

习题 1.2

习题 1.2.1 用定义证明下面的结论:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5+3n} = \frac{1}{3}$; (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$;
(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$; (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

解

(1) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{5}{9\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{n}{5+3n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n - (5+3n)}{3(5+3n)} \right| = \frac{5}{3(5+3n)} < \frac{5}{9n} < \varepsilon.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(3) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} - 1 \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon.$$

(4) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{n!}{n^n} - 0 \right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

习题 1.2.2 若数列 $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) 满足条件: 任给正数 ε , 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ (其中 M 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 a 为极限.

M 为常数指的是 M 不依赖于 ε 和 n . 例如 $M = 2, M = 1000$ 等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于 $\forall M > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ 成立.

习题 1.2.3 证明: 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

证明 充分性: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

必要性: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$.

习题 1.2.4 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

证明 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$ 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon.$ 则

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|.$

反之不一定成立, 如数列 $a_n = (-1)^n,$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1,$ 但 $\{a_n\}$ 发散.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0,$ 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$ 当 $n > N$ 时, 有 $||a_n| - 0| < \varepsilon.$ 则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

习题 1.2.5 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$ 又 $|b_n| \leq M, (n = 1, 2, \dots),$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$

证明 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$ 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.$ 则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0.$

习题 1.2.6 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = a,$ 及 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a,$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$

证明 按已知条件 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0,$ 当 $n > N_1$ 时 $|x_{2n} - a| < \varepsilon.$ 又 $\exists N_2 > 0,$ 当 $n > N_2$ 时 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon.$ 于是令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\},$ 则 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon.$ 故 $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a.$

习题 1.2.7 证明下列数列不收敛:

$$(1) a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}; \quad (2) a_n = 5 \left(1 - \frac{2}{n}\right) + (-1)^n.$$

解

- (1) 取 $a_{2n} = \frac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2},$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1,$ 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1},$ 矛盾.
- (2) 取 $a_{2n} = 5 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5 \left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1,$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 6, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 4,$ 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1},$ 矛盾.

习题 1.2.8 求下列极限:

- (1) $a_n = \frac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1};$
- (2) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n};$
- (3) $a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n(n+1)/2}\right), n = 2, 3, \dots;$
- (4) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$
- (5) $a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^m}), (|q| < 1).$

解

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

(3)

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{2 \cdot 5 \cdots (n^2 + n - 2)}{3 \cdot 6 \cdots n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)},$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1 + \frac{2}{n}}{2(1 + \frac{1}{n})} = \frac{1+0}{2(1+0)} = \frac{1}{2}.$$

(4)

$$a_n = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^m})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{m+1}}}{1-q},$$
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1-q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1 - \lim_{m \rightarrow \infty} q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

习题 1.2.9 若 $a_n \neq 0 (n=1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 能否断定 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?

解 不能. 例如 $a_n = \frac{1}{2^n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 可能为 0.

习题 1.2.10 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$, 是否必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$? 若还假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 回答同样的问题.

解 不一定. 例如 $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n(-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 当

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 时成立. 假设 $a \neq 0$ 时, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{0}{a} = 0$.

习题 1.2.11 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性如何? 举例

说明. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 回答同样的问题.

解 设 $\{a_n\}$ 收敛于 a , $\{b_n\}$ 发散. 则 $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ 都发散. 例如 $a_n = 1, b_n = n$, 则 $a_n + b_n = n + 1, a_n - b_n = 1 - n$ 都发散. 但 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定. 例如 $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = 1$ 收敛; 但 $a_n = 1, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = n$ 发散.

若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散, 则 $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性都不确定. 例如 $a_n = n, b_n = n$, 则 $a_n + b_n = 2n, a_n - b_n = 0, a_n \cdot b_n = n^2$ 中只有 $a_n - b_n$ 收敛; 又如 $a_n = n, b_n = (-1)^n n$, 则 $a_n + b_n = n + (-1)^n n, a_n - b_n = n - (-1)^n n, a_n \cdot b_n = (-1)^n n^2$ 都发散.

习题 1.2.12 下面的推理是否正确?

1. 设数列 $\{a_n\} : a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 在 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 两边取极限, 得 $a = 2a - 1$, 即 $a = 1$.

2.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n \uparrow} = 0. \end{aligned}$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]^n = 1^n = 1.$

解

1. 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为 $a_n = 1$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

2. 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \sim \frac{1}{n}, (k = 1, 2, \dots, n).$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

3. 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

习题 1.2.13 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a, b . 若 $a > b$, 则从某一项开始, 有 $a_n > b_n$; 反之, 若从某项开始恒有 $a_n \geq b_n$, 则 $a \geq b$.

解 这是保序性的直接推论.

习题 1.2.14 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别收敛于 a 及 b . 记 $c_n = \max(a_n, b_n), d_n = \min(a_n, b_n) (n =$

1, 2, \dots). 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \max(a, b), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \min(a, b).$$

解 由 $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$, $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$, 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

习题 1.2.15 求下列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right];$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{(n+1)^k} - n^k), \text{ 其中 } 0 < k < 1;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2});$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - n + 2} - n);$$

$$(5) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n}).$$

解

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0.$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^1 - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-k} = 0.$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

$$(4) \text{ 由 } \frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1), \text{ 故}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln n^2 - n + 2} = e^0 = 1.$$

(5)

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

习题 1.2.16 设 a_1, a_2, \dots, a_m 为 m 个正数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

解 设 $a_k = \max(a_1, a_2, \dots, a_m)$, 则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = a_k = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

习题 1.2.17 证明下列数列收敛:

- (1) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$;
- (2) $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$;
- (3) $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots + \alpha_n q^n$, 其中 $|\alpha_k| \leq M, (k = 1, 2, \dots)$, 而 $|q| < 1$;
- (4) $a_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$.

证明

- (1) 由 $1 - \frac{1}{2^n} < 1$, 可知 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.
- (2) 由 $a_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} < \frac{1}{2}$, 可知 $\{a_n\}$ 有上界, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.
- (3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \log_{|q|} \frac{\varepsilon(1-|q|)}{2M} \right\rfloor + 1$, 则当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| = |\alpha_{n+1} q^{n+1} + \cdots + \alpha_m q^m| \leq M(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \cdots) = M \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon.$$

- (4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, 则当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m}{m(m+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

习题 1.2.18 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

- (1) $a_n = \sqrt[n]{n^2}$;
- (2) $a_n = \frac{n}{c^n}, (c > 1)$;
- (3) $a_1 = \frac{c}{2}, a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} (0 \leq c \leq 1)$;
- (4) $a > 0, a_0 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right)$ (提示: 先证明 $a_n^2 \geq a$);
- (5) $a_0 = 1, a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}$;
- (6) $a_n = \sin \sin \cdots \sin 1 (n \uparrow \sin)$.

解

- (1) 由 $a_n > 0$, 且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{c} < 1$ 在充分大时成立, 注 详细而言, 当 $n > \frac{1}{c-1}$ 时, 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. 但数列极限与有限项无关, 我们只需要考虑充分大的 n .

可知 $\{a_n\}$ 在充分大时单调减, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 又由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{c^{n+1} - c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n(c-1)} = 0.$$

- (2)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)$$

由 $a_2 - a_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 > 0$, 可递归的得知 $a_{n+1} - a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $a_1 < c$, 归纳

的, 可得 $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$, 因此 $\{a_n\}$ 有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$, 又由 $a_n > 0$, 可知 $a = 1 - \sqrt{1-c}$.

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) \right)^2 \geq a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

因此 $\{a_n\}$ 在 $n \geq 1$ 时单调减, 且下有界 \sqrt{a} , 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{a} \right) = \sqrt{a}$.

(4)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} - \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} \right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1} + 1)^2}$$

由 $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$ 归纳的, 可得 $1 + a_n - a_n^2 > 0$, 因此 $a_n - a_{n-1} > 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 有上界, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 递推式两侧取极限, 得

$$a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(5) $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$, 因此 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a = \sin a \Rightarrow a = 0$.

习题 1.2.19 设 $a_n \leq a \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - b_n| < \varepsilon$. 又由 $a_n \leq a \leq b_n$, 可知 $|a_n - a| = a - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$, 同理 $|b_n - a| < \varepsilon$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

例 0.1 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

证明

(1) $a = 0$ 时,

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \frac{a_n}{1} \rightarrow 0.$$

由夹逼定理, 得证.

(2) $a > 0$ 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = a,$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

由夹逼定理, 得证.

习题 1.2.20 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

解 由 0.1, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{l} < 1$. 因此 $\exists r = \frac{1 + \frac{1}{l}}{2} \in (0, 1)$, 使得

当 n 充分大时, $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} < r$. 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} < r^n,$$

即 $a_n < a_1 r^n$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

习题 1.2.21 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是正数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, n = 1, 2, \dots$ 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

解 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 则由 $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = a_1 \cdot \frac{b_n}{b_1}$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$, 由原式有 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$, 因此 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ 单调减, 且 $\frac{a_n}{b_n} > 0$, 因此 $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ 收敛, 设

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = bc$.

习题 1.2.22 利用极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1};$$

$$(2) a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1};$$

$$(3) a_n = \left(\frac{1+2n}{2+2n}\right)^{2n^3};$$

$$(4) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}.$$

简要说明: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 故 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$ 的任意子列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \right\}$ 也收敛于

e . 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为 $\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ 的形式, 从而求出极限.

在此过程中

命题 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a, a_n > 0, a > 0$. $\{b_n\}$ 收敛于 b . 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$.

也相同有用.

解

$$(1) \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \Big|_{m=2n+1} \rightarrow e;$$

$$(2) \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{n-2 \cdot \frac{n+1}{n-2}} = e^1 = e;$$

$$(3) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2) \cdot \left(-\frac{n}{n+2}\right)} = e^{-1};$$

$$(4) \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^{3.2}} = e^2.$$

习题 1.2.23 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, 且 $|b_n| \geq b > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

解 对 $\forall M > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $a_n > \frac{M}{b}$. 又由 $|b_n| \geq b > 0$, 可知 $|a_n b_n| \geq a_n |b| > M$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

习题 1.2.24 确定 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}$ 与 $n \sin \frac{n\pi}{2}$ ($n \geq 1$) 是否有界, 是否趋于无穷大.

解 $\sqrt[n]{n!}$ 无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \rightarrow \infty.$$

无界, 但是不趋于无穷大. 当 $n = 4k + 1$ 时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = 4k + 1$, 趋于无穷大; 当 $n = 4k + 3$ 时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = -(4k + 3)$, 趋于负无穷大; 当 n 为偶数时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = 0$.

习题 1.2.25 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ ($n \geq 1$) 定义, 证明: $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$).

解 由 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \frac{1}{a_n}(a_n + a_n + \frac{1}{a_n}) = 2 + \frac{1}{a_n^2} > 2$, 可知 $a_n^2 > 2(n-1)$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

习题 1.2.26 给出 $\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理的证明.