目录

Lec 1 衔接课

1.1 记号

记号 (数集)

$\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$ 为自然数集, $\mathbb{N}^{+}=\{1,2,3,\cdots\}$ 为正整数集.

$\mathbb{Z}=\{\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots\}$ 为整数集.

$\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{p}{q}\mid p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}^{+}\right\}$ 为有理数集.

$\mathbb{R}$ 为实数集.

记号 (大平行算数符号)

$\sum$ 表示求和, 如 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

$\prod$ 表示连乘, 如 $\prod\limits_{i=1}^{n}a_i=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$.

$\bigcap$ 表示交集, 如 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$.

$\bigcup$ 表示并集, 如 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$.

对于上述运算, 我们经常称 i 为**指标**, 称 $i=1$ 与 $i=n$ 分别为**下限**与**上限**. 有时指标的取值范围以集合的形式给出, 如 $\sum\limits_{i\in I}a_i$ 表示对所有 $i\in I$ 的 a_i 求和, 称 I 为**指标集**.

有时指标的个数不止一个, 如 $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}a_{ij}$ 表示对所有 $1\leqslant i\leqslant m$ 与 $1\leqslant j\leqslant n$ 的 a_{ij} 求和, 即

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}a_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}.$$

正如 $0!=1$ 一样, 我们规定 $\sum$ 与 $\prod$ 的空和与空积为:

$$\sum_{i\in\varnothing}a_i=0,\quad\prod_{i\in\varnothing}a_i=1.$$

1.2 映射, 有穷集, 无穷集与等势

定义 1.1 (映射) 设 A 与 B 为两个集合, 若对任意 $x\in A$, 都能唯一地指定一个 $y\in B$ 与之对应, 则称从 A 到 B 的这种对应关系为映射, 记为 $f:A\to B$, 并称 x 为自变量,$y=f(x)$ 为因变量.

A 称为映射 f 的定义域,A 在 f 映射下的像 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}\subset B$ 称为 f 的值域.

我们在验证一个对应关系是否是映射时, 或者说, 验证一个映射是否良定 (well-defined) 时, 需要验证两个条件:

(1) 对任意 $x\in A$, 都能找到 $y\in B$ 与之对应.

(2) 对任意 $x\in A$, 只能找到唯一的 $y\in B$ 与之对应.

前者称为映射的存在性, 后者称为映射的唯一性.

我们将从数集到数集的映射称为函数, 在这门课之中, 我们几乎只考虑从实数集 $\mathbb{R}$ 到实数集 $\mathbb{R}$ 的函数.

记号 对于映射

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

我们用 $\to$ 表示映射的范围, $A\to B$ 表示该映射是从集合 A 到集合 B 的映射. $\mapsto$ 表示映射的具体规则, $x\mapsto f(x)$ 表示 x 在该映射下对应 $f(x)$.

定义 1.2 (单射) 设 A 与 B 为两个集合, 若映射 $f:A\to B$ 满足：对任意 $x_1,x_2\in A$, 当 $x_1\neq x_2$ 时, 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称 f 为从 A 到 B 的单射.

定义 1.3 (满射) 设 A 与 B 为两个集合, 若映射 $f:A\to B$ 满足：对任意 $y\in B$, 存在 $x\in A$, 使得 $f(x)=y$, 则称 f 为从 A 到 B 的满射.

定义 1.4 (双射) 设 A 与 B 为两个集合, 若映射 $f:A\to B$ 既是单射又是满射, 则称 f 为从 A 到 B 的双射. 也称为 A 与 B 之间存在一一对应关系.

例

$$\begin{aligned} f:[0,1]&\to[0,1) \\ x&\mapsto x, \qquad x\notin\left\{\frac{1}{k}\mid k\in\mathbb{N}^+\right\} \\ \frac{1}{k}&\mapsto\frac{1}{k+1}, \qquad\qquad k\in\mathbb{N}^+ \end{aligned}$$

不难验证, f 为从 $[0,1]$ 到 $[0,1)$ 的双射. 我们将在后续证明之中使用该思想.

这个双射使用了类似希尔伯特酒店的操作: 通过将某些元素映射到不同位置, 展示了即使是“满”的区间也可以为新的元素腾出“空间”.

下面两个命题建议同学们自己先尝试证明, 以加深对双射的理解.

命题 1.1 双射存在逆映射, 且逆映射也是双射.

证明 设 $f:A\to B$ 为双射, 则对任意 $y\in B$, 存在唯一 $x\in A$, 使得 $f(x)=y$. 定义映射 $g:B\to A$ 为: 对任意 $y\in B$, 有 $g(y)=x$, 其中 x 为唯一满足 $f(x)=y$ 的元素. 则 g 为 f 的逆

映射. **我们常将 f 的逆映射记为 f^{-1}.**

下面我们证明 g 为双射.

(1) g 为单射: 对任意 $y_1, y_2 \in B$, 当 $y_1 \neq y_2$ 时, 设 $x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2)$, 则 $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2)$, 由 f 为单射可知,$x_1 \neq x_2$, 即 $g(y_1) \neq g(y_2)$, 所以 g 为单射.

(2) g 为满射: 对任意 $x \in A$, 设 $y = f(x)$, 则 $y \in B$, 且 $g(y) = g(f(x)) = x$, 所以对任意 $x \in A$, 都存在 $y \in B$, 使得 $g(y) = x$, 所以 g 为满射.

命题 1.2 双射的复合仍为双射.

证明 设 $f: A \to B$ 与 $g: B \to C$ 均为双射, 则对任意 $z \in C$, 存在唯一 $y \in B$, 使得 $g(y) = z$, 又对该 y, 存在唯一 $x \in A$, 使得 $f(x) = y$. 定义映射 $h: A \to C$ 为: 对任意 $x \in A$, 有 $h(x) = g(f(x))$. 则 h 为从 A 到 C 的映射. **我们常将 f 与 g 的复合记为 $g \circ f$, 表示先用 f 作用 x, 再用 g 作用 $f(x)$, 从而得到 $g(f(x))$.**

下面我们证明 h 为双射.

(1) h 为单射: 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 设 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, 则 $y_1 \neq y_2$, 又由 g 为单射可知,$g(y_1) \neq g(y_2)$, 即 $h(x_1) \neq h(x_2)$, 所以 h 为单射.

(2) h 为满射: 对任意 $z \in C$, 存在唯一 $y \in B$, 使得 $g(y) = z$, 又对该 y, 存在唯一 $x \in A$, 使得 $f(x) = y$. 则 $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. 所以对任意 $z \in C$, 都存在 $x \in A$, 使得 $h(x) = z$, 所以 h 为满射.

定义 1.5 (有穷集) 设 A 为一个集合, 称 A 为有穷集, 若存在自然数 n, 使得 A 与 $\{1, 2, \cdots, n\} = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant n, i \in \mathbb{N}\}$ 之间存在一一对应关系.

当 $n = 0$ 时,$\{1, 2, \cdots, n\} = \varnothing$, 此时有穷集称为空集.

在此基础上, 我们才可以对有限集合的个数进行计数描述, 具体而言如下例

例 1.1 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 为有穷集, 由于 A 与 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 之间存在一一对应关系, 因此 A 中有 5 个元素.

其中的一一对应关系可以取为:

$$f: A \to \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3, d \mapsto 4, e \mapsto 5.$$

f 是一个双射, 也可以取为:

$$g: A \to \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad a \mapsto 3, b \mapsto 5, c \mapsto 1, d \mapsto 4, e \mapsto 2.$$

g 也是一个双射.

其中我们可以不在乎 A 与 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 之间具体的对应关系, 只在乎双射到 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的自然数 n. 这就是为什么我们说 A 中有 5 个元素.

顺带一提,$A = \{a, b, c, d, e\}$ 与 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的双射共有 $A_5^5 = 5! = 120$ 种, 这是 a, b, c, d, e

的全排列.

定义 1.6 (等势) 设 A 与 B 为两个集合, 若存在从 A 到 B 的双射, 则称 A 与 B 等势.

也就是说,A 是有穷集等价于: 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 A 与 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 等势.

记号 我们用 s.t. (such that) 来表示"使得", 用 i.e. (id est) 来表示"也就是说".

对于无穷集合, 我们给出两种定义方式:

定义 1.7 (无穷集) 设 A 为一个集合, 称 A 为无穷集, 若 A 不为有穷集.

定义 1.8 (无穷集) 设 A 为一个集合, 称 A 为无穷集, 若存在 A 的真子集 A', 使得 A 与 A' 等势.

下面我们先承认定义 1.7 是无穷集的定义, 证明上述两种定义方式是等价的.

证明 存在真子集与其等势一定是无穷集

考虑 A 满足:A 与某个真子集 A' 等势. 即 $\exists f : A \to A'$ 为双射. 使用反证法, 假设 A 为有穷集, 根据定义 1.5, 则 $\exists n \in \mathbb{N}$, s.t. A 与 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 等势, 即存在双射 $g : A \to \{1, 2, \cdots, n\}$.

由命题 1.1 与命题 1.2, 可知 $g \circ f^{-1} : A' \to A \to \{1, 2, \cdots, n\}$ 为双射. 又由 $A' \subset A$, 可推出 $A' = A$, 这与 A' 为 A 的真子集矛盾.

其中最后的部分, 我们总结为以下命题

命题 1.3 给定某个 n, 若存在 $f : A \to \{1, 2, \cdots, n\}$ 为双射, 且对于 A 的某个子集 A', 存在 $\tilde{f} : A' \to \{1, 2, \cdots, n\}$ 为双射, 则 $A' = A$.

该命题留作思考, 这里给出助教的证明.

证明 我们归纳的给出证明, 当 $n = 0$ 时, $\{1, 2, \cdots, n\} = \varnothing$, 而空集只能双射到空集: 若 $\mu : \varnothing \to S, S \neq \varnothing$, 则 $\exists s \in S$, 考虑 $\mu^{-1}(s) \in \varnothing$ 可知矛盾. 因此 $A = \varnothing$, $A' = \varnothing$, 所以 $A' = A$.

当 $n = k$ 成立时, 即存在 $f : A \to \{1, 2, \cdots, k\}$ 为双射, 且对于 A 的某个子集 A', 存在 $\tilde{f} : A' \to \{1, 2, \cdots, k\}$ 为双射, 则 $A' = A$.

我们希望证明: 若存在 $g : B \to \{1, 2, \cdots, k+1\}$ 为双射, 且对于 B 的某个子集 B', 存在 $\tilde{g} : B' \to \{1, 2, \cdots, k+1\}$ 为双射, 则 $B' = B$.

取 $b = \tilde{g}^{-1}(k+1) \in B'$, 则 $\tilde{g}$ 将 $B' \setminus \{b\}$ 映射到 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 上. $g(b) \in \{1, 2, \cdots, k+1\}$, 不难证明存在双射 $\tau : \{1, 2, \cdots, k+1\} \setminus \{g(b)\} \to \{1, 2, \cdots, k\}$. 因此, 存在双射 $\tau \circ g : B \setminus \{b\} \to \{1, 2, \cdots, k\}$, 且 $B' \setminus \{b\} \subset B \setminus \{b\}$, 由 $n = k$ 时的归纳假设, 可知 $B' \setminus \{b\} = B \setminus \{b\}$, 从而 $B' = B$.

证明 无穷集一定存在真子集与其等势

即证明: 已知 A 是无穷集, 则不存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 A 与 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 等势.

由 $n = 0$ 时的情况可知,A 非空, 取 $a_1 \in A$, 设 $A_1 = A \setminus \{a_1\}$, 则 A_1 为 A 的真子集, 且不为有穷集. 于是 $A_1 \neq \varnothing$, 取 $a_2 \in A_1 \cdots$ 依此类推, 可得 A 的一个真子集列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, 两两不等. 因

此构造出双射:

$$
\begin{aligned}
f : & A \to A_1 \\
& x \mapsto x, x \notin \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \\
& a_i \mapsto a_{i+1}, i = 1, 2, \cdots
\end{aligned}
$$

由此可知, A 与 A_1 等势.

接下来, 我们以定义 1.8 作为无穷集的定义, 证明上述两种定义方式是等价的. 这个证明过程留作思考, 这里给出助教的证明.

证明 A **存在等势真子集** $\Rightarrow$ A **不为有穷集**

当 $A = \varnothing$ 时,A 不存在真子集.

当 $A \neq \varnothing$ 时, 设 $f : A \to A'$ 为双射, 其中 A' 为 A 的真子集. 取 $x_0 \in A \setminus A'$, 构造序列:

$$
x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \cdots, x_n = f(x_{n-1}), \cdots
$$

则有:

(1) $x_i \in A' \subset A, i = 1, 2, \cdots,$

(2) $x_i \neq x_j, \forall i \neq j, i, j = 0, 1, 2, \cdots.$

否则, 存在 $n, m \in \mathbb{N}, n > m \geqslant 0$, 使得 $x_n = x_m$, 则 $f(x_{n-1}) = f(x_{m-1})$, 由 f 为单射可知,$x_{n-1} = x_{m-1}$, 依此类推, 可知 $x_{n-k} = x_{m-k}, k = 1, 2, \cdots, m$, 从而 $x_0 = x_{n-m} \in A'$, 这与 $x_0 \in A \setminus A'$ 矛盾.

由此得到了 A 的一个两两不同的无限子集 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$,$A$ 都不与 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 等势: 否则 $\exists n \in \mathbb{N}^+$,$g : A \to \{1, 2, \cdots, n\}$. 考虑 $\{g(x_i)\}_{i=0}^{\infty}$ 两两不同, 且都属于 $\{1, 2, \cdots, n\}$. 这就证明了 A 不是有穷集.

证明 A **存在等势真子集** $\Leftarrow$ A **不为有穷集**

这与上述定义 1.7定义下的**无穷集一定存在真子集与其等势**的证明过程完全一样.

1.3 笛卡尔积

定义 1.9 (笛卡尔积) 设 A 与 B 为两个集合, 则 A 与 B 的笛卡尔积为:

$$
A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},
$$

其中 (a, b) 为有序对.

例 1.2 设 $A = \{1, 2\}, B = \{x, y, z\}$, 则

$$
A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}.
$$

如果 A 与 B 均为有穷集, 且 A 中有 m 个元素,B 中有 n 个元素, 则 $A\times B$ 中有 $m\times n$ 个元素, 即

$$\#(A\times B)=\#A\times\#B.$$

给出一列集合 $\{A_i\}_{i=1}^n$, 则

$$\prod_{i=1}^n A_i=A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\},$$

其中 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 为 n 元有序组.

例 1.3 $\mathbb{R}^n=\prod_{i=1}^n\mathbb{R}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n\}$,$\mathbb{R}^n$ 称为 n 维欧氏空间.

1.4 等价关系,Cauchy 列与实数

定义 1.10 (等价关系) 设 A 为一个集合, 若在 A 上定义了一个关系 $\sim$, 且对任意 $x,y,z\in A$, 均满足:

(1) (自反性) $x\sim x$;

(2) (对称性) $x\sim y\Rightarrow y\sim x$;

(3) (传递性) $x\sim y,y\sim z\Rightarrow x\sim z$;

则称 $\sim$ 为 A 上的等价关系.

定义 1.11 集合 A 在等价关系 $\sim$ 下的等价类为: 对任意 $a\in A$, 定义 $[a]=\{b\in A\mid b\sim a\}$, a 称为 $[a]$ 这个等价类的代表元.

注意到

$$[a]\cap[b]=\begin{cases}[a]=[b], & a\sim b\\ \varnothing, & a\nsim b\end{cases}$$

证明

(1) 若 $a\sim b$, 则对任意 $x\in[a]$, 有 $x\sim a$, 由 $a\sim b$ 与等价关系的传递性可知,$x\sim b$, 所以 $x\in[b]$, 即 $[a]\subset[b]$. 同理可知 $[b]\subset[a]$, 所以 $[a]=[b]$.

(2) 若 $a\nsim b$, 则对任意 $x\in[a]$, 有 $x\sim a$, 由 $a\nsim b$ 与等价关系的对称性与传递性可知, $x\nsim b$, 所以 $x\notin[b]$, 即 $[a]\cap[b]=\varnothing$.

因此集合 A 可以被拆为若干 (可能是无穷个) 互不相交的等价类的并, 这称为 A 的一个分拆. 具体而言, 记 $A/\!\sim$ 为 A 中所有等价类构成的集合, 称为 A 在等价关系 $\sim$ 下的商集, 即

$$A/\!\sim:=\{[a]\mid a\in A\}.$$

则 A 可以写为不交并

$$A = \bigcup_{[a]\in A/\sim} [a].$$

例 1.4 如果 $\sim$ 是集合 A 上的等价关系, 对于自然映射

$$p : A \to A/\sim, \quad a \mapsto [a],$$

这个映射是满射, 也称为商映射.

例 1.5 $\mathbb{Z}$ 上有一种基础的等价关系:

$$a \sim b \iff a - b = 2k, k \in \mathbb{Z},$$

即 a 与 b 同为奇数或同为偶数. 则存在两个等价类

$$[0] = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\},$$

$$[1] = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, \cdots\},$$

且 $[0] \cap [1] = \varnothing$, 且

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1].$$

我们将 $\mathbb{Z} = [0] \cup [1]$ 称为 $\mathbb{Z}$ 在该等价关系下的一个分拆.

商映射

$$p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\sim, \quad a \mapsto [a]$$

具体为

$$p(a) = \begin{cases} [0], & a\text{为偶数} \\ [1], & a\text{为奇数} \end{cases}.$$

例 1.6 集族 $\mathcal{A}$ 上的等价关系:

$$A \sim B \iff \exists\text{双射} f : A \to B, \quad A, B \in \mathcal{A}.$$

证明

(1) (自反性) 对任意 $A \in \mathcal{A}$, 恒有 $A \sim A$, 因为恒有恒等映射 $id_A : A \to A$ 为双射.

(2) (对称性) 对任意 $A, B \in \mathcal{A}$, 若 $A \sim B$, 则存在双射 $f : A \to B$, 由命题 1.1 可知,f 的逆映射 $f^{-1} : B \to A$ 也为双射, 所以 $B \sim A$.

(3) (传递性) 对任意 $A, B, C \in \mathcal{A}$, 若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$, 则存在双射 $f : A \to B$ 与 $g : B \to C$, 由命题 1.2 可知,$g \circ f : A \to C$ 也为双射, 所以 $A \sim C$.

例 1.7 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ 上的等价关系:

$$(p, q) \sim (p', q') \iff pq' = p'q, \quad p, p' \in \mathbb{Z}, q, q' \in \mathbb{N}^*.$$

良定的证明

(1) (自反性) 对任意 $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, 恒有 $(p,q)\sim(p,q)$, 因为 $pq=pq$.

(2) (对称性) 对任意 $(p,q),(p',q')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, 若 $(p,q)\sim(p',q')$, 则 $pq'=p'q$, 从而 $p'q=pq'$, 所以 $(p',q')\sim(p,q)$.

(3) (传递性) 对任意 $(p,q),(p',q'),(p'',q'')\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, 若 $(p,q)\sim(p',q')$ 且 $(p',q')\sim(p'',q'')$, 则 $pq'=p'q$ 与 $p'q''=p''q'$ 成立, 从而 $pq'q''=p'qq''=p''q'q$, 由于 $q'\neq 0$, 可知 $pq''=p''q$, 所以 $(p,q)\sim(p'',q'')$.

我们将商集

$$(\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*)/\!\sim=\{[(p,q)]\mid(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*\}$$

记为 $\mathbb{Q}$, 并将 $[(p,q)]$ 记为 $\dfrac{p}{q}$, 则

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q}\mid p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}^*\right\},$$

即有理数集.

$\dfrac{1}{3}=[(1,3)]=[(2,6)]=[(3,9)]=\cdots$, 即 $\dfrac{1}{3}$ 可以表示为 $(1,3),(2,6),(3,9),\cdots$ 等有序对的等价类. 这提供了一个新的看待 $\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{3}{9}=\cdots$ 的视角.

定义 1.12 (Cauchy 列) 设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若对任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $m,n>N$ 时, 有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$, 则称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列.

我们称两个 Cauchy 列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 等价, 若对任意 $M\in\mathbb{N}^*$, 都存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-b_n|<\dfrac{1}{M}$. 记为 $\{a_n\}\sim\{b_n\}$.

命题 1.4 上述等价关系等价于: 对任意 $\varepsilon>0$, 都存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-b_n|<\varepsilon$.

证明 充分性: 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $M=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}+1\right]\in\mathbb{N}^*$, 使得 $\dfrac{1}{M}<\varepsilon$, 则存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-b_n|<\dfrac{1}{M}<\varepsilon$.

必要性: 对任意 $M\in\mathbb{N}^*$, 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{M}$, 则存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-b_n|<\varepsilon=\dfrac{1}{M}$.

命题 1.5 上述等价关系具有传递性, 即: 若 Cauchy 列 $\{a_n\}\sim\{b_n\}$ 且 $\{b_n\}\sim\{c_n\}$, 则 $\{a_n\}\sim\{c_n\}$.

证明 对任意 $M\in\mathbb{N}^*$, 取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2M}$, 则存在 $N_1,N_2\in\mathbb{N}$, 使得当 $n>N_1$ 时, 有 $|a_n-b_n|<\varepsilon$, 且当 $n>N_2$ 时, 有 $|b_n-c_n|<\varepsilon$. 取 $N=\geqslant\{N_1,N_2\}$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-c_n|\leqslant|a_n-b_n|+|b_n-c_n|<\varepsilon+\varepsilon=\frac{1}{M}.$$

因此 $\{a_n\}\sim\{c_n\}$.

或者我们也可以更简化的写为

证明 对任意 $M \in \mathbb{N}^*$, 取 $M \in \mathbb{N}^*$, 则存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - b_n| < \dfrac{1}{M}$, 且当 $n > N_2$ 时, 有 $|b_n - c_n| < \dfrac{1}{M}$. 取 $N =\geqslant \{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - c_n| \leqslant |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \frac{1}{M} + \frac{1}{M} = \frac{2}{M}.$$

第一种写法用到的是 $\dfrac{1}{2M}$,第二种方法用的是 $\dfrac{1}{M}$. 注意到这两种写法本质上是等价的。第二种写法得到的是

$$\forall M' \in \mathbb{N}^* \, \exists N \, \forall n > N: \ |a_n - c_n| < \frac{2}{M'},$$

令 $M' = 2M$ 就正好得到

$$\forall M \in \mathbb{N}^* \, \exists N \, \forall n > N: \ |a_n - c_n| < \frac{1}{M}.$$

因此两种写法只是参数选择方式不同，通过简单的替换 $M' = 2M$ 就可以互相转化，因而在逻辑上完全等价。

这也启发了我们, 以下命题的成立:

命题 1.6 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列等价于: 对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - b_n| < c\varepsilon$. 其中 c 为任意正常数.

对于每一个与 n 无关的 $c > 0$, 这个命题都是成立的.

证明 充分性: 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon' = c\varepsilon > 0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $m, n > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon' = c\varepsilon$.

必要性: 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{c} > 0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $m, n > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{c} < c\varepsilon$.

上述对 Cauchy 列的等价, 就是一个等价关系, 我们仅验证了传递性, 自反性与对称性是显然的.

Cachuy 列之间等价关系的自反性与对称性验证

自反性: 对任意 $M \in \mathbb{N}^*$, 取 $N = 1$, 则当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a_n| = 0 < \dfrac{1}{M}$, 所以 $\{a_n\} \sim \{a_n\}$.

对称性: 对任意 $M \in \mathbb{N}^*$, 取 N 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - b_n| < \dfrac{1}{M}$, 则当 $n > N$ 时, 有 $|b_n - a_n| = |a_n - b_n| < \dfrac{1}{M}$, 所以 $\{b_n\} \sim \{a_n\}$.

现在我们可以定义实数集了. 记 $A = \big\{\{a_n\} \mid \{a_n\}\text{为 Cauchy 列}, a_n \in \mathbb{Q}\big\}$,$\sim$ 为上述 Cauchy 列之间的等价关系, 则实数集 $\mathbb{R}$ 定义为商集

$$\mathbb{R} = A/\!\sim = \{[\{a_n\}] \mid \{a_n\}\text{为 Cauchy 列}, a_n \in \mathbb{Q}\},$$

其中 $[\{a_n\}]$ 为 Cauchy 列 $\{a_n\}$ 的等价类.

Lec 2 数列极限

2.1 数列极限的定义

定义 2.1 (数列极限) 对于数列 $\{a_n\}$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立, 则 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n \to a(n \to \infty)$.

常数列是指所有项都相等的数列, 例如 $2, 2, 2, 2, 2, \cdots$.

我们判断数列是否收敛, 就是判断其是否满足数列极限存在的定义. 除此之外, 也可以使用如下的性质:

命题 2.1 对于数列 $\{a_n\}$, 以下命题等价:

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ 成立, 其中 $M > 0$ 为常数.;

注 一般而言, 对于语句 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 一般暗示了其中 $N = N(\varepsilon)$, 即 N 是依赖于 ε 的. 不太严谨的说, 当 ε 变小时, 对应的 N 会变大.

M 为常数指的是 M 不依赖于 ε 和 n. 例如 $M = 2, M = 1000$ 等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于 $\forall M > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ 成立.

证明 充分性: 取 $M = 1$, 则显然成立.

必要性: 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M} > 0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < M\varepsilon' = M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

事实上, 所有的收敛的有理数列, 其极限点的全体即是实数集 $\mathbb{R}$. 即实数集 $\mathbb{R}$ 是有理数列的极限值构成的.

注

1. $\mathbb{Q}$ 对极限是不封闭的, 即: 由 $\mathbb{Q}$ 组成的数列的极限不一定是 $\mathbb{Q}$ 中的元素;
2. 由 $\mathbb{Q}$ 组成的数列的极限只能是实数;
3. 由 $\mathbb{Q}$ 组成的所有收敛数列, 他们的极限的集合, 恰好就是 $\mathbb{R}$, 不多不少.

理由如下:

对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 设 x 的小数表示为: $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 则有理数列: $a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, \cdots$ 当 $n \to \infty$ 时, 其极限为 x. 若 x 是有理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是有限小数或循环小数, 若 x 是无理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是无限不循环小数, 则极限点 x 是无理数.

此处 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 其中每一个 a_i 都是一个数字，a_0 是整数部分，$a_1a_2a_3\cdots$ 是小数

部分. 比如，$x = 3.1415926\cdots$, 那么 $a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 9, a_6 = 2, a_7 = 6, \cdots$.

可以由 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 构造出一个数列 $\tau_1 = a_0, \tau_2 = a_0.a_1, \tau_3 = a_0.a_1a_2, \cdots$, 说 x 为极限指的, 是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n = x$. 都用 x 代指, 是因为这里不能确定 x 是不是有限小数, 有理数还是无理数. 但是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限是确定的.

定义 2.2 (子列) 一个数列 $\{a_n\}$ 的子列, 是指取自原数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 按照原数列中的同样顺序写成的一个新的数列. 于是 $\{a_n\}$ 的子列通常形如 $\{a_{n_k}\}(k \geqslant 1)$, 其中 n_k 是正整数, 满足 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$.

命题 2.2 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则其任意一个子列也收敛于 a.

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.

对于子列 $\{a_{n_k}\}$, 由于 n_k 是正整数, 且 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, 因此当 $k > N$ 时,$n_k > N$, 则有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 由数列极限的定义, 可知 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

命题 2.3 数列 $\{a_n\}$ 的某个子列收敛于 a 的充要条件在 a 的任意小邻域内有无穷多项.

证明 充分性: 设 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的子列, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. 则 $\forall\varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^*, \forall k > K$ 都有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ 成立. 因此 a 的任意小邻域内有无穷多项.

必要性: 设 a 的任意小邻域内有无穷多项. 则 $\forall\varepsilon > 0$, 在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内有无穷多项. 取 $a_{n_1} \in (a-1, a+1), a_{n_2} \in \left(a - \dfrac{1}{2}, a + \dfrac{1}{2}\right), \cdots, a_{n_k} \in \left(a - \dfrac{1}{k}, a + \dfrac{1}{k}\right), \cdots$. 则 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的子列, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

聚点的定义如下.

定义 2.3 (聚点) 设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在无穷多个 $n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$, 则称 a 为 $\{a_n\}$ 的聚点.

聚点是对于集合而言的, 极限是对于数列而言的, 他们之间存在一些联系:

命题 2.4 a 为数列 $\{a_n\}$ 的聚点, 当且仅当存在收敛于 a 的子列 a_{n_k}.

证明 a 为 $\{a_n\}$ 的聚点 $\Leftrightarrow$ a 的任意小邻域内有无穷多项 $\Leftrightarrow$ 存在收敛于 a 的子列 a_{n_k} (由命题 2.3 可知).

例 2.1 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a, \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$

证明 只证明充分性。

按已知条件 $\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$。又 $\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$。于是令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, 则 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$。故 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$。

请将此结果推广到 m 个子列的情况。

下面两个命题有一定的难度, 可以先自行思考, 这里给出助教的证明.

命题 2.5 数列有界的充要条件为他的每个子列有收敛子列.

证明 充分性: 设数列 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{a_{n_k}\}$ 也有界. 由定理 2.1可知,$\{a_{n_k}\}$ 有收敛子列.

必要性: 设数列 $\{a_n\}$ 无界, 则对任意 $M>0$, 都存在 $n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $|a_n|>M$. 取 $M=1$, 则存在 $n_1 \in \mathbb{N}^*$, 使得 $|a_{n_1}|>1$. 取 $M=|a_{n_1}|+1$, 则存在 $n_2>n_1$, 使得 $|a_{n_2}|>|a_{n_1}|+1$. 依此类推, 可得数列 $\{a_{n_k}\}$, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$, 且 $|a_{n_k}|>k$. 显然,$\{a_{n_k}\}$ 无收敛子列.

命题 2.6 数列收敛的充分必要条件是存在一个数 a, 使数列的每个子列有收敛于 a 的子列.

证明 充分性: 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则其任意子列也收敛于 a. 因此其每个子列都有收敛于 a 的子列.

必要性: 设数列 $\{a_n\}$ 不收敛, 则存在 $\varepsilon_0>0$, 使得对任意 $N \in \mathbb{N}^*$, 都存在 $n>N$, 使得 $|a_n-a| \geqslant \varepsilon_0$. 取 $N=1$, 则存在 $n_1>1$, 使得 $|a_{n_1}-a| \geqslant \varepsilon_0$. 取 $N=n_1$, 则存在 $n_2>n_1$, 使得 $|a_{n_2}-a| \geqslant \varepsilon_0$. 依此类推, 可得数列 $\{a_{n_k}\}$, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$, 且 $|a_{n_k}-a| \geqslant \varepsilon_0$. 显然,$\{a_{n_k}\}$ 无收敛于 a 的子列.

2.2 数列极限存在的准则

1. 定义判别 如果能够找到合适的 N, 使得后续的定义都成立, 则可以判定数列极限存在. 这里的 N 的存在性一般由构造来得出,

例 2.2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}=1$

证明 $\forall \varepsilon>0$, 欲求 N, 使得 $|\sqrt[n]{n+1}-1|<\varepsilon$, 记 $a_n=\sqrt[n]{n+1}-1$, 则

$$1+n=(1+\alpha)^n=1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}\alpha^2+\cdots+\alpha^n \geqslant \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

因此

$$0<\alpha<\sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} \leqslant \sqrt{\frac{4}{n-1}}<\varepsilon$$

对每一个不等号组成的不等式组求解, 就可以得到 n 的范围了, 即得 $N \geqslant \left\{2, \dfrac{16}{\varepsilon^2}+1\right\}+1$.

例 2.3 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}=0, \alpha>0$

证明 $\forall \varepsilon>0, \exists N=\left\lceil \sqrt[\alpha]{\dfrac{1}{\varepsilon}} \right\rceil$, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-0|=\frac{1}{n^\alpha}<\frac{1}{N^\alpha} \leqslant \varepsilon.$$

记号 记号 $\lfloor x \rfloor$ 表示不大于 x 的最大整数, 如 $\lfloor 3.14 \rfloor=3, \lfloor -3.14 \rfloor=-4$. 记号 $\lceil x \rceil$ 表示不小于

x 的最小整数, 如 $\lceil 3.14\rceil = 4, \lceil -3.14\rceil = -3$. 即

$$\lfloor x\rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant x\},$$

$$\lceil x\rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant x\}.$$

2. 单调有界准则 数集的上界和下界定义为:

定义 2.4

1. $\sup E = \inf\{u \in \mathbb{R} : u \geqslant x, \forall x \in E\}$;
2. $\inf E = \sup\{u \in \mathbb{R} : u \leqslant x, \forall x \in E\}$.

定理 2.1 (单调有界极限存在准则) 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n(\inf a_n)$.

证明 单调增有界极限存在.

设数列 $\{a_n\}$ 单调增且有上界, 由确界存在定理,$\{a_n\}$ 有上确界. 令 $\sup a_n = \beta$, 则 β 满足以下两点:

1. $\forall n \in N, a_n \leqslant \beta$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists\, a_{n_0} \in \{a_n\}, \beta - \varepsilon < a_{n_0}$.

又因为 $\{a_n\}$ 单调增, 故 $\forall n > n_0, a_n \geqslant a_{n_0} > \beta - \varepsilon$, 且 $a_n \leqslant \beta < \beta + \varepsilon$. 即 $|\beta - a_n| < \varepsilon$ 在 $n > n_0$ 时成立.

由数列极限定义, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta = \sup\{a_n\}$. 同理, 单调减有下界极限存在.

3. 夹逼准则

定理 2.2 (夹逼准则) 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

证明 从 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, N_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n > N_1$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$. $\Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ 当 $n > N_1$ 时恒成立.

再从 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Rightarrow$ 对上述 ε , $\exists\, N_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n > N_2$ 都有 $|c_n - a| < \varepsilon$. $\Rightarrow a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$ 当 $n > N_2$ 时恒成立.

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, $a - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < a + \varepsilon$, 即 $|b_n - a| < \varepsilon$ 成立. 由数列定义, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

2.3 数列极限的性质

命题 2.7 (唯一性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, 则 $a = b$.

证明 如果 $\{a_n\}$ 有两个极限值 a 和 b. 根据极限的定义, 对于任意的正数 ε, 注意到 $\dfrac{\varepsilon}{2}$ 也是一个正数, 因此对应两个极限值, 分别存在正整数 N_1 和 N_2, 使得当

$$n > N_1 \text{ 时有} |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$n > N_2 \text{ 时有} |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时（即 $n > N_1, n > N_2$）, 上面两个不等式都满足, 所以

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leqslant |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

两个数的距离要小于任意一个正数, 这两个数必须相等, 即 $a = b$.

定义 2.5 (数列有界) 设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若存在常数 $M > 0$, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $|a_n| < M$, 则称 $\{a_n\}$ 为有界数列.

命题 2.8 (有界性) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则数列 $\{a_n\}$ 有界.

证明 取 $\varepsilon = 1$, 由定义知道, 当存在一个自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < 1$, 即当 $n > N$ 时, 有 $|a_n| < |a| + 1$. 取

$$M = \max\{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|\}.$$

注意到, 第一, 有有限个数中一定能取得一个最大的；第二, 上面确定的 M 显然与 n 无关. 则对所有自然数 n, 也就是说数列的所有项, 都会有 $|a_n| \leqslant M$.

不难推出如下结论:

命题 数列 $\{a_n\}$ 有界等价于数列 $\{a_n\}$ 自第 N 项之后有界, 其中 N 已知.

命题 2.9 (保号性) 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0$, 则必有 $a \geqslant 0$.

证明 若 $a > l$, 取 $\varepsilon = a - l > 0$, 则存在一个自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon = a - l,$$

因此

$$-(a - l) < a_n - a$$

即, 当 $n > N$ 时, 不等式 $a_n > l$ 成立. 对于 $a < l$ 的情况, 可类似证明, 在这种情况下, 只要取 $\varepsilon = l - a > 0$ 即可. 对于此问, 取 $l = 0$.

由此不难推出:

命题 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $a_n \geqslant l, \forall n \geqslant n_0$, 则必有 $a \geqslant l$.

该命题的逆命题不成立, 如 $a_n = (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 但 a_n 既不恒大于零, 也不恒小于零. 然而, 加上如果是不严格不等, 则在 N 充分大时成立, 具体而言如下所述:

命题 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\forall l > a$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $a_n < l$.

证明 反证: 若 $\exists l_0 > a$, 使得对任意 $N \in \mathbb{N}^*$, 都存在 $n > N$, 使得 $a_n \geqslant l_0$. 取 $\varepsilon_0 = l - a > 0$, 则对任意 $N \in \mathbb{N}^*$, 都存在 $n > N$, 使得 $|a_n - a| \geqslant \varepsilon_0$. 与数列极限的定义矛盾.

命题 2.10 (保序性) 若 $a_n \to a, b_n \to b$, 且 $a_n \leqslant (\geqslant) b_n, \forall n \geqslant n_0$, 则必有 $a \leqslant (\geqslant) b$.

证明 令 $c_n = b_n - a_n$, 则 $c_n \to b - a$, 且 $c_n \leqslant 0, \forall n \geqslant n_0$, 由保号性可知,$b - a \leqslant 0$, 即 $a \leqslant b$.

其中唯一性暗示了, 改变数列中有限多项的值, 不会影响数列的收敛性及其极限. 例如, 对于数列 $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$, 它的极限是 0, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. 如果我们改变数列的前 10 项, 如 $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1/11, 1/12, 1/13, 1/14, \ldots$, 则数列的极限仍然是 0. 这个性质在证明数列极限的存在性时, 常常会被用到.

有界性质给出了收敛数列的一个必要条件. 因此无界数列一定是发散的. 例如对于数列 $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \cdots$ 显然是无界的, 且发散的.

保号性的条件是不严格不等, 若调整为 $a_n > 0$, 则无法说明 $a > 0$. 例如数列 $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ 的极限是 0, 但数列的每一项都是正数.

例 2.4 设 $a \in \mathbb{R}$,$\{a_n\}$ 为实数列, 请考虑以下对命题的语句, 说明了 $\{a_n\}$ 具有什么性质?

1. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.
2. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.
3. 存在 $N \in \mathbb{N}$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.
4. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.
5. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.
6. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

解

1. $\{a_n\}$ 以 a 为极限.
2. a 为 $\{a_n\}$ 的聚点, 或者有一项等于 a.
3. $\{a_n\}$ 从某一项开始恒等于 a.
4. $\{a_n\}$ 有界.
5. 恒成立.
6. a 为 $\{a_n\}$ 的聚点.

这里仅给出部分证明.

证明 3. 存在 $N \in \mathbb{N}$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 从某一项开始恒等于 a.

相邻的全称量词是可以交换的, 因此上式等价于 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N, \forall \varepsilon > 0, |a_n - a| < \varepsilon$. 由 $\forall \varepsilon > 0, |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n = a$, 可知 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N, a_n = a$. 即证.

证明 4. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ 有界.

充分性: 取 $N = 1$, 存在 $\varepsilon > 0$, 当 $n > 1$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 则存在 $M = |a| + \varepsilon + |a_1|$, 则

$$|a_1| < |a| + \varepsilon + |a_1| = M$$

$$|a_n| < |a| + \varepsilon < |a| + \varepsilon + |a_1| = M, \forall n > 1$$

即证有界.

必要性: 若有界 M, 则 $\forall N$,$\exists \varepsilon = M + |a|$, 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| \leqslant |a_n| + |a| \leqslant M + |a| = \varepsilon.$$

证明 5. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon = |a_{N+1} - a| + 1 > 0$, 存在 $n = N + 1 > N$, 使得 $|a_n - a| = |a_{N+1} - a| < \varepsilon$ 成立. 恒成立.

证明 6. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. $\Leftrightarrow$ a 为 $\{a_n\}$ 的聚点.

充分性: 由 a 为 $\{a_n\}$ 的聚点 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, 在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内有无穷多项. 则对任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $n > N$, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$.

必要性: 由对任意的 $N \in \mathbb{N}$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > N$, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 则 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内有无穷多项. 因此 a 为 $\{a_n\}$ 的聚点.

上述例子给出了数列极限的定义, 交换量词后, 会得到意义大相径庭的命题. 通过理解这些含义不同的命题, 可以加深对数列极限的理解.

2.4 数列极限的运算

定理 2.3 (数列极限的线性性质) 设 a, b, c_1, c_2 为常数且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 则

$$\lim_{n\to\infty}(c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b = c_1 \lim_{n\to\infty} a_n + c_2 \lim_{n\to\infty} b_n.$$

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_1$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 对上述 $\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_2$ 时, $|b_n - b| < \varepsilon$.

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon$, 则

$$|c_1 a_n + c_2 b_n - c_1 a - c_2 b| = |c_1(a_n - a) + c_2(b_n - b)| \leqslant |c_1(a_n - a)| + |c_2(b_n - b)| \leqslant (|c_1| + |c_2|)\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b$.

数列的极限具有线性性质, 同理函数极限也是具有线性性质的, 统称为极限的线性性质. 由极限的线性性质, 可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质. 如函数的导数、导数、微分、积分, 都具有线性性质.

从上述极限的线性性质, 不难得到以下结论：

1. 当 $c_1=c_2=1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;
2. 当 $c_1=1,c_2=-1$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n$;
3. 当 $c_1=k,c_2=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=k\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.
4. 数列的线性性质可推广到任意有限个收敛数列的情形: 设 $a_{1n}\to a_1,a_{2n}\to a_2,\cdots,a_{mn}\to a_m$, 且 $a_1,a_2,\cdots,a_m,c_1,c_2,\cdots,c_m$ 为常数, 则

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(c_1a_{1n}+c_2a_{2n}+\cdots+c_ma_{mn})\\=&c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_ma_m\\=&c_1\lim_{n\to\infty}a_{1n}+c_2\lim_{n\to\infty}a_{2n}+\cdots+c_m\lim_{n\to\infty}a_{mn}\end{aligned}$$

对 $\forall m\in\mathbb{N}^*$ 成立.

定理 2.4 (收敛数列极限的四则运算法则) 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 收敛, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则有

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq0$.

证明

1. 由极限的线性性质可得;
2. 注意到

$$|a_nb_n-ab|\leqslant|a_nb_n-a_nb|+|a_nb-ab|=|a_n||b_n-b|+|b_n-b||a_n-a|.$$

由于 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是收敛数列, 故都是有界的, 取一个大的界 M, 使得

$$|a_n|,|b_n|<M(n\geqslant1)$$

因此 $|b|\leqslant M$. 对于任意的正数 ε, 对应 $\dfrac{\varepsilon}{2M}$, 分别存在整数 N_1 和 N_2, 使得当 $n>N$ 时,

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2M},|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

同时成立. 因此当 $n>N$ 时, 有

$$|a_nb_n-ab|<M|b_n-b|+M|a_n-a|<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon.$$

3. 因为

$$\frac{a_n}{b_n}=a_n\cdot\frac{1}{b_n},$$

且 $b\neq0$, 由 2° 可知, 只需证明数列 $\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$ 收敛于 $\dfrac{1}{b}$ 即可. 假设 $b>0$, 则

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\left|\frac{|b_n-b|}{|b_nb|}\right|.$$

由于 b_n 收敛于 b, 一方面对于正数 $b/2>0$, 存在 N_1, 当 $n>N_1$ 时,

$$|b_n-b|<\frac{b}{2}.$$

另一方面, 对于任意给定的正数 ε, 存在 N_2, 使得当 $n>N_2$ 时,

$$|b_n-b|<\frac{b^2\varepsilon}{2}.$$

所以, 当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时,

$$\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|\leqslant|b_n-b|\cdot\frac{2}{b^2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}.$$

定理 2.4说明有限组收敛数列的极限运算和四则运算是可以交换的, 并可推广到有限多个收敛数列与四则运算的情况. 对于 3 中的结论, 会因为某些 b_n 为 0 而使得分式没有意义. 但是因为 $\{b_n\}$ 的极限 $b\neq 0$, 所以 b_n 为 0 的项至多只有有限个. 可以改变这有限多项的值, 这不会改变 $\{b_n\}$ 的收敛性和极限. 或者在 $\{a_nb_n\}$ 中删去这些没有定义的有限多项, 不会改变其收敛性和极限.

有了定理 2.4, 在计算数列极限时, 可以将其化为简极限的四则运算, 而不必再使用 "ε-N" 语言作繁琐的论述.

下面三个命题是定理 2.4的推广, 它们说明了极限与指数、对数、幂运算是可以交换的. 大家可以自行尝试证明, 正式的证明将在函数极限中给出.

命题 2.11 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{a_n}=\mathrm{e}^a$.

命题 2.12 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=\ln a$, 其中 $a_n>0, a>0$.

命题 2.13 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^\alpha=a^\alpha$, 其中 $a_n>0, a>0, \alpha\in\mathbb{R}$.

但是极限与极限, 极限与函数, 极限与运算大都是不可交换的, 如课本例 1.2.6, 如下的做法是完全错误的:

例 2.5 请说明错误在哪里

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}=0$$

解

第一步将分子拆开是错误的, 对内有限, 对外无限, 无限加法不可交换.

请注意 $0\cdot\infty$ 的意义, 在我们目前学的空间内 ∞ 并不是一个数, 这个表达式实际上没有意义. 在一些特定场合, 他实际上是 $0+0+\cdots+0$ 的简写 (当然也可能有其他的形式), 也就是 0. 这个简写不够严谨, 实际上也交换了极限与加法.

例 2.6 请说明错误在哪里 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{1/n}$

解 我们对整一个数列做极限运算,而不是对数列中的每一个数做极限运算.这个式子的意义是 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{1/n}$ 是一个数,而 $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^{1/n}$ 是一个数列.前者与 n 无关,后者与 n 有关.

例 2.7 设 $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n, n\in\mathbb{N}^*$,证明:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{e} \approx 2.718281828$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x, x\in\mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}, x\in\mathbb{R}$.

解 函数极限还没有讲到,此处仅证明第 1 问.证明数列 a_n 收敛即可.首先证明该数列是递增的。事实上,由二项式定理可得

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}.$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right),$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

比较 a_n 和 a_{n+1} 两个表达式的右端和号中的对应项,显然,前者较小。而 a_{n+1} 所多出来的一项 $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 0$,故 $a_{n+1} > a_n$。所以 $\{a_n\}$ 为严格递增数列。

其次,我们将证明数列是有界的。在 a_n 的上述展开式中,

$$0 < \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < 1.$$

所以

$$2 < a_n < 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

$$< 2 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} = 3 - \frac{1}{n} < 3,$$

即 $n = 2, 3, \dots$,也就是说数列 $\{a_n\}$ 是单调递增且有上界的,因此一定收敛。

例 2.8

1. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}, n\in\mathbb{N}^*$.
2. $\left(\dfrac{1}{n+1}\right) < \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < \left(\dfrac{1}{n}\right), n\in\mathbb{N}^*$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{e}$,即 $\sqrt[n]{n!}e \sim n$.

注 $a_n \sim b_n$ 定义为 $= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.

解

1. $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 单调递增且有上界, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}$. 故 $\mathrm{e}=\sup a_n$, 由于 a_n 单调增的严格单调, 因此 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\neq\mathrm{e}$, 故 $a_n<\mathrm{e},n\in\mathbb{N}^*$.

   设 $b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$. 由平均值不等式, 有

   $\left(\left(\dfrac{n}{n+1}\right)\cdot 1\right)^{\frac{1}{n+2}}=\left(\dfrac{n}{n+1}\cdot\dfrac{n}{n+1}\cdots\dfrac{n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+2}}\leqslant\dfrac{\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}+\cdots+\frac{n}{n+1}+1}{n+2}=\dfrac{n}{n+1}.$

   故 $\Rightarrow\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}\leqslant\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}\Rightarrow b_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\geqslant\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}=b_{n+1}$. 且 $b_n>0$, 故 $\{b_n\}$ 单调递减有下界, 故有极限. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=\mathrm{e}\cdot 1=\mathrm{e}$. 与 a_n 的推导类似, 可得 $b_n>\mathrm{e},n\in\mathbb{N}^*$.

2. 对 1. 中的不等式取对数, 得

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\Rightarrow\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}.$$

3. 有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{2}{1}\right)^1<\mathrm{e}<\left(\frac{2}{1}\right)^2,\\&\left(\frac{3}{2}\right)^2<\mathrm{e}<\left(\frac{3}{2}\right)^3,\\&\cdots,\\&\left(\frac{n}{n+1}\right)^n<\mathrm{e}<\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.\end{aligned}$$

   乘积得

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3\cdots\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}<\mathrm{e}^n<\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^4\cdots\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}.$$

   即

$$\begin{aligned}&\frac{(n+1)^n}{n!}<\mathrm{e}^n<\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\\\Rightarrow\quad&\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^n<n!<\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\\\Rightarrow\quad&\frac{n+1}{n\mathrm{e}}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{n\mathrm{e}}\sqrt[n]{n+1}\end{aligned}$$

   而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n\mathrm{e}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}+1}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}},\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$, 故由夹逼定理, 得证.

例 2.9 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n,n\in\mathbb{N}^*$, 证明:

1. $\{a_n\}$ 收敛;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{2n}=\ln 2$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1}+\cdots+\frac{1}{3n+2n}=\ln\frac{5}{3}$;
4. $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n$.

解

1. 由例2.7可知,

$$\begin{aligned}&\ln\frac{2}{1}<\frac{1}{1},\\&\ln\frac{3}{2}<\frac{1}{2},\\&\cdots,\\&\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

相加得 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$. 则 $a_n>1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>0$. 又 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0$, 故 $\{a_n\}$ 单调递减有下界, 故有极限.

2.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\\=&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln 2n\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\ln 2n-\ln n\\=&\ln 2.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3n+1}+\cdots+\frac{1}{3n+2n}\\=&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{5n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{5n}-\ln 5n\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{3n}-\ln 3n\right)+\ln 5n-\ln 3n\\=&\ln\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n}+1\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=\gamma$, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n}=0$.

记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\gamma\approx 0.57721$ **称为 Euler 常数.**

写成等价无穷大的形式, 即

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim \ln n(n\to\infty).$$

事实上，有以下命题

命题 2.14 $a_n\sim b_n\Leftrightarrow a_n=b_n+o(b_n)$.

证明 由 $a_n\sim b_n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{b_n}=0$, 即 $a_n-b_n=o(b_n)$.

由 $a_n=b_n+o(b_n)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{b_n}=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}-1=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, 即 $a_n\sim b_n$.

2.5 高阶无穷大

定义 2.6 (无穷大) 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 若 $\forall M>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N,|a_n|>M$, 则称 $\{a_n\}$ 是无穷大数列, 记为 $\{a_n\}\to\infty$.

1. $\{a_n\}\to+\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N,a_n>M$.
2. $\{a_n\}\to-\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N,a_n<-M$.
3. $\{a_n\}\to\infty\Leftrightarrow\forall M>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N,|a_n|>M$.

命题 2.15 (常用无穷大数列的比较) 设 a,A,m 为常数, 且 $a>1,\alpha>0,m>0$, 证明: $n^n>>n!>>a^n>>n^\alpha>>(\ln n)^m$, 在 $n\to\infty,n\in N^*$ 时成立; 其中 $n^n>>n!\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=+\infty$, 称为 n^n 是 $n!$ 的高阶无穷大.

证明

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n}{n}<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 故 $n^n>>n!$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]+1}\cdots\frac{a}{n}<\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}$, 其中 $\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{[a]+1}$ 是与 n 无关的常数, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$, 故 $n!>>a^n$.
3. 先设 $\alpha\in N^*,a=1+\lambda$, 则 $\lambda>0,a^n=(1+\lambda)^n>C_n^{\alpha+1}\lambda^{\alpha+1}$. 故 $0>\frac{n^\alpha}{a^n}<\frac{n^\alpha}{C_n^{\alpha+1}\lambda^{\alpha+1}}\to 0,n\to\infty$.
4. 仅证 $m=1$ 时, 令 $n^\alpha=y$, 则 $n\to\infty$ 时, $y\to+\infty$, 且 $\frac{\ln n}{n^\alpha}=\frac{1}{\alpha}\frac{\ln y}{y}$. 设 $k\leqslant y\leqslant k+1$, 则 $\frac{k}{k+1}<\frac{\ln y}{y}<\frac{\ln(k+1)}{k}$, 故 $\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=0$.

例 2.10 (Stirling 公式) 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1.$$

证明 Stirling 公式的证明在目前不作要求, 这里给出一种使用高中知识以及数列极限的证明方

法, 仅供参考. 没有积分工具, 没有复数的工具，我们不得不先如下证明 Wallis 公式

引理 2.1

$$\sin^2\frac{2\pi}{4m}\sin^2\frac{4\pi}{4m}\sin^2\frac{6\pi}{4m}\cdots\sin^2\frac{(2m-2)\pi}{4m}=\frac{m}{2^{2m-2}}.$$

证明 复数可以写成 $z=x+\mathrm{i}y$ 的形式，也可以写成三角形式，即令 $x=r\cos\theta, y=\boldsymbol{r}\sin\theta$, 因此可以设 $z_0=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 为 $z^n-1=0$ 的根, 则由 De Moiver 定理: 若 $z_1=r_1(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha), z_2=r_2(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)$, 则 $z_1z_2=r_1r_2\left(\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)\right)$, 因此

$$z^n=1=r^n(\cos x+\mathrm{i}\sin x)^n=r^n(\cos nx+\mathrm{i}\sin nx),$$

得 $r=1,\theta=\dfrac{2k\pi}{n}(k\in\mathbb{N})$, 故 $z_0=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

习惯上称 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$ 称为 n 次单位原根.

由代数学基本定理可得 z^n-1 只有 n 个复根, 且上面验证了 $\{\omega^k\}_{k=1}^n$ 恰为这 n 个复根, 因此 $z^n-1=(z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1})$, 两边同除 $z-1$, 得

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=(z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1})$$

代入 $z=1$, 并对两边取模长, 由 $\left|1-\omega^k\right|=\sqrt{\left(1-\cos\dfrac{2\pi k}{n}\right)^2+\left(2\sin\dfrac{\pi k}{n}\right)^2}=\sqrt{2-2\cos\dfrac{2\pi k}{2}}=2\sin\dfrac{\pi k}{n}$, 可得

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-\omega^k\right|=\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{\pi k}{n}$$

取 $n=2m$, 并注意到对于 $k=1,2,\cdots,2m-1$ 有对称性 $\sin\dfrac{\pi(2m-k)}{2m}=\sin\dfrac{\pi k}{2m}$, 且当 $k=m$ 时 $\sin\dfrac{\pi m}{2m}=\sin\dfrac{\pi}{2}=1$, 因此

$$\frac{m}{2^{2m-2}}=\prod_{k=1}^{2m-1}\sin\frac{\pi k}{2m}=\left(\prod_{k=1}^{m-1}\sin\frac{\pi k}{2m}\right)^2=\sin^2\frac{2\pi}{4m}\sin^2\frac{4\pi}{4m}\sin^2\frac{6\pi}{4m}\cdots\sin^2\frac{(2m-2)\pi}{4m}$$

引理 2.2

$$\sin^2\frac{\pi}{4m}\sin^2\frac{3\pi}{4m}\sin^2\frac{5\pi}{4m}\cdots\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}=\frac{1}{2^{2m-1}}.$$

证明 已知:

$$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{\pi k}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

取 $n=4m$，得

$$\prod_{k=1}^{4m-1}\sin\frac{\pi k}{4m}=\frac{4m}{2^{4m-1}}.$$

偶数项 $k=2r(r=1,\ldots,2m-1)$ 为:

$$\prod_{r=1}^{2m-1}\sin\frac{2r\pi}{4m}=\prod_{r=1}^{2m-1}\sin\frac{r\pi}{2m}=\frac{2m}{2^{2m-1}}.$$

奇数项为:

$$\prod_{k=1}^{2m}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4m}=\left(\prod_{j=1}^{m}\sin\frac{(2j-1)\pi}{4m}\right)^2,$$

因此

$$\frac{4m}{2^{4m-1}}=\frac{2m}{2^{2m-1}}\cdot\left(\prod_{j=1}^{m}\sin\frac{(2j-1)\pi}{4m}\right)^2,$$

整理得

$$\left(\prod_{j=1}^{m}\sin\frac{(2j-1)\pi}{4m}\right)^2=\frac{1}{2^{2m-1}},$$

即

$$\sin^2\frac{\pi}{4m}\sin^2\frac{3\pi}{4m}\cdots\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}=\frac{1}{2^{2m-1}}.$$

引理 2.3

$$\frac{\sin(k-1)a}{\sin ka}\frac{\sin(k+1)a}{\sin ka}<\frac{(k-1)a}{ka}\frac{(k+1)a}{ka}.$$

证明 由以下两恒等式

$$\frac{\sin(k-1)a}{\sin ka}\frac{\sin(k+1)a}{\sin ka}=1-\left(\frac{\sin a}{\sin ka}\right)^2,$$

$$\frac{(k-1)a}{ka}\frac{(k+1)a}{ka}=1-\left(\frac{a}{ka}\right)^2,$$

以及 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $0<x<\pi/2$ 单调减, 因此

$$\frac{\sin a}{\sin ka}>\frac{a}{ka},$$

以及

$$\frac{\sin(k-1)a}{\sin ka}\frac{\sin(k+1)a}{\sin ka}<\frac{(k-1)a}{ka}\frac{(k+1)a}{ka}.$$

引理 2.4 (Wallis 公式)

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\frac{2m-2}{2m-1}=\frac{\pi}{2}$$

证明 由引理 2.1,引理 2.2得:

$$\frac{\sin^2\frac{2\pi}{4m}}{\sin^2\frac{\pi}{4m}}\frac{\sin^2\frac{2\pi}{4m}}{\sin^2\frac{3\pi}{4m}}\frac{\sin^2\frac{4\pi}{4m}}{\sin^2\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\sin^2\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin^2\frac{(2m-3)\pi}{4m}}\frac{\sin^2\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}}=m\sin\frac{\pi}{2m},$$

$$\frac{\sin^2\frac{2\pi}{4m}}{\sin^2\frac{3\pi}{4m}}\frac{\sin^2\frac{2\pi}{4m}}{\sin^2\frac{\pi}{4m}}\frac{\sin^2\frac{4\pi}{4m}}{\sin^2\frac{5\pi}{4m}}\frac{\sin^2\frac{6\pi}{4m}}{\sin^2\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\sin^2\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\frac{\sin^2\frac{2m\pi}{4m}}{\sin^2\frac{(2m-1)\pi}{4m}}=m\tan\frac{\pi}{4m}.$$

由引理 2.3得

$$\frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}}\frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}}\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}}<m\sin\frac{\pi}{2m},$$

$$\frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}}\frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}}\frac{\frac{6\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}}\cdots\frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}}\frac{\frac{2m\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}}>m\tan\frac{\pi}{4m}.$$

整理得

$$\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2m}>\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\cdots\frac{2m-2}{2m-3}\frac{2m-2}{2m-1}>\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right)\tan\frac{\pi}{4m},$$

由夹逼定理即证.

这一条定理在后面学了积分之后可以更快速的得到, 而不途径引理中繁琐的等式.

引理 2.5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n!)^2}{\sqrt{n}\,(2n)!}=\sqrt{\pi}.$$

证明 将 Wallis 公式写为:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2(2n+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

展开分式, 整理得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!^2(2n)!!^2}{(2n)!!^2(2n-1)!!^2(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{4n}(n!)^4}{(2n)!^2(2n+1)}=\frac{\pi}{2}.$$

利用 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^\alpha=\left(\lim\limits_{n\to\infty}a_n\right)^\alpha$,$\alpha$ 为常数, 此处 α 取 $\frac{1}{2}$, 得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n!)^2\sqrt{2}}{(2n)!\sqrt{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}.$$

引理 2.6

$$a_n=\frac{n!\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}n^n}$$

单调递减, 收敛到某个正实数.

证明

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n!}{\sqrt{n}\,n^n\mathrm{e}^{-n}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}\,(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)}}{(n+1)!}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

设 $b_n:=\ln(a_n)$, 由2.8有

$$b_n-b_{n+1}=\ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)=\frac{2n+1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1$$

令 $k=\dfrac{1}{2n+1}>0$, 得

$$b_n-b_{n+1}=\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)-1,$$

分析函数 $f(x)=\dfrac{1}{2x}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)-1$ 知 $f'(x)>0, x\in(0,1), f\left(\dfrac{1}{2n+1}\right)>0$, 即可证明 b_n 单调减, 因此 a_n 单调减.

再由类似的分析方式可以得到

$$(b_n-b_{n+1})-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4(n+1)}=\frac{1}{2k}\ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right)-1+\frac{k^2}{k^2-1}<0,$$

因此

$$b_n-\frac{1}{4n}<b_{n+1}-\frac{1}{4(n+1)}.$$

因此 $b_n>b_n-\dfrac{1}{4n}>b_1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow a_n>\mathrm{e}^{0.75}$.

a_n 单调减, 有正下界, 因此 $\lim\limits_{n\to a_n}=a$ 存在且 $a>0$.

由 $a>0$ 才可以用极限的四则运算 (除法), 以及由引理 2.5

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_{2n}}=\frac{\left(\frac{n!\mathrm{e}^n}{\sqrt{n}n^n}\right)^2}{\frac{(2n)!\mathrm{e}^{2n}}{\sqrt{2n}2n^{2n}}}=\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{2\pi}$$

由此证明了 Stirling 公式.

更正式的表示无穷大之间的关系需要引入两个记号:O 和 o.

定义 2.7 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是定义在 $\mathbb{N}^*$ 上的数列。如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$，则称 a_n 是 b_n 的 $o(b_n)$，记作 $a_n=o(b_n)(n\to\infty)$。

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是定义在 $\mathbb{N}^*$ 上的数列。如果 $\exists M,\dfrac{a_n}{b_n}\leqslant M$ 对充分大的 n 成立，则称 a_n 是 b_n 的 $O(b_n)$，记作 $a_n=O(b_n)(n\to\infty)$。

o,O 仅表示相对的大小关系, 只有在极限意义下才有意义.$o(a_n)$ 的含义实际是所有 a_n 的无穷小量组成的集合, 因此前面的等号实际含义是 $\in$. 具体而言

$$o(a_n)=\left\{t_n|\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{a_n}=0\right\}, a_n=o(b_n)\Leftrightarrow a_n\in o(b_n).$$

我们试图用阶定量的表示这种无穷小的比较关系, 以一个有显式表达式的数列 $a_n=\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n}+10$ 为例, 我们可以说 $a_n=10+o(1)$, 也可以说 $a_n=10+\dfrac{2}{n}+o(\dfrac{1}{n})$, 也可以说 $a_n=10+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})$. 从此可以直观的看出我们逐渐给出了对 a_n 更精确的估计, 可以说这叫做 a_n 的渐近展开, 或者 a_n 的估计.

对于那些不能够给出显式表达式的数列, 如何求解其高阶渐近估计, 这是一个相当复杂的问题,Stolz 定理是解决这类问题的一个重要工具.

2.6 Stolz 定理及其应用

定理 2.5 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 定理) 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,$$

其中 A 可以是实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

注 完整的利用 Stolz 定理的计算过程要求先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$ 极限存在并求得 A, 然后再利用 Stolz 定理求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$. 不过不严谨的直接写出 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ 也是能接受的.

注 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\infty$ 时,Stolz 定理不一定成立. 反例可取 $a_n=(-1)^n, b_n=n$.

证明 先证明 A 是有限数 (实数) 的情况。不妨设 $\{b_n\}$ 是正项数列。假设条件成立，对任意正数 ε，存在自然数 N_1 使得

$$A-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<A+\varepsilon,\quad n>N_1.$$

由于 $\{b_n\}$ 严格单调增，所以

$$(A-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)<a_{n+1}-a_n<(A+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n),\quad n>N_1.$$

在上面不等式中，分别列出 $N_1+1,N_1+2,\dots,n-1$ 并将所得不等式相加，得到

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{N_1+1})<a_n-a_{N_1+1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{N_1+1}).$$

同除以 b_n 并整理得

$$\frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}-\frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}-\varepsilon\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right)<\frac{a_n}{b_n}-A<\frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}-\frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}+\varepsilon\left(1-\frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right).$$

注意到 $\{b_n\}\to+\infty$，对固定的 N_1，存在自然数 N_2，使得当 $n>N_2$ 时，

$$-\varepsilon<\frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}-\frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}}<\varepsilon.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，于是当 $n>N$ 时，有

$$-2\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-A<2\varepsilon.$$

若 $A=+\infty$，此时由题设及保号性 $\Rightarrow\exists N_2, N\geqslant N_2$, 使得

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}>1\Rightarrow a_{n+1}>a_n,\quad n>N.$$

并且 $a_{n+1}-a_n>b_{n+1}-b_n,\quad a_n-a_{n-1}>b_n-b_{n-1},\dots,a_{N_2+1}-a_{N_2}>b_{N_2+1}-b_{N_2}$. 从而得 $a_{n+1}-a_{N_2}>b_{n+1}-b_{N_2}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=+\infty$ 且 $\{a_n\}$ 严格增加.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=0\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=+\infty.$$

定理 2.6 ($\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理) 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个收敛于 0 的数列, 且 $\{b_n\}$ 是严格递减数列. 如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A,$$

其中 A 可以是实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

例 2.11 证明:

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geqslant 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.
3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a\geqslant 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

解

1. 令 $b_n=n,\alpha_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$, 则 $b_n\uparrow+\infty$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n-\alpha_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n-(n-1)}=a$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}\right)=\exp\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_n}{n-n-1}\right)=\mathrm{e}^{\ln a}=a$.
3. 改变有限项, 不会影响极限值, 不妨假设 $a_0=1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a_1}{a_0}\dfrac{a_2}{a_1}\cdots\dfrac{a_n}{a_{n-1}}}=a$.

例 2.12 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 m 个常数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_m|^n}=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_m|\}.$$

解 设 $h=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_m|\}$, 则 $h<(|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_m|^n)^{\frac{1}{n}}<m^{\frac{1}{n}}h$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}m^{\frac{1}{n}}h=h$. 由夹逼定理, 得证.

例 2.13

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\dfrac{1}{2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}=\dfrac{1}{4}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\dfrac{1}{k+1}$.

解 仅证 4 , $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{n^{k+1}-(n-1)^{k+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{(k+1)n^k-\cdots}$.

$\cdots$ 中的项形如 $n^{k-1},n^{k-2},\cdots$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{k-1}}{n^{k+1}}=0$. 且至多有 k 项. 有限项极限相加, 可以

用极限的四则运算.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{(k+1)n^k-\cdots}=\dfrac{1}{(k+1)+\lim_{n\to\infty}\left(C_{k+1}^2\frac{1}{n}+\cdots+C_{k+1}^{k+1}\frac{1}{n^k}\right)}=\dfrac{1}{k+1}$.

定理 2.7 常用的平均值不等式:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数, 则有:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

取等号的条件是 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

这几个平均数分别名为:

$$\begin{aligned}
\text{调和平均数}&=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}},\\
\text{几何平均数}&=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n},\\
\text{算术平均数}&=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\\
\text{平方平均数}&=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.
\end{aligned}$$

2.7 实数集完备性的五个等价命题

以下五个命题等价, 且都说明了实数集是完备的.

定理 2.8 (确界存在原理) 有上 (下) 界的非空实数集 E 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.

定理 2.9 (单调有界极限存在准则) 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sup a_n(\inf a_n)$.

定理 2.10 (闭区间套定理) 若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n,b_n]\supset[a_{n+1},b_{n+1}],n=1,2,\cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$, 则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi\in[a_n,b_n],n=1,2,\cdots$.

定理 2.11 (列紧性原理) 若 $\{a_n\}$ 有界且含无穷多项, 则 $\{a_n\}$ 必有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$.

定理 2.12 (柯西 (Cauchy) 准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n,m>N,|a_n-a_m|<\varepsilon$.

证明

$1\Rightarrow2$ 设 a_n 单减且有下界 $m,a_n\geqslant m>m-\varepsilon,\forall n\in\mathbb{N}^*$, 由确界存在原理, $E=\{a_n\}$ 有下确界, 记为 $a=\inf E$, 则 $a\geqslant m$, 且 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N,a-\varepsilon<a_n\leqslant a$, 即 $|a_n-a|<\varepsilon$. 由定义, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\inf\{a_n\}$.

$2\Rightarrow3$ 所有区间的左端点构成的数列 $\{a_n\}$ 是单调递增有上界的, 故有极限, 记为 a, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 同理, 所有区间的右端点构成的数列 $\{b_n\}$ 是单调递减有下界的, 故有极限, 记为 b, 即

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. 因此 $a - b = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 即 $a = b$. 即证存在 $\xi = a = b$. 若存在另一实数 $\eta \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$, 则 $\xi \leqslant \eta \leqslant \xi$, 即 $\xi = \eta$. 故唯一性得证.

$3 \Rightarrow 4$ 设 $|a_n| < M$, 取 $[\alpha_1, \beta_1] = [-M, M]$, 将其二分为 $[\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_1, \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}] \cup [\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}, \beta_1]$, 两个子区间中至少有一个子区间包含无穷多个 a_n 的项, 记为 $[\alpha_2, \beta_2]$, 重复上述过程, 得到 $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(\beta_n - \alpha_n) = \dfrac{M-(-M)}{2^n} = 0$, 由闭区间套定理, 存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [\alpha_n, \beta_n], n = 1, 2, \cdots$.

然后构造收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 令 $n_1 = 1$, 由于区间 $[\alpha_2, \beta_2]$ 中包含无穷多个 a_n 的项, 可以找到 $n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$, 以此类推, 可以找到 $n_3 > n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_3} \in [\alpha_3, \beta_3]$, 重复此过程, 得到一个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$.

$4 \Rightarrow 5$ 必要性是容易证明的, 因为 $\{a_n\}$ 收敛, 对于任意的一个正数 ε, 存在整数 N, 使得当 $m, n > N$ 时 $|a_m - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad |a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, 因此就有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

下面证明充分性. 对于正数 $\varepsilon = 1$, 存在整数 N_1, 使得当 $m, n > N_1$ 时, 有 $|a_m - a_n| < 1$. 令

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_1}|, |a_{N_1+1}|\},$$

则有 $|a_n| \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots$ 这说明 $\{a_n\}$ 是有界的. 由列紧性原理存在收敛的子列 $\{a_{n_k}\}$. 因为 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 所以对于任意意定的 ε, 存在整数 N_2, 使得当 $m, n > N_2$ 时, 有 $|a_m - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 对于这个 ε, 因为 $\lim a_{n_k} = a$, 存在一个整数 K, 使得当 $k > K$ 时, 有 $|a_{n_k} - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; 特别取一个 n_k 使得 $n_k > N_2$ 且 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Cauchy 收敛准则的强大之处在于, 它不要求事先猜出极限值. 也正是如此, 在我们说明一个数列发散的时候, 通常不利用极限定义的否定形式 (可以自行尝试一下这有多么繁琐), 而是利用 Cauchy 收敛准则的否命题.

命题 2.16 (Cachuy 收敛准则的否命题) 设数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 发散的充要条件是: 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\forall N \in \mathbb{N}^*$, 存在 $n_0, m_0 > N$, 有 $|a_m - a_n| \geqslant \varepsilon_0$.

例 2.14 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 不存在

证明 对于任意 n, 存在 $p_1 = \left\lfloor \dfrac{n}{\pi} \right\rfloor \pi + \dfrac{3}{2}\pi, p_2 = \left\lfloor \dfrac{n}{\pi} \right\rfloor \pi + \dfrac{5}{2}\pi > \left\lfloor \dfrac{n}{\pi} + 1 \right\rfloor \pi > n$, 使得

$$|a_{p_1} - a_n|, |a_{p_2} - a_n| > \frac{1}{2}$$

二者至少有其一成立。

注 其实我们不满足于这个结果, 在深入的学习中会发现这个数列的极限点几乎可以取遍 $[-1, 1]$,

或者对于任 $[-1,1]$ 中的点, 都可以找到一个子列收敛到这个点. 这个问题的构造从知识结构上现在就可以解决, 请大家尝试进行证明.

例 2.15 证明

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}=2.$$

解 设 $a_1=\sqrt{2}, a_n=\sqrt{2+a_{n-1}}$, 则 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $a_n<2$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, 则 $a=\sqrt{2+a}\Rightarrow a^2-a-2=0\Rightarrow a=2$.

Lec 3 函数极限

3.1 函数极限的定义

之前我们以 ε-N 语言定义了数列极限,

定义 3.1 (数列极限)

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists N\in N^*, \forall n>N, |a_n-a|<\varepsilon.$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N\in N^*, \forall n>N, a_n>M.$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N\in N^*, \forall n>N, a_n<-M.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists N\in N^*, \forall n>N, |a_n|>M.$

类似地, 我们可以用 ε-δ 语言定义函数极限.

定义 3.2 设 x_0 为常数, 函数在 x_0 处的极限为 a 定义为:

$$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon.$$

若 x 从大于 x_0 的一侧趋近于 x_0, 则称为 x_0 的右极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x, x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon;$$

若 x 从小于 x_0 的一侧趋近于 x_0, 则称为 x_0 的左极限, 记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x, x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon.$$

考虑 $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta$,$\beta$ 可以是常数 $A, +\infty, -\infty, \infty$. α 可以是常数 $x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$. 一共有 24 种情况. 我们全部列举如下:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, \forall x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$

(4) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0, \forall 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)>M.$

(5) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0, \forall x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x)>M.$

(6) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0, \forall x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x)>M.$

(7) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0, \forall 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow f(x)<-M.$

(8) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0, \forall x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x)<-M.$

(9) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\delta>0, \forall x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x)<-M.$

(10) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, \delta>0, \forall 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M$.

(11) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, \delta>0, \forall x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)|>M$.

(12) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, \delta>0, \forall x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)|>M$.

(13) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists\, X_0>0, \forall x>X_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$.

(14) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists\, X_0>0, \forall x<-X_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$.

(15) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists\, X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$.

(16) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, X_0>0, \forall x>X_0 \Rightarrow f(x)>M$.

(17) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, X_0>0, \forall x>X_0 \Rightarrow f(x)<-M$.

(18) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)|>M$.

(19) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, X_0>0, \forall x<-X_0 \Rightarrow f(x)>M$.

(20) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, X_0>0, \forall x<-X_0 \Rightarrow f(x)<-M$.

(21) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)|>M$.

(22) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow f(x)>M$.

(23) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow f(x)<-M$.

(24) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0, \exists\, X_0>0, \forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)|>M$.

注 也有的时候将函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限记为 $f(x_0-0)$, 右极限记为 $f(x_0+0)$.

定理 3.1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.($x_0$ 为常数)

证明 $\Rightarrow$: $\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta>0, \forall x, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$. 即对 $\forall 0<x-x_0<\delta \Leftrightarrow x_0<x<x_0+\delta$ 有 $|f(x)-a|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$. 同理可证 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$.

$\Leftarrow$: $\forall\varepsilon>0, \exists\,\delta_1>0, \forall x, x_0<x<x_0+\delta_1 \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$. 对上述 ε, $\exists\,\delta_2>0, \forall x, x_0-\delta_2<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则 $\forall x, 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$. 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$.

定理 3.2 $\lim\limits_{x\to \infty}=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=a=\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

证明 令 $x=\dfrac{1}{t}$, 则 $x\to\infty \Leftrightarrow t\to 0$. 即 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0} f\left(\dfrac{1}{t}\right)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{t}\right)=a=\lim\limits_{t\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{t}\right) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=a=\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

上述最后一个等式由 $\lim\limits_{t\to 0^+} f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{t\to 0^-} f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 给出.

例 3.1 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

3.2 函数极限的四则运算法则

定理 3.3 设 x_0, a, b, c_1, c_2 为常数, 令 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, 则:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 a + c_2 b$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = a \cdot b$; 特别地, $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = a^2$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}(b \neq 0)$.

证明

1. 目的时要证明对于任意的正数 ϵ, 能够找到一个正数 δ, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|(c_1 f(x) + c_2 g(x)) - (c_1 a + c_2 b)| \leqslant \epsilon$。

   由极限的定义，存在 δ_1, δ_2，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，
   $$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|c_1|},$$
   当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，
   $$|g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|c_2|}.$$
   取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，同时有
   $$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|c_1|}, \quad |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|c_2|},$$
   因此有
   $$|c_1 f(x)+c_2 g(x)-(c_1 a+c_2 b)| = |c_1(f(x)-a)+c_2(g(x)-b)| \leqslant |c_1||f(x)-a|+|c_2||g(x)-b| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$
2. 证明类似于第一小题。对于任意的正数 ϵ，存在 δ_1 和 δ_2，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时，
   $$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|b|},$$
   当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时，
   $$|g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|a|}.$$
   取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，同时有
   $$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|b|}, \quad |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|a|},$$
   因此有
   $$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - af(x) + af(x) - ab| \leqslant |f(x)||g(x) - b| + |g(x) - b||f(x) - a|.$$
   由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 附近连续，故当 $x \to x_0$ 时，$|f(x)|$ 和 $|g(x)|$ 被有界地控制。因此我们有
   $$|f(x)g(x) - ab| < \epsilon.$$

3. 因为 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b \neq 0$，我们只需证明数列 $\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}$ 收敛于 $\dfrac{1}{b}$。假设 $b > 0$，则

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{|g(x) - b|}{|g(x)b|}\right|.$$

由于 $g(x)$ 收敛于 b，一方面对于正数 $b/2 > 0$，存在 δ_1，使得当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时，

$$|g(x) - b| < \frac{b}{2},$$

另一方面，对于任意给定的正数 ϵ，存在 δ_2，使得当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时，

$$|g(x) - b| < \frac{b^2 \epsilon}{2}.$$

所以，当 $|x - x_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ 时，

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b}\right| \leqslant |g(x) - b| \cdot \frac{2}{b^2} \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

即

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}.$$

函数极限的性质与数列极限的性质类似, 即函数极限有**唯一性**、**局部有界性**、**保号性**、**保序性**. 其中有界性在函数极限中表现为**局部有界性**, 即函数在某点的极限存在, 则该函数在该点的某个邻域内有界. 这与数列极限的有界性表现上略有不同, 这里给出证明:

定理 3.4 (函数极限的局部有界性) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I, 点 $x_0 \in I$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界, 即 $\exists\, \delta > 0, \exists\, M > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$.

证明 局部有界性的证明: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I, 点 $x_0 \in I$, 且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)| < |a| + \varepsilon$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界, 但 $f(x)$ 在整个定义域 I 内未必有界.

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 且 $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 I 上连续. 当 $f(x)$ 在 x_0 处连续时, 有 $f(x_0) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, 即连续函数的极限与函数值可以交换次序.

幂 (x^α, α 为常量), 指数 ($a^x, a > 0$), 三角函数 ($\sin x, \cos x, \tan x$), 对数函数 ($\log_a x, a > 0, a \neq 1$), 指数函数 ($e^x$), 反三角函数 ($\arcsin x, \arccos x, \arctan x$), 双曲函数 ($\sinh x, \cosh x, \tanh x$) 等函数在其定义域内均连续. 一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.

3.3 3 个重要的函数极限及其证明

命题 3.1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

证明 首先考虑右极限。设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 由于 $\sin x>0$, 由引理易知

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x},\quad \text{即}\quad \frac{\sin x}{x}<\frac{\cos x}{x}<1.$$

因此

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<1-\cos x=2\left(\sin\frac{x}{2}\right)^2<2\sin\frac{x}{2}<x.$$

所以，由两边夹的得到

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

当 $x\to 0$ 时，令 $y=-x$，则 $y\to 0^+$，所以

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin(-y)}{-y}=\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin y}{y}=1.$$

命题 3.2

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

证明 由于对于任意的 $x>1$, 有 $\lfloor x\rfloor\leqslant x<\lfloor x\rfloor+1$, 以及

$$\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^x<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^x,$$

因此

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1}\right)^x=\mathrm{e}.$$

根据两边夹定理，有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

当 $x\to\infty$ 时，令 $y=-x$, 则 $y\to-\infty$, 利用上面结果，就有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{1-y}\right)^{-y}=\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}=\mathrm{e}.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}.$$

命题 3.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

证明

1. 当 $m>n,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^{n-m}+a_1x^{n-m-1}+\cdots+a_nx^{n-m}}{b_0+b_1x^{m-n-1}+\cdots+b_mx^{m-n}}=\dfrac{a_0\cdot 0+a_1\cdot 0+\cdots+a_n\cdot 0}{b_0+b_1\cdot 0+\cdots+b_m\cdot 0}=\dfrac{0}{b_0}=0.$
2. 当 $m=n,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=\dfrac{a_0}{b_0}.$
3. 当 $m<n,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\infty.$

3.4 函数无穷大的比较

命题 3.4 (常用函数无穷大) 设 a,A,m 为常数, 且 $a>1,\alpha>0,m>0$, 证明: $x^x>>a^x>>x^\alpha>>(\ln x)^m$, 在 $x\to+\infty,x>0,x\in R$ 时成立.

证明

1. 设 $n\leqslant x<n+1$, 则 $\begin{cases}n^n\leqslant n^x<(n+1)^n,\\ a^n\leqslant a^x<a^{n+1},\end{cases}\Rightarrow\dfrac{a^n}{(n+1)^{n+1}}<\dfrac{a^x}{x^x}<\dfrac{a^{n+1}}{n^n}$, 当 $x\to\infty$ 时, 有 $n\to\infty$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(n+1)^{n+1}}=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^x}{x^x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^x}{a^x}=+\infty$, 故 $x^x>>a^x$.
2. 设 $n\leqslant x<n+1$, 则 $\dfrac{n^\alpha}{a^{n+1}}<\dfrac{x^\alpha}{a^x}<\dfrac{(n+1)^\alpha}{a^n}$, 当 $x\to\infty$ 时, 有 $n\to\infty$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^{n+1}}=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^\alpha}{a^x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^x}{a^x}=+\infty$, 故 $x^\alpha>>a^x$.
3. 设 $n\leqslant x<n+1$, 则 $\dfrac{\ln n}{(n+1)^\alpha}<\dfrac{\ln x}{x^\alpha}<\dfrac{\ln(n+1)}{n^\alpha}$, 当 $x\to\infty$ 时, 有 $n\to\infty$, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{(n+1)^\alpha}=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^x}{a^x}=+\infty$, 故 $x^\alpha>>a^x$.

例 3.2 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a,a>0,a\neq 1.$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,\alpha\neq 0.$

(7) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}.$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+6}\right)^{4x}=\mathrm{e}^{12}.$

上述例 (1) ~ (6) 今后可作为公式直接使用, 并可记为: 当 $x\to 0$ 时,

(1) $\dfrac{1-\cos x}{x^2}\sim\dfrac{1}{2}$; (2) $\arcsin x\sim x$;

(3) $\ln(1+x)\sim x$; (4) $\mathrm{e}^x-1\sim x$;

(5) $a^x-1\sim\ln a\cdot x$; (6) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha\cdot x$.

证明

1. $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{4}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin\arcsin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\arcsin x}=1$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\ln\mathrm{e}=1$.
4. 令 $\mathrm{e}^x-1=u$, 则 $x\to 0$ 时, $u\to 0$, 且 $x=\ln(1+u)$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{u}{\ln(1+u)}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{1}{\frac{1}{u}\ln(1+u)}=1$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln a}-1}{x\ln a}\ln a$, 令 $u=x\ln a$, 则 $x\to 0$ 时,$u\to 0$, 且 $x=\dfrac{u}{\ln a}$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a\cdot\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^u-1}{u}=\ln a$.
6. 令 $u=\alpha\ln(1+x)$, 则 $x\to 0$ 时,$u\to 0$, 且 $x=\dfrac{u}{\alpha}$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^u-1}{u}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha\ln(1+x)}{x}=1\cdot\alpha=\alpha$.
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\exp\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln\cos x}{x}\right)=\exp\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\ln\cos x}{\cos x-1}\dfrac{\cos x-1}{x}\right)=\exp\left(\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot(-1)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
8. $\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+6}=1+\dfrac{3x-11}{x^2+6}\to 1+0=1$, 故 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+6})^{4x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{3x-11}{x^2+6})^{\frac{x^2+6}{3x-11}\cdot\frac{3x-11}{x^2+6}\cdot 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{3x-11}{x^2+6}\cdot 4x}=\mathrm{e}^{12}$.

其中 7, 8 为底数与指数皆为变量, 且底数的极限值为 1, 指数的极限值为 $+\infty$, 这种形式的极限求解时, 可以尝试取对数, 然后利用对数函数的连续性, 将指数提取出来, 再求极限. 我们称这种形式的极限为 1^∞ 型不定式.

不定式是相对于 $\alpha(x)^{\beta(x)}$,$\alpha(x),\beta(x)$ 都有非 0 常数极限而言的, 后者很好求极限. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=\beta$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)^{\beta(x)}=\alpha^\beta$. 当 α,β 中有 $0,+\infty$ 时, 则需要仿照 7, 8 的方法进行求解.

3.5 函数 $y=f(x)$ 的连续性

设 x_0 是常数,

(1) $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 处间断 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$: 称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

$f(x)$ 的间断点分类: $\begin{cases}\text{(I) } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ 均存在的间断点为第一类间断点;}\\ \text{(II) } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ 至少有一个不存在的间断点为第二类间断点.}\end{cases}$

例 3.3 六类基本初等函数 (幂, 指数, 三角, 对数, 指数, 反三角, 双曲) 在其定义域内均连续. 如 $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 在 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 时连续, 且从 $f(\dfrac{\pi}{2}-0)=+\infty, f(\dfrac{\pi}{2}+0)=-\infty$ 可知 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处第二类间断点.

又如

$$f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 处, $f(0-0)=-1, f(0+0)=1, f(0)=0$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处第一类间断点.(跳跃间断点)

定理 3.5 连续函数的和, 差, 积, 商仍是连续函数.

例 3.4 设 $f_1(x), f_2(x),\cdots,f_m(x)$ 在区间 I 上连续, 且 $c_1,c_2,\cdots,c_m$ 为常数, 则线性组合 $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_mf_m(x)$ 在 I 上连续. 这表明连续函数具有线性性.

定理 3.6 连续的函数 $y=f(x)$ 若有反函数 $x=g(y)$ 或写为 $y=g(x)$, 则反函数 $y=g(x)$ 也是连续函数. 理由: 函数与其反函数关于直线 $y=x$ 对称.

例 3.5 $y=\sin x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\arcsin y$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上连续且单调减, 故有反函数 $x=\arccos y$ 在 $[-1,1]$ 上连续且单调减.

$y=\tan x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\arctan y$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且单调增.

注 六个反三角函数都是有界变量

例 3.6 e^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\ln y$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且单调增.

定理 3.7 连续函数的复合函数仍是连续函数.

证明 对于任意给定的正数 ε, 因为 f 在 u_0 连续, 则存在一个正数 $\eta>0$, 使得当 $|u-u_0|<\eta$ 时,

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon.$$

对于上述 $\eta>0$, 又因为 g 在 x_0 连续, 所以下面存在一个正数 $\delta>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta$

时，

$$|g(x) - g(x_0)| = |u - u_0| < \eta.$$

于是，当 $|x - x_0| < \delta$ 时，从上面两个不等式得到

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| = |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon,$$

即函数 $f(g(x))$ 在 x_0 连续。

该定理也可以表示为下面形式

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right).$$

由六种基本初等函数经过有限次四则运算, 有限次符合运算的函数统称为初等函数.

定理 3.8 一切初等函数, 包括一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.(注: 初等函数的的定义域中若存在孤立点 x_0, 则 $f(x)$ 在 x_0 处仍是连续的.)