8 可知,  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内至少有一个零点.

习题 5.C.9 设函数  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续, 且有  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$ . 试证: 在  $(0, \pi)$  内存在两点  $x_1$  和  $x_2$ , 使得  $f(x_1) = 0$  与  $f(x_2) = 0$ .

(提示: 易知  $f$  在  $(0, \pi)$  内至少有一个零点  $x_1$ . 若这是唯一的零点, 则  $f$  在  $(0, x_1)$  与  $(x_1, \pi)$  内异号. 于是  $\int_0^\pi f(x) \sin(x - x_1) dx \neq 0$ , 这将产生矛盾.)

解 由  $\int_0^\pi f(x) \sin x dx = 0$  与习题 5.1.8 可知,  $f$  在  $(0, \pi)$  内至少有一个零点  $x_1$ . 若这是唯一的零点, 则

(1) 若  $f(x)$  在  $(0, x_1)$  与  $(x_1, \pi)$  内同号且非零, 不妨设  $f(x) > 0, \forall x \in (0, x_1) \cup (x_1, \pi)$ , 则

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx = \int_0^{x_1} f(x) \sin x dx + \int_{x_1}^\pi f(x) \sin x dx > 0$$

与题设矛盾.

(2) 若  $f(x)$  在  $(0, x_1)$  与  $(x_1, \pi)$  内异号且非零, 构造函数  $g(x) = \sin(x_1 - x) = -\sin x \cos x_1 + \cos x \sin x_1$ , 不妨设  $f(x) > 0, \forall x \in (0, x_1); f(x) < 0, \forall x \in (x_1, \pi)$ , 因此

$$\int_0^\pi f(x)g(x)dx = \int_0^{x_1} f(x)g(x)dx + \int_{x_1}^\pi f(x)g(x)dx > 0$$

这与

$$\int_0^\pi f(x)g(x)dx = -\cos x_1 \int_0^\pi f(x) \sin x dx + \sin x_1 \int_0^\pi f(x) \cos x dx = 0$$

矛盾.

习题 5.C.10 设  $f(x)$  处处连续,  $f(0) = 0, f'(0)$  存在. 记  $F(x) = \int_0^1 f(xy)dy$ , 证明  $F(x)$  处处可导, 并求出  $F'(x)$ .

解  $F(0) = \int_0^1 f(0)dy = 0$ , 因此  $F(x)$  在  $x = 0$  处连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^1 f(xy)dy = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{f'(0)}{2}.$$

当  $x \neq 0$  时,  $F(x) = \int_0^1 f(xy)dy \stackrel{t=xy}{=} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt$ , 则

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x} f(x)$$

. 综上所述,  $F(x)$  处处可导, 且

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{f'(0)}{2}, & x = 0, \\ -\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t)dt + \frac{1}{x}f(x), & x \neq 0. \end{cases}$$

### 习题 5.C.11

- (1) 设  $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & |x| \leq 1, \\ 1, & |x| > 1, \end{cases}$  记  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 试研究  $F(x)$  在哪些点可导;

(提示: 与习题 5.1 中第 16 题不同, 本题无法求出  $F(x)$  的显式表示.)

- (2) 设  $f(x) = \int_0^x \cos \frac{1}{t} dt$ , 求证:  $f'_+(0) = 0$ .

解

- (1) 当  $x \neq \pm 1$  时,  $f(x)$  在  $x$  处连续,  $F(x)$  在  $x$  处可导, 且  $F'(x) = f(x)$ . 当  $x = 1$  时,

$$F'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} f(t)dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} 1dt = 1;$$

$$F'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{F(1+h) - F(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} f(t)dt = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} e^{-t^2} dt = e^{-1}.$$

因此  $F(x)$  在  $x = 1$  处不可导, 同理可证  $F(x)$  在  $x = -1$  处不可导.

- (2) 由于  $x = 0$  是被积函数的间断点, 因此不能使用变上限积分求导的方法来求  $F'(0)$ , 只能根据定义计算, 先由分部积分得

$$f(x) = \int_0^x -t^2 d\left(\sin \frac{1}{t}\right) = -x^2 \sin \frac{1}{x} + \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt.$$

因此

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \sin \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \left| \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \sin \frac{1}{x} \right| &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0; \\ \left| \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x 2t \sin \frac{1}{t} dt \right| &\leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x 2|t| dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0. \end{aligned}$$

因此  $f'_+(0) = 0$ .

习题 5.C.12 设函数  $f$  处处连续. 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b (f(x+h) - f(x))dx = f(b) - f(a).$$

习题 5.C.13 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可微. 证明:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx = 0.$$

(提示: 分部积分.)

我们加强为证明

**习题** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可微,  $g(x)$  为以  $T$  为周期的连续函数, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)g(\lambda x)dx = \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt \int_a^b f(x)dx.$$

**解** 等价于证明,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \left( g(\lambda x) - \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt \right) dx = 0.$$

记  $h(t) = g(t) - \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt$ , 则  $h(t)$  为以  $T$  为周期的连续函数, 且  $\int_0^T h(t)dt = 0$ ,

$$h(\lambda t) = g(\lambda t) - \frac{1}{T} \int_0^T g(\lambda t)dt = g(\lambda t) - \frac{1}{T} \int_0^T g(t)dt.$$

因此只需证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)h(\lambda x)dx = 0.$$

由分部积分可得

$$\int_a^b f(x)h(\lambda x)dx = f(x) \frac{1}{\lambda} H(\lambda x) \Big|_a^b - \frac{1}{\lambda} \int_a^b f'(x)H(\lambda x)dx$$

其中  $H(t)$  为  $h(t)$  的一个原函数, 由  $h(t)$  的连续性可知  $H(t)$  在  $[0, T]$  上有界, 设  $M = \max_{t \in [0, T]} |H(t)|$ , 则

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)h(\lambda x)dx \right| &\leq \frac{1}{\lambda} (|f(b)| + |f(a)|) M + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(x)| M dx \\ &= \frac{M}{\lambda} \left( |f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right) \end{aligned}$$

当  $\lambda \rightarrow \infty$  时, 上式右端趋于 0, 故

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)h(\lambda x)dx = 0.$$

**习题 5.C.14** 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t|dt = \frac{2}{\pi}$ .

**解** 设  $x = 2k\pi + r$ , 其中  $k$  为非负整数,  $0 \leq r < 2\pi$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t|dt &= \frac{1}{2k\pi + r} \left( k \int_0^{2\pi} |\sin t|dt + \int_0^r |\sin t|dt \right) \\ &= \frac{1}{2k\pi + r} \left( 4k + \int_0^r |\sin t|dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2k}{2k + r/\pi} + \frac{1}{2k\pi + r} \int_0^r |\sin t|dt \end{aligned}$$

当  $x \rightarrow +\infty$  时, 即  $k \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k\pi + r} \int_0^r |\sin t|dt \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2k\pi} \int_0^{2\pi} |\sin t|dt = 0,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t| dt = \frac{2}{\pi} + 0 = \frac{2}{\pi}.$$

**习题 5.C.15** 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$ .

(提示: 直接用积分中值定理, 得出左端的积分为  $\frac{\pi}{2} \sin^n \xi_n$  (其中  $0 < \xi_n < \frac{\pi}{2}$ ), 但这不能导出结果, 因不能排除  $\{\xi_n\}$  中有一个子列趋于  $\frac{\pi}{2}$ . 克服这一困难可采用如下的方法. 对任意正数  $\varepsilon < 1$ , 取一个参数  $\delta$  (与  $\varepsilon$  有关), 将问题中的积分拆成两部分: 一部分用区间长度控制, 另一部分由  $n \rightarrow \infty$  来控制, 以使得两者的和小于  $\varepsilon$ . 我们有

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ &< \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right)^n + \delta \\ &< \frac{\pi}{2} (\cos \delta)^n + \delta. \end{aligned}$$

现在取  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , 因  $0 < \cos \delta < 1$ , 且  $\cos \delta$  与  $n$  无关, 故  $n$  充分大时, 可使上式右端第一项小于  $\frac{\varepsilon}{2}$ .

解答本题的另一方法是应用 §5.1 中例 5.1.10, 并参考第 1 章综合习题中第 1 题 (1).)

**解** 对任意正数  $\varepsilon < 1$ , 取一个参数  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ , 将问题中的积分拆成两部分:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \\ &< \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\right)^n + \delta \\ &< \frac{\pi}{2} (\cos \delta)^n + \delta. \end{aligned}$$

因  $0 < \cos \delta < 1$ , 且  $\cos \delta$  与  $n$  无关, 故  $n$  充分大时, 可使上式右端第一项小于  $\frac{\varepsilon}{2}$ . 因此当  $n$  充分大时, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由  $\varepsilon$  的任意性可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

**习题 5.C.16** 设  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的连续函数, 且  $f(x) \geqslant 0$  (对  $x \in [a, b]$ ). 记  $f(x)$  在该区间上的最大值为  $M$ , 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

**解** 由  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可知,  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时,  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , 其中  $x_0 \in [a, b]$  且  $f(x_0) = M$ . 因此, 当  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$  时,  $f(x) > M - \varepsilon$ . 设

$I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$ , 记  $|I| = \sup I - \inf I > 0$ , 则有

$$\int_a^b f^n(x) dx \geq \int_I f^n(x) dx \geq \int_I (M - \varepsilon)^n dx = |I|(M - \varepsilon)^n.$$

因此

$$\left( \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \geq |I|^{\frac{1}{n}} (M - \varepsilon).$$

又因为  $f(x) \leq M$ , 所以

$$\left( \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq (b - a)^{\frac{1}{n}} M.$$

综上所述, 有

$$|I|^{\frac{1}{n}} (M - \varepsilon) \leq \left( \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} \leq (b - a)^{\frac{1}{n}} M.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 上式两端均趋于  $M$ , 由夹逼定理可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_a^b f^n(x) dx \right)^{\frac{1}{n}} = M.$$

### 习题 5.C.17

(1) 设函数  $f(x)$  是  $[1, +\infty)$  上的递增、非负函数, 证明: 对任意正整数  $n$ , 有

$$0 \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \leq f(n);$$

(2) 设函数  $f(x)$  是  $[1, +\infty)$  上的递减、非负函数, 证明: 对任意正整数  $n$ , 有

$$0 \leq \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \leq f(1).$$

此外, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \right) = \alpha$$

存在, 且  $0 \leq \alpha \leq f(1)$ .

(提示: 对于 (1), 应用习题 5.1 中第 5 题可知,

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k+1),$$

对  $k = 1, 2, \dots, n-1$  求和, 可得出结果. 类似地可证明 (2) 中的不等式. 为证明 (2) 中说的极限存在, 可证明

$$g(n) = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

是单调递减的函数; 而上面已指出  $g(n)$  以 0 为下界.)

某些 (不易直接处理的) 离散量的和—数列的和, 可以通过 (易于处理的) 连续的量—积分部分作出估计. 本题给出了最简单的这样的结果 (这在后面的无穷级数理论中还将提及). 如今,

我们现在易于给出  $\sqrt[n]{k}$  及  $n!$  的相当精确的上、下界. 我们特别提及, 对  $n \geq 1$ , 有

$$\ln n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \ln n + 1,$$

从而  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  趋于无穷大, 并与  $\ln n$  同阶. 此外,

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

存在, 这称为 Euler (欧拉) 常数.

解

(1) 由  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上递增可知,  $\forall k \in \mathbb{N}^+$ , 有  $f(k) \leq f(x) \leq f(k+1), \forall x \in [k, k+1]$ , 因此

$$f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k+1).$$

对  $k = 1, 2, \dots, n-1$  求和, 得

$$\sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \geq \int_1^n f(x) dx + f(1),$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx + f(n).$$

(2) 由  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上递减可知,  $\forall k \in \mathbb{N}^+$ , 有  $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k), \forall x \in [k, k+1]$ , 因此

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$

对  $k = 1, 2, \dots, n-1$  求和, 得

$$\sum_{k=1}^n f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^n f(k) \geq \int_1^n f(x) dx + f(n),$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx + f(1).$$

设  $g(n) = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx$ , 则由

$$g(n+1) - g(n) = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx \leq 0,$$

可知  $g(n)$  是单调递减, 且有下界 0, 因此极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \alpha$$

存在, 且  $0 \leq \alpha \leq f(1)$ .

**习题 5.C.18** (Cauchy 积分不等式) 设  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 证明:

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx,$$

等号成立的充分必要条件是:  $f$  和  $g$  中有一个恒为零, 或  $f(x) = \lambda g(x)$  (对  $x \in [a, b]$ ), 这里  $\lambda$  是一个常数.

(提示: 本题有好几种证法. 用对积分上限求导可得出一个证明, 参见习题 5.1 中第 28 题的提示. 最标准的方法如下: 不妨设  $\int_a^b g^2(x)dx \neq 0$ , 否则易知函数  $g$  恒为零, 结论显然成立 (习题 5.1 第 4 题 (2)). 考虑关于  $t$  的二次项式  $\int_a^b (f(x) + tg(x))^2 dx$ , 这总是非负的.)

解  $(f(x) - tg(x))^2 \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ . 即  $\int_a^b (f(x) - tg(x))^2 dx \geq 0$ . 展开得

$$\int_a^b f^2(x) dx - 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + t^2 \int_a^b g^2(x) dx \geq 0,$$

即

$$\Delta = 4 \left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \leq 0,$$

即

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx.$$

习题 5.C.19 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有连续的导数, 证明: 对任意  $a \in [0, 1]$ , 有

$$|f(a)| \leq \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f'(x)| dx.$$

解 设  $|f(x_0)| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$ , 又  $f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$ , 因此

$$\begin{aligned} |f(x_0)| &= \left| \int_0^1 f(x_0) dt \right| = \left| \int_0^1 f(x) dt - \int_0^1 \left( \int_{x_0}^x f'(t) dt \right) dx \right| \\ &\leq \int_0^1 |f(x)| dx + \left| \int_0^1 \left( \int_{x_0}^x f'(t) dt \right) dx \right| \end{aligned}$$

对于后者

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \left( \int_{x_0}^x f'(t) dt \right) dx \right| &\leq \int_0^1 \left| \int_{x_0}^x f'(t) dt \right| dx \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f'(t)| dt dx \\ &= \int_0^1 |f'(t)| dt \end{aligned}$$

习题 5.C.20 证明:  $0.944 < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < 0.947$ . (提示: 参看习题 5.1 中第 24 题的提示.)

解 由  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$ , 可得

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

因此

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}.$$

对上式两端在  $[0, 1]$  上积分, 得

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) dx,$$

即

$$0.944\bar{4} < \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx < 0.946\bar{1}.$$

**习题 5.C.21** 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续可微, 且  $|f'(x)| \leq M$ . 证明: 对任意正整数  $n$ ,

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{M}{2n}.$$

**解** 由  $|f'(x)| \leq M$  可知, 对任意  $x, y \in [0, 1]$ , 由 Lagrange 中值定理可得  $\exists \xi \in (x, y)$  使得

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Rightarrow |f(y) - f(x)| = |f'(\xi)| |y - x| \leq M |y - x|.$$

因此

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (f(x) - f(\frac{k}{n})) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(x) - f(\frac{k}{n})| dx \\ &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} M \left| x - \frac{k}{n} \right| dx \\ &= M \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left( \frac{k}{n} - x \right) dx \\ &= M \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n^2} = \frac{M}{2n}. \end{aligned}$$

**习题 5.C.22** 设  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  是一个可微函数, 且对任意实数  $x, y$  满足

$$|f'(x) - f'(y)| \leq |x - y|.$$

求证: 对任意实数  $x$ , 有

$$(f'(x))^2 < 2f(x).$$

解 对于任意  $x, y$ , 有  $f(x+y) = f(x) + \int_x^{x+y} f'(t) dt$ , 因此

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + yf'(x) + \int_x^{x+y} (f'(t) - f'(x)) dt \\ &\leq f(x) + yf'(x) + \int_x^{x+y} |f'(t) - f'(x)| dt \\ &\leq f(x) + yf'(x) + \int_x^{x+y} |t - x| dt \\ &= f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

令  $y = -f'(x)$ , 则

$$f(x - f'(x)) \leq f(x) - (f'(x))^2 + \frac{(f'(x))^2}{2} = f(x) - \frac{(f'(x))^2}{2}.$$

因为  $f(x - f'(x)) > 0$ , 所以  $(f'(x))^2 < 2f(x)$ .

## 第 6 章 常微分方程初步

### 习题 6.1

习题 6.1.1 求下列可分离变量的微分方程.

(1)  $(1+x^2)dy = ydx$ ;

(2)  $y' = e^{x-y}$ ;

(3)  $xy' + y = y^2$ ;

(4)  $yy' = \frac{1-2x}{y}$ .

解

(1) 不难验证  $y \equiv 0$  是方程的解. 当  $y \neq 0$  时,

$$\begin{aligned}(1+x^2)dy &= ydx \\ \Rightarrow \frac{1}{y}dy &= \frac{1}{1+x^2}dx \\ \Rightarrow \ln|y| &= \arctan x + C \\ \Rightarrow y &= C'e^{\arctan x}, \quad C' = e^C\end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$y = Ce^{\arctan x}$$

(2)

$$\begin{aligned}y' &= e^{x-y} \\ \Rightarrow e^y dy &= e^x dx \\ \Rightarrow e^y &= e^x + C, \quad C > -e^x \\ \Rightarrow y &= \ln(e^x + C)\end{aligned}$$

(3) 不难验证  $y \equiv 0, 1$  是方程的解. 当  $y \neq 0, 1$  时,

$$\begin{aligned}xy' + y &= y^2 \\ \Rightarrow \frac{dy}{y(y-1)} &= \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{y-1}{y} \right| &= \ln|x| + C \\ \Rightarrow \frac{y-1}{y} &= C'x, \quad C' = e^C \neq 0 \\ \Rightarrow y &= \frac{1}{1-C'x}\end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$y = 0; \quad y = \frac{1}{1 - Cx}$$

(4)

$$\begin{aligned} yy' &= \frac{1 - 2x}{y} \\ \implies y^2 dy &= (1 - 2x) dx \\ \implies \frac{1}{3} y^3 &= x - x^2 + C \\ \implies y &= \sqrt[3]{3x - 3x^2 + C}. \end{aligned}$$

且由题设得  $y \neq 0$ , 因此方程的所有解为:

$$\frac{3x - 3x^2 + C}{y^3} = 1$$

注 后面为了方便, 我们也将所有解写成:

$$y^3 = 3x - 3x^2 + C, \quad y \neq 0.$$

**习题 6.1.2** 求下列微分方程.

$$(1) \quad y' = \frac{y^2}{x^2} - 2;$$

$$(2) \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y};$$

$$(3) \quad \frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{dy}{2y^2 - xy};$$

$$(4) \quad (x^2 + 3y^2)dx - 2xydy = 0.$$

解

(1) 记  $p = \frac{y}{x}$ , 则  $y = px$ ,  $y' = p'x + p$ . 代入方程得

$$\begin{aligned} p'x + p &= p^2 - 2 \\ \implies \frac{dp}{p^2 - p - 2} &= \frac{dx}{x} \\ \implies \int \frac{1}{3} \left( \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+1} \right) dp &= \int \frac{dx}{x} \\ \implies \ln |p-2| - \ln |p+1| &= 3 \ln |x| + C \\ \implies \frac{p-2}{p+1} &= C' x^3, \quad C' = e^C > 0 \\ \implies \frac{y-2x}{x+y} &= C' x^3 \\ \implies y &= \frac{2x + C' x^4}{1 - C' x^3} \end{aligned}$$

同时注意到  $y - 2x = \frac{3C' x^4}{1 - C' x^3}$ , 函数被分为  $y - 2x \geq 0$ ,  $y - 2x < 0$  两支, 这两支的解是

独立的, 因此综上所述

$$y = \frac{2x + C_1 x^4}{1 - C_1 x^3}, C_1 \in \mathbb{R}, y - 2x \geq 0; \quad y = \frac{2x + C_2 x^4}{1 - C_2 x^3}, C_2 \in \mathbb{R}, y - 2x < 0.$$

注 为了方便, 我们也写为

$$y = \frac{2x + Cx^4}{1 - Cx^3}, \quad x \neq 0$$

(2) 记  $p = \frac{y}{x}$ , 则  $y = px, y' = p'x + p$ . 代入方程得

$$\begin{aligned} p'x + p &= p + \frac{1}{p} \\ \implies p' &= \frac{1}{px} \\ \implies p dp &= \frac{dx}{x} \\ \implies \frac{1}{2} p^2 &= \ln|x| + C \\ \implies y^2 &= x^2(2\ln|x| + C'), \quad C' = 2C. \end{aligned}$$

由于微分方程在  $x = 0$  处不连续,  $x$  正负半轴的解是独立的,

$$y^2 = x^2(2\ln x + C_1), x > 0; \quad y^2 = x^2(2\ln(-x) + C_2), x < 0.$$

或者

$$y^2 = x^2(2\ln|x| + C), x \neq 0.$$

(3) 记  $p = \frac{y}{x}$ , 则  $y = px, y' = p'x + p$ .  $y = x, y = 2x$  显然为方程的解,  $u \neq 0, 1, 2$  时代入方程得

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - x(px) + (px)^2} dx &= \frac{1}{2(px)^2 - x(px)} d(px) \\ \implies \frac{dx}{x} &= \frac{p^2 - p + 1}{p(p-1)(p-2)} dp \\ \implies \int \frac{dx}{x} &= \int \left( -\frac{1}{2} \frac{dp}{p} + \frac{dp}{p-1} - \frac{3}{2} \frac{dp}{p-2} \right) \\ \implies x^{-1} p^{\frac{1}{2}} (p-1)^{-1} (p-2)^{\frac{3}{2}} &= C \\ \implies C'(y-x)^2 &= y(y-2x)^3, \quad C' = C^2 \end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$C_1(y-x)^2 = y(y-2x)^3, y > 0, \quad C_2(y-x)^2 = y(y-2x)^3, y < 0, \quad y = x, y \neq 0, \quad y = 2x, y \neq 0$$

或者

$$C(y-x)^2 = y(y-2x)^3, y \neq 0, \quad y = x, y \neq 0, \quad y = 2x, y \neq 0$$

或者

$$C(y-x)^2 = y(y-2x)^3, y \neq 0, \quad y = x, y \neq 0$$

(4) 记  $p = \frac{y}{x}$ , 则  $y = px, y' = p'x + p$ . 代入方程得  $x \neq 0$  时,

$$\begin{aligned} & (x^2 + 3(px)^2)dx - 2x(px)d(px) \\ \implies & \frac{2p}{1+p^2} dp = \frac{1}{x} dx \\ \implies & \ln(1+p^2) = \ln|x| + C \\ \implies & 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = C'x, \quad C' = e^C > 0 \\ \implies & x^2 + y^2 = C'x^3 \end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$x^2 + y^2 = Cx^3$$

**习题 6.1.3** 证明: 形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

的方程, 可通过代换化为齐次方程. (提示: 若方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

有非零解  $x_0, y_0$  (即  $x_0, y_0$  不全为零), 则可令  $u = x - x_0, v = y - y_0$ ; 其他情形更易于处理.)

求下面方程:

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x+y+3}{x-y+1}; \quad (2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x+4y+3}{x+2y+1}.$$

**解** 对线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

的系数行列式  $D = a_1b_2 - a_2b_1$  进行讨论.

(1)  $D \neq 0$ : 此时方程组有唯一解  $(x_0, y_0)$ . 令  $u = x - x_0, v = y - y_0$ , 则  $du = dx, dv = dy$ , 且  $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$ . 原方程变为:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1(u+x_0) + b_1(v+y_0) + c_1}{a_2(u+x_0) + b_2(v+y_0) + c_2}\right)$$

因为  $(x_0, y_0)$  是方程组的解, 所以  $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$  且  $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0$ . 上式化为:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1(v/u)}{a_2 + b_2(v/u)}\right)$$

这是一个关于  $u, v$  的齐次方程.

(2)  $D = 0$ : 此时  $a_1 b_2 = a_2 b_1$ . 我们可以设  $a_1 = k a_2, b_1 = k b_2$  (假设  $a_2, b_2$  不全为零).

- 如果  $c_1 = k c_2$ ,  $\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} = k$  为常数. 方程变为  $\frac{dy}{dx} = f(k)$ , 其解为  $y = f(k)x + C$ .
- 如果  $c_1 \neq k c_2$ , 令  $z = a_2 x + b_2 y$ , 则  $\frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 \frac{dy}{dx}$ . 原方程的右边可以写成  $z$  的函数:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) = f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right)$$

代入  $\frac{dz}{dx}$  的表达式:

$$\frac{1}{b_2} \left( \frac{dz}{dx} - a_2 \right) = f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right) \implies \frac{dz}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{kz + c_1}{z + c_2}\right)$$

这是一个变量分离方程  $\frac{dz}{a_2 + b_2 f(\dots)} = dx$ .

综上, 该类方程总能通过代换化为齐次方程或变量分离方程.

(1) 解方程组  $\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ , 得  $x = -2, y = -1$ . 令  $u = x + 2, v = y + 1$ . 则  $\frac{dv}{du} =$

$\frac{(u-2) + (v-1) + 3}{(u-2) - (v-1) + 1} = \frac{u+v}{u-v}$ . 这是齐次方程. 令  $p = v/u$ , 则  $v = pu, \frac{dv}{du} = u \frac{dp}{du} + p$ .

$$u \frac{dp}{du} + p = \frac{u + pu}{u - pu} = \frac{1 + p}{1 - p} \implies u \frac{dp}{du} = \frac{1 + p}{1 - p} - p = \frac{1 + p - p + p^2}{1 - p} = \frac{1 + p^2}{1 - p}$$

分离变量:  $\frac{1-p}{1+p^2} dp = \frac{du}{u}$ . 积分:

$$\int \frac{1-p}{1+p^2} dp = \int \frac{1}{1+p^2} dp - \int \frac{p}{1+p^2} dp = \int \frac{du}{u}$$

得到

$$\arctan(p) - \frac{1}{2} \ln(1+p^2) = \ln|u| + C$$

代回  $p = v/u$ :

$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{v^2}{u^2}\right) = \ln|u| + C$$

$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right) = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) - \frac{1}{2} \ln(u^2) + \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(u^2 + v^2) + C$$

代回  $u = x + 2, v = y + 1$ :

$$\arctan\left(\frac{y+1}{x+2}\right) - \frac{1}{2} \ln((x+2)^2 + (y+1)^2) = C$$

即, 微分方程的解为

$$y + 1 = (x + 2) \tan\left(\frac{1}{2} \ln((x+2)^2 + (y+1)^2) + C\right), x - y + 1 \neq 0$$

(2) 这里  $a_1 = 2, b_1 = 4, a_2 = 1, b_2 = 2, D = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0$ . 令  $z = x + 2y$ . 则  $\frac{dz}{dx} = 1 + 2\frac{dy}{dx}$ .

原方程变为  $\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+2y)+3}{x+2y+1} = \frac{2z+3}{z+1}$ . 代入  $\frac{dz}{dx}$  的表达式:

$$\frac{dz}{dx} = 1 + 2 \left( \frac{2z+3}{z+1} \right) = \frac{z+1+4z+6}{z+1} = \frac{5z+7}{z+1}$$

分离变量:  $\frac{z+1}{5z+7}dz = dx$ . 积分:

$$\int \frac{z+1}{5z+7} dz = \int \frac{\frac{1}{5}(5z+7) - \frac{7}{5} + 1}{5z+7} dz = \int \left( \frac{1}{5} - \frac{2/5}{5z+7} \right) dz = \int dx$$

得到

$$\frac{1}{5}z - \frac{2}{25} \ln |5z+7| = x + C$$

代回  $z = x + 2y$ :

$$\frac{1}{5}(x+2y) - \frac{2}{25} \ln |5(x+2y)+7| = x + C$$

整理得:

$$5(x+2y) - 2 \ln |5x+10y+7| = 25x + C'$$

$$10y - 20x - 2 \ln |5x+10y+7| = C'$$

$$10x - 5y + \ln |5x+10y+7| = C''$$

即, 微分方程的解为

$$10x - 5y + \ln |5x+10y+7| = C, x+2y+1 \neq 0$$

**习题 6.1.4** 求下列线性方程和 Bernoulli 方程的解.

$$(1) (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2;$$

$$(2) y' + \frac{1-2x}{x} = 1;$$

$$(3) y' = \frac{y}{x+y^3};$$

$$(4) y' + \frac{y}{x} = y^2 \ln x;$$

$$(5) y' = y \tan x + y^2 \cos x;$$

$$(6) y - y' \cos x = y^2(1 - \sin x) \cos x.$$

**解**

(1) 转为标准形式:

$$y' + \left( -\frac{2x}{1+x^2} \right) y = 1+x^2.$$

则  $\int P(x) dx = \int -\frac{2x}{1+x^2} dx = -\ln(1+x^2)$ . 根据线性方程通解公式:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x) dx} \left( \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right) \\ &= (1+x^2) \left( \int (1+x^2) \frac{1}{1+x^2} dx + C \right) \\ &= (1+x^2)(x+C). \end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$y = (x+C)(1+x^2)$$

(2) 原方程可写为  $y' = 1 - \frac{1-2x}{x} = 1 - \frac{1}{x} + 2 = 3 - \frac{1}{x}$ . 分离变量得  $dy = \left(3 - \frac{1}{x}\right) dx$ . 积分得

$$y = 3x - \ln|x| + C$$

(3) 将方程视为  $x$  关于  $y$  的函数. 原方程可写为  $\frac{dx}{dy} = \frac{x+y^3}{y} = \frac{x}{y} + y^2$ . 整理得:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y^2.$$

这是一个关于  $x$  的线性方程.  $P(y) = -\frac{1}{y}$ ,  $Q(y) = y^2$ .  $\int P(y) dy = -\ln|y|$ . 通解为:

$$\begin{aligned} x &= e^{-(-\ln|y|)} \left( \int y^2 e^{-\ln|y|} dy + C \right) \\ &= |y| \left( \int y^2 \frac{1}{|y|} dy + C \right) \\ &= y \left( \int y dy + C \right) \quad (\text{假设 } y > 0) \\ &= y \left( \frac{1}{2}y^2 + C \right) = \frac{y^3}{2} + Cy. \end{aligned}$$

解为  $x = \frac{y^3}{2} + Cy, x + y^3 \neq 0$

(4) 这是 Bernoulli 方程.  $y \equiv 0$  是一个解. 当  $y \neq 0$  时, 方程两边同除以  $y^2$ :

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \ln x.$$

作代换  $u = y^{-1}$ , 则  $u' = -y^{-2}y'$ . 方程变为:

$$-u' + \frac{1}{x}u = \ln x \implies u' - \frac{1}{x}u = -\ln x.$$

这是一个线性方程.  $\int P(x) dx = -\ln|x|$ .

$$\begin{aligned} u &= e^{-(-\ln|x|)} \left( \int (-\ln x) e^{-\ln|x|} dx + C \right) \\ &= |x| \left( \int (-\ln x) \frac{1}{|x|} dx + C \right) \\ &= x \left( -\int \frac{\ln x}{x} dx + C \right) \quad (\text{假设 } x > 0) \\ &= x \left( -\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C \right). \end{aligned}$$

所以  $y^{-1} = x \left( C - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right)$ , 即  $y = \frac{1}{x \left( C - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right)}$ . 通解为

$$y = 0 \quad \text{和} \quad 1 = yx \left( C - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \right).$$

(5) 这是 Bernoulli 方程.  $y \equiv 0$  是一个解. 当  $y \neq 0$  时, 方程写为  $y' - (\tan x)y = (\cos x)y^2$ . 两边同除以  $y^2$ :  $y^{-2}y' - (\tan x)y^{-1} = \cos x$ . 令  $u = y^{-1}$ , 则  $u' = -y^{-2}y'$ . 方程变为:

$$-u' - (\tan x)u = \cos x \implies u' + (\tan x)u = -\cos x.$$

这是一个线性方程.  $\int \tan x dx = -\ln|\cos x|$ .

$$\begin{aligned} u &= e^{-(-\ln|\cos x|)} \left( \int (-\cos x) e^{-\ln|\cos x|} dx + C \right) \\ &= |\cos x| \left( \int (-\cos x) \frac{1}{|\cos x|} dx + C \right). \end{aligned}$$

假设  $\cos x > 0$ , 则  $u = \cos x \left( \int (-1) dx + C \right) = \cos x(-x + C)$ . 所以  $y^{-1} = (C - x)\cos x$ , 即  $y = \frac{1}{(C - x)\cos x}$ . 通解为

$$y = 0, \text{ 和 } 1 = y \cos x(C - x).$$

(6) 这是 Bernoulli 方程.  $y \equiv 0$  是一个解. 当  $y \neq 0$  时, 将方程整理为标准形式:

$$y' \cos x = y - y^2(1 - \sin x) \cos x \implies y' - (\sec x)y = -(1 - \sin x)y^2.$$

两边同除以  $y^2$ :  $y^{-2}y' - (\sec x)y^{-1} = -(1 - \sin x)$ . 令  $u = y^{-1}$ , 则  $u' = -y^{-2}y'$ . 方程变为:

$$-u' - (\sec x)u = -(1 - \sin x) \implies u' + (\sec x)u = 1 - \sin x.$$

这是一个线性方程.  $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|$ .

$$\begin{aligned} u &= e^{-\ln|\sec x + \tan x|} \left( \int (1 - \sin x) e^{\ln|\sec x + \tan x|} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{|\sec x + \tan x|} \left( \int (1 - \sin x) |\sec x + \tan x| dx + C \right). \end{aligned}$$

假设  $\sec x + \tan x > 0$ , 则

$$\begin{aligned}\int (1 - \sin x)(\sec x + \tan x) dx &= \int (\sec x + \tan x - \tan x - \sin x \tan x) dx \\ &= \int \left(\sec x - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} dx \\ &= \int \cos x dx = \sin x.\end{aligned}$$

所以  $u = \frac{1}{\sec x + \tan x}(\sin x + C)$ .

注 此处只需要考虑  $\sec x + \tan x > 0$  的情形, 从另一个角度来理解是这样的:

$$\begin{aligned}d((\tan x + \sec x)u) &= ((\sec x + \tan x)u' + \sec x(\sec x + \tan x)u) dx \\ &= ((\sec x + \tan x)(1 - \sin x)) dx\end{aligned}$$

因此

$$(\tan x + \sec x)u = \int (\sec x + \tan x)(1 - \sin x) dx + C = \sin x + C.$$

故微分方程的解为

$$y = 0 \quad \text{和} \quad y(\sin x + C) = \sec x + \tan x.$$

**习题 6.1.5** 求下列方程满足初值条件的特解.

$$(1) \quad y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}, y(1) = 1;$$

$$(2) \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}, y(\pi) = 1.$$

解

(1) 这是齐次方程. 令  $u = y/x$ , 则  $y' = u'x + u$ . 方程变为

$$u'x = u(\ln u - 1).$$

分离变量:

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

积分得

$$\ln u - 1 = Cx.$$

所以  $u = e^{1+Cx}$ , 即  $y = xe^{1+Cx}$ . 代入初值  $y(1) = 1$ , 得  $1 = 1 \cdot e^{1+C}$ , 解得  $C = -1$ . 故特解为

$$y = xe^{1-x}, x > 0.$$

(2) 这是线性方程, 积分因子为  $I(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$  (因  $x > 0$ ). 通解为

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} \left( \int x \cdot \frac{\sin x}{x} dx + C \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( \int \sin x dx + C \right) = \frac{-\cos x + C}{x}. \end{aligned}$$

代入初值  $y(\pi) = 1$ , 得  $1 = \frac{-\cos \pi + C}{\pi} = \frac{1 + C}{\pi}$ . 解得  $C = \pi - 1$ . 故特解为

$$y = \frac{-\cos x + \pi - 1}{x}, x > 0.$$

**习题 6.1.6** 求解下列微分方程.

(1)  $y' + x = \sqrt{x^2 + y}$ ;

(2)  $y' = \cos(x - y)$ ;

(3)  $y' - e^{x-y} + e^x = 0$ ;

(4)  $y' \sin y + x \cos y + x = 0$ .

**解**

(1) 令  $u^2 = x^2 + y$ , 则  $y = u^2 - x^2$ ,  $y' = 2uu' - 2x$ . 代入方程得

$$\begin{aligned} y' + x &= \sqrt{x^2 + y} \\ \implies 2uu' - 2x + x &= u \\ \implies 2vx(xv' + v) &= x + vx(u = vx) \\ \implies (1 - p)^{-2} &= C|x| \\ \implies y &= -2x^4 + Cx^6 \end{aligned}$$

(2) 令  $u = x - y$ , 则  $y = x - u$ ,  $y' = 1 - u'$ . 代入方程得

$$\begin{aligned} y' &= \cos(x - y) \\ \implies 1 - u' &= \cos u \\ \implies u' &= 1 - \cos u \\ \implies \frac{du}{1 - \cos u} &= dx \\ \implies \int \frac{du}{1 - \cos u} &= \int dx \end{aligned}$$

注意到  $\frac{1}{1 - \cos u} = \frac{1}{2} \csc^2\left(\frac{u}{2}\right)$ , 所以

$$\int \frac{du}{1 - \cos u} = \int \frac{1}{2} \csc^2\left(\frac{u}{2}\right) du = -2 \cot\left(\frac{u}{2}\right) + C.$$

故方程的通解为

$$-2 \cot\left(\frac{x - y}{2}\right) = x + C.$$

(3) 令  $u = e^y, u' = e^y y'$ , 代入方程得

$$\begin{aligned} y' - e^{x-y} + e^x &= 0 \\ \implies e^y y' - e^x + e^x e^y &= 0 \\ \implies u' - e^x + e^x u &= 0 \\ \implies \frac{1}{1-u} du &= e^x dx \\ \implies -\ln|1-u| &= e^x + C \\ \implies 1 - e^y &= C' e^{-e^x} \end{aligned}$$

(4) 直接分离变量, 并验证  $y = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$  为方程的特解, 因此

$$\begin{aligned} \ln|1 + \cos y| &= \frac{1}{2}x^2 + C \\ \implies 1 + \cos y &= C' e^{\frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

**习题 6.1.7** 试用常数变易法导出 Bernoulli 方程的通解.

解 Bernoulli 方程的一般形式为:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (n \neq 0, 1)$$

我们使用常数变易法来求解.

(1) 求解对应的齐次线性方程

我们先考虑与 Bernoulli 方程相关的齐次线性方程:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

这是一个可分离变量的方程:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

两边积分, 得  $\ln|y| = -\int P(x)dx + C_0$ , 其通解为:

$$y = C - \int P(x)dx$$

其中  $C$  是任意常数.

(2) 使用常数变易法

现在, 我们假设原 Bernoulli 方程的解具有与上述齐次解相似的形式, 但将常数  $C$  替换为一个关于  $x$  的函数  $C(x)$ . 设原方程的解为:

$$y(x) = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

我们求其导数:

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x))$$

注意到  $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ , 上式可以写成:

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)y$$

### (3) 代入原方程并求解 $C(x)$

将  $y'$  的表达式代入原 Bernoulli 方程  $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ :

$$\left(C'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)y\right) + P(x)y = Q(x)y^n$$

化简得:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)y^n$$

现在, 将  $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$  代入上式的右边:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \left(C(x)e^{-\int P(x)dx}\right)^n = Q(x)[C(x)]^n e^{-n\int P(x)dx}$$

整理以求解  $C'(x)$ :

$$C'(x) = Q(x)[C(x)]^n e^{-n\int P(x)dx} e^{\int P(x)dx} = Q(x)[C(x)]^n e^{(1-n)\int P(x)dx}$$

这是一个关于  $C(x)$  的可分离变量方程. 我们分离变量:

$$\frac{dC}{[C(x)]^n} = Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx} dx$$

两边积分 (假设  $n \neq 1$ ):

$$\begin{aligned} \int [C(x)]^{-n} dC &= \int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx} dx \\ \frac{1}{1-n} [C(x)]^{1-n} &= \int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx} dx + C_1 \end{aligned}$$

解出  $[C(x)]^{1-n}$ :

$$[C(x)]^{1-n} = (1-n) \left( \int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx} dx + C_1 \right)$$

### (4) 得到通解

从  $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$  可得  $C(x) = ye^{\int P(x)dx}$ . 代入上式:

$$\begin{aligned} \left(ye^{\int P(x)dx}\right)^{1-n} &= (1-n) \left( \int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx} dx + C_1 \right) \\ y^{1-n} e^{(1-n)\int P(x)dx} &= (1-n) \int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx} dx + C' \end{aligned}$$

两边同乘以  $e^{-(1-n)\int P(x)dx}$ :

$$y^{1-n} = e^{-(1-n)\int P(x)dx} \left( (1-n) \int Q(x)e^{(1-n)\int P(x)dx} dx + C' \right)$$

这与通过标准代换  $u = y^{1-n}$  得到的解是等价的.

**习题 6.1.8** 一条曲线过点  $(2, 3)$ , 其在坐标轴间的任意切线段被切点平分, 求这条曲线.

**解** 设曲线上任意一点为  $(x, y)$ , 该点的切线方程为  $Y - y = y'(X - x)$ . 切线与  $X$  轴的交点 (令  $Y = 0$ ):  $X = x - \frac{y}{y'}$ . 切线与  $Y$  轴的交点 (令  $X = 0$ ):  $Y = y - xy'$ . 这两个交点分别是  $(x - \frac{y}{y'}, 0)$  和  $(0, y - xy')$ .

根据题意, 这两个交点所构成的线段的中点是切点  $(x, y)$  本身. 所以我们有中点坐标公式:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(x - \frac{y}{y'}) + 0}{2} \implies 2x = x - \frac{y}{y'} \implies x = -\frac{y}{y'} \\ y &= \frac{0 + (y - xy')}{2} \implies 2y = y - xy' \implies y = -xy' \end{aligned}$$

从第一个方程可以得到微分方程:

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{y}{x}$$

(第二个方程  $y = -x(-\frac{y}{x}) = y$  与第一个方程是相容的).

这是一个可分离变量的方程.

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$

两边积分:

$$\int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx \implies \ln|y| = -\ln|x| + C_1$$

$$\ln|y| + \ln|x| = C_1 \implies \ln|xy| = C_1$$

$$|xy| = e^{C_1} \implies xy = C \quad (C \text{ 为任意非零常数})$$

曲线经过点  $(2, 3)$ , 代入方程确定常数  $C$ :

$$2 \cdot 3 = C \implies C = 6$$

因此, 所求的曲线方程为  $xy = 6$ .

**习题 6.1.9** 设函数  $f(x)$  处处连续, 且  $f(x) = \int_0^x f(t)dt$  (对  $x \in \mathbb{R}$ ), 求  $f(x)$ .

**解** 给定方程  $f(x) = \int_0^x f(t)dt$ . 由于  $f(x)$  连续, 根据微积分基本定理, 积分的变上限函数  $\int_0^x f(t)dt$  是可导的, 且其导数为  $f(x)$ . 对方程两边关于  $x$  求导, 我们得到:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x)$$

我们得到了一个微分方程  $f'(x) = f(x)$ , 即  $\frac{dy}{dx} = y$  (令  $y = f(x)$ ). 这是一个可分离变量的方程, 其通解为:

$$y = Ce^x$$

所以  $f(x) = Ce^x$ .

现在我们需要确定常数  $C$ . 将  $x = 0$  代入原积分方程  $f(x) = \int_0^x f(t)dt$ :

$$f(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$$

再将  $x = 0$  代入通解  $f(x) = Ce^x$ :

$$f(0) = Ce^0 = C \cdot 1 = C$$

因此, 我们得到  $C = 0$ . 所以, 函数  $f(x)$  的唯一解是  $f(x) = 0 \cdot e^x = 0$ . 即  $f(x)$  是零函数.

**习题 6.1.10** 已知铀的衰变速率与铀的现存量成正比 (比例常数为  $k$ ). 设开始时铀的量为  $a$ , 问  $t$  时刻铀的量  $x(t)$  为多少?

**解** 设  $t$  时刻铀的量为  $x(t)$ . 衰变速率即为  $\frac{dx}{dt}$ . 根据题意, 衰变速率与现存量成正比, 比例常数为  $k$ . 因为是衰变, 所以速率为负.

$$\frac{dx}{dt} = -kx(t) \quad (k > 0)$$

这是一个可分离变量的微分方程.

$$\frac{dx}{x} = -kdt$$

两边积分:

$$\int \frac{1}{x} dx = \int -kdt \implies \ln|x| = -kt + C_1$$

由于  $x(t)$  代表物质的量,  $x(t) > 0$ , 所以  $|x| = x$ .

$$\ln x = -kt + C_1 \implies x(t) = e^{-kt+C_1} = e^{C_1}e^{-kt}$$

令  $C = e^{C_1}$ , 则通解为  $x(t) = Ce^{-kt}$ .

我们有初始条件: 开始时 ( $t = 0$ ) 铀的量为  $a$ . 即  $x(0) = a$ . 代入通解:

$$x(0) = Ce^{-k \cdot 0} = Ce^0 = C$$

所以  $C = a$ . 因此,  $t$  时刻铀的量为:

$$x(t) = ae^{-kt}$$

**习题 6.1.11** 一汽艇以速度  $v = 10$  km/h 在静水上运动, 它的发动机在开足马力后关掉, 经过 20 s 后, 汽艇的速度降低为  $v_1 = 6$  km/h. 设水对汽艇运动的阻力与汽艇速度成正比, 试求:

- (1) 发动机停止 2 min 后汽艇的速度;
- (2) 发动机停止 1 min 后汽艇所走的路程.

**解** 设汽艇的质量为  $m$ , 速度为  $v(t)$ . 阻力  $F_r$  与速度成正比,  $F_r = -kv$  ( $k > 0$  为阻力系数). 根

据牛顿第二定律  $F = ma$ , 我们有:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv$$

这是一个可分离变量的方程.

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dt$$

两边积分:  $\ln v = -\frac{k}{m}t + C_1$ . 通解为  $v(t) = e^{C_1} e^{-\frac{k}{m}t} = C e^{-\frac{k}{m}t}$ .

我们统一单位. 速度单位用 m/s, 时间单位用 s.  $v_0 = 10 \text{ km/h} = 10 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = \frac{25}{9} \text{ m/s}$ .

$$v_1 = 6 \text{ km/h} = 6 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} = \frac{5}{3} \text{ m/s}.$$

初始条件:  $t = 0$  时,  $v(0) = v_0 = \frac{25}{9}$ . 代入通解:  $v(0) = C e^0 = C \implies C = \frac{25}{9}$ . 所以速度函数为  $v(t) = \frac{25}{9} e^{-\frac{k}{m}t}$ .

利用  $t = 20 \text{ s}$  时的数据求  $\frac{k}{m}$ :  $v(20) = \frac{5}{3}$ .

$$\begin{aligned} \frac{5}{3} &= \frac{25}{9} e^{-\frac{k}{m} \cdot 20} \implies e^{-20 \frac{k}{m}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{25} = \frac{3}{5} \\ -20 \frac{k}{m} &= \ln \left( \frac{3}{5} \right) \implies \frac{k}{m} = -\frac{1}{20} \ln \left( \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{20} \ln \left( \frac{5}{3} \right) \end{aligned}$$

所以速度的精确表达式为  $v(t) = \frac{25}{9} e^{-\frac{t}{20} \ln(\frac{5}{3})} = \frac{25}{9} \left( \frac{3}{5} \right)^{\frac{t}{20}}$ .

(1) 求  $t = 2 \text{ min} = 120 \text{ s}$  后的速度.

$$v(120) = \frac{25}{9} \left( \frac{3}{5} \right)^{\frac{120}{20}} = \frac{25}{9} \left( \frac{3}{5} \right)^6 = \frac{5^2}{3^2} \cdot \frac{3^6}{5^6} = \frac{3^4}{5^4} = \left( \frac{3}{5} \right)^4 = \frac{81}{625} \text{ m/s}$$

$$\text{换算成 km/h: } \frac{81}{625} \cdot \frac{3600}{1000} = \frac{81}{625} \cdot \frac{18}{5} = \frac{1458}{3125} \approx 0.46656 \text{ km/h}.$$

(2) 求  $t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$  后所走的路程  $s(60)$ . 路程是速度对时间的积分:  $s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$ .

$$s(60) = \int_0^{60} \frac{25}{9} e^{-\frac{k}{m}\tau} d\tau = \frac{25}{9} \left[ -\frac{m}{k} e^{-\frac{k}{m}\tau} \right]_0^{60}$$

我们知道  $\frac{k}{m} = \frac{1}{20} \ln\left(\frac{5}{3}\right)$ , 所以  $\frac{m}{k} = \frac{20}{\ln(5/3)}$ .

$$\begin{aligned} s(60) &= \frac{25}{9} \left(-\frac{m}{k}\right) \left(e^{-\frac{k}{m} \cdot 60} - e^0\right) \\ &= -\frac{25}{9} \frac{20}{\ln(5/3)} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{60}{20}} - 1\right) \\ &= -\frac{500}{9 \ln(5/3)} \left(\left(\frac{3}{5}\right)^3 - 1\right) \\ &= -\frac{500}{9 \ln(5/3)} \left(\frac{27}{125} - 1\right) = -\frac{500}{9 \ln(5/3)} \left(-\frac{98}{125}\right) \\ &= \frac{500 \cdot 98}{9 \cdot 125 \ln(5/3)} = \frac{4 \cdot 125 \cdot 98}{9 \cdot 125 \ln(5/3)} = \frac{392}{9 \ln(5/3)} \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\ln(5/3) \approx \ln(1.667) \approx 0.5108. \quad s(60) \approx \frac{392}{9 \cdot 0.5108} \approx \frac{392}{4.5972} \approx 85.27 \text{ m.}$$

**习题 6.1.12** 求解下列二阶方程.

- (1)  $xy'' = y'$ ; (2)  $y'' = \frac{y'}{x} + x$ ;  
 (3)  $y'' = y' + x$ ; (4)  $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$ .

**解**

(1) 令  $p = y'$ , 则  $y'' = p'$ . 方程变为  $xp' = p$ . 这是一个可分离变量方程:  $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}$ . 积分得

$\ln|p| = \ln|x| + C_1$ , 所以  $p = C_1'x$ . 即  $y' = C_1'x$ . 再次积分:  $y = \int C_1'x dx = \frac{1}{2}C_1'x^2 + C_2$ .  
 令  $C_1 = C_1'/2$ , 解为  $y = C_1x^2 + C_2$ .

(2) 令  $p = y'$ , 则  $y'' = p'$ . 方程变为  $p' = \frac{p}{x} + x$ , 即  $p' - \frac{1}{x}p = x$ . 这是一个线性方程.

$\int P(x)dx = \int -\frac{1}{x}dx = -\ln|x|$ . 通解为:

$$\begin{aligned} p &= e^{-(-\ln|x|)} \left( \int x e^{-\ln|x|} dx + C_1 \right) \\ &= |x| \left( \int x \frac{1}{|x|} dx + C_1 \right) \\ &= x \left( \int dx + C_1 \right) \quad (\text{假设 } x > 0) \\ &= x(x + C_1) = x^2 + C_1x. \end{aligned}$$

即  $y' = x^2 + C_1x$ . 再次积分:  $y = \int (x^2 + C_1x) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2$ .

(3) 令  $p = y'$ , 则  $y'' = p'$ . 方程变为  $p' = p + x$ , 即  $p' - p = x$ . 这是一个线性方程.  $\int P(x)dx =$

$\int -1dx = -x$ . 通解为:

$$\begin{aligned} p &= e^{-(-x)} \left( \int x e^{-x} dx + C_1 \right) \\ &= e^x \left( -(x+1)e^{-x} + C_1 \right) \quad (\text{分部积分}) \\ &= -(x+1) + C_1 e^x. \end{aligned}$$

即  $y' = C_1 e^x - x - 1$ . 再次积分:  $y = \int (C_1 e^x - x - 1) dx = C_1 e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + C_2$ .

(4) 方程不显含  $x$ . 令  $p = y'$ , 则  $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$ . 方程变为  $p \frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$ . 令

$u = p^2$ , 则  $\frac{du}{dy} = 2p \frac{dp}{dy}$ . 方程化为:

$$\frac{1}{2} \frac{du}{dy} + u = 2e^{-y} \implies \frac{du}{dy} + 2u = 4e^{-y}.$$

这是一个关于  $u(y)$  的线性方程.  $\int P(y)dy = \int 2dy = 2y$ . 通解为:

$$\begin{aligned} u &= e^{-2y} \left( \int 4e^{-y} e^{2y} dy + C_1 \right) \\ &= e^{-2y} \left( \int 4e^y dy + C_1 \right) = e^{-2y} (4e^y + C_1) = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}. \end{aligned}$$

因为  $u = p^2 = (y')^2$ , 所以  $(y')^2 = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}$ .

$$\begin{aligned} y' &= \pm \sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}} \\ \int \frac{dy}{\sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}} &= \pm \int dx \implies \int \frac{e^y dy}{\sqrt{4e^y + C_1}} = \pm x + C_2. \end{aligned}$$

令  $w = \sqrt{4e^y + C_1}$ , 则  $w^2 = 4e^y + C_1$ ,  $2w dw = 4e^y dy$ .

$$\int \frac{w/2 dw}{w} = \frac{1}{2} w = \frac{1}{2} \sqrt{4e^y + C_1}.$$

所以  $\frac{1}{2} \sqrt{4e^y + C_1} = \pm x + C_2$ .

$$\sqrt{4e^y + C_1} = \pm 2x + 2C_2 \implies 4e^y + C_1 = (C_1' \pm 2x)^2.$$

解为  $4e^y = (C_1 \pm 2x)^2 - C_1$ . 或者写为

$$e^y = x^2 + C_1 x + C_2.$$

**习题 6.1.13** 求下列二阶方程满足初值条件的特解.

$$(1) \quad y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, y(1) = 1, y'(1) = 0; \quad (2) \quad y^3 y'' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0.$$

**解**

(1) 方程在  $y' = 0$  时无定义. 我们对方程变形:  $y' y'' - \frac{(y')^2}{x} = x^2$ . 令  $u = (y')^2$ , 则  $u' = 2y' y''$ .

方程变为:

$$\frac{1}{2}u' - \frac{u}{x} = x^2 \implies u' - \frac{2}{x}u = 2x^2.$$

这是一个线性方程.  $\int P(x)dx = \int -\frac{2}{x}dx = -2\ln x = \ln(x^{-2})$ . 通解为:

$$\begin{aligned} u &= e^{-\ln(x^{-2})} \left( \int 2x^2 e^{\ln(x^{-2})} dx + C \right) \\ &= x^2 \left( \int 2x^2 \cdot x^{-2} dx + C \right) = x^2 \left( \int 2dx + C \right) = x^2(2x + C). \end{aligned}$$

所以  $(y')^2 = 2x^3 + Cx^2$ . 使用初值条件  $y'(1) = 0$ :

$$0^2 = 2(1)^3 + C(1)^2 \implies 2 + C = 0 \implies C = -2.$$

于是  $(y')^2 = 2x^3 - 2x^2 = 2x^2(x-1)$ .  $y' = \pm\sqrt{2x}\sqrt{x-1}$ . 再次积分:

$$y = \int \pm\sqrt{2x}\sqrt{x-1}dx$$

令  $t = \sqrt{x-1}$ , 则  $x = t^2 + 1, dx = 2tdt$ .

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1}dx &= \int (t^2 + 1)t \cdot 2tdt = \int (2t^4 + 2t^2)dt \\ &= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C' = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C'. \end{aligned}$$

所以  $y = \pm\sqrt{2} \left( \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \right) + C_2$ . 使用初值条件  $y(1) = 1$ :

$$1 = \pm\sqrt{2}(0+0) + C_2 \implies C_2 = 1.$$

特解为  $y = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{15}(3(x-1) + 5)(x-1)^{3/2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{15}(3x+2)(x-1)^{3/2}$ .

(2) 方程不显含  $x$ . 令  $p = y'$ , 则  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ . 方程变为

$$y^3 p \frac{dp}{dy} = -1$$

分离变量:

$$pdp = -y^{-3}dy$$

积分后整理得

$$p^2 = \frac{1}{y^2} + 2C_1,$$

即

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C.$$

使用初值条件  $y(1) = 1, y'(1) = 0$ :  $0^2 = \frac{1}{1^2} + C \implies C = -1$ . 所以

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2} \implies y' = \pm \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

分离变量后积分:

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = -\sqrt{1-y^2}$$

所以

$$-\sqrt{1-y^2} = \pm x + C_2.$$

使用初值条件  $y(1) = 1$

$$-\sqrt{1-1^2} = 0 = \pm 1 + C_2 \implies C_2 = \mp 1$$

所以

$$-\sqrt{1-y^2} = \pm x \mp 1 = \pm(x-1)$$

两边平方:

$$1-y^2 = (x-1)^2 \Rightarrow y^2 + (x-1)^2 = 1$$

由于  $y(1) = 1 > 0$ , 我们取上半圆, 即特解为  $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$ .

## 习题 6.2

习题 6.2.1 在下列方程中, 已知方程的一个特解  $y_1$ , 试求它们的通解.

- (1)  $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, y_1 = \frac{\sin x}{x}$ ; (2)  $y'' \sin^2 x = 2y, y_1 = \cot x$ ;  
 (3)  $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, y_1 = x$ .

解

(1) 微分方程在  $x \neq 0$  上有解, 在  $x > 0$  中取  $x_0 = 1$ , 则

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_1^x p(t) dt} dx = \frac{\sin x}{x} \int \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{x^2} dx \\ &= \frac{\sin x}{x} \int \csc^2 x dx = \frac{\sin x}{x} (-\cot x + C) = \frac{\cos x}{x} + C \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

在  $x < 0$  中取  $x_0 = -1$ , 同理可得相同的结果, 所以通解为

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\sin x}{x} (-\cot x) = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}.$$

(2) 微分方程在  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$  上有解, 在  $(0, \pi)$  中取  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ , 则

$$y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_{\frac{\pi}{2}}^x p(t) dt} dx = \cot x \int \tan^2 x dx = \cot x (\tan x - x + C) = 1 - x \cot x + C \cot x.$$

在  $(-\pi, 0)$  中取  $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ , 同理可得相同的结果, 所以通解为

$$y = C_1 \cot x + C_2 (1 - x \cot x).$$

(3) 微分方程在  $(-1, 1)$  上有解, 取  $x_0 = 0$ , 则

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_0^x p(t) dt} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\int_0^x \frac{2t}{1-t^2} dt} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1-x^2} dx = x \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \right) = -1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + Cx. \end{aligned}$$

所以通解为

$$y = C_1 x + C_2 \left( -1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right).$$

注 严格来说, 上述解有独立的三支, 分别位于  $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, +\infty)$  上. 三支的通解形式相同, 但常数  $C_1, C_2$  是独立的. 所以整体解应写为

$$y = C_1^{(-\infty, -1)} x + C_2^{(-\infty, -1)} \left( -1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right), \quad x < -1;$$

$$y = C_1^{(-1, 1)} x + C_2^{(-1, 1)} \left( -1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right), \quad -1 < x < 1;$$

$$y = C_1^{(1, +\infty)} x + C_2^{(1, +\infty)} \left( -1 + \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right), \quad x > 1.$$

习题 6.2.2 先用观察法求下列齐次方程的一个非零特解, 然后求方程的通解.

(1)  $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, x \neq 0;$

(2)  $xy'' - (1+x)y' + y = 0, x \neq 0.$

解

(1) 观察可得一个特解  $y_1 = x$ . 取  $x_0 = 1$ , 则

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_1^x p(t) dt} dx = x \int \frac{1}{x^2} e^{\int_1^x \frac{2}{t} dt} dx \\ &= x \int \frac{1}{x^2} \cdot x^2 dx = x(x+C) = x^2 + Cx. \end{aligned}$$

所以通解为

$$y = C_1 x + C_2 x^2.$$

(2) 观察可得一个特解  $y_1 = x+1$ . 取  $x_0 = 1$ , 则

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int_1^x p(t) dt} dx = (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} e^{\int_1^x \frac{1+t}{t} dt} dx \\ &= (x+1) \int \frac{1}{(x+1)^2} \cdot x e^x dx = (x+1) \left( \frac{e^x}{x+1} + C \right) = e^x + C(x+1). \end{aligned}$$

因此通解为

$$y = C_1(x+1) + C_2 e^x.$$

**习题 6.2.3** 已知方程  $(1+x^2)y'' + 2xy' - 6x^2 - 2 = 0$  的一个特解  $y_1 = x^2$ , 试求该方程满足初值条件  $y(-1) = 0, y'(-1) = 0$  的特解.

**解** 先求齐次方程  $(1+x^2)y'' + 2xy' = 0$  的通解. 令  $p = y'$ , 则齐次方程化为  $(1+x^2)p' + 2xp = 0$ . 分离变量得

$$\ln |p| = -\ln(1+x^2) + C \implies p = \frac{C}{1+x^2}.$$

因此齐次方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 \arctan x.$$

又有非齐次方程的一个特解  $y_1 = x^2$ , 故非齐次方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 \arctan x + x^2.$$

由初值条件  $y(-1) = 0, y'(-1) = 0$  可得

$$\begin{cases} C_1 - \frac{\pi}{4} C_2 + 1 = 0, \\ \frac{C_2}{2} - 2 = 0. \end{cases}$$

解得  $C_1 = \pi - 1, C_2 = 4$ . 因此所求特解为

$$y = \pi - 1 + 4 \arctan x + x^2.$$

**习题 6.2.4** 求下列常系数齐次方程的通解.

(1)  $y'' - 2y' - y = 0$ ;

(2)  $y'' + 2y' + 2y = 0$ ;

(3)  $y'' + y' - 6y = 0$ .

解

(1) 特征方程为  $r^2 - 2r - 1 = 0$ , 解得  $r_1 = 1 + \sqrt{2}, r_2 = 1 - \sqrt{2}$ . 因此通解为

$$y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}.$$

(2) 特征方程为  $r^2 + 2r + 2 = 0$ , 解得  $r_{1,2} = -1 \pm i$ . 因此通解为

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

(3) 特征方程为  $r^2 + r - 6 = 0$ , 解得  $r_1 = 2, r_2 = -3$ . 因此通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

习题 6.2.5 求下列常系数非齐次方程的一个特解.

(1)  $y'' + y = 2 \sin \frac{x}{2}$ ;

(2)  $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{2x}$ .

解

(1) 设特解形如  $y = C(x) \sin \frac{x}{2}$ , 代入方程得

$$\begin{aligned} & \left( \left( C''(x) - \frac{C(x)}{4} \right) \sin \frac{x}{2} + \frac{C'(x)}{2} \cos \frac{x}{2} \right) + C(x) \sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \\ \implies & \left( C'''(x) + \frac{3}{4}C(x) \right) \sin \frac{x}{2} + \frac{C'(x)}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \end{aligned}$$

比对  $y'' + y = 2 \sin \frac{x}{2}$  的系数可得

$$\begin{cases} C''' + \frac{3}{4}C = 2, \end{cases}$$

取  $C = \frac{8}{3}$  可解得上式, 因此一个特解为

$$y^* = \frac{8}{3} \sin \frac{x}{2}.$$

(2) 设特解形如  $y = (Ax + B)e^{2x}$ , 代入方程得

$$\begin{aligned} & ((4Ax + 4B + 4A) - 6(2Ax + 2B + A) + 9(Ax + B))e^{2x} = (x+1)e^{2x} \\ \implies & (Ax + (B - 2A))e^{2x} = (x+1)e^{2x} \end{aligned}$$

比对  $y'' - 6y' + 9y = (x+1)e^{2x}$  的系数可得

$$\begin{cases} A = 1, \\ B - 2A = 1. \end{cases}$$

解得  $A = 1, B = 3$ , 因此一个特解为

$$y^* = (x + 3)e^{2x}.$$

此类待定系数中, 所使用的特解形式有如下命题

**命题 ( $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$  型)**

求解非齐次方程  $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$  时候, 可设特解为:

$$y^* = x^k P_m(x) e^{\lambda x}$$

其中:

$$\begin{cases} e^{\lambda x} \text{照抄}, \\ P_m(x) \text{为} m \text{次一般多项式}, \\ k = \begin{cases} 0, & \text{当} \lambda \text{不是特征根}, \\ 1, & \text{当} \lambda \text{是特征单根}, \\ 2, & \text{当} \lambda \text{是特征重根}. \end{cases} \end{cases}$$

**命题 ( $f(x) = e^{\lambda x} (P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x)$  型)**

求解非齐次方程  $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$  时候, 可设特解为:

$$y^* = x^k e^{\lambda x} [P_m(x) \cos \omega x + Q_m(x) \sin \omega x]$$

其中:

$$\begin{cases} e^{\lambda x} \text{照抄}, \\ m = \max\{l, n\}, P_m(x) \text{和} Q_m(x) \text{分别为} m \text{次一般多项式}, \\ k = \begin{cases} 0, & \text{当} \lambda + \omega i \text{不是特征根}, \\ 1, & \text{当} \lambda + \omega i \text{是特征根}. \end{cases} \end{cases}$$

**习题 6.2.6** 验证函数组  $1, x, x^2, \dots, x^n$  在实轴上线性无关, 函数组  $1, \cos^2 x, \sin^2 x$  在实轴上线性相关.

**解** 设存在常数  $C_0, C_1, \dots, C_n$  使得

$$C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

则上式为一个恒等式, 对  $x$  求导  $n$  次可得

$$n! C_n = 0 \implies C_n = 0.$$

依此类推可得  $C_{n-1} = 0, C_{n-2} = 0, \dots, C_0 = 0$ . 因此函数组  $1, x, x^2, \dots, x^n$  在实轴上线性无关.

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

因此函数组  $1, \cos^2 x, \sin^2 x$  在实轴上线性相关.

**习题 6.2.7** 证明: 在区间  $I$  上任何线性相关的两个函数  $y_1(x), y_2(x)$ , 它们的 Wronski 行列式一定恒为零.

**解** 设  $y_1, y_2$  在区间  $I$  上线性相关, 则存在常数  $C_1, C_2$ , 不全为零, 使得

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

对上式求导可得

$$C_1 y_1'(x) + C_2 y_2'(x) = 0, \quad \forall x \in I.$$

将上述两式联立可得

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in I.$$

因此  $y_1, y_2$  的 Wronski 行列式恒为零.

**习题 6.2.8** 证明下列函数在区间  $(0, 2)$  上是线性无关的, 但是它们的 Wronski 行列式却恒为零:

$$y_1(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad y_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^2, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

**解** 设存在常数  $C_1, C_2$  使得

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = 0, \quad \forall x \in (0, 2).$$

当  $0 < x < 1$  时, 上式化为  $C_1(x-1)^2 = 0$ , 因此  $C_1 = 0$ ; 当  $1 < x < 2$  时, 上式化为  $C_2(x-1)^2 = 0$ , 因此  $C_2 = 0$ . 所以函数组  $y_1, y_2$  在区间  $(0, 2)$  上线性无关.

又因为

$$y_1'(x) = \begin{cases} 2(x-1), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2; \end{cases} \quad y_2'(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2(x-1), & 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

所以

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in (0, 2).$$

因此  $y_1, y_2$  的 Wronski 行列式恒为零.

**习题 6.2.9** 求下列方程的通解.

$$(1) \quad x''' + 3x'' + 3x' + x = 0;$$

$$(2) \quad x''' - 2x'' + x' - 2x = 0;$$

(3)  $x^{(4)} - 8x'' + 18x = 0$ ;

(4)  $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$ .

解

(1) 特征方程为  $r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0$ , 解得  $r_1 = -1$  为三重根. 因此通解为

$$x = (C_1 + C_2t + C_3t^2)e^{-t}.$$

(2) 特征方程为  $r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0$ , 解得  $r_1 = 2, r_{2,3} = \pm i$ , 因此通解为

$$x = C_1e^{2t} + C_2\cos t + C_3\sin t.$$

(3) 特征方程为  $r^4 - 8r^2 + 18 = 0$ , 解得  $r_{1,2} = 2 + i, r_{3,4} = 2 - i$ . 因此通解为

$$x = e^{2t}(C_1\cos t + C_2\sin t + C_3t\cos t + C_4t\sin t).$$

(4) 特征方程为  $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$ , 解得  $r_{1,2} = i, r_{3,4} = -i$ . 因此通解为

$$x = C_1\cos t + C_2\sin t + C_3t\cos t + C_4t\sin t.$$

## 第7章 无穷级数

### 习题 7.1

习题 7.1.1 证明下列等式:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 - \sqrt{2};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} = \ln 2; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1.$$

解

(1)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{2} - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - (\sqrt{2} - 1) = 1 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n - \ln(n+1) + \ln(2n+1) - \ln(2n-1)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln 1 - \ln(n+1) + \ln 3 - \ln(2n-1)) = \ln 2. \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{(n+1)^2} + 1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1. \end{aligned}$$

习题 7.1.2 研究下列级数的敛散性:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001}$ ;
- (2)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n-1}}$ ;
- (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ ;
- (4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ ;
- (5)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$ ;
- (6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ ;
- (7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}$ ;
- (8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+\frac{1}{n})^n}$ ;
- (9)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{\pi}{4n}$ ;
- (10)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$ ;
- (11)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ;
- (12)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$ ;
- (13)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ ;
- (14)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^k}$ ;
- (15)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3}$ ;
- (16)  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n \quad (a > 0)$ .

解

- (1) 发散, 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0.001} = 1$ .
- (2) 收敛, 因为  $\frac{1}{n\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ , 而  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$  收敛.
- (3) 发散, 因为  $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} \sim \frac{1}{2n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  发散.
- (4) 发散, 因为  $\sin n$  不趋于零.
- (5) 收敛, 因为  $2^n \sin \frac{\pi}{3^n} \sim \frac{2^n \pi}{3^n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \pi}{3^n}$  收敛.
- (6) 发散, 因为  $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \sim \frac{1}{n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.
- (7) 收敛, 因为  $\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{1}{2^n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛.
- (8) 收敛, 因为  $\frac{n}{(n+\frac{1}{n})^n} \leq \frac{n}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$  收敛.
- (9) 发散, 因为  $\arctan \frac{\pi}{4n} \sim \frac{\pi}{4n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4n}$  发散.
- (10) 收敛, 因为  $\frac{1000^n}{n!} \sim \frac{1000^n}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$  收敛.
- (11) 收敛, 因为  $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{(n!)^2}{\sqrt{4\pi n} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{n+k} \leq \prod_{k=1}^n \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛.

(12) 收敛, 因为  $\frac{3+(-1)^n}{2^n} \leq \frac{4}{2^n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$  收敛.

(13) 收敛, 因为  $\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}} = o\left(\frac{\sqrt[8]{n}}{\sqrt[4]{n^5}}\right) = o\left(\frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}\right)$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}$  收敛.

(14) 级数收敛性同

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)(\ln \ln x)^k} dx = \int_{\ln \ln 3}^{\infty} \frac{1}{t^k} dt,$$

故  $k > 1$  时, 级数收敛;  $k \leq 1$  时, 级数发散.

(15) 收敛, 因为

$$\left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3} = e^{n^3 \ln(\cos \frac{1}{n})} \sim e^{n^3(\ln(1 - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})))} \sim e^{-\frac{n}{2}}, n \rightarrow \infty,$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{2}}$  收敛.

(16)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha n}{n+1} = \alpha$ . 当  $\alpha < 1$  时, 收敛; 当  $\alpha \geq 1$  时, 发散.

**习题 7.1.3** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$  也收敛. 试举例说明逆命题不成立; 但若  $a_n > 0$  则逆命题成立.

**解** 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_1$$

收敛.

反例: 令  $a_n = (-1)^{n-1}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$  收敛, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

若  $a_n > 0$ , 由比较判别法, 因为  $a_n + a_{n+1} \geq a_n$ , 故  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$  推出  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

**习题 7.1.4** 证明或回答下面论断:

(1) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a \neq 0$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

(2) 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 是否有  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$ ?

(3) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$ , 且级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

**解**

(1) 正确, 因为  $a_n \sim \frac{a}{n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$  发散.

(2) 不一定, 如  $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = (-1)^{n-1}$  不存在.

(3) 正确,

$$\sum_{n=1}^{N+1} a_n = \sum_{n=1}^N n(a_n - a_{n+1}) + (N+1)a_{N+1}.$$

当  $N \rightarrow \infty$  时,  $\sum_{n=1}^N n(a_n - a_{n+1})$  收敛, 故

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N n(a_n - a_{n+1})$$

存在; 又因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$ , 故

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (N+1)a_{N+1} = a$$

也存在, 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

**习题 7.1.5** 设正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  也收敛. 试问反之是否成立?

解

(1) 由教材推论 7.8, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛.

(2) 反之不成立, 例如  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散.

**习题 7.1.6** 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是两个非负数列, 满足  $a_{n+1} < a_n + b_n$ , 而且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛. 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在.

解 由

$$0 \leq a_n < a_{n-1} + b_{n-1} < a_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-1} < \cdots < a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k,$$

故  $\{a_n\}$  有界, 因此存在收敛子列, 设为  $\{a_{n_k}\} \rightarrow a. \forall n, \exists k, \text{ s. t. } n_k < n < n_{k+1}$ , 则

$$a_{n_k} - \sum_{i=n_k}^{n-1} b_i < a_n < a_{n_{k+1}} + \sum_{i=n}^{n_{k+1}-1} b_i.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时,  $k \rightarrow \infty$ , 由  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛可知,  $\sum_{i=n_k}^{n-1} b_i \rightarrow 0$ ,  $\sum_{i=n}^{n_{k+1}-1} b_i \rightarrow 0$ , 由夹逼定理可知,  $a_n \rightarrow a$ .

**习题 7.1.7** 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ , 以及  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$  也收敛.

解

(1) 由柯西-施瓦茨不等式, 有

$$\sum_{n=1}^N |a_n b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N a_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N b_n^2}.$$

当  $N \rightarrow \infty$  时, 右端有界, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$  收敛.

(2) 正项级数满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|,$$

故  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$  收敛.

(3) 由柯西-施瓦茨不等式, 有

$$\sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{n} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N a_n^2} \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2}}.$$

当  $N \rightarrow \infty$  时, 右端有界, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$  收敛.

**习题 7.1.8** 求下列极限 (其中  $p > 1$ ):

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} \right);$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{p^{2n}} \right).$$

解

(1) 因为

$$\frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} \leq n \cdot \frac{1}{(n+1)^p} = \frac{n}{(n+1)^p} \leq \frac{1}{(n+1)^{p-1}},$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{(n+1)^p} + \frac{1}{(n+2)^p} + \cdots + \frac{1}{(2n)^p} \right) = 0.$$

(2) 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{p^{n+1}} + \frac{1}{p^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{p^{2n}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/p^{n+1}(1 - (1/p)^n)}{1 - 1/p} = 0.$$

**习题 7.1.9** 设正项数列  $\{a_n\}$  单调递减, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  发散, 试问  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{a_n + 1} \right)^n$  是否收敛? 说明理由.

解 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  发散, 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ . 又因为  $\{a_n\}$  单调递减, 故存在常数  $a > 0$ , 使得当  $n$  足够大时, 有  $a_n \geq a$ . 因此, 当  $n$  足够大时,

$$\left( \frac{1}{a_n + 1} \right)^n \leq \left( \frac{1}{a + 1} \right)^n.$$

由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$  收敛, 故由比较判别法可知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$  收敛.

**习题 7.1.10** 设  $a_n > 0, a_n > a_{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

是收敛的.

**解** 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

又因为

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{na_{n+1} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}{n(n+1)} < 0,$$

故数列  $\left\{ \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right\}$  单调递减. 由 Leibniz 判别法, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

收敛.

**习题 7.1.11** 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  绝对收敛, 求证:  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  绝对收敛.

**解** 由三角不等式, 有

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n|.$$

因为  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  收敛, 故由比较判别法可知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n + b_n|$  收敛, 即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  绝对收敛.

**习题 7.1.12** 研究下列级数的条件收敛性与绝对收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2n+100}{3n+1} \right)^n;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{\frac{1}{n}} - 1);$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right);$$

$$(9) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( 1 - \cos \frac{p}{n} \right);$$

$$(10) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( 1 - \cos \frac{1}{n} \right)^p.$$

**解**

(1) 绝对收敛.  $\left|(-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n\right| \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  收敛.

(2) 绝对收敛.  $\left|\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n}$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  收敛.

(3) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left|(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}\right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  发散, 故绝对发散. 又因为

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1+100} - \frac{\sqrt{n}}{n+100} = \frac{100 - \sqrt{n(n+1)}}{(n+1+100)(n+100)} < 0,$$

在  $n$  充分大时成立, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(4) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left|(-1)^{n-1} \sin \frac{1}{n}\right| \sim \frac{1}{n},$$

且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故绝对发散. 又因为  $\sin \frac{1}{n}$  单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(5) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left|(-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}\right| \sim \frac{\ln n}{n},$$

且  $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln^2 x$  发散, 故绝对发散. 又因为  $\frac{\ln n}{n}$  在  $n$  充分大时单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(6) (a)  $p \leq 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$ , 级数发散.

(b)  $0 < p \leq 1$  时, 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p},$$

且  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  发散, 故绝对发散. 又因为  $\frac{1}{n^p}$  单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(c)  $p > 1$  时, 绝对收敛. 因为

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p},$$

且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收敛, 故绝对收敛.

(7) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left|(-1)^n (e^{\frac{1}{n}} - 1)\right| \sim \frac{1}{n},$$

且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故绝对发散. 又因为  $e^{\frac{1}{n}} - 1$  单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(8) 绝对收敛. 因为

$$\left| (-1)^n \left( \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right) \right| = \frac{1}{n} - \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{n} - \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2n^2},$$

且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$  收敛, 故绝对收敛.

(9) (a)  $p \neq 0$  时绝对收敛. 因为

$$\left| (-1)^n \left( 1 - \cos \frac{p}{n} \right) \right| \sim \frac{p^2}{2n^2},$$

且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2}{2n^2}$  收敛, 故绝对收敛.

(b)  $p = 0$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos 0) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$  收敛.

(10) 由  $1 - \cos \frac{1}{n} \sim \frac{1}{2n^2}$  以及 (6) 的结论可知,

(a)  $p \geq \frac{1}{2}$  时, 绝对收敛.

(b)  $0 < p < \frac{1}{2}$  时, 条件收敛, 绝对发散.

(c)  $p \leq 0$  时, 发散.

**习题 7.1.13** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 证明:  $S_n^{\pm}$  当  $n \rightarrow \infty$  时有极限且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^+}{S_n^-} = 1$ . 这里,  $S_n^{\pm}$

是正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pm}$  的部分和,  $a_n^+, a_n^-$  的定义由 7.1.3 小节给出.

**解** 因为  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$ , 又  $S_n^-$  发散到  $+\infty$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^+ - S_n^-}{S_n^-} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{S_n^-} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S}{S_n^-} = 0,$$

**习题 7.1.14** 证明: 如果正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 并且从某项之后有

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛.

**解**  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  为正项级数, 故  $b_n > 0$ . 由题设不等式变形得

$$\frac{|a_{n+1}|}{b_{n+1}} < \frac{|a_n|}{b_n}.$$

因此  $\exists M > 0$ , 使得  $\forall n$  充分大时,  $\frac{|a_n|}{b_n} < M$ , 即  $|a_n| < Mb_n$ . 由比较判别法可知,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收

敛.

习题 7.1.15 研究下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n};$$

$$(2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{\ln n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{100\sqrt[3]{n}}.$$

解

$$(1) \quad (a) \quad x = k\pi \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} 0 \text{ 收敛.}$$

$$(b) \quad x \neq k\pi \text{ 时, } \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \text{ 的部分和有}$$

$$\sum_{n=1}^N \sin nx = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x - \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}},$$

部分和有界  $\frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$ , 又  $\frac{1}{n}$  单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法, 级数条件收敛.

同时

$$\left| \frac{\sin nx}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n},$$

其中  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$  条件收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n} \right|$  发散, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$  绝对发散.

(2) 记  $S_1 = 0$ , 则

$$\begin{aligned} S_{4n+1} &= \sum_{k=2}^n (S_{4k+1} - S_{4(k-1)+1}) \\ &= \sum_{k=2}^n (-1)^k \left( \frac{\sqrt{2}}{2 \log(4k-1)} + \frac{1}{\log(4k)} + \frac{\sqrt{2}}{2 \log(4k+1)} \right) \end{aligned}$$

由 Leibniz 判别法,  $\{S_{4n+1}\}$  条件收敛, 设为  $S$ .  $\forall n, \exists k$ , s. t.  $4k+1 \leq n < 4(k+1)+1$ , 则

$$\begin{aligned} |S_n - S| &\leq |S_n - S_{4k+1}| + |S_{4k+1} - S| \\ &\leq \left( \frac{\sqrt{2}}{2 \log(4k+3)} + \frac{1}{\log(4k+4)} + \frac{\sqrt{2}}{2 \log(4k+5)} \right) + |S_{4k+1} - S| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

即证条件收敛.

同时

$$\left| \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{\ln n} \right| \geq \frac{|\cos \frac{n\pi}{4}|^2}{\ln n} = \frac{1}{2 \ln n} + \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2 \ln n},$$

其中  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2 \ln n}$  发散,  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2 \ln n}$  条件收敛, 故  $\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{\ln n} \right|$  发散, 级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{4}}{\ln n}$  绝对发散.

(3) 因为

$$\frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{\sin n}{\sqrt{n}} e,$$

故只需要考虑  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}}$  的敛散性.

其中  $\sum_{n=1}^N \sin n$  的部分和有

$$\sum_{n=1}^N \sin n = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) - \cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}},$$

部分和有界  $\frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$ , 又  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法, 级数条件收敛.

同时

$$\left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right| \geq \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} - \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}},$$

其中  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$  条件收敛, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right|$  发散, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  绝对发散.

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{100\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{1/100}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{(n+1)n^{1/100}}$$

其中第一项条件收敛, 第二项绝对收敛, 故原级数条件收敛.

## 习题 7.2

习题 7.2.1 证明: 两个在共同区间  $I$  上一致收敛的级数的和, 也在  $I$  上一致收敛.

解 设  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)$  在区间  $I$  上一致收敛, 则对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1, N_2$ , 当  $m > n \geq N_1$  时, 有

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

当  $m > n \geq N_2$  时, 有

$$\left| \sum_{k=n}^m v_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $m > n \geq N$  时, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^m [u_k(x) + v_k(x)] \right| &= \left| \sum_{k=n}^m u_k(x) + \sum_{k=n}^m v_k(x) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n}^m v_k(x) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) + v_n(x)]$  在区间  $I$  上一致收敛.

习题 7.2.2 确定下列函数项级数的收敛域.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx};$$

$$(2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}} \sin \frac{\pi}{2^n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n-3^n};$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} n! \left( \frac{x}{n} \right)^n;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}};$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}.$$

解

(1)

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-x} \rightarrow e^{-x}.$$

故当  $x > 0$  时, 级数收敛; 当  $x \leq 0$  时, 级数发散. 收敛域为  $(0, +\infty)$ .

(2)

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{|x|^{n^2}}{n}} = \frac{|x|^n}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow |x|^n.$$

故当  $|x| < 1$  时, 级数收敛; 当  $|x| > 1$  时, 级数发散; 当  $x = 1$  时, 级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散; 当

$x = -1$  时, 级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  收敛. 收敛域为  $[-1, 1)$ .

(3)

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1} \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^n} = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}} \rightarrow \left| \frac{1-x}{1+x} \right|.$$

故当  $x \in (-\infty, 0)$  时, 级数发散; 当  $x \in (0, +\infty)$  时, 级数收敛; 当  $x = 0$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$  由 Liebnitz 判别法收敛. 收敛域为  $[0, +\infty)$ .

(4)

$$\frac{1}{x^{2n}} \sin \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{(2x)^n}.$$

故当  $|x| > \frac{1}{2}$  时, 级数收敛; 当  $|x| < \frac{1}{2}$  时, 级数发散; 当  $x = \pm \frac{1}{2}$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$  发散.

收敛域为  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ .

(5)

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{|x-3|^n}{|n-3^n|}} = \frac{|x-3|}{\sqrt[n]{|n-3^n|}} \rightarrow \frac{|x-3|}{3}.$$

故当  $|x-3| < 3$  时, 级数收敛; 当  $|x-3| > 3$  时, 级数发散; 当  $x = 0$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n-3^n}$

发散; 当  $x = 6$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3^n}$  发散. 收敛域为  $(0, 6)$ .

(6)

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)! \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n! \left(\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{x}{n} \rightarrow 0.$$

故级数在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛. 收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ .

(7)  $x \neq 0$  时,  $\cos nx$  的部分和

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

故当  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  时, 级数收敛; 当  $x = 0$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} 1$  发散. 收敛域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ .

(8)

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}}{\frac{x^n}{1-x^n}} = \frac{x(1-x^n)}{1-x^{n+1}} \rightarrow x.$$

故当  $|x| < 1$  时, 级数收敛; 当  $|x| > 1$  时, 级数发散; 当  $x = 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-1^n}$  无定义;

当  $x = -1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-(-1)^n}$  发散. 收敛域为  $(-1, 1)$ .

**习题 7.2.3** 在区间  $[0, 1]$  上, 定义

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{1}{n}, \\ 0, & x \neq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

证明: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[0, 1]$  上一致收敛, 但是它没有 Weierstrass 判别法中的控制级数.

**解** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ , 则当  $m > n \geq N$  时, 对任意  $x \in [0, 1]$ , 有

$$\left| \sum_{k=n}^m u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^m |u_k(x)| \leq \sum_{k=n}^m \frac{1}{k} < \varepsilon.$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[0, 1]$  上一致收敛.

若存在控制级数  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  使得对任意  $x \in [0, 1]$ , 均有  $|u_n(x)| \leq M_n$ , 则取  $x = \frac{1}{n}$  时, 有

$$\frac{1}{n} = \left| u_n \left( \frac{1}{n} \right) \right| \leq M_n,$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  发散, 与控制级数矛盾. 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  没有控制级数.

**习题 7.2.4** 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+(nx)^2)}, -\infty < x < +\infty;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n, -1 < x < 1;$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leq x < +\infty;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}, 0 \leq x < +\infty;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}, 1 < x < +\infty;$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, 0 < \delta \leq x \leq 2\pi - \delta;$$

$$(8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(ne^n)^x}, 0 \leq x < +\infty.$$

**解**

(1)

$$|u_n(x)| = \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

(2)

$$|u_n(x)| = \left| \frac{1}{2^n(1+(nx)^2)} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(1+(nx)^2)}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

(3)

$$\sup_{x \in (-1, 1)} |u_n(x)| = \sup_{x \in (-1, 1)} |(-1)^{n-1} x^n| = 1.$$

因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in (-1, 1)} |u_n(x)| \neq 0$ . 故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$  在  $(-1, 1)$  上不一致收敛.

(4) 考虑函数  $f(x) = x^2 e^{-nx}$  在  $[0, +\infty)$  上的最大值, 由  $f'(x) = 2xe^{-nx} - nx^2 e^{-nx} = xe^{-nx}(2 - nx)$  可知, 当  $x = \frac{2}{n}$  时,  $f(x)$  取得最大值, 即

$$\sup_{x \in [0, +\infty)} |u_n(x)| = f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2} e^{-2}.$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

(5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, +\infty)} \left| \frac{(-1)^n}{x+n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

(6)  $\forall N, \forall n > N, \exists p = n, x = 1 + \frac{1}{\ln 2N} \in (1, +\infty)$ , 使得

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^x} \cdot \frac{1}{k^{\ln 2N}} \\ &> \frac{1}{(2N)^{\frac{1}{\ln 2N}}} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{e} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \frac{1}{e} \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{e} \ln \frac{2n+1}{n+1} > \frac{1}{e} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  在  $(1, +\infty)$  上不一致收敛.

(7)  $\cos nx$  的部分和

$$\left| \sum_{k=1}^n \cos kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}.$$

有界, 且  $\frac{1}{n}$  单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$  在  $[\delta, 2\pi - \delta]$  上一致收敛.

敛.

(8) 由 (4) 知,  $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛, 且  $\frac{1}{n^x} \leq 1$  对  $x$  单调, 对  $n, x$  一致有界, 由

Abell 判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(ne^n)^x}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

**习题 7.2.5** 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{nx}}$  在  $0 \leq x < +\infty$  中一致收敛.

**解**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  作为函数列时, 对  $x$  而言是常数, 故对  $x$  一致收敛. 同时  $\frac{1}{e^{nx}} \leq 1$  对  $x$  单调, 对  $n, x$  一

致有界, 由 Abell 判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{e^{nx}}$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

**习题 7.2.6** 证明: 函数  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$  在  $(1, +\infty)$  内连续, 且具有的各阶导数.

**解**

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(x)$  在  $(1, +\infty)$  中并不一致收敛, 但对每一点  $x \in (1, +\infty)$ , 总是存在  $1 < \alpha < x < \beta$ , 在区间  $[\alpha, \beta]$  上, 有

$$\left| \frac{(-\ln n)^k}{n^x} \right| \leq \frac{(\ln n)^k}{n^\alpha}.$$

由 Cauchy 根值判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^\alpha}$  收敛, 故由 Weierstrass 判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上一致收敛. 由教材定理 7.36 知,  $\zeta(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上处处可微.

递推的可以得到,  $\zeta(x)$  在  $[\alpha, \beta]$  上具有任意阶导数, 由  $x$  的任意性知,  $\zeta(x)$  在  $(1, +\infty)$  内连续, 且具有各阶导数.

**习题 7.2.7** 证明:  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4}$  当  $|x| < +\infty$  时, 具有连续的二阶微商.

**解**

$$|u'(x) = \frac{\cos nx}{n^3}| \leq \frac{1}{n^3}$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

$$|u''(x) = -\frac{\sin nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin nx}{n^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛. 因此  $f''(x) = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^4} \right)'' =$

$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin nx}{n^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$ .

因为  $\frac{\sin nx}{n^2}$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 由教材定理 7.34 知,  $f''(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续.

**习题 7.2.8** 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  及  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

解

$$\left| \frac{x^n}{(1+2x)^n} \cos \frac{n\pi}{x} \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(n\pi)}{(1+2x)^n}$  在  $[1, +\infty)$  上一致收敛.

又  $u_n(x) = \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$  在  $[1, +\infty)$  上连续, 由教材定理 7.34 知,  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上连续, 故

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n \cos \frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n \cos n\pi}{(1+2 \cdot 1)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = -\frac{1}{4}.$$

**习题 7.2.9** 设  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$ , 求  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$ .

解

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} n e^{-nx} dx = -e^{-nx} \Big|_{x=\ln 2}^{x=\ln 3} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}.$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

收敛, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$  在  $[\ln 2, \ln 3]$  上一致收敛, 故可以交换积分和求和顺序, 有

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\ln 2}^{\ln 3} n e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2}.$$

**习题 7.2.10** 递归定义  $[0, 1]$  上的连续可微函数列  $\{f_n\}$  如下:  $f_1 = 1$ , 在  $(0, 1)$  上有

$$f'_{n+1}(x) = f_n(x) f_{n+1}(x), \quad f_{n+1}(0) = 1.$$

求证: 对每个  $x \in [0, 1]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  存在, 并求出其极限函数.

解 设  $f_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} x^n$ , 则由  $f'_{k+1}(x) = f_k(x) f_{k+1}(x)$ , 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{(k+1)} x^{n-1} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k+1)} x^n \right).$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( (n+1) a_{n+1}^{(k+1)} - \sum_{m=0}^n a_m^{(k)} a_{n-m}^{(k+1)} \right) x^n = 0.$$

因此  $(n+1)a_{n+1}^{(k+1)} - \sum_{m=0}^n a_m^{(k)} a_{n-m}^{(k+1)} = 0$ , 且  $a_0^{(k+1)} = f_{k+1}(0) = 1$ , 由此可得

$$a_{n+1}^{(k+1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^n a_m^{(k)} a_{n-m}^{(k+1)}.$$

于是

$$a_0^{(2)} = 1,$$

$$a_1^{(2)} = a_0^{(1)} a_0^{(2)} = 1,$$

$$a_2^{(2)} = \frac{1}{2}(a_0^{(1)} a_1^{(2)} + a_1^{(1)} a_0^{(2)}) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2},$$

$$a_0^{(3)} = 1,$$

$$a_1^{(3)} = a_0^{(2)} a_0^{(3)} = 1,$$

$$a_2^{(3)} = \frac{1}{2}(a_0^{(2)} a_1^{(3)} + a_1^{(2)} a_0^{(3)}) = \frac{1}{2}(1+1) = 1,$$

$$a_3^{(3)} = \frac{1}{3}(a_0^{(2)} a_2^{(3)} + a_1^{(2)} a_1^{(3)} + a_2^{(2)} a_0^{(3)}) = \frac{1}{3}(1+1+\frac{1}{2}) = \frac{5}{6}.$$

依此类推可得

$$a_0^{(k)} = a_1^{(k)} = \cdots = a_{k-1}^{(k)} = 1,$$

或者说  $a_n^{(k)} = 1, \forall n < k$ .

由此我们能写出部分和函数  $S_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^n a_m^{(k)} x^m$ , 当  $n < k$  时,

$$S_n^{(k)}(x) = \sum_{m=0}^n x^m = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

因为  $\sum_{m=0}^n x^m$  在  $(0, 1)$  上内闭一致收敛到  $\frac{1}{1-x}$ , 故对每个给定的  $x \in (0, 1)$ , 当  $n \rightarrow \infty$

时,  $S_n^{(k)}(x) \rightarrow \frac{1}{1-x}$ , 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \frac{1}{1-x}$ .

**习题 7.2.11** 证明 Dini (迪尼) 定理:

- (1) 设  $\{u_n(x)\}$  是定义在闭区间  $[a, b]$  上的非负连续函数列, 且在此区间上逐点收敛到零. 若对任意固定的  $x \in [a, b]$ , 数列  $\{u_n(x)\}$  是单调递减的, 则  $\{u_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛到零.
- (2) 如果函数项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上逐点收敛到  $S(x)$ , 且通项  $u_n(x)$  在区间  $[a, b]$  上是连续且非负的, 那么函数  $S(x)$  在  $[a, b]$  上连续的充分必要条件是此级数在  $[a, b]$  上一致收敛.

解

(1) 对于任给的  $\varepsilon > 0, \forall x \in [a, b]$ , 存在  $N_x, U(x)$ , 使得当  $n \geq N_x$  且  $x \in U(x)$  时,  $u_n(x) < \varepsilon$ .

由  $[a, b]$  的紧性, 或者说闭区间的有限覆盖定理, 存在  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , 使得  $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^m U(x_i)$ .

取  $N = \max\{N_{x_1}, N_{x_2}, \dots, N_{x_m}\}$ , 则当  $n \geq N$  时, 对任意  $x \in [a, b]$ , 存在  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  使得  $x \in U(x_i)$ , 因此有

$$u_n(x) \leq u_n(x_i) < \varepsilon.$$

故  $\{u_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛到零.

(2) 对部分和函数  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ , 由 (1) 知,  $\{S(x) - S_n(x)\}$  在  $[a, b]$  上一致收敛到零, 即级数

数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛.

反之, 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛, 则部分和函数  $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$  在  $[a, b]$  上一致收敛到  $S(x)$ , 且每个  $S_n(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 由教材定理 7.34 知,  $S(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

## 习题 7.3

习题 7.3.1 求下列幂级数的收敛半径.

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2};$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n;$

(3)  $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n};$

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} (a > 0, b > 0);$

(5)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!};$

(6)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n;$

(7)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n;$

(8)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}.$

解

(1)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1,$$

故收敛半径  $R = 1$ .

(2)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{2/n}}{(2n)!^{1/n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(2n)(2n-1)} = \frac{1}{4},$$

故收敛半径  $R = 4$ .

(3)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|2^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{2^n} = \sqrt{2},$$

故收敛半径  $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

(4)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{a^n + b^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n + b^n}} = \frac{1}{\max\{a, b\}},$$

故收敛半径  $R = \max\{a, b\}$ .

(5)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n-1]{\left| \frac{1}{(2n-1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[2n-1]{(2n-1)!}} = 0,$$

故收敛半径  $R = +\infty$ .

(6)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{3^n + (-2)^n}{n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3^n + (-2)^n}}{\sqrt[n]{n}} = 3,$$

故收敛半径  $R = \frac{1}{3}$ .

(7)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\ln n} = 1,$$

故收敛半径  $R = 1$ .

(8)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n}} = 1,$$

故收敛半径  $R = 1$ .

**习题 7.3.2** 设  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $|x| < R$  时收敛, 若  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$  也收敛, 则

$$\int_0^R f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$$

(注意: 这里不管  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $x = R$  是否收敛). 应用这个结果证明:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

**解**

(1) 先求幂级数  $\frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$  的收敛半径: 任取  $x_0 \in (-R, R)$ , 存在  $r: |x_0| < r < R$ , 使得幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-r, r)$  内一致收敛. 同时  $|a_n r^n| < M$  有界, 因此

$$\left| \frac{a_n}{n+1} R^{n+1} \right| = \left| a_n r^n \cdot \frac{R^{n+1}}{(n+1)r^n} \right| \leq M \cdot \frac{R^{n+1}}{(n+1)r^n}.$$

由比较判别法可知幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$  在  $(-\frac{r}{R}R, \frac{r}{R}R)$  内一致收敛, 因此收敛半径  $R' \geq R$ .

若  $R' > R$ , 则存在  $x_0: R < |x_0| < R'$ , 使得幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$  在  $(-|x_0|, |x_0|)$  内一致收敛, 矛盾, 因此  $R' = R$ .

作为幂级数的,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$  在  $(-R, R)$  内的任意闭子区间  $[-r, r]$  上一致收敛, 所以

$$\int_0^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1},$$

由  $r$  的任意性知在  $(0, R)$  上成立.

**习题 7.3.3** 求下列幂级数的收敛区域及其和函数.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}.$$

解

(1)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|(-1)^n|} = 1,$$

故收敛半径  $R = 1$ . 当  $x = 1$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$  收敛; 当  $x = -1$  时, 级数

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{-1}{2n+1}$  收敛. 因此收敛区域为  $[-1, 1]$ .  
当  $|x| < 1$  时,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx = \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x.$$

(2)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|n+1|} = 1,$$

故收敛半径  $R = 1$ . 当  $x = 1$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)$  发散; 当  $x = -1$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)$  发散. 因此收敛区域为  $(-1, 1)$ .

当  $|x| < 1$  时,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(3)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n-1]{|n(n+1)|} = 1,$$

故收敛半径  $R = 1$ . 当  $x = 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$  发散; 当  $x = -1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n(n+1)$  发散. 因此收敛区域为  $(-1, 1)$ .

当  $|x| < 1$  时,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{(1-x)^2} \right) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

(4)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n(n+1)} \right|} = 1,$$

故收敛半径  $R = 1$ . 当  $x = 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  收敛; 当  $x = -1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$  收敛. 因此收敛区域为  $[-1, 1]$ .

当  $|x| < 1$  时,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \\ &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n} dt \\ &= \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{t} dt \\ &= \frac{(1-x) \ln(1-x) + x}{x}. \end{aligned}$$

(5)

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n-1]{\left| \frac{1}{(2n-1)!!} \right|} = 0,$$

故收敛半径  $R = +\infty$ .

当  $x \in \mathbb{R}$  时, 注意到  $y' = xy + 1, y(0) = 0$ , 解得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!} = y = e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

**习题 7.3.4** 求下列级数的和.

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n};$$

$$(2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n};$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1};$$

$$(4) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}.$$

解

(1) 考虑幂级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1},$$

其收敛半径  $R = 1$ . 当  $|x| < 1$  时,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) x^n \\ &= \frac{1}{2} \left( x + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=3}^{\infty} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) x^n \right) \\ &= \frac{x^2 - 2x^2 \ln(1-x) + 2x + 2 \ln(1-x)}{4x}. \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2-1)2^n} = S|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{5}{8} - \frac{3}{4} \ln 2.$$

(2) 考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (n^2 - n + 1),$$

其收敛半径  $R = 1$ . 当  $|x| < 1$  时,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n (n^2 - n + 1) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{3x^2 - 2x + 1}{(1-x)^3}. \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n} = S|_{x=-\frac{1}{2}} = \frac{22}{27}.$$

(3) 考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1},$$

其收敛半径  $R = 1$ . 当  $|x| < 1$  时,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} x^{3n+1} = \frac{x}{1-x^3}.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^{-1} \frac{x}{1-x^3} dx = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(4) 考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n,$$

其收敛半径  $R = +\infty$ . 当  $x \in \mathbb{R}$  时,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n \\ &= x^2 e^x + 3x e^x + e^x \\ &= (x^2 + 3x + 1) e^x. \end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = S|_{x=1} = 5e.$$

**习题 7.3.5** 求下列函数在指定点处的 Taylor 展开式, 并给出收敛区域.

(1)  $x^3 - 2x^2 + 5x - 7, x = 1;$

(2)  $e^x, x = a;$

(3)  $\ln x, x = 1;$

(4)  $\frac{1}{x^2 + 3x + 2}, x = -4;$

(5)  $\ln(1 + x - 2x^2), x = 0;$

(6)  $\cos x, x = \frac{\pi}{4}.$

解

(1) 记  $y = x - 1$ , 则

$$x^3 - 2x^2 + 5x - 7 = (y+1)^3 - 2(y+1)^2 + 5(y+1) - 7 = y^3 + y^2 + 4y - 3.$$

收敛区域为  $\mathbb{R}$ .

(2)

$$e^x = e^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n!}.$$

收敛区域为  $\mathbb{R}$ .

(3) 记  $y = x - 1$ , 则

$$\ln x = \ln(y+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n}.$$

收敛区域为  $(-1, 1]$ .

(4) 记  $y = x + 4$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} &= \frac{1}{(y-4)^2 + 3(y-4) + 2} \\ &= \frac{1}{y^2 - 5y + 6} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{3n+1} \right) y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{3n+1} \right) (x+4)^n \end{aligned}$$

收敛区域为  $(-6, -2)$ .

(5)  $\ln(1 + x - 2x^2) = \ln(1 + 2x) + \ln(1 - x)$ . 故

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(-2)^n - 1}{n} x^n.$$

收敛区间为  $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

(6)

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2!} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{4})^3}{3!} + \dots$$

符号规则以 4 为周期:  $+, -, -, +, \dots$  收敛区间为  $\mathbb{R}$ .

**习题 7.3.6** 求下列函数的 Maclaurin 展开式, 并给出收敛区域.

(1)  $\sin^2 x$ ;

(2)  $\arcsin x$ ;

(3)  $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ;

(4)  $(1+x) \ln(1+x)$ ;

(5)  $\int_0^x \cos t^2 dt$ ;

(6)  $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ ;

(7)  $\int_0^x e^{-t^2} dt$ .

解

(1)

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}.\end{aligned}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} (2n)!}{(2n+2)! 2^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{(2n+2)(2n+1)} = 0,$$

故收敛半径  $R = +\infty$ , 收敛区域为  $(-\infty, +\infty)$ .

(2)

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}.\end{aligned}$$

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{\left| \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} \right|} = 1,$$

故收敛半径  $R = 1$ , 当  $x = \pm 1$  时, 级数由比值判别法知收敛. 因此收敛区域为  $[-1, 1]$ .

(3)

$$\begin{aligned}
\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (-x)^n \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(-1)^{n-1} - (-1)^{2n-1}] x^n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [(-1)^{n-1} + 1] x^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

$$L = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2k+1]{\left| \frac{1}{2k+1} \right|} = 1,$$

故收敛半径  $R = 1$ , 当  $x = 1$  时, 级数  $\sum \frac{1}{2k+1}$  发散; 当  $x = -1$  时, 级数  $\sum \frac{-1}{2k+1}$  发散. 因此收敛区域为  $(-1, 1)$ .

(4)

$$\begin{aligned}
(1+x) \ln(1+x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^{n+1} \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \frac{(-1)^{n-2}}{n-1} \right] x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n.
\end{aligned}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(n-1)}} = 1,$$

故收敛半径  $R = 1$ , 当  $x = \pm 1$  时, 级数  $\sum \frac{1}{n(n-1)}$  绝对收敛. 因此收敛区域为  $[-1, 1]$ .

(5)

$$\begin{aligned}
\cos t^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (t^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{4n}. \\
\int_0^x \cos t^2 dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{4n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x t^{4n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} x^{4n+1}. \\
L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4n+1]{\left| \frac{1}{(2n)!(4n+1)} \right|} = 0,
\end{aligned}$$

故收敛半径  $R = +\infty$ , 收敛区域为  $(-\infty, +\infty)$ .

(6)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin t}{t} &= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}. \\
\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}. \\
L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{\left| \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} \right|} = 0,
\end{aligned}$$

故收敛半径  $R = +\infty$ , 收敛区域为  $(-\infty, +\infty)$ .

(7)

$$\begin{aligned}
e^{-t^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}. \\
\int_0^x e^{-t^2} dt &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}. \\
L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{\left| \frac{1}{n!(2n+1)} \right|} = 0,
\end{aligned}$$

故收敛半径  $R = +\infty$ , 收敛区域为  $(-\infty, +\infty)$ .

**习题 7.3.7** 方程  $y + \lambda \sin y = x$  ( $\lambda \neq -1$ ) 在  $x = 0$  附近确定了一个隐函数  $y(x)$ , 试求它的幂级数展开式中的前四项.

**解** 设  $y(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$  是 Maclaurin 展开式. 由  $y(0) + \lambda \sin(y(0)) = 0$ , 得  $y(0) = 0$ .

对  $y + \lambda \sin y = x$  求导:

$$y'(1 + \lambda \cos y) = 1$$

代入  $x = 0$ :

$$y'(0)(1 + \lambda \cos 0) = 1 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = \frac{1}{1 + \lambda}.$$

对  $y'(1 + \lambda \cos y) = 1$  求导:

$$y''(1 + \lambda \cos y) + y'(\lambda(-\sin y)y') = 0$$

代入  $x = 0$ :

$$y''(0)(1 + \lambda) + y'(0)(\lambda(-\sin 0)y'(0)) = 0 \quad \Rightarrow \quad y''(0) = 0.$$

对  $y''(1 + \lambda \cos y) = \lambda(\sin y)(y')^2$  求导:

$$y'''(1 + \lambda \cos y) + y''(\lambda(-\sin y)y') = \lambda(\cos y)(y')^3 + \lambda(\sin y)2y'y''$$

代入  $x = 0$  (利用  $y(0) = 0, y''(0) = 0$ ):

$$\begin{aligned} y'''(0)(1 + \lambda) &= \lambda(\cos 0)(y'(0))^3 + 0 \\ y'''(0)(1 + \lambda) &= \lambda \left( \frac{1}{1 + \lambda} \right)^3 \quad \Rightarrow \quad y'''(0) = \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^4}. \end{aligned}$$

因此  $y(x)$  的 Maclaurin 展开式为:

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\ &= 0 + \left( \frac{1}{1 + \lambda} \right)x + 0 \cdot x^2 + \frac{1}{6} \left( \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^4} \right)x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1 + \lambda}x + \frac{\lambda}{6(1 + \lambda)^4}x^3 + \dots \end{aligned}$$

## 习题 7.4

习题 7.4.1 求下列积分:

(1)  $\int_0^1 e^{-x^2} dx;$

(2)  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$

解

(1) 考虑展开式  $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ , 则

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

故级数在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛,

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{1}{6 \cdot 7} + \cdots \end{aligned}$$

(2) 考虑展开式  $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ , 则

$$L = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n+1)!}} = 0,$$

故级数在  $(-\infty, +\infty)$  上收敛,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots \end{aligned}$$

习题 7.4.2 求方程  $y'' - xy' + y = 0$  的幂级数解.解 设  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n,$$

$$-xy' = -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n,$$

$$y'' - xy' + y = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n + a_n] x^n = 0.$$

故有递推关系  $(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n-1)a_n$ , 即  $a_{n+2} = \frac{(n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n$ .

当  $n$  为奇数时,  $a_1$  为任意常数,  $a_3 = 0, a_5 = 0, \dots$ , 故奇数项系数均为 0;

当  $n$  为偶数时,  $a_0$  为任意常数,  $a_2 = -\frac{1}{2}a_0, a_4 = -\frac{1}{8}a_0, a_6 = -\frac{1}{48}a_0, \dots$ , 故偶数项系数为

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^k k!} a_0.$$

因此幂级数解为

$$y = a_0 \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \dots \right) + a_1 x.$$

**习题 7.4.3** 求方程  $y'' + y \sin x = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$  的幂级数解至  $x^5$  项.

解 设  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 由初值条件  $y(0) = 1, y'(0) = 0$ , 得  $a_0 = 1, a_1 = 0$ .

$$y''(0) + y(0) \sin 0 = 0 \Rightarrow 2a_2 + 0 = 0 \Rightarrow a_2 = 0.$$

$$y''' + y \cos x + y' \sin x = 0$$

$$y'''(0) + y(0) \cos 0 + y'(0) \sin 0 = 0$$

$$6a_3 + 1 + 0 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{6}.$$

$$y^{(4)} + y'' \sin x + 2y' \cos x - y \sin x = 0$$

$$y^{(4)}(0) + y''(0) \sin 0 + 2y'(0) \cos 0 - y(0) \sin 0 = 0$$

$$24a_4 + 0 + 0 - 0 = 0 \Rightarrow a_4 = 0.$$

$$y^{(5)} + y''' \sin x + 3y'' \cos x - 3y' \sin x - y \cos x = 0$$

$$y^{(5)}(0) + y'''(0) \sin 0 + 3y''(0) \cos 0 - 3y'(0) \sin 0 - y(0) \cos 0 = 0$$

$$120a_5 + 0 + 0 - 0 - 1 = 0 \Rightarrow a_5 = \frac{1}{120}.$$

因此幂级数解至  $x^5$  项为

$$y = 1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

**习题 7.4.4** 利用 Stirling 公式求极限.

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

解

(1) 由 Stirling 公式知,  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , 故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{\frac{1}{2n^2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

(2) 由 Stirling 公式知,  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , 故

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n(2\pi n)^{-\frac{1}{2n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-1}}{e} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2\pi n)^{-\frac{1}{2n}} \cdot e = 1 \cdot e = e.\end{aligned}$$

习题 7.4.5 研究下列级数的敛散性.

(1)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)};$

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$  ( $p$  是实数).

解

(1) 由 Stirling 公式知,  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , 故

$$\ln(n!) = O(\ln \sqrt{n} + n \ln n - n) = O(n \ln n),$$

故级数  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$  与  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  同敛散性, 而  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  发散, 故原级数发散.

(2) 由 Stirling 公式知,

$$\frac{n!e^n}{n^{n+p}} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^n}{n^{n+p}} = \sqrt{2\pi n} \cdot \frac{1}{n^p} = O\left(\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}\right),$$

故级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$  同敛散性, 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$  当  $p > \frac{3}{2}$  时收敛, 当  $p \leq \frac{3}{2}$  时发散,

故原级数当  $p > \frac{3}{2}$  时收敛, 当  $p \leq \frac{3}{2}$  时发散.

习题 7.4.6 证明: 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\ln(n!) \sim \ln n^n$ .

解 由 Stirling 公式知,  $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ , 故

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{\ln n^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n)}{\ln n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{2\pi n} + n \ln n - n}{n \ln n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{2\pi n}}{n \ln n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \ln n} = 0 + 1 - 0 = 1.\end{aligned}$$

因此  $\ln(n!) \sim \ln n^n$ .

## 第7章综合习题

习题 7.C.1 计算级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$  的和.

解 由 Abell 求和公式, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \sum_{n=k}^N \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{N+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} - \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

当  $N \rightarrow \infty$  时, 由  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$  以及  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln N}{N+1} = 0$ , 得级数和为  $\frac{\pi^2}{6}$ .

习题 7.C.2 证明:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = 1$ .

解

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} (-1)^n &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) (-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{n=1}^{N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= 1 + (-1)^{N+1} \frac{1}{N+2} \rightarrow 1, \quad (N \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

习题 7.C.3 设  $\{a_n\}$  是正的递增数列. 求证: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$  收敛的充分必要条件是  $\{a_n\}$  有界.

解 若  $a_n$  有上界  $M$ , 则

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \sum_{n=1}^N \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} \leq \frac{1}{a_1} \sum_{n=1}^N (a_{n+1} - a_n) = \frac{a_{N+1} - a_1}{a_1} \leq \frac{M - a_1}{a_1},$$

故正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$  收敛.

若  $a_n$  无上界, 则对任意  $M > 0$ , 存在  $a_n$  的子列  $\{a_{n_k}\}$  使得  $a_{n_{k+1}} \geq 2a_{n_k}$ , 则对任意  $k \in \mathbb{N}^+$ ,

有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n_{k+1}}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n_{k+1}}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

因此正项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1 \right)$  发散.

**习题 7.C.4** 设  $\alpha > 0$ ,  $\{a_n\}$  是正的递增数列. 求证: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^\alpha}$  收敛.

解 记  $b_n = \frac{1}{a_n}$ , 则  $b_n$  为正的递减数列, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) b_n^\alpha \leq \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1}) b_1^\alpha = b_1^\alpha \lim_{N \rightarrow \infty} (b_1 - b_{N+1}) \leq b_1^{\alpha+1} < +\infty.$$

故级数收敛.

**习题 7.C.5** 设  $\phi(x)$  是  $(0, +\infty)$  上正的严格增函数,  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  是三个非负数列, 满足

$$a_{n+1} \leq a_n - b_n \phi(a_n) + c_n a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty.$$

求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**习题 7.C.6** 设  $\{a_n\}$  是正数数列使得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  收敛. 求证: 存在常数  $M > 0$  使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

**习题 7.C.7** 设  $\{a_n\}$  是一个严格单调递增的实数列, 且对任意正整数  $n$  有  $a_n \leq n^2 \ln n$ .

求证: 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{n+1} - a_n}$  发散.

**习题 7.C.8** 如果级数  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$  收敛, 就称数列  $\{a_n\}$  是具有有界变差的.

(1) 证明: 具有有界变差的数列  $\{a_n\}$  一定收敛;

(2) 构造一个发散的无穷级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 使得其通项构成的数列  $\{a_n\}$  是一个具有有界变差的数列.

解

(1) 由 Cauchy 收敛准则, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^+$ , 当  $m > n > N$  时, 有

$$|a_n - a_m| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| < \varepsilon,$$

故数列  $\{a_n\}$  收敛.

(2) 取  $a_n = \frac{1}{n}$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 < +\infty,$$

**习题 7.C.9** 设函数列  $\{f_n(x)\}, n = 1, 2, \dots$  在区间  $[0, 1]$  上由等式

$$f_0(x) = 1, \quad f_n(x) = \sqrt{x f_{n-1}(x)}$$

定义. 证明: 当  $n \rightarrow \infty$  时, 函数列在  $[0, 1]$  上一致收敛到一个连续函数.

**解**

$$f_n(x) = x^{1 - \frac{1}{2^n}},$$

由于每个  $f_n(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且固定  $x$  时,  $f_n(x)$  单调递增有极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x,$$

且逐点极限  $f(x) = x$  在  $[0, 1]$  上连续, 由 Dini 定理知,  $f_n(x)$  在  $[0, 1]$  上一致收敛到  $f(x) = x$ .

**习题 7.C.10** 递归定义连续可微函数列  $f_1, f_2, \dots: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  如下:  $f_1 = 1$ , 在  $(0, 1)$  上有

$$f'_{n+1} = f_n f_{n+1},$$

且  $f_{n+1}(0) = 1$ . 求证: 对每一个  $x \in (0, 1)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  存在, 并求出其极限函数.

**解** 在习题 7.2.10 中我们将  $f_n(x)$  展开为幂级数来处理, 这里给出法二.

解微分方程得

$$f_{n+1}(x) = e^{\int_0^x f_n(t) dt}.$$

首先归纳的证明  $f_n(x) \leq \frac{1}{1-x}, n = 1$  时已知成立, 假设  $n = k$  时成立, 则

$$f_{k+1}(x) = e^{\int_0^x f_k(t) dt} \leq e^{\int_0^x \frac{1}{1-t} dt} = \frac{1}{1-x},$$

故对任意  $n \in \mathbb{N}^+$ , 有  $f_n(x) \leq \frac{1}{1-x}$ .

再归纳的证明

$$f_n(x) \geq 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1},$$

$n = 1$  时已知成立, 假设  $n = k$  时成立, 则

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) &= e^{\int_0^x f_k(t) dt} \geq e^{\int_0^x (1+t+t^2+\dots+t^{k-1}) dt} \\ &= e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^k}{k}} \geq 1 + x + x^2 + \dots + x^k. \end{aligned}$$

故对任意  $n \in \mathbb{N}^+$ , 有  $f_n(x) \geq 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ .

综上, 对任意  $x \in (0, 1)$ , 有

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{1-x},$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{1}{1-x}$ .

**习题 7.C.11** 设  $f_0(x)$  是区间  $[0, a]$  上的连续函数, 证明: 按照下列公式

$$f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(u) du$$

定义的函数列  $\{f_n(x)\}$  在区间  $[0, a]$  上一致收敛于 0.

**解** 由  $f_0(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 故存在  $M > 0$ , 使得对任意  $x \in [0, a]$ , 有  $|f_0(x)| \leq M$ . 下归纳的证明:  $f_n(x) \leq \frac{Ma^n}{n!}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  当  $n = 0$  时由  $M$  的定义已知. 假设  $n = k - 1$  时成立, 则当  $x \in [0, a]$  时,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq \int_0^x |f_{n-1}(u)| du \\ &\leq \int_0^x \frac{Mu^{n-1}}{(n-1)!} du = \frac{Mx^n}{n!} \end{aligned}$$

故对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 有  $|f_n(x)| \leq \frac{Ma^n}{n!}$ . 因此, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 当  $m > n > N$  时, 有

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x)| + |f_m(x)| \leq \frac{Ma^n}{n!} + \frac{Ma^m}{m!} < \varepsilon,$$

故函数列  $\{f_n(x)\}$  在  $[0, a]$  上一致收敛于 0.

**习题 7.C.12** 利用二项式级数, 计算  $\sqrt{2}$  到四位小数.

**解** 由二项式级数, 有

$$\sqrt{2} = (1+1)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} 1^n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128} + \cdots$$

取前五项和为 1.4140625.