ge

数学分析讲义 (第一册)
习题解答

November 9, 2025

如有疏漏, 欢迎指正. 联系邮箱: liuyue22@mail.ustc.edu.cn

目录

第 1 章 极限

习题 1.1

习题 1.1.1 设 a 是有理数, b 是无理数. 求证: $a+b$ 和 $a-b$ 都是无理数; 当 $a \neq 0$ 时, ab 和 $\dfrac{b}{a}$ 也都是无理数.

解 设 a 是有理数,b 是无理数.

(1) 若 $a+b$ 是有理数, 则 $b=(a+b)-a$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $a-b$ 是无理数.

(2) 若 ab 是有理数, 则 $b=\dfrac{ab}{a}$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $\dfrac{b}{a}$ 是无理数.

习题 1.1.2 求证: 两个不同的有理数之间有无理数.

解 设 a,b 是两个不同的有理数, 不妨设 $a<b$. 则存在正整数 k,N 使得

$$\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}a<N<\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}b.$$

具体而言, 取 $k>\lceil\log_2(b-a)\rceil$, 则 $k>\log_2\dfrac{2\sqrt{2}}{b-a} \Rightarrow 2^k(b-a)>2\sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}b-\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}a>2$. 因此, 存在整数 $N=\left\lfloor\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}b\right\rfloor$, 使得 $\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}a<N<\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}b$. 于是

$$a<\frac{N}{\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}}<b.$$

而 $\dfrac{N}{\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}}=\dfrac{N\sqrt{2}}{2^k}$ 是无理数.

习题 1.1.3 求证: $\sqrt{2},\sqrt{3}$ 以及 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 都是无理数.

解

(1) 设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p,q 互素. 因此 $2q^2=p^2$, 由素数分解的唯一性可知 p 是偶数, 设 $p=2k$, 则 $2q^2=4k^2 \Rightarrow q^2=2k^2$, 同理可知 q 也是偶数, 与 p,q 互素矛盾. 因此 $\sqrt{2}$ 是无理数.

(2) 设 $\sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p,q 互素. 因此 $3q^2=p^2$, 由素数分解的唯一性可知 p 是 3 的倍数, 设 $p=3k$, 则 $3q^2=9k^2 \Rightarrow q^2=3k^2$, 同理可知 q 也是 3 的倍数, 与 p,q 互素矛盾. 因此 $\sqrt{3}$ 是无理数.

(3) 设 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$, 其中 p,q 互素. 因此 $2+3+2\sqrt{6}=\dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6}=\dfrac{p^2-5q^2}{2q^2}$, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 因此 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数.

习题 1.1.4 把下列循环小数表示为分数:

(1) $0.24999\ldots$　　(2) $0.\dot{3}7\dot{5}$　　(3) $4.\dot{5}1\dot{8}$

解

(1) 设 $x = 0.24999\ldots$, 则 $10x = 2.4999\ldots$, 因此 $9x = 2.25 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

(2) 设 $x = 0.\dot{3}7\dot{5}$, 则 $1000x = 375.375375\ldots$, 因此 $999x = 375 \Rightarrow x = \dfrac{375}{999} = \dfrac{125}{333}$.

(3) 设 $x = 4.\dot{5}1\dot{8}$, 则 $1000x = 4518.518518\ldots$, 因此 $999x = 4514 \Rightarrow x = \dfrac{4514}{999} = \dfrac{122}{27}$.

习题 1.1.5 设 r, s, t 都是有理数. 求证:

(1) 若 $r + s\sqrt{2} = 0$, 则 $r = s = 0$;

(2) 若 $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0$, 则 $r = s = t = 0$.

解

(1) 假设 $s \neq 0$, 则 $\sqrt{2} = -\dfrac{r}{s}$ 是有理数, 与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾. 因此 $s = 0$, 从而 $r = 0$.

(2) $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0 \Rightarrow r^2 = 2s^2 + 3t^2 + 2st\sqrt{6} \Rightarrow \left(r^2 - 2s^2 - 3t^2\right) + (-2st)\sqrt{6} = 0.$:

与 (1) 类似, 若 $st \neq 0$, 则 $\sqrt{6} = \dfrac{r^2 - 2s^2 - 3t^2}{2st}$ 是有理数, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 故 $st = 0$,

(a) 若 $t = 0$, 则 $r + s\sqrt{2} = 0$, 由 (1) 可知 $r = s = 0$;

(b) 若 $s = 0$, 则 $r + t\sqrt{3} = 0$, 同理可知 $r = t = 0$.

习题 1.1.6 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 有相同的符号, 且都大于 -1. 证明:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

解 利用数学归纳法:

当 $n = 1$ 时, 等式为

$$1 + a_1 \geqslant 1 + a_1,$$

显然成立.

假设当 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_k) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

以此作为条件, 当 $n = k + 1$ 时, 由 $a_{k+1} > -1$, 可知 $1 + a_{k+1} > 0$, 因此

$$\begin{aligned}(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_k)(1 + a_{k+1}) &\geqslant (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(1 + a_{k+1}) \\ &= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\ &\geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}.\end{aligned}$$

其中 $a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \cdots + a_ka_{k+1} \geqslant 0$, 因为 a_i 与 a_{k+1} 符号相同.

习题 1.1.7 设 a, b 是实数, 且 $|a| < 1, |b| < 1$. 证明:

$$\left|\frac{a + b}{1 + ab}\right| < 1.$$

解 由 $|a| < 1, |b| < 1$, 可知 $ab \neq -1$. 因此

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right| < 1 \Leftrightarrow |a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow (a+b)^2 < (1+ab)^2.$$

即

$$a^2+b^2+2ab < 1+a^2b^2+2ab \Leftrightarrow a^2+b^2 < 1+a^2b^2 \Leftrightarrow (1-a^2)(1-b^2) > 0.$$

显然成立.

习题 1.2

习题 1.2.1 用定义证明下面的结论:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5+3n}=\dfrac{1}{3}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

解

(1) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{5}{9\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n}{5+3n}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3n-(5+3n)}{3(5+3n)}\right|=\frac{5}{3(5+3n)}<\frac{5}{9n}<\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\frac{|\sin n|}{n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

(3) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon^2}-1\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon.$$

(4) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

习题 1.2.2 若数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 满足条件: 任给正数 ε, 存在正整数 N, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ (其中 M 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 a 为极限.

M 为常数指的是 M 不依赖于 ε 和 n. 例如 $M=2, M=1000$ 等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于 $\forall M>0,\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ 成立.

习题 1.2.3 证明: 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

解 充分性: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

必要性: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$.

习题 1.2.4 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 则

$$||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

反之不一定成立, 如数列 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 1$, 但 $\{a_n\}$ 发散.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 则 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $||a_n| - 0| < \varepsilon$. 则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

习题 1.2.5 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 又 $|b_n| \leqslant M, (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. 则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

习题 1.2.6 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$, 及 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

解 按已知条件 $\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$. 又 $\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$. 于是令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, 则 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

习题 1.2.7 证明下列数列不收敛:

(1) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$;

(2) $a_n = 5\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) + (-1)^n$.

解

(1) 取 $a_{2n} = \dfrac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\dfrac{2n+1}{2n+2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

(2) 取 $a_{2n} = 5\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5\left(1 - \dfrac{2}{2n+1}\right) - 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 6$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 4$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

习题 1.2.8 求下列极限:

(1) $a_n = \dfrac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1}$;

(2) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}$;

(3) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n(n+1)/2}\right)$, $n = 2, 3, \ldots$;

(4) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

(5) $a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^m})$, $(|q| < 1)$.

解

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}} = \frac{4+0+0}{3+0+0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1-0 = 1.$$

(3)

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{(n^2+n-2)/2}{n(n+1)/2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ =& \frac{(1\cdot 2\cdots(n-1))\cdot(4\cdot 5\cdots(n+2))}{(2\cdot 3\cdots(n))\cdot(3\cdot 4\cdots(n+1))} = \frac{1\cdot(n+2)}{n\cdot 3} = \frac{n+2}{3n}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{n} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

(4)

$$a_n = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-\lim\limits_{m\to\infty} q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

习题 1.2.9 若 $a_n \neq 0 (n=1,2,\ldots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?

解 不能. 例如 $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 可能为 0.

习题 1.2.10 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$, 是否必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$? 若还假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 回答同样的问题.

解 不一定. 例如 $a_n = \begin{cases} 1, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}$, $b_n = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 1, & n\text{为偶数} \end{cases}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, 但

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均不存在.

当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 时成立. 假设 $a \neq 0$ 时, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n b_n}{a_n} = \dfrac{0}{a} = 0$.

习题 1.2.11 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性如何? 举例说明. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 回答同样的问题.

解

(1) $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则

(a) $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ 都发散可以采用反证法: 若 $\{a_n + b_n\}$ 收敛, 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 容易知道 $\{a_n + b_n - a_n\} = \{b_n\}$ 收敛, 这与 $\{b_n\}$ 发散矛盾, 因此 $\{a_n + b_n\}$ 发散, $\{a_n - b_n\}$ 同理可得.

(b) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

I. $a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = 1$ 收敛;

II. $a_n = 1, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = n$ 发散.

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散, 则

(a) $\{a_n + b_n\}$ 的收敛性不确定

I. $a_n = n, b_n = -n$, 则 $a_n + b_n = 0$ 收敛.

II. $a_n = n, b_n = n$, 则 $a_n + b_n = 2n$ 发散.

(b) $\{a_n - b_n\}$ 的收敛性不确定

I. $a_n = n + \dfrac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n - b_n = \dfrac{1}{n}$, 收敛.

II. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}$, 则 $a_n - b_n = 2 \cdot (-1)^n$ 发散.

(c) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

I. $a_n = \begin{cases} 1, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 1, & n\text{为偶数} \end{cases}$, 则 $a_n \cdot b_n = 0$ 收敛.

II. $a_n = n, b_n = (-1)^n$, 则 $a_n \cdot b_n = (-1)^n n$ 发散;

习题 1.2.12 下面的推理是否正确?

(1) 设数列 $\{a_n\} : a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 在 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 两边取极限, 得 $a = 2a - 1$, 即 $a = 1$.

(2)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\
&= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n\text{个}} = 0.
\end{aligned}
$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n=1^n=1.$

解

(1) 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为 $a_n=1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(2) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

并有

$$\lim_{n\to}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1,\lim_{n\to}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

(3) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

习题 1.2.13 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a,b. 若 $a>b$, 则从某一项开始, 有 $a_n>b_n$; 反之, 若从某项开始恒有 $a_n\geqslant b_n$, 则 $a\geqslant b$.

解 这是保序性的直接推论.

习题 1.2.14 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别收敛于 a 及 b. 记 $c_n=\max(a_n,b_n)$, $d_n=\min(a_n,b_n)$ $(n=1,2,\ldots)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\max(a,b),\quad \lim_{n\to\infty}d_n=\min(a,b).$$

解 由 $\max(x,y)=\dfrac{x+y+|x-y|}{2},\min(x,y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$, 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

习题 1.2.15 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right]$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}((n+1)^k-n^k)$, 其中 $0<k<1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+2}-n\right)$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}\right)$.

解

(1) 由于

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = 0.$$

(2) 由于

$$0 \leqslant ((n+1)^k - n^k) = n^k \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1 \right) \leqslant n^k \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^1 - 1 \right) = n^{k-1}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \lim_{n\to\infty} n^{k-1} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} ((n+1)^k - n^k) = 0.$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

(4) 由 $\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1)$, 故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-n+2} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(n^2-n+2\right)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(n^2-n+2\right)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(5) 由于

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} \leqslant \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leqslant \sqrt[n]{n}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} = 1, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} = 1.$$

习题 1.2.16 设 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 为 m 个正数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

解 设 $a_k = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, 则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leqslant \sqrt[n]{m a_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a_k=\max(a_1,a_2,\ldots,a_m).$$

习题 1.2.17 证明下列数列收敛:

(1) $a_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$;

(2) $a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$;

(3) $a_n=\alpha_0+\alpha_1 q+\cdots+\alpha_n q^n$, 其中 $|\alpha_k|\leqslant M,(k=1,2,\ldots)$, 而 $|q|<1$;

(4) $a_n=\dfrac{\cos 1}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2}{2\cdot 3}+\dfrac{\cos 3}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{\cos n}{n(n+1)}$.

证明

(1) 由 $1-\dfrac{1}{2^n}<1$, 可知 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n>0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 由 $a_n<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}<\frac{1}{2}$, 可知 $\{a_n\}$ 有上界, 且 a_n 单调递增, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor\log_{|q|}\dfrac{\varepsilon(1-|q|)}{2M}\right\rfloor+1$, 则当 $m>n>N$ 时,

$$|a_m-a_n|=|\alpha_{n+1}q^{n+1}+\cdots+\alpha_m q^m|\leqslant M(|q|^{n+1}+|q|^{n+2}+\cdots)=M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}<\varepsilon.$$

(4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$, 则当 $m>n>N$ 时,

$$|a_m-a_n|=\left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{\cos m}{m(m+1)}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

习题 1.2.18 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

(1) $a_n=\dfrac{n}{c^n},\ (c>1)$;

(2) $a_1=\dfrac{c}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}\ (0\leqslant c\leqslant 1)$;

(3) $a>0, a_0>0, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)$ (提示: 先证明 $a_n^2\geqslant a$);

(4) $a_0=1,\ a_n=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$;

(5) $a_n=\sin\sin\cdots\sin 1$ (n 个 sin).

解

(1) 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{c^{n+1}-c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^n(c-1)}=0.$$

(2)

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})$$

由 $a_2-a_1=\left(\dfrac{c}{2}\right)^2>0$, 可递归的得知 $a_{n+1}-a_n>0$, 因此 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $a_1<c$, 归纳

的可得 $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$, 因此 $\{a_n\}$ 有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$, 又由 $a_n > 0$, 可知 $a = 1 - \sqrt{1-c}$.

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)\right)^2 \geqslant a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leqslant 0$$

因此 $\{a_n\}$ 在 $n \geqslant 1$ 时单调减, 且有下界 $\sqrt{a}$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则 $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right)$, 解得 $l = \sqrt{a}$.

(4)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1} - \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}\right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1}+1)^2}$$

由 $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$ 归纳的可得 $1 + a_n - a_n^2 > 0$, 因此 $a_n - a_{n-1} > 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 有上界, 因此 $\{a_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 递推式两侧取极限, 得 $a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; 由于 $a_n > 0$ 始终成立, 故 $a \geqslant 0$ 而 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, 故舍去这一值, 进而得到 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(5) $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$, 因此 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a = \sin a \Rightarrow a = 0$.

习题 1.2.19 设 $a_n \leqslant a \leqslant b_n\ (n = 1, 2, \ldots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 对 $\forall\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时,$|a_n - b_n| < \varepsilon$. 又由 $a_n \leqslant a \leqslant b_n$, 可知 $|a_n - a| = a - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$, 同理 $|b_n - a| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

习题 1.2.20 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

解 先证明一个引理: 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \ldots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

证明如下

(1) $a = 0$ 时,

$$0 \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

同时, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = 0$$

由夹逼定理, 得证.

(2) $a>0$ 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_n}}=a,$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=a.$$

由夹逼定理, 得证.

回到本题,

可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{l}<1$. 因此 $\exists r=\frac{1+\frac{1}{l}}{2}\in(0,1)$, 使得当 n 充分大时, $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}}<r$. 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}<r^n,$$

即 $a_n<a_1r^n$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

习题 1.2.21 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是正数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n=1,2,\ldots$. 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

解 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 则由 $a_n=a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant a_1\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}}=a_1\cdot\frac{b_n}{b_1}$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b>0$, 由原式有 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\leqslant\frac{a_n}{b_n}$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 单调减, 且 $\frac{a_n}{b_n}>0$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=c$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=bc$.

习题 1.2.22 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 求下列数列的极限:

(1) $a_n=\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$;

(2) $a_n=\left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$;

(3) $a_n=\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$;

(4) $a_n=\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}$.

简要说明: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 故 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的任意子列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ 也收敛于 e. 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为 $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ 的形式, 从而求出极限. 对于类似于 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ 的形式, 可以考虑先通分再变形去掉指数的负号即可处理.

在此过程中下列命题也相同有用:

命题 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a, a_n > 0, a > 0$. $\{b_n\}$ 收敛于 b. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

请注意, 这条结论对于 1^∞ 型是不能直接使用的, 即若 $a_n \to 1, b_n \to \infty$, 则不能直接说 $a_n^{b_n} \to 1^\infty = 1$. 但是对于 $a_n \to a > 1, b_n \to \infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \to a^{+\infty} = +\infty$; 对于 $a_n \to a < 1, b_n \to +\infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \to a^{+\infty} = 0$.

解

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m\Bigg|_{m=2n+1} = \mathrm{e}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n-2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^{-n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^{(n-3)\cdot\left(-\frac{n+1}{n-3}\right)} = \mathrm{e}^{-1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{n+1}\right)} = \mathrm{e}^{-1}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{2n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^3\cdot 2} = \mathrm{e}^2$.

习题 1.2.23 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 且 $|b_n| \geqslant b > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

解 对 $\forall M > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时,$|a_n| > \dfrac{M}{b}$. 又由 $|b_n| \geqslant b > 0$, 可知 $|a_n b_n| \geqslant |a_n||b| > M$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

习题 1.2.24 确定 $n \to \infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}$ 与 $n\sin\dfrac{n\pi}{2}\ (n \geqslant 1)$ 是否有界, 是否趋于无穷大.

解 $\sqrt[n]{n!}$ 无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty$, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

因此,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = +\infty$.

注 Stolz 定理规范的思路要先说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 然后才能说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 存在. 为了方便, 我们也会省去前面的部分, 直接写 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

$n\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 无界, 但是不趋于无穷大. 当 $n = 4k+1$ 时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2} = 4k+1$, 趋于无穷大; 当 $n = 4k+3$ 时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2} = -(4k+3)$, 趋于负无穷大; 当 n 为偶数时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2} = 0$.

习题 1.2.25 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}\ (n \geqslant 1)$ 定义, 证明: $a_n \to +\infty\ (n \to \infty)$.

解 由 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n) = \dfrac{1}{a_n}(a_n + a_n + \dfrac{1}{a_n}) = 2 + \dfrac{1}{a_n^2} > 2$, 可知 $a_n^2 > 2(n-1)$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

习题 1.2.26 给出 $\dfrac{0}{0}$ 型 Stolz 定理的证明.

命题 ($\dfrac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理) 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小量, 其中 $\{a_n\}$ 还是严格单调减少数列, 又

存在 (其中 l 为有限或 $\pm\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

证明

(1) 当 l 为有限值时, 根据条件对 $\varepsilon>0$ 存在 N, 使当 $n>N$ 时成立

$$\left|\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}-l\right|<\varepsilon.$$

由于对每个 n 都有 $a_n>a_{n+1}$, 这样就有

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_{n+1})<b_n-b_{n+1}<(l+\varepsilon)(a_n-a_{n+1}).$$

任取 $m>n$, 并且将上述不等式中的 n 换成 $n+1,\dots,$ 直到$m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_m)<b_n-b_m<(l+\varepsilon)(a_n-a_m),$$

以及

$$\left|\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}-l\right|<\varepsilon.$$

令 $m\to\infty$, 并利用条件 $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=\lim\limits_{m\to\infty}b_m=0$, 就知道当 $n>N$ 时成立

$$\left|\frac{b_n}{a_n}-l\right|\leqslant\varepsilon.$$

(2) $l=+\infty$ 时. 根据条件对任意 $M>0$ 存在 N, 使当 $n>N$ 时成立

$$\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}>M.$$

由于对每个 n 都有 $a_n>a_{n+1}$, 这样就有

$$b_n-b_{n+1}>M(a_n-a_{n+1}).$$

任取 $m>n$, 并且将上述不等式中的 n 换成 $n+1,\dots,$ 直到$m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$b_n-b_m>M(a_n-a_m),$$

以及

$$\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}>M.$$

令 $m\to\infty$, 并利用条件 $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=\lim\limits_{m\to\infty}b_m=0$, 就知道当 $n>N$ 时成立

$$\frac{b_n}{a_n}>M.$$

习题 1.3

习题 1.3.1 按定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0, (a>1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$;

(3) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x} = 2$;

(4) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{1/q} = 0$ (q 为正整数).

解

(1) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\log_a\varepsilon$, 则当 $x<M$ 时, $|a^x-0|=a^x<a^M=\varepsilon$.

(2) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\dfrac{2}{\varepsilon}+1$, 则当 $|x|>\max\{M,1\}$ 时, $\left|\dfrac{x-1}{x+1}-1\right|=\left|\dfrac{-2}{x+1}\right|\leqslant\dfrac{2}{|x|-1}<\varepsilon$.

(3) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{\dfrac12,\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$, 则当 $0<|x+1|<\delta$ 时, $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+x}-2\right|=\left|\dfrac{-x^2-2x-1}{x^2+x}\right|=\left|\dfrac{x+1}{x}\right|<\dfrac{\delta}{1/2}\leqslant\varepsilon$.

(4) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon^q$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $|x^{1/q}-0|=x^{1/q}<\delta^{1/q}=\varepsilon$.

习题 1.3.2 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(x^5-5x+2+\dfrac1x\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$ (n 为正整数);

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

(1) 由四则运算的极限可知,

$$\lim_{x\to1}\left(x^5-5x+2+\frac1x\right)=1-5+2+1=-1.$$

(2) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$, 因此

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=\sum_{k=0}^{n-1}1=n.$$

请注意, 这里 n 是常数, 因此可以交换这 n 个极限与求和的顺序.

(3)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac23.$$

(4)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3+\dfrac6x\right)^{70}(8-\dfrac5x)^{20}}{\left(5-\dfrac1x\right)^{90}}=\frac{\left(3+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac6x\right)^{70}\left(8-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac5x\right)^{20}}{\left(5-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac1x\right)^{90}}=\frac{3^{70}\cdot8^{20}}{5^{90}}$$

事实上, $\dfrac{3^{70}\cdot8^{20}}{5^{90}}=\left(\dfrac{3^7\cdot2^6}{5^9}\right)^{10}=0.000000000003572622918985825913651456872761246392142557535369616400676018940233797678923776.$

习题 1.3.3 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|}{x}$.

(1) 用 Cauchy 收敛原理. 对 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, 任取 $M>0$, 总总存在 $k=\lceil M/\pi\rceil$, 使得 $x_1=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi>M, x_2=(k+1)\pi>M(k\in\mathbb{N}^*)$, 使得 $|\sin x_1-\sin x_2|=1>\varepsilon$. 因此极限不存在.

(2) 考虑两个单边极限,

$$\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^+}1=1,\quad \lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0^-}-1=-1.$$

而极限存在的充要条件是两个单边极限存在且相等, 因此极限不存在.

习题 1.3.4 设函数 $f(x)$ 在正无穷大处的极限为 l, 则对于任意趋于正无穷大的数列 $\{a_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$. 特别地 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$.

(无穷版本的 Heine 定理) **解** 对 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 存在 $M>0$, 使得当 $x>M$ 时, $|f(x)-l|<\varepsilon$. 又由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, $a_n>M$. 因此当 $n>N$ 时, $|f(a_n)-l|<\varepsilon$. 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$. 特别地, 取 $a_n=n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$.

习题 1.3.5 讨论下列函数在 $x=0$ 处的极限.

(1) $f(x)=[x]$;　　(2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$;

(3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ 1+x^2, & x<0.\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0;\\ x, & x\leqslant0.\end{cases}$

解 **注** 教材中的符号 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 即不大于 x 的最大整数. 本题中, 我们沿用此符号. 其他地方, 我们使用 $\lfloor x\rfloor$ 表示对 x 向下取整, 使用 $\lceil x\rceil$ 表示对 x 向上取整.

(1) $\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$, $\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$. 因此极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{sgn}x=1$, $\lim\limits_{x\to0^-}\operatorname{sgn}x=-1$. 左右极限均存在, 但不相等, 因此极限不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}2^x=1$, $\lim\limits_{x\to0^-}(1+x^2)=1$. 因此极限存在, 且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在, 因此右极限不存在. 左极限 $\lim\limits_{x\to0^-}x=0$. 函数在 $x=0$ 处的极限不存在.

注 $\lim\limits_{x\to0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 的极限过程等同于考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$, 而该极限不存在 (与习题 1.3.3(1)同理).

习题 1.3.6 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

解

(1) 当 $\forall m\in\mathbb{N}^*, \sin\dfrac{x}{2^m}\neq0$ 时, 二倍角公式变形可得 $\cos y=\dfrac{\sin 2y}{2\sin y}$, 当 $\sin y\neq0$, 反复利用可知

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}}\cdots\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(2) 若存在 $m_0\geqslant 1,\sin\dfrac{x}{2^m}=0$, 有 $\dfrac{x}{2^{m_0}}=k\pi,x=2^{m_0}k\pi,k\in\mathbb{Z}$. 自然的推论是 $\forall m\leqslant m_0$, 有 $\sin\dfrac{x}{2^m}=\sin(2^{m_0-m}k\pi)=0$.

此时根据是否存在最大的 m_0, 使得 $\sin\dfrac{x}{2^{m_0}}=0$ 可以分成两种情况:

(a) $x=0$, 则 $\forall m\in\mathbb{N}^*$, 有 $\cos\dfrac{x}{2^m}=1$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=1$;

(b) $x\neq 0\Leftrightarrow\exists\, m_0,\text{s.t.}\sin\dfrac{x}{2^{m_0}}=0,\sin\dfrac{x}{2^{m_0+1}}\neq 0$, 也就是存在最大的 m_0.

因此可以得到 $x=2^{m_0}k\pi,k=2l+1,l\in\mathbb{Z}$(如果 k 是偶数, 那么与 $\sin\dfrac{x}{2^{m_0+1}}=\sin\dfrac{k\pi}{2}\neq 0$ 矛盾).

此时 $\cos\dfrac{x}{2^{m_0+1}}=\cos\dfrac{k\pi}{2}=\cos\left(l+\dfrac{1}{2}\right)\pi=0$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=0$.

不过又由于 $\sin x=0$ 同样成立, 并且 $x\neq 0$, 因此可以把结果合并进 $\dfrac{\sin x}{x}$.

综上所述,

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

习题 1.3.7 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\alpha}{n^2}+\sin\dfrac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n\alpha}{n^2}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$.

解 我们先证明如下事实:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}, & \sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0;\\ 0, & \sin\dfrac{\theta}{2}=0.\end{cases}$$

我们利用积化和差

$$\sin\frac{\theta}{2}\sin k\theta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{\theta}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\right)=&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\=&\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}-\cos\frac{5\theta}{2}+\cdots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\=&\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\=&\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta.\end{aligned}$$

因此, 当 $\sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0$ 自然有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

另一种情况是显然的, 每一项都为 0.

回到本题, 首先, 如果 $\alpha\neq 0$, 那么这意味着存在充分大的 N 使得 $n>N, 0<\left|\dfrac{\alpha}{n^2}\right|<\pi$, 此时, $\sin\dfrac{\alpha}{2n^2}\neq 0$. 因此 $n>N$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\frac{\alpha}{n^2}=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\sin\frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}$$

考虑 $\sin x\sim x, (x\to 0)$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin k\frac{\alpha}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\sin\frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\cdot\frac{n\alpha}{2n^2}}{\frac{\alpha}{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\alpha}{2n}=\frac{\alpha}{2}.$$

如果 $\alpha=0$, 那么每一项都为 0, 极限自然为 $0=\dfrac{\alpha}{2}$.

综上所述,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2}\right)=\frac{\alpha}{2}.$$

习题 1.3.8 证明: 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确. 叙述并证明, 当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时类似的结论. (应用本题结论, 可将极限过程为 $x\to\infty$ 的问题化为 $x\to 0$ 处理, 或者反过来. 例如, 我们有 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$.)

解 我们先给出这条命题的完整表述:

命题 (1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

(3) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

证明:

(1) 由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l\Rightarrow\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. $\Rightarrow\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$.
反之, 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. $\Rightarrow$ $\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$.

(2) 由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l\Rightarrow\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. $\Rightarrow\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$.

反之, 若 $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = l$. $\Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

(3) 由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l \Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. $\Rightarrow \forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0^-$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{y_n} = -\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = l$.
反之, 若 $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0^-$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{y_n}\right) = l$. $\Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0^-$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$.

习题 1.3.9 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

解

(1)

$$\lim_{x\to0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x\to0} \frac{\tan 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\sin 5x} \cdot \frac{2}{5} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

(2) 由和差化积,

$$\cos x - \cos 3x = 2 \sin 2x \sin x,$$

因此

$$\lim_{x\to0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{2\sin 2x \sin x}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 4 = 4.$$

(3) 当 $x > \dfrac{7}{2}$ 时, 有 $0 < \dfrac{x+1}{2x-1} < \dfrac{3}{4}$ 恒成立, 因此

$$0 \leqslant \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^x$$

又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^x = 0$, 由夹逼定理可知

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x = 0.$$

(4)

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2} \cdot \frac{2}{x^2-1} x^2} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2-1} x^2} = \mathrm{e}^2$$

习题 1.3.10 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x+1)$.

解

(1) $\arctan x$ 在 $x\to+\infty$ 时有界, 而 $x\to+\infty$ 时无界, 因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}=0.$$

具体而言,

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

(2) 由夹逼定理,

$$-x^2\leqslant x^2\sin\frac{1}{x}\leqslant x^2,$$

且 $\lim\limits_{x\to 0}-x^2=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, 因此

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$$

(3)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)x^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}x^2=4.$$

(4) 证明:

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2-x+1)=+\infty.$$

由 $2x^2-x+1=x^2+(x-1/2)^2+3/4>x^2$, 因此对 $\forall M>0$, 取 $N=\sqrt{M}$, 则当 $x>N$ 时, $2x^2-x+1>x^2>N^2=M$. 由此可知

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2-x+1)=+\infty.$$

习题 1.3.11 按定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty,(a>1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty,(a>1)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{1/x}=+\infty$.

解

(1) 对 $\forall M>0$, 取 $N=a^M$, 则当 $x>N$ 时, $\log_a x>\log_a N=M$.

(2) 对 $\forall M<0$, 取 $\delta=a^M$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $\log_a x<\log_a\delta=M$.

(3) 对 $\forall M>0$, 取 $\delta=\dfrac{\pi}{2}-\arctan M$, 则当 $\dfrac{\pi}{2}-\delta<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\tan x>\tan(\dfrac{\pi}{2}-\delta)=M$.

(4) 对 $\forall M>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{\ln M}$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $\mathrm{e}^{1/x}>\mathrm{e}^{1/\delta}=M$.

习题 1.3.12 证明: 函数 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界, 但当 $x\to+\infty$ 时, 这个函数并不是无穷大量.

解 $\forall M>0$, 存在 $x_0=(2k-1)\pi, k\in\mathbb{N}^*, 2k-1>M$, 因此 $y(x_0)=x_0\sin x_0=x_0>M$. 由此可知 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界.

$\forall X>0$, 总存在 $x_1=2k\pi, k\in\mathbb{N}^*, 2k\pi>X$, 使得 $y(x_1)=x_1\sin x_1=0$. 因此当 $x\to+\infty$ 时, $y=x\sin x$ 并不是无穷大量.

习题 1.3.13 函数 $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是否有界? 又当 $x\to0^+$ 时, 这个函数是否为无穷大量?

解 考虑 0^+ 处的 $\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 与考虑 $+\infty$ 处的 $x\cos x$ 是等价的. 以与习题 1.3.12类似的方法可知, $y=x\cos x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界, 但当 $x\to+\infty$ 时, $y=x\cos x$ 并不是无穷大量. 因此, $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界, 但当 $x\to0^+$ 时, $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 并不是无穷大量.

习题 1.3.14 本题所涉及的函数极限有着鲜明的几何意义.

记函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线为 C. 若动点沿曲线无限远离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线 C 的一条渐近线.

(i) 垂直渐近线　易知 (垂直于 x 轴的) 直线 $x=x_0$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty.$$

(ii) 水平渐近线　易知 (平行于 x 轴的) 直线 $y=b$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b.$$

(iii) 斜渐近线　请读者证明, 方程为 $y=ax+b\,(a\neq0)$ 的直线 L 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax);$$

或者

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax).$$

这里自然要假定所说的极限都存在. (提示: 以 $x\to+\infty$ 为例, 设曲线 C 及直线 L 上的横坐标为 x 的点分别为 M,N. 则 M 至 L 的距离, 是 $|MN|$ 的一个常数倍. 因此, 直线 L 为曲线 C 的渐近线, 等价于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$, 由此易得所说结果.)

求下列曲线的渐近方程.

(1) $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$;　　(2) $y=\dfrac{3x^2-2x+3}{x-1}$.

解 先证明, 仅证明 $+\infty$, 另一种同理. 正如提示所说, 由于距离 $d=\left|\dfrac{f(x)-(ax+b)}{\sqrt{a^2+1}}\right|$, 因此 l 是

渐近线, 等价于 $x \to +\infty$ 时 d 趋于 0, 等价于 $f(x)-(ax+b)$ 趋于 0.

然后问题转化为了证明

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0 \Leftrightarrow a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax).$$

充分性: 由 $b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ 可知,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0.$$

必要性: 由 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ 可知,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b.$$

(1) (a) 垂直渐近线, $x=-\frac{1}{\mathrm{e}}$: $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{\mathrm{e}})^-}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim\limits_{y\to0^+}\ln y=+\infty$;

(b) 斜渐近线, $y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(y(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})-1)=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{\mathrm{e}x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{\mathrm{e}x})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/\mathrm{e}x}{1/x}=\frac{1}{\mathrm{e}}$ ($\pm\infty$ 两侧是同一条渐近线);

(2) (a) 垂直渐近线, $x=1$: $\lim\limits_{x\to1}y(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x+3}{x-1}=\infty$;

(b) 斜渐近线, $y=3x+1$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(y(x)-3x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-1}=1$;

习题 1.3.15 证明: 在同一极限过程中等价的无穷小量有下列性质:

(1) $\alpha(x)\sim\alpha(x)$ (自反性);

(2) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$, 则 $\beta(x)\sim\alpha(x)$ (对称性);

(3) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $\beta(x)\sim\gamma(x)$, 则 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$ (传递性).

(注意, (1) 中自然需假定 $\alpha(x)$ 不取零值; 而在 (2)、(3) 中, 条件蕴含着, 所说的无穷小量在极限过程中均不取零值.)

解 解释一下, 这里说的是 (1) 需要没有 $\alpha(x)\equiv0$ 这种情况.(2)(3) 因为有“若 xxx”的假设自然排除了这种情况.

(1) 显然, $\lim\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$, 因此 $\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

(2) 由 $\alpha(x)\sim\beta(x)$ 可知, $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 因此 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$, 即 $\beta(x)\sim\alpha(x)$.

(3) 由 $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $\beta(x)\sim\gamma(x)$ 可知, $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, $\lim\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1$, 因此 $\lim\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\lim\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1$, 即 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$.

习题 1.3.16 当 $x \to 0$ 时, 比较下列无穷小的阶:

(1) $\tan x - \sin x$ 与 x^3; (2) $x^3 + x^2$ 与 $\sin^2 x$;

(3) $1 - \cos x$ 与 x^2.

解

(1)
$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x\left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = \sin x \cdot \frac{1-\cos x}{\cos x}.$$

由 $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, \cos x \sim 1$, 可知
$$\tan x - \sin x \sim x \cdot \frac{x^2/2}{1} = \frac{x^3}{2}.$$

因此,
$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

(2)
$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \sim x^2 (x \to 0).$$

同时,
$$x^3 + x^2 = (x+1)x^2 \sim x^2 (x \to 0).$$

可得
$$x^3 + x^2 \sim \sin^2 x$$

(3)
$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}(x \to 0).$$

习题 1.3.17 当 $x \to +\infty$ 时, 试比较下列无穷大量的阶:

(1) n 次多项式 $P_n(x)$ 与 m 次多项式 $P_m(x)$ (m, n 均为正整数);

(2) x^α 与 x^β ($\alpha, \beta > 0$);

(3) a^x 与 b^x ($a, b > 1$).

解

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}\cdots}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{x^m} \frac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots}$

$$= \frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to+\infty} x^{n-m} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{b_m}, & n=m; \\ 0, & n<m; \\ +\infty, & n>m. \end{cases}, \text{即得到} \begin{cases} P_n(x)\sim P_m(x), & n=m; \\ P_m(x)\text{更高阶}, & n<m; \\ P_n(x)\text{更高阶}, & n>m. \end{cases}.$$

(2) 利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha=\beta; \\ 0, & \alpha<\beta; \\ +\infty, & \alpha>\beta. \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x^\alpha\sim x^\beta, & \alpha=\beta; \\ x^\beta\text{更高阶}, & \alpha<\beta; \\ x^\alpha\text{更高阶}, & \alpha>\beta. \end{cases}$

(3) 利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{b^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \begin{cases} 1, & a=b; \\ 0, & a<b; \\ +\infty, & a>b. \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} a^x\sim b^x, & a=b; \\ b^x\text{更高阶}, & a<b; \\ a^x\text{更高阶}, & a>b. \end{cases}$

习题 1.3.18 试用等价无穷小量代换的方法计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m,n 均为正整数);

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

解

(1) 由 $\sin x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx} = \lim_{x\to0}\frac{mx}{nx} = \frac{m}{n}.$$

(2) 由 $\tan x\sim x$, 可知 $a\neq 0$ 时,

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{x} = \lim_{x\to0}\frac{ax}{x} = a.$$

很显然该结果对 $a=0$ 也成立.

(3) 由 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $\arctan x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{n}\sin x}{x} = \frac{1}{n}.$$

(4)

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} = \frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}.$$

由 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, $\sin x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})} = \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(5) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \sin x \sim x$, 可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

(6) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, 可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

第 1 章综合习题

习题 1.C.1 求下列数列的极限:

(1) $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$ (提示: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$);

(2) $a_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}$;

(3) 设 $a_1 > 1, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}, n = 1, 2, \cdots$;

(4) 设 $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n = 1, 2, \cdots$.

解

(1) 由

$$(2n)^2 = 4n^2 \geqslant 4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1)$$

可得

$$\frac{2n-1}{2n} \leqslant \frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} = \sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}.$$

因此

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \leqslant \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdots \frac{2n-1}{2n+1}} = \sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{2n+1}} = 0$, 故由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}$, 知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+9}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{a_n}\right)^n = 0$;

(3) 由 $a_1 > 1$, 以及若 $a_n > 1$ 时, $a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n} > 1$, 归纳的可知 $a_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^+$. 所以数列有下界. 再用归纳法: 当 $n = 1$ 时:

$$a_2 - a_1 = 2 - \left(\frac{1}{a_1} + a_1\right) \leqslant 2 - 2 = 0,$$

推出 $a_2 \leqslant a_1$. 假设对 n 有 $a_n \leqslant a_{n-1}$, 那么当 $n+1$ 时

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n a_{n-1}} \leqslant 0.$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调减有下界数列, 因此收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \geqslant 1$. 在

$$a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

两边取极限得

$$a = 2 - \frac{1}{a} \implies a^2 - 2a + 1 = 0$$

解得 $a=\pm 1$. 但 $a=-1$ 不合题意, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

(4) $a_{n+2}=\dfrac{1}{1+a_{n+1}}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}}=\dfrac{1+a_n}{2+a_n}$. 假如对任何 n, 有 $a_{2n}\geqslant a_{2n-2}$; $a_{2n+1}\leqslant a_{2n-1}$, 那么对 $n+1$, 有

$$a_{2n+2}-a_{2n}=\frac{1}{1+a_{2n+1}}-\frac{1}{1+a_{2n-1}}=\frac{a_{2n-1}-a_{2n+1}}{1+a_{2n+1}a_{2n-1}}\geqslant 0$$
$$a_{2n+3}-a_{2n+1}=\frac{1}{1+a_{2n+2}}-\frac{1}{1+a_{2n}}=\frac{a_{2n}-a_{2n+2}}{1+a_{2n+2}a_{2n}}\leqslant 0$$

推出数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{2n}\}$ 单调增有上界, $\{a_{2n-1}\}$ 单调减有下界. 因此分别收敛. 对

$$a_{2n+2}=\frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}},$$

两边取极限得

$$a=\frac{1+a}{2+a}\implies a^2+a-1=0$$

解得 $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 同理, 对

$$a_{2n+3}=\frac{1+a_{2n+1}}{2+a_{2n+1}},$$

两边取极限得

$$b=\frac{1+b}{2+b}\implies b^2+b-1=0$$

解得 $b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

习题 1.C.2 设 $\{a_n\}$ 为单调递增的数列, 并且收敛于 a, 证明对一切 n 有 $a_n<a$. (对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

解 反证法. 假设存在某个 n_0, 使得 $a_{n_0}>a$. 由数列单调递增的性质, 对一切 $n>n_0$ 有 $a_n\geqslant a_{n_0}>a$, 于是存在 $\varepsilon=\dfrac{a_{n_0}-a}{2}>0$, 使得 $\forall N$, 存在 $n=\max\{n_0,N\}+1>N$, 使得

$$|a_n-a|=a_n-a\geqslant a_{n_0}-a=2\varepsilon>\varepsilon,$$

这与数列收敛的定义矛盾.

习题 1.C.3 证明下面的数列收敛:

(1) $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$;

(2) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

解

(1) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=2-\frac{1}{n}<2,$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 因此 $\{a_n\}$ 收敛;

(2) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{\sum_{k=1}\frac{1}{2^k}} = \mathrm{e}^1.$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 又由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

习题 1.C.4 试构造一个发散的数列 $\{a_n\}$, 满足条件: 对任意正数 ε, 存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

解 取 $a_n = \sqrt{n}$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > \dfrac{1}{4\varepsilon^2}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

但数列 $\{a_n\}$ 显然发散.

习题 1.C.5 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在常数 M, 使得对一切 n 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leqslant M.$$

证明:

(1) 数列 $\{A_n\}$ 收敛;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

解

(1) 由数列定义可知 $\{A_n\}$ 单调递增. 又因为对一切 n 有 $A_n \leqslant M$, 所以 $\{A_n\}$ 有上界. 因此 $\{A_n\}$ 收敛;

(2) 用 Cauchy 收敛准则证明. 由 (1) 知 $\{A_n\}$ 收敛, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N, \forall n > N+1, p > 0$, 有

$$|A_{n+p} - A_{n-1}| = |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

由三角不等式可知

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

习题 1.C.6 设 $\{a_n\}$ 是正严格递增数列. 求证: 若 $a_{n+1} - a_n$ 有界, 则对任意 $\alpha \in (0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$. 并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列 $\{a_n\}$ 使得对任意 $\alpha \in (0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$, 但是 $a_{n+1} - a_n$ 无界. (提示: 考虑 $a_n = n\ln n$.)

解

(1) 若 $\{a_n\}$ 有界, 此时由于其严格单调, 故有极限, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = l^\alpha - l^\alpha = 0$.

(2) 若 $\{a_n\}$ 无界, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 设 $|a_{n+1} - a_n| \leqslant M$.

$$0 \leqslant a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha\left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^\alpha - 1\right) < a_n^\alpha\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{1-\alpha}} \leqslant \frac{M}{a_n^{1-\alpha}}.$$

同时,

$$\lim_{n\to\infty} Ma_n^{\alpha-1}=0.$$

因此由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha})=0$.

(3) 反之不对, 取 $a_n=n\ln n$, 则

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}&=(n+1)^{\alpha}\ln^{\alpha}(n+1)-n^{\alpha}\ln^{\alpha}\\
&<((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha})\ln^{\alpha}n\\
&=n^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)\ln^{\alpha}n\\
&<n^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)\ln^{\alpha}n\\
&=n^{\alpha-1}\ln^{\alpha}n=\frac{\ln^{\alpha}n}{n^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{\alpha}n}{n^{1-\alpha}}=0,$$

因此由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha})=0$. 但

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)\ln(n+1)-n\ln n=\ln(n+1)+n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>\ln(n+1),$$

显然无界.

习题 1.C.7 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=a$.

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a.$$

习题 1.C.8 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 且 $a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

解 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}{n}}\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{1}}=\mathrm{e}^{\ln a}=a.$$

习题 1.C.9 证明: 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 也存在, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

解 设 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}},(n>1);b_1=a_1$, 则 $a_n=b_1b_2\cdots b_n$. 由综合习题 1.C.8可知结果. 直接 Stolz 也

可以得到结果.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\dfrac{\ln a_n}{n}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n}} \\ &= \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{1}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}} \\ &= \mathrm{e}^{\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.\end{aligned}$$

习题 1.C.10 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解

(1) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1;$$

(2) 可以用综合习题 1.C.9来做, 记 $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \mathrm{e}.$$

习题 1.C.11 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \dfrac{a}{2}$.

解 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}\lim_{n\to\infty}a_n = \frac{a}{2}.$$

习题 1.C.12 设 $\{a_n\}$ 且 $a_n\to a\in\mathbb{R}$, 又设 $\{b_n\}$ 是正数列, $c_n = \dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 求证:

(1) $\{c_n\}$ 收敛;

(2) 若 $(b_1+b_2+\cdots+b_n)\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n = a$.

解

(1) 记 $B_n = b_1+b_2+\cdots+b_n$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$, 任取 $\varepsilon>0$, 存在 K, 当 $k>K$ 时,$|a_k-a|<\varepsilon$. 当 $n>K$, 有

$$c_n - a = \frac{\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)b_k}{B_n} = \frac{\sum_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k}{B_n} + \frac{\sum_{k=K+1}^{n}(a_k-a)b_k}{B_n}.$$

其中

$$\left|\frac{\sum_{k=K+1}^{n}(a_k-a)b_k}{B_n}\right| \leqslant \frac{\sum_{k=K+1}^{n}|a_k-a|b_k}{B_n} < \varepsilon\frac{\sum_{k=K+1}^{n}b_k}{B_n} < \varepsilon.$$

因此

$$\left|c_n - \left(a + \frac{\sum_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k}{B_n}\right)\right| < \varepsilon.$$

而对于

$$q_n := \frac{\sum_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k}{B_n},$$

$C := \sum\limits_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k$ 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数,B_n 单调增, 因此 q_n 单调有界 ($C>0$ 时 q_n 单调减且 $q_n>0, C<0$ 时 q_n 单调增且 $q_n<0$), 故 q_n 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = q$, 再取 N, 使得当 $n,m>N$ 时,$|q_m-q_n|<\varepsilon$, 则当 $n,m>\max\{N,K\}$ 时,

$$|c_m-c_n| \leqslant |c_n-(a+q_n)|+|c_m-(a+q_m)|+|q_m-q_n|<3\varepsilon.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 c_n 收敛.

(2) 下给出两种方法,

(a) 由 (1) 中的过程,$q_n=\dfrac{C}{B_n}$, 由于 $B_n\to+\infty, C$ 为常数, 因此 $q_n\to 0$, 因此存在 N, 使得当 $n>N$ 时,$|q_n|<\varepsilon$, 则当 $n>\max\{N,K\}$ 时,

$$|c_n-a| \leqslant |c_n-(a+q_n)|+|q_n|<\varepsilon+|q_n|<2\varepsilon.$$

(b) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

上述解答中给出了符合题目原意的证明, 即先证明 c_n 收敛, 然后在 B_n 无界时, 再证明 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. 但对于这道题而言, 还可以分类 B_n 有界和无界来讨论, 即先做 (2), 然后对 B_n 有界时, 用 Cauchy 收敛准则证明 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_nb_n\right\}$ 收敛, 即两种分类下以截然不同的方式来证明 c_n 收敛.

注 $a_n := \cdots$ 中 $:=$ 表示定义. 如 $a_n := \dfrac{1}{n}$ 表示我们新定义了一个数列 a_n, 其通项公式为 $a_n = \dfrac{1}{n}$. 在上文中 “$C := \sum\limits_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k$ 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数.” 表示: “记 $C = \sum\limits_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k$, 则 C 是仅与 K 有关, 与 n 无关的常数.” 有的地方会写为 $a_n \overset{\text{def}}{=} \cdots$.

习题 1.C.13 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^p}\right)^x = \begin{cases} 1, & p>1, \\ \mathrm{e}, & p=1, \\ \infty, & p<1. \end{cases}$

解 实际上题目中的无穷只能是 $+\infty$.

$p>0$ 时, $x^p\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{x^p\cdot\frac{1}{x^{p-1}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{p-1}}}=\begin{cases}1, & p>1,\\ \mathrm{e}, & p=1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$$

$p\leqslant 0$ 时, $x^p\to 0$, 则考虑 $x>1$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x\geqslant\lim_{x\to+\infty}2^x=+\infty.$$

习题 1.C.14 设 $f(x)$ 为周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, 证明 $f(x)$ 恒为零.

解 设 $f(x)$ 的正周期为 $T>0,\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $|x|\geqslant N$ 时 $|f(x)|<\varepsilon$.

因此对于 $n=\left\lceil\dfrac{N}{T}\right\rceil$, 有 $nT\geqslant N$, 故对于任意 $x\in[nT,(n+1)T)$, 有 $f(x)<\varepsilon$.

利用周期性可以得到 $\forall x\in\mathbb{R},|f(x)|<\varepsilon$. 由于 ε 是任意的正数, 所以 $f(x)$ 恒为零.

习题 1.C.15 证明

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递增数列 $\{a_n\}\,(a_n\neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$;

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0^+$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的单调递减数列 $\{a_n\}\,(a_n\neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$.

解

(1) (a) 必要性: 考虑任意数列 $\{a_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$ 且 $\{a_n\}$ 单调递增, .

由于 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l$, 因此, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.

同时对于 $\delta,\exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-x_0|<\delta$, 即 $x_0-\delta<a_n<x_0$.

因此我们有 $m>N$ 时 $|f(a_n)-l|<\varepsilon$. 即得到数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛到 l.

(b) 充分性: 反证, 若 $x\to x_0^-$ 时 $f(x)$ 的极限为 l 不成立, 即 $\exists\varepsilon>0,\forall\delta>0,\exists x_0-\delta<x<x_0$, 使得 $|f(x)-l|\geqslant\varepsilon$.

因此我们依次构造 $\delta_1=1,\delta_n=\min\{\dfrac{1}{n},x_0-a_{n-1}\},(n>2)$, 则 $\exists a_n,x_0-\delta_n<a_n<x_0$, 使得 $|f(a_n)-l|\geqslant\varepsilon$. 即有 $a_n>a_{n-1}$, 且 $|x_0-a_n|<\dfrac{1}{n}$. 这意味着 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$.

由于 $|f(a_n)-l|\geqslant\varepsilon$, 所以 $\{f(a_n)\}$ 不收敛到 l, 矛盾, 故充分性成立.

(2) 证明同理. 具体而言:

设 $g(x)=f(-x)$, 则 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时有极限 $l\Leftrightarrow g(x)$ 在 $x\to -x_0^+$ 时有极限 l. 由 (1) 可知, 这等价于对于任意一个以 $-x_0$ 为极限的单调递增数列 $\{b_n\}\,(b_n\neq -x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}g(b_n)=l$. 设 $a_n=-b_n$, 则 $\{a_n\}$ 是以 x_0 为极限的单调递减数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$. 因此 (2) 得证.

习题 1.C.16 设 ξ 是一个无理数, a, b 是实数, 且 $a < b$. 求证: 存在整数 m, n 使得 $m+n\xi \in (a, b)$, 即, 集合

$$S = \{m + n\xi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

在 $\mathbb{R}$ 稠密.

解 稠密的定义: 设 $S \subset \mathbb{R}$, 若对任意 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, 都有 $S \cap (a, b) \neq \varnothing$, 则称 S 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

想法是这样的, 我们为了找到某个 $m + n\xi$ 落在 (a, b) 中, 于是用 ξ 构造一个充分小的实数 $\varepsilon = m_0 + n_0\xi \in (0, b-a)$. 因为这个 ε 够小, 所以能证明存在某个 $l_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $l_0\varepsilon \in (a, b)$, 直观理解如图 1.1 所示.

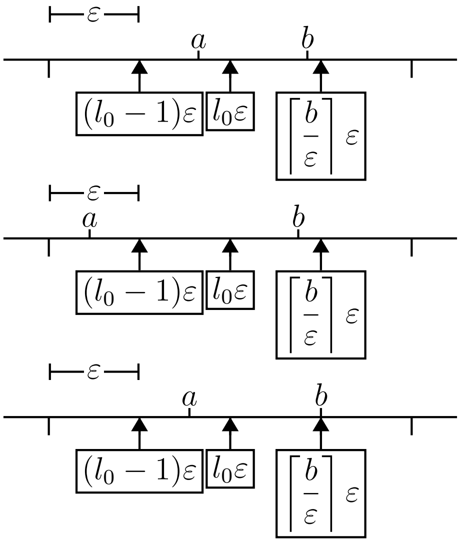


图 1.1: a, b 之间的区间长度大于 ε, 因此存在某个 $l_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $l_0\varepsilon \in (a, b)$.
这里的思路和习题 1.1.2中证明两个无理数之间存在有理数的思路是类似的.

随后我们取 $m = l_0m_0, n = l_0n_0$ 即有 $m + n\xi = l_0\varepsilon \in (a, b)$.

构造 ε　实际上, 对于 $b - a > 0$, 总存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\dfrac{1}{k} < b - a$. 因此我们考虑构造一个满足 $\varepsilon < \dfrac{1}{k}, \varepsilon \in S$ 即可.

对于 $l = 1, 2, \cdots, k+1$, 我们考虑

$$n_l = \lfloor l\xi \rfloor$$

$$x_l = l\xi - n_l \in S.$$

x_l 是 $l\xi$ 的小数部分, 容易知道 $x_l \in [0, 1)$, 并且 x_l 之间总是两两不同的, 否则 $i\xi - n_i = j\xi - n_j, i \neq j$, 这意味着 $\xi = \dfrac{n_i - n_j}{i - j}$, 这与 ξ 为无理数矛盾.

因此对于

$$[0, 1) = \bigcup_{j=1}^{k} \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right),$$

这 k 个区间包括了 $k+1$ 个不同实数 x_l. 因此总有一个区间内部存在同时两个实数, 记为 $x_p, x_q \in S, p \neq q$, 不妨认为 $x_q > x_p$.

由 x_l 的构造 $x_p = p\xi - n_p, x_q = q\xi - n_q$, 有

$$x_q - x_p = (q-p)\xi - (n_p - x_q) \in S,$$

且由于 x_p, x_q 落在同一个区间内, 而区间长度为 $\dfrac{1}{k}$, 因此 $0 < x_q - x_p \leqslant \dfrac{1}{k} < b - a$, 所以 $x_q - x_p$ 满足我们对 ε 的要求. 我们取

$$\varepsilon = x_q - x_p.$$

构造 m, n　我们先证明 $\exists l_0 \in \mathbb{Z}, \mathrm{s.t.}\ l_0\varepsilon \in (a, b)$: 我们取 $l_0 = \left\lceil \dfrac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1$, 则

$$l_0\varepsilon = \left(\left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon < \left(\frac{b}{\varepsilon} + 1 - 1 \right) \varepsilon = b.$$

同时, 由于 $\varepsilon < b - a$, 因此

$$l_0\varepsilon = \left(\left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon \geqslant \left(\frac{b}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon = b - \varepsilon > b - (b - a) = a.$$

因此 $l_0\varepsilon \in (a, b)$.

于是令

$$m = l_0(n_q - n_p), n = l_0(q - p)$$

即有 $m + n\xi = l_0(n_q - n_p) + l_0(q-p)\xi = l_0\left((q-p)\xi - (n_p - n_q)\right) = l_0\varepsilon \in (a, b)$.

第 2 章 连续函数的基本概念

习题 2.1

习题 2.1.1 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义, 且 $\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$. 问 $f(x)$ 是否必在 $x=x_0$ 处连续?

解 不一定. 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{h\to 0}[f(0+h)-f(0-h)]=\lim\limits_{h\to 0}(0-0)=0$, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

习题 2.1.2 设对任意正数 $\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上连续. 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

解 设 $x_0\in(a,b)$, 则存在 $\varepsilon_0=\min\left\{\dfrac{b-x_0}{2},\dfrac{x_0-a}{2}\right\}>0$, 使得 $a+\varepsilon_0<x_0<b-\varepsilon_0$. 因为 $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon_0,b-\varepsilon_0]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 因此 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

习题 2.1.3 设在点 $x=x_0$ 处, 函数 $f(x)$ 连续, 而 $g(x)$ 不连续, 问函数 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 的连续性如何? 若 $f(x),g(x)$ 在 x_0 处都不连续, 回答同样的问题.

解

(1) $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处均不连续. 反证: 若 $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=f(x_0)+g(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)+g(x_0)-f(x_0)=g(x_0)$, 矛盾. 同理可证 $f(x)-g(x)$ 在点 x_0 处不连续.

$f(x)g(x)$ 在 x_0 处连续性未知, 例如, 设

$$f(x)=x,\quad g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)\equiv x$, 在点 $x_0=0$ 处连续. 又例如, 设

$$f(x)=1,\quad g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 处不连续.

(2) 若 $f(x),g(x)$ 在 x_0 处都不连续, 则 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处可能连续, 也可能

不连续. 例如,

(a) $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ -1, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)+g(x)\equiv 0$, 在点 $x_0=0$ 处连续.

(b) $f(x)+g(x)$ 在点 x_0 处不连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)+g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 2, & x=0;\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 处不连续.

(c) $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)\equiv 0$, 在点 $x_0=0$ 处连续.

(d) $f(x)g(x)$ 在点 x_0 处不连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 处不连续.

习题 2.1.4

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=x_0$ 处也连续.

(2) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在一个区间 I 上连续, 证明: 函数 $M(x)=\max(f(x),g(x))$ 及 $m(x)=\min(f(x),g(x))$ 在区间 I 上均连续.

解

(1) 因为 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 因此 $\forall\varepsilon>0,\exists\,\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 又因为

$$||f(x)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$, 即 $|f(x)|$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

(2) 由 $M(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}+\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}, m(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}-\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$ 可知, 只需

证明 $|f(x)-g(x)|$ 在区间 I 上连续. 因为 $f(x), g(x)$ 在区间 I 上连续, 故 $f(x)-g(x)$ 在区间 I 上连续. 由 (1) 可知, $|f(x)-g(x)|$ 在区间 I 上连续.

习题 2.1.5 证明: 存在这样的函数 $f(x)$, 处处不连续, 但函数 $|f(x)|$ 处处连续. (提示: 适当地修改 Dirichlet 函数可得出一个例子.)

解 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 处处不连续, 但 $|f(x)|\equiv 1$, 处处连续.

证明 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在, 取 $\{a_n\}\subset\mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=x_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=1$; 取 $\{b_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=x_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)=-1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(a_n)\neq\lim\limits_{x\to x_0} f(b_n)$, 矛盾. 因此 $f(x)$ 处处不连续.

习题 2.1.6 指出下列函数的间断点, 并说明其类型.

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\lfloor|\cos x|\rfloor$;

(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$;

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7,\\ x, & -7\leqslant x\leqslant 1,\\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty;\end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ 4, & x=2.\end{cases}$

解

(1)

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty.$$

左右极限不存在, 因此 $x=2$ 是第二类间断点.

(2)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)=-1.$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(3) 可知 $f(x)=\begin{cases}1, & x=k\pi,k\in\mathbb{Z};\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 在 $x=k\pi$ 处, $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=0\neq f(k\pi)=1$. 左右极限存在且相等, $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ 是第一类间断点中的可去间断点.

(4)

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}=0,\quad \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}=1.$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(5) (a) 在 $x=-7$ 处

$$\lim_{x\to-7^-}f(x)=\lim_{x\to-7^-}\frac{1}{x+7}=-\infty,\quad \lim_{x\to-7^+}f(x)=-7,$$

左极限不存在, 因此 $x=-7$ 是第二类间断点.

(b) 在 $x=1$ 处:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=1,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}=0,\quad f(1)=1,$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x=1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(6) 当 $x\neq2$ 时, $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$. $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$, 但 $f(2)=4$, 函数值与极限值相等. 因此函数在 $x=2$ 处连续, 无间断点.

习题 2.1.7 试确定 a, 使得函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

解 由 $f(0)=a$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\mathrm{e}^0=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=a+0=a$ 可知, 当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

习题 2.1.8 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{-1/x}}{\mathrm{e}^{1/x}+\mathrm{e}^{-1/x}}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$, 在点 0 处右连续, 但不左连续.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{-1/x}}{\mathrm{e}^{1/x}+\mathrm{e}^{-1/x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2/x}}{1+\mathrm{e}^{-2/x}}=1=f(0)$, 故 $f(x)$ 在点 0 处右连续. 又因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{-1/x}}{\mathrm{e}^{1/x}+\mathrm{e}^{-1/x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{2/x}-1}{\mathrm{e}^{2/x}+1}=-1\neq f(0)$, 故 $f(x)$ 在点 0 处不左连续.

习题 2.1.9 证明: 对每个实数 x, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 存在. 将该极限值记为 $f(x)$, 试讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

解

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=(1+x)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(x^2)^n}=\begin{cases}1+x, & |x|<1;\\ \dfrac{1+x}{2}, & x=\pm1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

即

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<1;\\ 1, & x=1;\\ 0, & x>1\text{或}x\leqslant -1.\end{cases}$$

因此,

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=0=f(-1)$, 故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续;
$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2\neq f(1)$, 故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续; 对于其他点, $f(x)$ 均连续.
综上所述, $f(x)$ 在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续, 在 $x=1$ 处不连续.

习题 2.1.10 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 则存在一个正数 δ, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上有界. (这一结果称为连续函数的局部有界性.)

解 因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=1$, 则当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<1$, 即 $-1<f(x)-f(x_0)<1$, 故 $f(x_0)-1<f(x)<f(x_0)+1$. 因此, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有 $|f(x)|\leqslant\max\{|f(x_0)-1|,|f(x_0)+1|\}$, 即 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上有界.

习题 2.1.11 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 且 $f(x_0)\neq0$, 则存在一个正数 δ, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上与 $f(x_0)$ 同号. (这一结果称为连续函数的局部保号性) 进一步, 存在某个正数 γ, 使得 $f(x)$ 在这一区间中满足 $|f(x)|\geqslant\gamma$.

解 因为 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=\dfrac{|f(x_0)|}{2}$, 则当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{|f(x_0)|}{2},$$

即

$$-\frac{|f(x_0)|}{2}<f(x)-f(x_0)<\frac{|f(x_0)|}{2},$$

故 $f(x_0)-\dfrac{|f(x_0)|}{2}<f(x)<f(x_0)+\dfrac{|f(x_0)|}{2}$.

因为 $f(x_0)\neq0$, 故当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有

(1) $f(x_0)>0$ 时

$$f(x)>f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)}{2}>0.$$

(2) $f(x_0)<0$ 时

$$f(x)<f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)}{2}<0.$$

因此, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号. 进一步地, 取 $\gamma=\dfrac{|f(x_0)|}{2}$, 则当

$x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时, 有 $|f(x)| \geqslant \gamma$.

习题 2.1.12 证明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$ (从而 x_0 为 $g(x)$ 的可去间断点), $f(u)$ 在 $u=a$ 处连续, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(a).$$

(这一结论对其他五种极限过程也成立.)

解 由于 $\lim\limits_{u\to a} f(u) = f(a)$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta_1 > 0$, 当 $|u-a| < \delta_1$ 时, 有 $|f(u)-f(a)| < \varepsilon$.

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$, 故对于 $\delta_1 > 0, \exists\, \delta_2 > 0$, 当 $|x-x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x)-a| < \delta_1$.

因此, 当 $|x-x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x)-a| < \delta_1$, 即 $|f(g(x))-f(a)| < \varepsilon$. 综上所述, $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(a)$.

习题 2.1.13 证明: 若函数 $u(x), v(x)$ 在 x_0 处连续, 且 $u(x_0) > 0$, 则函数 $u(x)^{v(x)}$ 也在点 x_0 处连续.

解 利用 e^x 在 $\mathbb{R}$ 上连续,$\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 以及复合函数的极限可交换性, 有

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{v(x_0)\ln u(x_0)} = u(x_0)^{v(x_0)}.$$

习题 2.1.14 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且对于任意 x 有 $f(2x) = f(x)$. 求证 $f(x)$ 是常数.

解 即证:$f(x) \equiv f(0)$. 对于任意点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 考虑任意以 x_0 为极限的数列,$\{x_n\}$, 则由连续性

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_n}{2^n}\cdot 2^n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_n}{2^n}\right) = f(0),$$

且 $f(x_0) = f(0)$. 由于 x_0 的任意性, 故 $f(x) \equiv f(0)$.

习题 2.1.15 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且对于任意 x, y 有 $f(x+y) = f(x)+f(y)$. 求证 $f(x) = cx$, 其中 c 是常数.

解

(1) 由 $f(0) = f(0+0) = f(0)+f(0)$ 可知,$f(0) = 0$.

(2) 对 $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx) = f((n-1)x+x) = f((n-1)x)+f(x) = \cdots = \underbrace{f(x)+f(x)+\cdots+f(x)}_{n\text{个}} = nf(x).$$

即对任意自然数 $n \in \mathbb{N}, f(nx) = nf(x)$.

(3)

$$f(-x)+f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

即对任意整数 $k \in \mathbb{Z}, f(kx) = kf(x)$.

(4) 对 $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$,

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m\cdot\frac{1}{n}\cdot nf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f(x)$$

即对任意有理数 $r=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}, f(rx)=rf(x)$.

(5) 对 $x\in\mathbb{R}$, 则存在有理数列 $\{r_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=x$, 因此,

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} r_n f(1)=xf(1).$$

由于 f 在 x 处连续, 故

$$f(x)=f(\lim_{n\to\infty} r_n)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=xf(1).$$

取 $c=f(1)$, 即有 $f(x)=xf(1)=cx$.

习题 2.1.16 当 $x\to 0$ 时, 用 $\sin x\sim x, \tan x\sim x$ 证明 $\arcsin x\sim x, \arctan x\sim x$; 用 $\ln(1+x)\sim x$ 证明 $(\mathrm{e}^x-1)\sim x$.

(上述的等价无穷小, 是微积分中非常基本的事实.)

解

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续. 设 $g(x)=\arcsin x$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\arcsin x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)=f(0)=1,$$

即 $\arcsin x\sim x$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续. 设 $g(x)=\arctan x$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\arctan x}{\arctan x}=\lim_{x\to 0} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)=f(0)=1,$$

即 $\arctan x\sim x$;

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续. 设 $g(x)=\mathrm{e}^x-1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x-1}=\lim_{x\to 0} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)=f(0)=1,$$

即 $(\mathrm{e}^x-1)\sim x$.

习题 2.1.17 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[10]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin(\sin x)}{1-\cos x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to -\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$;

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

解

(1) $\sqrt{1+x+x^2}-1\sim\dfrac{1}{2}(x+x^2), \sin 2x\sim 2x, (x\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x}=\frac{1}{4};$$

(2) $\sqrt{1+x^2}-1\sim\dfrac{1}{2}x^2, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, (x\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=1;$$

(3) $\sqrt[10]{1+\tan x}-1\sim\dfrac{1}{10}\tan x\sim\dfrac{1}{10}x, \sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x, 2x\sin x\sim 2x^2, (x\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[10]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{10}x\cdot\frac{1}{2}x}{2x^2}=\frac{1}{40};$$

(4) $x\cdot\arcsin(\sin x)\sim x^2, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, (x\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\arcsin(\sin x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2;$$

(5) $1-\cos(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}(1-\cos x)^2\sim\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^2=\dfrac{1}{8}x^4, (x\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4}{x^4}=\frac{1}{8};$$

(6) 令 $y=\dfrac{1}{x}$, 则 $y\to 0^+$,

并且 $x=-\dfrac{1}{y}$, 即有 $x(\sqrt{x^2+100}+x)=-\dfrac{1}{y}\left(\sqrt{\dfrac{1}{y^2}+100}-\dfrac{1}{y}\right)=-\dfrac{\sqrt{1+100y^2}-1}{y^2}$

而 $\sqrt{1+100y^2}-1\sim\dfrac{1}{2}\cdot 100y^2=50y^2, (y\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to -\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim_{y\to 0^+}-\frac{\sqrt{1+100y^2}-1}{y^2}=-\lim_{y\to 0^+}\frac{50y^2}{y^2}=-50$$

(7)

$$\begin{aligned}\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|&=\left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|\\&=2\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right|\\&\leqslant 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$ 可知, $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$;

(8)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-0}=\sqrt{2}.$$

习题 2.1.18 (旧版教材中的题目) 函数 $\sinh x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 与 $\cosh x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 分别称为双曲正弦与双曲余弦 (统称为双曲函数), 它们均在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 证明以下各题. (可与三角函数的性质作比较.)

(1) $\sinh(-x)=-\sinh x,\quad \cosh(-x)=\cosh x$; (2) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$;

(3) $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$; (4) $\cosh 2x=\sinh^2 x+\cosh^2 x$;

(5) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$; (6) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$.

解

(1) $\sinh(-x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{2}=-\sinh x$, $\cosh(-x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{2}=\cosh x$;

(2) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}}{4}-\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}}{4}=1$;

(3) $\sinh 2x=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}{2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x)^2-(\mathrm{e}^{-x})^2}{2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{2}=2\sinh x\cosh x$;

(4) $\cosh 2x=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}{2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x)^2+(\mathrm{e}^{-x})^2}{2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2+(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}{4}=\sinh^2 x+\cosh^2 x$;

(5) $\sinh(x\pm y)=\dfrac{\mathrm{e}^{x\pm y}-\mathrm{e}^{-(x\pm y)}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2}=$ $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right)+\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$;

(6) $\cosh(x\pm y)=\dfrac{\mathrm{e}^{x\pm y}+\mathrm{e}^{-(x\pm y)}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2}=$ $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right)+\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$.

习题 2.2

习题 2.2.1 证明函数 $x \cdot 2^x - 1$ 在 $[0,1]$ 内有零点.

解 设 $f(x) = x \cdot 2^x - 1$, 则 $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$. 又因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

习题 2.2.2 证明函数 $x - a\sin x - b$ (其中 a, b 为正数) 在 $(0, +\infty)$ 上有零点, 且零点不超过 $a+b$.

解 设 $f(x) = x - a\sin x - b$, 该函数在 $[0, +\infty)$ 连续, 同时 $f(0) = -b < 0, f(a+b+1) = a+b+1-a\sin(a+b+1)-b = a(1-\sin(a+b+1))+1 \geqslant 1 > 0$. 因此由零点定理,$(0, a+b+1)$ 上有零点, 进而 $(0, +\infty)$ 上有零点.

又因对任意 $x > a+b$ 有 $f(x) = x - a\sin x - b > a+b-a\sin x - b \geqslant 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点不超过 $a+b$.

习题 2.2.3 证明函数 $x - \sin(x+1)$ 有实零点.

解 设 $f(x) = x - \sin(x+1)$, 由 $-1 \leqslant \sin(x+1) \leqslant 1$ 知, 则 $f(-2) \leqslant -2+1 = -1 < 0, f(2) \geqslant 2-1 = 1 > 0$. 又因 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续, 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (-2,2)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

习题 2.2.4 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且值域就是 $[a,b]$. 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有不动点, 即有 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

解 函数 $f(x)$ 的值域为 $[a,b]$, 故存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$, 使得 $f(x_1) = a, f(x_2) = b$. 设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(a) = f(a) - a \geqslant 0, g(b) = f(b) - x_2 \leqslant 0$.

故结合零点定理可简单推知, 要么 a 或 b 是 $g(x)$ 的零点, 要么存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $g(x_0) = 0$, 总之存在 $x_0 \in [a,b], g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = x_0$.

注 这里给出一个表述的区分.

(1) 如果严格满足零点定理的情形, 即端点处非零异号, 推出开区间内存在零点, 那么表达为由零点定理可知.

(2) 如果和本题类似, 端点处可能为零, 推出推出闭区间内存在零点, 则简单表达为结合零点定理可简单推知.

习题 2.2.5 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$. 试证: 存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$.

解 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $h(a) = f(a) - g(a) > 0, h(b) = f(b) - g(b) < 0$. 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = g(x_0)$.

习题 2.2.6 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$. 证明: 在区间 $[0,a]$ 上存在某个 x_0, 使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

解 设 $g(x) = f(x) - f(x+a)$, 则 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 且 $g(0) = f(0) - f(a), g(a) = f(a) - f(2a) =$

$f(a)-f(0)=-g(0)$. 因此 $g(0)g(a)=-(g(0))^2\leqslant 0$. 由结合零点定理简单推知, 存在 $x_0\in[0,a]$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

习题 2.2.7 试证: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为此区间中的任意点, 则在 $[a,b]$ 中有一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)).$$

更一般地, 若 $q_1>0,q_2>0,\ldots,q_n>0$, 且 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$, 则在 $[a,b]$ 中有一点 ξ, 使得

$$f(\xi)=q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n).$$

解

(1) 设 $A=\dfrac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$. 若 $f(x_i)=f(x_j)$ 对所有 i,j 成立, 则对任意 k, 取 $\xi=x_k$ 总是可以的. 否则取 i,j 使得 $f(x_i)=\min\{f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)\},f(x_j)=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$. 则 $f(x_i)\leqslant A\leqslant f(x_j),f(x_i)<f(x_j)$. 由介值定理知, 存在 $\xi\in(\min\{x_i,x_j\},\max\{x_i,x_j\})\subset[a,b]$, 使得 $f(\xi)=A$.

(2) 设 $A=q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n)$. 若 $f(x_i)=f(x_j)$ 对所有 i,j 成立, 则对任意 k, 取 $\xi=x_k$ 总是可以的. 否则取 i,j 使得 $f(x_i)=\min\{f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)\},f(x_j)=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$. 则 $f(x_i)\leqslant A\leqslant f(x_j),f(x_i)<f(x_j)$. 由介值定理知, 存在 $\xi\in(\min\{x_i,x_j\},\max\{x_i,x_j\})\subset[a,b]$, 使得 $f(\xi)=A$.

习题 2.2.8 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

解 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 则对于 $\varepsilon=1>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $x>N$ 时, 有 $|f(x)-A|<1$, 即 $|f(x)|<|A|+1$. 又因函数 $f(x)$ 在区间 $[a,N]$ 上连续, 故在该闭区间上有界, 即存在 $K>0$, 使得对任意 $x\in[a,N]$ 有 $|f(x)|\leqslant K$. 取 $M=\max\{K,|A|+1\}$, 则对任意 $x\in[a,+\infty)$ 有 $|f(x)|\leqslant N$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

习题 2.2.9 证明函数 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

解 由习题 1.3.17 知, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}=0$, 利用习题 2.2.8 知, 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 又因 $f(x)$ 是偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上也有界. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

习题 2.2.10 是否有满足下面条件的连续函数? 说明理由.

(1) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $(0,+\infty)$;

(2) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $(0,1)$;

(3) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $[0,1]\cup[2,4]$;

(4) 定义域为 $(0,1)$, 值域为 $(2,+\infty)$.

解

(1) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(2) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(3) 不存在. 这与介值定理矛盾.

(4) 存在. 例如, $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$.

习题 2.2.11 举例说明, 对任意正数 $\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上有界, 不能保证 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上有界. (比较习题 2.1 第 2 题.)

解 例如, 设 $f(x)=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{b-x}$, 则对任意正数 $\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上连续, 故有界; 但在开区间 (a,b) 上无界.

习题 2.2.12 设 $y=f(x)$ 在开区间 $I=(a,b)$ 上连续并严格单调. 证明 $y=f(x)$ 的值域 $f(I)$ 也是一个开区间.

解 **注** 不能假设 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.$f(I)$ 可能有无穷端点, 例如 $f(x)=\tan x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上连续且严格单调, 但值域是 $(-\infty,+\infty)$.

(1) 不妨假设是严格递增的, 否则类似考虑 $-f(x)$ 即可. 先证明 $f(I)$ 存在两个不同的点: 取 $x_1,x_2\in I$, 且 $x_1<x_2$, 由严格单调性知, $f(x_1)<f(x_2)$, 故 $f(I)$ 中至少有两个不同的点.

注 如果去除单调的严格性, 则 $f(I)$ 不一定是开区间, 例如 $f(x)=1$ 在 $(0,1)$ 上连续且单调, 但值域不是开区间.

(2) $\forall y_1,y_2\in f(I)$, 且 $y_1<y_2$. 则存在 $x_1,x_2\in I$, 使得 $f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2$. 因为 $f(x)$ 在 I 上严格单调, 故 $x_1<x_2$. 对任意 $y\in(y_1,y_2)$, 由介值定理知, 存在 $x\in(x_1,x_2)\subset I$, 使得 $f(x)=y$. 因此, $f(I)$ 是区间.

(3) 下面证明 $f(I)$ 是开区间. $\forall y\in f(I)$, 则存在 $x_0\in I$, 使得 $f(x_0)=y$. 由 (a,b) 是开区间知, 存在 $\delta>0$, 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$. 设 $\eta=\min\{f(x_0)-f(x_0-\delta),f(x_0+\delta)-f(x_0)\}>0$, 则对任意 $y'\in(y-\eta,y+\eta)\subset(f(x_0-\delta),f(x_0+\delta))$, 由介值定理知, 存在 $x'\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$, 使得 $f(x')=y'$. 因此, $f(I)$ 是开区间.

习题 2.2.13 设函数 $f(x)$ 在有限区间 (a,b) 上一致连续. 求证 $f(x)$ 在 a 点的右极限和在 b 点的左极限都存在.

解 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

现取 $x_1,x_2\in(a,a+\delta)$, 则 $|x_1-x_2|<\delta$, 故 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 上满足柯西收敛准则, 故 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在. 同理可证 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 也存在.

习题 2.2.14 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续, $\{a_n\}$ 是正收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛. 又问仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论是否还成立, 为什么?

解

(1) 由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 又因 $\{a_n\}$ 是正收敛数列, 故存在 $N\in\mathbf{N}^+$, 使得当 $n,m>N$ 时, 有 $|a_n-a_m|<\delta$, 因此, 对任意 $n,m>N$ 有 $|f(a_n)-f(a_m)|<\varepsilon$. 由柯西收敛准则知, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛.

(2) 仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论不成立. 例如, 设 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 且数列 $a_n=\dfrac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$ 收敛于 0, 但数列 $f(a_n)=\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)=(-1)^n$ 不收敛.

习题 2.2.15 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $\{a_n\}$ 是收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛.

解 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $a\in(-\infty,+\infty)$. 由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续知,$f(x)$ 在 a 点连续, 即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. 因此, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

又因数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 故存在 $N\in\mathbf{N}^+$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\delta$, 因此, 对任意 $n>N$ 有 $|f(a_n)-f(a)|<\varepsilon$. 由数列的收敛定义知, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛于 $f(a)$.

习题 2.2.16 给出一个在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界但不一致连续的函数.

解 例如, $f(x)=\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界, 但不一致连续.

反证法: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 则对 $\varepsilon=1>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<1$. 但倘若我们取 $x_1=\sqrt{2n\pi},x_2=\sqrt{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$,则当 $n>\left(\dfrac{2}{\delta}\right)^2$ 时, 有 $|x_1-x_2|<\delta$, 但 $|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sin(2n\pi)-\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=1$, 矛盾.

第 2 章综合习题

习题 2.C.1 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为有理数},\\ x, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$ 仅在点 $x=0$ 处连续.

解 设 $x_0\in\mathbb{R}$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在有理数列 $\{r_n\}$ 与无理数列 $\{s_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=x_0$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}f(r_n)=\lim_{n\to\infty}0=0,\quad \lim_{n\to\infty}f(s_n)=\lim_{n\to\infty}s_n=x_0.$$

当 $x_0\neq 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}f(s_n)=x_0$, 故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续.

当 $x_0=0$ 时, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $|x-0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leqslant|x|<\delta=\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

习题 2.C.2 设 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[0,1]$, 记 $f(x)=\dfrac{|x-x_1|+\cdots+|x-x_n|}{n}$, 证明: 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

解 设 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$\begin{aligned}f(0)+f(1)&=\frac{|0-x_1|+\cdots+|0-x_n|}{n}+\frac{|1-x_1|+\cdots+|1-x_n|}{n}\\&=\frac{(x_1+(1-x_1))+\cdots+(x_n+(1-x_n))}{n}=1.\end{aligned}$$

因此 $g(0)+g(1)=f(0)+f(1)-1=0$. 则 $g(0)g(1)=-(g(0))^2\leqslant 0$. 结合零点定理可简单推知, 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

习题 2.C.3 证明: 函数 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ (其中 $a_1,a_2,a_3>0$, 且 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$) 在 (λ_1,λ_2) 与 (λ_2,λ_3) 内各有一个零点.

解 仅证明 (λ_1,λ_2) 内有一个零点, (λ_2,λ_3) 内的证明类似.

由 $\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在 $\left[\lambda_1,\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right]$ 上连续, 因此有界, 即存在 $M_1>0$, 使得对任意 $x\in\left[\lambda_1,\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right]$ 有 $|\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}|\leqslant M$.

又由 $\lim\limits_{x\to\lambda_1^+}\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}=+\infty$, 因此存在 $\delta_1\in\left(0,\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta_1)$ 有 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}>M_1$. 因此, 存在 $x_1\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta_1)\subset\left(\lambda_1,\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)$, 使得

$$\frac{a_1}{x_1-\lambda_1}+\frac{a_2}{x_1-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_1-\lambda_3}=\frac{a_1}{x_1-\lambda_1}+\left(\frac{a_2}{x_1-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_1-\lambda_3}\right)>M_1-M_1=0.$$

由 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在 $\left[\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right]$ 上连续, 因此有界, 即存在 $M_2>0$, 使得对任意 $x\in$

$\left[\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right]$ 有 $\left|\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}\right|\leqslant M_2$.

又由 $\lim\limits_{x\to\lambda_2^-}\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}=-\infty$, 因此存在 $\delta_2\in\left(0,\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x\in(\lambda_2-\delta_2,\lambda_2)$ 有 $\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}<-M_2$. 因此, 存在 $x_2\in(\lambda_2-\delta_2,\lambda_2)\subset\left(\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right)$, 使得

$$\frac{a_1}{x_2-\lambda_1}+\frac{a_2}{x_2-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_2-\lambda_3}=\left(\frac{a_1}{x_2-\lambda_1}+\frac{a_3}{x_2-\lambda_3}\right)+\frac{a_2}{x_2-\lambda_2}<M_2-M_2=0.$$

综上, 存在 $x_1,x_2\in(\lambda_1,\lambda_2)$, 使得对于函数 $f(x)=\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 有 $f(x_1)>0,f(x_2)<0$. 由介值定理知, 存在 $x_0\in(x_1,x_2)\subset(\lambda_1,\lambda_2)$, 使得 $f(x_0)=0$.

同时由于 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1},\dfrac{a_2}{x-\lambda_2},\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在 (λ_1,λ_2) 上严格单调递减, 因此 $f(x)$ 在 (λ_1,λ_2) 上严格单调递减. 因此, 零点 x_0 唯一.

习题 2.C.4 设 $f(x)$ 是一个多项式, 则必存在一点 x_0, 使得 $|f(x_0)|\leqslant|f(x)|$ 对任意实数 x 成立.

解 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 其中 $a_n\neq0,n\geqslant1$. 则

$$|f(x)|=|x|^n\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right|.$$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}\right)=a_n$, 因此存在 $M>0$, 使得当 $|x|>M$ 时, 有

$$\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right|>\frac{|a_n|}{2}.$$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|a_n|}{2}|x|^n=+\infty$, 因此 $\exists X>M$, 使得当 $|x|>X$ 时, 有 $\dfrac{|a_n|}{2}|x|^n>|f(0)|$. 而由 $|f(x)|$ 在 $[-X,X]$ 上连续, 故由最值性知, 存在 $x_0\in[-X,X]$, 使得 $|f(x_0)|=\inf\{f(x):x\in[-X,X]\}$. 特别的, 对任意 $x\in[-X,X]$ 有 $|f(x_0)|\leqslant|f(0)|$. 因此对于 $|x|>X$ 时, 有 $|f(x)|>\dfrac{|a_n|}{2}|x|^n\geqslant|f(x_0)|$. 综上, 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $|f(x_0)|\leqslant|f(x)|$.

习题 2.C.5 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$. 证明: 对任意正整数 n, 在区间 $\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$ 中有一点 ξ, 使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)$.

解 设 $g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$, 则 $g(x)$ 在 $\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$ 上连续, 且

$$g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right),$$

$$\cdots$$

$$g\left(\frac{n-1}{n}\right)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(0).$$

因此 $\dfrac{1}{n}\left(g(0)+g\left(\dfrac{1}{n}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)=0$. 则 $g(0),g\left(\dfrac{1}{n}\right),\ldots,g\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ 中至少有一

个非正, 另一个非负. 由介值定理知, 存在 $\xi \in \left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right]$, 使得 $g(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)$.

习题 2.C.6 证明: 存在一个实数 x, 满足 $x^5+\dfrac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}=72$.

解 设 $f(x)=x^5+\dfrac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}$,

$$f(3)=3^5+\frac{\cos 3}{1+3^2+\sin^2 3}\geqslant 243\frac{1}{1+3^2-1}>72,$$

$$f(-3)=(-3)^5+\frac{\cos(-3)}{1+(-3)^2+\sin^2(-3)}\leqslant -243+\frac{1}{1+(-3)^2-1}<-72.$$

由介值定理知, 存在 $x\in[-3,3]$, 使得 $f(x)=72$.

习题 2.C.7 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上或者有最大值, 或者有最小值.

解 记

$$S=\sup\{f(x): x\in[a,+\infty)\},\ I=\inf\{f(x): x\in[a,+\infty)\},\ L=\lim_{x\to+\infty} f(x).$$

(1) 若 $S>L$, 取 $\varepsilon=\dfrac{S-L}{2}>0$, 则存在 $X>a$, 使得对任意 $x>X$ 有 $|f(x)-L|<\varepsilon$, 即 $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$. 因此, 对任意 $x>X$ 有 $f(x)<L+\varepsilon=\dfrac{S+L}{2}<S$. 因此

$$\sup\{f(x): x\in[a,X]\}=S,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0\in[a,X]$, 使得 $f(x_0)=S$.

(2) 若 $I<L$, 取 $\varepsilon=\dfrac{L-I}{2}>0$, 则存在 $X>a$, 使得对任意 $x>X$ 有 $|f(x)-L|<\varepsilon$, 即 $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$. 因此, 对任意 $x>X$ 有 $f(x)>L-\varepsilon=\dfrac{I+L}{2}>I$. 因此

$$\inf\{f(x): x\in[a,X]\}=I,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0\in[a,X]$, 使得 $f(x_0)=I$.

(3) 若 $S=L=I$, 则 $f(x)\equiv L$, 即任取 $x_0\in[a,+\infty)$, 均有 $f(x_0)=L$ 同时为最大值和最小值.

注 一个只有极限没有最大值的例子是 $f(x)=\arctan x, x\in[0,+\infty)$.

习题 2.C.8 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上, 满足条件: $a\leqslant f(x)\leqslant b$ (对任意 $x\in[a,b]$), 且对 $[a,b]$ 中任意的 x,y 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$. 这里 k 是常数, $0<k<1$. 证明:

(1) 存在唯一的 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

(2) 任取 $x_1\in[a,b]$, 并定义数列 $\{x_n\}: x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\ldots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$.

(3) 给出一个在实轴上的连续函数, 使得对任意 $x\neq y$ 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$, 但方程 $f(x)-x=0$ 无解.

解

(1) 先证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续: 设 $x_0\in[a,b]$, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{k}>0$, 则对任意 $x\in[a,b]$

且 $|x-x_0|<\delta$, 有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant k|x-x_0|<k\delta=\varepsilon.$$

设 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(a)=f(a)-a\geqslant 0, g(b)=f(b)-b\leqslant 0$. 故结合零点定理可简单推知, 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=x_0$. 又因对任意 $x,y\in[a,b]$ 有

$$|g(x)-g(y)|=|f(x)-f(y)-(x-y)|\geqslant|x-y|-|f(x)-f(y)|\geqslant(1-k)|x-y|,$$

故若存在 $x_1\neq x_0$ 使得 $f(x_1)=x_1$, 则

$$(1-k)|x_1-x_0|\leqslant|g(x_1)-g(x_0)|=|f(x_1)-f(x_0)-(x_1-x_0)|=0,$$

即 $x_1=x_0$. 因此 x_0 唯一.

(2) (a) 若 $x_2=x_1$, 则由 $f(x_1)=x_1$ 以及 (1) 中所述的唯一性, 知 $x_2=x_1=x_0$, 则 $x_3=f(x_2)=f(x_0)=x_0$, 依此类推, 有 $x_n=x_0$ 对任意 $n\geqslant 1$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(b) 若 $x_2\neq x_1$, 对任意 $n\geqslant 1$ 有

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|\leqslant\ldots\leqslant k^{n-1}|x_2-x_1|.$$

因此, 对任意 $m>n\geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant(k^{m-2}+k^{m-3}+\cdots+k^{n-1})|x_2-x_1|\\&\leqslant\frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2-x_1|.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left\lceil\log_k\dfrac{(1-k)\varepsilon}{|x_2-x_1|}\right\rceil$, 当 $m,n>N$ 时, 有

$$|x_m-x_n|\leqslant\frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2-x_1|<\varepsilon.$$

故数列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 故存在 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n:=a$ 存在. 又因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 对递推式两侧取极限, 有

$$a=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=f(a).$$

由 (1) 中所述的唯一性, 知 $a=x_0$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(3) 一个不太严谨的思考过程: 我想要构造一个满足 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ 的函数, 我考虑了 $|f'(x)|<1$ 的趋势为增的函数, 同时 $f(x)-x$ 无解要求了 $f(x)$ 应该是贴在 $y=x$ 的 (不妨设为) 上方的, 于是我考虑了 $f(x)=x+g(x)$, 并假设 $g(x)$ 可导, 其中如果 $-1<-g'(x)<0$, 那就能保证 $f(x)$ 的导数满足要求.(当然上述思路中, 对 $g(x)$ 的选取过程都只

是必要的)

$$f(x) = x + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

(a) 满足 $|f(x)-f(y)| < |x-y|$: 设 $x > y$, 则

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| = f(x)-f(y) &= (x-y) + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^y}\\ &= (x-y) - \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^y)}\\ &< x-y = |x-y|.\end{aligned}$$

(b) 方程 $f(x)-x=0$ 无解: 由 $f(x)-x = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} > 0$, 知 $f(x)-x=0$ 无解.

习题 2.C.9 证明: 对任意正整数 n, 方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 恰有一个正根 x_n; 进一步证明数列 $\{x_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 收敛, 并求其极限.

解

(1) 设 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$, 则 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续, 且 $f_n(0) = -1 < 0, f_n(1) = n-1 \geqslant 0$. 故结合零点定理可简单推知, 存在 $x_n \in (0,1]$, 使得 $f(x_n) = 0$. 由于 $f_n(x)$ 的每一项都严格单调递增, 故 $f_n(x)$ 也严格单调递增, 因此 x_n 是唯一解.

(2) 下证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减: 若 $x_{n+1} \geqslant x_n$, 由 $x_n > 0$

$$1 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} \geqslant x_n^{n+1} + x_n^n + \cdots + x_n > x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1,$$

故矛盾, 因此 $x_{n+1} < x_n$. $\{x_n\}$ 单调递减, 有 0 为下界, 故数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(3) 考虑

$$1 - x_n^n = (1-x_n)(1 + x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^{n-1}) = 1 - x_n,$$

在两边同时取极限之前, 我们还得先考虑 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n$. 由于 $1 = x_2 + x_2^2 \geqslant x_2 \cdot x_2 + x_2^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_2 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, 对 $x_n^n < x_2^n$, 由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = 0$. 因此, 对数列 $\{x_n\}$ 取极限, 有

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 - x_n^n = \lim_{n\to\infty} 1 - x_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

习题 2.C.10 设 $a < b, f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意 $x \in [a,b)$ 存在 $y \in (x,b)$ 使得 $f(y) > f(x)$. 求证: $f(b) > f(a)$.

解 考虑 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$, 由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) = M$. 若 $\exists x < b, f(x) = M$, 则由题设条件, 存在 $y \in (x,b)$, 使得 $f(y) > f(x) = M$, 矛盾. 因此 $f(b) = M$, 且 $\forall x < b, f(x) < M$. 特别的,$f(a) < f(b)$.

第 3 章 单变量函数的微分学

习题 3.1

习题 3.1.1 讨论下列函数在点 $x=0$ 处是否可导:

(1) $f(x)=|\sin x|$;

(2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geqslant 0, \\ 1, & x<0; \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\geqslant 0, \\ x+1, & x<0; \end{cases}$

(5) $f(x)=|x|\mathrm{e}^x$;

(6) $f(x)=|x^3|$.

解

(1)

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{|\sin h|-|\sin 0|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sin h}{h}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{|\sin h|-|\sin 0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\sin h}{h}=-1.$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(2)

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(h+1)-1}{h}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1-1}{h}=0.$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(3)

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0.$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$.

(4)

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=1\neq f(0),$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(5)

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h\mathrm{e}^h-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\mathrm{e}^h=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h\mathrm{e}^h-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}-\mathrm{e}^h=-1.$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(6)

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{|h^3|-0}{h}=\lim_{h\to 0}|h|h=0,$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

习题 3.1.2 求 a,b 的值, 使下列函数处处可导:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1;\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x<0,\\ ax+b, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解

(1) $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上可导, 故只需讨论 $x=1$ 处的可导性.

由连续性得:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\Rightarrow 1=a+b.$$

由可导性得:

$$f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow 2=a.$$

解得 $a=2,b=-1$.

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上可导, 故只需讨论 $x=0$ 处的可导性.

由连续性得:

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)\Rightarrow b=0.$$

由可导性得:

$$f'_-(0)=f'_+(0)\Rightarrow 1=a.$$

解得 $a=1,b=0$.

习题 3.1.3 设函数 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 记 $f(x)=(x-a)g(x)$. 证明 $f'(a)=g(a)$.

解

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h-a)g(a+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}g(a+h)=g(a).$$

习题 3.1.4 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=(\alpha+\beta)f'(x_0)\quad(\alpha,\beta\text{为常数}).$$

解

$$
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-\beta h)}{h}\right]\\
=&\lim_{h\to 0}\left[\alpha\cdot\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h}+\beta\cdot\frac{f(x_0)-f(x_0-\beta h)}{\beta h}\right]\\
=&\alpha f'(x_0)+\beta f'(x_0)=(\alpha+\beta)f'(x_0).
\end{aligned}
$$

习题 3.1.5 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)\neq 0$, 证明函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 也可导. 若 $f(a)=0$, 结论是否仍成立?

解

(1) $f(a)\neq 0$ 时, 不妨设 $f(a)>0$, 则 $\exists\delta>0$, 当 $|x-a|<\delta$ 时,$f(x)>0$, 因此

$$|f(x)|=f(x),$$

因此 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $|f|'(a)=f'(a)$.

(2) 不成立, 如 $f(x)=x$ 在 $x=0$ 处可导, 但是 $|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

习题 3.1.6 求下列函数的导数.

(1) $y=\dfrac{x}{3x^2+5x-2}$;　(2) $y=\sin x\tan x+\cot x$;

(3) $y=x^2\log_3 x$;　(4) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$;

(5) $y=\dfrac{1+\ln x}{x^2+1}$;　(6) $y=\dfrac{(1+x^2)\ln x}{\sin x+\cos x}$;

(7) $y=(x^2+1)(3x-1)(1-x^3)$;　(8) $y=x^3\cdot\tan x\cdot\ln x$.

解

(1)

$$
\begin{aligned}
y'&=\frac{x'(3x^2+5x-2)-x(3x^2+5x-2)'}{(3x^2+5x-2)^2}\\
&=\frac{(3x^2+5x-2)-(6x^2+5x)}{(3x^2+5x-2)^2}=-\frac{3x^2+2}{(3x^2+5x-2)^2}
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
y'&=\left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)'\\
&=\frac{(2\sin x\cos x)\cos x-\sin^2 x(-\sin x)}{\cos^2 x}+\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}\\
&=\frac{\sin x(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

(3)

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' \log_3 x + x^2 (\log_3 x)' \\ &= 2x \log_3 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 3} \\ &= 2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x)'(1-\cos x) - x(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{1 \cdot (1-\cos x) - x(\sin x)}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{1-\cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2} \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1+\ln x)'(x^2+1) - (1+\ln x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x}(x^2+1) - (1+\ln x)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x + \frac{1}{x} - 2x - 2x\ln x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1 - x^2 - 2x^2 \ln x}{x(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{[(1+x^2)\ln x]'(\sin x + \cos x) - (1+x^2)\ln x(\sin x + \cos x)'}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{[(1+x^2)'\ln x + (1+x^2)(\ln x)'](\sin x + \cos x) - (1+x^2)\ln x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{[2x\ln x + (1+x^2)\frac{1}{x}](\sin x + \cos x) - (1+x^2)\ln x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{(2x\ln x + x + \frac{1}{x})(\sin x + \cos x) - (1+x^2)\ln x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{\big(x + \frac{1}{x} + (x+1)^2 \ln x\big)\sin x + \big(x + \frac{1}{x} - (x-1)^2 \ln x\big)\cos x}{(\sin x + \cos x)^2} \end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned} &y'(x^2+1)'(3x-1)(1-x^3) + (x^2+1)(3x-1)'(1-x^3) + (x^2+1)(3x-1)(1-x^3)' \\ &\quad = 2x(3x-1)(1-x^3) + (x^2+1)3(1-x^3) + (x^2+1)(3x-1)(-3x^2) \\ &\quad = -18x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 2x + 3 \end{aligned}$$

(8)

$$
\begin{aligned}
y' &= (x^3)'(\tan x \cdot \ln x) + x^3(\tan x)' \ln x + x^3 \tan x(\ln x)' \\
&= (3x^2)(\tan x \ln x) + (x^3)(\sec^2 x)(\ln x) + (x^3 \tan x)\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= 3x^2 \tan x \ln x + x^3 \sec^2 x \ln x + x^2 \tan x \\
&= x^2(3 \tan x \ln x + x \sec^2 x \ln x + \tan x)
\end{aligned}
$$

习题 3.1.7 求下列函数的导数:

(1) $y = x\sqrt{1-x^2}$;

(2) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;

(3) $y = \arccos \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

(4) $y = (\sin x + \cos x)^3$;

(5) $y = (\sin x^3)^3$;

(6) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

(7) $y = \sin[\sin(\sin x)]$;

(8) $y = \sin[\cos^5(\arctan x^3)]$;

(9) $y = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3$;

(10) $y = x\sqrt{1+x^2}\sin x$;

(11) $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$;

(12) $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)]$;

(13) $y = x^{x^x} + x^x + x^{2^x}$;

(14) $y = (\ln x)^x$;

(15) $y = (\tan x)^{\cot x}$;

(16) $y = 10^x \cdot (\sin x)^{\cos x}$;

(17) $y = \dfrac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^3(x+4)^{1/2}}$;

(18) $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}}$.

解

(1)

$$
y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},
$$

(2)

$$
y' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}}\left(\ln^2 x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}} 2\ln x\,(\ln x)' = \frac{2\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}.
$$

(3)

$$
y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)' = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+4x+2}} = \sqrt{\frac{1}{-2x^2+2x+1}}.
$$

(4)

$$
y' = 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x) = 3(1+\cos 2x)(\cos x - \sin x).
$$

(5)

$$y' = 3\left(\sin x^3\right)^2\left(\sin x^3\right)' = 3\left(\sin x^3\right)^2\left(\cos x^3\right)3x^2.$$

(6)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(x+\sqrt{x}\right)'\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
y' &= \cos[\sin(\sin x)]\left(\sin(\sin x)\right)' \\
&= \cos[\sin(\sin x)]\cos(\sin x)\left(\sin x\right)' \\
&= \cos[\sin(\sin x)]\cos(\sin x)\cos x
\end{aligned}$$

(8) 令 $u = \arctan x^3$, 则 $v = \cos^5 u$, 则 $y = \sin v$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= \cos v \cdot v' = \cos v \cdot (-5\sin^4 u \cdot \cos u)u' \\
&= -5\cos\cos^5(\arctan x^3)\sin^4(\arctan x^3)\cdot\cos(\arctan x^3)\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}.
\end{aligned}$$

(9)

$$y' = \frac{12x^5 - 24x^3 + 12x}{(x^2+1)^3}.$$

(10)

$$y' = \frac{x\sin x + \cos x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(11)

$$y' = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(12) 令 $u = \ln^3 x$, 则 $v = \ln^2 u$, 则 $y = \ln v$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{v}\cdot v' = \frac{1}{v}\cdot 2\ln u\cdot\frac{1}{u}u' \\
&= \frac{2\ln(\ln^3 x)}{\ln^2(\ln^3 x)}\cdot\frac{1}{\ln^3 x}\cdot\frac{3\ln^2 x}{x} = \frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}.
\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\mathrm{e}^{x^x \ln x} + \mathrm{e}^{x \ln x} + \mathrm{e}^{2^x \ln x}\right)' \\
&= (\mathrm{e}^{x \ln x} \ln x)' \mathrm{e}^{x^x \ln x} + (x \ln x)' \mathrm{e}^{x \ln x} + (2^x \ln x)' \mathrm{e}^{2^x \ln x} \\
&= \left((1+\ln x)\mathrm{e}^{x \ln x} + \frac{1}{x} x^x\right) \mathrm{e}^{x^x \ln x} + (1+\ln x)\mathrm{e}^{x \ln x} + \left(2^x \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 \ln x\right) \mathrm{e}^{2^x \ln x} \\
&= x^{x^x} \left(x^{x-1} + \ln x(\ln x+1)x^x\right) + x^x (\ln x+1) + x^{2^x} \left(2^x \frac{1}{x} + \ln x \cdot 2^x \ln 2\right)
\end{aligned}$$

(14)

$$y' = \frac{(\ln x)^{x+1} \ln(\ln x) + \ln(\ln x)}{\ln x}.$$

(15)

$$y' = (\tan x)^{\cot x} \csc^2 (1 - \ln(\tan x))$$

(16) 设 $y = \mathrm{e}^{2\ln(x+5) + \frac{1}{3}\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+4)} := \mathrm{e}^u$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{(x+5)^2 (x-4)^{1/3}}{(x+2)^5 (x+4)^{1/2}} \left(2\frac{1}{x+5} + \frac{1}{3}\frac{1}{x-4} - 5\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+4}\right).
\end{aligned}$$

(17)

$$y' = 10^x \ln 10 \cdot (\sin x)^{\cos x} - 10^x \ln(\sin x)(\sin x)^{\cos x + 1} + 10^x \cos^2 x (\sin x)^{\cos x - 1}.$$

(18) 设 $y = \mathrm{e}^{\ln(1-\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)} := \mathrm{e}^u$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2}\right) \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2}\right) \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2}\right)
\end{aligned}$$

习题 3.1.8 设 $f(x) = x^3$. 求 $f'(x^2)$ 与 $[f(x^2)]'$.

解

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x^2) = 3(x^2)^2 = 3x^4,$$

$$[f(x^2)]' = [(x^3)^2]' = (x^6)' = 6x^5.$$

习题 3.1.9 设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$. 求 $f'[g(x)], [f(g(x))]'$.

解

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow f'[g(x)]=\frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+1}}}},$$

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}})^2}}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{(x^2+1)(1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+1}})}}.$$

习题 3.1.10 设 $f(x)$ 处处可导. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $y=f(x^3)$;

(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

(3) $y=f(\mathrm{e}^x+x^{\mathrm{e}})$;

(4) $y=\sin[f(\sin f(x))]$;

(5) $y=f[f(f(x+\cos x))]$;

(6) $y=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}$.

解

(1) 令 $u=x^3$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot(3x^2)=3x^2f'(x^3).$$

(2) 令 $u=\sin^2 x, v=\cos^2 x$, 则 $y=f(u)+f(v)$. 由链式法则:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(v)\\&=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\&=f'(u)\cdot(2\sin x\cos x)+f'(v)\cdot(2\cos x(-\sin x))\\&=f'(\sin^2 x)\sin(2x)-f'(\cos^2 x)\sin(2x)\\&=[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]\sin(2x).\end{aligned}$$

(3) 令 $u=\mathrm{e}^x+x^{\mathrm{e}}$, 则 $y=f(u)$. 根据链式法则,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1})=(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1})f'(\mathrm{e}^x+x^{\mathrm{e}}).$$

(4) 这是一个多次复合的函数. 反复应用链式法则:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin[f(\sin f(x))]\\&=\cos[f(\sin f(x))]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\sin f(x))\\&=\cos[f(\sin f(x))]\cdot f'(\sin f(x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin f(x))\\&=\cos[f(\sin f(x))]\cdot f'(\sin f(x))\cdot\cos(f(x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\\&=f'(x)\cos(f(x))f'(\sin f(x))\cos[f(\sin f(x))].\end{aligned}$$

(5) 同样, 多次应用链式法则:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f[f(f(x+\cos x))] \\ &= f'[f(f(x+\cos x))]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(f(x+\cos x)) \\ &= f'[f(f(x+\cos x))]\cdot f'(f(x+\cos x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x+\cos x) \\ &= f'[f(f(x+\cos x))]\cdot f'(f(x+\cos x))\cdot f'(x+\cos x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+\cos x) \\ &= (1-\sin x)f'(x+\cos x)f'(f(x+\cos x))f'[f(f(x+\cos x))].\end{aligned}$$

(6) 令 $u=f(\mathrm{e}^x)$ 且 $v=\mathrm{e}^{f(x)}$, 则 $y=uv$. 根据乘法法则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v+u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. 分别计算:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\mathrm{e}^x)=f'(\mathrm{e}^x)\cdot(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x).$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{f(x)}=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x).$$

将它们代入乘法法则：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (\mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x))\cdot\mathrm{e}^{f(x)}+f(\mathrm{e}^x)\cdot(\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)) \\ &= \mathrm{e}^{f(x)}[\mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x)+f(\mathrm{e}^x)f'(x)].\end{aligned}$$

习题 3.1.11 求下列函数的导数:

(1) $y=\begin{cases}\dfrac{x\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{1/x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ (2) $y=|1-2x|\sin x$.

解

(1) 对于 $x\neq 0$,

$$y'=\frac{\mathrm{e}^{1/x}\left(1-1/x+\mathrm{e}^{1/x}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{1/x}\right)^2}$$

对于 $x=0$,

$$y'_+=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{h\mathrm{e}^{1/h}}{1+\mathrm{e}^{1/h}}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{e}^{-1/h}+1}=1,\quad y'_-=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{h\mathrm{e}^{1/h}}{1+\mathrm{e}^{1/h}}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{1/h}}{\mathrm{e}^{1/h}+1}=0$$

因此

$$y'=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}\left(1-1/x+\mathrm{e}^{1/x}\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{1/x}\right)^2} & x\neq 0\\ \text{不存在} & x=0\end{cases}$$

(2) (a) $(1-2x)>0$ 时,$x<\frac{1}{2}$, $y'=((1-2x)\sin x)'=-2\sin x+(1-2x)\cos x$.

(b) $(1-2x)<0$ 时,$x>\frac{1}{2}$, $y'=((2x-1)\sin x)'=2\sin x+(2x-1)\cos x$.

(c) $(1-2x)=0$ 时,$y'_+=2\sin\frac{1}{2}\neq y'_-=-2\sin\frac{1}{2}$.

综上所述,

$$y' = \begin{cases} 2\sin x + (2x-1)\cos x & x > \dfrac{1}{2} \\ -2\sin x + (1-2x)\cos x & x < \dfrac{1}{2} \\ \text{不存在} & x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

习题 3.1.12 设 n 为正整数, 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 证明:

(1) 当 $n = 1$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不可导;

(2) 当 $n = 2$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 但导函数在 $x = 0$ 处不连续 (事实上, 在这一点有第二类间断);

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且导函数在 $x = 0$ 处连续.

解

(1) 当 $n = 1$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \sin \frac{1}{h},$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \sin \frac{1}{h},$$

显然, $f'_+(0)$ 与 $f'_-(0)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不可导.

(2) 当 $n = 2$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$. 对于 $x \neq 0$,

$$f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x})' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$$

不存在, 故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$. 对于 $x\neq 0$,

$$f'(x)=(x^n\sin\frac{1}{x})'=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}+x^n\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x})=0,$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

习题 3.1.13 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在区间 $[-1,1]$ 上处处可导, 但导函数在这个区间上无界.

解 对于 $x\neq 0$,

$$f'(x)=(x^2\sin\frac{1}{x^2})'=2x\sin\frac{1}{x^2}+x^2\left(-\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}\right)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

对于 $x=0$,

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}h\sin\frac{1}{h^2}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}h\sin\frac{1}{h^2}=0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$. 综上所述, $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上处处可导. 而对于 $x=\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}(n=1,2,3,\cdots)$,

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\sin(n\pi)-2\sqrt{n\pi}\cos(n\pi)=(-1)^{n+1}2\sqrt{n\pi},$$

显然, 当 n 趋近于无穷大时, $\left|f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)\right|$ 趋近于无穷大, 故导函数在区间 $[-1,1]$ 上无界.

习题 3.1.14 求下列函数的反函数的微商.

(1) $y=xe^x$; (2) $y=\arctan\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=2x^3-e^{-2x}$; (4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$.

按照反函数求导定理, 我们应该写成这样:

$$(f^{-1})'(y)\overset{y=xe^x}{=}\frac{1}{f'(x)}$$

但是考虑到初学者对反函数求导的理解有点困难, 容易把自己绕晕. 我们给出几种推荐且合理的过程, 这几种过程几乎是等价的:

解

(1) 将 x 看成 y 的函数并在方程两边对 y 求导

$$1=x'e^x+xx'e^x\Rightarrow x'=\frac{e^{-x}}{1+x}.$$

注 对于由方程 $\varphi(x,y)=0$ 给出的反函数或隐函数, 只要认准了一个变量是另一个变量的函数, 在方程两边直接对自变量求导即可. 有关详细内容将在第二册中介绍.

(2)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=-(1+x^2)$$

注 这种写法与反函数求导定理的意义是最贴近的, 但是避免了使用重复的符号, 因此看起来清晰一点.

(3)

$$\mathrm{d}y=2\,\mathrm{d}(x^3)-\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)=6x^2\,\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{6x^2+2\mathrm{e}^{-2x}}.$$

注 这在利用 3.2 节中微分的知识: 若 $y(x)$ 可微且能表示为 $\mathrm{d}x=A\,\mathrm{d}y$, 那么 $A=x'(y)$.

(4)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{1}{\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\cdot 2\mathrm{e}^{2x}\right)\\&=\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}{(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}=\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}.\end{aligned}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^x}.$$

习题 3.1.15 证明: 可导的偶函数的导数为奇函数; 而可导的奇函数的导数为偶函数.

解 设 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x)=f(x)$, 则

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=f'(x),$$

则 $f'(x)$ 为奇函数.

设 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(-x)=-f(x)$, 则

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)+f(x)}{h}=f'(x),$$

则 $f'(x)$ 为偶函数.

习题 3.1.16 证明: 可导的周期函数的导数仍是周期函数.

解 设 $f(x)$ 为周期为 T 的函数, 则 $f(x+T)=f(x)$, 则 $f'(x+T)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$, 则 $f'(x)$ 为周期为 T 的函数.

习题 3.1.17 求下列各式之和:

(1) $P_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$;

(2) $Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$;

(3) $R_n=\cos 1+2\cos 2+\cdots+n\cos n$.

解

(1) 令 $A(x)=x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}$, 则 $P_n=A'(x)=\dfrac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}$.

(2) $Q_n=(xA'(x))'=\dfrac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$.

(3) 令 $B(x)=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$,

则 $B'(x)=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)2\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}$.

则 $R_n=B'(1)=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)2\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\left(2\sin\frac{1}{2}\right)^2}$.

习题 3.1.18 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$;

(2) $y=x^2 2^{2x}$;

(3) $y=(1+x^2)\arctan x$;

(4) $y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0.\end{cases}$

解

(1)

$$y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2},\quad y''=(4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

(2)

$$y'=2x2^{2x}(1+2\ln 2),\quad y''=4x2^{2x}(\ln 2)^2+4(1+\ln 2)2^{2x}.$$

(3)

$$y'=1+2x\arctan x,\quad y''=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

(4) 当 $y>0$ 时,$y'=2x$; 当 $y<0$ 时,$y'=-2x$; 当 $y=0$ 时,

$$y'_+=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-0}{h}=0=y'_-=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2-0}{h}=0$$

故 $y'(0)=0$ 存在.

当 $y>0$ 时,$y''=2$; 当 $y<0$ 时,$y''=-2$; 当 $y=0$ 时,

$$y''_+=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h-0}{h}=2\neq y''_-=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2h-0}{h}=-2$$

故 $y''(0)$ 不存在.

习题 3.1.19 设函数 $f(x)$ 处处有三阶导数, 求 y'',y'''.

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=f(\mathrm{e}^x+x)$.

解

(1)

$$y' = f'(x^2)\cdot 2x,\quad y'' = f''(x^2)\cdot(2x)^2 + f'(x^2)\cdot 2,\quad y''' = f'''(x^2)\cdot(2x)^3 + 3f''(x^2)\cdot(2x)\cdot 2.$$

(2)

$$y' = f'(\mathrm{e}^x + x)\cdot(\mathrm{e}^x+1),\quad y'' = f''(\mathrm{e}^x + x)\cdot(\mathrm{e}^x+1)^2 + f'(\mathrm{e}^x+x)\cdot\mathrm{e}^x,$$

$$y''' = f'''(\mathrm{e}^x + x)\cdot(\mathrm{e}^x+1)^3 + 3f''(\mathrm{e}^x+x)\cdot(\mathrm{e}^x+1)\cdot\mathrm{e}^x + f'(\mathrm{e}^x+x)\cdot\mathrm{e}^x.$$

习题 3.1.20 设 $f(x) = x^n|x|$ (n 为正整数), 证明 $f^{(n)}(0)$ 存在, 但 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

解

(1) 当 $k \leqslant n$ 时当 $x>0$ 时,$f(x) = x^{n+1}$, 则 $f^{(k)}(x) = \dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!}x^{n+1-k} = A_{n+1}^k x^{n+1-k}$;

当 $x<0$ 时,$f(x) = -x^{n+1}$, 则 $f^{(k)}(x) = -\dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!}x^{n+1-k} = -A_{n+1}^k x^{n+1-k}$;

当 $x=0$ 时,

$$f_+^{(k)}(0) = \lim_{h\to0^+}\frac{f^{(k-1)}(h)-f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{A_{n+1}^{k-1}h^{n+2-k}-0}{h} = \lim_{h\to0^+}A_{n+1}^{k-1}h^{n+1-k} = 0$$

$$f_-^{(k)}(0) = \lim_{h\to0^-}\frac{f^{(k-1)}(h)-f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h\to0^-}\frac{-A_{n+1}^{k-1}h^{n+2-k}-0}{h} = \lim_{h\to0^+}-A_{n+1}^{k-1}h^{n+1-k} = 0$$

$f_+^{(n)}(0) = f_-^{(n)}(0)$, 故 $f^{(n)}(0) = 0$ 存在.

(2) 当 $x>0$ 时,$f^{(n)}(x) = (n+1)!x$, 则 $f^{(n+1)}(x) = (n+1)!$; 当 $x<0$ 时,$f^{(n)}(x) = (-1)(n+1)!x$, 则 $f^{(n+1)}(x) = (-1)(n+1)!$; 当 $x=0$ 时,

$$f_+^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to0^+}\frac{f^{(n)}(h)-f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{(n+1)!h-0}{h} = (n+1)!$$

$$f_-^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to0^-}\frac{f^{(n)}(h)-f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to0^-}\frac{(-1)(n+1)!h-0}{h} = (-1)(n+1)!$$

$f_+^{(n+1)}(0) \neq f_-^{(n+1)}(0)$, 故 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

习题 3.1.21 证明: 如果 x_0 是多项式 $P_n(x)$ 的 r 重根, 即 $P_n(x)$ 可以分解成

$$P_n(x) = (x-x_0)^r Q_{n-r}(x),$$

其中 $Q_{n-r}(x)$ 是一个 $n-r$ 次多项式, 且 $Q_{n-r}(x_0)\neq 0$. 则 $P_n(x)$ 满足条件

$$P_n(x_0) = 0,\quad P_n'(x_0) = 0,\quad \ldots,\quad P_n^{(r-1)}(x_0) = 0,\quad P_n^{(r)}(x_0)\neq 0.$$

解 由题意,$P_n(x) = (x-x_0)^r Q_{n-r}(x)$, 则

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[(x-x_0)^r\right]^{(i)}\cdot Q_{n-r}^{(k-i)}(x).$$

(a) 当 $k<r$ 时,$[(x-x_0)^r]^{(i)} = 0$, 则 $P_n^{(k)}(x_0) = 0$.

(b) 当 $k=r$ 时,$[(x-x_0)^r]^{(r)} = r!$, 则 $P_n^{(r)}(x_0) = r!Q_{n-r}(x_0)\neq 0$.

习题 3.1.22 求下列函数的高阶导数:

(1) $(x^2\mathrm{e}^x)^{(n)}$;

(2) $[(x^2+1)\sin x]^{(n)}$;

(3) $\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)}$;

(4) $(\sin x\cdot\cos x)^{(n)}$.

我们将会直接使用如下结论:

(1) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2})$, $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$;

(2) $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$, $(a^x)^{(n)}=(\ln a)^n a^x$;

(3) $\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$;

(4) $(\ln(x+a))^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$;

(5) $(x^m)^{(n)}=\begin{cases}0 & n<m;\\ n! & n=m;\\ n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} & n>m.\end{cases}$;

解

(1) 由莱布尼兹公式,

$$(x^2\mathrm{e}^x)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(\mathrm{e}^x)^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{\min\{2,n\}}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}\mathrm{e}^x.$$

(a) 当 $n=1$ 时,$(x^2\mathrm{e}^x)^{(1)}=(x^2)^{(0)}\mathrm{e}^x+(x^2)^{(1)}\mathrm{e}^x=(x^2+2x)\mathrm{e}^x$;

(b) 当 $n\geqslant 2$ 时,$(x^2\mathrm{e}^x)^{(n)}=(x^2)^{(0)}\mathrm{e}^x+n(x^2)^{(1)}\mathrm{e}^x+\binom{n}{2}(x^2)^{(2)}\mathrm{e}^x=(x^2+2nx+n(n-1))\mathrm{e}^x$.

(2) 由莱布尼兹公式,

$$[(x^2+1)\sin x]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2+1)^{(k)}(\sin x)^{(n-k)}.$$

(a) 当 $n=1$ 时,$[(x^2+1)\sin x]^{(1)}=(x^2+1)^{(0)}\sin(x+\dfrac{\pi}{2})+(x^2+1)^{(1)}\sin x=(x^2+1)\cos x+2x\sin x$;

(b) 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}[(x^2+1)\sin x]^{(n)}&=(x^2+1)^{(0)}\sin(x+\frac{n\pi}{2})+n(x^2+1)^{(1)}\sin(x+\frac{(n-1)\pi}{2})\\&\quad+\binom{n}{2}(x^2+1)^{(2)}\sin(x+\frac{(n-2)\pi}{2})\\&=(x^2+1)\sin(x+\frac{n\pi}{2})+2nx\sin(x+\frac{(n-1)\pi}{2})\\&\quad+n(n-1)\sin(x+\frac{(n-2)\pi}{2})\\&=(x^2+n(n-1)+1)\sin(x+\frac{n\pi}{2})+2nx\sin(x+\frac{(n-1)\pi}{2})\end{aligned}$$

(3) 由莱布尼兹公式,

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)} &= \left(\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(k)}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{(x-2)^{n-k+1}} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x-1)(x-2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-1)^k(x-2)^{n-k}}\end{aligned}$$

(4)

$$(\sin x\cdot\cos x)^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

习题 3.1.23 求曲线 $y=\cos x$ 在 $x=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

解 $y'=-\sin x$, 则 $y'(\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $y(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

或

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

习题 3.1.24 证明: 双曲线 $xy=1$ 上任一点处的切线, 与两坐标轴构成的三角形的面积为定值.

解 对 $xy=1$ 两侧对 x 求导,$y'=-\frac{y}{x}$, 设切点为 (x_0,y_0), 则切线方程为

$$y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$$

即

$$y=-\frac{y_0}{x_0}x+2y_0.$$

切线与 x 轴交点为 $(2x_0,0)$, 与 y 轴交点为 $(0,2y_0)$, 则三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2x_0\cdot 2y_0=2x_0y_0=2.$$

习题 3.1.25 有一底半径为 r cm, 高为 h cm 的正圆锥形容器, 现以 a cm^3/s 的速度自顶部向其内注水, 求水面上升的速度.

解 设水面高度为 x cm, 则水面半径为 $\frac{r}{h}x$ cm, 则水体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2x=\frac{\pi r^2}{3h^2}x^3.$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi r^2}{h^2}x^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

由题意,$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=a$, 则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{ah^2}{\pi r^2x^2}.$$

习题 3.1.26 水自高为 18 cm, 底半径为 6 cm 的圆锥形漏斗流入直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 已知水在漏斗中深度为 12 cm 时水平面下降的速率为 1 cm/min. 试求圆柱形筒中水面上升的速度.

解 设漏斗中水深为 x cm, 则漏斗中水体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{6}{18}x\right)^2x=\frac{\pi}{27}x^3.$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{9}x^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

由题意,$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-1$ cm/min, 当 $x=12$ cm 时,

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=-16\pi\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{min}.$$

设圆柱形筒中水深为 y cm, 则圆柱形筒中水体积为

$$V_2=\pi5^2y=25\pi y.$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}=25\pi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

由题意,$-\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}$, 则

$$-(-16\pi)=25\pi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{16}{25}\ \mathrm{cm}/\mathrm{min}.$$

习题 3.2

习题 3.2.1 设 $y = x^2 + x$, 计算在 $x = 1$ 处, 当 $\Delta x = 10, 1, 0.1, 0.01$ 时, 相应的函数的改变量 Δy 和函数的微分 $\mathrm{d}y$, 并观察差 $\Delta y - \mathrm{d}y$ 随 Δx 减小的变化情况.

解

(1) 当 $\Delta x = 10$ 时,

$$\Delta y = f(11) - f(1) = 130, \mathrm{d}y = f'(1)\,\mathrm{d}x = 3 \times 10 = 30, \Delta y - \mathrm{d}y = 100.$$

(2) 当 $\Delta x = 1$ 时,

$$\Delta y = f(2) - f(1) = 4, \mathrm{d}y = f'(1)\,\mathrm{d}x = 3 \times 1 = 3, \Delta y - \mathrm{d}y = 1.$$

(3) 当 $\Delta x = 0.1$ 时,

$$\Delta y = f(1.1) - f(1) = 0.31, \mathrm{d}y = f'(1)\,\mathrm{d}x = 3 \times 0.1 = 0.3, \Delta y - \mathrm{d}y = 0.01.$$

(4) 当 $\Delta x = 0.01$ 时,

$$\Delta y = f(1.01) - f(1) = 0.0301, \mathrm{d}y = f'(1)\,\mathrm{d}x = 3 \times 0.01 = 0.03, \Delta y - \mathrm{d}y = 0.0001.$$

从中不难看出, 随着 Δx 的减小, $\Delta y - \mathrm{d}y$ 也在减小, 且大体上 $\Delta y - \mathrm{d}y$ 趋于 0.

习题 3.2.2 求下列函数的微分:

(1) $y = \ln(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4})$;

(2) $y = \sin x - x\cos x$;

(3) $y = \arccos\frac{1}{|x|}$;

(4) $y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$;

(5) $y = 5\sqrt[3]{\arctan x^2}$;

(6) $y = \tan^2(1 + 2x^2)$;

(7) $y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3 - x)$;

(8) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

解

(1)

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}} \cdot \mathrm{d}\left(-\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{x - 2\pi}\,\mathrm{d}x.$$

(2)

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\sin x) - \mathrm{d}(x\cos x) = \cos x\,\mathrm{d}x - (\cos x - x\sin x)\,\mathrm{d}x = x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

(3) $x > 0$ 时,

$$\mathrm{d}y = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$$

$x<0$ 时,

$$\mathrm{d}y=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$\mathrm{d}y=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x,|x|>1.$$

(4)

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\ln|x-1|-\ln|x+1|\right)=\frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x,\quad x\neq\pm1.$$

(5)

$$\mathrm{d}y=5\cdot\frac{1}{3}(\arctan x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot\mathrm{d}(\arctan x^2)=\frac{10x}{3(1+x^4)(\arctan x^2)^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x.$$

(6)

$$\mathrm{d}y=2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot\mathrm{d}(1+2x^2)=8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)\,\mathrm{d}x.$$

(7)

$$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)\cdot\mathrm{d}(-x)+\mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{d}(\cos(3-x))=\mathrm{e}^{-x}(-\cos(3-x)+\sin(3-x))\,\mathrm{d}x.$$

(8)

$$\mathrm{d}y=\frac{(\sqrt{x^2+1})\cdot\mathrm{d}(x)-x\cdot\mathrm{d}(\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+1})^2}=\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x.$$

习题 3.2.3 对下列函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=\varphi\cos\varphi,\\ y=\varphi\sin\varphi;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}x=\cos^3\varphi,\\ y=\sin^3\varphi.\end{cases}$

解

(1) 对 $x=\ln(1+t^2),y=t-\arctan t$ 两边求微分, 得

$$\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y=\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{t}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{4t}.$$

(2) 对 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ 两边求微分, 得

$$\mathrm{d}x=(1-\cos t)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y=\sin t\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}}{1-\cos t}=\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

(3) 对 $x=\varphi\cos\varphi, y=\varphi\sin\varphi$ 两边求微分, 得

$$\mathrm{d}x=(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}y=(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\\&=\frac{\frac{(\cos\varphi+\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)-(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)(-\sin\varphi-\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)}{(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)^2}}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}\\&=\frac{\varphi^2+2}{(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)^3}\end{aligned}$$

(4) 对 $x=\cos^3\varphi, y=\sin^3\varphi$ 两边求微分, 得

$$\mathrm{d}x=-3\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}y=3\sin^2\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{3\sin^2\varphi\cos\varphi}{-3\cos^2\varphi\sin\varphi}=-\tan\varphi.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{-\sec^2\varphi}{-3\cos^2\varphi\sin\varphi}=\frac{1}{3\cos^4\varphi\sin\varphi}.$$

习题 3.2.4 求下列曲线在已知点处的切线方程.

(1) $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处; (2) $\begin{cases}x=\dfrac{3t}{1+t^2},\\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^2}\end{cases}$ 在 $t=2$ 处.

解

(1) 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处,

$$x=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\cot t,$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1.$$

切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

即

$$x + y - \sqrt{2} = 0.$$

(2) 在 $t = 2$ 处,

$$x = \frac{3 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{6}{5}, \quad y = \frac{3 \times 2^2}{1 + 2^2} = \frac{12}{5}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{6t}{(1+t^2)^2}}{\frac{3(1-t^2)}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2} = -\frac{4}{3}.$$

切线方程为

$$y - \frac{12}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{6}{5}\right),$$

即

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

习题 3.3

习题 3.3.1 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 确定方程 $f'(x)=0$ 的实根的个数, 并指出根所在的区间.

解 $f'(x)$ 为三次多项式, 故 $f'(x)=0$ 最多有三个实根. 又 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$, 由 Rolle 定理, 在 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 内分别各至少有一点 ξ_1,ξ_2,ξ_3, 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$, 显然该三点互不相同. 因此 $f'(x)=0$ 有且仅有三个实根, 分别在 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 内.

习题 3.3.2 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上有二阶微商, 且 $f(1)=f(2)=0$. 记 $F(x)=(x-1)^2f(x)$, 则在区间 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ, 使得 $F''(\xi)=0$.

解 由 $f(1)=f(2)=0\Rightarrow F(1)=F(2)=0$. 由 Rolle 定理, 在 $(1,2)$ 内至少有一点 ξ_1, 使得 $F'(\xi_1)=0$. 又 $F'(1)=2(1-1)f(1)+(1-1)^2f'(1)=0$. 由 Rolle 定理, 在 $(1,\xi_1)$ 内至少有一点 ξ, 使得 $F''(\xi)=0$.

习题 3.3.3 举例说明, 中值定理的下述意义的逆不成立: 设 $\xi\in(a,b)$ 是指定的一点, 则存在 $c,d\in[a,b]$, 使得 $\dfrac{f(c)-f(d)}{c-d}=f'(\xi)$. (提示: 考虑函数 $f(x)=x^3,\xi=0$.)

解 设 $f(x)=x^3,\xi=0$, 则 $f'(\xi)=f'(0)=0$. 若存在 $c,d\in[-1,1]$, 使得 $\dfrac{f(c)-f(d)}{c-d}=f'(\xi)$, 则有

$$\frac{c^3-d^3}{c-d}=0\Rightarrow c^2+cd+d^2=0\Rightarrow c=d=0.$$

但 c,d 不能相等, 故不存在 $c,d\in[-1,1]$, 使得 $\dfrac{f(c)-f(d)}{c-d}=f'(\xi)$.

习题 3.3.4 证明下列不等式:

(1) 当 $a>b>0,n>1$ 时, 有 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$;

(2) 当 $x>0$ 时, 有 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$;

(3) 当 $0<a<b$ 时, 有 $(a+b)\ln\dfrac{a+b}{2}<a\ln a+b\ln b$.

(4) 当 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有 $\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$.

解

(1) 设 $f(x)=x^n$, 则 $f'(x)=nx^{n-1}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 (b,a) 内至少有一点 ξ, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

又 $a>\xi>b>0$,$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, 故 $nb^{n-1}<f'(\xi)<na^{n-1}$, 于是

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

(2) 设 $f(x)=\ln(1+x)$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 $(0,x)$ 内至少有一点 ξ, 使

得

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

又 $x>\xi>0,f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减, 故 $\dfrac{1}{1+x}<f'(\xi)<1$, 于是

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

(3) 设 $f(x)=x\ln x$, 则 $f'(x)=\ln x+1$. 由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right),\eta\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{a+b}{2}-a}=\frac{(a+b)\ln\frac{a+b}{2}-2a\ln a}{b-a}$$

$$f'(\eta)=\frac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-\frac{a+b}{2}}=\frac{2b\ln b-(a+b)\ln\frac{a+b}{2}}{b-a}$$

又 $a<\xi<\eta<b$, $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, 故 $f'(\xi)<f'(\eta)$, 于是

$$(a+b)\ln\frac{a+b}{2}<a\ln a+b\ln b.$$

(4) 设 $f(x)=\tan x$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 (α,β) 内至少有一点 ξ, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}$$

又 $\beta>\xi>\alpha>0,f'(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内单调递增, 故 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}<f'(\xi)<\dfrac{1}{\cos^2\beta}$, 于是

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

习题 3.3.5 证明下列恒等式:

(1) $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(2) $\arctan x+\arctan\dfrac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & x>-1,\\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x<-1.\end{cases}$

解

(1) 设 $f(x)=\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=0.$$

又 $f(0)=0$, 故 $f(x)=0$, 即 $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) 设 $g(x)=\arctan x+\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$, 则

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}=0.\quad (x\neq -1)$$

又 $g(0)=\dfrac{\pi}{4}, g(-2)=-\dfrac{3\pi}{4}$, 故 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & x>-1,\\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x<-1.\end{cases}$

这道题使用了引理:

引理 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 且在 I 内部可导. 若 $f'(x)=0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在 I 上恒为常数.

证明 设 $x_1,x_2\in I$, 不妨设 $x_1<x_2$, 则由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0\Rightarrow f(x_2)=f(x_1).$$

因此 $f(x)$ 在 I 上恒为常数.

习题 3.3.6 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的可导函数, 对任意 $x\in[0,1]$ 有 $f(x)\in(0,1)$; 并且对每个 $x, f'(x)\neq 1$. 证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x, 使 $f(x)=x$.

解 先证明存在性: 设 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(0)=f(0)>0, g(1)=f(1)-1<0$. 由介值定理, 在 $(0,1)$ 内至少有一点 ξ, 使得 $g(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\xi$.

反证法证明唯一性: 假设在 $(0,1)$ 内有两点 ξ_1,ξ_2, 使得 $f(\xi_1)=\xi_1, f(\xi_2)=\xi_2$, 则 $g(\xi_1)=g(\xi_2)=0$. 由 Rolle 定理, 在 (ξ_1,ξ_2) 内至少有一点 η, 使得 $g'(\eta)=0$, 即 $f'(\eta)-1=0$, 与 $f'(x)\neq 1$ 矛盾. 因此在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x, 使 $f(x)=x$.

习题 3.3.7 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $|f'(x)|<1$, 又 $f(0)=f(1)$. 证明: 对于 $[0,1]$ 上的任意两点 x_1,x_2, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$.

解 对于 $x_1,x_2\in[0,1]$, 不妨设 $x_1<x_2$, 则由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi_1,\xi_2,\xi_3\ \mathrm{s.t.}\ 0<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\xi_3<1$, 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\quad f'(\xi_3)=\frac{f(1)-f(x_2)}{1-x_2}.$$

因此

$$|f(x_1)-f(0)|=|f'(\xi_1)|x_1<x_1,$$

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi_2)|(x_2-x_1)<x_2-x_1,$$

$$|f(1)-f(x_2)|=|f'(\xi_3)|(1-x_2)<1-x_2.$$

于是

$$\begin{aligned}2|f(x_1)-f(x_2)| &= |f(x_2)-f(x_1)|+|f(1)-f(x_2)+f(x_1)-f(0)|\\&\leqslant |f(x_2)-f(x_1)|+|f(1)-f(x_2)|+|f(x_1)-f(0)|\\&< (x_2-x_1)+(1-x_2)+x_1=1.\end{aligned}$$

故 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$.

习题 3.3.8 若 $f(x)$ 处处可导, 且 $f'(x)=f(x)$. 证明 $f(x)=C\mathrm{e}^x, C$ 为任意常数.

解 设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$, 则

$$g'(x)=\frac{f'(x)\mathrm{e}^x-f(x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\frac{\mathrm{e}^x f(x)-\mathrm{e}^x f(x)}{(\mathrm{e}^x)^2}=0.$$

因此 $g(x)\equiv g(0)\Rightarrow f(x)=f(0)\mathrm{e}^x$. 设 $C=f(0)$.

习题 3.3.9 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 且 $f(a)=f(b)$. 证明在 (a,b) 内存在一点 ξ, 使得 $f'(\xi)>0$.

解 由于 $f(x)$ 不为常函数, 故存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)\neq f(a)$.

(1) 若 $f(x_0)>f(a)$, 则 $\exists\xi\in(a,x_0)$, 使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$.

(2) 若 $f(x_0)<f(a)=f(b)$, 则 $\exists\eta\in(x_0,b)$, 使得 $f(\eta)=\dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}>0$.

习题 3.3.10 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

解

(1) 由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi_x\in(x,x+1)$, 使得

$$f'(\xi_x)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x).$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0\Rightarrow\forall\varepsilon,\exists X>0,\mathrm{s.t.}\,\forall x>X,|f'(x)|<\varepsilon$. 设 $x>X$, 则由 Lagrange 中值定理,$\exists\eta\in(X,x)$, 使得

$$f'(\eta)=\frac{f(x)-f(X)}{x-X}\Rightarrow f(x)=f'(\eta)(x-X)+f(X).$$

因此

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|f'(\eta)\left(1-\frac{X}{x}\right)+\frac{f(X)}{x}\right|\leqslant|f'(\eta)|\left|1-\frac{X}{x}\right|+\left|\frac{f(X)}{x}\right|<\varepsilon+\left|\frac{f(X)}{x}\right|.$$

也就是说, 当 $x>\max\left\{X,\dfrac{|f(X)|}{\varepsilon}\right\}$ 时,$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<2\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

习题 3.3.11 证明: 若函数 $f(x)$ 在 (有限) 开区间 (a,b) 内有有界的导函数, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内也有界. 如果有限区间 (a,b) 改为无穷区间, 结论还成立吗? 命题的逆命题是否成立?

解 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 故在 (a,b) 连续. 不妨设 $\forall x\in(a,b), f'(x)\leqslant M$, 同时取 $c=\dfrac{a+b}{2}$, 则

$$\forall x\in(a,b)\setminus\{c\}, \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right|=|f'(\xi)|\leqslant M\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(c)|+M|b-a|$$

显然对于 $c,|f(c)|\leqslant|f(c)|+M|b-a|$ 也成立, 即得 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界.

将 (a,b) 改为无穷区间, 结论不成立. 考虑 $f(x)=x, f'(x)=1$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界, 但 $f(x)=x$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界.

逆命题不成立. 考虑 $f(x)=\sqrt{x}, f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,1)$ 上有界, 但 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 上无界.

习题 3.3.12 设对所有的实数 x,y, 不等式 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^2$ (M 为常数) 都成立. 证明: $f(x)$ 恒为常数.

解 $\forall x\neq y, 0\leqslant\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant M|x-y|$. 令 $y\to x$,

$$\lim_{y\to x}0=\lim_{y\to x}M|x-y|=0\Rightarrow|f'(x)|=\lim_{y\to x}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=0\Rightarrow f'(x)=0.$$

故 $f(x)$ 恒为常数.

习题 3.3.13 设 $f(x)$ 在一个区间 I 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外, $f(x)$ 在 I 内部的导数为正 (负), 则 $f(x)$ 在 I 上严格单调递增 (减). (注意, 在例外的点处, $f(x)$ 可能不可导.)

解 设 $x_1,x_2\in I$, 不妨设 $x_1<x_2$. 若 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 内处处可导, 则由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

又 $f'(\xi)>0(f'(\xi)<0)$, 故 $f(x_2)>f(x_1)(f(x_2)<f(x_1))$.

若 $f(x)$ 在 (x_1,x_2) 内有有限个点不可导, 设这些点为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$, 则将 (x_1,x_2) 分成 $n+1$ 个子区间 $(x_1,y_1),(y_1,y_2),\cdots,(y_n,x_2)$, 在每个子区间内 $f(x)$ 处处可导, 由上面的结论可知,$f(x_1)<f(y_1)<\cdots<f(y_n)<f(x_2)\,(f(x_1)>f(y_1)>\cdots>f(y_n)>f(x_2))$.

综上所述,$f(x)$ 在 I 上严格单调递增 (递减).

习题 3.3.14 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 I 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 I 内部满足 $f'(x)>g'(x)$; 设存在 $a\in I$, 使得 $f(a)=g(a)$ (a 不是区间端点), 则当 $x\in I$ 且 $x>a$ 时, 有 $f(x)>g(x)$; 当 $x\in I$ 且 $x<a$ 时, 有 $f(x)<g(x)$.

解 记 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则 $h(x)$ 在 I 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外,$h(x)$ 在 I 内部满足 $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$. 又 $h(a)=f(a)-g(a)=0$. 由上一题的结论可知, 当 $x\in I$ 且 $x>a$ 时,$h(x)>0\Rightarrow f(x)>g(x)$; 当 $x\in I$ 且 $x<a$ 时,$h(x)<0\Rightarrow f(x)<g(x)$.

习题 3.3.15 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导, $f(0)=0$, $f'(x)$ 严格递增, 证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 严格递增.

解 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则由 Lagrange 中值定理,$\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

又由 Lagrange 中值定理,$\exists \eta \in (0, x_1)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{f(x_1)}{x_1}.$$

因为 $f'(x)$ 严格递增, 故 $f'(\xi) > f'(\eta)$, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow \frac{f(x_2)}{x_2} > \frac{f(x_1)}{x_1}. \quad (\text{习题 3.5.3})$$

因此 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 严格递增.

习题 3.3.16 设 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个驻点 ($f'(x_0) = 0$), 且 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可微, $f''(x_0) \neq 0$. 证明: 若 $f''(x_0) < 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点; 若 $f''(x_0) > 0$, 则 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点.

举例说明: 若 $f''(x_0) = 0$, 则 x_0 可以是 $f(x)$ 的极大值点或极小值点, 也可以不是极值点.

解 若 $f''(x_0) < 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), f''(x) < 0$. 由 Lagrange 中值定理,$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \exists \xi = \xi(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$

又 $f''(x) < 0$, 故 $f'(\xi) > f'(x_0) = 0 > f'(\xi_2)$, 由习题 3.3.17 可知, 即当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时,$f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时,$f(x) < f(x_0)$. 因此 x_0 是 $f(x)$ 的一个极小值点. 即当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时,$f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时,$f(x) < f(x_0)$. 因此 x_0 是 $f(x)$ 的一个极大值点.

例: 设 $f(x) = x^4$, 则 $f''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点. 设 $g(x) = -x^4$, 则 $g''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的一个极大值点. 设 $h(x) = x^3$, 则 $h''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 不是 $h(x)$ 的极值点.

习题 3.3.17 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0), f(1) = f'(1)$. 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$, 满足 $f(\xi) = f''(\xi)$.

解 设 $g(x) = \mathrm{e}^x (f(x) - f'(x))$, 则

$$g'(x) = \mathrm{e}^x(f(x) - f'(x)) + \mathrm{e}^x(f'(x) - f''(x)) = \mathrm{e}^x(f(x) - f''(x)).$$

又 $g(0) = \mathrm{e}^0(f(0) - f'(0)) = 0, g(1) = \mathrm{e}^1(f(1) - f'(1)) = 0$. 由 Rolle 定理, 在 $(0, 1)$ 内至少有一点 ξ, 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = f''(\xi)$.

习题 3.3.18 求下列函数的单调区间与极值.

(1) $y = 2x^3 - 3x^2$;

(2) $y = x^{2/3}$;

(3) $y = x^2 e^{-x^2}$; (4) $y = x^{1/x}$;

(5) $y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$; (6) $y = \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

解 高中的时候大家就已经很熟悉怎么用导数来求函数的单调区间与极值了, 这里仅给出答案.

(1)

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1).$$

单调区间: 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 0$ 处取得极大值 0, 在 $x = 1$ 处取得极小值 -1.

(2)

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

单调区间: 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 0$ 处取得极小值 0.

(3)

$$y' = 2x e^{-x^2}(1 - x^2).$$

单调区间: 在 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$ 上单调递增.

极值: 在 $x = \pm 1$ 处取得极大值 $\dfrac{1}{e}$, 在 $x = 0$ 处取得极小值 0.

(4) 此函数只在 $(0, +\infty)$ 有定义.

$$y' = x^{1/x}\frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

单调区间: 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = e$ 处取得极大值 $e^{1/e}$.

(5)

$$y' = \frac{\ln x(2 - \ln x)}{x^2}.$$

单调区间: 在 $(0, 1)$ 和 $(e^2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(1, e^2)$ 上单调递增.

极值: 在 $x = 1$ 处取得极小值 0, 在 $x = e^2$ 处取得极大值 $\dfrac{4}{e^2}$.

(6)

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1-x}{1+x^2}.$$

单调区间: 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 1$ 处取得极大值 $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

命题 (极值点的判别法)

(1) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f'(x_0)$ 在 x_0 两侧存在, 异号, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值点.$f'(x_0)$ 可

以不存在. 这即极值存在的一阶导判别法.

(2) 若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0(<0)$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的二阶导判别法.

(3) 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(2n-1)}(x_0)=0, f^{(2n)}>0(<0)$, 则 $f(x_0)$ 必是 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的高阶导判别法.

习题 3.3.19 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值.

(1) $y=x^4-2x^2+5, [-2,2]$;

(2) $y=\sin 2x-x, [-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$;

(3) $y=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}, [0,1]$;

(4) $y=x\ln x, (0,+\infty)$.

解

(1)

$$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)=0\Rightarrow x=-1,0,1.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y(-2)=13,\quad y(-1)=4,\quad y(0)=5,\quad y(1)=4,\quad y(2)=13.$$

故最大值为 13, 最小值为 4.

(2)

$$y'=2\cos 2x-1=0\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\quad y\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6},\quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6},\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

故最大值为 $\dfrac{\pi}{2}$, 最小值为 $-\dfrac{\pi}{2}$.

(3)

$$y'=-\frac{2}{(1+x)^2+(1-x)^2}=-\frac{1}{1+x^2}<0\quad(x\in[0,1]).$$

故在 $[0,1]$ 上单调递减, 最大值为 $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$, 最小值为 $y(1)=0$.

(4)

$$y'=\ln x+1=0\Rightarrow x=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

函数在 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递增且趋于 $+\infty$. 故最小值为 $y\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 无最大值.

习题 3.3.20 证明下列不等式:

(1) $\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1,\quad x\in[0,1],p>1$;

(2) $\tan x > x - \frac{x^3}{3}, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$;

(3) $\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}, \quad 0 < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$;

(4) $\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}, \quad x > 0$;

(5) $1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2}, \quad x$ 为任意实数;

(6) $\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 且右端的常数 $\frac{4}{3}$ 不能换为更大的数;

(7) $(1 - \frac{1}{x})^{x-1}(1 + \frac{1}{x})^x < 4, \quad x \in (1, +\infty)$;

(8) $x^{a-1} + x^{a+1} \geqslant \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}, \quad x \in (0,1), a \in (0,1)$.

解

(1) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 则 $f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$. 因此 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减. 故 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p-1}}$, 最大值为 $f(0) = f(1) = 1$, 即

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1.$$

(2) 设 $g(x) = \tan x - x + \frac{x^3}{3}$, 则 $g'(x) = \sec^2 x - 1 + x^2 = \tan^2 x + x^2 > 0$. 因此 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 又 $g(0) = 0$, 故 $g(x) > 0$, 即

$$\tan x > x - \frac{x^3}{3}.$$

(3) 设 $h(x) = \frac{\tan x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} = \frac{x\tan^2 x}{x^2} > 0$. 因此 $h(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 故 $h(x_2) > h(x_1)$, 即

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

(4) 设 $f(x) = \ln(1+x) - \frac{\arctan x}{1+x}$, 则

$$f'(x) = \frac{\arctan x + x^2\arctan x + x^3 + x^2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} > 0, \quad x > 0$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(0) = 0$, 故 $f(x) > 0$, 即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(4) **另解令** $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x, g(x) = \arctan x, \forall x > 0$,

$$\exists \xi_1 \in [0,x], \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi_1) = 1 + \ln(1+x) > 1.$$

$$\exists \xi_2 \in [0,x], \frac{g(x) - g(0)}{g - 0} = \frac{g(x)}{x} = g'(\xi_2) = \frac{1}{1+\xi_2^2} < 1.$$

故

$$g(x) < x < f(x).$$

即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(5) 令 $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exists \xi \in [0,x], \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geqslant \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geqslant \sqrt{1+x^2}-1$$

即

$$1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2}.$$

(6) 令 $f(x) = x - \frac{4}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin x\cos x$, 则

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{3}\cos x + \frac{1}{3}\cos 2x = \frac{1}{3}(2\cos x - 1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0.$$

又 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}), \sin x > 0$,

$$\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x.$$

另一方面, 由于

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\cos x = 0,$$

$\frac{4}{3}$ 不能被替换为更大的数.

(7)

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 < \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 < 4$$

(8) 令 $f(x) = x^{a-1} + x^{a+1}$, 则 $\forall x \in (0,1), a \in (0,1)$,

$$f'(x) = (a-1)x^{a-2} + (a+1)x^a = (a+1)\left(x+\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)x^{a-2}.$$

$$\forall x \in \left(0, \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right), f'(x) < 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

$$\forall x \in \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, 1\right), f'(x) > 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

综上, $\forall x \in (0,1), a \in (0,1), x^{a-1} + x^{a+1} \geqslant \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}$.

习题 3.3.21 试确定下列函数零点的个数及所在范围:

(1) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10$;

(2) $ax - \ln x$ (其中 $a > 0$).

解

(1) 令 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$. 我们首先分析 $f(x)$ 的单调性. 求导得:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3).$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = 3$.

- 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.
- 当 $x \in (1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.
- 当 $x \in (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值,

$$f(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 10 = 1 - 6 + 9 - 10 = -6.$$

$f(x)$ 在 $x = 3$ 处取得极小值,

$$f(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 10 = 27 - 54 + 27 - 10 = -10.$$

同时, 考察 x 趋于无穷时的极限:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

由于极大值 $f(1) = -6 < 0$, 且 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, 所以在 $(-\infty, 1]$ 上 $f(x)$ 恒为负, 没有零点. 由于极小值 $f(3) = -10 < 0$, 且极大值 $f(1) = -6 < 0$, 所以在 $(1, 3]$ 上 $f(x)$ 恒为负, 没有零点. 由于 $f(3) = -10 < 0$ 且 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, 且 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上连续且单调递增, 根据零点存在定理, $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上有且仅有一个零点.

又因为

$$f(4) = -6 < 0, \quad f(5) = 10 > 0.$$

所以零点在 $(4, 5)$ 范围内.

该函数只有一个零点, 位于区间 $(4, 5)$ 内.

(2) 令 $g(x) = ax - \ln x$. 函数的定义域为 $(0, +\infty)$. (题目已给出 $a > 0$) 我们分析 $g(x)$ 的单调性. 求导得:

$$g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}.$$

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \dfrac{1}{a}$.

- 当 $x \in (0, 1/a)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.
- 当 $x \in (1/a, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

因此, $g(x)$ 在 $x = 1/a$ 处取得全局最小值, 最小值为:

$$g(1/a) = a\left(\frac{1}{a}\right) - \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \ln(a^{-1}) = 1 + \ln a.$$

我们考察 $g(x)$ 在定义域边界的行为:

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+}(ax-\ln x) = 0-(-\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}(ax-\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(a-\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty\cdot(a-0) = +\infty.$$

函数 $g(x)$ 从 $+\infty$ 递减到最小值 $1+\ln a$, 然后再递增到 $+\infty$. 零点的个数取决于最小值 $1+\ln a$ 的符号:

情况 1 若最小值 $1+\ln a>0$, 即 $\ln a>-1$, $a>\mathrm{e}^{-1}$ ($a>1/\mathrm{e}$). 此时 $g(x)$ 的最小值大于 0, $g(x)$ 恒大于 0, 故函数没有零点.

情况 2 若最小值 $1+\ln a=0$, 即 $\ln a=-1$, $a=\mathrm{e}^{-1}$ ($a=1/\mathrm{e}$). 此时 $g(x)$ 的最小值等于 0, $g(x)$ 仅在 $x=1/a=\mathrm{e}$ 处与 x 轴相切, 故函数有且仅有一个零点, 零点为 $x=\mathrm{e}$.

情况 3 若最小值 $1+\ln a<0$, 即 $\ln a<-1$, $0<a<\mathrm{e}^{-1}$ ($0<a<1/\mathrm{e}$). 此时 $g(x)$ 的最小值小于 0. 由于 $\lim_{x\to0^+} g(x)=+\infty$ 且 $g(1/a)<0$, $g(x)$ 在 $(0,1/a)$ 上连续且单调递减, 故在 $(0,1/a)$ 内必有一个零点. 由于 $g(1/a)<0$ 且 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $g(x)$ 在 $(1/a,+\infty)$ 上连续且单调递增, 故在 $(1/a,+\infty)$ 内必有一个零点. 故函数有两个零点.

结论:

- 若 $a>\mathrm{e}^{-1}$, 函数有 0 个零点.
- 若 $a=\mathrm{e}^{-1}$, 函数有 1 个零点, 位于 $x=\mathrm{e}$.
- 若 $0<a<\mathrm{e}^{-1}$, 函数有 2 个零点, 一个位于 $(0,1/a)$, 另一个位于 $(1/a,+\infty)$.

习题 3.3.22 设 $a\in(0,1), b_1=1-a$,

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{1-\mathrm{e}^{-b_n}}-a,\quad n=1,2,\dots.$$

问 $\{b_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则给予证明, 若收敛, 则求极限.

解 我们记 $f(x)=\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-a, x>0$, 则有 $b_{n+1}=f(b_n), n=1,2,\dots$, 且

$$f'(x)=\frac{1-\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}\geqslant 0$$

由 Lagrange 中值定理可知, 存在 $\xi_n\in(b_n,b_{n+1})$ 使得

$$b_{n+2}-b_{n+1}=f(b_{n+1})-f(b_n)=f'(\xi_n)\left(b_{n+2}-b_{n+1}\right).$$

据此可知,$\{b_n\}$ 是一个单调数列, 增减性由 b_2-b_1 确定.

再设 $g(x)=\begin{cases} f(x)-x, & x>0\\ 1-a, & x=0\end{cases}$ 化简得到 $x>0$ 时,

$$g(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}-a,\quad g'(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1-x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}\leqslant 0,$$

可知 $g(x)$ 在 $x \geqslant 0$ 处连续, 递减. 且由于 $g(0) = 1 - a > 0$,$g(1) = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} - 1 - a < 0$, 故存在唯一的 $c \in (0,1)$ 使得 $g(c) = 0$, 即 $f(c) = c$.

又由于

$$b_2 - b_1 = f(b_1) - b_1 = g(b_1) = \frac{b_1}{\mathrm{e}^{b_1} - 1} - a = \frac{1-a}{\mathrm{e}^{1-a} - 1} - a = \frac{1 - a\mathrm{e}^{1-a}}{\mathrm{e}^{1-a} - 1} \geqslant 0.$$

由上述分析可知 $b_1 < c$,$\{b_n\}$ 单调递增, 并且 $b_{n+1} - c = f(b_n) - f(c) = f'(\eta_n)(b_n - c)$, 于是递推得到,$b_n < c$.

综上,$\{b_n\}$ 单调有界, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则

$$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(b).$$

故 $b = c$.

习题 3.3.23 试给出 Cauchy 中值定理的几何解释.

解 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 内可微. 根据 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

几何上, 这意味着在区间 $[a,b]$ 上, 存在一点 ξ, 使得函数 $f(x)$ 在该点的瞬时变化率（导数）与函数 $g(x)$ 在该点的瞬时变化率之比等于它们在端点处的平均变化率之比. 换句话说, 存在一条切线, 其斜率与通过点 $(a, f(a))$ 和 $(b, f(b))$ 的割线的斜率成比例关系, 这个比例由函数 $g(x)$ 的变化决定.

习题 3.3.24 试说明在闭区间 $[-1,1]$ 上 Cauchy 中值定理对函数 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = x^3$ 为什么不正确.

解 在闭区间 $[-1,1]$ 上, 函数 $f(x) = x^2$ 和 $g(x) = x^3$ 都是连续的, 并且在开区间 $(-1,1)$ 内可微. 然而, 我们计算它们在端点处的变化:

$$f(1) - f(-1) = 1^2 - (-1)^2 = 0,$$

$$g(1) - g(-1) = 1^3 - (-1)^3 = 2.$$

因此, Cauchy 中值定理要求存在 $\xi \in (-1,1)$, 使得

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} = \frac{0}{2} = 0 = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

计算导数:

$$f'(x) = 2x, \quad g'(x) = 3x^2.$$

因此,

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} = \frac{2}{3\xi}.$$

要使得 $\dfrac{2}{3\xi} = 0$, 必须有 $\xi \to \infty$, 这显然不可能在区间 $(-1, 1)$ 内实现. 因此, 在这个例子中, Cauchy 中值定理不成立.

这个例子说明了 Cauchy 中值定理的适用条件必须严格满足, 其中要求 $g'(x)$ 在 (a, b) 内不为零, 否则可能导致分母为零的情况, 从而使得定理无法应用.

习题 3.3.25 设 $b > a > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可微, 求证：存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$2\xi(f(b) - f(a)) = (b^2 - a^2)f'(\xi).$$

解 设 $g(x) = x^2$, 则 $g'(x) = 2x$. 根据 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{f'(\xi)}.$$

整理即得.

习题 3.3.26 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续 $(ab > 0)$, 在 (a, b) 上可微. 求证：存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

解 由 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{f'(\xi)\xi - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}.$$

整理即得.

习题 3.4

习题 3.4.1 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m,n 为正整数, α,β 为实数);

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m,n 为自然数);

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ (α 为任意实数);

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ ($a>0$);

(9) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\tan x}$;

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\arctan^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\ln(1-x)}$;

(13) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi}$;

(14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+x)^{1/x}}{\mathrm{e}}\right)^{1/x}$

(15) $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln(1-x)+\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}$;

(16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\arcsin x^3)^2}{(1-\cos x)(\mathrm{e}^{x^2}-1)\tan^2 x}$;

(17) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/x}$;

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\cdot\left(2-\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}\right)$;

(19) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}$ (n 为自然数, $a>1,k>0$);

(20) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^k}$ (n 为正整数, $k>0$).

解

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\alpha}{m}(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}-1}-\frac{\beta}{n}(1+\beta x)^{\frac{1}{n}-1}}{1}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}&\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{nm(1+mx)^{n-1}-mn(1+nx)^{m-1}}{2x}\\&\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{nm^2(n-1)(1+mx)^{n-2}-mn^2(m-1)(1+nx)^{m-2}}{2}\\&=\frac{mn(n-m)}{2}\end{aligned}$$

(3)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=-4.$$

(4)

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}\overset{\arcsin x=t}{=}\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{\sin^3 t}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}=-\frac{1}{6}.$$

(5)

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x}{\cos x}=1.$$

(6)

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha.$$

(7)

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to0}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1}=0.$$

(8)

$$((a+x)^x)'=\left(\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\right)'=\left(\frac{x}{a+x}+\ln(a+x)\right)\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}$$

$$((a+x)^x)''=\left(\frac{x}{a+x}+\ln(a+x)\right)^2\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}+\left(\frac{a}{(a+x)^2}+\frac{1}{a+x}\right)\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\to(\ln a)^2+\frac{2}{a}\quad(x\to0)$$

$$(a^x)''=\ln^2(a)a^x\to\ln^2(a)\quad(x\to0)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\cdots=\frac{(\ln a)^2+\frac{2}{a}-(\ln a)^2}{2}=\frac{1}{a}.$$

(9)

$$\left|\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to0}|x|=0.$$

(10)

$$\left|\lim_{x\to0}\frac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\tan x}\right|=\left|\lim_{x\to0}x\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to0}|x|=0.$$

(11)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\arctan^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\arctan^2 x}{x^2\arctan^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\arctan^2 x}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3}\cdot\frac{x+\arctan x}{x}=2\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^3}\\&\overset{x=\tan y}{=}2\lim_{y\to0}\frac{\tan y-y}{\tan^3 y}=2\lim_{y\to0}\frac{\tan y-y}{y^3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)&=\lim_{x\to0^+}\ln(1-x)\ln x=\lim_{x\to0^+}-x\ln x\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=0\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{(2x-\pi)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\mathrm{e}^{(2x-\pi)\ln(\tan x)} = \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{2x-\pi}}\right)\\
&\overset{L'H}{=} \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\tan x\cos^2 x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}}\right) = \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-(2x-\pi)^2}{\sin 2x}\right)\\
&\overset{x-\frac{\pi}{2}=y}{=} \exp\left(\lim_{y\to 0^+}\frac{-4y^2}{-\sin 2y}\right) = \mathrm{e}^0 = 1
\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+x)^{1/x}}{\mathrm{e}}\right)^{1/x} &= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)\right)\\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-1\right)\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)+\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x} &\overset{y=1-x}{=} \lim_{y\to 0^+}\frac{\ln y+\tan\frac{\pi}{2}(1-y)}{\cot\pi(1-y)} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\ln y+\cot\frac{\pi}{2}(y)}{-\cot\pi y}\\
&\overset{L'H}{=} \lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{1}{y}-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}y}}{\pi\frac{1}{\sin^2\pi y}} = \lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\sin^2\pi y}{\pi y}-\frac{1}{2}\frac{\sin^2\pi y}{\sin^2\frac{\pi}{2}y}\right)\\
&= 0-2 = -2
\end{aligned}$$

(16)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin x^3)^2}{(1-\cos x)(\mathrm{e}^{x^2}-1)\tan^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^3)^2}{\frac{1}{2}x^2\cdot x^2\cdot x^2} = 2$$

(17)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/x} &= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln(1+x)-\ln x}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln(1+x)}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}}{1}\right)\\
&= \exp 0 = 1
\end{aligned}$$

(18)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\cdot\left(2-\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(2-\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot(1+1)}{1+x\sin x-\cos x}\cdot(2-1)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin x+x\cos x+\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{4}{\frac{2\sin x}{x}+\cos x} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

(19) 只需证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x} = 0.$$

再由 Heine 定理即得.

对于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\lceil k\rceil}}{a^x}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\lceil k\rceil x^{\lceil k\rceil-1}}{(\ln a)a^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\lceil k\rceil!}{(\ln a)^{\lceil k\rceil}a^x}=0.$$

(20) 只需证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^k}=0.$$

再由 Heine 定理即得.

对于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^k}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{kx^k}=0.$$

习题 3.4.2 设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0)=1, f''(0)\neq 0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\in(0,a).$$

(1) 求证: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限;

(2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 则求其极限.

解

(1) $\{x_n\}$ 是递减的, 因为 $x_{n+1}-x_n=f(x_n)-x_n<0$. $\{x_n\}$ 具有下界 0, 故可设 $\{x_n\}$ 收敛到 x. 令 $n\to\infty$, 由 f 的连续性, 得 $x=f(x)$, 同时利用夹逼准则可知 $f(0)=0$ 是唯一满足 $x=f(x)$ 的, 故 $x=0$.

(2) 由泰勒展开, $f(x)=x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$, 因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n&\overset{\text{Stolz}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-f(x_n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+o(x_n^2)}{x_n-\left(x_n+\frac{f''(0)}{2}x_n^2+o(x_n^2)\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{-\frac{f''(0)}{2}x_n^2+o(x_n^2)}\\&=-\frac{2}{f''(0)}\end{aligned}$$

习题 3.5

习题 3.5.1 证明 (Jensen (延森) 不等式): 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, $x_1,\dots,x_n$ 是 I 中 n 个点, 则对任意满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$ 的正数 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, 有

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n).$$

解 采用数学归纳法. 当 $n=2$ 时, 结论显然成立.

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即对任意满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k=1$ 的正数 $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, 有

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_kx_k)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_kf(x_k).$$

现考虑 $n=k+1$ 的情形. 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1}$ 是满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_{k+1}=1$ 的正数. 记 $\beta=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$, 则有 $0<\beta<1$. 因此,

$$\begin{aligned}
f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{k+1}x_{k+1})&=f(\beta(\frac{\alpha_1}{\beta}x_1+\cdots+\frac{\alpha_k}{\beta}x_k)+(1-\beta)x_{k+1})\\
&\leqslant\beta f(\frac{\alpha_1}{\beta}x_1+\cdots+\frac{\alpha_k}{\beta}x_k)+(1-\beta)f(x_{k+1})\quad(\text{由凸函数的定义})\\
&\leqslant\beta(\frac{\alpha_1}{\beta}f(x_1)+\cdots+\frac{\alpha_k}{\beta}f(x_k))+(1-\beta)f(x_{k+1})\quad(\text{由归纳假设})\\
&=\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_kf(x_k)+\alpha_{k+1}f(x_{k+1}).
\end{aligned}$$

由数学归纳法可知, 对任意正整数 n, 结论均成立.

习题 3.5.2 设 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 和 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 都是正数, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$, 证明: 有不等式

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n.$$

特别, 取 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\dfrac{1}{n}$, 则得到算术平均不等式

$$\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

(提示: 考虑区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=-\ln x$ 的凸凹性, 并利用 Jensen 不等式.)

解 设 $f(x)=-\ln x$, 则 $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$, 因此 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凸函数. 由习题 3.5.1, 对任意满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ 的正数 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, 有

$$\begin{gathered}
f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)\\
-\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant-(\lambda_1\ln x_1+\lambda_2\ln x_2+\cdots+\lambda_n\ln x_n).
\end{gathered}$$

即

$$\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\geqslant\ln(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n}).$$

即
$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n \geqslant x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}.$$

习题 3.5.3 设 a,b,c,d 满足 $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$, 其中 $b>0, d>0$, 证明不等式
$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d}.$$

解 由 $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ 可得 $ad \leqslant bc$. 因为 $b>0, d>0$, 故有
$$ad+ab \leqslant bc+ab \Rightarrow a(d+b) \leqslant b(c+a) \Rightarrow \frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+d}.$$
同理,
$$ad \leqslant bc \Rightarrow ad+cd \leqslant bc+cd \Rightarrow c(b+d) \geqslant d(a+c) \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d}.$$

习题 3.5.4 设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数, 证明: $f(x)$ 在 I 的内点是连续的.

解 设 x_0 是区间 I 的一个内点, 需要证明 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

由于 x_0 是区间 I 的内点, 故存在 $\delta>0$, 使得区间 $(x_0-2\delta, x_0+2\delta) \subset I$.

任取 $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$, 则由凸函数, 有
$$\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{x_0-(x_0-\delta)} \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{(x_0+\delta)-x_0}.$$
记 $M_1=\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta}, M_2=\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}$, 则 M_1, M_2 均为常数,

因此
$$M_1 \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant M_2.$$

可知对于 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$, 有
$$-M\left|x-x_0\right| \leqslant \left|f(x)-f(x_0)\right| \leqslant M\left|x-x_0\right|.$$
当 $x \to x_0^+$ 时, 由夹逼定理可知, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

习题 3.5.5 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上处处可导, 且除了有限个点之外, 均有 $f''(x)>0$, 证明: $f(x)$ 在 I 上是凸的. 将本题用于 $f(-x)$, 就得到关于凹函数的类似结论.

解 由题设条件以及习题 3.3.13知, 可得,$f'(x)$ 单调递增, 由一阶导判别法即证.

这里, 相关的几个判别法表述为:

定理 (零阶导判别法) $f(x)$ 在区间 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1<x_2$ 都有
$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$
定理 (一阶导判别法) 若 $f'(x)$ 在 I 上存在, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow f'(x)$ 在 I 上单调增.

证明

(1) 必要性: 任取 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$, 任取 $x_1 < x < x_2$, 对3.5 中第一个不等式, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

令 $x \to x_1$, 有

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

同理, 对3.5 中的第二个不等式, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

并令 $x' \to x_2$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_2)$$

所以 $f'(x_1) \leqslant f'(x_2)$. 根据 x_1, x_2 的任意性, 必须性证明毕.

(2) 充分性: 对任意的 $x_1 < x < x_2$, 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x), \eta \in (x, x_2)$, 使得

$$f(x)-f(x_1) = f'(\xi)\cdot(x-x_1), \quad f(x_2)-f(x_1) = f'(\eta)\cdot(x_2-x_1)$$

因为 $f'(x)$ 单调增, 且 $x_1 < x < x_2$, 即

$$f'(\xi) \leqslant f'(\eta)$$

可知函数 f 是凸函数.

定理 (二阶导判别法) 若 $f''(x)$ 在 I 上存在, 则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow f''(x) \geqslant 0, x \in I$.

习题 3.5.6 设函数 $f(x)$ 在区间 I 内有连续的二阶导数. 若 x_0 是 $f(x)$ 的一个拐点, 证明: $f''(x_0) = 0$.

解 由拐点的定义可知, 存在 $\delta > 0$, 使得在区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 上, $f(x)$ 为凸函数, 在区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 上, $f(x)$ 为凹函数. 由二阶导判别法知, 对任意 $x \in (x_0-\delta, x_0)$, 有 $f''(x) \geqslant 0$; 对任意 $x \in (x_0, x_0+\delta)$, 有 $f''(x) \leqslant 0$. 由于 $f''(x)$ 在区间 I 内连续, 故有

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f''(x) \geqslant 0, \quad f''(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f''(x) \leqslant 0.$$

因此, $f''(x_0) = 0$.

习题 3.5.7 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 及其附近二阶可导, 且 $f''(x_0) = 0$. 若 $f'''(x_0)$ 存在但不为零, 证明: x_0 是 $f(x)$ 的拐点.

解 不妨设 $f'''(x_0) > 0$. 则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} = f'''(x_0) > 0$, 所以存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, 有

$$\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x) \geqslant 0, & x_0 < x < x_0+\delta; \\ f''(x) \leqslant 0, & x_0-\delta < x < x_0. \end{cases}$$

由二阶导判别法知, $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 上为凹函数, 在区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 上为凸函数, 因此, x_0 是 $f(x)$ 的拐点.

习题 3.5.8 求下列函数的凸、凹区间和拐点.

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$;　　(2) $y = x + \dfrac{1}{x}$;

(3) $y = x^{5/3}$;　　(4) $y = (1+x^2)\mathrm{e}^x$;

(5) $y = x^4$;　　(6) $y = x + \sin x$.

解

(1) $y' = 6x^2 - 6x - 36, y'' = 12x - 6$.

- 当 $x \in (-\infty, \dfrac{1}{2})$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(-\infty, \dfrac{1}{2})$ 上为凹函数;
- 当 $x \in (\dfrac{1}{2}, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $(\dfrac{1}{2}, +\infty)$ 上为凸函数;

$x = \dfrac{1}{2}$ 为拐点.

(2) $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}, y'' = \dfrac{2}{x^3}$.

- 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $(0, +\infty)$ 上为凸函数;
- 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(-\infty, 0)$ 上为凹函数;

$y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处无定义, 故无拐点.

(3) $y' = \dfrac{5}{3}x^{2/3}, y'' = \dfrac{10}{9}x^{-1/3}$.

- 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $(0, +\infty)$ 上为凸函数;
- 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(-\infty, 0)$ 上为凹函数;

$x = 0$ 为拐点.

(4) $y' = (1 + 2x + x^2)\mathrm{e}^x, y'' = (3 + 4x + x^2)\mathrm{e}^x = (x+1)(x+3)\mathrm{e}^x$.

- 当 $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ 上为凸函数;
- 当 $x \in (-3, -1)$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(-3, -1)$ 上为凹函数;

$x = -3, -1$ 为拐点.

(5) $y' = 4x^3, y'' = 12x^2 \geqslant 0$, 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上为凸函数, 无拐点.

(6) $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$.

- 当 $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$ 上为凸函数;
- 当 $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ 上为凹函数;

$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 为拐点.

习题 3.5.9 求 a, b 值, 使点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点.

解 $y' = 3ax^2 + 2bx$, $y'' = 6ax + 2b$. 因为点 $(1,3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 故有

$$\begin{cases} 3 = a + b; \\ 0 = 6a + 2b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{3}{2}; \\ b = \dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

习题 3.5.10 描绘下列各曲线的图形.

(1) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$;

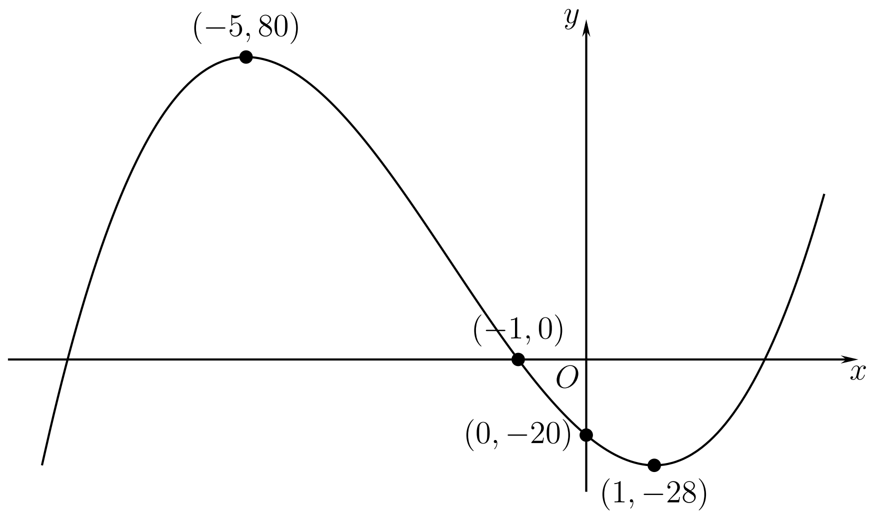
(2) $y = \dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$;

(3) $y = x - 2\arctan x$;

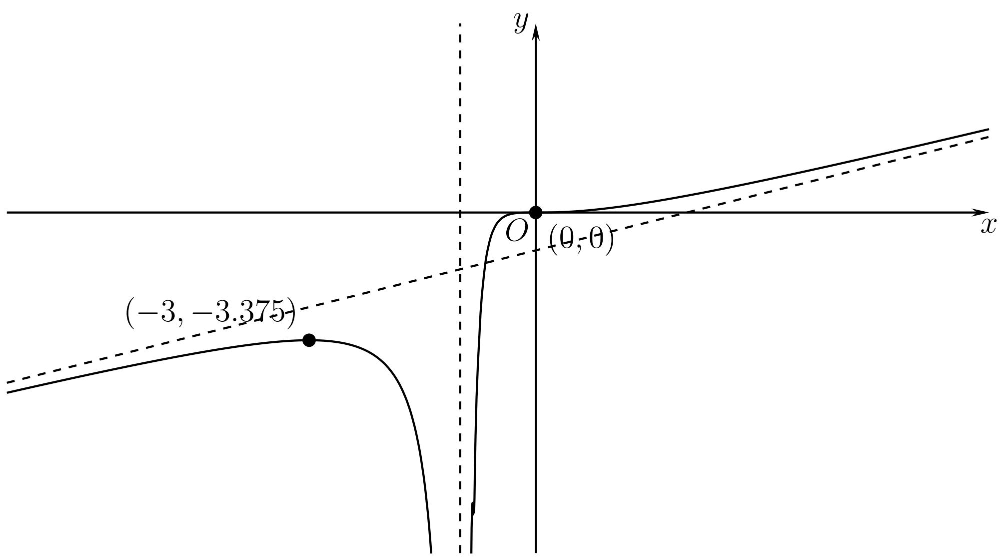
(4) $y = xe^{-x}$.

解

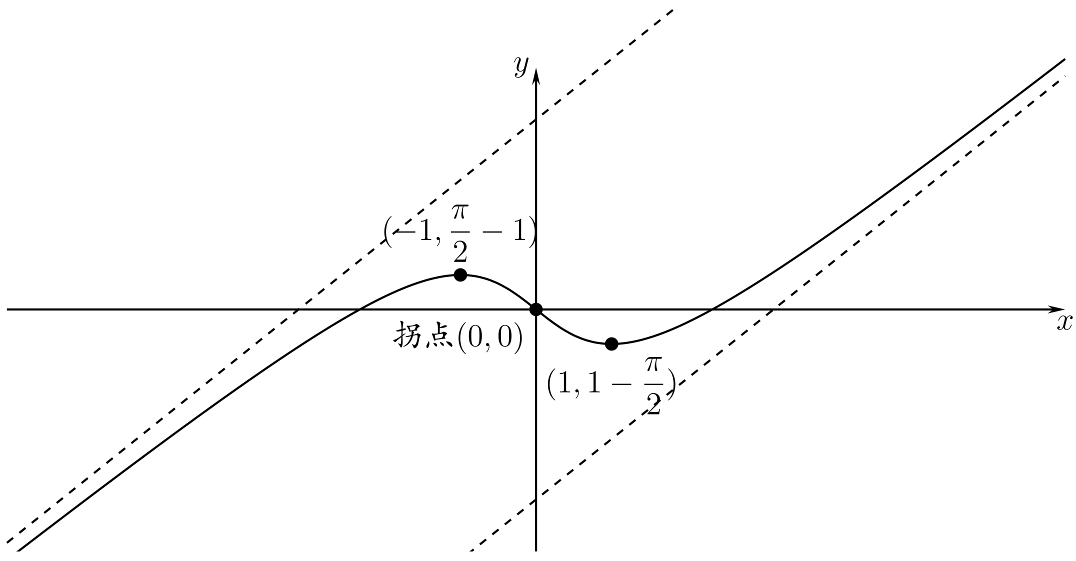
(1)



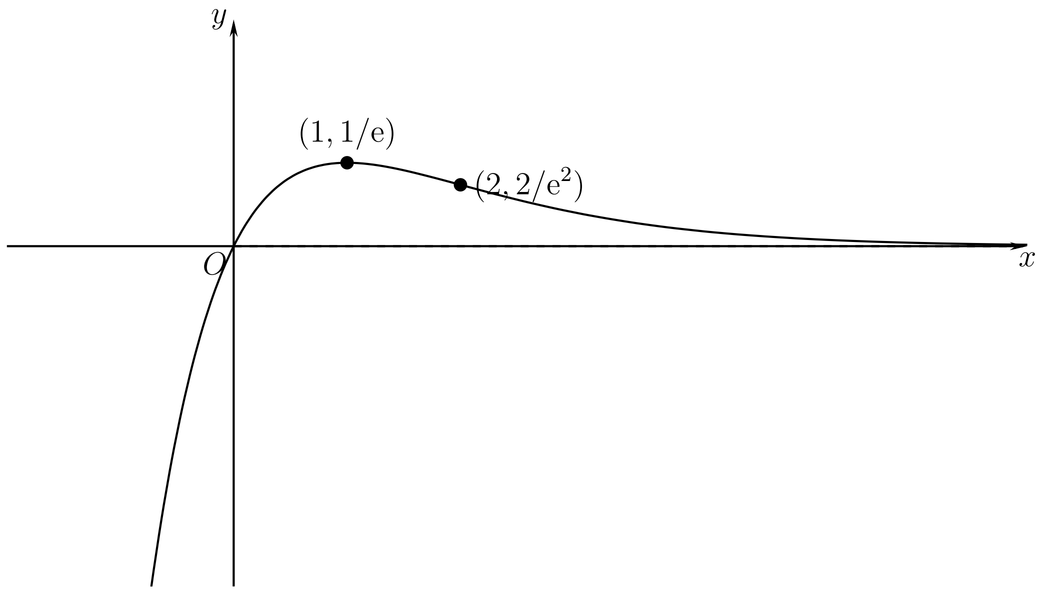
(2)



(3)



(4)



习题 3.5.11 设函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线为 C. 记 C 上一点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $\kappa(\kappa\neq 0)$, 过点 M 引曲线的法线, 在此法线上曲线上凸的一侧取点 D, 使 $|DM|=\dfrac{1}{\kappa}=\rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径作圆, 这个圆称为曲线在点 M 处的曲率圆, 其圆心 D 称为曲线在点 M 处的曲率中心, 半径 ρ 称为曲线在点 M 处的曲率半径.

求下列曲线在指定点的曲率、曲率中心及曲率半径.

(1) $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处; (2) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 在点 $(0,1)$ 处.

解

(1) 设 $y=\dfrac{1}{x}$, 则 $y'=-\dfrac{1}{x^2}, y''=\dfrac{2}{x^3}$. 在点 $(1,1)$ 处, 有

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}=\frac{2}{(1+1)^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{2}.$$

曲线在点 $(1,1)$ 处的法线方程为 $y-1=x-1$, 即 $y=x$. 因此, 曲率中心 D 的坐标为

$$D\,(2,2)\,.$$

(2) 设 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$, 则 $y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2}$, $y''=(4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}$. 在点 $(0,1)$ 处, 有

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+0)^{3/2}} = 2,$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}.$$

曲线在点 $(0,1)$ 处的法线方程为 $y-1=0$, 即 $y=1$. 因此, 曲率中心 D 的坐标为

$$D\left(0, 1-\frac{1}{2}\right) = (0, \frac{1}{2}).$$

习题 3.5.12 求下列曲线在指定点的曲率.

(1) $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$,在 $t=1$ 处;　　(2) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处.

解

(1) 对于参数方程 $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$,参数方程曲线的曲率公式为:

$$\kappa = \frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

计算各阶导数:

$$x'=6t, \quad x''=6$$

$$y'=3-3t^2, \quad y''=-6t$$

在 $t=1$ 处:

$$x'(1)=6, \quad x''(1)=6$$

$$y'(1)=3-3=0, \quad y''(1)=-6$$

因此曲率为:

$$\kappa = \frac{|6\cdot(-6)-0\cdot 6|}{(6^2+0^2)^{3/2}} = \frac{|-36|}{6^3} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

(2) 对于参数方程 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$,计算各阶导数:

$$x' = -\sin t+\sin t+t\cos t = t\cos t$$

$$x'' = \cos t - t\sin t$$

$$y' = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t$$

$$y'' = \sin t + t\cos t$$

在 $t = \dfrac{\pi}{2}$ 处：

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$$

因此曲率为：

$$\kappa = \frac{\left|0\cdot 1 - \frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|}{\left(0^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\left|\frac{\pi^2}{4}\right|}{\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^3}{8}} = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{8}{\pi^3} = \frac{2}{\pi}$$

习题 3.5.13 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点的曲率半径最小? 并求出该点的曲率半径.

解 设 $y = \ln x$, 则 $y' = \dfrac{1}{x}, y'' = -\dfrac{1}{x^2}$. 曲率半径 ρ 的表达式为

$$\rho = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{x}.$$

为了求出曲率半径的最小值, 只需求出函数 $g(x) = \dfrac{(x^2+1)^{3/2}}{x}$ 的最小值. 计算 $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{3x(x^2+1)^{1/2}\cdot x - (x^2+1)^{3/2}}{x^2} = \frac{(x^2+1)^{1/2}(3x^2-(x^2+1))}{x^2} = \frac{(x^2+1)^{1/2}(2x^2-1)}{x^2}.$$

令 $g'(x) = 0$, 可得 $2x^2 - 1 = 0$, 即 $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$ 当 $0 < x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $g'(x) > 0$ 当 $x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 因此, 函数 $g(x)$ 在 $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得最小值. 此时的曲率半径为

$$\rho_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1\right)^{3/2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

习题 3.5.14 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的凸函数且有界, 求证: $f(x)$ 是常数.

解 反证法. 假设 $f(x)$ 不是常数, 则存在 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $f(x) > f(y)$. 由凸函数的定义可知, 对任意 $t \in (0,1)$, 有

$$f(x) \leqslant \lambda f\left(\frac{x-(1-\lambda)y}{\lambda}\right) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

因此
$$\frac{f(x)-(1-\lambda)f(y)}{\lambda} \leqslant f\left(\frac{x-(1-\lambda)y}{\lambda}\right).$$
由于 $f(x)>f(y)$,
$$\frac{f(x)-(1-\lambda)f(y)}{\lambda}=\frac{f(x)-f(y)}{\lambda}+f(y) \to +\infty, \quad \lambda \to 0^+.$$
所以当 $\lambda \to 0^+$ 时,
$$f\left(\frac{x-(1-\lambda)y}{\lambda}\right) \to +\infty,$$
与 $f(x)$ 有界矛盾. 因此,$f(x)$ 是常数.

习题 3.6

习题 3.6.1 写出下列函数的（具有 Peano 余项的）Maclaurin 展开式.

(1) $y=\dfrac{x^3+2x+1}{x-1}$;　　　　(2) $y=\sin^2 x$.

解

(1)

$$\begin{aligned}y=\frac{x^3+2x+1}{x-1}&=-(x^3+2x+1)(1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n))\\&=-1-3x-3x^2-4x^3-4x^4-\cdots-4x^n+o(x^n)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}y=\frac{1-\cos 2x}{2}&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})\right)\\&=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n}).\end{aligned}$$

习题 3.6.2 求出函数 $\mathrm{e}^{\sin x}$ 的（具有 Peano 余项的）三阶 Maclaurin 展开式.

解

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\sin x}&=1+\sin x+\frac{(\sin x)^2}{2!}+\frac{(\sin x)^3}{3!}+o((\sin x)^3)\\&=1+\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+o(x)\right)^3+o(x^3)\\&=1+x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\\&=1+x+\frac{1}{2}x^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3)\\&=1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\end{aligned}$$

习题 3.6.3 求出函数 $\ln(\cos x)$ 的（具有 Peano 余项的）六阶 Maclaurin 展开式.

解

$$
\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln(1+(\cos x-1)) \\
&= (\cos x-1)-\frac{(\cos x-1)^2}{2}+\frac{(\cos x-1)^3}{3}+o((\cos x-1)^3) \\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+o(x^6)\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4)\right)^2+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)^3+o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\right)x^4+\left(-\frac{1}{6!}+\frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!}\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)x^6+o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right)x^4+\left(-\frac{1}{720}+\frac{1}{48}-\frac{1}{24}\right)x^6+o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)
\end{aligned}
$$

习题 3.6.4 已知 $f(x)$ 是一个四次多项式, 并且 $f(2)=-1, f'(2)=0, f''(2)=2, f'''(2)=-12, f^{(4)}(2)=24$. 计算 $f(-1), f'(0), f''(1)$.

解

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 \\
&= -1+(x-2)^2-2(x-2)^3+(x-2)^4
\end{aligned}
$$

因此

$$
f(-1)=143, f'(0)=-60, f''(1)=26.
$$

习题 3.6.5 求下列函数具有 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

(1) $y=\tan x$ 在 $x=0$ 的二阶 Taylor 展开式; (2) $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=-1$ 的 n 阶 Taylor 展开式.

解

(1)

$$
\begin{aligned}
\tan x &= \tan 0+\sec^2 0\cdot x+\frac{2\tan 0\sec^2 0}{2!}x^2+\frac{2(\sec^4\xi+2\tan^2\xi\sec^2\xi)}{3!}x^3 \\
&= x+\frac{\sec^4\xi+2\tan^2\xi\sec^2\xi}{3}x^3,
\end{aligned}
$$

其中, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\xi=\theta x, 0<\theta<1$.

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{-1}+\frac{-1}{(-1)^2}(x+1)+\cdots+\frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1}n!}(x+1)^n+\frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{\xi^{n+2}(n+1)!}(x+1)^{n+1} \\
&= -1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n-\frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}.
\end{aligned}
$$

其中, $x<0, \xi=\theta x-(1-\theta), 0<\theta<1$.

习题 3.6.6 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$.

解

(1)

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4),\quad \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{x^4+o(x^4)}=-\frac{1}{12}.$$

(2)

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2),\quad \sqrt[3]{1-x^2}=1-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-\left(1-\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)}{x^2}=\frac{5}{6}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]&=\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[x-\left(x-\frac{1}{2}+o(1)\right)\right]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}-o(1)\right]=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\cos(\sin x)&=1-\frac{(\sin x)^2}{2}+\frac{(\sin x)^4}{24}+o((\sin x)^4)\\&=1-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{24}\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^4+o(x^4)\\&=1-\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)+\frac{1}{24}\left(x^4+o(x^4)\right)+o(x^4)\\&=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)}{x^4+o(x^4)}=\frac{1}{6}.$$

习题 3.6.7 设函数 $f(x)$ 处处有 $n+1$ 阶导数, 证明: $f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式的充分必要条件是 $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$.

解

(1) 充分性: 若 $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$, 则由 Taylor 公式可知, 考虑在点 $x=0$ 处的 Taylor 展开式, 对任

意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式.

(2) 必要性: 若 $f(x)$ 为次数不超过 n 的多项式, 则可设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

因此, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$f^{(n+1)}(x) = 0.$$

习题 3.6.8 设函数 $f'(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且对任意 $x \in [0,2]$, 有 $|f(x)| \leqslant 1$ 及 $|f''(x)| \leqslant 1$. 证明: $|f'(x)| \leqslant 2, x \in [0,2]$.

解

$$\begin{aligned} f(2) &= f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2, && \eta \in (x,2). \\ f(0) &= f(x) + f'(x)(-x) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2, && \xi \in (0,x). \end{aligned}$$

两式相减

$$f(2) - f(0) = 2f'(x) + \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2 - \frac{f''(\xi)}{2}x^2.$$

因此, 对任意 $x \in [0,2]$, 有

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \frac{1}{2}\left| f(2) - f(0) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 - \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2 \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(|f(2)| + |f(0)| + \frac{|f''(\xi)|}{2}x^2 + \frac{|f''(\eta)|}{2}(2-x)^2 \right) \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(1 + 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(2-x)^2 \right) \\ &= 1 + \frac{1}{4}(x^2 + (2-x)^2) \\ &\leqslant 2 \end{aligned}$$

习题 3.6.9 设 n 为自然数, 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}. \end{cases}$ 证明: $f'(0) = 0$, 但 $f''(0)$ 不存在.

(提示: 证明 $f(x)$ 仅在一点 $x = 0$ 可导.)

注意, 我们显然有

$$f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$$

但当 $n>1$ 时, 并不能断言 $f^{(k)}(0)=0(2\leqslant k\leqslant n)$. 因此, 定理 3.32 中的条件: 函数在点 x_0 处有 n 阶导数, 是至关重要的.

解

$$|f'(0)|=\left|\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}x^n=0.$$

但是, 当 $x\neq 0$ 时, 考虑 $\{x_k\},\{y_k\}$ 均趋于 x, 且 $\forall k\in\mathbb{N}$,$x_k\in\mathbb{Q},y_k\notin\mathbb{Q}$, 则

$$\lim_{k\to\infty}f(x_k)=\lim_{k\to\infty}x_k^{n+1}=x^{n+1},$$
$$\lim_{k\to\infty}f(y_k)=\lim_{k\to\infty}0=0.$$

因此, $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处不连续, 自然 $f'(x)$ 不存在, 故 $f''(0)$ 不存在.

习题 3.6.10 考虑函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 它在 $x\neq 0$ 处显然有任意阶导数. 证明: $f(x)$ 在 $x=0$ 处的任意阶导数都存在, 而且都等于零. (提示: 首先, 易用数学归纳法证明, 当 $x\neq 0$ 时, 对 $n=1,2,\cdots$ 有 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$, 这里 $P_{3n}(t)$ 是 t 的 $3n$ 次多项式; 其次, 由导数定义及 L'Hôspital 法则, 得出 (记 $y=\frac{1}{x}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{\mathrm{e}^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{2y\mathrm{e}^{y^2}}=0,$$

即 $f'(0)=0$. 现在, 说的结论易用数学归纳法及 L'Hôspital 法则证明.)

本题意味着, 对任意的自然数 n, 函数 f 在 $x=0$ 处的 n 阶 Taylor 多项式是 0; 换句话说, 余项总是等于 $f(x)$. 因此, 即使函数在一点附近的性态, 用 (在该点的) 足够高阶的导数也未必能将其揭示出来.

解 设 n 为自然数, 当 $x\neq 0$ 时, 用数学归纳法可证 $f^{(n)}(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$, 这里 $P_{3n}(t)$ 是 t 的 $3n$ 次多项式.

当 $n=1$ 时,

$$f'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}.$$

假设当 $n=k$ 时结论成立, 则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(x)&=\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\&=\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{2}{x^3}P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\end{aligned}$$

显然, $\frac{2}{x^3}P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的 $3(k+1)$ 次多项式. 因此, 结论对任意自然数 n 都成立.

由 L'Hôspital 法则, 可得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{\mathrm{e}^{y^2}}=\lim_{y\to\infty}\frac{1}{2y\mathrm{e}^{y^2}}=0,$$

即 $f'(0)=0$. 假设当 $n=k$ 时, $f^{(k)}(0)=0$, 则当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}f^{(k+1)}(0)&=\lim_{x\to0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\\&=\lim_{y\to\infty}\frac{P_{3k}(y)}{y\mathrm{e}^{y^2}}=0\end{aligned}$$

因此, 结论对任意自然数 n 都成立.

习题 3.6.11 设函数 $f(x)$ 在驻点 x_0 处的 n 阶微商存在, 并且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad 而f^{(n)}(x_0)\neq0.$$

证明:

(1) 若 n 为奇数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值;

(2) 若 n 为偶数, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值. 当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值; 当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 处取极大值.

本题表明, 若函数 $f(x)$ 在驻点上存在如上所述的高阶导数, 则由此可确定驻点是否为极值点. 然而, 我们注意, 上一题中的函数 f 在 $x=0$ 处显然有极小值, 但却不能用这一判别法判别.

解 不妨设 $f^{(n)}(x_0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $f^{(n)}(x)>0$. 由 Taylor 公式, 对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \xi=\theta x+(1-\theta)x_0,\theta\in(0,1)$$

(1) 当 n 为奇数时,

- 若 $x>x_0$, 则 $(x-x_0)^n>0$, 故 $f(x)-f(x_0)>0$;
- 若 $x<x_0$, 则 $(x-x_0)^n<0$, 故 $f(x)-f(x_0)<0$.

因此, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无极值.

(2) 当 n 为偶数时,

- 若 $x>x_0$, 则 $(x-x_0)^n>0$, 故 $f(x)-f(x_0)>0$;
- 若 $x<x_0$, 则 $(x-x_0)^n>0$, 故 $f(x)-f(x_0)>0$.

因此, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取极小值.

对于 $f^{(n)}(x_0)<0$ 的情形, 类似可证.

第 3 章综合习题

习题 3.C.1 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\dots(x+n)$, 求 $f'(0)$.

解

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)\dots(x+n) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!. \end{aligned}$$

习题 3.C.2 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数, 记函数

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0. \end{cases}$$

(1) 确定 a 的值, 使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(2) 对 (1) 中确定的 a, 证明: $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且导函数连续.

解

(1) 由于 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(0)=0\Rightarrow g(0)=a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$.

(2)

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2} = \frac{f''(0)}{2}, \\ g'(x) &= \frac{f'(x)\cdot x - f(x)}{x^2}, \quad x\neq 0. \end{aligned}$$

又

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)\cdot x+f'(x)-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=g'(0).$$

因此, $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

习题 3.C.3 设 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$, 证明: 方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

解 设函数 $f(x)=\dfrac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\dfrac{a_1}{n}x^{n-1}+\cdots+a_nx$. 则

$$f(0)=0, f(1)=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0.$$

由 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$, 即

$$a_0\xi^{n-1}+a_1\xi^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0.$$

习题 3.C.4 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

解 设函数 $g(x)=\mathrm{e}^x f(x)$, 则 $g(a)=g(b)=0$. 由 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$g'(\xi)=\mathrm{e}^{\xi}f'(\xi)+\mathrm{e}^{\xi}f(\xi)=\mathrm{e}^{\xi}(f'(\xi)+f(\xi))=0.$$

因为 $\mathrm{e}^{\xi}\neq 0$, 故 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

习题 3.C.5 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 如果任给 I 中两点 x_1,x_2, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

证明: $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数.

我们将此习题完整表示为以下定理:

定理 设 $f(x)$ 在 I 上有定义, 以下三式等价:

$$\forall x_1,x_2\in I,\forall\lambda_1,\lambda_2\in(0,1),\lambda_1+\lambda_2=1,f\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\right)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)\tag{A}$$

$$\forall x_1,x_2\in I,f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\tag{B}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in I,f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\tag{C}$$

证明

(1) 式 (A) 成立 $\Rightarrow$ 式 (B) 成立, 这是显然的取 $\lambda_1=\lambda_2=\dfrac{1}{2}$ 即得.

(2) 式 (B) 成立 $\Rightarrow$ 式 (C) 成立. 我们使用向前和向后两步归纳法证明此定理.

(a) 由式 (B) 知式 (C) 当 $n=2$ 时成立. 现证 $n=4$ 时式 (C) 成立. 对 $x_1,x_2,x_3,x_4\in I$, 由式 (B), 我们有

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)=f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)&\leqslant\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2}\\&\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}.\end{aligned}$$

此即式 (C) 对 $n=4$ 成立. 一般来说, 对任一自然数 k, 重复上面方法, 应用 (B) 式 k 次, 可知

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2k}}{2^k}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2k})}{2^k}.$$

这说明式 (C) 对一切 $n=2^k$ 皆成立.

(b) 证明式 (C) 对 $n=k+1$ 成立时, 必对 $n=k$ 也成立. 记 $A=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}$, 则 $x_1+x_2+\cdots+x_k=kA$, 所以

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+A}{k+1}.$$

因此式 (C) 对 $n=k+1$ 成立, 故

$$f(A)=f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+A}{k+1}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(A)}{k+1}.$$

简单变换可得

$$f(A) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)}{k}.$$

又由于

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k},$$

我们得到

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)}{k}.$$

此式表示式 (C) 对 $n=k$ 成立.

(3) 式 (C) 成立 $\Rightarrow$ 式 (A) 成立.

(a) 当 $\lambda_1=\dfrac{m}{n}, \lambda_2=\dfrac{n-m}{n}$ 为有理数时,

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2\right) &= f\left(\frac{m}{n} x_1+\frac{n-m}{n} x_2\right) \\
&= f\left(\frac{x_1+\cdots+x_1+x_2+\cdots+x_2}{n}\right) \\
&\leqslant \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_2)}{n} \\
&= \frac{m}{n} f(x_1)+\frac{n-m}{n} f(x_2).
\end{aligned}$$

(b) 当 λ_1, λ_2 为无理数时, 由有理数的稠密性, 存在 $q_n \rightarrow \lambda_1$ 且 $\forall n \in \mathbb{N}, q_n \in \mathbb{Q}$, 显然 $1-q_n \rightarrow \lambda_2$.

由 f 的连续性, 有

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2\right) &= f\left(\lim_{n \rightarrow \infty}\left(q_n x_1+(1-q_n) x_2\right)\right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n x_1+(1-q_n) x_2) \\
&\leqslant \lim_{n \rightarrow \infty}\left(q_n f(x_1)+(1-q_n) f(x_2)\right) \\
&= \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2).
\end{aligned}$$

习题 3.C.6 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的二阶可微函数, $f(0)=f(1)=0$. 证明: 存在 $\xi \in(0,1)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{2 f'(\xi)}{1-\xi}.$$

解 设函数 $g(x)=(1-x) f(x)$, 则 $g(0)=g(1)=0$,$g'(x)=-f(x)+(1-x) f'(x)$.

由 Rolle 定理, 存在 $\eta \in(0,1)$, 使得

$$g'(\eta)=-f(\eta)+(1-\eta) f'(\eta)=0$$

同时 $g'(1)=-f(1)+(1-1) f'(1)=0$. 再次应用 Rolle 定理, 存在 $\xi \in(\eta, 1) \subset(0,1)$, 使得

$$g''(\xi)=-2 f'(\xi)+(1-\xi) f''(\xi)=0.$$

故
$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

习题 3.C.7 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)f'(b)>0$. 证明: 在 (a,b) 内存在一点 ξ, 使得 $f(\xi)=0$.

解 不妨设 $f'(a)>0, f'(b)>0$. 则由
$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$
知存在 $\delta_1>0$, 使得当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时,$f(x)>0$. 同理, 由
$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0,$$
知存在 $\delta_2>0$, 使得当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时,$f(x)<0$. 令 $\delta=\min\left\{\frac{\delta_1}{2},\frac{\delta_2}{2},\frac{b-a}{2}\right\}$, 则 $f(a+\delta)>0, f(b-\delta)<0$. 由零点定理, 存在 $\xi\in(a+\delta,b-\delta)\subset(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

习题 3.C.8 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=1, f(1)=\frac{1}{2}$. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得
$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

解

(1) 若 $f(x)>0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立. 即无零点情形. 设函数 $g(x)=x-\frac{1}{f(x)}$, 则 $g(0)=-1, g(1)=1-2=-1$. 由 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得
$$g'(\xi)=1+\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)}=0.$$
故
$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

(2) 若 $f(x)>0$ 在 $[0,1]$ 上不恒成立, 此时容易推知存在零点.
我们记零点集为 $N:=\{x\in(0,1)\mid f(x)=0\}$, 显然此时 $N\neq\phi$. 针对零点处的导数, 我们做如下分类:
   (a) $\exists\xi\in N$, 使得$f'(\xi)=0$, 这样 $f^2(\xi)+f'(\xi)=0+0=0$ 成立.
   注 $f(x)$ 只有一个零点的情形被此情况完全包含, 这时唯一的零点是极小值点, 由费马原理, 该点导数为 0.
   (b) $\forall x\in N, f'(x)\neq 0$, 此时不止一个零点.
   我们令 $x_1=\inf N, x_2=\sup N$, 由于至少两个零点, 可知 $x_1<x_2$,
   由于 x_1 是下确界, 可以取点列 $y_n\to x_1, y_n\in N; z_n\to x_2, z_n\in N$. 则 $f(y_n)=f(z_n)=0$. 由 f 的连续性, 可知 $f(x_1)=f(x_2)=0$, 即 $x_1,x_2\in N$. 同时由 0,1 处的局部保号性, 可知 $0<x_1<x_2<1$.

再由确界原理, 对 $\forall x < x_1, f(x) > 0; \forall x > x_2, f(x) > 0$, 因此

$$f'(x_1) = f'_-(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - 0}{x - x_1} \leqslant 0$$

$$f'(x_2) = f'_+(x_2) = \lim_{x \to x_2^+} \frac{f(x) - 0}{x - x_2} \geqslant 0$$

由于我们假设了 $\forall x \in N, f'(x) \neq 0$, 所以 $f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0$.

至此, 我们成功证明了

$$f^2(x_1) + f'(x_1) = f'(x_1) < 0,$$

$$f^2(x_2) + f'(x_2) = f'(x_2) > 0.$$

考虑 $h(x) = \mathrm{e}^{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t} f(x)$, 则 $h'(x) = \mathrm{e}^{f(x)}(f^2(x) + f'(x))$. 因此 $h'(x_1) < 0, h'(x_2) > 0$. 由定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (0,1)$, 使得 $h'(\xi) = 0$, 即

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

注 我希望对 $f^2(x) + f'(x)$ 这个函数应用介值性, 尽管该函数 $f^2(x)$ 部分连续,$f'(x)$ 也有介值性, 但介值性是不可加的, 无法直接得到 $f^2(x) + f'(x)$ 的介值性. 所以只好用后面的积分来这么别扭地构造 $h(x)$.

习题 3.C.9 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上二阶可微, 且满足 $f(a) > 0, f'(a) < 0$, 以及当 $x > a$ 时, $f''(x) \leqslant 0$. 试证在区间 $(a, +\infty)$ 内, 函数 $f(x)$ 恰有一个零点.

解 由 $f''(x) \leqslant 0$ 可知 $f'(x)$ 单调递减.

若无零点, 则对 $x \in (a, +\infty), f(x) > 0$ 取 $x_0 > a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$, 则由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (a, x_0)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > \frac{-f(a)}{x_0 - a} > f'(a),$$

这与 $f'(x)$ 单调递减矛盾.

若有两个零点, 记为 $x_1 < x_2$, 则由拉格朗日中值定理知, 存在 $\eta \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 > f'(a),$$

这与 $f'(x)$ 单调递减矛盾.

习题 3.C.10 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f'(x)$ 严格单调增. 若 $f(a) = f(b) = \lambda$, 证明: 对任意 $x \in (a, b)$, 有 $f(x) < \lambda$.

解 由课本定理 3.28 , $f'(x)$ 严格单调增, 故为严格凸函数. 由 Jensen 不等式, 对任意 $x \in (a, b)$, 有

$$f(x) = f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = \lambda.$$

习题 3.C.11 函数 $\dfrac{\sin x^2}{x}(x>0)$ 表明, 若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 不能保证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在. 证明: 若已知该极限存在, 则其值必然为零.

解 由 L'Hôpital 法则, 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ 存在且等于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ 存在, 所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=L\cdot 0=0.$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

习题 3.C.12 设函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 时二阶可微, 且 $f''(x)<0, f(0)=0$. 证明: 对任意正数 x_1,x_2, 有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

解 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_1\in(0,x_1),\xi_2\in(x_1,x_1+x_2)$, 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}.$$

由题设 $f''(x)<0$, 知 $f'(x)$ 严格单调减, 且 $\xi_1<\xi_2$, 故 $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$, 即

$$\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1}>\frac{f(x_1+x_2)-f(x_2)}{x_1}.$$

整理即得.

习题 3.C.13 设函数 $f(x)$ 在 x_0 处存在二阶导数, 求

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}.$$

注 不能连续两次使用 L'Hôpital 法则, 因为缺定理条件: 后一次没有分子的导数 (对应 f 的二阶导数) 在 0 处极限存在性, 即二阶导数连续性未知.

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}\\
=&\lim_{h\to0}\frac{f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)+f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)-2f(x_0)}{h^2}\\
=&\lim_{h\to0}\frac{f''(x_0)h^2+o(h^2)}{h^2}=f''(x_0).
\end{aligned}$$

习题 3.C.14 证明下列不等式.

(1) 对任意实数 x, $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$;

(2) 对 $x>0$, $x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$;

(3) 对 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$;

(4) 对任意实数 x,y, 有 $2\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}\leqslant\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y$.

解

(1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^\xi}{24}x^4 \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}, \xi \in (0, x).$$

(2)

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{(1+\xi)^{-3}}{3}x^3 \geqslant x - \frac{x^2}{2}, \xi \in (0, x),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{(1+\eta)^{-4}}{4}x^4 \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \eta \in (0, x).
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{\cos\xi}{24}x^4 \geqslant x - \frac{x^3}{6}, \xi \in (0, x),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{\sin\eta}{720}x^6 \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \eta \in (0, x).
\end{aligned}$$

(4) 由 e^x 为凸函数, 以及 Jensen 不等式, 知

$$e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \frac{e^x + e^y}{2}.$$

习题 3.C.15 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$.

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}+o\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right)\right)\\
=&\lim_{n\to\infty}\exp\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{2n^4}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+o(1)\right)\\
=&\exp\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}-\frac{2n^2+3n+1}{12n^3}+o(1)\right)\\
=&e^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

另解 由 $\ln(1+x) < x$, 知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right) \leqslant \lim_{n\to\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}}.$$

由 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$, 知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n^2}\right) \geqslant \lim_{n\to\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k}{n^2}}\right) \geqslant \lim_{n\to\infty}\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n}\right) = e^{\frac{1}{2}}.$$

习题 3.C.16 求 $\sqrt[n]{n}(n = 1, 2, \dots)$ 的最大值.

解 设函数 $f(x)=\sqrt[x]{x}=\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}$, 则

$$f'(x)=\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

当 $x=\mathrm{e}$ 时,$f'(x)=0$, 且 $f'(x)>0$ 当 $x\in(0,\mathrm{e})$, $f'(x)<0$. 故

$$\sqrt[n]{n}\leqslant\begin{cases}\sqrt[3]{3}, & n\geqslant 3,\\ \sqrt{2}, & n=1,2.\end{cases}$$

又 $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$, 故 $\sqrt[n]{n}$ 的最大值为 $\sqrt[3]{3}$, 当 $n=3$ 时取到.

习题 3.C.17 试给出函数 $x\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的一个尽可能小的上界.

解 利用 $\cos x$ 在 0 处的 Taylor 展开, 展开到 $4k+1$ 阶.

$$\cos x=\sum_{m=0}^{2k}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m}+R_{4k+1}$$

$R_{4k+1}=-\dfrac{\cos\theta x}{(4k+2)!}x^{4k+2},\theta\in(0,1)$

在 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上,$R_{4k+1}\leqslant 0$, 因此

我们有

$$\begin{aligned}x\cos x&\leqslant\sum_{n=0}^{4k+1}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{m=0}^{2k}\frac{(-1)^m(2m+1)}{(2m+1)!}x^{2m+1}\\&=\sum_{m=0}^{2k}\frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m+1}\end{aligned}$$

利用该多项式的最大值去估计 $x\cos x$ 的上界.

$$0.5610963381910451$$

习题 3.C.18 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(-1,1)$, 使得 $f'''(\xi)=3$.

解 由 Taylor 展开

$$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f''(0)}{2}-\frac{f'''(\xi_2)}{6},\quad \xi_1\in(-1,0).\tag{1}$$

$$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2}+\frac{f'''(\xi_1)}{6},\quad \xi_2\in(0,1),\tag{2}$$

(2)−(1), 整理得 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$, 即 $(f'''(\xi_1)-3)=-(f'''(\xi_2)-3)$,

因此

$$(f'''(\xi_1)-3)(f'''(\xi_2)-3)\leqslant 0$$

由于三阶导数连续, 因此结合零点定理的简单推论可知存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(-1,1)$, 使得

$f'''(\xi)=3$.

习题 3.C.19 设 $a>1$, 函数 $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 可微. 求证: 存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$, 使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),\quad n=1,2,\ldots$$

解 反证法. 假设不存在如此数列.

由于 $\forall M>0,\exists x=x(M)>M$, 使得 $f'(x)<f(ax)$, 取 $x_n=x(n)$ 即构造出所需数列.

故而, 不存在如此数列时, 一定存在 $M>0$, 使得 $\forall x>M, f'(x)\geqslant f(ax)$. 由 Lagrange 中值定理, 对任意 $x>M$, 存在 $\xi_x\in(x,ax)\subset(M,+\infty)$, 使得

$$f'(\xi_x)=\frac{f(ax)-f(x)}{(a-1)x}\leqslant\frac{f(ax)}{(a-1)x}.$$

又因为在 $(M,+\infty)$ 上,$f'(x)\geqslant f(ax)>0$, 因此

$$f'(\xi_x)\geqslant f(a\xi_x)\geqslant f(ax),$$

因而在 $(M,+\infty)$ 上, 我们总有

$$\frac{f(ax)}{(a-1)x}\geqslant f(ax)$$

然而当 $x>\max\left\{M,\dfrac{1}{a-1}\right\}$ 时, 又有

$$\frac{f(ax)}{(a-1)x}<f(ax),$$

矛盾, 故原命题成立.

习题 3.C.20 利用凸函数的性质证明 Hölder (赫尔德) 不等式: 设 $a_i,b_i,i=1,2,\ldots,n$ 是正数, p,q 是大于 1 的正数, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 则有

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(提示: 考虑函数 $f(x)=x^p$.)

解 由题设知 $f(x)=x^p$ 为凸函数, 由 Jensen 不等式, 对任意正数 c_i, 有

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^n c_ix_i}{\sum_{i=1}^n c_i}\right)\leqslant\frac{\sum_{i=1}^n c_if(x_i)}{\sum_{i=1}^n c_i}$$

即

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n c_ix_i}{\sum_{i=1}^n c_i}\right)^p\leqslant\frac{\sum_{i=1}^n c_ix_i^p}{\sum_{i=1}^n c_i}\quad\Rightarrow\quad\sum_{i=1}^n c_ix_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n c_ix_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n c_i\right)^{\frac{1}{q}}$$

因此我们需要令

$$\begin{cases} c_i x_i = a_i b_i, \\ c_i x_i^p = a_i^p, \\ c_i = b_i^q. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_i = a_i b_i^{1-q}, \\ c_i = b_i^q. \end{cases}$$

故代入 $\begin{cases} x_i = a_i b_i^{1-q}, \\ c_i = b_i^q. \end{cases}$ 整理得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

第 4 章 不定积分

习题 4.1

习题 4.1.1 求下列不定积分:

(1) $\int x(x-1)^3 \mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1} \mathrm{d}x$;

(3) $\int (2^x+3^x)^2 \mathrm{d}x$;

(4) $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{x^2}{1+x^2} \mathrm{d}x$;

(6) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} \mathrm{d}x$.

解

(1)

$$\begin{aligned}\int x(x-1)^3 \,\mathrm{d}x &= \int (x-1)^4+(x-1)^3 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(x-1)^5}{5}+\frac{(x-1)^4}{4}+C \\ &= \frac{1}{20}(x-1)^4(4x+1)+C \\ &= \frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+x^3-\frac{1}{2}x^2+C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{e}^{3x}+1}{\mathrm{e}^x+1} \,\mathrm{d}x &= \int \frac{(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1)}{\mathrm{e}^x+1} \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+x+C\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int (2^x+3^x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int 2^{2x}+2\cdot 2^x 3^x+3^{2x} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\ln 2}2^{2x}+\frac{2}{\ln 6}6^x+\frac{1}{2\ln 3}3^{2x}+C\end{aligned}$$

(4)

$$\int \tan^2 x \,\mathrm{d}x = \int (\sec^2 x-1) \,\mathrm{d}x = \tan x - x + C$$

(5)

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x = x-\arctan x+C$$

(6)

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sec^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x}{2}+\frac{1}{2}\tan x + C$$

习题 4.1.2 用第一代换法求下列不定积分:

(1) $\int (2x-1)^{100}\mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(5) $\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$;

(6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(8) $\int \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\mathrm{d}x$;

(9) $\int \sin^2 x\mathrm{d}x$;

(10) $\int \sin^5 x\cos x\mathrm{d}x$.

解

(1)
$$\int (2x-1)^{100}\,\mathrm{d}x = \int (2x-1)^{100}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\,\mathrm{d}x = \int (2x-1)^{100}\cdot\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(2x-1) = \frac{(2x-1)^{101}}{202}+C.$$

(2)
$$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin\frac{1}{x}\cdot(-1)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int \sin\frac{1}{x}\cdot(-1)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x}+C.$$

(3)
$$\int \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{1+\sin x+\cos x} = \ln|1+\sin x+\cos x|+C.$$

(4)
$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\arctan x = \frac{1}{2}\arctan^2 x + C.$$

(5)
$$\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-x^2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(-2x)\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-x^2}\cdot(-\frac{1}{2})\,\mathrm{d}(1-x^2) = \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2}+C.$$

(6)
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x}\cdot 2\cdot\mathrm{d}\sqrt{x} = 2\arctan\sqrt{x}+C.$$

(7)

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \arctan\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})\cdot(-x^2)\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int \arctan\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\arctan^2\frac{1}{x}+C.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\arctan\frac{1}{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\operatorname{arccot} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \operatorname{arccot} x\cdot(-1)\cdot\mathrm{d}(\operatorname{arccot} x)\\ &= -\frac{1}{2}\operatorname{arccot}^2 x + C.\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\cdot\frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1+\ln x}{1+x\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}(x\ln x)\\ &= \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}\,u = \ln|1+x\ln x|+C.\end{aligned}$$

(9)

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x + C. = \frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x\cos x + C.$$

(10)

$$\int \sin^5 x\cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin^5 x\,\mathrm{d}(\sin x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + C.$$

习题 4.1.3 用第二代换法求下列不定积分, 其中的 a 均为正常数:

(1) $\int \sqrt{\mathrm{e}^x-2}\mathrm{d}x$;

(2) $\int \sqrt{x^2+a^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{1}{(x^2-a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$;

(5) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$;

(6) $\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x$;

(8) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x$;

(9) $\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}}\mathrm{d}x$;

(10) $\int \frac{x^{1/7}+x^{1/2}}{x^{8/7}+x^{1/14}}\mathrm{d}x$;

(11) $\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$;

(12) $\int \frac{1}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

解

(1)

$$\int \sqrt{\mathrm{e}^x-2}\mathrm{d}x \overset{x=\ln(t^2+2)}{=} \int \sqrt{t^2}\cdot \frac{2t}{t^2+2}\mathrm{d}t \overset{t\geq 0}{=} \int \frac{2t^2}{t^2+2}\mathrm{d}t = \int \left(2-\frac{4}{t^2+2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2t-2\sqrt{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C \overset{t=\sqrt{\mathrm{e}^x-2}}{=} 2\sqrt{\mathrm{e}^x-2}-2\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x-2}}{\sqrt{2}}+C.$$

(2) 令 $t^2=x^2+a^2$, 则 $t=\sqrt{x^2+a^2}>0$, 对 $t^2=x^2+a^2$ 两侧同时取微分, 有

$$t\,\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}x,$$

因此

$$\begin{aligned}\int t\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (t\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}t)+\frac{1}{2}\int(t\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}t)\\ &= \frac{1}{2}\left(xt+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{t}\right)\end{aligned}$$

其中,

$$\frac{\mathrm{d}x}{t}=\frac{\mathrm{d}t}{x}=\frac{\mathrm{d}(x+t)}{x+t}\Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}x}{t}=\int\frac{\mathrm{d}(x+t)}{x+t}=\ln|x+t|+C.$$

整理一下就是,

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\int t\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(xt+a^2\ln|x+t|+C\right)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

注 当然这道题有更简单的计算方式, 但是我们仿照以上过程可以得到一个快速计算式:

$$\int p\,\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\left(pq+c^2\int\frac{\mathrm{d}q}{p}\right),\quad \int\frac{\mathrm{d}q}{p}=\begin{cases}\ln|p+q|+C, & p^2-q^2=c^2;\\ \arctan\dfrac{q}{p}+C, & p^2+q^2=c^2;\end{cases}$$

(2)

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \overset{x=a\tan t}{=} \int a\sec t\cdot a\sec^2 t\,\mathrm{d}t = a^2\int\sec^3 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}(\sec t\tan t+\ln|\sec t+\tan t|)+C$$

$$\overset{\tan t=\frac{x}{a},\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}}{=} \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C.$$

(2)

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x \overset{x=a\sinh t}{=} \int a\cosh t\cdot a\cosh t\,\mathrm{d}t=a^2\int\cosh^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}(\sinh t\cosh t+t)+C$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsinh}\frac{x}{a}+C=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right|+C.$$

注 $\operatorname{arcsinh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

(3)

$$\int\frac{1}{(x^2-a^2)^{3/2}}\mathrm{d}x \overset{x=a\sec t}{=} \int\frac{a\sec t\tan t}{(a^2\tan^2 t)^{3/2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\csc t\cot t\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{a^2}\csc t+C$$

$$\overset{\csc t=\frac{\sec t}{\sqrt{\sec^2 t-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{=} -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C.$$

(4)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x \overset{x=a\sin t}{=} \int \frac{a^2\sin^2 t}{a\cos t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t = a^2\int \sin^2 t\mathrm{d}t = a^2\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\sin t\cos t\right)+C$$

$$\overset{\sin t=\frac{x}{a},\cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}}{=} \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

(4) 记 $p=\sqrt{a^2-x^2}, q=x$, 则

$$\begin{aligned}\int \frac{q^2}{p}\,\mathrm{d}q &= -\frac{1}{2}\left(\int p\,\mathrm{d}q+q\,\mathrm{d}p\right)+\frac{1}{2}\int\frac{p^2+q^2}{p}\,\mathrm{d}q\\ &= -\frac{1}{2}pq+\frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}q}{p} = -\frac{1}{2}pq+\frac{a^2}{2}\arctan\frac{q}{p}+C.\\ &= -\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+C.\end{aligned}$$

(5)

$$\int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x \overset{t=\sqrt{x+1}}{=} \int\frac{2t}{1+t}\mathrm{d}t = \int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t = 2t-2\ln|1+t|+C$$

$$\overset{t=\sqrt{x+1}}{=} 2\sqrt{x+1}-2\ln|1+\sqrt{x+1}|+C.$$

(6)

$$\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\ln x+\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)$$

(6)

$$\begin{aligned}\int\frac{x\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x &= \int\ln x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\\ &= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\int-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}(\ln x)\\ &= -\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对于 $I_1=\int\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$, 令 $t=1/x$, 则 $\mathrm{d}x=-1/t^2\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}I_1 &= \int\frac{1}{(1/t)\sqrt{1+1/t^2}}\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \int\frac{t}{\sqrt{(t^2+1)/t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= -\int\frac{t^2}{t^2\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t = -\int\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t\\ &= -\ln|t+\sqrt{t^2+1}|+C = -\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}\right|+C\\ &= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C.\end{aligned}$$

所以, 原式 $=-\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|+C.$

(7) 令 $t=\dfrac{\ln x}{x}$, 则 $\mathrm{d}t=\dfrac{(1/x)\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{1-\ln x}{x^2(1-\frac{\ln x}{x})^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{1-t}+C=\frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}}+C=\frac{x}{x-\ln x}+C.\end{aligned}$$

(8) 令 $x=a\tan t$, $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{a\sec^2 t}{(a\tan t)^2\sqrt{a^2\tan^2 t+a^2}}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{a\sec^2 t}{a^2\tan^2 t\cdot a\sec t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{\sec t}{\tan^2 t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a^2}\int\frac{1/\cos t}{\sin^2 t/\cos^2 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a^2}\int\cot t\csc t\mathrm{d}t=-\frac{1}{a^2}\csc t+C\\&\overset{\tan t=x/a}{=}-\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}+C.\end{aligned}$$

(9) 令 $t=\sqrt[3]{2x+1}$, 则 $t^3=2x+1$, $x=\dfrac{t^3-1}{2}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{3t^2}{2}\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int\frac{x+2}{\sqrt[3]{2x+1}}\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{t^3-1}{2}+2}{t}\cdot\frac{3t^2}{2}\mathrm{d}t=\int\frac{t^3+3}{2t}\cdot\frac{3t^2}{2}\mathrm{d}t\\&=\frac{3}{4}\int(t^3+3)t\mathrm{d}t=\frac{3}{4}\int(t^4+3t)\mathrm{d}t\\&=\frac{3}{4}\left(\frac{t^5}{5}+\frac{3t^2}{2}\right)+C=\frac{3}{20}t^5+\frac{9}{8}t^2+C\\&=\frac{3}{20}(2x+1)^{5/3}+\frac{9}{8}(2x+1)^{2/3}+C.\end{aligned}$$

(10) 令 $t=x^{1/14}$, 则 $x=t^{14}$, $\mathrm{d}x=14t^{13}\mathrm{d}t$,$u=t^5=x^{\frac{5}{14}}$.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^{1/7}+x^{1/2}}{x^{8/7}+x^{1/14}}\mathrm{d}x&=\int\frac{t^2+t^7}{t^{16}+t}\cdot 14t^{13}\mathrm{d}t=14\int\frac{t^{14}}{t^{10}-t^5+1}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{14}{5}\int\left(1+\frac{u-\frac{1}{2}}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{14}{5}\left(u+\frac{1}{2}\ln\left|u^2-u+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u-1}{\sqrt{3}}\right)+C\\&=\frac{14}{5}\left(x^{\frac{5}{14}}+\frac{1}{2}\ln\left|x^{\frac{10}{14}}-x^{\frac{5}{14}}+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^{\frac{5}{14}}-1}{\sqrt{3}}\right)+C.\end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned}\int\frac{x-1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x&=\int\frac{x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

对于 $I_1 = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$, 令 $x = \sec t$, $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \mathrm{d}t$.

$$I_1 = \int \frac{\sec t \tan t}{\sec t \tan t}\mathrm{d}t = t + C_1 = \operatorname{arcsec} x + C_1.$$

对于 $I_2 = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$, 令 $x = \sec t$, $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\sec t \tan t}{\sec^2 t \tan t}\mathrm{d}t = \int \cos t \mathrm{d}t = \sin t + C_2 \\ &\overset{\sec t = x}{=} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C_2. \end{aligned}$$

原式 $= I_1 - I_2 = \operatorname{arcsec} x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$.

(12) 令 $t = 1/x$, $x = 1/t$, $\mathrm{d}x = -1/t^2\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^8(1+x^2)}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(1/t)^8(1+1/t^2)}\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \int \frac{t^8}{(t^2+1)/t^2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{t^8}{t^2+1}\mathrm{d}t = -\int \frac{t^8-1+1}{t^2+1}\mathrm{d}t \\ &= -\int \frac{(t^4-1)(t^4+1)}{t^2+1}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t \\ &= -\int (t^2-1)(t^4+1)\mathrm{d}t - \arctan t + C \\ &= -\int (t^6-t^4+t^2-1)\mathrm{d}t - \arctan t + C \\ &= -\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t\right) - \arctan t + C \\ &= -\frac{1}{7x^7} + \frac{1}{5x^5} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} - \arctan(1/x) + C. \end{aligned}$$

习题 4.1.4 求下列不定积分:

(1) $\int |x|\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \max\{1, x^2\}\mathrm{d}x$.

解

(1)

$$\int |x|\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + C, & x \geqslant 0; \\ -\frac{1}{2}x^2 + C, & x < 0. \end{cases}$$

(2)

$$\int \max\{1, x^2\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} x - 1 + C, & |x| \leqslant 1; \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

习题 4.1.5 用分部积分法求下列不定积分:

(1) $\int x \sin x \mathrm{d}x$;　　(2) $\int x^2 \ln x \mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int x^2\cos 5x\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int \sec^3 x\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int x\arcsin x\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int x(\arctan x)^2\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int (\arcsin x)^2\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})\mathrm{d}x$.

解

(1)

$$\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(-\cos x) = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C.$$

(2)

$$\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

(3)

$$\begin{aligned}
I = \int \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x &= x\cos(\ln x) - \int x\,\mathrm{d}(\cos(\ln x)) \\
&= x\cos(\ln x) - \int x\cdot(-\sin(\ln x))\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x \\
&= x\cos(\ln x) + \left(x\sin(\ln x) - \int x\,\mathrm{d}(\sin(\ln x))\right) \\
&= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int x\cdot\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - I
\end{aligned}$$

移项得 $2I = x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)) + C_1$,

$$\Longrightarrow\quad I = \frac{x}{2}(\cos(\ln x)+\sin(\ln x)) + C$$

(4)

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cos 5x \, dx &= \int x^2 \, d\left(\frac{1}{5}\sin 5x\right) \\
&= \frac{1}{5}x^2 \sin 5x - \int \frac{1}{5}\sin 5x \, d(x^2) \\
&= \frac{1}{5}x^2 \sin 5x - \frac{2}{5}\int x \sin 5x \, dx \\
&= \frac{1}{5}x^2 \sin 5x - \frac{2}{5}\int x \, d\left(-\frac{1}{5}\cos 5x\right) \\
&= \frac{1}{5}x^2 \sin 5x - \frac{2}{5}\left[-\frac{1}{5}x\cos 5x + \int \frac{1}{5}\cos 5x \, dx\right] \\
&= \frac{1}{5}x^2 \sin 5x + \frac{2}{25}x\cos 5x - \frac{2}{25}\int \cos 5x \, dx \\
&= \frac{1}{5}x^2 \sin 5x + \frac{2}{25}x\cos 5x - \frac{2}{125}\sin 5x + C
\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}
I &= \int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx = \int \sec x \, d(\tan x) \\
&= \sec x \tan x - \int \tan x \, d(\sec x) \\
&= \sec x \tan x - \int \tan x(\sec x \tan x) \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec x(\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \\
&= \sec x \tan x - I + \ln|\sec x + \tan x|
\end{aligned}$$

移项得 $2I = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + C_1$,

$$\implies I = \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C$$

(6)

$$\begin{aligned}
\int x^2 e^x \, dx &= \int x^2 \, d(e^x) \\
&= x^2 e^x - \int e^x \, d(x^2) = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx \\
&= x^2 e^x - 2\int x \, d(e^x) \\
&= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x \, dx\right) \\
&= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C = (x^2 - 2x + 2)e^x + C
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
\int x\arcsin x\,\mathrm{d}x &= \int \arcsin x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)\\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}(\arcsin x)\\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{-(1-x^2)+1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x\right) - \frac{1}{2}\arcsin x + C\\
&= \frac{2x^2-1}{4}\arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
\int x(\arctan x)^2\,\mathrm{d}x &= \int (\arctan x)^2\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)\\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}((\arctan x)^2)\\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{x^2}{2}\cdot 2\arctan x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \int \arctan x\,\mathrm{d}x + \int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - \left(x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right) + \int \arctan x\,\mathrm{d}(\arctan x)\\
&= \frac{x^2}{2}(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C\\
&= \frac{x^2+1}{2}(\arctan x)^2 - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
\int (\arcsin x)^2 \,\mathrm{d}x &= x(\arcsin x)^2 - \int x \,\mathrm{d}((\arcsin x)^2) \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int x \cdot 2\arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int \arcsin x \left(\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \mathrm{d}x \\
&= x(\arcsin x)^2 - \int \arcsin x \,\mathrm{d}(-2\sqrt{1-x^2}) \\
&= x(\arcsin x)^2 - \left[-2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int -2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(\arcsin x)\right] \\
&= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int 2\sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x \\
&= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C
\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}
\int \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \,\mathrm{d}x &= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int x \,\mathrm{d}(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) \\
&= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \,\mathrm{d}x \\
&= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \int (x^2+1)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2} \,\mathrm{d}(x^2+1) \\
&= x\ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \sqrt{x^2+1} + C
\end{aligned}$$

习题 4.1.6 导出下列不定积分的递推公式:

(1) $\displaystyle\int \sin^n x \mathrm{d}x \quad (n=1,2,\dots)$; (2) $\displaystyle\int x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \quad (n=1,2,\dots)$.

解

(1) 记 $I_n = \displaystyle\int \sin^n x \,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
I_n = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x &= \int \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}(-\cos x) \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x \,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) \,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - (n-1)\int \sin^n x \,\mathrm{d}x \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

移项得 $nI_n = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} + C$,

$$\Longrightarrow \quad I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2} + C.$$

(2) 记 $J_n = \int x^n \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned} J_n &= \int x^n \,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = x^n\mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}(x^n) \\ &= x^n\mathrm{e}^x - n\int x^{n-1}\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = x^n\mathrm{e}^x - nJ_{n-1} \end{aligned}$$

习题 4.1.7 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+x^6}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int x\sqrt{x-2}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}}{x}\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\tan x)\sin^2 x}\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int \frac{x\arctan x}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int \frac{x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$;

(13) $\displaystyle\int \arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}x$;

(14) $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;

(15) $\displaystyle\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$;

(16) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$;

(17) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$;

(18) $\displaystyle\int \frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$;

(19) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}(1+\tan x)^2\mathrm{d}x$;

(20) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$;

(21) $\displaystyle\int \frac{\cos x\cos 2x}{\cos 3x}\mathrm{d}x$;

(22) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$;

(23) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\mathrm{d}x$;

(24) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$;

(25) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x$;

(26) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$.

解

(1) 令 $u=\mathrm{e}^x$, 则 $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{1+u}\cdot\frac{1}{u}\mathrm{d}u = \int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \ln|u| - \ln|u+1| + C \\ &= \ln(\mathrm{e}^x) - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C = x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x\\ &= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{(x+\frac{1}{x})^2-1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $u=x+\dfrac{1}{x}$, 则 $\mathrm{d}u=(1-\dfrac{1}{x^2})\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2-1}\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

(3) 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则 $x=\dfrac{1}{t}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4(1+x^2)}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(\frac{1}{t})^4(1+\frac{1}{t^2})}\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\\ &= \int \frac{t^4}{\frac{t^2+1}{t^2}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=-\int \frac{t^4}{t^2+1}\mathrm{d}t\\ &= -\int \frac{(t^4-1)+1}{t^2+1}\mathrm{d}t=-\int \left(t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\\ &= -\left(\frac{t^3}{3}-t+\arctan t\right)+C\\ &= -\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)+C.\end{aligned}$$

(4) 令 $t=\sqrt{x-2}$, 则 $t^2=x-2$, $x=t^2+2$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-2}\mathrm{d}x &= \int (t^2+2)\cdot t\cdot(2t\mathrm{d}t)=2\int (t^4+2t^2)\mathrm{d}t\\ &= 2\left(\frac{t^5}{5}+\frac{2t^3}{3}\right)+C=\frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

(5) 令 $t=\sqrt{x-1}$, 则 $t^2=x-1$, $x=t^2+1$, $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{t\arctan t}{t^2+1}(2t\mathrm{d}t)=2\int \frac{t^2}{t^2+1}\arctan t\mathrm{d}t\\ &= 2\int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}\arctan t\mathrm{d}t\\ &= 2\int \arctan t\mathrm{d}t-2\int \frac{\arctan t}{1+t^2}\mathrm{d}t\\ &= 2t\arctan t-\ln(1+t^2)-(\arctan t)^2+C\\ &= 2\sqrt{x-1}\arctan\sqrt{x-1}-\ln x-(\arctan\sqrt{x-1})^2+C.\end{aligned}$$

(6) 令 $u=\mathrm{e}^x-2$, 则 $u+2=\mathrm{e}^x$, 于是 $x=\ln(u+2)$. 同时, $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{\ln(u+2)}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u\\&=\int\ln(u+2)\cdot u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

接下来使用分部积分法：

$$\begin{aligned}\int\ln(u+2)u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u&=2\sqrt{u}\ln(u+2)-\int\frac{1}{u+2}\cdot2\sqrt{u}\mathrm{d}u\\&=2\sqrt{u}\ln(u+2)-2\int\frac{\sqrt{u}}{u+2}\mathrm{d}u\end{aligned}$$

对于 $I_2=\displaystyle\int\frac{\sqrt{u}}{u+2}\mathrm{d}u$, 令 $t=\sqrt{u}$, 则 $u=t^2$, $\mathrm{d}u=2t\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}I_2&=\int\frac{t}{t^2+2}\cdot(2t\mathrm{d}t)=\int\frac{2t^2}{t^2+2}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{2(t^2+2)-4}{t^2+2}\mathrm{d}t\\&=\int\left(2-\frac{4}{t^2+2}\right)\mathrm{d}t\\&=2t-4\int\frac{1}{t^2+(\sqrt{2})^2}\mathrm{d}t\\&=2t-4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C_1\\&=2\sqrt{u}-2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}}\right)+C_1\end{aligned}$$

将 I_2 代回原式：

$$\begin{aligned}I&=2\sqrt{u}\ln(u+2)-2\left[2\sqrt{u}-2\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}}\right)\right]+C\\&=2\sqrt{u}\ln(u+2)-4\sqrt{u}+4\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}}\right)+C\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}I&=2\sqrt{\mathrm{e}^x-2}\ln(\mathrm{e}^x-2+2)-4\sqrt{\mathrm{e}^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{\mathrm{e}^x-2}}{\sqrt{2}}\right)+C\\&=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-2}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-2}+4\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{\mathrm{e}^x-2}{2}}\right)+C.\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
I &= \int (x\sin x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) \\
&= x\mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x(x\cos x + \sin x)\mathrm{d}x \\
&= x\mathrm{e}^x \sin x - \int x\mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x - \int \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x \\
&= x\mathrm{e}^x \sin x - \int (x\cos x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) - \int \sin x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) \\
&= x\mathrm{e}^x \sin x - \left[x\mathrm{e}^x \cos x - \int \mathrm{e}^x(\cos x - x\sin x)\mathrm{d}x\right] - \left[\mathrm{e}^x \sin x - \int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x\right] \\
&= (x-1)\mathrm{e}^x \sin x - x\mathrm{e}^x \cos x + 2\int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x - \int x\mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x \\
&= (x-1)\mathrm{e}^x \sin x - x\mathrm{e}^x \cos x + 2\int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x - I
\end{aligned}$$

已知 $\int \mathrm{e}^x \cos x\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{2}(\sin x + \cos x) + C'$.

$$\begin{aligned}
2I &= (x-1)\mathrm{e}^x \sin x - x\mathrm{e}^x \cos x + \mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C_1 \\
2I &= \mathrm{e}^x(x\sin x - x\cos x + \cos x) + C_1 \\
I &= \frac{\mathrm{e}^x}{2}(x(\sin x - \cos x) + \cos x) + C.
\end{aligned}$$

(8) 令 $u = 1 + \cot x$, 则 $\mathrm{d}u = -\csc^2 x\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\csc^2 x}{1+\tan x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\csc^2 x}{1+\frac{1}{\cot x}}\mathrm{d}x = \int \frac{\cot x\csc^2 x}{\cot x + 1}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{u-1}{u}(-\mathrm{d}u) = \int \left(-1 + \frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u \\
&= -u + \ln|u| + C = -(1+\cot x) + \ln|1+\cot x| + C.
\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{x})}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x + \int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

其中

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}}\mathrm{d}x = \int \sqrt{x}\,\mathrm{d}(-\sqrt{1-x}) = -\sqrt{x}\sqrt{1-x} + 2\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}-1}\right) + C_1,$$

因此

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x} + 2\arctan\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}-1}\right) + C.$$

或者

$$\int \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x = -(2+\sqrt{x})\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x} + C.$$

(10) 令 $x = \sec t$,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{\frac{\sec t - 1}{\sec t + 1}} \cdot \cos^2 t \cdot \sec t \tan t \mathrm{d}t = \int 1 - \cos t \mathrm{d}t \\ &= t - \sin t + C = \operatorname{arcsec} x - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C \\ &= \arctan\sqrt{x^2-1} - \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.\end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned} I &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} - \int -\frac{1}{4(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$. 令 $x = \tan t$, $\mathrm{d}x = \sec^2 t\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{(\sec^2 t)^3}\sec^2 t\mathrm{d}t = \int \cos^4 t\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2t + \cos^2 2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}t + \sin 2t + \frac{1}{8}\sin 4t\right) + C_1 \\ &= \frac{3}{8}\arctan x + \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \frac{1}{32}\left(\frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\right) + C_1 \\ I &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{1}{4}\left[\frac{3}{8}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{x(1-x^2)}{8(1+x^2)^2}\right] + C \\ &= -\frac{\arctan x}{4(1+x^2)^2} + \frac{x(3x^2+5)}{32(1+x^2)^2} + \frac{3}{32}\arctan x + C \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x(1-\sin x)}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{x - x\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\ &= \int x\sec^2 x\mathrm{d}x - \int x\sec x\tan x\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$I_1 = \int x\mathrm{d}(\tan x) = x\tan x - \int \tan x\mathrm{d}x = x\tan x - \ln|\sec x| + C_1$. $I_2 = \int x\mathrm{d}(\sec x) =$

$$x\sec x - \int \sec x \mathrm{d}x = x\sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C_2.$$

$$\begin{aligned}
I = I_1 - I_2 &= (x\tan x - \ln|\sec x|) - (x\sec x - \ln|\sec x + \tan x|) + C \\
&= x(\tan x - \sec x) + \ln\left|\frac{\sec x + \tan x}{\sec x}\right| + C \\
&= x\left(\frac{\sin x - 1}{\cos x}\right) + \ln|1 + \sin x| + C.
\end{aligned}$$

(13) 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \arcsin t \cdot (2t\mathrm{d}t) = 2\int t\arcsin t\mathrm{d}t \\
&= 2\left[\frac{t^2}{2}\arcsin t - \int \frac{t^2}{2\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t\right] \\
&= t^2\arcsin t - \int \frac{-(1-t^2)+1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= t^2\arcsin t + \int \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t - \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= t^2\arcsin t + \left(\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t\right) - \arcsin t + C \\
&= \left(t^2 - \frac{1}{2}\right)\arcsin t + \frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + C \\
&= \frac{2x-1}{2}\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)} + C.
\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x}{1+\cos x}\mathrm{d}x + \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x \\
I_1 &= \int \frac{x}{2\cos^2(\frac{x}{2})}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x\sec^2(\frac{x}{2})\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[x(2\tan(\frac{x}{2})) - \int 2\tan(\frac{x}{2})\mathrm{d}x\right] \\
&= x\tan(\frac{x}{2}) - \int \tan(\frac{x}{2})\mathrm{d}x = x\tan(\frac{x}{2}) - 2\ln|\sec(\frac{x}{2})| + C_1.
\end{aligned}$$

$I_2 = \int \frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$. 令 $u = 1 + \cos x$, $\mathrm{d}u = -\sin x\mathrm{d}x$.

$$I_2 = \int \frac{1}{u}(-\mathrm{d}u) = -\ln|u| + C_2 = -\ln(1+\cos x) + C_2.$$

$$\begin{aligned}
I = I_1 + I_2 &= x\tan(\frac{x}{2}) - 2\ln|\sec(\frac{x}{2})| - \ln(2\cos^2(\frac{x}{2})) + C_3 \\
&= x\tan(\frac{x}{2}) - 2\ln|\sec(\frac{x}{2})| - \ln 2 - 2\ln|\cos(\frac{x}{2})| + C_3 = x\tan(\frac{x}{2}) + C.
\end{aligned}$$

(15)

$$I=\int x\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int x\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$I_1=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{4}.$$

$$\begin{aligned}I_2&=\frac{1}{2}\int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\frac{1}{4}\left[x\sin 2x-\int \sin 2x\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{4}x\sin 2x-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C'=\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C'.\end{aligned}$$

$I=I_1-I_2=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{4}x\sin 2x-\dfrac{1}{8}\cos 2x+C.$

(16) 令 $u=1+x^2$, 则 $x^2=u-1$, $\mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2\cdot x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{u-1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\int(u^{\frac{1}{2}}-u^{-\frac{1}{2}})\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]+C\\&=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+C.\end{aligned}$$

(17)

$$\begin{aligned}I&=\arctan x\left(-\frac{1}{x}-\arctan x\right)-\int\left(-\frac{1}{x}-\arctan x\right)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{\arctan x}{x}-(\arctan x)^2+\int\frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x+\int\frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$I_1=\displaystyle\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C_1$. $I_2=\displaystyle\int\arctan x\mathrm{d}(\arctan x)=\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C_2$.

$$\begin{aligned}I&=-\frac{\arctan x}{x}-(\arctan x)^2+\left(\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)+\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C\\&=-\frac{\arctan x}{x}-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.\end{aligned}$$

(18) 令 $u=\mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\arctan u}{u^2}\,\mathrm{d}u=\int\arctan u\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{u}\right)\\&=-\frac{\arctan u}{u}+\int\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\&=-\frac{\arctan u}{u}+\ln\left|\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\right|+C\\&=-\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}+\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\right|+C.\end{aligned}$$

(19)

$$
\begin{aligned}
I &= \int \mathrm{e}^{2x}(1+2\tan x+\tan^2 x)\mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{e}^{2x}(\sec^2 x+2\tan x)\mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{e}^{2x}\sec^2 x\mathrm{d}x + \int 2\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x \\
&= \int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(\tan x) + \int 2\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x \\
&= \left[\mathrm{e}^{2x}\tan x - \int \tan x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x})\right] + \int 2\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{2x}\tan x - \int \tan x\cdot(2\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}x + \int 2\mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e}^{2x}\tan x + C.
\end{aligned}
$$

(20)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right) \\
&= -\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)} - \int \left(-\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{\cos x}\right) \\
&= -\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)} + \int \frac{1}{x\sin x+\cos x}\left(\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)} + \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)} + \tan x + C \\
&= \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x+\cos x} + C.
\end{aligned}
$$

(21)

$$
\begin{aligned}
\int \cos x\cos 2x\cos 3x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \cos^2 2x + \cos 2x\cos 4x\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int 1+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin 6x + C.
\end{aligned}
$$

(22)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x-1})^2}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]+C \\
&= \frac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}+C.
\end{aligned}$$

(23)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{t+1}}\cdot 2t\mathrm{d}t \quad (t=\sqrt{x}, \mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x) \\
&= \frac{4}{3}(t-2)\sqrt{t+1}+C \\
&= \frac{4}{3}(\sqrt{x}-2)\sqrt{\sqrt{x}+1}+C.
\end{aligned}$$

(24)

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}}\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}(-2)\sqrt{1-x^{\frac{3}{2}}}+C = -\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C.$$

(25)

$$\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\frac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x-2x\sin x}{(-x)\cdot 2\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}) \\
&= -\int \frac{\cos x}{2x\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}) + \left(\frac{2x\sin x}{2x\sqrt{\sin x}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} - \int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{\sin x}}\right)\right) \\
&= -\int \frac{\cos x}{2x\sqrt{\sin x}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}) + \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{\sin x} - \int \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}(\sqrt{\sin x}) \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{\sin x}
\end{aligned}$$

(26)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x &= -\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x} - \int\left(-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{e}^x(1+x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x} + \int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = -\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x}+\mathrm{e}^x+C \\
&= \mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{1+x}\right)+C = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}+C.
\end{aligned}$$

习题 4.2

我没招了, 这一节实在不想写过程了, 算法在教材上都有, 算就是了.

习题 4.2.1 求下列有理函数的不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x}\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+x)}\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\mathrm{d}x$

(8) $\displaystyle\int \frac{x^{15}}{(x^8+1)^2}\mathrm{d}x$

解

(1)

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.$$

(2)

$$\frac{x^3}{3}-x+\arctan x+C.$$

(3)

$$x+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C.$$

(4)

$$\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

(5)

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(6)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)-\arctan\left(1-\sqrt{2}x\right)\right)+C.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-x^{-1}}{\sqrt{2}}+C.$$

(7)

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}x^2+1}{x^4+\sqrt{2}x^2+1}\right|+C.$$

(8)

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x^8+1}+\ln\left|x^8+1\right|\right)+C.$$

习题 4.2.2 求下列三角函数有理式的不定积分, 其中 a, b 是常数:

(1) $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$ (4) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$ (6) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ (8) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}\mathrm{d}x$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x+\sin 2x}\mathrm{d}x$ (10) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x, a^2+b^2\neq 0.$

解

(1)

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{x}{2}}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

(2)

$$-\ln|\cos x|-\frac{1}{4}\sin^4 x+\frac{1}{2}\sin^2 x+C.$$

(3)

$$\tan x-2\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+C.$$

(4)

$$\frac{1}{8}(-\sin 2x+2\cos 2x)+2\ln|\sin x+\cos x|+C.$$

(5)

$$\frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x)+C.$$

(6)

$$x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)$$

(7)

$$\frac{1}{2}\left(\sin x-\cos x+\operatorname{arctanh}\left(\frac{\tan\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}}\right)\right)+C.$$

$$\frac{\tan\frac{x}{2}-1}{\tan^2\frac{x}{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}{\tan\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}\right|+C.$$

(8)

$$\frac{-3\cos 2x+\cos 6x}{6\cos^3 x\sin^3 x}+C.$$

(9)

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos x+1}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)+C.$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos x+1}+\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|\right)+C.$$

(10)

$$\frac{a\ln|a\sin x+b\cos x|+bx}{a^2+b^2}+C.$$

第 5 章 单变量函数的积分

习题 5.1

习题 5.1.1 指出下面的哪些函数在区间 $[0,1]$ 上可积, 并说明理由.

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$ (2) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{x}\right], & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 故可积.

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有界, 且只有一点间断, 故可积.

(3) 函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上无界, 故不可积.

习题 5.1.2 证明: Dirichlet 函数在任意区间 $[a,b]$ 上不可积. (因此有界的函数未必可积.)

解 设 $f(x)$ 是 Dirichlet 函数, 即

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

取区间 $[a,b]$ 上的任意一个分点集 $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$, 则对每一个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 由于 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 上稠密, 故在该子区间内既有有理数也有无理数.

- 当 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 为有理数时, $f(\xi_i)=1$;
$$S_n(T)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\cdot\Delta x_i=b-a;$$
- 当 $\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$ 为无理数时, $f(\eta_i)=0$;
$$S_n(T)=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\cdot\Delta x_i=0.$$

因此, 不同的取样点所对应的 Riemann 和可以取到不同的值, 即不存在 I, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(T)=I$.

习题 5.1.3 举例说明, 一个函数的绝对值函数在 $[a,b]$ 上可积, 不能保证该函数在 $[a,b]$ 上可积. (提示: 适当的地修改 Dirichlet 函数可得出这样的例子. 比较习题 2.1 中第 5 题.)

解 设函数 $f(x)$ 如下定义:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

则 $|f(x)| = 1$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 故 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上可积. 但

$$S_n(T) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \begin{cases} b-a, & \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \cap \mathbb{Q} \\ -(b-a), & \xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

即证明了 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不可积.

习题 5.1.4

(1) 设可积函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负, 且在一点 c 处连续 (这里 $a \leqslant c \leqslant b$), 若 $f(c) > 0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$;

(2) 证明: 若 f 是区间 $[a,b]$ 上非负的连续函数, 且不恒为零, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$;

(3) 举例说明, 有这样的可积函数 f, 在区间 $[a,b]$ 上非负且不恒为零, 但 f 在该区间上的积分为 0.

解

(1) 由 $f(c) > 0$ 和 $f(x)$ 在 c 处连续, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x-c| < \delta$ 时, 有 $f(x) > \dfrac{f(c)}{2} > 0$. 取区间 $[c-\delta, c+\delta] \cap [a,b]$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\mathrm{d}x = f(c)\delta > 0.$$

(2) 由 f 在 $[a,b]$ 上不恒为零, 存在 $c \in [a,b]$, 使得 $f(c) > 0$. 由 (1) 可知 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

(3) 函数 $f(x)$ 定义如下:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a \leqslant x \leqslant \dfrac{a+b}{2} \\ -1 & \dfrac{a+b}{2} < x \leqslant b \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负且不恒为零, 但

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} 1\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{a+b}{2}}^b (-1)\,\mathrm{d}x = 0.$$

习题 5.1.5 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增, 证明:

$$(b-a)f(a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f(b).$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 应该有什么样的不等式?

解

$$f\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(b)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(b).$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(a).$$

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递减, 则

$$(b-a)f(b) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)f(a).$$

习题 5.1.6 证明下列不等式:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |a\sin x + b\cos x|\mathrm{d}x \leqslant 2\pi\sqrt{a^2+b^2}$ (a,b 为常数);

(2) $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x \leqslant \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ ($m>0, n>0$ 均为常数).

解

(1)

$$\int_0^{2\pi} |a\sin x+b\cos x|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{2\pi} \sqrt{(a^2+b^2)(\sin^2 x+\cos^2 x)}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}x = 2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

(2) 对 $f(x) = x^m(1-x)^n$ 求导:

$$f'(x) = mx^{m-1}(1-x)^n - nx^m(1-x)^{n-1} = x^{m-1}(1-x)^{n-1}[m(1-x)-nx].$$

令 $f'(x)=0$, 得到 $m(1-x)=nx$, 即 $x = \dfrac{m}{m+n}$.

在这点处, $f\left(\dfrac{m}{m+n}\right) = \left(\dfrac{m}{m+n}\right)^m \left(\dfrac{n}{m+n}\right)^n = \dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$.

由于 $f(0)=f(1)=0$, 且 $f(x)\geqslant 0$ 在 $[0,1]$ 上, 所以 $\dfrac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}$ 是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值.

因此

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}\mathrm{d}x = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

习题 5.1.7

(1) 证明: 积分中值定理中的 ξ 值, 可取在区间 $[a,b]$ 内部;

(提示: 由该定理的证明可见, 只要指出当 f 的最大值 M 或最小值 m 在区间端点取得, 且等于 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 时, 结论成立.)

(2) 举例说明, 积分中值定理中连续性的条件是必需的.

(提示: 在 $[-1,1]$ 上, $f(x)=x$ 的积分为 0; 而改变 $f(x)$ 在某个点处的值, 不改变积分值.)

解

(1) 反证法: 若积分中值定理仅在边界, 不妨设为点 a 处取到, 则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(a) \neq f(x), \forall x \in (a,b)$.

不妨假设 $f(x) > f(a) \Rightarrow f(x)-f(a) > 0$, 则由习题 5.1.4 可得

$$\int_a^b (f(x)-f(a))\,\mathrm{d}x > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b f(a)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(a),$$

矛盾.

(2) 函数 $f(x)$ 定义如下:

$$f(x)=\begin{cases}1 & a\leqslant x\leqslant \dfrac{a+b}{2}\\ -1 & \dfrac{a+b}{2}<x\leqslant b\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上非负且不恒为零, 但

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}} 1\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b(-1)\,\mathrm{d}x=0.$$

习题 5.1.8 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数. 证明: 若 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 中至少有一个零点. (因此, 由函数的积分这一整体信息, 能够推断函数值的某些性质.)

解 反证法: 若 $f(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上恒为正或恒为负. 不妨设 $f(x)>0,\forall x\in(a,b)$.

由习题 5.1.4 可得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0,$$

这与题设 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

习题 5.1.9

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 而 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且非负 (或非正) 的, 证明:

存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

(提示: 与积分中值定理类似地证明.)

注 (1) 中的结果也称为积分中值定理的加权推广. 这种加权的积分中值定理也提供了估计积分的一个手段: 当 $\displaystyle\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$ 不易计算时, 可试着将 $\varphi(x)$ 写成 $f(x)g(x)$, 其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足上面 (1) 中的条件, 且使得 $\displaystyle\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 易于计算. 由此导出

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

这里 M,m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值及最小值. 易见, $\displaystyle\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x$ 这一上、下界估计, 优于直接用定理 5.11 所得的结果.

(2) 举例说明, (1) 中对于函数 $g(x)$ 的假设是必需的. (提示: 在 $[-1,1]$ 上, 取 $f(x)=g(x)=x$.)

解

(1) 在证明积分中值定理前我们先证明一个引理:

引理 5.1 设 $f \in R[a,b]$, 且 $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx > 0$, 则有子区间 $[c,d] \subset [a,b]$ 和 $\mu > 0$, 使在区间 $[c,d]$ 上成立 $f(x) \geqslant \mu$.

证明 证 1

从积分定义可知, 存在 $[a,b]$ 的一个分划 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 使得对从属于 P 的任何介点集 ξ, 成立

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > \frac{I}{2} > 0.$$

记 $m_i = \inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x), i = 1, 2, \cdots, n$, 并对于上面的和式取下确界, 就得到

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \geqslant \frac{I}{2} > 0.$$

显然在和式中至少有一项大于 0. 设这一项是第 k 项, 则就可取 $\mu = m_k, [c,d] = [x_{k-1}, x_k]$.

证明 证 2

用反证法. 若结论不成立, 则(由对偶法则)对于每个 $\mu > 0$ 和每个子区间 $[c,d]$, 存在 $\xi \in [c,d]$, 满足 $f(\xi) < \mu$. 在 f 的 Riemann 和式中对于任何分划都取满足这个要求的介点集, 这样就得到

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \mu(b-a).$$

由于 $\mu > 0$ 是任意的, 因此只能得到

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0,$$

与条件矛盾.

这里加强, 证明 $\xi \in (a,b)$.

证明 下列三种情况是平凡的, 不需要多加讨论:

(a) 如果积分 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 0$, 则积分第一中值定理可以通过不等式左边也等于 0, 于是 ξ 可取, 结论已成立.

(b) 如果 f 在 $[a,b]$ 的最小值和最大值相等, 即 $m = M$, 则 f 为常值函数, 因此 ξ 也可取.

(c) 如果 $m < M$, 且 $\eta \in (m,M)$ 时, 连续函数的介值性可知存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $f(\xi) = \eta$.

要讨论的只是以上三种情况之外的问题. 不妨设 g 在区间 $[a,b]$ 上非负, 且有 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$. 又由于 $f(x) - m$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上均非负, 因此得到

$$0 = \int_a^b (f(x)-m)g(x)dx \geqslant \int_c^d (f(x)-m)dx > 0,$$

可以上式右边的积分仍等于 0. 由于 $f \in C[c,d]$, 这只能导致在区间 $[c,d]$ 上成立 $f(x) \equiv$

m.

因此在 $c, d \in (a,b)$ 中任取一点作为中值点即可.

(2) 设 $f(x) = x, g(x) = x$, 则

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

但对于任意 $\xi \in [-1,1]$, 有

$$f(\xi)\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = \xi\int_{-1}^{1} x\mathrm{d}x = 0.$$

因此不存在 $\xi \in [-1,1]$, 使得

$$\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x.$$

习题 5.1.10 举例说明: 在定理 5.13 中, 函数 $f(x)$ 在 $x = c$ 处连续, 不是 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x = c$ 处可导的必要条件.

解 设函数 $f(x)$ 如下定义:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 但

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

故 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 且 $F'(0) = 0$.

习题 5.1.11 求下列函数的导数.

(1) $f(x) = \displaystyle\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t$;

(2) $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2+\cos^2 t}\mathrm{d}t$;

(3) $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$;

(4) $f(x) = \sin\left(\displaystyle\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin t^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right)$.

解

(1)

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin t^2\mathrm{d}t = \sin x^2.$$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2+\cos^2 t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)}\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2+\cos^2 t}\mathrm{d}t \cdot \frac{\mathrm{d}\frac{1}{x}}{\mathrm{d}x} \\ &= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\cos^2\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1+x^2\cos^2\frac{1}{x}}. \end{aligned}$$

(3)

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\cdot\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x}$$
$$=\mathrm{e}^{-(x^2)^2}\cdot 2x=2x\mathrm{e}^{-x^4}.$$

(4)

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\left(\int_0^x\sin\left(\int_0^y\sin t^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right)\\&=\cos\left(\int_0^x\sin\left(\int_0^y\sin t^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x\sin\left(\int_0^y\sin t^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right)\\&=\cos\left(\int_0^x\sin\left(\int_0^y\sin t^2\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right)\cdot\sin\left(\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

习题 5.1.12 对下面的函数, 求 $(f^{-1})'(0)$, 这里 f^{-1} 表示函数 f 的反函数.

(1) $f(x)=\int_0^x(1+\sin(\sin t))\mathrm{d}t$; (2) $f(x)=\int_1^x\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

解

(1) 设 $y=f(x)$,

$$\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x=(1+\sin(\sin x))\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$(f^{-1})'(0)=\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=\left.\frac{1}{1+\sin(\sin x)}\right|_{x=0}=1.$$

(2) 设 $y=f(x)$,

$$\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$(f^{-1})'(0)=\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}=\left.\mathrm{e}^{x^2}\right|_{x=1}=\mathrm{e}.$$

习题 5.1.13 设函数 $f(x)$ 处处连续. $F(x)=\int_0^x xf(t)\mathrm{d}t$, 求 $F'(x)$.

解

$$F'(x)=\left(x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x\cdot\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x).$$

习题 5.1.14 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为正值连续函数. 证明: 当 $x>0$ 时, 函数

$$G(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

单调递增.

解

$$G'(x)=\frac{\left(\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)'\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}.$$

$$\begin{aligned}G'(x)&=\frac{\left(\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)'\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\\&=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\\&=\frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\int_0^x (x-t)\,f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0.\end{aligned}$$

习题 5.1.15 用 Newton-Leibniz 公式计算下列积分.

(1) $\displaystyle\int_0^x \sin x\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^x x^\alpha\mathrm{d}x$, α 为常数, $\alpha>0$;

(3) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_2^3\frac{1}{2x^2+3x-2}\mathrm{d}x$.

解

(1)

$$\int_0^x \sin x\mathrm{d}x=-\cos x|_0^x=1-\cos x.$$

(2)

$$\int_0^x x^\alpha\mathrm{d}x=\left.\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right|_0^x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

(3)

$$\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\mathrm{d}x=x\ln x-x|_1^{\mathrm{e}^2}=2\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^2+1=\mathrm{e}^2+1.$$

(4)

$$\int_2^3\frac{1}{2x^2+3x-2}\mathrm{d}x=\int_2^3\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\left.\left(\frac{1}{2}\ln|2x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+2|\right)\right|_2^3=\frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}.$$

习题 5.1.16 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$ 求 $F(x)=\displaystyle\int_{-1}^x f(t)\mathrm{d}t$, 并研究 $F(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的可微性.

解

- 当 $x\in[-1,0)$ 时,

$$F(x)=\int_{-1}^x -1\mathrm{d}t=-x-1;$$

- 当 $x=0$ 时,

$$F(0)=\int_{-1}^{0}-1\mathrm{d}t=-0-1=-1;$$

- 当 $x\in(0,1]$ 时,

$$F(x)=\int_{-1}^{0}-1\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}1\mathrm{d}t=-0-1+x-0=x-1.$$

即

$$F(x)=\begin{cases}-x-1, & -1\leqslant x<0,\\ -1, & x=0,\\ x-1, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$

显然, $F(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上可微, 且

$$F'(x)=\begin{cases}-1, & -1<x<0,\\ 1, & 0<x<1.\end{cases}$$

考察 $x=0$ 处的可微性:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{F(0+h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h-1-0}{h}=-1;$$
$$\lim_{h\to 0^+}\frac{F(0+h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h-1-0}{h}=1.$$

因此 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可微.

习题 5.1.17 计算下面平面图形的面积.

(1) 由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x^2$ 所围成的图形;

(2) 由曲线 $y=x^2, y=\dfrac{1}{4}x^2$ 及 $y=1$ 所围成的图形.

解

(1) 曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 $y=x^2$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

$$S=\int_{0}^{1}(\sqrt{x}-x^2)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\bigg|_0^1=\frac{1}{3}.$$

(2) 曲线 $y=x^2$ 与 $y=1$ 的交点为 $(-1,1)$ 和 $(1,1)$; 曲线 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ 与 $y=1$ 的交点为 $(-2,1)$ 和 $(2,1)$.

$$S=\int_{-2}^{-1}\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\left(x^2-\frac{1}{4}x^2\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}\left(1-\frac{1}{4}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

习题 5.1.18 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\sin t^3\mathrm{d}t}{x^4}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin^3 x}\displaystyle\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\mathrm{d}t$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$, p 是常数, $p>0$.

解

(1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^x\sin t^3\mathrm{d}t}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^3}{4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{4x^3}=\frac{1}{4}.$$

(2)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin^3 x}\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\mathrm{d}t&=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\tan x}\arcsin t^2\mathrm{d}t}{x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\arcsin(\tan x)^2\sec^2 x}{3x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(\arcsin(\tan x)^2)}{3x^2}\cdot\lim_{x\to0}\sec^2 x\\&=\lim_{x\to0}\frac{(\tan x)^2}{3x^2}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos^4 x}\\&=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}\\&=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\\&=\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.\end{aligned}$$

习题 5.1.19 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x$, 这里 a,b 为常数, 且 $0<a<b$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+a}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 这里 a 为常数, 且 $a>0$.

(注意: 对于 (2) 若用积分中值定理, 则积分为 $\dfrac{\xi^n}{1+\xi}$, 其中 $0<\xi<1$; 但这时 ξ 与 n 有关, 故在 $n\to\infty$ 时, 不能断言 $\xi^n\to 0$.)

解

(1)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_a^b \mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b \frac{1}{n}\cdot n\mathrm{e}^{-nx^2}\mathrm{d}x\\ &= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{2n}\mathrm{e}^{-nx^2}\bigg|_a^b \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0.\end{aligned}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\cdot\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{1}{(n+1)(x+1)}\mathrm{d}x^{n+1}$$

$$\begin{aligned}&=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)}\bigg|_0^1+\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2}\mathrm{d}x\\ &=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(1+1)}+\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(1+1)}=0,$$

且

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+x)^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\frac{x^{n+1}}{n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\to 0,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=0.$$

(3)

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+a}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|\leqslant\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+a}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\ln x|_n^{n+a}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+a}{n}=0.$$

习题 5.1.20 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续. 证明:

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数, 则 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0$;

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数, 则 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$.

(本题在几何上看是十分明显的.)

解

(1) 由于 $f(x)$ 是奇函数, 则对任意的 $x\in[-a,a]$, 有 $f(-x)=-f(x)$. 因此

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\\ &= -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t\Big|_{t=-x}+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{a} -f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

(2) 由于 $f(x)$ 是偶函数, 则对任意的 $x\in[-a,a]$, 有 $f(-x)=f(x)$. 因此

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\\ &= -\int_{a}^{0} f(-t)\mathrm{d}t\Big|_{t=-x}+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{a} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

习题 5.1.21 设 $f(x)$ 为具有周期 T 的连续函数, 证明: 对任意的常数 a, 有

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x.$$

(提示: 证明 $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x$, 这在几何上是显然的.)

解 由于 $f(x)$ 为具有周期 T 的连续函数, 则对任意的 $x\in\mathbb{R}$, 有 $f(x+T)=f(x)$. 因此

$$\begin{aligned}\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x+\int_{T}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(t+T)\mathrm{d}t\Big|_{t=x-T}\\ &= \int_{a}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

习题 5.1.22 计算下面的积分.

(1) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} |\cos x|\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_{-3}^{4} [x]\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \cos x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\cos^3 x\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\arcsin x\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_{0}^{1} x^3\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$;

(8) $\displaystyle\int_{0}^{a} \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x\ (a>0,b>0)$;

(11) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin^6 x\mathrm{d}x$;

(13) $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{|x|} \arctan \mathrm{e}^{x} \mathrm{d}x$; (14) $\int_{0}^{\pi} \frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x} \mathrm{d}x$.

解

(1)

$$\int_0^{2\pi} |\cos x| \mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \mathrm{d}x = 4.$$

(2)

$$\int_{-3}^{4} [x] \mathrm{d}x = \sum_{k=-3}^{3} \int_{k}^{k+1} k \mathrm{d}x = \sum_{k=-3}^{3} k = 0.$$

(3)

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \ln\frac{1-x}{1+x} = -\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

因此被积函数为奇函数, 故

$$\int_{-1}^{1} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x} \mathrm{d}x = 0.$$

(4)

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \cos^3 x \mathrm{d}x &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \cos^3 x \mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \cos^3 x \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-t}} \cos^3(-t)(-\mathrm{d}t) + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \cos^3 x \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} \cos^3 t \mathrm{d}t + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \cos^3 x \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \mathrm{d}x = \left.\frac{\sin x - \sin^3 x/3}{1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}} \mathrm{d}x &\overset{x=\ln t, \mathrm{d}x=\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{=} \int_1^2 \sqrt{1-\frac{1}{t^2}} \cdot \frac{1}{t} \mathrm{d}t \overset{t=\sec u}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\cos^2 u} \cdot \frac{1}{\sec u} \cdot \sec u \tan u \mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin u \tan u \,\mathrm{d}u \overset{\sin u = v}{=} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{v^2}{1-v^2} \,\mathrm{d}v = \left.\left(-v + \frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}\right)\right|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

(6)

$$\int_0^1 x \arcsin x \mathrm{d}x = \left.\frac{1}{4}\left(x\sqrt{1-x^2} + (2x^2-1)\arcsin x\right)\right|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

(7)

$$\int_0^1 x^3 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(x^3-3x^2+6x-6)\big|_0^1 = 6-2\mathrm{e}.$$

(8)

$$\int_0^a \frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x \overset{x=a\sin t,\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos t}{a\sin t+a\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}(\sin t+\cos t)+\frac{1}{2}(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t = \frac{t}{2}+\frac{1}{2}\ln(\sin t+\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

(9)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan x}\mathrm{d}x \overset{\tan x=t^2,\mathrm{d}x=\frac{2t}{1+t^4}\mathrm{d}t}{=} \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{t^2-\sqrt{2}t+1}{t^2+\sqrt{2}t+1}+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}\right)\Bigg|_0^{1^-}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(3-2\sqrt{2})+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(10)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x \overset{t=\tan x}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2\tan^2 x+b^2}\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^2t^2+b^2}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{at}{b}\right)\Bigg|_0^{+\infty}$$
$$= \frac{\pi}{2ab}$$

(11)

$$\int_{-1}^1 x^4\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \overset{x=\sin t}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)\mathrm{d}t$$
$$= \pi\left(\frac{4!!}{3!!}\right)\left(\frac{3!!}{4!!}-\frac{5!!}{6!!}\right) = \frac{\pi}{16}$$

(12)

$$\int_0^{2\pi} \sin^6 x\mathrm{d}x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\mathrm{d}x$$
$$= 4\cdot\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{5}{8}\pi$$

(13)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{|x|} \arctan \mathrm{e}^x \mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{e}^x \arctan \mathrm{e}^x \mathrm{d}x - \int_{-1}^0 \mathrm{e}^{-x} \arctan \mathrm{e}^x \mathrm{d}x \\
&\overset{\mathrm{e}^x = t}{=} \int_1^{\mathrm{e}} \arctan t \mathrm{d}t + \int_1^{\mathrm{e}} \arctan \frac{1}{t} \mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \left(\arctan t + \arctan \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\pi}{2} \mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2} (\mathrm{e} - 1)
\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2 + \tan^2 x} \mathrm{d}x &\overset{u = \tan x}{=} \int_0^1 \frac{1}{2 + u^2} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} \bigg|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

习题 5.1.23 设 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) \mathrm{d}x,$$

并用这一结果计算 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \mathrm{d}x$.

解 设 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x) \mathrm{d}x$, 则

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin(\pi - t)) \mathrm{d}t \overset{\sin(\pi - t) = \sin t}{=} \int_0^{\pi} (\pi - t) f(\sin t) \mathrm{d}t \\
&= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) \mathrm{d}t - \int_0^{\pi} t f(\sin t) \mathrm{d}t = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) \mathrm{d}t - I.
\end{aligned}$$

因此

$$2I = \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) \mathrm{d}t,$$

即

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin t) \mathrm{d}t.$$

由此, 可得

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \left(-\arctan(\cos x) \right)\big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

习题 5.1.24 证明: $\dfrac{1}{6} < \displaystyle\int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x < \dfrac{1}{3}$. (注意: 求解问题中的积分将是徒劳的. 解答本题的一个方法在本节的正文中已提到.)

解 由于在区间 $[0,1]$ 上, 对任意的 x, 有

$$x^2 - \frac{x^6}{6} < \sin x^2 < x^2,$$

故

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6}\right) \mathrm{d}x < \int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x < \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x,$$

即

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{42} < \int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x < \frac{1}{3},$$

从而得到

$$\frac{1}{6} < \int_0^1 \sin x^2 \mathrm{d}x < \frac{1}{3}.$$

习题 5.1.25 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 我们将 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的平均值. 对下列函数, 计算在指定区间上的平均值, 以及最大、最小值.

(1) $f(x) = x$, 区间 $[0,1]$ 及 $[0,10^5]$;

(2) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, 区间 $[0,1]$ 及 $[0,10^5]$;

(3) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$, 区间 $[0,1]$ 及 $[0,10^5]$.

解

(1) (a) 区间 $[0,1]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2};$$

最大值为 1; 最小值为 0.

(b) 区间 $[0,10^5]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{10^5-0}\int_0^{10^5} x\mathrm{d}x = \frac{10^5}{2};$$

最大值为 10^5; 最小值为 0.

(2) (a) 区间 $[0,1]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}};$$

最大值为 1; 最小值为 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(b) 区间 $[0,10^5]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{10^5-0}\int_0^{10^5} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-10^5}}{10^5};$$

最大值为 1; 最小值为 e^{-10^5}.

(3) (a) 区间 $[0,1]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{1-0}\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\mathrm{e}};$$

最大值为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$; 最小值为 0.

(b) 区间 $[0,10^5]$ 上, 平均值为

$$\frac{1}{10^5-0}\int_0^{10^5} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1-(10^5+1)\mathrm{e}^{-10^5}}{10^5};$$

最大值为 $\frac{1}{\mathrm{e}}$; 最小值为 0.

习题 5.1.26 考虑积分 $I=\int_0^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\mathrm{d}x$.

(1) 试给出 I 的尽可能好的上、下界估计;

(2) 求出 I 的近似值, 精确到 0.0001. (提醒: 本题用本节中的知识就能解决.)

解

(1)

习题 5.2.27

(1) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调递减的连续函数, 证明: 对任意 $\alpha\in(0,1)$, 有

$$\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 若仅仅设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减, 证明同样的结论.

(提示: (1) 有几种证法. 第一种方法: 利用 $\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_0^1 f(\alpha x)\mathrm{d}x$; 第二种方法: 考虑 $g(\alpha)=\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x$ $(0<\alpha<1)$, 证明 $g(\alpha)$ 是减函数. 注意, 这两种方法都需要 $f(x)$ 连续这一假设, 因此都不适用于解决 (2).)

解

解

(1)

$$\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_0^1 f(\alpha x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

(2)

$$\begin{aligned}\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x-\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x-\alpha\int_{\alpha}^1 f(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant(1-\alpha)\alpha f(\alpha)-\alpha(1-\alpha)f(\alpha)=0\end{aligned}$$

习题 5.2.28 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微, 且 $|f'(x)|\leqslant M$ (对任意 $x\in[a,b]$).

(1) 若 $f(a)=0$, 证明:

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{M}{2}(b-a)^2;$$

(2) 若 $f(a)=f(b)=0$, 证明:

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{4}(b-a)^2.$$

(提示: 通过对积分的上限求导能得出 (1) 的一个证明, 即考虑函数 $G(t)=\int_a^t |f(x)|\mathrm{d}x-\frac{M}{2}(t-a)^2, a\leqslant t\leqslant b$.)

解

(1) 由 Lagrange 中值定理, $|f(x)|=|f(x)-f(a)|=|f'(\xi)|(x-a)\leqslant M(x-a)$, 则对它取积分:

$$\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M(x-a)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}(b-a)^2$$

(2) 对于 $x\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$,

$$|f(x)|=|f(x)-f(a)|\leqslant M(x-a);$$

对于 $x\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$,

$$|f(x)|=|f(x)-f(b)|\leqslant M(b-x).$$

则

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x &= \int_a^{\frac{a+b}{2}} |f(x)|\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b |f(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_a^{\frac{a+b}{2}} M(x-a)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b M(b-x)\mathrm{d}x\\ &=\frac{M}{4}(b-a)^2\end{aligned}$$

习题 5.2.29 利用变换 $u=\sin x$, 将下列积分

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

变为椭圆积分的形式.

解 由 $\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-2u^2$, 则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos 2x}}=\int\frac{1}{\sqrt{1-2u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1-2u^2)}}.$$

习题 5.2.30 利用

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}(t-x)$$

经过多次分部积分, 详细推导出 Taylor 展开式和它的余项的积分表示式.

解 由题意, 我们有

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\mathrm{d}(t-x).$$

对积分部分进行分部积分, 令 $u = f'(t), \mathrm{d}v = \mathrm{d}(t-x)$, 则 $\mathrm{d}u = f''(t)\mathrm{d}t, v = t - x$. 因此,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(t)(t-x)\big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f''(t)(t-x)\mathrm{d}t \\ &= f(a) + f'(x)(x-x) - f'(a)(a-x) - \int_a^x f''(t)(t-x)\mathrm{d}t \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

重复上述过程, 对 $\int_a^x f''(t)(x-t)\mathrm{d}t$ 进行分部积分, 令 $u = f''(t), \mathrm{d}v = (x-t)\mathrm{d}t$, 则 $\mathrm{d}u = f'''(t)\mathrm{d}t$, $v = \dfrac{(x-t)^2}{2}$. 因此,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\bigg|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\mathrm{d}t \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

重复上述过程 n 次, 我们得到

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t.$$

这就是 Taylor 展开式, 其中积分余项为

$$R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t.$$

习题 5.2.31 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 令

$$g(x,y) = \int_0^x (f(t+y) - f(t))\mathrm{d}t,$$

求证: $g(x,y) = g(y,x)$.

解

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \int_0^x (f(t+y) - f(t))\mathrm{d}t = \left(\int_y^{x+y} - \int_0^x\right) f(t)\mathrm{d}t = \left(\int_0^{x+y} - \int_0^y - \int_0^x\right) f(t)\mathrm{d}t \\ g(y,x) &= \int_0^y (f(t+x) - f(t))\mathrm{d}t = \left(\int_x^{x+y} - \int_0^y\right) f(t)\mathrm{d}t = \left(\int_0^{x+y} - \int_0^x - \int_0^y\right) f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

因此, $g(x,y) = g(y,x)$.

习题 5.2

习题 5.2.1 求区间 $[0,1]$ 上 Dirichlet 函数的上积分和下积分.

解 设 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数. 对任意分划 $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$, 因为每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上既有有理数也有无理数, 所以

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)=1,\quad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)=0.$$

因此

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}1\cdot(x_i-x_{i-1})=1,$$

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}0\cdot(x_i-x_{i-1})=0.$$

所以

$$\overline{\int_0^1}f(x)\mathrm{d}x=\inf_P U(f,P)=1,$$

$$\underline{\int_0^1}f(x)\mathrm{d}x=\sup_P L(f,P)=0.$$

习题 5.2.2 试给出 Darboux 上和与下的几何解释.

解 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界. 对任意分划 $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$, 记

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),\quad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x).$$

则 Darboux 上和与下可以分别表示为

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\quad L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i.$$

几何上, $U(f,P)$ 表示由各子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最大值 M_i 所构成的矩形条形图的面积之和; 而 $L(f,P)$ 则表示由各子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的最小值 m_i 所构成的矩形条形图的面积之和.

习题 5.2.3 证明: 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 则 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积, 而且有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

解 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积. 对任意分划 $T=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$, 记

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),\quad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),\quad \omega_i=M_i-m_i,$$

$$M_i'=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)|,\quad m_i'=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)|,\quad \omega_i'=M_i'-m_i'.$$

因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 所以 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$. 又因为

$$\omega_i'=M_i'-m_i'\leqslant |M_i|+|m_i|\leqslant |M_i-m_i|=\omega_i,$$

所以 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i=0$. 因此 $|f(x)|$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

对 $-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant |f(x)|$ 两边同时积分, 得

$$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,$$

即

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

习题 5.2.4 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x)\geqslant c>0$. 求证: $\dfrac{1}{f(x)}$ 在区间 $[a,b]$ 上也可积.

解 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 且 $f(x)\geqslant c>0$. 对任意分划 $T=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$, 记

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad \omega_i=M_i-m_i,$$

$$M_i'=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} \frac{1}{f(x)},\quad m_i'=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} \frac{1}{f(x)},\quad \omega_i'=M_i'-m_i'.$$

因为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, 所以 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$. 又因为

$$\omega_i'=M_i'-m_i'=\frac{1}{m_i}-\frac{1}{M_i}=\frac{M_i-m_i}{M_im_i}=\frac{\omega_i}{M_im_i}\leqslant\frac{\omega_i}{c^2},$$

所以 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta x_i=0$. 因此 $\dfrac{1}{f(x)}$ 在区间 $[a,b]$ 上可积.

习题 5.3

习题 5.3.1 求下列曲线弧的弧长.

(1) 抛物线 $y = x^2$ 在 $x = -a$ 到 $x = a$ 之间的弧;

(2) 星形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ $(0 \leqslant t < 2\pi, a > 0$ 为常数);

(3) Archimedes 螺线 $r = a\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$.

解

(1) 假设 $a > 0$, 则

$$\begin{aligned} l &= 2\int_0^a \sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^a \sqrt{1 + 4x^2}\mathrm{d}x \\ &= 2\left(\frac{1}{2}x\sqrt{4x^2+1} + \frac{1}{4}\log\left(\sqrt{4x^2+1} + 2x\right)\right)\Big|_0^a \\ &= a\sqrt{1+4a^2} + \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{1+4a^2} + 2a\right) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\cos^2 t\sin t)^2 + (3\sin^2 t\cos t)^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{2}a\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\mathrm{d}t \\ &= 6a \end{aligned}$$

(3) 假设 $a > 0$, 则

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\theta) + r'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta \\ &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2+1}\mathrm{d}\theta \\ &= a\left(\frac{1}{2}\theta\sqrt{\theta^2+1} + \frac{1}{2}\log\left(\theta + \sqrt{\theta^2+1}\right)\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2}a\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \log\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)\right) \end{aligned}$$

习题 5.3.2 计算下面的曲线所围成的平面图形的面积.

(1) 双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{4} \cup \left[\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right]$, a 为正常数);

(2) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 及 x 轴;

(3) $y = \mathrm{e}^x, y = \mathrm{e}^{-x}$ 及 $x = 1$.

解

(1)

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta \mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{8};$$

(2)

$$S = \int_0^{2\pi} |y'(t)||\mathrm{d}x(t)| = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t)^2 \mathrm{d}t = \pi;$$

(3)

$$S = \int_0^1 (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) \mathrm{d}x = \mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} - 2.$$

习题 5.3.3 计算下列旋转体的体积.

(1) $y = \sin x \ (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 与 x 轴围成的图形分别绕 x 轴及 y 轴旋转一周;

(2) $y = \mathrm{e}^{x^2} \ (0 \leqslant x \leqslant 1)$ 与 y 轴围成的图形绕 y 轴旋转一周;

(3) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转一周.

解

(1)

$$V_x = \int_0^{\pi} \pi y^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \pi^2$$

$$V_y = \int_0^{\pi} 2\pi x \sin x \mathrm{d}x = 2\pi^2;$$

(2)

$$V_y = \int_0^1 2\pi x \cdot \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{d}x = \pi(\mathrm{e} - 1);$$

(3)

$$V_x = \int_0^{2\pi} \pi y^2(t) \mathrm{d}x(t) = \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 \mathrm{d}t = 5\pi^2$$

习题 5.3.4 求证: 以 R 为半径, 高为 h 的球缺的体积为 $\pi h^2 \left(R - \dfrac{h}{3}\right)$.

解

$$\begin{aligned}V &= \int_0^h \pi(R^2-(R-y)^2)\mathrm{d}y\\ &= \pi\int_0^h (2Ry-y^2)\mathrm{d}y\\ &= \pi\left(Rh^2-\frac{h^3}{3}\right)\end{aligned}$$

习题 5.3.5 求下列曲线绕旋转一周后所得立体的侧面积.

(1) $x^2+y^2=r^2$ 绕 x 轴, 其中常数 $r>0$;

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 y 轴, 这里 $a>b>0$;

(3) $y=a\cosh x\ (0\leqslant x\leqslant a)$ 绕 x 轴;

(4) $r=a(1+\cos\theta)$ 绕极轴, $a>0$.

解

(1) 设 $x=r\cos t, y=r\sin t(0\leqslant t\leqslant \pi)$, 则

$$\begin{aligned}S &= \int_0^\pi 2\pi y(t)\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\pi 2\pi r\sin t\cdot r\mathrm{d}t\\ &= 4\pi r^2\end{aligned}$$

(2)

$$S=\int_{-b}^b 2\pi x(y)\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\mathrm{d}y=\int_{-b}^b 2\pi a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{\sqrt{b^2-y^2}}\mathrm{d}y=\frac{4\pi a^2 b}{b}=4\pi ab;$$

(3)

$$\begin{aligned}S &= \int_0^a 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x\\ &= 2\pi\int_0^a a\cosh x\sqrt{1+a^2\sinh^2 x}\mathrm{d}x\\ &= 2\pi\int_0^a \sqrt{1+a^2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}(a\sinh x)\\ &= \pi\left(s\sqrt{1+s^2}+\log(s+\sqrt{1+s^2})\right)\Big|_0^{a\sinh a}\\ &= \pi\left(a\sinh a\sqrt{1+a^2\sinh^2 a}+\log(a\sinh a+\sqrt{1+a^2\sinh^2 a})\right)\end{aligned}$$

(4)

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^\pi a(1+\cos\theta)\sin\theta\sqrt{(a(1+\cos\theta))^2+(-a\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\sqrt{2}a^2\int_0^\pi (1+\cos\theta)^{3/2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\sqrt{2}a^2\frac{2}{5}\left(1+\cos\theta\right)^{5/2}\Big|_\pi^0 \\
&= \frac{32}{5}\pi a^2
\end{aligned}
$$

习题 5.3.6 半径为 r 的球沉入水中, 与水面相切 (球的密度为 1), 现将球从水中捞出, 需做多少功?

解 设球心距水面高度为 $h(0 \leqslant h \leqslant 2r)$, 则球被提起 $\mathrm{d}h$ 时, 有 $\mathrm{d}W = \rho g V(h)\mathrm{d}h$, 其中 $V(h)$ 为球露出水面的体积, 则

$$
\begin{aligned}
V(h) &= \int_0^h \pi(r^2-(r-y)^2)\mathrm{d}y \\
&= \pi\int_0^h (2ry-y^2)\mathrm{d}y \\
&= \pi\left(rh^2-\frac{h^3}{3}\right)
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
W &= \int_0^{2r} \rho g V(h)\mathrm{d}h \\
&= \rho g\pi\int_0^{2r}\left(rh^2-\frac{h^3}{3}\right)\mathrm{d}h \\
&= \rho g\pi\left(\frac{2}{3}r^4-\frac{4}{12}r^4\right) \\
&= \frac{4}{3}\rho g\pi r^4
\end{aligned}
$$

习题 5.3.7 两条长为 L, 质量为 m 的均匀细杆位于同一直线上, 两杆近端距离为 l, 求两杆之间的引力.

解 设两杆的线密度均为 $\lambda = \dfrac{m}{L}$, 记一杆位于 $[0, L]$, 另一杆位于 $[L+l, 2L+l]$, 两杆微元长度 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 之间的引力为

$$
\mathrm{d}F = G\frac{\lambda\mathrm{d}x\cdot\lambda\mathrm{d}y}{(y-x)^2} = G\frac{m^2}{L^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(y-x)^2},
$$

则两杆之间的引力为

$$
\begin{aligned}
F &= \int_0^L \int_{L+l}^{2L+l} G\frac{m^2}{L^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(y-x)^2} \\
&= G\frac{m^2}{L^2}\int_0^L \left(\frac{1}{L+l-x} - \frac{1}{2L+l-x}\right)\mathrm{d}x \\
&= G\frac{m^2}{L^2}\left(\log\frac{L+l}{l} - \log\frac{2L+l}{L+l}\right) \\
&= G\frac{m^2}{L^2}\log\frac{(L+l)^2}{l(2L+l)}
\end{aligned}
$$

习题 5.4

习题 5.4.1 判断下列反常积分是否收敛, 并求出收敛的反常积分的值.

(1) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{+\infty} x\sin x\mathrm{d}x$;

(3) $\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$;

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{1} \ln x\mathrm{d}x$;

(8) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(9) $\int_0^{1} \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$;

(10) $\int_0^{1} \ln\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x$;

(11) $\int_0^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ (n 为自然数);

(12) $\int_0^{1} (\ln x)^n\mathrm{d}x$ (n 为自然数).

解

(1)

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[-(x+1)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^A = 1;$$

(2)

$$\int_0^{+\infty} x\sin x\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[-x\cos x+\sin x\right]_0^A \overset{\text{取 } A=n\pi\to+\infty}{=} \lim_{n\to+\infty}(-1)^{n+1}n\pi \text{ (发散)};$$

(3)

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_2^A = \lim_{A\to+\infty}\left(\frac{1}{2}(\ln A)^2-\frac{1}{2}(\ln 2)^2\right) = +\infty \text{ (发散)};$$

(4)

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x \geq \int_1^{+\infty} \frac{\pi/4}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\lim_{A\to+\infty}\left[\ln x\right]_1^A = +\infty \text{ (发散)};$$

(5)

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)\right]_0^A = \frac{1}{2};$$

(6)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x + \lim_{B\to+\infty}\int_0^B \frac{1}{(x+1)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{A\to-\infty}\left[\arctan(x+1)\right]_A^0 + \lim_{B\to+\infty}\left[\arctan(x+1)\right]_0^B \\ &= \left(\arctan(1)-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2}-\arctan(1)\right) = \pi;\end{aligned}$$

(7)

$$\int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} [x\ln x - x]_\varepsilon^1 = -1 - \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon) = -1;$$

(8)

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0^+}\int_0^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}[\arcsin x]_{-1+\varepsilon}^0 + \lim_{\delta\to 0^+}[\arcsin x]_0^{1-\delta} \\ &= \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi;\end{aligned}$$

(9)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1-x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) \\ &= \ln x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)\mathrm{d}x \\ &= 0 - \int_0^1 \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\ &\overset{t=\sqrt{1-x^2}}{=} \int_0^1 \frac{1}{1-t^2} - \frac{t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} + \frac{1}{2}\ln(1-t^2) \\ &= -\ln 2\end{aligned}$$

(10)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x &= -\int_0^1 \ln(1-x)\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x \\ &= -\lim_{\delta\to 0^+}[(1-x)\ln(1-x) - (1-x)]_0^{1-\delta} - [(1+x)\ln(1+x) - (1+x)]_0^1 \\ &= -(0-(-1)) - [(2\ln 2 - 2) - (-1)] \\ &= -1 - (2\ln 2 - 1) = 2 - 2\ln 2;\end{aligned}$$

(11)

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x &= \left[-x^n\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= 0 + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \\ &= n\cdot(n-1)\int_0^{+\infty} x^{n-2}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \ldots \\ &= n!\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = n!;\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\ln x)^n \mathrm{d}x &= [x(\ln x)^n]_0^1 - \int_0^1 x \cdot n(\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= 0 - n\int_0^1 (\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x \\ &= (-n)\cdot(-n+1)\int_0^1 (\ln x)^{n-2}\mathrm{d}x = \dots \\ &= (-1)^n n! \int_0^1 \mathrm{d}x = (-1)^n n!;\end{aligned}$$

习题 5.4.2 反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的 Cauchy 主值定义为

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B} f(x)\mathrm{d}x.$$

显然, 若反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则其 Cauchy 主值也收敛, 但反过来不一定成立.

研究下列反常积分 Cauchy 主值的收敛性.

(1) $\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解

(1)

$$\begin{aligned}\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{B\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_{-B}^{B} = \lim_{B\to+\infty}(0) = 0;\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\text{P.V.}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \lim_{B\to+\infty}\int_{-B}^{B}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \lim_{B\to+\infty}\left(\int_{-B}^{0}\frac{-x}{1+x^2}\mathrm{d}x + \int_0^B \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\right) \\ &= 2\lim_{B\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^B = \lim_{B\to+\infty}\ln(1+B^2) = +\infty\ (\text{发散}).\end{aligned}$$

习题 5.4.3 若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续, 并且以 a 为瑕点, 则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 定义为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

这是本节讲的两类反常积分的组合, 其中 $b > a$ 是任一实数. 当上面两个反常积分都收敛时, 我们称 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛; 否则称其发散.

(1) 证明 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x$ 收敛, 并求其值;

(2) 证明: 对任意实数 α, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散.

解

(1)

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x&=\int_1^{2}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x+\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x\\&=\lim_{t\to1^+}\int_t^{2}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x+\lim_{A\to+\infty}\int_2^{A}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

设 $x-1=u^2$, 则

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{(u^2+1)u}2u\mathrm{d}u=2\int\frac{1}{u^2+1}\mathrm{d}u=2\arctan u+C\\&=2\arctan\sqrt{x-1}+C\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}\mathrm{d}x&=\lim_{t\to1^+}[2\arctan\sqrt{x-1}]_t^2+\lim_{A\to+\infty}[2\arctan\sqrt{x-1}]_2^A\\&=2(\arctan1-\arctan0)+2\left(\frac{\pi}{2}-\arctan1\right)=\pi\end{aligned}$$

(2)

命题 (第一类 p 积分) $I(p)=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x, a>0$, 当 $p>1$ 时, 积分收敛, 当 $p\leqslant1$ 时, 积分发散.

证明 当 $p>1$ 时,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}-\frac{1}{1-p}b^{1-p}\right)=\frac{1}{p-1},$$

当 $p\leqslant1$ 时,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right)\Big|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{1-p}-\frac{1}{1-p}b^{1-p}\right)=+\infty.$$

命题 (第二类 p 积分) $J(p)=\int_0^{1}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x, a>0$, 当 $p\geqslant1$ 时, 积分发散, 当 $p<1$ 时, 积分收敛.

证明 当 $p\geqslant1$ 时,

$$\int_0^{1}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right)\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{1-p}-\frac{1}{1-p}\varepsilon^{1-p}\right)=+\infty,$$

当 $p<1$ 时,

$$\int_0^{1}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right)\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\frac{1}{1-p}-\frac{1}{1-p}\varepsilon^{1-p}\right)=\frac{1}{1-p}.$$

综上, 当 $\alpha\leqslant1$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散; 当 $\alpha\geqslant1$ 时, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散, 因此 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散.

习题 5.4.4 设 $a<c<b$, 点 c 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 内唯一的瑕点, 则积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 定义

为两个瑕积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 的和. 求:

(1) $\int_{-1}^{4} \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$; (2) $\int_{-1}^{1} x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$.

解

(1)

$$\int_{-1}^{4} \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$$

其中

$$\int \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C;$$

因此,$\int_{1}^{4} \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$ 发散. 故 $\int_{-1}^{4} \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$ 发散. 事实上, $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$ 也发散.

(2) **注** 这里认为 $x^{-\frac{1}{3}}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上有定义,$x=0$ 为瑕点.

$$\int_{-1}^{1} x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x$$

其中

$$\int x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C;$$

因此,

$$\int_{-1}^{0} x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^-}\left(\frac{3}{2}\varepsilon^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{3}{2}\right)\right) = -\frac{3}{2};$$

$$\int_{0}^{1} x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \lim_{\delta\to 0^+}\left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{\delta}^{1} = \lim_{\delta\to 0^+}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\delta^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2};$$

故 $\int_{-1}^{1} x^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = 0$.

第 5 章综合习题

习题 5.C.1 设 m, n 为正整数, 证明:

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \mathrm{d}x = 0$;

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & \text{如} m = n, \\ 0, & \text{如} m \neq n. \end{cases}$

(本题的结论, 在以后要讲的 Fourier (傅里叶) 级数理论中具有基本的重要性.)

解

(1)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x] \mathrm{d}x \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \mathrm{d}x \\ &= \begin{cases} \pi, & \text{如} m = n, \\ 0, & \text{如} m \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

习题 5.C.2 设 m, n 为正整数, 记

$$\mathrm{B}(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \mathrm{d}x.$$

证明: (1) $\mathrm{B}(m, n) = \mathrm{B}(n, m)$; (2) $\mathrm{B}(m, n) = \dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$.

解

(1) 由变量替换 $x = 1 - t$ 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(m, n) &= \int_0^1 (1-t)^{m-1} t^{n-1} \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{B}(n, m) \end{aligned}$$

(2) 由分部积分可得

$$\begin{aligned} \mathrm{B}(m, n) &= \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{n} x^{m-1}(1-x)^n \Big|_0^1 + \frac{m-1}{n} \int_0^1 x^{m-2}(1-x)^n \mathrm{d}x \\ &= \frac{m-1}{n} \mathrm{B}(m-1, n+1) \end{aligned}$$

重复使用上式, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}(m,n) &= \frac{(m-1)(m-2)\cdots 1}{n(n+1)\cdots(n+m-1)}\mathrm{B}(1,n+m-1)\\
&= \frac{(m-1)!}{(n+m-1)!/(n-1)!}\cdot\frac{1}{n+m-1}\\
&= \frac{m!n!}{(m+n-1)!(m+n)}\\
&= \frac{m!n!}{(m+n+1)!}
\end{aligned}$$

习题 5.C.3 计算下列积分.

(1) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_{0}^{n\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x$ (n 为自然数);

(3) 设 $\displaystyle f(x)=\int_{x}^{x+2\pi}(1+\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\mathrm{d}t+\frac{1}{1+x}\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t$, 求 $\displaystyle\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

解

(1)

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(1+x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}\left(x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\right)\\
&= x\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}\\
&= \frac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{n\pi}|x\sin x|\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}x|\sin x|\mathrm{d}x\\
&\overset{x=u+k\pi}{=} \sum_{k=0}^{n-1}\int_{0}^{\pi}(u+k\pi)|\sin(u+k\pi)|\mathrm{d}u\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{0}^{\pi}(u+k\pi)\sin u\,\mathrm{d}u\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{0}^{\pi}u\sin u\,\mathrm{d}u+k\pi\int_{0}^{\pi}\sin u\,\mathrm{d}u\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(\pi+2k\pi)\\
&= n\pi+2\pi\frac{(n-1)n}{2}=n^2\pi.
\end{aligned}$$

(3) $\left(1+\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t}\right)$ 为以 2π 为周期的函数, 由习题 5.1.21 可知

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+2\pi}\left(1+\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t}\right)\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi}\left(1+\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t}\right)\mathrm{d}t \\
&= 2\pi+\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\sin t}\mathrm{d}t \\
&= 2\pi+\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}t+\int_0^{-2\pi}\mathrm{e}^{\sin u}\mathrm{d}u \quad (u=-t) \\
&= 2\pi+\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\mathrm{d}t+\int_{2\pi}^{0}\mathrm{e}^{\sin u}\mathrm{d}u \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

因此 $f(x)=2\pi+\dfrac{1}{x+1}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$,$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积, 两边对 x 从 0 到 1 积分得

$$\begin{aligned}
I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(2\pi+\frac{1}{x+1}I\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\pi+I\int_0^1\frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = 2\pi+I\ln 2.
\end{aligned}$$

解得 $I=\dfrac{2\pi}{1-\ln 2}$.

习题 5.C.4 证明: $\dfrac{1}{2n+2}<\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x<\dfrac{1}{2n}\ (n=1,2,\ldots)$.

解

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-1}x\cdot\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n-1}x\cdot\frac{1}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n}\tan^n x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2n};$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n}x\cdot\frac{2\cos^2 x}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n}x\cdot\frac{1}{2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n+2}\tan^{n+1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2n+2}.$$

习题 5.C.5 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$, 证明: 必有一个区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 使得对任意 $x\in[\alpha,\beta]$, 有 $f(x)>0$. (比较习题 5.1 中第 8 题.)

(提示: 假设结论不成立, 则对 $[a,b]$ 的任一分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上都存在 ξ_i, 使 $f(\xi_i)\leqslant 0$. 由此产生一个非正的积分和, 过渡到极限, 产生矛盾.)

解 反证法. 假设结论不成立, 则对 $[a,b]$ 的任一分割 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$, 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上都存在 ξ_i, 使 $f(\xi_i)\leqslant 0$. 由此产生一个非正的积分和

$$S=\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\leqslant 0.$$

过渡到极限, 可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\max(x_i-x_{i-1})\to 0}S\leqslant 0,$$

这与题设 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$ 矛盾. 因此假设不成立, 结论成立.

习题 5.C.6

(1) 设 f 是处处连续的偶函数, 证明: f 必有一个原函数为奇函数;

(2) 设 f 是处处连续的奇函数, 证明: f 的任一原函数都是偶函数. (试比较习题 3.1 第 15 题.)

解

(1) 设 $F(x)$ 是 f 的一个原函数, 则

$$\begin{aligned}G(x) &= F(x) - F(0)\\ &= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{-x} f(-u)(-\mathrm{d}u) \quad (u=-t)\\ &= -\int_0^{-x} f(u)\mathrm{d}u\\ &= -F(-x)+F(0)\end{aligned}$$

因此 $G(-x) = -G(x)$, 即 $G(x)$ 是奇函数, 且 $G'(x) = F'(x) = f(x)$.

(2) 设 $F(x)$ 是 f 的一个原函数, 则

$$\begin{aligned}F(-x) &= \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{x} f(-u)(-\mathrm{d}u) \quad (u=-t)\\ &= -\int_0^{x} (-f(u))\mathrm{d}u\\ &= \int_0^{x} f(u)\mathrm{d}u\\ &= F(x)\end{aligned}$$

因此 $F(-x) = F(x)$, 即 $F(x)$ 是偶函数.

习题 5.C.7 举例说明, 存在一个连续的周期函数 f, 使得 f 的原函数都不是周期函数.

(试比较习题 3.1 第 16 题.) (提示: 选一个连续的周期函数 f, 使它能保证 $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 不是周期函数. 注意, 不必考虑 $F(x)$ 的显式表示.)

解 设 $f(x) \equiv 1$, 则 f 为周期函数. $f(x)$ 的所有原函数为 $F(x) = x + C$, 显然 $F(x)$ 不是周期函数.

习题 5.C.8 设 $\dfrac{a_0}{n+1} + \dfrac{a_1}{n} + \cdots + a_n = 0$. 证明: 多项式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点. (本题是第 3 章综合习题的第 3 题, 这里要求用积分的解法来论证. 可利用习题 5.1 中第 8 题的结果.)

解 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 (a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n)\mathrm{d}x\\ &= \frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n\\ &= 0\end{aligned}$$

由习题 5.1.8可知, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个零点.

习题 5.C.9 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续, 且有 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 试证: 在 $(0,\pi)$ 内存在两点 x_1 和 x_2, 使得 $f(x_1)=0$ 与 $f(x_2)=0$.

(提示: 易知 f 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个零点 x_1. 若这是唯一的零点, 则 f 在 $(0,x_1)$ 与 (x_1,π) 内异号. 于是 $\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_1)\mathrm{d}x\neq 0$, 这将产生矛盾.)

解 由 $\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=0$ 与习题 5.1.8可知, f 在 $(0,\pi)$ 内至少有一个零点 x_1. 若这是唯一的零点, 则

(1) 若 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 与 (x_1,π) 内同号且非零, 不妨设 $f(x)>0,\forall x\in(0,x_1)\cup(x_1,\pi)$, 则

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{x_1} f(x)\sin x\mathrm{d}x+\int_{x_1}^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x>0$$

与题设矛盾.

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 与 (x_1,π) 内异号且非零, 构造函数 $g(x)=\sin(x_1-x)=-\sin x\cos x_1+\cos x\sin x_1$, 不妨设 $f(x)>0,\forall x\in(0,x_1)$;$f(x)<0,\forall x\in(x_1,\pi)$, 因此

$$\int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_0^{x_1} f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{x_1}^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x>0$$

这与

$$\int_0^\pi f(x)g(x)\mathrm{d}x=-\cos x_1\int_0^\pi f(x)\sin x\mathrm{d}x+\sin x_1\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$$

矛盾.

习题 5.C.10 设 $f(x)$ 处处连续, $f(0)=0, f'(0)$ 存在. 记 $F(x)=\int_0^1 f(xy)\mathrm{d}y$, 证明 $F(x)$ 处处可导, 并求出 $F'(x)$.

解 $F(0)=\int_0^1 f(0)\mathrm{d}y=0$, 因此 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^1 f(xy)\mathrm{d}y=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{f'(0)}{2}.$$

当 $x\neq 0$ 时,$F(x)=\int_0^1 f(xy)\mathrm{d}y\overset{t=xy}{=}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$F'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{x}f(x)$$

. 综上所述,$F(x)$ 处处可导, 且

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{f'(0)}{2}, & x=0,\\ -\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\dfrac{1}{x}f(x), & x\neq 0.\end{cases}$$

习题 5.C.11

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x^2}, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1,\end{cases}$ 记 $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 试研究 $F(x)$ 在哪些点可导;

(提示: 与习题 5.1 中第 16 题不同, 本题无法求出 $F(x)$ 的显式表示.)

(2) 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$, 求证: $f'_+(0)=0$.

解

(1) 当 $x\neq\pm1$ 时, $f(x)$ 在 x 处连续,$F(x)$ 在 x 处可导, 且 $F'(x)=f(x)$. 当 $x=1$ 时,

$$F'_+(1)=\lim_{h\to0^+}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}1\mathrm{d}t=1;$$

$$F'_-(1)=\lim_{h\to0^-}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}f(t)\mathrm{d}t=\lim_{h\to0^-}\frac{1}{h}\int_1^{1+h}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-1}.$$

因此 $F(x)$ 在 $x=1$ 处不可导, 同理可证 $F(x)$ 在 $x=-1$ 处不可导.

(2) 由于 $x=0$ 是被积函数的间断点, 因此不能使用变上限积分求导的方法来求 $F'(0)$, 只能根据定义计算, 先由分部积分得

$$f(x)=\int_0^x -t^2\,\mathrm{d}\left(\sin\frac{1}{t}\right)=-x^2\sin\frac{1}{x}+\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

因此

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(-x\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)\\&=\lim_{x\to0^+}-x\sin\frac{1}{x}+\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

其中

$$\left|\lim_{x\to0^+}-x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to0^+}|x|=0;$$

$$\left|\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x 2t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right|\leqslant\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\int_0^x 2|t|\mathrm{d}t=\lim_{x\to0^+}x=0.$$

因此 $f'_+(0)=0$.

习题 5.C.12 设函数 f 处处连续. 证明:

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_a^b(f(x+h)-f(x))\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

习题 5.C.13 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微. 证明:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

(提示: 分部积分.)

我们加强为证明

习题 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微,$g(x)$ 为以 T 为周期的连续函数, 则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\mathrm{d}t\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

解 等价于证明,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\left(g(\lambda x)-\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=0.$$

记 $h(t)=g(t)-\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T g(t)\mathrm{d}t$, 则 $h(t)$ 为以 T 为周期的连续函数, 且 $\displaystyle\int_0^T h(t)\mathrm{d}t=0$,

$$h(\lambda t)=g(\lambda t)-\frac{1}{T}\int_0^T g(\lambda t)\mathrm{d}t=g(\lambda t)-\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\mathrm{d}t.$$

因此只需证明

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)h(\lambda x)\mathrm{d}x=0.$$

由分部积分可得

$$\int_a^b f(x)h(\lambda x)\mathrm{d}x=f(x)\frac{1}{\lambda}H(\lambda x)\bigg|_a^b-\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(x)H(\lambda x)\mathrm{d}x$$

其中 $H(t)$ 为 $h(t)$ 的一个原函数, 由 $h(t)$ 的连续性可知 $H(t)$ 在 $[0,T]$ 上有界, 设 $M=\max\limits_{t\in[0,T]}|H(t)|$, 则

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)h(\lambda x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\frac{1}{\lambda}\left(|f(b)|+|f(a)|\right)M+\frac{1}{\lambda}\int_a^b|f'(x)|M\mathrm{d}x\\&=\frac{M}{\lambda}\left(|f(b)|+|f(a)|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

当 $\lambda\to\infty$ 时, 上式右端趋于 0, 故

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)h(\lambda x)\mathrm{d}x=0.$$

习题 5.C.14 证明: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}$.

解 设 $x=2k\pi+r$, 其中 k 为非负整数, $0\leqslant r<2\pi$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t&=\frac{1}{2k\pi+r}\left(k\int_0^{2\pi}|\sin t|\mathrm{d}t+\int_0^r|\sin t|\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{1}{2k\pi+r}\left(4k+\int_0^r|\sin t|\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2k}{2k+r/\pi}+\frac{1}{2k\pi+r}\int_0^r|\sin t|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

当 $x\to+\infty$ 时, 即 $k\to+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2k\pi+r}\int_0^r|\sin t|\mathrm{d}t\leqslant\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{2k\pi}\int_0^{2\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=0,$$

故

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}+0=\frac{2}{\pi}.$$

习题 5.C.15 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$.

(提示: 直接用积分中值定理, 得出左端的积分为 $\frac{\pi}{2}\sin^n\xi_n$ (其中 $0<\xi_n<\frac{\pi}{2}$), 但这不能导出结果, 因不能排除 $\{\xi_n\}$ 中有一个子列趋于 $\frac{\pi}{2}$. 克服这一困难可采用如下的方法. 对任意正数 $\varepsilon<1$, 取一个参数 δ (与 ε 有关), 将问题中的积分拆成两部分: 一部分用区间长度控制, 另一部分由 $n\to\infty$ 来控制, 以使得两者的和小于 ε. 我们有

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\\&<\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right)^n+\delta\\&<\frac{\pi}{2}(\cos\delta)^n+\delta.\end{aligned}$$

现在取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, 因 $0<\cos\delta<1$, 且 $\cos\delta$ 与 n 无关, 故 n 充分大时, 可使上式右端第一项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$.

解答本题的另一方法是应用 §5.1 中例 5.1.10, 并参考第 1 章综合习题中第 1 题 (1).)

解 对任意正数 $\varepsilon<1$, 取一个参数 $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, 将问题中的积分拆成两部分:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\\&<\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)\right)^n+\delta\\&<\frac{\pi}{2}(\cos\delta)^n+\delta.\end{aligned}$$

因 $0<\cos\delta<1$, 且 $\cos\delta$ 与 n 无关, 故 n 充分大时, 可使上式右端第一项小于 $\frac{\varepsilon}{2}$. 因此当 n 充分大时, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0.$$

习题 5.C.16 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 且 $f(x)\geqslant 0$ (对 $x\in[a,b]$). 记 $f(x)$ 在该区间上的最大值为 M, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

解 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可知,$\forall\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时,$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, 其中 $x_0\in[a,b]$ 且 $f(x_0)=M$. 因此, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$ 时,$f(x)>M-\varepsilon$. 设

$I=(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]$, 记 $|I|=\sup I-\inf I>0$, 则有

$$\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_I f^n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_I (M-\varepsilon)^n\mathrm{d}x=|I|(M-\varepsilon)^n.$$

因此

$$\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant |I|^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon).$$

又因为 $f(x)\leqslant M$, 所以

$$\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{n}}M.$$

综上所述, 有

$$|I|^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon)\leqslant\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant (b-a)^{\frac{1}{n}}M.$$

当 $n\to\infty$ 时, 上式两端均趋于 M, 由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

习题 5.C.17

(1) 设函数 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的递增、非负函数, 证明: 对任意正整数 n, 有

$$0\leqslant\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(n);$$

(2) 设函数 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的递减、非负函数, 证明: 对任意正整数 n, 有

$$0\leqslant\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(1).$$

此外, 极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x\right)=\alpha$$

存在, 且 $0\leqslant\alpha\leqslant f(1)$.

(提示: 对于 (1), 应用习题 5.1 中第 5 题可知,

$$f(k)\leqslant\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\leqslant f(k+1),$$

对 $k=1,2,\ldots,n-1$ 求和, 可得出结果. 类似地可证明 (2) 中的不等式. 为证明 (2) 中说的极限存在, 可证明

$$g(n)=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\mathrm{d}x,\quad n=1,2,\ldots$$

是单调递减的函数; 而上面已指出 $g(n)$ 以 0 为下界.)

某些 (不易直接处理的) 离散量的和—数列的和, 可以通过 (易于处理的) 连续的量—积分部分作出估计. 本题给出了最简单的这样的结果 (这在后面的无穷级数理论中还将提及). 如今,

我们现在易于给出 $\sqrt[n]{k}$ 及 $n!$ 的相当精确的上、下界. 我们特别提及, 对 $n \geq 1$, 有

$$\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n + 1,$$

从而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 趋于无穷大, 并与 $\ln n$ 同阶. 此外,

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

存在, 这称为 Euler (欧拉) 常数.

解

(1) 由 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上递增可知,$\forall k \in \mathbb{N}^+$, 有 $f(k) \leqslant f(x) \leqslant f(k+1), \forall x \in [k, k+1]$, 因此

$$f(k) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k+1).$$

对 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ 求和, 得

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \geqslant \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + f(1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n) \leqslant \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + f(n).$$

(2) 由 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上递减可知,$\forall k \in \mathbb{N}^+$, 有 $f(k+1) \leqslant f(x) \leqslant f(k), \forall x \in [k, k+1]$, 因此

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k).$$

对 $k = 1, 2, \ldots, n-1$ 求和, 得

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(k) \geqslant \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + f(n),$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + f(n) \leqslant \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + f(1).$$

设 $g(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$, 则由

$$g(n+1) - g(n) = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

可知 $g(n)$ 是单调递减, 且有下界 0, 因此极限

$$\lim_{n\to\infty} g(n) = \alpha$$

存在, 且 $0 \leqslant \alpha \leqslant f(1)$.

习题 5.C.18 (Cauchy 积分不等式) 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x,$$

等号成立的充分必要条件是: f 和 g 中有一个恒为零, 或 $f(x)=\lambda g(x)$ (对 $x\in[a,b]$), 这里 λ 是一个常数.

(提示: 本题有好几种证法. 用对积分分上限求导可得出一个证明, 参见习题 5.1 中第 28 题的提示. 最标准的方法如下: 不妨设 $\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\neq 0$, 否则易知函数 g 恒为零, 结论显然成立 (习题 5.1 第 4 题 (2)). 考虑关于 t 的二次项式 $\int_a^b (f(x)+tg(x))^2\mathrm{d}x$, 这总是非负的.)

解 $(f(x)-tg(x))^2\geqslant 0,\forall t\in\mathbb{R}$. 即 $\int_a^b (f(x)-tg(x))^2\,\mathrm{d}x\geqslant 0$. 展开得

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x-2t\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x+t^2\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

即

$$\Delta=4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2-4\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0,$$

即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

习题 5.C.19 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数, 证明: 对任意 $a\in[0,1]$, 有

$$|f(a)|\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\int_0^1|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

解 设 $|f(x_0)|=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$, 又 $f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, 因此

$$\begin{aligned}|f(x_0)|&=\left|\int_0^1 f(x_0)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}t-\int_0^1\left(\int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x+\left|\int_0^1\left(\int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

对于后者

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1\left(\int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_0^1\left|\int_{x_0}^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_0^1\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t\mathrm{d}x\\&=\int_0^1|f'(t)|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

习题 5.C.20 证明: $0.944<\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<0.947$. (提示: 参看习题 5.1 中第 24 题的提示.)

解 由 $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$, 可得

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$$

因此
$$1-\frac{x^2}{6}<\frac{\sin x}{x}<1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}.$$
对上式两端在 $[0,1]$ 上积分, 得
$$\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{6}\right)\mathrm{d}x<\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}\right)\mathrm{d}x,$$
即
$$0.944\bar{4}<\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<0.946\bar{1}.$$

习题 5.C.21 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续可微, 且 $|f'(x)|\leqslant M$. 证明: 对任意正整数 n,
$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leqslant\frac{M}{2n}.$$

解 由 $|f'(x)|\leqslant M$ 可知, 对任意 $x,y\in[0,1]$, 由 Lagrange 中值定理可得 $\exists\xi\in(x,y)$ 使得
$$f'(\xi)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\Rightarrow|f(y)-f(x)|=|f'(\xi)||y-x|\leqslant M|y-x|.$$
因此
$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right|&=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{d}x\right|\\&=\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}(f(x)-f(\tfrac{k}{n}))\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|f(x)-f(\tfrac{k}{n})|\mathrm{d}x\\&\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}M\left|x-\frac{k}{n}\right|\mathrm{d}x\\&=M\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}-x\right)\mathrm{d}x\\&=M\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n^2}=\frac{M}{2n}.\end{aligned}$$

习题 5.C.22 设 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 是一个可微函数, 且对任意实数 x,y 满足
$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant|x-y|.$$
求证: 对任意实数 x, 有
$$(f'(x))^2<2f(x).$$

解 对于任意 x, y, 有 $f(x+y) = f(x) + \int_x^{x+y} f'(t)\,\mathrm{d}t$, 因此

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + yf'(x) + \int_x^{x+y} (f'(t) - f'(x))\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant f(x) + yf'(x) + \int_x^{x+y} |f'(t) - f'(x)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant f(x) + yf'(x) + \int_x^{x+y} |t - x|\,\mathrm{d}t \\ &= f(x) + yf'(x) + \frac{y^2}{2}. \end{aligned}$$

令 $y = -f'(x)$, 则

$$f(x - f'(x)) \leqslant f(x) - (f'(x))^2 + \frac{(f'(x))^2}{2} = f(x) - \frac{(f'(x))^2}{2}.$$

因为 $f(x - f'(x)) > 0$, 所以 $(f'(x))^2 < 2f(x)$.

第 6 章 常微分方程初步

习题 6.1

习题 6.1.1 求下列可分离变量的微分方程.

(1) $(1+x^2)\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x$;

(2) $y' = \mathrm{e}^{x-y}$;

(3) $xy' + y = y^2$;

(4) $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.

解

(1) 不难验证 $y \equiv 0$ 是方程的解. 当 $y \neq 0$ 时,

$$
\begin{aligned}
&(1+x^2)\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow\ &\frac{1}{y}\mathrm{d}y = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow\ &\ln|y| = \arctan x + C \\
\Longrightarrow\ &y = C'\mathrm{e}^{\arctan x}, \quad C' = \mathrm{e}^C
\end{aligned}
$$

综上, 方程的解为

$$
y = C\mathrm{e}^{\arctan x}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
&y' = \mathrm{e}^{x-y} \\
\Longrightarrow\ &\mathrm{e}^y\mathrm{d}y = \mathrm{e}^x\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow\ &\mathrm{e}^y = \mathrm{e}^x + C, \quad C > -\mathrm{e}^x \\
\Longrightarrow\ &y = \ln(\mathrm{e}^x + C)
\end{aligned}
$$

(3) 不难验证 $y \equiv 0, 1$ 是方程的解. 当 $y \neq 0, 1$ 时,

$$
\begin{aligned}
&xy' + y = y^2 \\
\Longrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\Longrightarrow\ &\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + C \\
\Longrightarrow\ &\frac{y-1}{y} = C'x, \quad C' = \mathrm{e}^C \neq 0 \\
\Longrightarrow\ &y = \frac{1}{1-C'x}
\end{aligned}
$$

综上, 方程的解为

$$y=0;\quad y=\frac{1}{1-Cx}$$

(4)

$$\begin{aligned}
&yy'=\frac{1-2x}{y}\\
\Longrightarrow\ & y^2\mathrm{d}y=(1-2x)\mathrm{d}x\\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{3}y^3=x-x^2+C\\
\Longrightarrow\ & y=\sqrt[3]{3x-3x^2+C}.
\end{aligned}$$

且由题设得 $y\neq 0$, 因此方程的所有解为:

$$\frac{3x-3x^2+C}{y^3}=1$$

注 后面为了方便, 我们也将所有解写成:

$$y^3=3x-3x^2+C,\quad y\neq 0.$$

习题 6.1.2 求下列微分方程.

(1) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2$;

(2) $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{2y^2-xy}$;

(4) $(x^2+3y^2)\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y=0$.

解

(1) 记 $p=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=px, y'=p'x+p$. 代入方程得

$$\begin{aligned}
&p'x+p=p^2-2\\
\Longrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}p}{p^2-p-2}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\Longrightarrow\ & \int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+1}\right)\mathrm{d}p=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\Longrightarrow\ & \ln|p-2|-\ln|p+1|=3\ln|x|+C\\
\Longrightarrow\ & \frac{p-2}{p+1}=C'x^3,\quad C'=\mathrm{e}^C>0\\
\Longrightarrow\ & \frac{y-2x}{x+y}=C'x^3\\
\Longrightarrow\ & y=\frac{2x+C'x^4}{1-C'x^3}
\end{aligned}$$

同时注意到 $y-2x=\dfrac{3C'x^4}{1-C'x^3}$, 函数被分为 $y-2x\geqslant 0, y-2x<0$ 两支, 这两支的解是

独立的, 因此综上所述

$$y=\frac{2x+C_1x^4}{1-C_1x^3},C_1\in\mathbb{R},y-2x\geqslant 0;\quad y=\frac{2x+C_2x^4}{1-C_2x^3},C_2\in\mathbb{R},y-2x<0.$$

注 为了方便, 我们也写为

$$y=\frac{2x+Cx^4}{1-Cx^3},\quad x\neq 0$$

(2) 记 $p=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=px,y'=p'x+p$. 代入方程得

$$\begin{aligned}
&p'x+p=p+\frac{1}{p}\\
\Longrightarrow\ &p'=\frac{1}{px}\\
\Longrightarrow\ &p\mathrm{d}p=\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\Longrightarrow\ &\frac{1}{2}p^2=\ln|x|+C\\
\Longrightarrow\ &y^2=x^2(2\ln|x|+C'),\quad C'=2C.
\end{aligned}$$

由于微分方程在 $x=0$ 处不连续, x 正负半轴的解是独立的,

$$y^2=x^2(2\ln x+C_1),x>0;\quad y^2=x^2(2\ln(-x)+C_2),x<0.$$

或者

$$y^2=x^2(2\ln|x|+C),x\neq 0.$$

(3) 记 $p=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=px,y'=p'x+p$. $y=x,y=2x$ 显然为方程的解,$u\neq 0,1,2$ 时代入方程得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2-x(px)+(px)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2(px)^2-x(px)}\mathrm{d}(px)\\
\Longrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{p^2-p+1}{p(p-1)(p-2)}\,\mathrm{d}p\\
\Longrightarrow\ &\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int\left(-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}p}{p}+\frac{\mathrm{d}p}{p-1}-\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}p}{p-2}\right)\\
\Longrightarrow\ &x^{-1}p^{\frac{1}{2}}(p-1)^{-1}(p-2)^{\frac{3}{2}}=C\\
\Longrightarrow\ &C'(y-x)^2=y(y-2x)^3,\quad C'=C^2
\end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$C_1(y-x)^2=y(y-2x)^3,y>0,\quad C_2(y-x)^2=y(y-2x)^3,y<0,\quad y=x,y\neq 0,\quad y=2x,y\neq 0$$

或者

$$C(y-x)^2=y(y-2x)^3,y\neq 0,\quad y=x,y\neq 0,\quad y=2x,y\neq 0$$

或者

$$C(y-x)^2 = y(y-2x)^3, y \neq 0, \quad y = x, y \neq 0$$

(4) 记 $p = \dfrac{y}{x}$, 则 $y = px, y' = p'x + p$. 代入方程得 $x \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
& (x^2 + 3(px)^2)\mathrm{d}x - 2x(px)\mathrm{d}(px) \\
\Longrightarrow\ & \frac{2p}{1+p^2}\,\mathrm{d}p = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow\ & \ln\left(1+p^2\right) = \ln|x| + C \\
\Longrightarrow\ & 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = C'x, \quad C' = \mathrm{e}^C > 0 \\
\Longrightarrow\ & x^2 + y^2 = C'x^3
\end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$x^2 + y^2 = Cx^3$$

习题 6.1.3 证明: 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

的方程, 可通过代换化为齐次方程. (提示: 若方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

有非零解 x_0, y_0 (即 x_0, y_0 不全为零), 则可令 $u = x - x_0, v = y - y_0$; 其他情形更易于处理.)

求下面方程:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y+3}{x-y+1}$;

(2) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x+4y+3}{x+2y+1}$.

解 对线性方程组

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D = a_1b_2 - a_2b_1$ 进行讨论.

(1) $D \neq 0$: 此时方程组有唯一解 (x_0, y_0). 令 $u = x - x_0, v = y - y_0$, 则 $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x, \mathrm{d}v = \mathrm{d}y$, 且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}$. 原方程变为:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{a_1(u+x_0) + b_1(v+y_0) + c_1}{a_2(u+x_0) + b_2(v+y_0) + c_2}\right)$$

因为 (x_0, y_0) 是方程组的解, 所以 $a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0$ 且 $a_2x_0 + b_2y_0 + c_2 = 0$. 上式化为:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1(v/u)}{a_2 + b_2(v/u)}\right)$$

这是一个关于 u, v 的齐次方程.

(2) $D=0$: 此时 $a_1b_2=a_2b_1$. 我们可以设 $a_1=ka_2, b_1=kb_2$ (假设 a_2, b_2 不全为零).

- 如果 $c_1=kc_2$, $\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}=k$ 为常数. 方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(k)$, 其解为 $y=f(k)x+C$.
- 如果 $c_1\neq kc_2$, 令 $z=a_2x+b_2y$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 原方程的右边可以写成 z 的函数:
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{k(a_2x+b_2y)+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)=f\left(\frac{kz+c_1}{z+c_2}\right)$$
代入 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 的表达式:
$$\frac{1}{b_2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-a_2\right)=f\left(\frac{kz+c_1}{z+c_2}\right)\implies\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=a_2+b_2f\left(\frac{kz+c_1}{z+c_2}\right)$$
这是一个变量分离方程 $\dfrac{\mathrm{d}z}{a_2+b_2f(\dots)}=\mathrm{d}x$.

综上, 该类方程总能通过代换化为齐次方程或变量分离方程.

(1) 解方程组 $\begin{cases}x+y+3=0\\ x-y+1=0\end{cases}$, 得 $x=-2, y=-1$. 令 $u=x+2, v=y+1$. 则 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=\dfrac{(u-2)+(v-1)+3}{(u-2)-(v-1)+1}=\dfrac{u+v}{u-v}$. 这是齐次方程. 令 $p=v/u$, 则 $v=pu$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}=u\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}+p$.
$$u\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}+p=\frac{u+pu}{u-pu}=\frac{1+p}{1-p}\implies u\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}=\frac{1+p}{1-p}-p=\frac{1+p-p+p^2}{1-p}=\frac{1+p^2}{1-p}$$
分离变量: $\dfrac{1-p}{1+p^2}\mathrm{d}p=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$. 积分:
$$\int\frac{1-p}{1+p^2}\mathrm{d}p=\int\frac{1}{1+p^2}\mathrm{d}p-\int\frac{p}{1+p^2}\mathrm{d}p=\int\frac{\mathrm{d}u}{u}$$
得到
$$\arctan(p)-\frac{1}{2}\ln(1+p^2)=\ln|u|+C$$
代回 $p=v/u$:
$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{v^2}{u^2}\right)=\ln|u|+C$$
$$\arctan\left(\frac{v}{u}\right)=\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)-\frac{1}{2}\ln(u^2)+\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)+C$$
代回 $u=x+2, v=y+1$:
$$\arctan\left(\frac{y+1}{x+2}\right)-\frac{1}{2}\ln((x+2)^2+(y+1)^2)=C$$
即, 微分方程的解为
$$y+1=(x+2)\tan\left(\frac{1}{2}\ln((x+2)^2+(y+1)^2)+C\right), x-y+1\neq 0$$

(2) 这里 $a_1=2, b_1=4, a_2=1, b_2=2$. $D=2\cdot2-4\cdot1=0$. 令 $z=x+2y$. 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

原方程变为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2(x+2y)+3}{x+2y+1}=\dfrac{2z+3}{z+1}$. 代入 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$ 的表达式:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1+2\left(\frac{2z+3}{z+1}\right)=\frac{z+1+4z+6}{z+1}=\frac{5z+7}{z+1}$$

分离变量: $\dfrac{z+1}{5z+7}\mathrm{d}z=\mathrm{d}x$. 积分:

$$\int\frac{z+1}{5z+7}\mathrm{d}z=\int\frac{\frac{1}{5}(5z+7)-\frac{7}{5}+1}{5z+7}\mathrm{d}z=\int\left(\frac{1}{5}-\frac{2/5}{5z+7}\right)\mathrm{d}z=\int\mathrm{d}x$$

得到

$$\frac{1}{5}z-\frac{2}{25}\ln|5z+7|=x+C$$

代回 $z=x+2y$:

$$\frac{1}{5}(x+2y)-\frac{2}{25}\ln|5(x+2y)+7|=x+C$$

整理得:

$$5(x+2y)-2\ln|5x+10y+7|=25x+C'$$

$$10y-20x-2\ln|5x+10y+7|=C'$$

$$10x-5y+\ln|5x+10y+7|=C''$$

即, 微分方程的解为

$$10x-5y+\ln|5x+10y+7|=C, x+2y+1\neq0$$

习题 6.1.4 求下列线性方程和 Bernoulli 方程的解.

(1) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$;

(2) $y'+\dfrac{1-2x}{x}=1$;

(3) $y'=\dfrac{y}{x+y^3}$;

(4) $y'+\dfrac{y}{x}=y^2\ln x$;

(5) $y'=y\tan x+y^2\cos x$;

(6) $y-y'\cos x=y^2(1-\sin x)\cos x$.

解

(1) 转为标准形式:

$$y'+\left(-\frac{2x}{1+x^2}\right)y=1+x^2.$$

则 $\int P(x)\,\mathrm{d}x = \int -\frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\ln(1+x^2)$. 根据线性方程通解公式:

$$\begin{aligned} y &= \mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right) \\ &= (1+x^2)\left(\int (1+x^2)\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + C\right) \\ &= (1+x^2)(x+C). \end{aligned}$$

综上, 方程的解为

$$y = (x+C)(1+x^2)$$

(2) 原方程可写为 $y' = 1 - \frac{1-2x}{x} = 1 - \frac{1}{x} + 2 = 3 - \frac{1}{x}$. 分离变量得 $\mathrm{d}y = \left(3 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$. 积分得

$$y = 3x - \ln|x| + C$$

(3) 将方程视为 x 关于 y 的函数. 原方程可写为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x+y^3}{y} = \frac{x}{y} + y^2$. 整理得:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} - \frac{1}{y}x = y^2.$$

这是一个关于 x 的线性方程. $P(y) = -\frac{1}{y}, Q(y) = y^2$. $\int P(y)\,\mathrm{d}y = -\ln|y|$. 通解为:

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^{-(-\ln|y|)}\left(\int y^2\mathrm{e}^{-\ln|y|}\,\mathrm{d}y + C\right) \\ &= |y|\left(\int y^2\frac{1}{|y|}\,\mathrm{d}y + C\right) \\ &= y\left(\int y\,\mathrm{d}y + C\right) \quad (\text{假设} y>0) \\ &= y\left(\frac{1}{2}y^2 + C\right) = \frac{y^3}{2} + Cy. \end{aligned}$$

解为 $x = \frac{y^3}{2} + Cy, x + y^3 \neq 0$

(4) 这是 Bernoulli 方程. $y \equiv 0$ 是一个解. 当 $y \neq 0$ 时, 方程两边同除以 y^2:

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-1} = \ln x.$$

作代换 $u = y^{-1}$, 则 $u' = -y^{-2}y'$. 方程变为:

$$-u' + \frac{1}{x}u = \ln x \implies u' - \frac{1}{x}u = -\ln x.$$

这是一个线性方程. $\int P(x)\,\mathrm{d}x = -\ln|x|$.

$$u = \mathrm{e}^{-(-\ln|x|)}\left(\int(-\ln x)\mathrm{e}^{-\ln|x|}\,\mathrm{d}x + C\right)$$
$$= |x|\left(\int(-\ln x)\frac{1}{|x|}\,\mathrm{d}x + C\right)$$
$$= x\left(-\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x + C\right) \quad (\text{假设}x > 0)$$
$$= x\left(-\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C\right).$$

所以 $y^{-1} = x\left(C - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right)$, 即 $y = \dfrac{1}{x\left(C - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right)}$. 通解为

$$y = 0 \quad \text{和} \quad 1 = yx\left(C - \frac{1}{2}(\ln x)^2\right).$$

(5) 这是 Bernoulli 方程. $y \equiv 0$ 是一个解. 当 $y \neq 0$ 时, 方程写为 $y' - (\tan x)y = (\cos x)y^2$. 两边同除以 y^2: $y^{-2}y' - (\tan x)y^{-1} = \cos x$. 令 $u = y^{-1}$, 则 $u' = -y^{-2}y'$. 方程变为:

$$-u' - (\tan x)u = \cos x \implies u' + (\tan x)u = -\cos x.$$

这是一个线性方程. $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$.

$$u = \mathrm{e}^{-(-\ln|\cos x|)}\left(\int(-\cos x)\mathrm{e}^{-\ln|\cos x|}\,\mathrm{d}x + C\right)$$
$$= |\cos x|\left(\int(-\cos x)\frac{1}{|\cos x|}\,\mathrm{d}x + C\right).$$

假设 $\cos x > 0$, 则 $u = \cos x\left(\int(-1)\,\mathrm{d}x + C\right) = \cos x(-x+C)$. 所以 $y^{-1} = (C-x)\cos x$, 即 $y = \dfrac{1}{(C-x)\cos x}$. 通解为

$$y = 0,\ \text{和}1 = y\cos x(C - x).$$

(6) 这是 Bernoulli 方程. $y \equiv 0$ 是一个解. 当 $y \neq 0$ 时, 将方程整理为标准形式:

$$y'\cos x = y - y^2(1 - \sin x)\cos x \implies y' - (\sec x)y = -(1 - \sin x)y^2.$$

两边同除以 y^2: $y^{-2}y' - (\sec x)y^{-1} = -(1 - \sin x)$. 令 $u = y^{-1}$, 则 $u' = -y^{-2}y'$. 方程变为:

$$-u' - (\sec x)u = -(1 - \sin x) \implies u' + (\sec x)u = 1 - \sin x.$$

这是一个线性方程. $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|$.

$$u = \mathrm{e}^{-\ln|\sec x + \tan x|}\left(\int(1 - \sin x)\mathrm{e}^{\ln|\sec x + \tan x|}\,\mathrm{d}x + C\right)$$
$$= \frac{1}{|\sec x + \tan x|}\left(\int(1 - \sin x)|\sec x + \tan x|\,\mathrm{d}x + C\right).$$

假设 $\sec x+\tan x>0$, 则

$$\begin{aligned}\int(1-\sin x)(\sec x+\tan x)\,\mathrm{d}x&=\int(\sec x+\tan x-\tan x-\sin x\tan x)\,\mathrm{d}x\\&=\int(\sec x-\frac{\sin^2 x}{\cos x})\,\mathrm{d}x=\int\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\&=\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x.\end{aligned}$$

所以 $u=\dfrac{1}{\sec x+\tan x}(\sin x+C)$.

注 此处只需要考虑 $\sec x+\tan x>0$ 的情形, 从另一个角度来理解是这样的:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left((\tan x+\sec x)u\right)&=\left((\sec x+\tan x)u'+\sec x(\sec x+\tan x)u\right)\mathrm{d}x\\&=\left((\sec x+\tan x)(1-\sin x)\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因此

$$(\tan x+\sec x)u=\int(\sec x+\tan x)(1-\sin x)\,\mathrm{d}x+C=\sin x+C.$$

故微分方程的解为

$$y=0\quad\text{和}\quad y(\sin x+C)=\sec x+\tan x.$$

习题 6.1.5 求下列方程满足初值条件的特解.

(1) $y'=\dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x},y(1)=1$;

(2) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x},y(\pi)=1$.

解

(1) 这是齐次方程. 令 $u=y/x$, 则 $y'=u'x+u$. 方程变为

$$u'x=u(\ln u-1).$$

分离变量:

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分得

$$\ln u-1=Cx.$$

所以 $u=\mathrm{e}^{1+Cx}$, 即 $y=x\mathrm{e}^{1+Cx}$. 代入初值 $y(1)=1$, 得 $1=1\cdot\mathrm{e}^{1+C}$, 解得 $C=-1$. 故特解为

$$y=x\mathrm{e}^{1-x},x>0.$$

(2) 这是线性方程. 积分因子为 $I(x)=\mathrm{e}^{\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\ln x}=x$ (因 $x>0$). 通解为

$$\begin{aligned} y&=\frac{1}{x}\left(\int x\cdot\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\frac{1}{x}\left(\int \sin x\mathrm{d}x+C\right)=\frac{-\cos x+C}{x}. \end{aligned}$$

代入初值 $y(\pi)=1$, 得 $1=\dfrac{-\cos\pi+C}{\pi}=\dfrac{1+C}{\pi}$. 解得 $C=\pi-1$. 故特解为

$$y=\frac{-\cos x+\pi-1}{x}, x>0.$$

习题 6.1.6 求解下列微分方程.

(1) $y'+x=\sqrt{x^2+y}$;

(2) $y'=\cos(x-y)$;

(3) $y'-\mathrm{e}^{x-y}+\mathrm{e}^x=0$;

(4) $y'\sin y+x\cos y+x=0$.

解

(1) 令 $u^2=x^2+y$, 则 $y=u^2-x^2, y'=2uu'-2x$. 代入方程得

$$\begin{aligned} &y'+x=\sqrt{x^2+y}\\ \Longrightarrow\ &2uu'-2x+x=u\\ \Longrightarrow\ &2vx(xv'+v)=x+vx(u=vx)\\ \Longrightarrow\ &(1-p)^{-2}=C|x|\\ \Longrightarrow\ &y=-2x^4+Cx^6 \end{aligned}$$

(2) 令 $u=x-y$, 则 $y=x-u, y'=1-u'$. 代入方程得

$$\begin{aligned} &y'=\cos(x-y)\\ \Longrightarrow\ &1-u'=\cos u\\ \Longrightarrow\ &u'=1-\cos u\\ \Longrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}u}{1-\cos u}=\mathrm{d}x\\ \Longrightarrow\ &\int\frac{\mathrm{d}u}{1-\cos u}=\int\mathrm{d}x \end{aligned}$$

注意到 $\dfrac{1}{1-\cos u}=\dfrac{1}{2}\csc^2\left(\dfrac{u}{2}\right)$, 所以

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{1-\cos u}=\int\frac{1}{2}\csc^2\left(\frac{u}{2}\right)\mathrm{d}u=-2\cot\left(\frac{u}{2}\right)+C.$$

故方程的通解为

$$-2\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)=x+C.$$

(3) 令 $u = \mathrm{e}^y, u' = \mathrm{e}^y y'$, 代入方程得

$$
\begin{aligned}
& y' - \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^x = 0 \\
\Longrightarrow\ & \mathrm{e}^y y' - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y = 0 \\
\Longrightarrow\ & u' - \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x u = 0 \\
\Longrightarrow\ & \frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow\ & -\ln|1-u| = \mathrm{e}^x + C \\
\Longrightarrow\ & 1 - \mathrm{e}^y = C'\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}
\end{aligned}
$$

(4) 直接分离变量, 并验证 $y = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ 为方程的特解, 因此

$$
\begin{aligned}
& \ln|1+\cos y| = \frac{1}{2}x^2 + C \\
\Longrightarrow\ & 1 + \cos y = C'\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}
\end{aligned}
$$

习题 6.1.7 试用常数变易法导出 Bernoulli 方程的通解.

解 Bernoulli 方程的一般形式为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (n \neq 0, 1)$$

我们使用常数变易法来求解.

(1) **求解对应的齐次线性方程**

我们先考虑与 Bernoulli 方程相关的齐次线性方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$$

这是一个可分离变量的方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -P(x)\mathrm{d}x$$

两边积分, 得 $\ln|y| = -\displaystyle\int P(x)\mathrm{d}x + C_0$, 其通解为:

$$y = C - \int P(x)\mathrm{d}x$$

其中 C 是任意常数.

(2) **使用常数变易法**

现在, 我们假设原 Bernoulli 方程的解具有与上述齐次解相似的形式, 但将常数 C 替换为一个关于 x 的函数 $C(x)$. 设原方程的解为:

$$y(x) = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

我们求其导数:

$$y'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot (-P(x))$$

注意到 $y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$, 上式可以写成:

$$y'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - P(x)y$$

(3) **代入原方程并求解** $C(x)$

将 y' 的表达式代入原 Bernoulli 方程 $y' + P(x)y = Q(x)y^n$:

$$\left(C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - P(x)y\right) + P(x)y = Q(x)y^n$$

化简得:

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)y^n$$

现在, 将 $y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 代入上式的右边:

$$C'(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)\left(C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\right)^n = Q(x)[C(x)]^n\mathrm{e}^{-n\int P(x)\mathrm{d}x}$$

整理以求解 $C'(x)$:

$$C'(x) = Q(x)[C(x)]^n\mathrm{e}^{-n\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x)[C(x)]^n\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}$$

这是一个关于 $C(x)$ 的可分离变量方程. 我们分离变量:

$$\frac{\mathrm{d}C}{[C(x)]^n} = Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

两边积分 (假设 $n \neq 1$):

$$\int [C(x)]^{-n}\mathrm{d}C = \int Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{1-n}[C(x)]^{1-n} = \int Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1$$

解出 $[C(x)]^{1-n}$:

$$[C(x)]^{1-n} = (1-n)\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1\right)$$

(4) **得到通解**

从 $y = C(x)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$ 可得 $C(x) = y\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}$. 代入上式:

$$\left(y\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\right)^{1-n} = (1-n)\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C_1\right)$$

$$y^{1-n}\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x} = (1-n)\int Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C'$$

两边同乘以 $e^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}$:

$$y^{1-n} = \mathrm{e}^{-(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\left((1-n)\int Q(x)\mathrm{e}^{(1-n)\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C'\right)$$

这与通过标准代换 $u=y^{1-n}$ 得到的解是等价的.

习题 6.1.8 一条曲线过点 (2,3), 其在坐标轴间的任意切线段被切点平分, 求这条曲线.

解 设曲线上任意一点为 (x,y), 该点的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$. 切线与 X 轴的交点 (令 $Y=0$): $X=x-\dfrac{y}{y'}$. 切线与 Y 轴的交点 (令 $X=0$): $Y=y-xy'$. 这两个交点分别是 $(x-\dfrac{y}{y'},0)$ 和 $(0,y-xy')$.

根据题意, 这两个交点所构成的线段的中点是切点 (x,y) 本身. 所以我们有中点坐标公式:

$$x=\frac{(x-\frac{y}{y'})+0}{2}\implies 2x=x-\frac{y}{y'}\implies x=-\frac{y}{y'}$$

$$y=\frac{0+(y-xy')}{2}\implies 2y=y-xy'\implies y=-xy'$$

从第一个方程可以得到微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=-\frac{y}{x}$$

(第二个方程 $y=-x(-\dfrac{y}{x})=y$ 与第一个方程是相容的).

这是一个可分离变量的方程.

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分:

$$\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y=-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x\implies\ln|y|=-\ln|x|+C_1$$

$$\ln|y|+\ln|x|=C_1\implies\ln|xy|=C_1$$

$$|xy|=\mathrm{e}^{C_1}\implies xy=C\quad(C\text{为任意非零常数})$$

曲线经过点 (2,3), 代入方程确定常数 C:

$$2\cdot 3=C\implies C=6$$

因此, 所求的曲线方程为 $xy=6$.

习题 6.1.9 设函数 $f(x)$ 处处连续, 且 $f(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ (对 $x\in\mathbb{R}$), 求 $f(x)$.

解 给定方程 $f(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. 由于 $f(x)$ 连续, 根据微积分基本定理, 积分的变上限函数 $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是可导的, 且其导数为 $f(x)$. 对方程两边关于 x 求导, 我们得到:

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)$$

我们得到了一个微分方程 $f'(x)=f(x)$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y$ (令 $y=f(x)$). 这是一个可分离变量的方程, 其通解为:

$$y=C\mathrm{e}^x$$

所以 $f(x)=C\mathrm{e}^x$.

现在我们需要确定常数 C. 将 $x=0$ 代入原积分方程 $f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$:

$$f(0)=\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t=0$$

再将 $x=0$ 代入通解 $f(x)=C\mathrm{e}^x$:

$$f(0)=C\mathrm{e}^0=C\cdot 1=C$$

因此, 我们得到 $C=0$. 所以, 函数 $f(x)$ 的唯一解是 $f(x)=0\cdot\mathrm{e}^x=0$. 即 $f(x)$ 是零函数.

习题 6.1.10 已知镭的衰变速率与镭的现存量成正比 (比例常数为 k). 设开始时镭的量为 a, 问 t 时刻镭的量 $x(t)$ 为多少?

解 设 t 时刻镭的量为 $x(t)$. 衰变速率即为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. 根据题意, 衰变速率与现存量成正比, 比例常数为 k. 因为是衰变, 所以速率为负.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kx(t)\quad(k>0)$$

这是一个可分离变量的微分方程.

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=-k\mathrm{d}t$$

两边积分:

$$\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int -k\mathrm{d}t \implies \ln|x|=-kt+C_1$$

由于 $x(t)$ 代表物质的量, $x(t)>0$, 所以 $|x|=x$.

$$\ln x=-kt+C_1 \implies x(t)=\mathrm{e}^{-kt+C_1}=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-kt}$$

令 $C=\mathrm{e}^{C_1}$, 则通解为 $x(t)=C\mathrm{e}^{-kt}$.

我们有初始条件: 开始时 ($t=0$) 镭的量为 a. 即 $x(0)=a$. 代入通解:

$$x(0)=C\mathrm{e}^{-k\cdot 0}=C\mathrm{e}^0=C$$

所以 $C=a$. 因此, t 时刻镭的量为:

$$x(t)=a\mathrm{e}^{-kt}$$

习题 6.1.11 一汽艇以速度 $v=10$ km/h 在静水上运动, 它的发动机在开足马力后关掉, 经过 20 s 后, 汽艇的速度降低为 $v_1=6$ km/h. 设水对汽艇运动的阻力与汽艇速度成正比, 试求:

(1) 发动机停止 2 min 后汽艇的速度;

(2) 发动机停止 1 min 后汽艇所走的路程.

解 设汽艇的质量为 m, 速度为 $v(t)$. 阻力 F_r 与速度成正比, $F_r=-kv$ ($k>0$ 为阻力系数). 根

据牛顿第二定律 $F = ma$, 我们有:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv$$

这是一个可分离变量的方程.

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{k}{m}\mathrm{d}t$$

两边积分: $\ln v = -\dfrac{k}{m}t + C_1$. 通解为 $v(t) = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} = C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$.

我们统一单位. 速度单位用 m/s, 时间单位用 s. $v_0 = 10\ \mathrm{km/h} = 10 \cdot \dfrac{1000}{3600}\ \mathrm{m/s} = \dfrac{25}{9}\ \mathrm{m/s}$. $v_1 = 6\ \mathrm{km/h} = 6 \cdot \dfrac{1000}{3600}\ \mathrm{m/s} = \dfrac{5}{3}\ \mathrm{m/s}$.

初始条件: $t = 0$ 时, $v(0) = v_0 = \dfrac{25}{9}$. 代入通解: $v(0) = C\mathrm{e}^0 = C \implies C = \dfrac{25}{9}$. 所以速度函数为 $v(t) = \dfrac{25}{9}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}$.

利用 $t = 20\mathrm{s}$ 时的数据求 $\dfrac{k}{m}$: $v(20) = \dfrac{5}{3}$.

$$\frac{5}{3} = \frac{25}{9}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\cdot 20} \implies \mathrm{e}^{-20\frac{k}{m}} = \frac{5}{3}\cdot\frac{9}{25} = \frac{3}{5}$$

$$-20\frac{k}{m} = \ln\left(\frac{3}{5}\right) \implies \frac{k}{m} = -\frac{1}{20}\ln\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{20}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

所以速度的精确表达式为 $v(t) = \dfrac{25}{9}\mathrm{e}^{-\frac{t}{20}\ln(\frac{5}{3})} = \dfrac{25}{9}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{t}{20}}$.

(1) 求 $t = 2\ \mathrm{min} = 120\ \mathrm{s}$ 后的速度.

$$v(120) = \frac{25}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{120}{20}} = \frac{25}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^6 = \frac{5^2}{3^2}\cdot\frac{3^6}{5^6} = \frac{3^4}{5^4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}\ \mathrm{m/s}$$

换算成 km/h: $\dfrac{81}{625}\cdot\dfrac{3600}{1000} = \dfrac{81}{625}\cdot\dfrac{18}{5} = \dfrac{1458}{3125} \approx 0.46656\ \mathrm{km/h}$.

(2) 求 $t = 1\ \mathrm{min} = 60\ \mathrm{s}$ 后所走的路程 $s(60)$. 路程是速度对时间的积分: $s(t) = \displaystyle\int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau$.

$$s(60) = \int_0^{60}\frac{25}{9}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\tau}\mathrm{d}\tau = \frac{25}{9}\left[-\frac{m}{k}\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\tau}\right]_0^{60}$$

我们知道 $\dfrac{k}{m}=\dfrac{1}{20}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)$, 所以 $\dfrac{m}{k}=\dfrac{20}{\ln(5/3)}$.

$$\begin{aligned}
s(60)&=\frac{25}{9}\left(-\frac{m}{k}\right)\left(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}\cdot 60}-\mathrm{e}^0\right)\\
&=-\frac{25}{9}\frac{20}{\ln(5/3)}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{60}{20}}-1\right)\\
&=-\frac{500}{9\ln(5/3)}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{3}-1\right)\\
&=-\frac{500}{9\ln(5/3)}\left(\frac{27}{125}-1\right)=-\frac{500}{9\ln(5/3)}\left(-\frac{98}{125}\right)\\
&=\frac{500\cdot 98}{9\cdot 125\ln(5/3)}=\frac{4\cdot 125\cdot 98}{9\cdot 125\ln(5/3)}=\frac{392}{9\ln(5/3)}\text{ m}.
\end{aligned}$$

$\ln(5/3)\approx\ln(1.667)\approx 0.5108$. $s(60)\approx\dfrac{392}{9\cdot 0.5108}\approx\dfrac{392}{4.5972}\approx 85.27$ m.

习题 6.1.12 求解下列二阶方程.

(1) $xy''=y'$;

(2) $y''=\dfrac{y'}{x}+x$;

(3) $y''=y'+x$;

(4) $y''+(y')^2=2\mathrm{e}^{-y}$.

解

(1) 令 $p=y'$, 则 $y''=p'$. 方程变为 $xp'=p$. 这是一个可分离变量方程: $\dfrac{\mathrm{d}p}{p}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$. 积分得 $\ln|p|=\ln|x|+C_1$, 所以 $p=C_1'x$. 即 $y'=C_1'x$. 再次积分: $y=\displaystyle\int C_1'x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}C_1'x^2+C_2$. 令 $C_1=C_1'/2$, 解为 $y=C_1x^2+C_2$.

(2) 令 $p=y'$, 则 $y''=p'$. 方程变为 $p'=\dfrac{p}{x}+x$, 即 $p'-\dfrac{1}{x}p=x$. 这是一个线性方程. $\displaystyle\int P(x)\mathrm{d}x=\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\ln|x|$. 通解为:

$$\begin{aligned}
p&=\mathrm{e}^{-(-\ln|x|)}\left(\int x\mathrm{e}^{-\ln|x|}\mathrm{d}x+C_1\right)\\
&=|x|\left(\int x\frac{1}{|x|}\mathrm{d}x+C_1\right)\\
&=x\left(\int\mathrm{d}x+C_1\right)\quad(\text{假设}x>0)\\
&=x(x+C_1)=x^2+C_1x.
\end{aligned}$$

即 $y'=x^2+C_1x$. 再次积分: $y=\displaystyle\int(x^2+C_1x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}C_1x^2+C_2$.

(3) 令 $p=y'$, 则 $y''=p'$. 方程变为 $p'=p+x$, 即 $p'-p=x$. 这是一个线性方程. $\displaystyle\int P(x)\mathrm{d}x=$

$\int -1\mathrm{d}x = -x$. 通解为:

$$\begin{aligned} p &= \mathrm{e}^{-(-x)}\left(\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + C_1\right) \\ &= \mathrm{e}^x\left(-(x+1)e^{-x} + C_1\right) \quad (\text{分部积分}) \\ &= -(x+1) + C_1\mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

即 $y' = C_1\mathrm{e}^x - x - 1$. 再次积分: $y = \int (C_1\mathrm{e}^x - x - 1)\mathrm{d}x = C_1\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}x^2 - x + C_2$.

(4) 方程不显含 x. 令 $p = y'$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 方程变为 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} + p^2 = 2e^{-y}$. 令 $u = p^2$, 则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 2p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 方程化为:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + u = 2e^{-y} \implies \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + 2u = 4e^{-y}.$$

这是一个关于 $u(y)$ 的线性方程. $\int P(y)\mathrm{d}y = \int 2\mathrm{d}y = 2y$. 通解为:

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{e}^{-2y}\left(\int 4e^{-y}\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y + C_1\right) \\ &= \mathrm{e}^{-2y}\left(\int 4e^{y}\mathrm{d}y + C_1\right) = \mathrm{e}^{-2y}(4e^y + C_1) = 4e^{-y} + C_1\mathrm{e}^{-2y}. \end{aligned}$$

因为 $u = p^2 = (y')^2$, 所以 $(y')^2 = 4e^{-y} + C_1\mathrm{e}^{-2y}$.

$$y' = \pm\sqrt{4e^{-y} + C_1\mathrm{e}^{-2y}}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{4e^{-y} + C_1\mathrm{e}^{-2y}}} = \pm\int \mathrm{d}x \implies \int \frac{e^y\mathrm{d}y}{\sqrt{4e^y + C_1}} = \pm x + C_2.$$

令 $w = \sqrt{4e^y + C_1}$, 则 $w^2 = 4e^y + C_1$, $2w\mathrm{d}w = 4e^y\mathrm{d}y$.

$$\int \frac{w/2\mathrm{d}w}{w} = \frac{1}{2}w = \frac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_1}.$$

所以 $\frac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_1} = \pm x + C_2$.

$$\sqrt{4e^y + C_1} = \pm 2x + 2C_2 \implies 4e^y + C_1 = (C_1' \pm 2x)^2.$$

解为 $4e^y = (C_1 \pm 2x)^2 - C_2$. 或者写为

$$\mathrm{e}^y = x^2 + C_1x + C_2.$$

习题 6.1.13 求下列二阶方程满足初值条件的特解.

(1) $y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}, y(1) = 1, y'(1) = 0$;　　(2) $y^3y'' = -1, y(1) = 1, y'(1) = 0$.

解

(1) 方程在 $y' = 0$ 时无定义. 我们对方程变形: $y'y'' - \frac{(y')^2}{x} = x^2$. 令 $u = (y')^2$, 则 $u' = 2y'y''$.

方程变为:

$$\frac{1}{2}u' - \frac{u}{x} = x^2 \implies u' - \frac{2}{x}u = 2x^2.$$

这是一个线性方程. $\int P(x)\mathrm{d}x = \int -\frac{2}{x}\mathrm{d}x = -2\ln x = \ln(x^{-2})$. 通解为:

$$\begin{aligned} u &= \mathrm{e}^{-\ln(x^{-2})}\left(\int 2x^2\mathrm{e}^{\ln(x^{-2})}\mathrm{d}x + C\right) \\ &= x^2\left(\int 2x^2 \cdot x^{-2}\mathrm{d}x + C\right) = x^2\left(\int 2\mathrm{d}x + C\right) = x^2(2x+C). \end{aligned}$$

所以 $(y')^2 = 2x^3 + Cx^2$. 使用初值条件 $y'(1) = 0$:

$$0^2 = 2(1)^3 + C(1)^2 \implies 2 + C = 0 \implies C = -2.$$

于是 $(y')^2 = 2x^3 - 2x^2 = 2x^2(x-1)$. $y' = \pm\sqrt{2}x\sqrt{x-1}$. 再次积分:

$$y = \int \pm\sqrt{2}x\sqrt{x-1}\mathrm{d}x$$

令 $t = \sqrt{x-1}$, 则 $x = t^2 + 1, \mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x-1}\mathrm{d}x &= \int (t^2+1)t \cdot 2t\mathrm{d}t = \int (2t^4 + 2t^2)\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C' = \frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C'. \end{aligned}$$

所以 $y = \pm\sqrt{2}\left(\frac{2}{5}(x-1)^{5/2} + \frac{2}{3}(x-1)^{3/2}\right) + C_2$. 使用初值条件 $y(1) = 1$:

$$1 = \pm\sqrt{2}(0+0) + C_2 \implies C_2 = 1.$$

特解为 $y = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{15}(3(x-1)+5)(x-1)^{3/2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}}{15}(3x+2)(x-1)^{3/2}$.

(2) 方程不显含 x. 令 $p = y'$, 则 $y'' = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 方程变为

$$y^3 p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -1$$

分离变量:

$$p\mathrm{d}p = -y^{-3}\mathrm{d}y$$

积分后整理得

$$p^2 = \frac{1}{y^2} + 2C_1,$$

即

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} + C.$$

使用初值条件 $y(1) = 1, y'(1) = 0$: $0^2 = \frac{1}{1^2} + C \implies C = -1$. 所以

$$(y')^2 = \frac{1}{y^2} - 1 = \frac{1-y^2}{y^2} \Rightarrow y' = \pm\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

分离变量后积分:

$$\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y = -\sqrt{1-y^2}$$

所以

$$-\sqrt{1-y^2} = \pm x + C_2.$$

使用初值条件 $y(1) = 1$

$$-\sqrt{1-1^2} = 0 = \pm 1 + C_2 \implies C_2 = \mp 1$$

所以

$$-\sqrt{1-y^2} = \pm x \mp 1 = \pm(x-1)$$

两边平方:

$$1 - y^2 = (x-1)^2 \Rightarrow y^2 + (x-1)^2 = 1$$

由于 $y(1) = 1 > 0$, 我们取上半圆, 即特解为 $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$.

习题 6.2

习题 6.2.1 在下列方程中, 已知方程的一个特解 y_1, 试求它们的通解.

(1) $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0, y_1=\dfrac{\sin x}{x}$;　　(2) $y''\sin^2 x=2y, y_1=\cot x$;

(3) $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0, y_1=x$.

解

(1) 微分方程在 $x\neq 0$ 上有解, 在 $x>0$ 中取 $x_0=1$, 则

$$\begin{aligned}y_2&=y_1\int\frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int_1^x p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\sin x}{x}\int\csc^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin x}{x}(-\cot x+C)=\frac{\cos x}{x}+C\frac{\sin x}{x}.\end{aligned}$$

在 $x<0$ 中取 $x_0=-1$, 同理可得相同的结果, 所以通解为

$$y=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\sin x}{x}(-\cot x)=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}.$$

(2) 微分方程在 $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$ 上有解, 在 $(0,\pi)$ 中取 $x_0=\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$y_2=y_1\int\frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int_{\frac{\pi}{2}}^x p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x=\cot x\int\tan^2 x\,\mathrm{d}x=\cot x(\tan x-x+C)=1-x\cot x+C\cot x.$$

在 $(-\pi,0)$ 中取 $x_0=-\dfrac{\pi}{2}$, 同理可得相同的结果, 所以通解为

$$y=C_1\cot x+C_2(1-x\cot x).$$

(3) 微分方程在 $(-1,1)$ 上有解, 取 $x_0=0$, 则

$$\begin{aligned}y_2&=y_1\int\frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x=x\int\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\int_0^x\frac{2t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x\\&=x\int\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x=x\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C\right)=-1+\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+Cx.\end{aligned}$$

所以通解为

$$y=C_1x+C_2\left(-1+\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right).$$

注 严格来说, 上述解有独立的三支, 分别位于 $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$ 上. 三支的通解形式相同, 但常数 C_1,C_2 是独立的. 所以整体解应写为

$$y=C_1^{(-\infty,-1)}x+C_2^{(-\infty,-1)}\left(-1+\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right),\quad x<-1;$$

$$y=C_1^{(-1,1)}x+C_2^{(-1,1)}\left(-1+\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right),\quad -1<x<1;$$

$$y=C_1^{(1,+\infty)}x+C_2^{(1,+\infty)}\left(-1+\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right),\quad x>1.$$

习题 6.2.2 先用观察法求下列齐次方程的一个非零特解, 然后求方程的通解.

(1) $x^2y''-2xy'+2y=0, x\neq 0$; (2) $xy''-(1+x)y'+y=0, x\neq 0$.

解

(1) 观察可得一个特解 $y_1=x$. 取 $x_0=1$, 则

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1\int \frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int_1^x p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = x\int \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\int_1^x \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x \\ &= x\int \frac{1}{x^2}\cdot x^2\,\mathrm{d}x = x(x+C)=x^2+Cx. \end{aligned}$$

所以通解为

$$y=C_1x+C_2x^2.$$

(2) 观察可得一个特解 $y_1=x+1$. 取 $x_0=1$, 则

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1\int \frac{1}{y_1^2}\mathrm{e}^{-\int_1^x p(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x = (x+1)\int \frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\int_1^x \frac{1+t}{t}\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x \\ &= (x+1)\int \frac{1}{(x+1)^2}\cdot x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x+1)\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x+1}+C\right)=\mathrm{e}^x+C(x+1). \end{aligned}$$

因此通解为

$$y=C_1(x+1)+C_2\mathrm{e}^x.$$

习题 6.2.3 已知方程 $(1+x^2)y''+2xy'-6x^2-2=0$ 的一个特解 $y_1=x^2$, 试求该方程满足初值条件 $y(-1)=0, y'(-1)=0$ 的特解.

解 先求齐次方程 $(1+x^2)y''+2xy'=0$ 的通解. 令 $p=y'$, 则齐次方程化为 $(1+x^2)p'+2xp=0$. 分离变量得

$$\ln|p|=-\ln(1+x^2)+C \implies p=\frac{C}{1+x^2}.$$

因此齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2\arctan x.$$

又有非齐次方程的一个特解 $y_1=x^2$, 故非齐次方程的通解为

$$y=C_1+C_2\arctan x+x^2.$$

由初值条件 $y(-1)=0, y'(-1)=0$ 可得

$$\begin{cases} C_1-\dfrac{\pi}{4}C_2+1=0, \\ \dfrac{C_2}{2}-2=0. \end{cases}$$

解得 $C_1=\pi-1, C_2=4$. 因此所求特解为

$$y=\pi-1+4\arctan x+x^2.$$

习题 6.2.4 求下列常系数齐次方程的通解.

(1) $y''-2y'-y=0$;

(2) $y''+2y'+2y=0$;

(3) $y''+y'-6y=0$.

解

(1) 特征方程为 $r^2-2r-1=0$, 解得 $r_1=1+\sqrt{2}, r_2=1-\sqrt{2}$. 因此通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{(1+\sqrt{2})x}+C_2\mathrm{e}^{(1-\sqrt{2})x}.$$

(2) 特征方程为 $r^2+2r+2=0$, 解得 $r_{1,2}=-1\pm\mathrm{i}$. 因此通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

(3) 特征方程为 $r^2+r-6=0$, 解得 $r_1=2, r_2=-3$. 因此通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}.$$

习题 6.2.5 求下列常系数非齐次方程的一个特解.

(1) $y''+y=2\sin\dfrac{x}{2}$;

(2) $y''-6y'+9y=(x+1)\mathrm{e}^{2x}$.

解

(1) 设特解形如 $y=C(x)\sin\dfrac{x}{2}$, 代入方程得

$$\begin{aligned}\left(\left(C''(x)-\frac{C(x)}{4}\right)\sin\frac{x}{2}+\frac{C'(x)}{2}\cos\frac{x}{2}\right)+C(x)\sin\frac{x}{2}&=2\sin\frac{x}{2}\\ \Longrightarrow\ \left(C''(x)+\frac{3}{4}C(x)\right)\sin\frac{x}{2}+\frac{C'(x)}{2}\cos\frac{x}{2}&=2\sin\frac{x}{2}\end{aligned}$$

比对 $y''+y=2\sin\dfrac{x}{2}$ 的系数可得

$$\begin{cases}C''+\dfrac{3}{4}C=2,\end{cases}$$

取 $C=\dfrac{8}{3}$ 可解得上式, 因此一个特解为

$$y^*=\frac{8}{3}\sin\frac{x}{2}.$$

(2) 设特解形如 $y=(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}$, 代入方程得

$$\begin{aligned}((4Ax+4B+4A)-6(2Ax+2B+A)+9(Ax+B))\,\mathrm{e}^{2x}&=(x+1)\mathrm{e}^{2x}\\ \Longrightarrow\ (Ax+(B-2A))\mathrm{e}^{2x}&=(x+1)\mathrm{e}^{2x}\end{aligned}$$

比对 $y''-6y'+9y=(x+1)\mathrm{e}^{2x}$ 的系数可得

$$\begin{cases}A=1,\\ B-2A=1.\end{cases}$$

解得 $A=1, B=3$, 因此一个特解为

$$y^*=(x+3)\mathrm{e}^{2x}.$$

此类待定系数中,所使用的特解形式有如下命题

命题 **($f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$ 型)**

求解非齐次方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$ 时候, 可设特解为:

$$y^*=x^kP_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

其中:

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\lambda x}\text{照抄},\\ P_m(x)\text{为}m\text{次一般多项式},\\ k=\begin{cases}0, & \text{当}\lambda\text{不是特征根},\\ 1, & \text{当}\lambda\text{是特征单根},\\ 2, & \text{当}\lambda\text{是特征重根}.\end{cases}\end{cases}$$

命题 **($f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}\left(P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x\right)$ 型)**

求解非齐次方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+Q_n(x)\sin\omega x\right]$ 时候, 可设特解为:

$$y^*=x^k\mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_m(x)\cos\omega x+Q_m(x)\sin\omega x\right]$$

其中:

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\lambda x}\text{照抄},\\ m=\max\{l,n\},\ P_m(x)\text{和}Q_m(x)\text{分别为}m\text{次一般多项式},\\ k=\begin{cases}0, & \text{当}\lambda+\omega\mathrm{i}\text{不是特征根},\\ 1, & \text{当}\lambda+\omega\mathrm{i}\text{是特征根}.\end{cases}\end{cases}$$

习题 6.2.6 验证函数组 $1,x,x^2,\ldots,x^n$ 在实轴上线性无关, 函数组 $1,\cos^2 x,\sin^2 x$ 在实轴上线性相关.

解 设存在常数 $C_0,C_1,\ldots,C_n$ 使得

$$C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

则上式为一个恒等式, 对 x 求导 n 次可得

$$n!C_n=0\implies C_n=0.$$

依此类推可得 $C_{n-1}=0,C_{n-2}=0,\ldots,C_0=0$. 因此函数组 $1,x,x^2,\ldots,x^n$ 在实轴上线性无关.

$$1-\cos^2 x-\sin^2 x=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

因此函数组 $1,\cos^2 x,\sin^2 x$ 在实轴上线性相关.

习题 6.2.7 证明: 在区间 I 上任何线性相关的两个函数 $y_1(x),y_2(x)$, 它们的 Wronski 行列式一定恒为零.

解 设 y_1,y_2 在区间 I 上线性相关, 则存在常数 C_1,C_2, 不全为零, 使得

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=0,\quad \forall x\in I.$$

对上式求导可得

$$C_1y_1'(x)+C_2y_2'(x)=0,\quad \forall x\in I.$$

将上述两式联立可得

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=0,\quad \forall x\in I.$$

因此 y_1,y_2 的 Wronski 行列式恒为零.

习题 6.2.8 证明下列函数在区间 $(0,2)$ 上是线性无关的, 但是它们的 Wronski 行列式却恒为零:

$$y_1(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}\qquad y_2(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ (x-1)^2, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

解 设存在常数 C_1,C_2 使得

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=0,\quad \forall x\in(0,2).$$

当 $0<x<1$ 时, 上式化为 $C_1(x-1)^2=0$, 因此 $C_1=0$; 当 $1<x<2$ 时, 上式化为 $C_2(x-1)^2=0$, 因此 $C_2=0$. 所以函数组 y_1,y_2 在区间 $(0,2)$ 上线性无关.

又因为

$$y_1'(x)=\begin{cases}2(x-1), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 1<x\leqslant 2;\end{cases}\qquad y_2'(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2(x-1), & 1<x\leqslant 2;\end{cases}$$

所以

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}=0,\quad \forall x\in(0,2).$$

因此 y_1,y_2 的 Wronski 行列式恒为零.

习题 6.2.9 求下列方程的通解.

(1) $x'''+3x''+3x'+x=0$;

(2) $x'''-2x''+x'-2x=0$;

(3) $x^{(4)}-8x''+18x=0$;　　(4) $x^{(4)}+2x''+x=0$.

解

(1) 特征方程为 $r^3+3r^2+3r+1=0$, 解得 $r_1=-1$ 为三重根. 因此通解为

$$x=(C_1+C_2t+C_3t^2)\mathrm{e}^{-t}.$$

(2) 特征方程为 $r^3-2r^2+r-2=0$, 解得 $r_1=2, r_{2,3}=\pm i$, 因此通解为

$$x=C_1\mathrm{e}^{2t}+C_2\cos t+C_3\sin t.$$

(3) 特征方程为 $r^4-8r^2+18=0$, 解得 $r_{1,2}=2+\mathrm{i}, r_{3,4}=2-\mathrm{i}$. 因此通解为

$$x=\mathrm{e}^{2t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t+C_3t\cos t+C_4t\sin t\right).$$

(4) 特征方程为 $r^4+2r^2+1=0$, 解得 $r_{1,2}=\mathrm{i}, r_{3,4}=-\mathrm{i}$. 因此通解为

$$x=C_1\cos t+C_2\sin t+C_3t\cos t+C_4t\sin t.$$

第 7 章 无穷级数

习题 7.1

习题 7.1.1 证明下列等式:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\ln 2$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$.

解

(1)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})&=\sum_{n=1}^{\infty}\Big((\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\Big)\\&=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-1)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-(\sqrt{2}-1)=1-\sqrt{2}.\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}&=\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n-\ln(n+1)+\ln(2n+1)-\ln(2n-1))\\&=\lim_{n\to\infty}(\ln 1-\ln(n+1)+\ln 3-\ln(2n-1))=\ln 2.\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}+1-\frac{1}{n+1}\right)=1.\end{aligned}$$

习题 7.1.2 研究下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+\frac{1}{n})^n}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{\pi}{4n}$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$;

(14) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^k}$;

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$;

(16) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n (a>0)$.

解

(1) 发散, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1$.

(2) 收敛, 因为 $\frac{1}{n\sqrt{n}-1}\sim\frac{1}{n^{3/2}}$, 而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛.

(3) 发散, 因为 $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}\sim\frac{1}{2n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散.

(4) 发散, 因为 $\sin n$ 不趋于零.

(5) 收敛, 因为 $2^n\sin\frac{\pi}{3^n}\sim\frac{2^n\pi}{3^n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\pi}{3^n}$ 收敛.

(6) 发散, 因为 $\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\sim\frac{1}{n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

(7) 收敛, 因为 $\frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}\leqslant\frac{1}{2^n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛.

(8) 收敛, 因为 $\frac{n}{(n+\frac{1}{n})^n}\leqslant\frac{n}{n^n}\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛.

(9) 发散, 因为 $\arctan\frac{\pi}{4n}\sim\frac{\pi}{4n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{4n}$ 发散.

(10) 收敛, 因为 $\frac{1000^n}{n!}\sim\frac{1000^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}$ 收敛.

(11) 收敛, 因为 $\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sim\frac{(n!)^2}{\sqrt{4\pi n}=\prod_{k=1}^n\frac{k}{n+k}\leqslant\prod_{k=1}^n\frac{1}{2}=\frac{1}{2^n}}$, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛.

(12) 收敛, 因为 $\dfrac{3+(-1)^n}{2^n} \leqslant \dfrac{4}{2^n}$, 而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{2^n}$ 收敛.

(13) 收敛, 因为 $\dfrac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}} = o\left(\dfrac{\sqrt[8]{n}}{\sqrt[4]{n^5}}\right) = o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{9}{8}}}\right)$, 而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{9}{8}}}$ 收敛.

(14) 级数收敛性同

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)(\ln\ln x)^k}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln\ln 3}^{\infty} \frac{1}{t^k}\,\mathrm{d}t,$$

故 $k>1$ 时, 级数收敛;$k \leqslant 1$ 时, 级数发散.

(15) 收敛, 因为

$$\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} = \mathrm{e}^{n^3\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)} \sim \mathrm{e}^{n^3\left(\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)} \sim \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}, n\to\infty,$$

而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}$ 收敛.

(16) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha n}{n+1} = \alpha$. 当 $\alpha<1$ 时, 收敛; 当 $\alpha \geqslant 1$ 时, 发散.

习题 7.1.3 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 也收敛. 试举例说明逆命题不成立; 但若 $a_n>0$ 则逆命题成立.

解 因为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 因此,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1}) = 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n - a_1$$

收敛.

反例: 令 $a_n=(-1)^{n-1}$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ 收敛, 而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

若 $a_n>0$, 由比较判别法, 因为 $a_n+a_{n+1} \geqslant a_n$, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 推出 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

习题 7.1.4 证明或回答下面论断:

(1) 若 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$, 则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(2) 若级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 是否有 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = 0$?

(3) 若 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = a$, 且级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n+1})$ 收敛, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

解

(1) 正确, 因为 $a_n \sim \dfrac{a}{n}$, 而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$ 发散.

(2) 不一定, 如 $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n = (-1)^{n-1}$ 不存在.

(3) 正确,

$$\sum_{n=1}^{N+1} a_n = \sum_{n=1}^{N} n(a_n - a_{n+1}) + (N+1)a_{N+1}.$$

当 $N \to \infty$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{N} n(a_n - a_{n+1})$ 收敛, 故

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} n(a_n - a_{n+1})$$

存在; 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = a$, 故

$$\lim_{N\to\infty} (N+1)a_{N+1} = a$$

也存在, 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

习题 7.1.5 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 试问反之是否成立?

解

(1) 由教材推论 7.8, 由于

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0,$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛.

(2) 反之不成立, 例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 发散.

习题 7.1.6 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个非负数列, 满足 $a_{n+1} < a_n + b_n$, 而且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

解 由

$$0 \leqslant a_n < a_{n-1} + b_{n-1} < a_{n-2} + b_{n-2} + b_{n-1} < \cdots < a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k,$$

故 $\{a_n\}$ 有界, 因此存在收敛子列, 设为 $\{a_{n_k}\} \to a$.$\forall n, \exists\, k,$ s. t. $n_k < n < n_{k+1}$, 则

$$a_{n_k} - \sum_{i=n_k}^{n-1} b_i < a_n < a_{n_{k+1}} + \sum_{i=n}^{n_{k+1}-1} b_i.$$

当 $n \to \infty$ 时,$k \to \infty$, 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛可知,$\sum\limits_{i=n_k}^{n-1} b_i \to 0$, $\sum\limits_{i=n}^{n_{k+1}-1} b_i \to 0$, 由夹逼定理可知,$a_n \to a$.

习题 7.1.7 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$, 以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|a_n|}{n}$ 也收敛.

解

(1) 由柯西-施瓦茨不等式, 有

$$\sum_{n=1}^{N}|a_nb_n| \leqslant \sqrt{\sum_{n=1}^{N}a_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}b_n^2}.$$

当 $N\to\infty$ 时, 右端有界, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛.

(2) 正项级数满足

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|,$$

故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$ 收敛.

(3) 由柯西-施瓦茨不等式, 有

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{|a_n|}{n}\leqslant\sqrt{\sum_{n=1}^{N}a_n^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}}.$$

当 $N\to\infty$ 时, 右端有界, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}$ 收敛.

习题 7.1.8 求下列极限 (其中 $p>1$):

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)$.

解

(1) 因为

$$\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\leqslant n\cdot\frac{1}{(n+1)^p}=\frac{n}{(n+1)^p}\leqslant\frac{1}{(n+1)^{p-1}},$$

故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\frac{1}{(2n)^p}\right)=0.$

(2) 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1/p^{n+1}(1-(1/p)^n)}{1-1/p}=0.$$

习题 7.1.9 设正项数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散, 试问 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛? 说明理由.

解 因为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散, 故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$. 又因为 $\{a_n\}$ 单调递减, 故存在常数 $a>0$, 使得当 n 足够大时, 有 $a_n\geqslant a$. 因此, 当 n 足够大时,

$$\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{a+1}\right)^n.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a+1}\right)^n$ 收敛, 故由比较判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

习题 7.1.10 设 $a_n>0, a_n>a_{n+1}\ (n=1,2,\dots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

是收敛的.

解 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

又因为

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{na_{n+1}-(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{n(n+1)}<0,$$

故数列 $\left\{\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\}$ 单调递减. 由 Leibniz 判别法, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

收敛.

习题 7.1.11 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛, 求证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 绝对收敛.

解 由三角不等式, 有

$$|a_n+b_n|\leqslant|a_n|+|b_n|.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛, 故由比较判别法可知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|$ 收敛, 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 绝对收敛.

习题 7.1.12 研究下列级数的条件收敛性与绝对收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\ln n}{n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^p}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{p}{n}\right)$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)^p$.

解

(1) 绝对收敛. $\left|(-1)^n\left(\dfrac{2n+100}{3n+1}\right)^n\right| \sim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛.

(2) 绝对收敛. $\left|\dfrac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}\right| = \dfrac{1}{2^n}$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$ 收敛.

(3) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+100}\right| \sim \frac{1}{\sqrt{n}},$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ 发散, 故绝对发散. 又因为

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+1+100} - \frac{\sqrt{n}}{n+100} = \frac{100-\sqrt{n(n+1)}}{(n+1+100)(n+100)} < 0,$$

在 n 充分大时成立, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(4) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left|(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}\right| \sim \frac{1}{n},$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 故绝对发散. 又因为 $\sin\dfrac{1}{n}$ 单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(5) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}\right| \sim \frac{\ln n}{n},$$

且 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln^2 x$ 发散, 故绝对发散. 又因为 $\dfrac{\ln n}{n}$ 在 n 充分大时单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(6) (a) $p \leqslant 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^p} \neq 0$, 级数发散.

(b) $0 < p \leqslant 1$ 时, 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p},$$

且 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 发散, 故绝对发散. 又因为 $\dfrac{1}{n^p}$ 单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(c) $p > 1$ 时, 绝对收敛. 因为

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\right| = \frac{1}{n^p},$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛, 故绝对收敛.

(7) 条件收敛, 绝对发散. 因为

$$\left|(-1)^n(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)\right| \sim \frac{1}{n},$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故绝对发散. 又因为 $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1$ 单调递减, 由 Leibniz 判别法, 级数条件收敛.

(8) 绝对收敛. 因为

$$\left|(-1)^n\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right|=\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)=\frac{1}{2n^2},$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛, 故绝对收敛.

(9) (a) $p\neq 0$ 时绝对收敛. 因为

$$\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{p}{n}\right)\right|\sim\frac{p^2}{2n^2},$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^2}{2n^2}$ 收敛, 故绝对收敛.

(b) $p=0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1-\cos 0)=\sum_{n=1}^{\infty}0$ 收敛.

(10) 由 $1-\cos\frac{1}{n}\sim\frac{1}{2n^2}$ 以及 (6) 的结论可知,

(a) $p\geqslant\frac{1}{2}$ 时, 绝对收敛.

(b) $0<p<\frac{1}{2}$ 时, 条件收敛, 绝对发散.

(c) $p\leqslant 0$ 时, 发散.

习题 7.1.13 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 证明: $S_n^{\pm}$ 当 $n\to\infty$ 时有极限且 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^+}{S_n^-}=1$. 这里, $S_n^{\pm}$ 是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\pm}$ 的部分和, a_n^+, a_n^- 的定义由 7.1.3 小节给出.

解 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛, 设 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=S$, 又 S_n^- 发散到 $+\infty$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^+-S_n^-}{S_n^-}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{S_n^-}=\lim_{n\to\infty}\frac{S}{S_n^-}=0,$$

习题 7.1.14 证明: 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 并且从某项之后有

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\frac{b_{n+1}}{b_n},$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

解 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数, 故 $b_n>0$. 由题设不等式变形得

$$\frac{|a_{n+1}|}{b_{n+1}}<\frac{|a_n|}{b_n}.$$

因此 $\exists M>0$, 使得 $\forall n$ 充分大时, $\frac{|a_n|}{b_n}<M$, 即 $|a_n|<Mb_n$. 由比较判别法可知, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收

敛.

习题 7.1.15 研究下列级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$; (2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$; (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{100\sqrt[3]{n}}$.

解

(1) (a) $x=k\pi$ 时,$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}0$ 收敛.

(b) $x\neq k\pi$ 时,$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的部分和有

$$\sum_{n=1}^{N}\sin nx=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

部分和有界 $\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}$, 又 $\dfrac{1}{n}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法, 级数条件收敛.

同时

$$\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\geqslant\frac{\sin^{2}nx}{n}=\frac{1}{2n}-\frac{\cos 2nx}{2n},$$

其中 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散,$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{2n}$ 条件收敛, 故 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n}\right|$ 发散, 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 绝对发散.

(2) 记 $S_1=0$, 则

$$\begin{aligned}S_{4n+1}&=\sum_{k=2}^{n}(S_{4k+1}-S_{4(k-1)+1})\\&=\sum_{k=2}^{n}(-1)^{k}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\log(4k-1)}+\frac{1}{\log(4k)}+\frac{\sqrt{2}}{2\log(4k+1)}\right)\end{aligned}$$

由 Leibniz 判别法,$\{S_{4n+1}\}$ 条件收敛, 设为 $S.\forall n,\exists k,\mathrm{s.t.}\,4k+1\leqslant n<4(k+1)+1$, 则

$$\begin{aligned}|S_n-S|&\leqslant|S_n-S_{4k+1}|+|S_{4k+1}-x|\\&\leqslant\left(\frac{\sqrt{2}}{2\log(4k+3)}+\frac{1}{\log(4k+4)}+\frac{\sqrt{2}}{2\log(4k+5)}\right)+|S_{4k+1}-x|\to 0,n\to\infty.\end{aligned}$$

即证条件收敛.

同时

$$\left|\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}\right|\geqslant\frac{|\cos\frac{n\pi}{4}|^{2}}{\ln n}=\frac{1}{2\ln n}+\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2\ln n},$$

其中 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2\ln n}$ 发散,$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2\ln n}$ 条件收敛, 故 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}\right|$ 发散, 级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$ 绝对发散.

(3) 因为

$$\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{\sin n}{\sqrt{n}}\mathrm{e},$$

故只需要考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$ 的敛散性.

其中 $\sum\limits_{n=1}^{N}\sin n$ 的部分和有

$$\sum_{n=1}^{N}\sin n=\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)-\cos\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}},$$

部分和有界 $\frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$, 又 $\frac{1}{\sqrt{n}}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法, 级数条件收敛.

同时

$$\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| \geqslant \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2\sqrt{n}}-\frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}},$$

其中 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{2\sqrt{n}}$ 条件收敛, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|$ 发散, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 绝对发散.

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+1}\frac{1}{100\sqrt[3]{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{1/100}}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(n+1)n^{1/100}}$$

其中第一项条件收敛, 第二项绝对收敛, 故原级数条件收敛.

习题 7.2

习题 7.2.1 证明: 两个在共同区间 I 上一致收敛的级数的和, 也在 I 上一致收敛.

解 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1, N_2, 当 $m > n \geqslant N_1$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

当 $m > n \geqslant N_2$ 时, 有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} v_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $m > n \geqslant N$ 时, 有

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{m}[u_k(x) + v_k(x)]\right| &= \left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x) + \sum_{k=n}^{m} v_k(x)\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{k=n}^{m} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n}^{m} v_k(x)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[u_n(x) + v_n(x)]$ 在区间 I 上一致收敛.

习题 7.2.2 确定下列函数项级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{n^2}}{n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^{2n}} \sin\dfrac{\pi}{2^n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n-3^n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{\mathrm{e}^{nx}}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1-x^n}$.

解

(1)

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{n\mathrm{e}^{-nx}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-x} \to \mathrm{e}^{-x}.$$

故当 $x > 0$ 时, 级数收敛; 当 $x \leqslant 0$ 时, 级数发散. 收敛域为 $(0, +\infty)$.

(2)

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{|x|^{n^2}}{n}} = \frac{|x|^n}{\sqrt[n]{n}} \to |x|^n.$$

故当 $|x| < 1$ 时, 级数收敛; 当 $|x| > 1$ 时, 级数发散; 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散; 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n^2}}{n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. 收敛域为 $[-1, 1)$.

(3)

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^n} = \left|\frac{1-x}{1+x}\right| \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{2n-1}} \to \left|\frac{1-x}{1+x}\right|.$$

故当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, 级数发散; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 级数收敛; 当 $x = 0$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ 由 Liebnitz 判别法收敛. 收敛域为 $[0, +\infty)$.

(4)

$$\frac{1}{x^{2n}} \sin \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{(2x)^n}.$$

故当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时, 级数收敛; 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时, 级数发散; 当 $x = \pm\frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$ 发散. 收敛域为 $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$.

(5)

$$\sqrt[n]{|u_n(x)|} = \sqrt[n]{\frac{|x-3|^n}{|n-3^n|}} = \frac{|x-3|}{\sqrt[n]{|n-3^n|}} \to \frac{|x-3|}{3}.$$

故当 $|x-3| < 3$ 时, 级数收敛; 当 $|x-3| > 3$ 时, 级数发散; 当 $x = 0$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n-3^n}$ 发散; 当 $x = 6$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n+3^n}$ 发散,. 收敛域为 $(0, 6)$.

(6)

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{(n+1)!\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n!\left(\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{x}{n} \to 0.$$

故级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛. 收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

(7) $x \neq 0$ 时,$\cos nx$ 的部分和

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \left|\frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}.$$

故当 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 时, 级数收敛; 当 $x = 0$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ 发散. 收敛域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(8)

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}}{\frac{x^n}{1-x^n}} = \frac{x(1-x^n)}{1-x^{n+1}} \to x.$$

故当 $|x|<1$ 时, 级数收敛; 当 $|x|>1$ 时, 级数发散; 当 $x=1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-1^n}$ 无定义; 当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-(-1)^n}$ 发散. 收敛域为 $(-1,1)$.

习题 7.2.3 在区间 $[0,1]$ 上, 定义

$$u_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & x=\frac{1}{n},\\ 0, & x\neq\frac{1}{n}.\end{cases}$$

证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 但是它没有 Weierstrass 判别法中的控制级数.

解 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $N>\frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $m>n\geqslant N$ 时, 对任意 $x\in[0,1]$, 有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}u_k(x)\right|\leqslant\sum_{k=n}^{m}|u_k(x)|\leqslant\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k}<\varepsilon.$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

若存在控制级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 使得对任意 $x\in[0,1]$, 均有 $|u_n(x)|\leqslant M_n$, 则取 $x=\frac{1}{n}$ 时, 有

$$\frac{1}{n}=\left|u_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant M_n,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}M_n$ 发散, 与控制级数矛盾. 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 没有控制级数.

习题 7.2.4 研究下列级数在给定区间上的一致收敛性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2},-\infty<x<+\infty$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(1+(nx)^2)},-\infty<x<+\infty$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n,-1<x<1$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx},0\leqslant x<+\infty$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n},0\leqslant x<+\infty$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x},1<x<+\infty$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n},0<\delta\leqslant x\leqslant 2\pi-\delta$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(n\mathrm{e}^n)^x},0\leqslant x<+\infty$.

解

(1)

$$|u_n(x)|=\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2)

$$|u_n(x)| = \left|\frac{1}{2^n(1+(nx)^2)}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n(1+(nx)^2)}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(3)

$$\sup_{x\in(-1,1)}|u_n(x)| = \sup_{x\in(-1,1)}|(-1)^{n-1}x^n| = 1.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in(-1,1)}|u_n(x)| \neq 0$. 故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$ 在 $(-1,1)$ 上不一致收敛.

(4) 考虑函数 $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值, 由 $f'(x)=2x\mathrm{e}^{-nx}-nx^2\mathrm{e}^{-nx}=x\mathrm{e}^{-nx}(2-nx)$ 可知, 当 $x=\frac{2}{n}$ 时,$f(x)$ 取得最大值, 即

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}|u_n(x)| = f\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2}\mathrm{e}^{-2}.$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(5)

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{(-1)^n}{x+n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(6) $\forall N, \forall n>N, \exists p=n, x=1+\frac{1}{\ln 2N}\in(1,+\infty)$, 使得

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)| &= \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^x} = \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^x}\cdot\frac{1}{k^{\ln 2N}} \\
&> \frac{1}{(2N)^{\frac{1}{\ln 2N}}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} > \frac{1}{\mathrm{e}}\int_{n+1}^{2n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&= \frac{1}{\mathrm{e}}\ln\frac{2n+1}{n+1} > \frac{1}{\mathrm{e}}\ln\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

由 Cauchy 准则知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上不一致收敛.

(7) $\cos nx$ 的部分和

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \left|\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|} \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

有界, 且 $\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0, 由 Dirichlet 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致收

敛.

(8) 由 (4) 知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛, 且 $\dfrac{1}{n^x} \leqslant 1$ 对 x 单调, 对 n,x 一致有界, 由 Abell 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(n\mathrm{e}^n)^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

习题 7.2.5 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\mathrm{e}^{nx}}$ 在 $0 \leqslant x < +\infty$ 中一致收敛.

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 作为函数列时, 对 x 而言是常数, 故对 x 一致收敛. 同时 $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{nx}} \leqslant 1$ 对 x 单调, 对 n,x 一致有界, 由 Abell 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{\mathrm{e}^{nx}}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

习题 7.2.6 证明: 函数 $\zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续, 且具有的各阶导数.

解

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 中并不一致收敛, 但对每一点 $x \in (1,+\infty)$, 总是存在 $1 < \alpha < x < \beta$, 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上, 有

$$\left|\frac{(-\ln n)^k}{n^x}\right| \leqslant \frac{(\ln n)^k}{n^\alpha}.$$

由 Cauchy 根值判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(\ln n)^k}{n^\alpha}$ 收敛, 故由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^{(k)}(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛. 由教材定理 7.36 知,$\zeta(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上处处可微.

递推的可以得到,$\zeta(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有任意阶导数, 由 x 的任意性知,$\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 内连续, 且具有各阶导数.

习题 7.2.7 证明: $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^4}$ 当 $|x| < +\infty$ 时, 具有连续的二阶微商.

解

$$|u'(x) = \frac{\cos nx}{n^3}| \leqslant \frac{1}{n^3}$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^3}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

$$|u''(x) = -\frac{\sin nx}{n^2}| \leqslant \frac{1}{n^2}$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 因此 $f''(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^4}\right)'' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\dfrac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$.

因为 $\dfrac{\sin nx}{n^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 由教材定理 7.34 知,$f''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

习题 7.2.8 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$, 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

解

$$\left|\frac{x^n}{(1+2x)^n}\cos\frac{n\pi}{x}\right|\leqslant\frac{1}{2^n}.$$

由 Weierstrass 判别法知, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n\cos(n\pi)}{(1+2x)^n}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致收敛.

又 $u_n(x)=\dfrac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 由教材定理 7.34 知,$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 故

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n\cos n\pi}{(1+2\cdot1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=-\frac{1}{4}.$$

习题 7.2.9 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$, 求 $\displaystyle\int_{\ln2}^{\ln3}f(x)\mathrm{d}x$.

解

$$\int_{\ln2}^{\ln3}n\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-nx}\Big|_{x=\ln2}^{x=\ln3}=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}.$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[\ln2,\ln3]$ 上一致收敛, 故可以交换积分和求和顺序, 有

$$\int_{\ln2}^{\ln3}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln2}^{\ln3}n\mathrm{e}^{-nx}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}.$$

习题 7.2.10 递归定义 $[0,1]$ 上的连续可微函数列 $\{f_n\}$ 如下: $f_1=1$, 在 $(0,1)$ 上有

$$f'_{n+1}(x)=f_n(x)f_{n+1}(x),\quad f_{n+1}(0)=1.$$

求证: 对每个 $x\in[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在, 并求出其极限函数.

解 设 $f_k(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n^{(k)}x^n$, 则由 $f'_{k+1}(x)=f_k(x)f_{k+1}(x)$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n^{(k+1)}x^{n-1}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(k)}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(k+1)}x^n\right).$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left((n+1)a_{n+1}^{(k+1)}-\sum_{m=0}^{n}a_m^{(k)}a_{n-m}^{(k+1)}\right)x^n=0.$$

因此 $(n+1)a_{n+1}^{(k+1)}-\sum\limits_{m=0}^{n}a_m^{(k)}a_{n-m}^{(k+1)}=0$, 且 $a_0^{(k+1)}=f_{k+1}(0)=1$, 由此可得

$$a_{n+1}^{(k+1)}=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}a_m^{(k)}a_{n-m}^{(k+1)}.$$

于是

$$a_0^{(2)}=1,$$

$$a_1^{(2)}=a_0^{(1)}a_0^{(2)}=1,$$

$$a_2^{(2)}=\frac{1}{2}(a_0^{(1)}a_1^{(2)}+a_1^{(1)}a_0^{(2)})=\frac{1}{2}(1+0)=\frac{1}{2},$$

$$a_0^{(3)}=1,$$

$$a_1^{(3)}=a_0^{(2)}a_0^{(3)}=1,$$

$$a_2^{(3)}=\frac{1}{2}(a_0^{(2)}a_1^{(3)}+a_1^{(2)}a_0^{(3)})=\frac{1}{2}(1+1)=1,$$

$$a_3^{(3)}=\frac{1}{3}(a_0^{(2)}a_2^{(3)}+a_1^{(2)}a_1^{(3)}+a_2^{(2)}a_0^{(3)})=\frac{1}{3}(1+1+\frac{1}{2})=\frac{5}{6}.$$

依此类推可得

$$a_0^{(k)}=a_1^{(k)}=\cdots=a_{k-1}^{(k)}=1,$$

或者说 $a_n^{(k)}=1,\forall n<k$.

由此我们能写出部分和函数 $S_n^{(k)}(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}a_m^{(k)}x^m$, 当 $n<k$ 时,

$$S_n^{(k)}(x)=\sum_{m=0}^{n}x^m=\frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

因为 $\sum\limits_{m=0}^{n}x^m$ 在 $(0,1)$ 上内闭一致收敛到 $\dfrac{1}{1-x}$, 故对每个给定的 $x\in(0,1)$, 当 $n\to\infty$ 时,$S_n^{(k)}(x)\to\dfrac{1}{1-x}$, 即 $\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

习题 7.2.11 证明 Dini (迪尼) 定理:

(1) 设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的非负连续函数列, 且在此区间上逐点收敛到零. 若对任意固定的 $x\in[a,b]$, 数列 $\{u_n(x)\}$ 是单调递减的, 则 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到零.

(2) 如果函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上逐点收敛到 $S(x)$, 且通项 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续且非负的, 那么函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的充分必要条件是此级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

解

(1) 对于任给的 $\varepsilon > 0, \forall x \in [a,b]$, 存在 $N_x, U(x)$, 使得当 $n \geqslant N_x$ 且 $x \in U(x)$ 时,$u_n(x) < \varepsilon$.
由 $[a,b]$ 的紧性,或者说闭区间的有限覆盖定理,存在 $x_1, x_2, \cdots, x_m$,使得 $[a,b] \subset \bigcup_{i=1}^{m} U(x_i)$.
取 $N = \max\{N_{x_1}, N_{x_2}, \cdots, N_{x_m}\}$,则当 $n \geqslant N$ 时,对任意 $x \in [a,b]$,存在 $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 使得 $x \in U(x_i)$,因此有

$$u_n(x) \leqslant u_n(x_i) < \varepsilon.$$

故 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到零.

(2) 对部分和函数 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$,由 (1) 知,$\{S(x) - S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到零,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.
反之,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,则部分和函数 $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛到 $S(x)$,且每个 $S_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,由教材定理 7.34 知,$S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

习题 7.3

习题 7.3.1 求下列幂级数的收敛半径.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n x^{2n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}(a>0,b>0)$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$.

解

(1)

$$L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}=1,$$

故收敛半径 $R=1$.

(2)

$$L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^{2/n}}{(2n)!^{1/n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(2n)(2n-1)}=\frac{1}{4},$$

故收敛半径 $R=4$.

(3)

$$L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[(2n)]{|2^n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[2n]{2^n}=\sqrt{2},$$

故收敛半径 $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(4)

$$L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{a^n+b^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a^n+b^n}}=\frac{1}{\max\{a,b\}},$$

故收敛半径 $R=\max\{a,b\}$.

(5)

$$L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{\left|\frac{1}{(2n-1)!}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[2n-1]{(2n-1)!}}=0,$$

故收敛半径 $R=+\infty$.

(6)

$$L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{3^n+(-2)^n}{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{3^n+(-2)^n}}{\sqrt[n]{n}}=3,$$

故收敛半径 $R=\dfrac{1}{3}$.

(7)

$$L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=1,$$

故收敛半径 $R=1$.

(8)

$$L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n^2]{2^n}}=1,$$

故收敛半径 $R=1$.

习题 7.3.2 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $|x|<R$ 时收敛, 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 也收敛, 则

$$\int_0^R f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$$

(注意: 这里不管 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=R$ 是否收敛). 应用这个结果证明:

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

解

(1) 先求幂级数 $\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 的收敛半径: 任取 $x_0\in(-R,R)$，存在 $r:|x_0|<r<R$, 使得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-r,r)$ 内一致收敛. 同时 $|a_nr^n|<M$ 有界, 因此

$$\left|\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}\right|=\left|a_nr^n\cdot\frac{R^{n+1}}{(n+1)r^n}\right|\leqslant M\cdot\frac{R^{n+1}}{(n+1)r^n}.$$

由比较判别法可知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 在 $(-\dfrac{r}{R}R,\dfrac{r}{R}R)$ 内一致收敛, 因此收敛半径 $R'\geqslant R$.

若 $R'>R$, 则存在 $x_0:R<|x_0|<R'$, 使得幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 在 $(-|x_0|,|x_0|)$ 内一致收敛, 矛盾, 因此 $R'=R$.

作为幂级数的,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 在 $(-R,R)$ 内的任意闭子区间 $[-r,r]$ 上一致收敛, 所以

$$\int_0^r f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1},$$

由 r 的任意性知在 $(0,R)$ 上成立.

习题 7.3.3 求下列幂级数的收敛区域及其和函数.

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}$.

解

(1)

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|(-1)^n|} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$. 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ 收敛; 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{-1}{2n+1}$ 收敛. 因此收敛区域为 $[-1,1]$.

当 $|x| < 1$ 时,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x.$$

(2)

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n+1|} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$. 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)$ 发散; 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)$ 发散. 因此收敛区域为 $(-1,1)$.

当 $|x| < 1$ 时,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

(3)

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|n(n+1)|} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$. 当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)$ 发散; 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(n+1)$ 发散. 因此收敛区域为 $(-1,1)$.

当 $|x| < 1$ 时,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

(4)

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n(n+1)}\right|} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$. 当 $x=1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛; 当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ 收敛. 因此收敛区域为 $[-1,1]$.

当 $|x|<1$ 时,

$$\begin{aligned}S&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}\\&=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n}\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\frac{-\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t\\&=\frac{(1-x)\ln(1-x)+x}{x}.\end{aligned}$$

(5)

$$L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{\left|\frac{1}{(2n-1)!!}\right|}=0,$$

故收敛半径 $R=+\infty$.

当 $x\in\mathbb{R}$ 时, 注意到 $y'=xy+1, y(0)=0$, 解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}=y=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\int_0^x\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

习题 7.3.4 求下列级数的和.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$; (2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}$.

解

(1) 考虑幂级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1},$$

其收敛半径 $R=1$. 当 $|x|<1$ 时,

$$\begin{aligned}S&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n\\&=\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n\right)\\&=\frac{x^2-2x^2\ln(1-x)+2x+2\ln(1-x)}{4x}.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$$

(2) 考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n(n^2-n+1),$$

其收敛半径 $R=1$. 当 $|x|<1$ 时,

$$\begin{aligned}S&=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(n^2-n+1)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}n^2x^n-\sum_{n=0}^{\infty}nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}x^n\\&=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}-\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x}\\&=\frac{3x^2-2x+1}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=S|_{x=-\frac{1}{2}}=\frac{22}{27}.$$

(3) 考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n+1},$$

其收敛半径 $R=1$. 当 $|x|<1$ 时,

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}x^{3n+1}=\frac{x}{1-x^3}.$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}=\int_0^{-1}\frac{x}{1-x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(4) 考虑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n,$$

其收敛半径 $R=+\infty$. 当 $x\in\mathbb{R}$ 时,

$$\begin{aligned}S&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}x^n\\&=x^2\mathrm{e}^x+3x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\\&=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{n!}=S|_{x=1}=5\mathrm{e}.$$

习题 7.3.5 求下列函数在指定点处的 Taylor 展开式, 并给出收敛区域.

(1) $x^3-2x^2+5x-7, x=1$;

(2) $\mathrm{e}^x, x=a$;

(3) $\ln x, x=1$;

(4) $\dfrac{1}{x^2+3x+2}, x=-4$;

(5) $\ln(1+x-2x^2), x=0$;

(6) $\cos x, x=\dfrac{\pi}{4}$.

解

(1) 记 $y=x-1$, 则

$$x^3-2x^2+5x-7=(y+1)^3-2(y+1)^2+5(y+1)-7=y^3+y^2+4y-3.$$

收敛区域为 $\mathbb{R}$.

(2)

$$\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

收敛区域为 $\mathbb{R}$.

(3) 记 $y=x-1$, 则

$$\ln x=\ln(y+1)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{y^n}{n}.$$

收敛区域为 $(-1,1]$.

(4) 记 $y=x+4$, 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+3x+2}&=\frac{1}{(y-4)^2+3(y-4)+2}\\&=\frac{1}{y^2-5y+6}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{3n+1}\right)y^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{3n+1}\right)(x+4)^n\end{aligned}$$

收敛区域为 $(-6,-2)$.

(5) $\ln(1+x-2x^2)=\ln(1+2x)+\ln(1-x)$. 故

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(-2)^n-1}{n}x^n.$$

收敛区间为 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

(6)

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2!}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\dots$$

符号规则以 4 为周期: $+,-,-,+,\dots$. 收敛区间为 $\mathbb{R}$.

习题 7.3.6 求下列函数的 Maclaurin 展开式, 并给出收敛区域.

(1) $\sin^2 x$;

(2) $\arcsin x$;

(3) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

(4) $(1+x)\ln(1+x)$;

(5) $\displaystyle\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t$;

(6) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$;

(7) $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

解

(1)

$$\begin{aligned}
\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\dots\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}.
\end{aligned}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{(2n+2)(2n+1)}=0,$$

故收敛半径 $R=+\infty$, 收敛区域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2)

$$\begin{aligned}
\arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.
\end{aligned}$$

$$L=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\left|\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1}\right|}=1,$$

故收敛半径 $R=1$, 当 $x=\pm1$ 时, 级数由比值判别法知收敛. 因此收敛区域为 $[-1,1]$.

(3)

$$\begin{aligned}
\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]\\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n\right]\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[(-1)^{n-1}-(-1)^{2n-1}]x^n\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[(-1)^{n-1}+1]x^n\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}.
\end{aligned}$$

$$L = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[2k+1]{\left|\frac{1}{2k+1}\right|} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$, 当 $x=1$ 时, 级数 $\sum\frac{1}{2k+1}$ 发散; 当 $x=-1$ 时, 级数 $\sum\frac{-1}{2k+1}$ 发散. 因此收敛区域为 $(-1,1)$.

(4)

$$\begin{aligned}
(1+x)\ln(1+x) &= (1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{n+1}\\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}x^n\\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\frac{(-1)^{n-2}}{n-1}\right]x^n\\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n.
\end{aligned}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n(n-1)}} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$, 当 $x=\pm 1$ 时, 级数 $\sum\frac{1}{n(n-1)}$ 绝对收敛. 因此收敛区域为 $[-1,1]$.

(5)

$$\cos t^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(t^2)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{4n}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{4n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x t^{4n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} x^{4n+1}.\end{aligned}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[4n+1]{\left|\frac{1}{(2n)!(4n+1)}\right|} = 0,$$

故收敛半径 $R = +\infty$, 收敛区域为 $(-\infty, +\infty)$.

(6)

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n+1}.\end{aligned}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\left|\frac{1}{(2n+1)!(2n+1)}\right|} = 0,$$

故收敛半径 $R = +\infty$, 收敛区域为 $(-\infty, +\infty)$.

(7)

$$\mathrm{e}^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}(-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n}.$$

$$\begin{aligned}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{2n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.\end{aligned}$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\left|\frac{1}{n!(2n+1)}\right|} = 0,$$

故收敛半径 $R=+\infty$, 收敛区域为 $(-\infty,+\infty)$.

习题 7.3.7 方程 $y+\lambda\sin y=x(\lambda\neq-1)$ 在 $x=0$ 附近确定了一个隐函数 $y(x)$, 试求它的幂级数展开式中的前四项.

解 设 $y(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots$ 是 Maclaurin 展开式. 由 $y(0)+\lambda\sin(y(0))=0$, 得 $y(0)=0$.

对 $y+\lambda\sin y=x$ 求导:

$$y'(1+\lambda\cos y)=1$$

代入 $x=0$:

$$y'(0)(1+\lambda\cos 0)=1\quad\Rightarrow\quad y'(0)=\frac{1}{1+\lambda}.$$

对 $y'(1+\lambda\cos y)=1$ 求导:

$$y''(1+\lambda\cos y)+y'(\lambda(-\sin y)y')=0$$

代入 $x=0$:

$$y''(0)(1+\lambda)+y'(0)(\lambda(-\sin 0)y'(0))=0\quad\Rightarrow\quad y''(0)=0.$$

对 $y''(1+\lambda\cos y)=\lambda(\sin y)(y')^2$ 求导:

$$y'''(1+\lambda\cos y)+y''(\lambda(-\sin y)y')=\lambda(\cos y)(y')^3+\lambda(\sin y)2y'y''$$

代入 $x=0$ (利用 $y(0)=0,y''(0)=0$):

$$y'''(0)(1+\lambda)=\lambda(\cos 0)(y'(0))^3+0$$
$$y'''(0)(1+\lambda)=\lambda\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^3\quad\Rightarrow\quad y'''(0)=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^4}.$$

因此 $y(x)$ 的 Maclaurin 展开式为:

$$\begin{aligned}y(x)&=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\dots\\&=0+\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)x+0\cdot x^2+\frac{1}{6}\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda)^4}\right)x^3+\dots\\&=\frac{1}{1+\lambda}x+\frac{\lambda}{6(1+\lambda)^4}x^3+\dots\end{aligned}$$

习题 7.4

习题 7.4.1 求下列积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$;　　　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

解

(1) 考虑展开式 $\mathrm{e}^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, 则

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

故级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 5} - \frac{1}{6\cdot 7} + \dots\end{aligned}$$

(2) 考虑展开式 $\sin x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, 则

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(2n+1)!}} = 0,$$

故级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \dots\end{aligned}$$

习题 7.4.2 求方程 $y'' - xy' + y = 0$ 的幂级数解.

解 设 $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 则

$$\begin{aligned}y' &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\ y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n, \\ -xy' &= -\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n, \\ y'' - xy' + y &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - n a_n + a_n\right] x^n = 0.\end{aligned}$$

故有递推关系 $(n+2)(n+1)a_{n+2}=(n-1)a_n$, 即 $a_{n+2}=\dfrac{(n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n$.

当 n 为奇数时,a_1 为任意常数,$a_3=0,a_5=0,\ldots$, 故奇数项系数均为 0;

当 n 为偶数时,a_0 为任意常数,$a_2=-\dfrac{1}{2}a_0,a_4=-\dfrac{1}{8}a_0,a_6=-\dfrac{1}{48}a_0,\ldots$, 故偶数项系数为 $a_{2k}=(-1)^k\dfrac{1}{2^kk!}a_0$.

因此幂级数解为

$$y=a_0\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+\ldots\right)+a_1x.$$

习题 7.4.3 求方程 $y''+y\sin x=0,y(0)=1,y'(0)=0$ 的幂级数解至 x^5 项.

解 设 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, 由初值条件 $y(0)=1,y'(0)=0$, 得 $a_0=1,a_1=0$.

$$y''(0)+y(0)\sin 0=0\Rightarrow 2a_2+0=0\Rightarrow a_2=0.$$

$$y'''+y\cos x+y'\sin x=0$$

$$y'''(0)+y(0)\cos 0+y'(0)\sin 0=0$$

$$6a_3+1+0=0\Rightarrow a_3=-\frac{1}{6}.$$

$$y^{(4)}+y''\sin x+2y'\cos x-y\sin x=0$$

$$y^{(4)}(0)+y''(0)\sin 0+2y'(0)\cos 0-y(0)\sin 0=0$$

$$24a_4+0+0-0=0\Rightarrow a_4=0.$$

$$y^{(5)}+y'''\sin x+3y''\cos x-3y'\sin x-y\cos x=0$$

$$y^{(5)}(0)+y'''(0)\sin 0+3y''(0)\cos 0-3y'(0)\sin 0-y(0)\cos 0=0$$

$$120a_5+0+0-0-1=0\Rightarrow a_5=\frac{1}{120}.$$

因此幂级数解至 x^5 项为

$$y=1-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}.$$

习题 7.4.4 利用 Stirling 公式求极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

解

(1) 由 Stirling 公式知,$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, 故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}&=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{\frac{1}{2n^2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{n}}\\&=1\cdot 1=1.\end{aligned}$$

(2) 由 Stirling 公式知,$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}n(2\pi n)^{-\frac{1}{2n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^{-1}}{\mathrm{e}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(2\pi n)^{-\frac{1}{2n}}\cdot\mathrm{e}=1\cdot\mathrm{e}=\mathrm{e}.$$

习题 7.4.5 研究下列级数的敛散性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$ (p 是实数).

解

(1) 由 Stirling 公式知,$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, 故

$$\ln(n!)=O(\ln\sqrt{n}+n\ln n-n)=O(n\ln n),$$

故级数 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$ 与 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 同敛散性, 而 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散, 故原级数发散.

(2) 由 Stirling 公式知,

$$\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}\sim\frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}=\sqrt{2\pi n}\cdot\frac{1}{n^p}=O\left(\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}\right),$$

故级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$ 与 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ 同敛散性, 而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ 当 $p>\frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p\leqslant\frac{3}{2}$ 时发散, 故原级数当 $p>\frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p\leqslant\frac{3}{2}$ 时发散.

习题 7.4.6 证明: 当 $n\to\infty$ 时, $\ln(n!)\sim\ln n^n$.

解 由 Stirling 公式知,$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n!)}{\ln n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)}{\ln n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt{2\pi n}+n\ln n-n}{n\ln n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\sqrt{2\pi n}}{n\ln n}+\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n\ln n}=0+1-0=1.$$

因此 $\ln(n!)\sim\ln n^n$.

第 7 章综合习题

习题 7.C.1 计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$ 的和.

解 由 Abel 求和公式, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)&=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\&=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\sum_{n=k}^{N}\frac{1}{n(n+1)}\\&=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{N+1}\right)\\&=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}-\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

当 $N\to\infty$ 时, 由 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 以及 $\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=\lim_{N\to\infty}\frac{\ln N}{N+1}=0$, 得级数和为 $\frac{\pi^2}{6}$.

习题 7.C.2 证明: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=1$.

解

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}(-1)^n&=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)(-1)^n\\&=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}+\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+2}\\&=\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}+\sum_{n=1}^{N+1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\\&=1+(-1)^{N+1}\frac{1}{N+2}\to 1,\quad (N\to\infty).\end{aligned}$$

习题 7.C.3 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

解

我们设 $b_n=\frac{a_{n+1}}{a_n}-1$, 则 $b_n\geqslant 0$. 同时有如下等式成立 $\frac{a_{n+1}}{a_1}=\prod_{k=1}^{n}(1+b_k)$. 利用**??**ex:1.1.6] 习题 1.1.6 的结果, 我们有

$$\prod_{k=1}^{n}(1+b_k)\geqslant 1+\sum_{k=1}^{n}b_n$$

另一方面,

$$\prod_{k=1}^{n}(1+b_k)=\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(1+b_k)\right)\leqslant\exp\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$$

由此, 我们得到了

$$1+\sum_{k=1}^{n}b_n\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_1}\leqslant\exp\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$$

(1) 必要性: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛到 B, 则有

$$\frac{a_{n+1}}{a_1}\leqslant\exp\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)\leqslant\mathrm{e}^B\quad\Rightarrow\quad a_{n+1}\leqslant a_1\mathrm{e}^B$$

即有界.

(2) 充分性: 若数列 $\{a_n\}$ 有上界 M, 则

$$1+\sum_{k=1}^{n}b_n\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_1}\leqslant\frac{M}{a_1}\quad\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{n}b_n\leqslant\frac{M}{a_1}-1$$

因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

习题 7.C.4 设 $\alpha>0$, $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$ 收敛.

解 记 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$, 是正的递减数列. 我们有 $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}=\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)\dfrac{1}{a_n^{\alpha-1}}=(b_n-b_{n+1})\,b_n^{\alpha-1}$

(1) $\alpha\geqslant1$ 时,$b_n^{\alpha-1}\leqslant b_1^{\alpha-1}$, 因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})\,b_n^{\alpha-1}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})\,b_1^{\alpha-1}=\lim_{N\to\infty}(b_1-b_{N+1})\,b_1^{\alpha-1}\leqslant b_1^{\alpha}$$

故收敛.

(2) $\alpha<1$ 时, 我们利用微分中值定理, 考虑 $f(x)=x^{\alpha}$ 在区间 $[b_{n+1},b_n]$ 上有

$$b_n^{\alpha}-b_{n+1}^{\alpha}=\alpha\xi_n^{\alpha-1}(b_n-b_{n+1})\geqslant\alpha b_n^{\alpha-1}(b_n-b_{n+1})$$

因此我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})\,b_n^{\alpha-1}\leqslant\frac{1}{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n^{\alpha}-b_{n+1}^{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}\lim_{N\to\infty}\left(b_1^{\alpha}-b_{N+1}^{\alpha}\right)\leqslant\frac{1}{\alpha}b_1^{\alpha}$$

故收敛.

习题 7.C.5 设 $\Phi(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上正的严格增函数, $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 是三个非负数列, 满足

$$a_{n+1}\leqslant a_n-b_n\Phi(a_n)+c_na_n,\quad\sum_{n=1}^{\infty}b_n=+\infty,\quad\sum_{n=1}^{\infty}c_n<+\infty.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

习题 7.C.6 设 $\{a_n\}$ 是正数数列使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛. 求证: 存在常数 $M>0$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

习题 7.C.7 设 $\{a_n\}$ 是一个严格单调递增的实数列, 且对任意正整数 n 有 $a_n\leqslant n^2\ln n$.

求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

解

反证, 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 收敛,

并用上题结论, 我们补充 $a_0=0$, 并令 $b_n=a_n-a_{n-1}$, 可知这是一个正数数列.

则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{b_1+\cdots b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_n}\leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=M\left(\frac{1}{a_1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\right)$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_n}$ 收敛

但

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_n}\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2\ln n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 同敛散, 而 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x=\ln\ln x\Big|_1^{+\infty}$ 发散, 故矛盾.

因此原级数发散.

习题 7.C.8 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛, 就称数列 $\{a_n\}$ 是具有有界变差的.

(1) 证明: 具有有界变差的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛;

(2) 构造一个发散的无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 使得其通项构成的数列 $\{a_n\}$ 是一个具有有界变差的数列.

解

(1) 由 Cauchy 收敛准则, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}^+$, 当 $m>n>N$ 时, 有

$$|a_n-a_m|\leqslant\sum_{k=n}^{m-1}|a_{k+1}-a_k|<\varepsilon,$$

故数列 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 取 $a_n=\frac{1}{n}$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1<+\infty,$$

习题 7.C.9 设函数列 $\{f_n(x)\}, n=1,2,\cdots$ 在区间 $[0,1]$ 上由等式

$$f_0(x)=1, \quad f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)}$$

定义. 证明: 当 $n\to\infty$ 时, 函数列在 $[0,1]$ 上一致收敛到一个连续函数.

解

$$f_n(x)=x^{1-\frac{1}{2^n}},$$

由于每个 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且固定 x 时,$f_n(x)$ 单调递增有极限

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=x,$$

且逐点极限 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上连续, 由 Dini 定理知,$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 $f(x)=x$.

习题 7.C.10 递归定义连续可微函数列 $f_1,f_2,\cdots:[0,1]\to\mathbb{R}$ 如下: $f_1=1$, 在 $(0,1)$ 上有

$$f'_{n+1}=f_nf_{n+1},$$

且 $f_{n+1}(0)=1$. 求证: 对每一个 $x\in(0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ 存在, 并求出其极限函数.

解 在习题 7.2.10 中我们将 $f_n(x)$ 展开为幂级数来处理, 这里给出法二.

解微分方程得

$$f_{n+1}(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t}.$$

首先归纳的证明 $f_n(x)\leqslant\dfrac{1}{1-x}$,$n=1$ 时已知成立, 假设 $n=k$ 时成立, 则

$$f_{k+1}(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t}\leqslant \mathrm{e}^{\int_0^x \frac{1}{1-t}\mathrm{d}t}=\frac{1}{1-x},$$

故对任意 $n\in\mathbb{N}^+$, 有 $f_n(x)\leqslant\dfrac{1}{1-x}$.

再归纳的证明

$$f_n(x)\geqslant 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1},$$

$n=1$ 时已知成立, 假设 $n=k$ 时成立, 则

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x)&=\mathrm{e}^{\int_0^x f_k(t)\mathrm{d}t}\geqslant \mathrm{e}^{\int_0^x (1+t+t^2+\cdots+t^{k-1})\mathrm{d}t}\\ &=\mathrm{e}^{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^k}{k}}\geqslant 1+x+x^2+\cdots+x^k. \end{aligned}$$

故对任意 $n\in\mathbb{N}^+$, 有 $f_n(x)\geqslant 1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$.

综上, 对任意 $x\in(0,1)$, 有

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{1}{1-x},$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

习题 7.C.11 设 $f_0(x)$ 是区间 $[0,a]$ 上的连续函数, 证明: 按照下列公式

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(u)\mathrm{d}u$$

定义的函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,a]$ 上一致收敛于 0.

解 由 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 故存在 $M>0$, 使得对任意 $x\in[0,a]$, 有 $|f_0(x)|\leqslant M$. 下归纳的证明:$f_n(x)\leqslant\dfrac{Ma^n}{n!}, n=0,1,2,\cdots$ 当 $n=0$ 时由 M 的定义已知. 假设 $n=k-1$ 时成立, 则当 $x\in[0,a]$ 时,

$$\begin{aligned}|f_n(x)|&\leqslant\int_0^x|f_{n-1}(u)|\mathrm{d}u\\&\leqslant\int_0^x\frac{Mu^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}u=\frac{Mx^n}{n!}\end{aligned}$$

故对任意 $n\in\mathbb{N}$, 有 $|f_n(x)|\leqslant\dfrac{Ma^n}{n!}$. 因此, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 当 $m>n>N$ 时, 有

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant|f_n(x)|+|f_m(x)|\leqslant\frac{Ma^n}{n!}+\frac{Ma^m}{m!}<\varepsilon,$$

故函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛于 0.

习题 7.C.12 利用二项式级数, 计算 $\sqrt{2}$ 到四位小数.

解 由二项式级数, 有

$$\sqrt{2}=(1+1)^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}1^n=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{5}{128}+\cdots$$

取前五项和为 1.4140625.