

# 目录

<b>Lec 1</b>	<b>衔接课</b>	<b>1</b>
1.1	记号 . . . . .	1
1.2	映射, 有穷集, 无穷集与等势 . . . . .	1
1.3	笛卡尔积 . . . . .	5
1.4	等价关系, Cauchy 列与实数 . . . . .	6
1.5	开集与闭集 . . . . .	10
<b>Lec 2</b>	<b>数列极限</b>	<b>13</b>
2.1	数列极限的定义 . . . . .	13
2.2	数列极限存在的准则 . . . . .	16
2.3	数列极限的性质 . . . . .	17
2.4	数列极限的运算 . . . . .	20
2.5	高阶无穷大 . . . . .	30
2.6	Stolz 定理及其应用 . . . . .	35
2.7	实数集完备性的五个等价命题 . . . . .	38
2.8	综合练习 . . . . .	41
<b>Lec 3</b>	<b>函数极限</b>	<b>44</b>
3.1	函数极限的定义 . . . . .	45
3.2	函数极限的四则运算法则 . . . . .	47
3.3	3 个重要的函数极限及其证明 . . . . .	49
3.4	函数无穷大的比较 . . . . .	50
3.5	函数 $y = f(x)$ 的连续性 . . . . .	51

# Lec 1 衔接课

## 1.1 记号

记号 (数集)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  为自然数集,  $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$  为正整数集.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$  为整数集.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$  为有理数集.

$\mathbb{R}$  为实数集.

记号 (大平行算数符号)

$\sum$  表示求和, 如  $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

$\prod$  表示连乘, 如  $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$ .

$\bigcap$  表示交集, 如  $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ .

$\bigcup$  表示并集, 如  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ .

对于上述运算, 我们经常称  $i$  为**指标**, 称  $i = 1$  与  $i = n$  分别为**下限**与**上限**. 有时指标的取值范围以集合的形式给出, 如  $\sum_{i \in I} a_i$  表示对所有  $i \in I$  的  $a_i$  求和, 称  $I$  为**指标集**.

有时指标的个数不止一个, 如  $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}$  表示对所有  $1 \leq i \leq m$  与  $1 \leq j \leq n$  的  $a_{ij}$  求和, 即

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

正如  $0! = 1$  一样, 我们规定  $\sum$  与  $\prod$  的空和与空积为:

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0, \quad \prod_{i \in \emptyset} a_i = 1.$$

## 1.2 映射, 有穷集, 无穷集与等势

**定义 1.1 (映射)** 设  $A$  与  $B$  为两个集合, 若对任意  $x \in A$ , 都能唯一地指定一个  $y \in B$  与之对应, 则称从  $A$  到  $B$  的这种对应关系为映射, 记为  $f: A \rightarrow B$ , 并称  $x$  为自变量,  $y = f(x)$  为因变量.

$A$  称为映射  $f$  的定义域,  $A$  在  $f$  映射下的像  $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset B$  称为  $f$  的值域.

我们在验证一个对应关系是否是映射时, 或者说, 验证一个映射是否良定 (well-defined) 时, 需要验证两个条件:

- (1) 对任意  $x \in A$ , 都能找到  $y \in B$  与之对应.
- (2) 对任意  $x \in A$ , 只能找到唯一的  $y \in B$  与之对应.

前者称为映射的存在性, 后者称为映射的唯一性.

我们将从数集到数集的映射称为函数, 在这门课之中, 我们几乎只考虑从实数集  $\mathbb{R}$  到实数集  $\mathbb{R}$  的函数.

记号 对于映射

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto f(x)$$

我们用  $\rightarrow$  表示映射的范围,  $A \rightarrow B$  表示该映射是从集合  $A$  到集合  $B$  的映射.  $\mapsto$  表示映射的具体规则,  $x \mapsto f(x)$  表示  $x$  在该映射下对应  $f(x)$ .

**定义 1.2 (单射)** 设  $A$  与  $B$  为两个集合, 若映射  $f: A \rightarrow B$  满足: 对任意  $x_1, x_2 \in A$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时, 有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 则称  $f$  为从  $A$  到  $B$  的单射.

**定义 1.3 (满射)** 设  $A$  与  $B$  为两个集合, 若映射  $f: A \rightarrow B$  满足: 对任意  $y \in B$ , 存在  $x \in A$ , 使得  $f(x) = y$ , 则称  $f$  为从  $A$  到  $B$  的满射.

**定义 1.4 (双射)** 设  $A$  与  $B$  为两个集合, 若映射  $f: A \rightarrow B$  既是单射又是满射, 则称  $f$  为从  $A$  到  $B$  的双射. 也称为  $A$  与  $B$  之间存在一一对应关系.

例

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1)$$

$$x \mapsto x, \quad x \notin \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

$$\frac{1}{k} \mapsto \frac{1}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

不难验证,  $f$  为从  $[0, 1]$  到  $[0, 1)$  的双射. 我们将在[后续证明](#)之中使用该思想.

这个双射使用了类似希尔伯特酒店的操作: 通过将某些元素映射到不同位置, 展示了即使是“满”的区间也可以为新的元素腾出“空间”.

下面两个命题建议同学们自己先尝试证明, 以加深对双射的理解.

**命题 1.1** 双射存在逆映射, 且逆映射也是双射.

**证明** 设  $f: A \rightarrow B$  为双射, 则对任意  $y \in B$ , 存在唯一  $x \in A$ , 使得  $f(x) = y$ . 定义映射  $g: B \rightarrow A$  为: 对任意  $y \in B$ , 有  $g(y) = x$ , 其中  $x$  为唯一满足  $f(x) = y$  的元素. 则  $g$  为  $f$  的逆

映射. 我们常将  $f$  的逆映射记为  $f^{-1}$ .

下面我们证明  $g$  为双射.

- (1)  $g$  为单射: 对任意  $y_1, y_2 \in B$ , 当  $y_1 \neq y_2$  时, 设  $x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2)$ , 则  $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2)$ , 由  $f$  为单射可知,  $x_1 \neq x_2$ , 即  $g(y_1) \neq g(y_2)$ , 所以  $g$  为单射.
- (2)  $g$  为满射: 对任意  $x \in A$ , 设  $y = f(x)$ , 则  $y \in B$ , 且  $g(y) = g(f(x)) = x$ , 所以对任意  $x \in A$ , 都存在  $y \in B$ , 使得  $g(y) = x$ , 所以  $g$  为满射.

**命题 1.2** 双射的复合仍为双射.

**证明** 设  $f: A \rightarrow B$  与  $g: B \rightarrow C$  均为双射, 则对任意  $z \in C$ , 存在唯一  $y \in B$ , 使得  $g(y) = z$ , 又对该  $y$ , 存在唯一  $x \in A$ , 使得  $f(x) = y$ . 定义映射  $h: A \rightarrow C$  为: 对任意  $x \in A$ , 有  $h(x) = g(f(x))$ . 则  $h$  为从  $A$  到  $C$  的映射. 我们常将  $f$  与  $g$  的复合记为  $g \circ f$ , 表示先用  $f$  作用  $x$ , 再用  $g$  作用  $f(x)$ , 从而得到  $g(f(x))$ .

下面我们证明  $h$  为双射.

- (1)  $h$  为单射: 对任意  $x_1, x_2 \in A$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时, 有  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , 设  $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ , 则  $y_1 \neq y_2$ , 又由  $g$  为单射可知,  $g(y_1) \neq g(y_2)$ , 即  $h(x_1) \neq h(x_2)$ , 所以  $h$  为单射.
- (2)  $h$  为满射: 对任意  $z \in C$ , 存在唯一  $y \in B$ , 使得  $g(y) = z$ , 又对该  $y$ , 存在唯一  $x \in A$ , 使得  $f(x) = y$ . 则  $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ . 所以对任意  $z \in C$ , 都存在  $x \in A$ , 使得  $h(x) = z$ , 所以  $h$  为满射.

**定义 1.5 (有穷集)** 设  $A$  为一个集合, 称  $A$  为有穷集, 若存在自然数  $n$ , 使得  $A$  与  $\{1, 2, \dots, n\} = \{i \mid 1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}\}$  之间存在一一对应关系.

当  $n = 0$  时,  $\{1, 2, \dots, n\} = \emptyset$ , 此时有穷集称为空集.

在此基础上, 我们才可以对有限集合的个数进行计数描述, 具体而言如下例

**例 1.1**  $A = \{a, b, c, d, e\}$  为有穷集, 由于  $A$  与  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  之间存在一一对应关系, 因此  $A$  中有 5 个元素.

其中的一一对应关系可以取为:

$$f: A \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3, d \mapsto 4, e \mapsto 5.$$

$f$  是一个双射, 也可以取为:

$$g: A \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad a \mapsto 3, b \mapsto 5, c \mapsto 1, d \mapsto 4, e \mapsto 2.$$

$g$  也是一个双射.

其中我们可以不在乎  $A$  与  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  之间具体的对应关系, 只在乎双射到  $\{1, 2, \dots, n\}$  的自然数  $n$ . 这就是为什么我们说  $A$  中有 5 个元素.

顺带一提,  $A = \{a, b, c, d, e\}$  与  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  的双射共有  $A_5^5 = 5! = 120$  种, 这是  $a, b, c, d, e$

的全排列.

**定义 1.6 (等势)** 设  $A$  与  $B$  为两个集合, 若存在从  $A$  到  $B$  的双射, 则称  $A$  与  $B$  等势.

也就是说,  $A$  是有穷集等价于: 存在  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $A$  与  $\{1, 2, \dots, n\}$  等势.

**记号** 我们用 s.t. (such that) 来表示“使得”, 用 i.e. (id est) 来表示“也就是说”.

对于无穷集合, 我们给出两种定义方式:

**定义 1.7 (无穷集)** 设  $A$  为一个集合, 称  $A$  为无穷集, 若  $A$  不为有穷集.

**定义 1.8 (无穷集)** 设  $A$  为一个集合, 称  $A$  为无穷集, 若存在  $A$  的真子集  $A'$ , 使得  $A$  与  $A'$  等势.

下面我们先承认**定义 1.7**是无穷集的定义, 证明上述两种定义方式是等价的.

**证明** 存在真子集与其等势一定是无穷集

考虑  $A$  满足:  $A$  与某个真子集  $A'$  等势. 即  $\exists f: A \rightarrow A'$  为双射. 使用反证法, 假设  $A$  为有穷集, 根据**定义 1.5**, 则  $\exists n \in \mathbb{N}$ , s.t.  $A$  与  $\{1, 2, \dots, n\}$  等势, 即存在双射  $g: A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ .

由**命题 1.1**与**命题 1.2**, 可知  $g \circ f^{-1}: A' \rightarrow A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  为双射. 又由  $A' \subset A$ , 可推出  $A' = A$ , 这与  $A'$  为  $A$  的真子集矛盾.

其中最后的部分, 我们总结为以下命题

**命题 1.3** 给定某个  $n$ , 若存在  $f: A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  为双射, 且对于  $A$  的某个子集  $A'$ , 存在  $\tilde{f}: A' \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  为双射, 则  $A' = A$ .

该命题留作思考, 这里给出助教的证明.

**证明** 我们归纳的给出证明, 当  $n = 0$  时,  $\{1, 2, \dots, n\} = \emptyset$ , 而空集只能双射到空集: 若  $\mu: \emptyset \rightarrow S, S \neq \emptyset$ , 则  $\exists s \in S$ , 考虑  $\mu^{-1}(s) \in \emptyset$  可知矛盾. 因此  $A = \emptyset, A' = \emptyset$ , 所以  $A' = A$ .

当  $n = k$  成立时, 即存在  $f: A \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  为双射, 且对于  $A$  的某个子集  $A'$ , 存在  $\tilde{f}: A' \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  为双射, 则  $A' = A$ .

我们希望证明: 若存在  $g: B \rightarrow \{1, 2, \dots, k+1\}$  为双射, 且对于  $B$  的某个子集  $B'$ , 存在  $\tilde{g}: B' \rightarrow \{1, 2, \dots, k+1\}$  为双射, 则  $B' = B$ .

取  $b = \tilde{g}^{-1}(k+1) \in B'$ , 则  $\tilde{g}$  将  $B' \setminus \{b\}$  映射到  $\{1, 2, \dots, k\}$  上.  $g(b) \in \{1, 2, \dots, k+1\}$ , 不难证明存在双射  $\tau: \{1, 2, \dots, k+1\} \setminus \{g(b)\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ . 因此, 存在双射  $\tau \circ g: B \setminus \{b\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ , 且  $B' \setminus \{b\} \subset B \setminus \{b\}$ , 由  $n = k$  时的归纳假设, 可知  $B' \setminus \{b\} = B \setminus \{b\}$ , 从而  $B' = B$ .

**证明** 无穷集一定存在真子集与其等势

即证明: 已知  $A$  是无穷集, 则不存在  $n \in \mathbb{N}$ , 使得  $A$  与  $\{1, 2, \dots, n\}$  等势.

由  $n = 0$  时的情况可知,  $A$  非空, 取  $a_1 \in A$ , 设  $A_1 = A \setminus \{a_1\}$ , 则  $A_1$  为  $A$  的真子集, 且不为有穷集. 于是  $A_1 \neq \emptyset$ , 取  $a_2 \in A_1 \dots$  依此类推, 可得  $A$  的一个真子集列  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ , 两两不等. 因

此构造出双射:

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow A_1 \\ x &\mapsto x, x \notin \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \\ a_i &\mapsto a_{i+1}, i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

由此可知,  $A$  与  $A_1$  等势.

接下来, 我们以**定义 1.8**作为无穷集的定义, 证明上述两种定义方式是等价的. 这个证明过程留作思考, 这里给出助教的证明.

**证明**  $A$  存在等势真子集  $\Rightarrow A$  不为有穷集

当  $A = \emptyset$  时,  $A$  不存在真子集.

当  $A \neq \emptyset$  时, 设  $f: A \rightarrow A'$  为双射, 其中  $A'$  为  $A$  的真子集. 取  $x_0 \in A \setminus A'$ , 构造序列:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

则有:

- (1)  $x_i \in A' \subset A, i = 1, 2, \dots,$
- (2)  $x_i \neq x_j, \forall i \neq j, i, j = 0, 1, 2, \dots$

否则, 存在  $n, m \in \mathbb{N}, n > m \geq 0$ , 使得  $x_n = x_m$ , 则  $f(x_{n-1}) = f(x_{m-1})$ , 由  $f$  为单射可知,  $x_{n-1} = x_{m-1}$ , 依此类推, 可知  $x_{n-k} = x_{m-k}, k = 1, 2, \dots, m$ , 从而  $x_0 = x_{n-m} \in A'$ , 这与  $x_0 \in A \setminus A'$  矛盾.

由此得到了  $A$  的一个两两不同的无限子集  $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ .

$\forall n \in \mathbb{N}^+, A$  都不与  $\{1, 2, \dots, n\}$  等势: 否则  $\exists n \in \mathbb{N}^+, g: A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ . 考虑  $\{g(x_i)\}_{i=0}^{\infty}$  两两不同, 且都属于  $\{1, 2, \dots, n\}$ . 这就证明了  $A$  不是有穷集.

**证明**  $A$  存在等势真子集  $\Leftarrow A$  不为有穷集

这与上述**定义 1.7**定义下的无穷集一定存在真子集与其等势的证明过程完全一样.

## 1.3 笛卡尔积

**定义 1.9 (笛卡尔积)** 设  $A$  与  $B$  为两个集合, 则  $A$  与  $B$  的笛卡尔积为:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

其中  $(a, b)$  为有序对.

**例 1.2** 设  $A = \{1, 2\}, B = \{x, y, z\}$ , 则

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}.$$

如果  $A$  与  $B$  均为有穷集, 且  $A$  中有  $m$  个元素,  $B$  中有  $n$  个元素, 则  $A \times B$  中有  $m \times n$  个元素, 即

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B.$$

给出一列集合  $\{A_i\}_{i=1}^n$ , 则

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

其中  $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$  为  $n$  元有序组.

**例 1.3**  $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$ ,  $\mathbb{R}^n$  称为  $n$  维欧氏空间.

## 1.4 等价关系, Cauchy 列与实数

**定义 1.10 (等价关系)** 设  $A$  为一个集合, 若在  $A$  上定义了一个关系  $\sim$ , 且对任意  $x, y, z \in A$ , 均满足:

- (1) (自反性)  $x \sim x$ ;
- (2) (对称性)  $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ ;
- (3) (传递性)  $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$ ;

则称  $\sim$  为  $A$  上的等价关系.

**定义 1.11** 集合  $A$  在等价关系  $\sim$  下的等价类为: 对任意  $a \in A$ , 定义  $[a] = \{b \in A \mid b \sim a\}$ ,  $a$  称为  $[a]$  这个等价类的代表元.

注意到

$$[a] \cap [b] = \begin{cases} [a] = [b], & a \sim b \\ \emptyset, & a \not\sim b \end{cases}$$

**证明**

- (1) 若  $a \sim b$ , 则对任意  $x \in [a]$ , 有  $x \sim a$ , 由  $a \sim b$  与等价关系的传递性可知,  $x \sim b$ , 所以  $x \in [b]$ , 即  $[a] \subset [b]$ . 同理可知  $[b] \subset [a]$ , 所以  $[a] = [b]$ .
- (2) 若  $a \not\sim b$ , 则对任意  $x \in [a]$ , 有  $x \sim a$ , 由  $a \not\sim b$  与等价关系的对称性与传递性可知,  $x \not\sim b$ , 所以  $x \notin [b]$ , 即  $[a] \cap [b] = \emptyset$ .

因此集合  $A$  可以被拆为若干 (可能是无穷个) 互不相交的等价类的并, 这称为  $A$  的一个分拆. 具体而言, 记  $A/\sim$  为  $A$  中所有等价类构成的集合, 称为  $A$  在等价关系  $\sim$  下的商集, 即

$$A/\sim := \{[a] \mid a \in A\}.$$

则  $A$  可以写为不交并

$$A = \bigcup_{[a] \in A/\sim} [a].$$

**例 1.4** 如果  $\sim$  是集合  $A$  上的等价关系, 对于自然映射

$$p: A \rightarrow A/\sim, \quad a \mapsto [a],$$

这个映射是满射, 也称为商映射.

**例 1.5**  $\mathbb{Z}$  上有一种基础的等价关系:

$$a \sim b \iff a - b = 2k, k \in \mathbb{Z},$$

即  $a$  与  $b$  同为奇数或同为偶数. 则存在两个等价类

$$[0] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\},$$

$$[1] = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\},$$

且  $[0] \cap [1] = \emptyset$ , 且

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1].$$

我们将  $\mathbb{Z} = [0] \cup [1]$  称为  $\mathbb{Z}$  在该等价关系下的一个分拆.

商映射

$$p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/\sim, \quad a \mapsto [a]$$

具体为

$$p(a) = \begin{cases} [0], & a \text{ 为偶数} \\ [1], & a \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

**例 1.6** 集族  $\mathcal{A}$  上的等价关系:

$$A \sim B \iff \exists \text{ 双射 } f: A \rightarrow B, \quad A, B \in \mathcal{A}.$$

**证明**

- (1) (自反性) 对任意  $A \in \mathcal{A}$ , 恒有  $A \sim A$ , 因为恒有恒等映射  $id_A: A \rightarrow A$  为双射.
- (2) (对称性) 对任意  $A, B \in \mathcal{A}$ , 若  $A \sim B$ , 则存在双射  $f: A \rightarrow B$ , 由 **命题 1.1** 可知,  $f$  的逆映射  $f^{-1}: B \rightarrow A$  也为双射, 所以  $B \sim A$ .
- (3) (传递性) 对任意  $A, B, C \in \mathcal{A}$ , 若  $A \sim B$  且  $B \sim C$ , 则存在双射  $f: A \rightarrow B$  与  $g: B \rightarrow C$ , 由 **命题 1.2** 可知,  $g \circ f: A \rightarrow C$  也为双射, 所以  $A \sim C$ .

**例 1.7**  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  上的等价关系:

$$(p, q) \sim (p', q') \iff pq' = p'q, \quad p, p' \in \mathbb{Z}, q, q' \in \mathbb{N}^*.$$



## 良定的证明

- (1) (自反性) 对任意  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , 恒有  $(p, q) \sim (p, q)$ , 因为  $pq = pq$ .
- (2) (对称性) 对任意  $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , 若  $(p, q) \sim (p', q')$ , 则  $pq' = p'q$ , 从而  $p'q = pq'$ , 所以  $(p', q') \sim (p, q)$ .
- (3) (传递性) 对任意  $(p, q), (p', q'), (p'', q'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ , 若  $(p, q) \sim (p', q')$  且  $(p', q') \sim (p'', q'')$ , 则  $pq' = p'q$  与  $p'q'' = p''q'$  成立, 从而  $pq'q'' = p'qq'' = p''q'q$ , 由于  $q' \neq 0$ , 可知  $pq'' = p''q$ , 所以  $(p, q) \sim (p'', q'')$ .

我们将商集

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)/\sim = \{[(p, q)] \mid (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$$

记为  $\mathbb{Q}$ , 并将  $[(p, q)]$  记为  $\frac{p}{q}$ , 则

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\},$$

即有理数集.

$\frac{1}{3} = [(1, 3)] = [(2, 6)] = [(3, 9)] = \dots$ , 即  $\frac{1}{3}$  可以表示为  $(1, 3), (2, 6), (3, 9), \dots$  等有序对的等价类. 这提供了一个新的看待  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \dots$  的视角.

**定义 1.12 (Cauchy 列)** 设  $\{a_n\}$  为实数列, 若对任意  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $m, n > N$  时, 有  $|a_n - a_m| < \varepsilon$ , 则称  $\{a_n\}$  为 Cauchy 列.

我们称两个 Cauchy 列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  等价, 若对任意  $M \in \mathbb{N}^*$ , 都存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - b_n| < \frac{1}{M}$ . 记为  $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ .

**命题 1.4** 上述等价关系等价于: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - b_n| < \varepsilon$ .

**证明** 充分性: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $M = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rceil \in \mathbb{N}^*$ , 使得  $\frac{1}{M} < \varepsilon$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - b_n| < \frac{1}{M} < \varepsilon$ .

必要性: 对任意  $M \in \mathbb{N}^*$ , 取  $\varepsilon = \frac{1}{M}$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - b_n| < \varepsilon = \frac{1}{M}$ .

**命题 1.5** 上述等价关系具有传递性, 即: 若 Cauchy 列  $\{a_n\} \sim \{b_n\}$  且  $\{b_n\} \sim \{c_n\}$ , 则  $\{a_n\} \sim \{c_n\}$ .

**证明** 对任意  $M \in \mathbb{N}^*$ , 取  $\varepsilon = \frac{1}{2M}$ , 则存在  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N_1$  时, 有  $|a_n - b_n| < \varepsilon$ , 且当  $n > N_2$  时, 有  $|b_n - c_n| < \varepsilon$ . 取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{1}{M}.$$

因此  $\{a_n\} \sim \{c_n\}$ .

或者我们也可以更简化的写为

**证明** 对任意  $M \in \mathbb{N}^*$ , 取  $M \in \mathbb{N}^*$ , 则存在  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N_1$  时, 有  $|a_n - b_n| < \frac{1}{M}$ , 且当  $n > N_2$  时, 有  $|b_n - c_n| < \frac{1}{M}$ . 取  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \frac{1}{M} + \frac{1}{M} = \frac{2}{M}.$$

第一种写法用到的是  $\frac{1}{2M}$ , 第二种方法用的是  $\frac{1}{M}$ . 注意到这两种写法本质上是等价的. 第二种写法得到的是

$$\forall M' \in \mathbb{N}^* \exists N \forall n > N : |a_n - c_n| < \frac{2}{M'},$$

令  $M' = 2M$  就正好得到

$$\forall M \in \mathbb{N}^* \exists N \forall n > N : |a_n - c_n| < \frac{1}{M}.$$

因此两种写法只是参数选择方式不同, 通过简单的替换  $M' = 2M$  就可以互相转化, 因而在逻辑上完全等价.

这也启发了我们, 以下命题的成立:

**命题 1.6**  $\{a_n\}$  为 Cauchy 列等价于: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - b_n| < c\varepsilon$ . 其中  $c$  为任意正常数.

对于每一个与  $n$  无关的  $c > 0$ , 这个命题都是成立的.

**证明** 充分性: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $\varepsilon' = c\varepsilon > 0$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $m, n > N$  时, 有  $|a_n - a_m| < \varepsilon' = c\varepsilon$ .

必要性: 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c} > 0$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $m, n > N$  时, 有  $|a_n - a_m| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c} < c\varepsilon$ .

上述对 Cauchy 列的等价, 就是一个等价关系, 我们仅验证了传递性, 自反性与对称性是显然的.

### Cauchy 列之间等价关系的自反性与对称性验证

自反性: 对任意  $M \in \mathbb{N}^*$ , 取  $N = 1$ , 则当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a_n| = 0 < \frac{1}{M}$ , 所以  $\{a_n\} \sim \{a_n\}$ .

对称性: 对任意  $M \in \mathbb{N}^*$ , 取  $N$  使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - b_n| < \frac{1}{M}$ , 则当  $n > N$  时, 有  $|b_n - a_n| = |a_n - b_n| < \frac{1}{M}$ , 所以  $\{b_n\} \sim \{a_n\}$ .

现在我们可以定义实数集了. 记  $A = \{\{a_n\} \mid \{a_n\} \text{ 为 Cauchy 列}, a_n \in \mathbb{Q}\}$ ,  $\sim$  为上述 Cauchy 列之间的等价关系, 则实数集  $\mathbb{R}$  定义为商集

$$\mathbb{R} = A/\sim = \{[\{a_n\}] \mid \{a_n\} \text{ 为 Cauchy 列}, a_n \in \mathbb{Q}\},$$

其中  $[\{a_n\}]$  为 Cauchy 列  $\{a_n\}$  的等价类.

总体来说,在这一节中,我们介绍了等价关系与商集的概念,并通过 Cauchy 列与等价关系的方式定义了实数集. 这种方式虽然比较绕,但它是严谨的,并且可以帮助我们理解实数的本质.

## 1.5 开集与闭集

我们为了描述欧式空间中的点集,引入了开集与闭集的概念.

**定义 1.13 (开集)** 设  $A \subset \mathbb{R}$ , 若对任意  $x \in A$ , 都存在  $r > 0$ , 使得  $(x-r, x+r) \subset A$ , 则称  $A$  为  $\mathbb{R}$  中的开集.

**例 1.8**  $\mathbb{R}$  与  $\emptyset$  均为开集. 设  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ , 则  $(a, b)$  为开集. 设  $n \in \mathbb{N}^*$ , 则  $\mathbb{R}^n$  中的开球

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\},$$

其中  $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$ , 为  $\mathbb{R}^n$  中的开集.

**定义 1.14 (闭集)** 设  $A \subset \mathbb{R}$ , 若  $\mathbb{R} \setminus A$  为开集, 则称  $A$  为  $\mathbb{R}$  中的闭集.

于是我们可以给出聚点的两种定义:

**定义 1.15 [聚点]** 设  $A \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ , 若存在点列  $\{x_n\} \subset A \setminus \{x\}$ , 满足  $x_n \neq x, \forall n \in \mathbb{N}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , 则称  $x$  为  $A$  的聚点.

**定义 1.16 [聚点]** 设  $A \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ , 若对任意  $r > 0$ , 都有  $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ , 则称  $x$  为  $A$  的聚点.

**命题 1.7** 上述两种聚点的定义是等价的.

**定义 1.15  $\Rightarrow$  定义 1.16**

设  $x$  为  $A$  的聚点, 则存在点列  $\{x_n\} \subset A \setminus \{x\}$ , 满足  $x_n \neq x, \forall n \in \mathbb{N}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ . 对任意  $r > 0$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ , 可知存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|x_n - x| < r$ , 即  $x_n \in (x-r, x+r)$ . 因此  $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ .

**定义 1.16  $\Rightarrow$  定义 1.15**

设  $x$  为  $A$  的聚点, 则对任意  $r > 0$ , 都有  $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$ . 对每个  $n \in \mathbb{N}^*$ , 取  $r = \frac{1}{n}$ , 则存在  $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap A \setminus \{x\}$ , 使得  $x_n \neq x$ . 由此可构造出点列  $\{x_n\} \subset A \setminus \{x\}$ , 满足  $x_n \neq x, \forall n \in \mathbb{N}$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ .

记  $A'$  为  $A$  的所有聚点构成的集合, 则称  $A'$  为  $A$  的导集. 由定义可知,  $A'$  为闭集.

**命题 1.8**  $A$  为闭集等价于  $A' \subset A$ .

**证明** 充分性: 设  $A' \subset A$ , 则  $\mathbb{R} \setminus A \subset \mathbb{R} \setminus A'$ . 对任意  $x \in \mathbb{R} \setminus A$ , 则  $x \notin A'$ , 即  $x$  不是  $A$  的聚点,

则存在  $r > 0$ , 使得  $(x - r, x + r) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$ , 从而  $(x - r, x + r) \subset \mathbb{R} \setminus A$ . 因此  $\mathbb{R} \setminus A$  为开集, 所以  $A$  为闭集.

必要性: 设  $A$  为闭集, 则  $\mathbb{R} \setminus A$  为开集. 对任意  $x \in A'$ , 若  $x \notin A$ , 则  $x \in \mathbb{R} \setminus A$ . 由  $\mathbb{R} \setminus A$  为开集, 则存在  $r > 0$ , 使得  $(x - r, x + r) \subset \mathbb{R} \setminus A$ . 从而  $(x - r, x + r) \cap A = \emptyset$ , 这与  $x$  为  $A$  的聚点矛盾. 因此  $x \in A$ , 所以  $A' \subset A$ .

**命题 1.9** 开集的任意并与有限交为开集, 闭集的任意交与有限并为闭集.

**证明** 设  $\{A_i\}_{i \in I}$  为  $\mathbb{R}$  中的开集族, 则对任意  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ , 存在  $i_0 \in I$ , 使得  $x \in A_{i_0}$ . 由  $A_{i_0}$  为开集, 则存在  $r > 0$ , 使得  $(x - r, x + r) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ . 因此  $\bigcup_{i \in I} A_i$  为开集.

注 设  $\{A_i\}_{i \in I}$  为  $\mathbb{R}$  中的开集族, 则对任意  $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ , 存在  $i_0 \in I$ , 使得  $x \in A_{i_0}$ . 实际利用了选择公理. 选择公理是集合论中的一个重要公理, 它断言对于任意非空集合族, 都存在一个选择函数, 该函数从每个集合中选择一个元素. 在这里, 我们利用选择公理从开集族  $\{A_i\}_{i \in I}$  中选择一个包含  $x$  的开集  $A_{i_0}$ .

设  $A_1, A_2, \dots, A_n$  为  $\mathbb{R}$  中的开集, 则对任意  $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ , 则  $x \in A_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 由  $A_i$  为开集, 则存在  $r_i > 0$ , 使得  $(x - r_i, x + r_i) \subset A_i, i = 1, 2, \dots, n$ . 取  $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ , 则  $(x - r, x + r) \subset A_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 从而  $(x - r, x + r) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$ . 因此  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  为开集.

设  $\{B_i\}_{i \in I}$  为  $\mathbb{R}$  中的闭集族, 则  $\mathbb{R} \setminus B_i$  为开集, 则

$$\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus B_i)$$

为开集. 因此  $\bigcap_{i \in I} B_i$  为闭集.

设  $B_1, B_2, \dots, B_n$  为  $\mathbb{R}$  中的闭集, 则  $\mathbb{R} \setminus B_i$  为开集, 则

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R} \setminus B_i)$$

为开集. 因此  $\bigcup_{i=1}^n B_i$  为闭集.

上面的证明过程中, 我们用到了 De Morgan 定律, 即

$$A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i),$$

以及

$$A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i).$$

我们给出一个简要的证明.

**证明** 对任意  $x \in A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i$ , 则  $x \in A$  且  $x \notin \bigcup_{i \in I} B_i$ , 则  $x \notin B_i, \forall i \in I$ , 从而  $x \in A \setminus B_i, \forall i \in I$ , 即  $x \in \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$ . 因此  $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i \subset \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$ .

对任意  $x \in \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$ , 则  $x \in A$  且  $x \in A \setminus B_i, \forall i \in I$ , 则  $x \notin B_i, \forall i \in I$ , 从而  $x \notin \bigcup_{i \in I} B_i$ , 即  $x \in A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i$ . 因此  $\bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i) \subset A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i$ .

综上所述,  $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$ . 同理可证  $A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i)$ .

**例 1.9** 闭集的无穷并不一定为闭集. 例如, 对每个  $n \in \mathbb{N}^*$ , 令

$$A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right],$$

则  $A_n$  为闭集, 但

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1)$$

为开集, 所以不是闭集.

同理, 开集的无穷交不一定为开集. 例如, 对每个  $n \in \mathbb{N}^*$ , 令

$$B_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right),$$

则  $B_n$  为开集, 但

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [-1, 1]$$

为闭集, 所以不是开集.

理解了有关开集与闭集的基本性质, 可以更好的理解实数集的等价命题: 开覆盖定理与闭区间套定理.

## Lec 2 数列极限

### 2.1 数列极限的定义

**定义 2.1 (数列极限)** 对于数列  $\{a_n\}$ , 若  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立, 则  $\{a_n\}$  以常数  $a$  为极限, 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  或  $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$ .

常数列是指所有项都相等的数列, 例如  $2, 2, 2, 2, \dots$ .

**注** 一般而言, 对于语句  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 一般暗示了其中  $N = N(\varepsilon)$ , 即  $N$  是依赖于  $\varepsilon$  的. 不太严谨的说, 当  $\varepsilon$  变小时, 对应的  $N$  会变大.

我们判断数列是否收敛, 就是判断其是否满足数列极限存在的定义.

**习题 1.2.1** 用定义证明下面的结论:

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5+3n} = \frac{1}{3};$    | (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0;$ |
| (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0;$ | (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$   |

**解**

1.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{5}{9\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{n}{5+3n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n - (5+3n)}{3(5+3n)} \right| = \frac{5}{3(5+3n)} < \frac{5}{9n} < \varepsilon.$$

2.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

3.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon.$$

4.  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$\left| \frac{n!}{n^n} - 0 \right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

除定义之外, 也可以使用如下的两个与定义等价的命题:

**习题 1.2.2** 若数列  $\{a_n\}$  ( $n \geq 1$ ) 满足条件: 任给正数  $\varepsilon$ , 存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < M\varepsilon$  (其中  $M$  为常数), 则  $\{a_n\}$  必以  $a$  为极限.

$M$  为常数指的是  $M$  不依赖于  $\varepsilon$  和  $n$ . 例如  $M = 2, M = 1000$  等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于  $\forall M > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < M\varepsilon$  成立.

**证明** 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M} > 0$ , 则存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < M\varepsilon' = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$ .

**习题 1.2.3** 证明: 当且仅当  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$  时, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

**证明** 充分性: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立. 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

必要性: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立. 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ .

事实上, 所有的收敛的有理数列, 其极限点的全体即是实数集  $\mathbb{R}$ . 即实数集  $\mathbb{R}$  是有理数列的极限值构成的.

**注**

1.  $\mathbb{Q}$  对极限是不封闭的, 即: 由  $\mathbb{Q}$  组成的数列的极限不一定是  $\mathbb{Q}$  中的元素;
2. 由  $\mathbb{Q}$  组成的数列的极限只能是实数;
3. 由  $\mathbb{Q}$  组成的所有收敛数列, 他们的极限的集合, 恰好就是  $\mathbb{R}$ , 不多不少.

理由如下:

对  $\forall x \in \mathbb{R}$ , 设  $x$  的小数表示为:  $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ , 则有有理数列:  $a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, \cdots$  当  $n \rightarrow \infty$  时, 其极限为  $x$ . 若  $x$  是有理数, 则  $a_0.a_1a_2\cdots a_n$  是有限小数或循环小数, 若  $x$  是无理数, 则  $a_0.a_1a_2\cdots a_n$  是无限不循环小数, 则极限点  $x$  是无理数.

此处  $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ , 其中每一个  $a_i$  都是一个数字,  $a_0$  是整数部分,  $a_1a_2a_3\cdots$  是小数部分. 比如  $x = 3.1415926\cdots$ , 那么  $a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 9, a_6 = 2, a_7 = 6, \cdots$ .

可以由  $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$  构造出一个数列  $\tau_1 = a_0, \tau_2 = a_0.a_1, \tau_3 = a_0.a_1a_2, \cdots$ , 说  $x$  为极限指的, 是  $x$  是数列  $\{\tau_n\}$  的极限, 记为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = x$ . 都用  $x$  代指, 是因为这里不能确定  $x$  是不是有限小数, 有理数还是无理数. 但是  $x$  是数列  $\{\tau_n\}$  的极限是确定的.

**定义 2.2 (子列)** 一个数列  $\{a_n\}$  的子列, 是指取自原数列  $\{a_n\}$  的无穷多项, 按照原数列中的同样顺序写成的一个新的数列. 于是  $\{a_n\}$  的子列通常形如  $\{a_{n_k}\} (k \geq 1)$ , 其中  $n_k$  是正整数, 满足  $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ .

**命题 2.1** 数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 则其任意一个子列也收敛于  $a$ .

**证明** 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立.

对于子列  $\{a_{n_k}\}$ , 由于  $n_k$  是正整数, 且  $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ , 因此当  $k > N$  时,  $n_k > N$ , 则有

$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ . 由数列极限的定义, 可知  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

**命题 2.2** 数列  $\{a_n\}$  的某个子列收敛于  $a$  的充要条件在  $a$  的任意小邻域内有无穷多项.

**证明** 充分性: 设  $\{a_{n_k}\}$  为  $\{a_n\}$  的子列, 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ . 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^*, \forall k > K$  都有  $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$  成立. 因此  $a$  的任意小邻域内有无穷多项.

必要性: 设  $a$  的任意小邻域内有无穷多项. 则  $\forall \varepsilon > 0$ , 在  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  内有无穷多项. 取  $a_{n_1} \in (a - 1, a + 1), a_{n_2} \in (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}), \dots, a_{n_k} \in (a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}), \dots$ . 则  $\{a_{n_k}\}$  为  $\{a_n\}$  的子列, 且  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ .

聚点对于集合而言的, 极限对于数列而言的, 他们之间存在一些联系:

**命题 2.3**  $a$  为数列  $\{a_n\}$  的聚点, 当且仅当存在收敛于  $a$  的子列  $a_{n_k}$ .

**证明**  $a$  为  $\{a_n\}$  的聚点  $\Leftrightarrow a$  的任意小邻域内有无穷多项  $\Leftrightarrow$  存在收敛于  $a$  的子列  $a_{n_k}$  (由命题 2.2 可知).

**习题 1.2.6** 证明: 若数列  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = a$ , 及  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

**证明** 按已知条件  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$ , 当  $n > N_1$  时  $|x_{2n} - a| < \varepsilon$ . 又  $\exists N_2 > 0$ , 当  $n > N_2$  时  $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$ . 于是令  $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$ , 则  $n > N$  时恒有  $|x_n - a| < \varepsilon$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

对于  $m$  个子列的情况, 也是类似的, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{mk+1} = a, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{mk+2} = a, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{mk+m} = a$$

上述的例子也能用于判定数列不收敛.

**习题 1.2.7** 证明下列数列不收敛:

$$(1) a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}; \quad (2) a_n = 5 \left(1 - \frac{2}{n}\right) + (-1)^n.$$

**解**

- (1) 取  $a_{2n} = \frac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1$ , 而如果  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$ , 矛盾.
- (2) 取  $a_{2n} = 5 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5 \left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 6, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 4$ , 而如果  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$ , 矛盾.

下面两个命题有一定的难度, 可以先自行思考, 这里给出助教的证明.

**命题 2.4** 数列有界的充要条件为他的每个子列有收敛子列.

**证明** 充分性: 设数列  $\{a_n\}$  有界, 则  $\{a_{n_k}\}$  也有界. 由定理 2.1 可知,  $\{a_{n_k}\}$  有收敛子列.

必要性: 设数列  $\{a_n\}$  无界, 则对任意  $M > 0$ , 都存在  $n \in \mathbb{N}^*$ , 使得  $|a_n| > M$ . 取  $M = 1$ , 则存在  $n_1 \in \mathbb{N}^*$ , 使得  $|a_{n_1}| > 1$ . 取  $M = |a_{n_1}| + 1$ , 则存在  $n_2 > n_1$ , 使得  $|a_{n_2}| > |a_{n_1}| + 1$ . 依此类推, 可得数列  $\{a_{n_k}\}$ , 其中  $k \in \mathbb{N}^*$ , 且  $|a_{n_k}| > k$ . 显然,  $\{a_{n_k}\}$  无收敛子列.



**命题 2.5** 数列收敛的充分必要条件是存在一个数  $a$ , 使数列的每个子列有收敛于  $a$  的子列.

**证明** 充分性: 设数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 则其任意子列也收敛于  $a$ . 因此其每个子列都有收敛于  $a$  的子列.

必要性: 设数列  $\{a_n\}$  不收敛, 则存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得对任意  $N \in \mathbb{N}^*$ , 都存在  $n > N$ , 使得  $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$ . 取  $N = 1$ , 则存在  $n_1 > 1$ , 使得  $|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon_0$ . 取  $N = n_1$ , 则存在  $n_2 > n_1$ , 使得  $|a_{n_2} - a| \geq \varepsilon_0$ . 依此类推, 可得数列  $\{a_{n_k}\}$ , 其中  $k \in \mathbb{N}^*$ , 且  $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$ . 显然,  $\{a_{n_k}\}$  无收敛于  $a$  的子列.

## 2.2 数列极限存在的准则

**1. 定义判别** 如果能够找到合适的  $N$ , 使得后续的定义都成立, 则可以判定数列极限存在. 这里的  $N$  的存在性一般由构造来得出,

**例 2.1** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0$ , 欲求  $N$ , 使得  $|\sqrt[n]{n+1} - 1| < \varepsilon$ , 记  $a_n = \sqrt[n]{n+1} - 1$ , 则

$$1 + n = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \cdots + \alpha^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

因此

$$0 < \alpha < \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} \leq \sqrt{\frac{4}{n-1}} < \varepsilon$$

对每一个不等号组成的不等式组求解, 就可以得到  $n$  的范围了, 即得  $N \geq \left\{2, \frac{16}{\varepsilon^2} + 1\right\} + 1$ .

**例 2.2** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0$

**证明**  $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left\lceil \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\varepsilon}} \right\rceil$ , 使得当  $n > N$  时, 有

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{N^\alpha} \leq \varepsilon.$$

**记号** 记号  $[x]$  表示不大于  $x$  的最大整数, 如  $[3.14] = 3, [-3.14] = -4$ . 记号  $\lceil x \rceil$  表示不小于  $x$  的最小整数, 如  $\lceil 3.14 \rceil = 4, \lceil -3.14 \rceil = -3$ . 即

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\},$$

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}.$$

**2. 单调有界准则** 数集的上界和下界定义为:

**定义 2.3**

$$1. \sup E = \inf\{u \in \mathbb{R} : u \geq x, \forall x \in E\};$$

$$2. \inf E = \sup\{u \in \mathbb{R} : u \leq x, \forall x \in E\}.$$

**定理 2.1 (单调有界极限存在准则)** 若数列  $\{a_n\}$  单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则  $\{a_n\}$  收敛. 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n (\inf a_n)$ .

**证明** 单调增有界极限存在.

设数列  $\{a_n\}$  单调增且有上界, 由确界存在定理,  $\{a_n\}$  有上确界. 令  $\sup a_n = \beta$ , 则  $\beta$  满足以下两点:

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \beta$ ;
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in \{a_n\}, \beta - \varepsilon < a_{n_0}$ .

又因为  $\{a_n\}$  单调增, 故  $\forall n > n_0, a_n \geq a_{n_0} > \beta - \varepsilon$ , 且  $a_n \leq \beta < \beta + \varepsilon$ . 即  $|\beta - a_n| < \varepsilon$  在  $n > n_0$  时成立.

由数列极限定义, 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta = \sup\{a_n\}$ . 同理, 单调减有下界极限存在.

### 3. 夹逼准则

**定理 2.2 (夹逼准则)** 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  满足  $a_n \leq b_n \leq c_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

**证明** 从  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n > N_1$  都有  $|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$  当  $n > N_1$  时恒成立.

再从  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \Rightarrow$  对上述  $\varepsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n > N_2$  都有  $|c_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$  当  $n > N_2$  时恒成立.

令  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时,  $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$ , 即  $|b_n - a| < \varepsilon$  成立. 由数列定义,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

## 2.3 数列极限的性质

**命题 2.6 (唯一性)** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ , 则  $a = b$ .

**证明** 如果  $\{a_n\}$  有两个极限值  $a$  和  $b$ . 根据极限的定义, 对于任意的正数  $\varepsilon$ , 注意到  $\frac{\varepsilon}{2}$  也是一个正数, 因此对应两个极限值, 分别存在正整数  $N_1$  和  $N_2$ , 使得当

$$\begin{aligned} n > N_1 \text{ 时有 } |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ n > N_2 \text{ 时有 } |a_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

因此, 当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时 (即  $n > N_1, n > N_2$ ), 上面两个不等式都满足, 所以

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

两个数的距离要小于任意一个正数, 这两个数必须相等, 即  $a = b$ .

**定义 2.4 (数列有界)** 设  $\{a_n\}$  为实数列, 若存在常数  $M > 0$ , 使得对任意  $n \in \mathbb{N}^*$ , 都有  $|a_n| < M$ , 则称  $\{a_n\}$  为有界数列.

**命题 2.7 (有界性)** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则数列  $\{a_n\}$  有界.

**证明** 取  $\varepsilon = 1$ , 由定义知道, 当存在一个自然数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < 1$ , 即当  $n > N$  时, 有  $|a_n| < |a| + 1$ . 取

$$M = \max \{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|\}.$$

注意到, 第一, 有有限个数中一定能取得一个最大的; 第二, 上面确定的  $M$  显然与  $n$  无关. 则对所有自然数  $n$ , 也就是说数列的所有项, 都会有  $|a_n| \leq M$ .

不难推出如下结论:

**命题** 数列  $\{a_n\}$  有界等价于数列  $\{a_n\}$  自第  $N$  项之后有界, 其中  $N$  已知.

**命题 2.8 (保号性)** 若  $\{a_n\}$  收敛且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $a_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ , 则必有  $a \geq 0$ .

**证明** 若  $a > l$ , 取  $\varepsilon = a - l > 0$ , 则存在一个自然数  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon = a - l,$$

因此

$$-(a - l) < a_n - a$$

即, 当  $n > N$  时, 不等式  $a_n > l$  成立. 对于  $a < l$  的情况, 可类似证明, 在这种情况下, 只要取  $\varepsilon = l - a > 0$  即可. 对于此问, 取  $l = 0$ .

由此不难推出:

**命题** 若  $\{a_n\}$  收敛且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $a_n \geq l, \forall n \geq n_0$ , 则必有  $a \geq l$ .

该命题的逆命题不成立, 如  $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 但  $a_n$  既不恒大于零, 也不恒小于零. 然而, 加上如果是不严格不等, 则在  $N$  充分大时成立, 具体而言如下所述:

**命题** 若  $\{a_n\}$  收敛且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\forall l > a$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $a_n < l$ .

**证明** 反证: 若  $\exists l_0 > a$ , 使得对任意  $N \in \mathbb{N}^*$ , 都存在  $n > N$ , 使得  $a_n \geq l_0$ . 取  $\varepsilon_0 = l_0 - a > 0$ , 则对任意  $N \in \mathbb{N}^*$ , 都存在  $n > N$ , 使得  $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$ . 与数列极限的定义矛盾.

**命题 2.9 (保序性)** 若  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$ , 且  $a_n \leq (\geq) b_n, \forall n \geq n_0$ , 则必有  $a \leq (\geq) b$ .

**证明** 令  $c_n = b_n - a_n$ , 则  $c_n \rightarrow b - a$ , 且  $c_n \leq 0, \forall n \geq n_0$ , 由保号性可知,  $b - a \leq 0$ , 即  $a \leq b$ .

其中唯一性暗示了, 改变数列中有限多项的值, 不会影响数列的收敛性及其极限. 例如, 对于数列  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ , 它的极限是 0, 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . 如果我们改变数列的前 10 项, 如

$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1/11, 1/12, 1/13, 1/14, \dots$ , 则数列的极限仍然是 0. 这个性质在证明数列极限的存在性时, 常常会被用到.

有界性质给出了收敛数列的一个必要条件. 因此无界数列一定是发散的. 例如对于数列  $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$  显然是无界的, 且发散的.

保号性的条件是不严格不等, 若调整为  $a_n > 0$ , 则无法说明  $a > 0$ . 例如数列  $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$  的极限是 0, 但数列的每一项都是正数.

**习题 1.2.13** 设数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  分别收敛于  $a, b$ . 若  $a > b$ , 则从某一项开始, 有  $a_n > b_n$ ; 反之, 若从某项开始恒有  $a_n \geq b_n$ , 则  $a \geq b$ .

**解** 这是保序性的直接推论.

**例 2.3** 设  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\{a_n\}$  为实数列, 请考虑以下对命题的语句, 说明了  $\{a_n\}$  具有什么性质?

1. 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ .
2. 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 存在  $n > N$ , 有  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立.
3. 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ .
4. 对于任意的  $N \in \mathbb{N}$ , 存在  $\varepsilon > 0$ , 当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ .
5. 对于任意的  $N \in \mathbb{N}$ , 存在  $\varepsilon > 0$ , 存在  $n > N$ , 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ .
6. 对于任意的  $N \in \mathbb{N}$ , 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $n > N$ , 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

**解**

1.  $\{a_n\}$  以  $a$  为极限.
2.  $a$  为  $\{a_n\}$  的聚点, 或者有一项等于  $a$ .
3.  $\{a_n\}$  从某一项开始恒等于  $a$ .
4.  $\{a_n\}$  有界.
5. 恒成立.
6.  $a$  为  $\{a_n\}$  的聚点.

这里仅给出部分证明.

**证明 3.** 存在  $N \in \mathbb{N}$ , 对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 使得当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \{a_n\}$  从某一项开始恒等于  $a$ .

相邻的全称量词是可以交换的, 因此上式等价于  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\forall n > N, \forall \varepsilon > 0, |a_n - a| < \varepsilon$ . 由  $\forall \varepsilon > 0, |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n = a$ , 可知  $\exists N \in \mathbb{N}$ , 使得  $\forall n > N, a_n = a$ . 即证.

**证明 4.** 对于任意的  $N \in \mathbb{N}$ , 存在  $\varepsilon > 0$ , 当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \{a_n\}$  有界.

充分性: 取  $N = 1$ , 存在  $\varepsilon > 0$ , 当  $n > 1$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ . 则存在  $M = |a| + \varepsilon + |a_1|$ , 则

$$|a_1| < |a| + \varepsilon + |a_1| = M$$

$$|a_n| < |a| + \varepsilon < |a| + \varepsilon + |a_1| = M, \forall n > 1$$

即证有界.

必要性: 若有界  $M$ , 则  $\forall N, \exists \varepsilon = M + |a|$ , 当  $n > N$  时,

$$|a_n - a| \leq |a_n| + |a| \leq M + |a| = \varepsilon.$$

**证明 5.** 对于任意的  $N \in \mathbb{N}$ , 存在  $\varepsilon = |a_{N+1} - a| + 1 > 0$ , 存在  $n = N + 1 > N$ , 使得  $|a_n - a| = |a_{N+1} - a| < \varepsilon$  成立. 恒成立.

**证明 6.** 对于任意的  $N \in \mathbb{N}$ , 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $n > N$ , 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ .  $\Leftrightarrow a$  为  $\{a_n\}$  的聚点.

充分性: 由  $a$  为  $\{a_n\}$  的聚点  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ , 在  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  内有无穷多项. 则对任意的  $N \in \mathbb{N}$ , 存在  $n > N$ , 使得  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

必要性: 由对任意的  $N \in \mathbb{N}$ , 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $n > N$ , 使得  $|a_n - a| < \varepsilon$  成立. 则  $\forall \varepsilon > 0$ , 在  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  内有无穷多项. 因此  $a$  为  $\{a_n\}$  的聚点.

上述例子给出了数列极限的定义, 交换量词后, 会得到意义大相径庭的命题. 通过理解这些含义不同的命题, 可以加深对数列极限的理解.

## 2.4 数列极限的运算

**定理 2.3 (数列极限的线性性质)** 设  $a, b, c_1, c_2$  为常数且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b = c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

**证明** 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^*$ , 当  $n > N_1$  时,  $|a_n - a| < \varepsilon$ . 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 对上述  $\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^*$ , 当  $n > N_2$  时,  $|b_n - b| < \varepsilon$ .

令  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时,  $|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon$ , 则

$$|c_1 a_n + c_2 b_n - c_1 a - c_2 b| = |c_1(a_n - a) + c_2(b_n - b)| \leq |c_1(a_n - a)| + |c_2(b_n - b)| \leq (|c_1| + |c_2|)\varepsilon,$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b$ .

数列的极限具有线性性质, 同理函数极限也是具有线性性质的, 统称为极限的线性性质. 由极限的线性性质, 可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质. 如函数的导数、导数、微分、积分, 都具有线性性质.

从上述极限的线性性质, 不难得到以下结论:

1. 当  $c_1 = c_2 = 1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ;
2. 当  $c_1 = 1, c_2 = -1$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ;
3. 当  $c_1 = k, c_2 = 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
4. 数列的线性性质可推广到任意有限个收敛数列的情形: 设  $a_{1n} \rightarrow a_1, a_{2n} \rightarrow a_2, \dots, a_{mn} \rightarrow$

$a_m$ , 且  $a_1, a_2, \dots, a_m, c_1, c_2, \dots, c_m$  为常数, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + \dots + c_m a_{mn}) \\ &= c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m \\ &= c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{1n} + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} + \dots + c_m \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} \end{aligned}$$

对  $\forall m \in \mathbb{N}^*$  成立.

**定理 2.4 (收敛数列极限的四则运算法则)** 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  收敛, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , 则有

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ , 其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ .

**证明**

1. 由极限的线性性质可得;

2. 注意到

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n| |b_n - b| + |b_n - b| |a_n - a|.$$

由于  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是收敛数列, 故都是有界的, 取一个大的界  $M$ , 使得

$$|a_n|, |b_n| < M (n \geq 1)$$

因此  $|b| \leq M$ . 对于任意的正数  $\varepsilon$ , 对应  $\frac{\varepsilon}{2M}$ , 分别存在整数  $N_1$  和  $N_2$ , 使得当  $n > N$  时,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

同时成立. 因此当  $n > N$  时, 有

$$|a_n b_n - ab| < M |b_n - b| + M |a_n - a| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

3. 因为

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

且  $b \neq 0$ , 由 2° 可知, 只需证明数列  $\left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$  收敛于  $\frac{1}{b}$  即可. 假设  $b > 0$ , 则

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b_n - b}{b_n b} \right|.$$

由于  $b_n$  收敛于  $b$ , 一方面对于正数  $b/2 > 0$ , 存在  $N_1$ , 当  $n > N_1$  时,

$$|b_n - b| < \frac{b}{2}.$$

另一方面, 对于任意给定的正数  $\varepsilon$ , 存在  $N_2$ , 使得当  $n > N_2$  时,

$$|b_n - b| < \frac{b^2 \varepsilon}{2}.$$

所以, 当  $n > N = \max\{N_1, N_2\}$  时,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq |b_n - b| \cdot \frac{2}{b^2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

**定理 2.4** 说明有限组收敛数列的极限运算和四则运算是可以交换的, 并可推广到有限多个收敛数列与四则运算的情况. 对于 3 中的结论, 会因为某些  $b_n$  为 0 而使得分式没有意义. 但是因为  $\{b_n\}$  的极限  $b \neq 0$ , 所以  $b_n$  为 0 的项至多只有有限个. 可以改变这有限多项的值, 这不会改变  $\{b_n\}$  的收敛性和极限. 或者在  $\{a_n b_n\}$  中删去这些没有定义的有限多项, 不会改变其收敛性和极限.

有了 **定理 2.4**, 在计算数列极限时, 可以将其化为简极限的四则运算, 而不必再使用 “ $\varepsilon$ - $N$ ” 语言作繁琐的论述.

**习题 1.2.8** 求下列极限:

$$(1) a_n = \frac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1};$$

$$(2) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n};$$

$$(3) a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n(n+1)/2}\right), n = 2, 3, \dots;$$

$$(4) a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(5) a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^m}), (|q| < 1).$$

解

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

(3)

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{2 \cdot 5 \cdots (n^2 + n - 2)}{3 \cdot 6 \cdots n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1+\frac{2}{n}}{2(1+\frac{1}{n})} = \frac{1+0}{2(1+0)} = \frac{1}{2}.$$

(4)

$$a_n = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^m})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{m+1}}}{1-q},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1-q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1-\lim_{m \rightarrow \infty} q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

然而, 这种交换对于极限和绝对值并不总是成立, 具体而言:

**习题 1.2.4** 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ ; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , 则有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**证明** 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ . 则

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$ .

反之不一定成立, 如数列  $a_n = (-1)^n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$ , 但  $\{a_n\}$  发散.

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 当  $n > N$  时, 有  $||a_n| - 0| < \varepsilon$ . 则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**习题 1.2.5** 证明: 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 又  $|b_n| \leq M, (n = 1, 2, \cdots)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ .

**证明** 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 当  $n > N$  时, 有  $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$ . 则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ .

**习题 1.2.9** 若  $a_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 能否断定  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ ?

**解** 不能. 例如  $a_n = \frac{1}{2^n}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ .

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  可能为 0.

**习题 1.2.10** 若数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$ , 是否必有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ? 若还



假设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 回答同样的问题.

**解** 不一定. 例如  $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n(-1)^n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$  不存在, 但  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  时成立. 假设  $a \neq 0$  时, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{0}{a} = 0$ .

**习题 1.2.11** 若数列  $\{a_n\}$  收敛, 数列  $\{b_n\}$  发散, 则数列  $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性如何? 举例说明. 若数列  $\{a_n\}$  与  $\{b_n\}$  皆发散, 回答同样的问题.

**解** 设  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ ,  $\{b_n\}$  发散. 则  $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$  都发散. 例如  $a_n = 1, b_n = n$ , 则  $a_n + b_n = n + 1, a_n - b_n = 1 - n$  都发散. 但  $\{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性不确定. 例如  $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$ , 则  $a_n \cdot b_n = 1$  收敛; 但  $a_n = 1, b_n = n$ , 则  $a_n \cdot b_n = n$  发散.

若  $\{a_n\}, \{b_n\}$  都发散, 则  $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$  的收敛性都不确定. 例如  $a_n = n, b_n = n$ , 则  $a_n + b_n = 2n, a_n - b_n = 0, a_n \cdot b_n = n^2$  中只有  $a_n - b_n$  收敛; 又如  $a_n = n, b_n = (-1)^n n$ , 则  $a_n + b_n = n + (-1)^n n, a_n - b_n = n - (-1)^n n, a_n \cdot b_n = (-1)^n n^2$  都发散.

下面三个命题是定理 2.4 的推广, 它们说明了极限与指数、对数、幂运算是可以交换的. 请利用数列极限的定义先自行尝试, 这里给出助教的证明. 在后续学习了函数极限之后, 会有更简洁的过程.

**命题 2.10** 设数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^a$ .

**证明**  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

$\forall \varepsilon \in (0, e^a), \exists N \in \mathbb{N}^*,$  当  $n > N_1$  时, 有

$$a_n - a < \ln(\varepsilon/e^a + 1),$$

即

$$e^{a_n - a} - 1 < \varepsilon/e^a,$$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*,$  当  $n > N_2$  时, 有

$$a - a_n < -\ln(1 - \varepsilon/e^a),$$

即

$$1 - e^{a_n - a} < \varepsilon/e^a.$$

令  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|e^{a_n} - e^a| = e^a |e^{a_n - a} - 1| < \varepsilon.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^a$ .

**命题 2.11** 设数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$ , 其中  $a_n > 0, a > 0$ .

**证明**  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 则  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$  当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ , 当  $n > N_1$  时, 有

$$a_n - a < a(e^{\varepsilon/a} - 1),$$

即

$$\ln a_n - \ln a < \varepsilon.$$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*$ , 当  $n > N_2$  时, 有

$$a - a_n < a(1 - e^{-\varepsilon/a}),$$

即

$$\ln a - \ln a_n < \varepsilon.$$

令  $N = \max\{N_1, N_2\}$ , 则当  $n > N$  时, 有

$$|\ln a_n - \ln a| < \varepsilon.$$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$ .

**命题 2.12** 设数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = a^\alpha$ , 其中  $a_n > 0, a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$ .

**证明** 由

$$a_n^\alpha = e^{\alpha \ln a_n}, a^\alpha = e^{\alpha \ln a},$$

结合前两个命题可得, 具体而言:

令  $b_n = \ln a_n, b = \ln a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a = b$ . 再令  $c_n = a_n^\alpha = e^{\alpha b_n}, c = a^\alpha = e^{\alpha b}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha b_n} = e^{\alpha b} = c$ . 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = a^\alpha$ .

**命题 2.13** 设数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a, a_n > 0, a > 0$ .  $\{b_n\}$  收敛于  $b$ . 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$ .

极限与极限, 极限与函数, 极限与无穷运算大都是不可交换的, 如课本例 1.2.6, 如下的做法是完全错误的:

**例 2.4** 请说明错误在哪里

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

**解**

第一步将分子拆开是错误的, 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和.

**例 2.5** 请说明错误在哪里  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{1/n}$

**解** 我们对整个数列做极限运算, 而不是对数列中的每一个数做极限运算. 这个式子的意义是

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$  是一个数, 而  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{1/n}$  是一个数列. 前者与  $n$  无关, 后者与  $n$  有关.

**习题 1.2.12** 下面的推理是否正确?

1. 设数列  $\{a_n\} : a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

解: 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 在  $a_{n+1} = 2a_n - 1$  两边取极限, 得  $a = 2a - 1$ , 即  $a = 1$ .

2.

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \underbrace{0+0+\cdots+0}_{n \uparrow} = 0. \end{aligned}$$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right]^n = 1^n = 1.$

解

1. 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为  $a_n = 1$  所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .

2. 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \sim \frac{1}{n}, (k = 1, 2, \dots, n).$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

3. 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

**例 2.6** 设  $a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n, n \in \mathbb{N}^*$ , 证明:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e \approx 2.718281828;$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x, x \in \mathbb{R};$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, x \in \mathbb{R}.$

解 函数极限还没有讲到, 此处仅证明第 1 问. 证明数列  $a_n$  收敛即可. 首先证明该数列是递增的. 事实上由二项式定理可得

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left( 1 - \frac{k-1}{n} \right), \\ a_{n+1} &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) \left( 1 - \frac{2}{n+1} \right) \cdots \left( 1 - \frac{k-1}{n+1} \right) + \left( \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

比较  $a_n$  和  $a_{n+1}$  两个表达式的右端和号中的对应项显然前者较小, 而  $a_{n+1}$  所多出来的一项  $\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 0$  故  $a_{n+1} > a_n$ . 所以  $\{a_n\}$  为严格递增数列.

其次我们将证明数列是有界的. 在  $a_n$  的上述展开式中

$$0 < \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1.$$

所以

$$\begin{aligned} 2 < a_n &< 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} = 3 - \frac{1}{n} < 3, \end{aligned}$$

即  $n = 2, 3, \dots$  也就是说数列  $\{a_n\}$  是单调递增且有上界的因此一定收敛.

### 例 2.7

1.  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}^*.$
2.  $\left(\frac{1}{n+1}\right)^n < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1}{n}\right)^n, n \in \mathbb{N}^*.$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ , 即  $\sqrt[n]{n!}e \sim n$ .

注  $a_n \sim b_n$  定义为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ .

解

1.  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  单调递增且有上界,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$ . 故  $e = \sup a_n$ , 由于  $a_n$  单调增的严格单调, 因此  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq e$ , 故  $a_n < e, n \in \mathbb{N}^*.$

设  $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ . 由平均值不等式, 有

$$\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot 1\right)^{\frac{1}{n+2}} = \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdots \frac{n}{n+1} \cdot 1\right)^{\frac{1}{n+2}} \leq \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1} + \cdots + \frac{n}{n+1} + 1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}.$$

故  $\Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \Rightarrow b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}$ . 且

$b_n > 0$ , 故  $\{b_n\}$  单调递减有下界, 故有极限.  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$ . 与  $a_n$  的推导类似, 可得  $b_n > e, n \in \mathbb{N}^*.$

2. 对 1. 中的不等式取对数, 得

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

3. 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{1}\right)^1 &< e < \left(\frac{2}{1}\right)^2, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 &< e < \left(\frac{3}{2}\right)^3, \\ &\dots, \\ \left(\frac{n}{n+1}\right)^n &< e < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

乘积得

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdots \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < e^n < \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdots \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}.$$

即

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^n}{n!} &< e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \\ \Rightarrow \left(\frac{n+1}{e}\right)^n &< n! < \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \\ \Rightarrow \frac{n+1}{ne} &< \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{ne} \sqrt[n]{n+1} \end{aligned}$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{ne} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + 1}{e} = \frac{1}{e}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$ , 故由夹逼定理, 得证.

**例 2.8** 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ , 证明:

1.  $\{a_n\}$  收敛;
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2$ ;
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+2n} = \ln \frac{5}{3}$ ;
4.  $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$ .

解

1. 由例2.6可知,

$$\begin{aligned} \ln \frac{2}{1} &< \frac{1}{1}, \\ \ln \frac{3}{2} &< \frac{1}{2}, \\ &\dots, \\ \ln \frac{n+1}{n} &< \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

相加得  $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ . 则  $a_n > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > 0$ . 又  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$ , 故  $\{a_n\}$  单调递减有下界, 故有极限.

2.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2n \right) + \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) + \ln 2n - \ln n \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{5n} \right) - \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{3n} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{5n} - \ln 5n \right) + \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{3n} - \ln 3n \right) + \ln 5n - \ln 3n \\
&= \ln \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n}{\ln n} + 1
\end{aligned}$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = \gamma$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n}{\ln n} = 0$ .

记  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \gamma \approx 0.57721$  称为 **Euler 常数**.

写成等价无穷大的形式, 即

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n (n \rightarrow \infty).$$

事实上有以下命题

**命题 2.14**  $a_n \sim b_n \Leftrightarrow a_n = b_n + o(b_n)$ .

**证明** 由  $a_n \sim b_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$ , 即  $a_n - b_n = o(b_n)$ .

由  $a_n = b_n + o(b_n)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} - 1 = 0$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ , 即  $a_n \sim b_n$ .

极限运算与最大值、最小值运算也是可以交换的,

**习题 1.2.14** 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  分别收敛于  $a$  及  $b$ . 记  $c_n = \max(a_n, b_n)$ ,  $d_n = \min(a_n, b_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \max(a, b), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \min(a, b).$$

解 由  $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ ,  $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$ , 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

习题 1.2.15 求下列极限:

- (1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right];$
- (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k)$ , 其中  $0 < k < 1$ ;
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2});$
- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 2};$
- (5)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \right).$

解

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0.$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^k - 1 \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^1 - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-k} = 0.$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

(4) 由  $\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1)$ , 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln n^2 - n + 2} = e^0 = 1.$$

(5)

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

## 2.5 高阶无穷大

定义 2.5 (无穷大) 设  $\{a_n\}$  是一个数列, 若  $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n| > M$ , 则称  $\{a_n\}$  是无穷大数列, 记为  $\{a_n\} \rightarrow \infty$ .

1.  $\{a_n\} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n > M$ .
2.  $\{a_n\} \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n < -M$ .
3.  $\{a_n\} \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n| > M$ .

命题 2.15 (常用无穷大数列的比较) 设  $a, A, m$  为常数, 且  $a > 1, \alpha > 0, m > 0$ , 证明:  $n^n \gg n! \gg a^n \gg n^\alpha \gg (\ln n)^m$ , 在  $n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}^*$  时成立; 其中  $n^n \gg n! \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$ , 称

为  $n^n$  是  $n!$  的高阶无穷大.

**证明**

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , 故  $n^n \gg n!$ .
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n}$ , 其中  $\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]+1}$  是与  $n$  无关的常数,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ , 故  $n! \gg a^n$ .
3. 先设  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ ,  $a = 1 + \lambda$ , 则  $\lambda > 0$ ,  $a^n = (1 + \lambda)^n > C_n^{\alpha+1} \lambda^{\alpha+1}$ . 故  $0 > \frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{n^\alpha}{C_n^{\alpha+1} \lambda^{\alpha+1}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .
4. 仅证  $m = 1$  时, 令  $n^\alpha = y$ , 则  $n \rightarrow \infty$  时,  $y \rightarrow +\infty$ , 且  $\frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\ln y}{y}$ . 设  $k \leq y \leq k+1$ , 则  $\frac{k}{k+1} < \frac{\ln y}{y} < \frac{\ln(k+1)}{k}$ , 故  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$ .

**例 2.9 (Stirling 公式)** 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Stirling 公式的证明在目前不作要求, 这是教材中最后一节的内容. 这里给出一种使用高中知识以及数列极限的证明方法, 仅供参考.

**引理 2.1**

$$\sin^2 \frac{2\pi}{4m} \sin^2 \frac{4\pi}{4m} \sin^2 \frac{6\pi}{4m} \cdots \sin^2 \frac{(2m-2)\pi}{4m} = \frac{m}{2^{2m-2}}.$$

**证明** 复数可以写成  $z = x + iy$  的形式也可以写成三角形式即令  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , 因此可以设  $z_0 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  为  $z^n - 1 = 0$  的根, 则由 De Moivre 定理: 若  $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha), z_2 = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$ , 则  $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$ , 因此

$$z^n = 1 = r^n (\cos x + i \sin x)^n = r^n (\cos nx + i \sin nx),$$

得  $r = 1, \theta = \frac{2k\pi}{n} (k \in \mathbb{N})$ , 故  $z_0 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ .

习惯上称  $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  称为  $n$  次单位原根.

由代数学基本定理可得  $z^n - 1$  只有  $n$  个复根, 且上面验证了  $\{\omega^k\}_{k=1}^n$  恰为这  $n$  个复根, 因此  $z^n - 1 = (z - 1)(z - \omega)(z - \omega^2) \cdots (z - \omega^{n-1})$ , 两边同除  $z - 1$ , 得

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = (z - \omega)(z - \omega^2) \cdots (z - \omega^{n-1})$$

代入  $z = 1$ , 并对两边取模长, 由  $|1 - \omega^k| = \sqrt{\left(1 - \cos \frac{2\pi k}{n}\right)^2 + \left(2 \sin \frac{\pi k}{n}\right)^2} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\pi k}{n}} = 2 \sin \frac{\pi k}{n}$ , 可得

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - \omega^k| = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{\pi k}{n}$$



取  $n = 2m$ , 并注意到对于  $k = 1, 2, \dots, 2m-1$  有对称性  $\sin \frac{\pi(2m-k)}{2m} = \sin \frac{\pi k}{2m}$ , 且当  $k = m$  时  $\sin \frac{\pi m}{2m} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ , 因此

$$\frac{m}{2^{2m-2}} = \prod_{k=1}^{2m-1} \sin \frac{\pi k}{2m} = \left( \prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{\pi k}{2m} \right)^2 = \sin^2 \frac{2\pi}{4m} \sin^2 \frac{4\pi}{4m} \sin^2 \frac{6\pi}{4m} \cdots \sin^2 \frac{(2m-2)\pi}{4m}$$

**引理 2.2**

$$\sin^2 \frac{\pi}{4m} \sin^2 \frac{3\pi}{4m} \sin^2 \frac{5\pi}{4m} \cdots \sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m} = \frac{1}{2^{2m-1}}.$$

**证明** 已知:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

取  $n = 4m$  得

$$\prod_{k=1}^{4m-1} \sin \frac{\pi k}{4m} = \frac{4m}{2^{4m-1}}.$$

偶数项  $k = 2r (r = 1, \dots, 2m-1)$  为:

$$\prod_{r=1}^{2m-1} \sin \frac{2r\pi}{4m} = \prod_{r=1}^{2m-1} \sin \frac{r\pi}{2m} = \frac{2m}{2^{2m-1}}.$$

奇数项为:

$$\prod_{k=1}^{2m} \sin \frac{(2k-1)\pi}{4m} = \left( \prod_{j=1}^m \sin \frac{(2j-1)\pi}{4m} \right)^2,$$

因此

$$\frac{4m}{2^{4m-1}} = \frac{2m}{2^{2m-1}} \cdot \left( \prod_{j=1}^m \sin \frac{(2j-1)\pi}{4m} \right)^2,$$

整理得

$$\left( \prod_{j=1}^m \sin \frac{(2j-1)\pi}{4m} \right)^2 = \frac{1}{2^{2m-1}},$$

即

$$\sin^2 \frac{\pi}{4m} \sin^2 \frac{3\pi}{4m} \cdots \sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m} = \frac{1}{2^{2m-1}}.$$

**引理 2.3**

$$\frac{\sin(k-1)a}{\sin ka} \frac{\sin(k+1)a}{\sin ka} < \frac{(k-1)a}{ka} \frac{(k+1)a}{ka}.$$

**证明** 由以下两恒等式

$$\begin{aligned} \frac{\sin(k-1)a}{\sin ka} \frac{\sin(k+1)a}{\sin ka} &= 1 - \left( \frac{\sin a}{\sin ka} \right)^2, \\ \frac{(k-1)a}{ka} \frac{(k+1)a}{ka} &= 1 - \left( \frac{a}{ka} \right)^2, \end{aligned}$$

以及  $\frac{\sin x}{x}$  在  $0 < x < \pi/2$  单调减, 因此

$$\frac{\sin a}{\sin ka} > \frac{a}{ka},$$

以及

$$\frac{\sin(k-1)a}{\sin ka} \frac{\sin(k+1)a}{\sin ka} < \frac{(k-1)a}{ka} \frac{(k+1)a}{ka}.$$

**引理 2.4 (Wallis 公式)**

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2m-2}{2m-3} \frac{2m-2}{2m-1} = \frac{\pi}{2}$$

**证明** 由引理 2.1, 引理 2.2 得:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{3\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{5\pi}{4m}} \cdots \frac{\sin^2 \frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{(2m-3)\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m}} = m \sin \frac{\pi}{2m}, \\ & \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{3\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{5\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{6\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{5\pi}{4m}} \cdots \frac{\sin^2 \frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{2m\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m}} = m \tan \frac{\pi}{4m}. \end{aligned}$$

由引理 2.3 得

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}} \frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}} \frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}} \cdots \frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}} \frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}} < m \sin \frac{\pi}{2m}, \\ & \frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}} \frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}} \frac{\frac{6\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}} \cdots \frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}} \frac{\frac{2m\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}} > m \tan \frac{\pi}{4m}. \end{aligned}$$

整理得

$$\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2m} > \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2m-2}{2m-3} \frac{2m-2}{2m-1} > \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2m}\right) \tan \frac{\pi}{4m},$$

由夹逼定理即证.

这一条定理在后面学了积分之后可以更快速的得到, 而不途径引理中繁琐的等式.

**引理 2.5**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi}.$$

**证明** 将 Wallis 公式写为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

展开分式, 整理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!^2 (2n)!!^2}{(2n)!!^2 (2n-1)!!^2 (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n)!^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

利用  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^\alpha$ ,  $\alpha$  为常数, 此处  $\alpha$  取  $\frac{1}{2}$ , 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2 \sqrt{2}}{(2n)! \sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

## 引理 2.6

$$a_n = \frac{n!e^n}{\sqrt{nn^n}}$$

单调递减, 收敛到某个正实数.

证明

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n e} = \frac{1}{e} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

设  $b_n := \ln(a_n)$ , 由 2.7 有

$$b_n - b_{n+1} = \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$$

令  $k = \frac{1}{2n+1} > 0$ , 得

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) - 1,$$

分析函数  $f(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$  知  $f'(x) > 0, x \in (0, 1), f\left(\frac{1}{2n+1}\right) > 0$ , 即可证明  $b_n$  单调减, 因此  $a_n$  单调减.

再由类似的分析方式可以得到

$$(b_n - b_{n+1}) - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) - 1 + \frac{k^2}{k^2 - 1} < 0,$$

因此

$$b_n - \frac{1}{4n} < b_{n+1} - \frac{1}{4(n+1)}.$$

因此  $b_n > b_n - \frac{1}{4n} > b_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow a \geq e^{0.75} > 0$ .

$a_n$  单调减, 有正下界, 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  存在且  $a > 0$ .

由  $a > 0$  才可以用极限的四则运算 (除法), 以及由引理 2.5

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{\left(\frac{n!e^n}{\sqrt{nn^n}}\right)^2}{\frac{(2n)!e^{2n}}{\sqrt{2n}2n^{2n}}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

由此证明了 Stirling 公式.

更正式地表示无穷大之间的关系需要引入两个记号:  $O$  和  $o$ .

**定义 2.6** 设  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  是定义在  $\mathbb{N}^*$  上的数列. 如果  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$  则称  $a_n$  是  $b_n$  的  $o(b_n)$  记作  $a_n = o(b_n)(n \rightarrow \infty)$ .

设  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  是定义在  $\mathbb{N}^*$  上的数列. 如果  $\exists M, \frac{a_n}{b_n} \leq M$  对充分大的  $n$  成立则称  $a_n$  是  $b_n$  的  $O(b_n)$  记作  $a_n = O(b_n)(n \rightarrow \infty)$ .

$o, O$  仅表示相对的大小关系, 只有在极限意义下才有意义.  $o(a_n)$  的含义实际是所有  $a_n$  的

无穷小量组成的集合, 因此前面的等号实际含义是  $\in$ . 具体而言

$$o(a_n) = \left\{ t_n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{a_n} = 0 \right\}, a_n = o(b_n) \Leftrightarrow a_n \in o(b_n).$$

我们试图用阶定量的表示这种无穷小的比较关系, 以一个有显式表达式的数列  $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 10$  为例, 我们可以说  $a_n = 10 + o(1)$ , 也可以说  $a_n = 10 + \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})$ , 也可以说  $a_n = 10 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$ . 从此可以直观的看出我们逐渐给出了对  $a_n$  更精确的估计, 可以说这叫做  $a_n$  的渐近展开, 或者  $a_n$  的估计.

对于那些不能够给出显式表达式的数列, 如何求解其高阶渐近估计, 这是一个相当复杂的问题, Stolz 定理是解决这类问题的一个重要工具.

**习题 1.2.16** 设  $a_1, a_2, \dots, a_m$  为  $m$  个正数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

**解** 设  $a_k = \max(a_1, a_2, \dots, a_m)$  则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = a_k = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

## 2.6 Stolz 定理及其应用

**定理 2.5 ( $\frac{\infty}{\infty}$  型 Stolz 定理)** 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是两个数列, 且  $\{b_n\}$  严格递增趋于  $+\infty$ . 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A,$$

其中  $A$  可以是实数, 也可以是  $+\infty$  或  $-\infty$ .

**注** 完整的利用 Stolz 定理的计算过程要求先证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$  极限存在并求得  $A$ , 然后

再利用 Stolz 定理求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ . 不过不严谨的直接写出  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$  也是能接受的.

**注** 当  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \infty$  时, Stolz 定理不一定成立. 反例可取  $a_n = (-1)^n, b_n = n$ .

**证明** 先证明  $A$  是有限数 (实数) 的情况. 不妨设  $\{b_n\}$  是正项数列. 假设条件成立对任意正数  $\varepsilon$  存在自然数  $N_1$  使得

$$A - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < A + \varepsilon, \quad n > N_1.$$

由于  $\{b_n\}$  严格单调增所以

$$(A - \varepsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (A + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n), \quad n > N_1.$$

在上面不等式中分别列出  $N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, n - 1$  并将所得不等式相加得到

$$(A - \varepsilon)(b_n - b_{N_1+1}) < a_n - a_{N_1+1} < (A + \varepsilon)(b_n - b_{N_1+1}).$$

同除以  $b_n$  并整理得

$$\frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} - \frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} - \varepsilon \left(1 - \frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right) < \frac{a_n}{b_n} - A < \frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} - \frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} + \varepsilon \left(1 - \frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right).$$

注意到  $\{b_n\} \rightarrow +\infty$  对固定的  $N_1$  存在自然数  $N_2$  使得当  $n > N_2$  时

$$-\varepsilon < \frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} - \frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} < \varepsilon.$$

取  $N = \max\{N_1, N_2\}$  于是当  $n > N$  时有

$$-2\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - A < 2\varepsilon.$$

若  $A = +\infty$  此时由题设及保号性  $\Rightarrow \exists N_2, N \geq N_2$ , 使得

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n, \quad n > N.$$

并且  $a_{n+1} - a_n > b_{n+1} - b_n, \quad a_n - a_{n-1} > b_n - b_{n-1}, \dots, a_{N_2+1} - a_{N_2} > b_{N_2+1} - b_{N_2}$ . 从而得  $a_{n+1} - a_{N_2} > b_{n+1} - b_{N_2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = +\infty$  且  $\{a_n\}$  严格增加.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty.$$

**定理 2.6 ( $\frac{0}{0}$  型 Stolz 定理)** 设  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是两个收敛于 0 的数列, 且  $\{b_n\}$  是严格递减数列. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A,$$

其中  $A$  可以是实数, 也可以是  $+\infty$  或  $-\infty$ .

**例 2.10** 证明:

1. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$ ;
2. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a$ .
3. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \geq 0$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ .

解

1. 令  $b_n = n, \alpha_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , 则  $b_n \uparrow +\infty$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n - (n-1)} = a$ .

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \exp \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} \right) = \exp \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n - n + 1} \right) = e^{\ln a} = a.$$

$$3. \text{ 改变有限项, 不会影响极限值, 不妨假设 } a_0 = 1, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0} \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = a.$$

例 2.11 设  $a_1, a_2, \dots, a_m$  是  $m$  个常数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_1|^n + |a_2|^n + \cdots + |a_m|^n} = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_m|\}.$$

解 设  $h = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_m|\}$ , 则  $h < (|a_1|^n + |a_2|^n + \cdots + |a_m|^n)^{\frac{1}{n}} < m^{\frac{1}{n}} h$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} m^{\frac{1}{n}} h = h$ . 由夹逼定理, 得证.

例 2.12

$$\begin{aligned} 1. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2}; \\ 2. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}; \\ 3. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}. \\ 4. & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}. \end{aligned}$$

解 仅证 4,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k - \cdots}.$

$\cdots$  中的项形如  $n^{k-1}, n^{k-2}, \dots$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-1}}{n^{k+1}} = 0$ . 且至多有  $k$  项. 有限项极限相加, 可以用极限的四则运算.

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k - \cdots} = \frac{1}{(k+1) + \lim_{n \rightarrow \infty} (C_{k+1}^2 \frac{1}{n} + \cdots + C_{k+1}^{k+1} \frac{1}{n^k})} = \frac{1}{k+1}.$$

定理 2.7 常用的平均值不等式:

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是  $n$  个正数, 则有:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

取等号的条件是  $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ .

这几个平均数分别名为:

$$\text{调和平均数} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}},$$

$$\text{几何平均数} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

$$\text{算术平均数} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

$$\text{平方平均数} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

## 2.7 实数集完备性的五个等价命题

以下五个命题等价, 且都说明了实数集是完备的.

**定理 2.8 (确界存在原理)** 有上(下)界的非空实数集  $E$  必有上(下)确界  $\sup E(\inf E)$ .

**定理 2.9 (单调有界极限存在准则)** 若数列  $\{a_n\}$  单调增(减)且有上(下)界, 则  $\{a_n\}$  收敛. 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n(\inf a_n)$ .

**定理 2.10 (闭区间套定理)** 若  $\{[a_n, b_n]\}$  是一列闭区间, 满足  $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , 则存在唯一的实数  $\xi$ , 使得  $\xi \in [a_n, b_n]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

**定理 2.11 (列紧性原理)** 若  $\{a_n\}$  有界且含无穷多项, 则  $\{a_n\}$  必有收敛子列  $\{a_{n_k}\}$ .

**定理 2.12 (柯西 (Cauchy) 准则)** 数列  $\{a_n\}$  收敛的充要条件是: 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$ .

**证明**

$1 \Rightarrow 2$  设  $a_n$  单减且有下界  $m$ ,  $a_n \geq m > m - \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}^*$ , 由确界存在原理,  $E = \{a_n\}$  有下确界, 记为  $a = \inf E$ , 则  $a \geq m$ , 且  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a - \varepsilon < a_n \leq a$ , 即  $|a_n - a| < \varepsilon$ . 由定义,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \inf \{a_n\}$ .

$2 \Rightarrow 3$  所有区间的左端点构成的数列  $\{a_n\}$  是单调递增有上界的, 故有极限, 记为  $a$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . 同理, 所有区间的右端点构成的数列  $\{b_n\}$  是单调递减有下界的, 故有极限, 记为  $b$ , 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . 因此  $a - b = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ , 即  $a = b$ . 即证存在  $\xi = a = b$ . 若存在另一实数  $\eta \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$ , 则  $\xi \leq \eta \leq \xi$ , 即  $\xi = \eta$ . 故唯一性得证.

$3 \Rightarrow 4$  设  $|a_n| < M$ , 取  $[\alpha_1, \beta_1] = [-M, M]$ , 将其二分为  $[\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_1, \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}] \cup [\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \beta_1]$ , 两个子区间中至少有一个子区间包含无穷多个  $a_n$  的项, 记为  $[\alpha_2, \beta_2]$ , 重复上述过程, 得到  $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = \frac{M - (-M)}{2^n} = 0$ , 由闭区间套定理, 存在唯一的实数  $\xi$ , 使得  $\xi \in [\alpha_n, \beta_n], n = 1, 2, \dots$ .

然后构造收敛子列  $\{a_{n_k}\}$ , 令  $n_1 = 1$ , 由于区间  $[\alpha_2, \beta_2]$  中包含无穷多个  $a_n$  的项, 可以找到  $n_2 > n_1$ , 使得  $a_{n_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$ , 以此类推, 可以找到  $n_3 > n_2 > n_1$ , 使得  $a_{n_3} \in [\alpha_3, \beta_3]$ , 重复此过程, 得到一个收敛子列  $\{a_{n_k}\}$ .

$4 \Rightarrow 5$  必要性是容易证明的, 因为  $\{a_n\}$  收敛, 对于任意的一个正数  $\varepsilon$ , 存在整数  $N$ , 使得当  $m, n > N$  时  $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ , 因此就有  $|a_m - a_n| < \varepsilon$ .

下面证明充分性. 对于正数  $\varepsilon = 1$ , 存在整数  $N_1$ , 使得当  $m, n > N_1$  时, 有  $|a_m - a_n| < 1$ . 令

$$M = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1}|, |a_{N_1+1}|\},$$

则有  $|a_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$  这说明  $\{a_n\}$  是有界的. 由列紧性原理存在收敛的子列  $\{a_{n_k}\}$ . 因为  $\{a_n\}$  是 Cauchy 列, 所以对于任意意的  $\varepsilon$ , 存在整数  $N_2$ , 使得当  $m, n > N_2$  时, 有  $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 对于这个  $\varepsilon$ , 因为  $\lim a_{n_k} = a$ , 存在一个整数  $K$ , 使得当  $k > K$  时, 有  $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ; 特别取一个  $n_k$  使得  $n_k > N_2$  且  $n > N_2$  时,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

Cauchy 收敛准则的强大之处在于, 它不要求事先猜出极限值. 也正是如此, 在我们说明一个数列发散的时候, 通常不利用极限定义的否定形式 (可以自行尝试一下这有多么繁琐), 而是利用 Cauchy 收敛准则的否命题.

**命题 2.16 (Cauchy 收敛准则的否命题)** 设数列  $\{a_n\}$ , 则  $\{a_n\}$  发散的充要条件是: 存在  $\varepsilon_0 > 0$ , 使得对  $\forall N \in \mathbb{N}^*$ , 存在  $n_0, m_0 > N$ , 有  $|a_m - a_n| \geq \varepsilon_0$ .

**例 2.13** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$  不存在

**证明** 对于任意  $n$ , 存在  $p_1 = \left\lfloor \frac{n}{\pi} \right\rfloor \pi + \frac{3}{2}\pi, p_2 = \left\lfloor \frac{n}{\pi} \right\rfloor \pi + \frac{5}{2}\pi > \left\lfloor \frac{n}{\pi} + 1 \right\rfloor \pi > n$ , 使得

$$|a_{p_1} - a_n|, |a_{p_2} - a_n| > \frac{1}{2}$$

二者至少有一成立.

**注** 其实我们不满足于这个结果, 在深入的学习中会发现这个数列的极限点几乎可以取遍  $[-1, 1]$ , 或者对于任  $[-1, 1]$  中的点, 都可以找到一个子列收敛到这个点. 这个问题的构造从知识结构上现在就可以解决, 请大家尝试进行证明.

**习题 1.2.17** 证明下列数列收敛:

- (1)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ ;
- (2)  $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$ ;
- (3)  $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots + \alpha_n q^n$ , 其中  $|\alpha_k| \leq M, (k = 1, 2, \dots)$ , 而  $|q| < 1$ ;
- (4)  $a_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$ .

**解**

(1) 由  $1 - \frac{1}{2^n} < 1$ , 可知  $\{a_n\}$  单调减, 且  $a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛.

(2) 由  $a_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} < \frac{1}{2}$ , 可知  $\{a_n\}$  有上界, 且  $a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛.

(3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lceil \log_{|q|} \frac{\varepsilon(1-|q|)}{2M} \right\rceil + 1$ , 则当  $m, n > N$  时,

$$|a_m - a_n| = |\alpha_{n+1} q^{n+1} + \cdots + \alpha_m q^m| \leq M(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \cdots) = M \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon.$$



(4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 取  $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ , 则当  $m, n > N$  时,

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m}{m(m+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

例 2.14 证明

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} = 2.$$

解 设  $a_1 = \sqrt{2}$ ,  $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$ , 则  $\{a_n\}$  单调增, 且  $a_n < 2$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a = \sqrt{2 + a} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$ .

习题 1.2.18 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

- (1)  $a_n = \frac{n}{c^n}$ , ( $c > 1$ );
- (2)  $a_1 = \frac{c}{2}$ ,  $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$  ( $0 \leq c \leq 1$ );
- (3)  $a > 0$ ,  $a_0 > 0$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right)$  (提示: 先证明  $a_n^2 \geq a$ );
- (4)  $a_0 = 1$ ,  $a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}$ ;
- (5)  $a_n = \sin \sin \cdots \sin 1$  ( $n$  个  $\sin$ ).

解

- (1) 由  $a_n > 0$ , 且  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{c} < 1$  在充分大时成立, 注 详细而言, 当  $n > \frac{1}{c-1}$  时, 有  $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ . 但数列极限与有限项无关, 我们只需要考虑充分大的  $n$ .  
可知  $\{a_n\}$  在充分大时单调减, 因此  $\{a_n\}$  收敛. 又由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{c^{n+1} - c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n(c-1)} = 0.$$

(2)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)$$

由  $a_2 - a_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 > 0$ , 可递归的得知  $a_{n+1} - a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  单调增, 且  $a_1 < c$ , 归纳的可得  $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$ , 因此  $\{a_n\}$  有上界, 故  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$ , 又由  $a_n > 0$ , 可知  $a = 1 - \sqrt{1-c}$ .

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left( \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{a}{a_n} \right) \right)^2 \geq a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

因此  $\{a_n\}$  在  $n \geq 1$  时单调减, 且有下界  $\sqrt{a}$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a =$

$$(4) \quad \frac{1}{2} \left( a + \frac{a}{a} \right) = \sqrt{a}.$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} - \left( 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} \right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1} + 1)^2}$$

由  $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$  归纳的可得  $1 + a_n - a_n^2 > 0$ , 因此  $a_n - a_{n-1} > 0$ , 即  $\{a_n\}$  单调增, 且  $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  有上界, 因此  $\{a_n\}$  收敛. 递推式两侧取极限, 得

$$a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(5)  $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$ , 因此  $\{a_n\}$  单调减, 且  $a_n > 0$ , 因此  $\{a_n\}$  收敛. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则  $a = \sin a \Rightarrow a = 0$ .

## 2.8 综合练习

**习题 1.2.19** 设  $a_n \leq a \leq b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ . 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

解 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ , 对  $\forall \varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $|a_n - b_n| < \varepsilon$ . 又由  $a_n \leq a \leq b_n$ , 可知  $|a_n - a| = a - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$ , 同理  $|b_n - a| < \varepsilon$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ .

**例 2.15** 设  $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ . 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$ .

证明

(1)  $a = 0$  时,

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \frac{a_n}{1} \rightarrow 0.$$

由夹逼定理, 得证.

(2)  $a > 0$  时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = a,$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

由夹逼定理, 得证.

**习题 1.2.20** 证明: 若  $a_n > 0$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**解** 由 2.15, 可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{l} < 1$ . 因此  $\exists r = \frac{1 + \frac{1}{l}}{2} \in (0, 1)$ , 使得当  $n$  充分大时,  $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} < r$ . 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} < r^n,$$

即  $a_n < a_1 r^n$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**习题 1.2.21** 设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  是正数列, 满足  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, n = 1, 2, \dots$ . 求证: 若  $\{b_n\}$  收敛, 则  $\{a_n\}$  收敛.

**解** 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ , 则由  $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = a_1 \cdot \frac{b_n}{b_1}$  可知  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$ , 由原式有  $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$ , 因此  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  单调减, 且  $\frac{a_n}{b_n} > 0$ , 因此  $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$  收敛, 设

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = bc$ .

**习题 1.2.22** 利用极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1};$$

$$(2) a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1};$$

$$(3) a_n = \left(\frac{1+2n}{2+2n}\right)^{2n^3};$$

$$(4) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}.$$

简要说明: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ , 故  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  的任意子列  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$  也收敛于  $e$ . 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为  $\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$  的形式, 从而求出极限. 在此过程中

**命题** 设数列  $\{a_n\}$  收敛于  $a, a_n > 0, a > 0$ .  $\{b_n\}$  收敛于  $b$ . 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$ .

也相同有用.

**解**

$$(1) \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \Big|_{m=2n+1} \rightarrow e;$$

$$(2) \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{n-2 \cdot \frac{n+1}{n-2}} = e^1 = e;$$

$$(3) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2) \cdot \left(-\frac{n}{n+2}\right)} = e^{-1};$$

$$(4) \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3 \cdot 2} = e^2.$$

**习题 1.2.23** 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , 且  $|b_n| \geq b > 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .

解 对  $\forall M > 0$ , 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ , 存在  $N \in \mathbb{N}^*$ , 使得当  $n > N$  时,  $a_n > \frac{M}{b}$ . 又由  $|b_n| \geq b > 0$ , 可知  $|a_n b_n| \geq a_n |b| > M$ . 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .

习题 1.2.24 确定  $n \rightarrow \infty$  时,  $\sqrt[n]{n!}$  与  $n \sin \frac{n\pi}{2}$  ( $n \geq 1$ ) 是否有界, 是否趋于无穷大.

解  $\sqrt[n]{n!}$  无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \rightarrow \infty.$$

无界, 但是不趋于无穷大. 当  $n = 4k + 1$  时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = 4k + 1$ , 趋于无穷大; 当  $n = 4k + 3$  时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = -(4k + 3)$ , 趋于负无穷大; 当  $n$  为偶数时,  $n \sin \frac{n\pi}{2} = 0$ .

习题 1.2.25 设数列  $\{a_n\}$  由  $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$  ( $n \geq 1$ ) 定义, 证明:  $a_n \rightarrow +\infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

解 由  $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \frac{1}{a_n}(a_n + a_n + \frac{1}{a_n}) = 2 + \frac{1}{a_n^2} > 2$ , 可知  $a_n^2 > 2(n-1)$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

## Lec 3 函数极限

### 三角函数, 反三角函数与双曲函数

正割函数  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ , 余割函数  $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ , 余切函数  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ . 六个三角函数之间有如下关系:

$$(1) \sin x = \tan x \cdot \cos x$$

$$(2) \cos x = \sin x \cdot \cot x$$

$$(3) \tan x = \sin x \cdot \sec x$$

$$(4) 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$(5) 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$(6) \sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$$

$$(7) \sec 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$$

$$(8) \csc 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{2 \tan x}$$

$y = \sin x$  在  $R$  上不单调, 不存在反函数. 我们取  $y = \sin x$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上的反函数, 记为  $y = \arcsin x$ . 因此  $f(x) = \sin(\arcsin x)$ ,  $g(x) = \arcsin(\sin x)$ , 都不一定等于  $x$ .

反三角函数有如下相互关系:

$$(1) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$(3) \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

正割函数  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ , 余割函数  $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ , 余切函数  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ . 六个三角函数之间有如下关系:

$$(1) \sin x = \tan x \cdot \cos x$$

$$(2) \cos x = \sin x \cdot \cot x$$

$$(3) \tan x = \sin x \cdot \sec x$$

$$(4) 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$(5) 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$(6) \sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$$

$$(7) \sec 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$$

$$(8) \csc 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{2 \tan x}$$

双曲正弦函数  $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , 双曲余弦函数  $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ , 双曲正切函数  $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . 双曲函数有如下性质:

$$(1) \sinh(-x) = -\sinh x$$

$$(2) \cosh(-x) = \cosh x$$

$$(3) \sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad (4) \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$(5) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad (6) \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$(7) \cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x \quad (8) \sinh' x = \cosh x$$

$$(9) \cosh' x = \sinh x$$

### 3.1 函数极限的定义

之前我们以  $\varepsilon$ - $N$  语言定义了数列极限,

**定义 3.1 (数列极限)**

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n > M.$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n < -M.$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n| > M.$

类似地, 我们可以用  $\varepsilon$ - $\delta$  语言定义函数极限.

**定义 3.2** 设  $x_0$  为常数, 函数在  $x_0$  处的极限为  $a$  定义为:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

若  $x$  从大于  $x_0$  的一侧趋近于  $x_0$ , 则称为  $x_0$  的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon;$$

若  $x$  从小于  $x_0$  的一侧趋近于  $x_0$ , 则称为  $x_0$  的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

考虑  $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$ ,  $\beta$  可以是常数  $A, +\infty, -\infty, \infty$ .  $\alpha$  可以是常数  $x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$ . 一共有 24 种情况. 我们全部列举如下:

- (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
- (2)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
- (3)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
- (4)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$
- (5)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > M.$
- (6)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > M.$
- (7)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$
- (8)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -M.$

- (9)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
- (10)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
- (11)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
- (12)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
- (13)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
- (14)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
- (15)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
- (16)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
- (17)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
- (18)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
- (19)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
- (20)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
- (21)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
- (22)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
- (23)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
- (24)  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$

注 也有的时候将函数  $f(x)$  在  $x_0$  处的左极限记为  $f(x_0 - 0)$ , 右极限记为  $f(x_0 + 0)$ .

**定理 3.1**  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$  ( $x_0$  为常数)

**证明**  $\Rightarrow$ :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$  即对  $\forall 0 < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 < x < x_0 + \delta$  有  $|f(x) - a| < \varepsilon$ , 即  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a.$  同理可证  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a.$

$\Leftarrow$ :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$  对上述  $\varepsilon, \exists \delta_2 > 0, \forall x, x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$  取  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , 则  $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$  即  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$

**定理 3.2**  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

**证明** 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则  $x \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0.$  即  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = a \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = a = \lim_{t \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

上述最后一个等式由  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{t \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  给出.

**例 3.1**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

## 3.2 函数极限的四则运算法则

**定理 3.3** 设  $x_0, a, b, c_1, c_2$  为常数, 令  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ , 则:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 a + c_2 b$ ;
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = a \cdot b$ ; 特别地,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = a^2$ ;
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$ .

**证明**

1. 目的时要证明对于任意的正数  $\epsilon$ , 能够找到一个正数  $\delta$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时,  
 $|(c_1 f(x) + c_2 g(x)) - (c_1 a + c_2 b)| \leq \epsilon$ .

由极限的定义, 存在  $\delta_1, \delta_2$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时,

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|c_1|},$$

当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时,

$$|g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|c_2|}.$$

取  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 同时有

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|c_1|}, \quad |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|c_2|},$$

因此有

$$|c_1 f(x) + c_2 g(x) - (c_1 a + c_2 b)| = |c_1(f(x) - a) + c_2(g(x) - b)| \leq |c_1||f(x) - a| + |c_2||g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

2. 证明类似于第一小题。对于任意的正数  $\epsilon$ , 存在  $\delta_1$  和  $\delta_2$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta_1$  时,

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|b|},$$

当  $0 < |x - x_0| < \delta_2$  时,

$$|g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|a|}.$$

取  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ , 则当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 同时有

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|b|}, \quad |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|a|},$$

因此有

$$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - af(x) + af(x) - ab| \leq |f(x)||g(x) - b| + |g(x) - b||f(x) - a|.$$

由于  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $x_0$  附近连续, 故当  $x \rightarrow x_0$  时,  $|f(x)|$  和  $|g(x)|$  被有界地控制。因此我们有

$$|f(x)g(x) - ab| < \epsilon.$$



3. 因为  $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0$ , 我们只需证明数列  $\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}$  收敛于  $\frac{1}{b}$ . 假设  $b > 0$ , 则

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{g(x) - b}{g(x)b} \right|.$$

由于  $g(x)$  收敛于  $b$ , 一方面对于正数  $b/2 > 0$ , 存在  $\delta_1$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta_1$  时,

$$|g(x) - b| < \frac{b}{2},$$

另一方面, 对于任意给定的正数  $\epsilon$ , 存在  $\delta_2$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta_2$  时,

$$|g(x) - b| < \frac{b^2 \epsilon}{2}.$$

所以, 当  $|x - x_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  时,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| \leq |g(x) - b| \cdot \frac{2}{b^2} \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}.$$

函数极限的性质与数列极限的性质类似, 即函数极限有**唯一性**、**局部有界性**、**保号性**、**保序性**. 其中有界性在函数极限中表现为**局部有界性**, 即函数在某点的极限存在, 则该函数在该点的某个邻域内有界. 这与数列极限的有界性表现上略有不同, 这里给出证明:

**定理 3.4 (函数极限的局部有界性)** 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $I$ , 点  $x_0 \in I$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有界, 即  $\exists \delta > 0, \exists M > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$ .

**证明** 局部有界性的证明: 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $I$ , 点  $x_0 \in I$ , 且  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon \Leftrightarrow |f(x)| < |a| + \epsilon$ . 因此, 函数  $f(x)$  在  $x_0$  的某邻域内有界, 但  $f(x)$  在整个定义域  $I$  内未必有界.

若函数  $f(x)$  在  $x_0$  处有定义, 且  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , 则称  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 若  $f(x)$  在区间  $I$  上每一点都连续, 则称  $f(x)$  在  $I$  上连续. 当  $f(x)$  在  $x_0$  处连续时, 有  $f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , 即连续函数的极限与函数值可以交换次序.

幂 ( $x^\alpha, \alpha$  为常量), 指数 ( $a^x, a > 0$ ), 三角函数 ( $\sin x, \cos x, \tan x$ ), 对数函数 ( $\log_a x, a > 0, a \neq 1$ ), 指数函数 ( $e^x$ ), 反三角函数 ( $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ ), 双曲函数 ( $\sinh x, \cosh x, \tanh x$ ) 等函数在其定义域内均连续. 一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.

### 3.3 3 个重要的函数极限及其证明

#### 命题 3.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

**证明** 首先考虑右极限。设  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , 由于  $\sin x > 0$ , 由引理易知

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{即} \quad \frac{\sin x}{x} < \frac{\cos x}{x} < 1.$$

因此

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \left( \sin \frac{x}{2} \right)^2 < 2 \sin \frac{x}{2} < x.$$

所以, 由两边夹的得到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

当  $x \rightarrow 0$  时, 令  $y = -x$ , 则  $y \rightarrow 0^+$ , 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

#### 命题 3.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

**证明** 由于对于任意的  $x > 1$ , 有  $[x] \leq x < [x] + 1$ , 以及

$$\left( 1 + \frac{1}{[x]} \right)^x < \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x < \left( 1 + \frac{1}{[x] + 1} \right)^x,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{[x]} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{[x] + 1} \right)^x = e.$$

根据两边夹定理, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

当  $x \rightarrow \infty$  时, 令  $y = -x$ , 则  $y \rightarrow -\infty$ , 利用上面结果, 就有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{1 - y} \right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{y - 1} \right)^{y-1} = e.$$

这就证明了

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

## 命题 3.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

证明

1. 当  $m > n$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} + \cdots + a_n x^{n-m}}{b_0 + b_1 x^{m-n-1} + \cdots + b_m x^{m-n}} = \frac{a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0}{b_0 + b_1 \cdot 0 + \cdots + b_m \cdot 0} = \frac{0}{b_0} = 0.$
2. 当  $m = n$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} = \frac{a_0}{b_0}.$
3. 当  $m < n$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \infty.$

## 3.4 函数无穷大的比较

命题 3.4 (常用函数无穷大) 设  $a, A, m$  为常数, 且  $a > 1, \alpha > 0, m > 0$ , 证明:  $x^x \gg a^x \gg x^\alpha \gg (\ln x)^m$ , 在  $x \rightarrow +\infty, x > 0, x \in R$  时成立.

证明

1. 设  $n \leq x < n+1$ , 则  $\begin{cases} n^n \leq n^x < (n+1)^n, \\ a^n \leq a^x < a^{n+1}, \end{cases} \Rightarrow \frac{a^n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{a^x}{x^x} < \frac{a^{n+1}}{n^n}$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时, 有  $n \rightarrow \infty$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{(n+1)^{n+1}} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty$ , 故  $x^x \gg a^x$ .
2. 设  $n \leq x < n+1$ , 则  $\frac{n^\alpha}{a^{n+1}} < \frac{x^\alpha}{a^x} < \frac{(n+1)^\alpha}{a^n}$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时, 有  $n \rightarrow \infty$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^{n+1}} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty$ , 故  $x^\alpha \gg a^x$ .
3. 设  $n \leq x < n+1$ , 则  $\frac{\ln n}{(n+1)^\alpha} < \frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{\ln(n+1)}{n^\alpha}$ , 当  $x \rightarrow \infty$  时, 有  $n \rightarrow \infty$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{(n+1)^\alpha} = 0$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{x^\alpha} = +\infty$ , 故  $x^\alpha \gg a^x$ .

例 3.2 证明:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0, a \neq 1.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \neq 0.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 6} \right)^{4x} = e^{12}.$$

上述例 (1) ~ (6) 今后可作为公式直接使用, 并可记为: 当  $x \rightarrow 0$  时,

- |  |   |
|--|---|
| (1) $\frac{1 - \cos x}{x^2} \sim \frac{1}{2};$ | (2) $\arcsin x \sim x;$                     |
| (3) $\ln(1+x) \sim x;$                         | (4) $e^x - 1 \sim x;$                       |
| (5) $a^x - 1 \sim \ln a \cdot x;$              | (6) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x.$ |

证明

1.  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}.$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\arcsin x} = 1.$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$
4. 令  $e^x - 1 = u$ , 则  $x \rightarrow 0$  时,  $u \rightarrow 0$ , 且  $x = \ln(1+u)$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \ln(1+u)} = 1.$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \ln a$ , 令  $u = x \ln a$ , 则  $x \rightarrow 0$  时,  $u \rightarrow 0$ , 且  $x = \frac{u}{\ln a}$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \ln a.$
6. 令  $u = \alpha \ln(1+x)$ , 则  $x \rightarrow 0$  时,  $u \rightarrow 0$ , 且  $x = \frac{u}{\alpha}$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha = \alpha.$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\ln \cos x}{x} \right) = \exp \left( \frac{1}{2} \frac{\ln \cos x}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x} \right) = \exp \left( \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1) \right) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$
8.  $\frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 6} = 1 + \frac{3x - 11}{x^2 + 6} \rightarrow 1 + 0 = 1$ , 故  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 6} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{3x - 11}{x^2 + 6} \right)^{\frac{x^2 + 6}{3x - 11} \cdot \frac{3x - 11}{x^2 + 6} \cdot 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3x - 11}{x^2 + 6} \cdot 4x} = e^{12}.$

其中 7, 8 为底数与指数皆为变量, 且底数的极限值为 1, 指数的极限值为  $+\infty$ , 这种形式的极限求解时, 可以尝试取对数, 然后利用对数函数的连续性, 将指数提取出来, 再求极限. 我们称这种形式的极限为  $1^\infty$  型不定式.

不定式是相对于  $\alpha(x)^{\beta(x)}$ ,  $\alpha(x)$ ,  $\beta(x)$  都有非 0 常数极限而言的, 后者很好求极限. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \beta$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)^{\beta(x)} = \alpha^\beta$ . 当  $\alpha, \beta$  中有  $0, +\infty$  时, 则需要仿照 7, 8 的方法进行求解.

### 3.5 函数 $y = f(x)$ 的连续性

设  $x_0$  是常数,

(1)  $f(x)$  在  $x_0$  处连续  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$ .

(2)  $f(x)$  在  $x_0$  处间断  $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ : 称  $x_0$  为  $f(x)$  的间断点.

$f(x)$  的间断点分类:  $\begin{cases} \text{(I)} f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) \text{ 均存在的间断点为第一类间断点;} \\ \text{(II)} f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) \text{ 至少有一个不存在的间断点为第二类间断点.} \end{cases}$

**例 3.3** 六类基本初等函数 (幂, 指数, 三角, 对数, 指数, 反三角, 双曲) 在其定义域内均连续. 如  $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  在  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  时连续, 且从  $f(\frac{\pi}{2} - 0) = +\infty, f(\frac{\pi}{2} + 0) = -\infty$  可知  $f(x)$  在  $x = \frac{\pi}{2}$  处第二类间断点.

又如

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

在  $x = 0$  处,  $f(0 - 0) = -1, f(0 + 0) = 1, f(0) = 0$ , 故  $f(x)$  在  $x = 0$  处第一类间断点.(跳跃间断点)

**定理 3.5** 连续函数的和, 差, 积, 商仍是连续函数.

**例 3.4** 设  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$  在区间  $I$  上连续, 且  $c_1, c_2, \dots, c_m$  为常数, 则线性组合  $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x)$  在  $I$  上连续. 这表明连续函数具有线性性.

**定理 3.6** 连续的函数  $y = f(x)$  若有反函数  $x = g(y)$  或写为  $y = g(x)$ , 则反函数  $y = g(x)$  也是连续函数. 理由: 函数与其反函数关于直线  $y = x$  对称.

**例 3.5**  $y = \sin x$  在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  上连续且单调增, 故有反函数  $x = \arcsin y$  在  $[-1, 1]$  上连续.

$y = \cos x$  在  $[0, \pi]$  上连续且单调减, 故有反函数  $x = \arccos y$  在  $[-1, 1]$  上连续且单调减.

$y = \tan x$  在  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  上连续且单调增, 故有反函数  $x = \arctan y$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续且单调增.

注 六个反三角函数都是有界变量

**例 3.6**  $e^x$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续且单调增, 故有反函数  $x = \ln y$  在  $(0, +\infty)$  上连续且单调增.

**定理 3.7** 连续函数的复合函数仍是连续函数.

**证明** 对于任意给定的正数  $\varepsilon$ , 因为  $f$  在  $u_0$  连续, 则存在一个正数  $\eta > 0$ , 使得当  $|u - u_0| < \eta$  时,

$$|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon.$$

对于上述  $\eta > 0$ , 又因为  $g$  在  $x_0$  连续, 所以下面存在一个正数  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$

时,

$$|g(x) - g(x_0)| = |u - u_0| < \eta.$$

于是, 当  $|x - x_0| < \delta$  时, 从上面两个不等式得到

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| = |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon,$$

即函数  $f(g(x))$  在  $x_0$  连续。

该定理也可以表示为下面形式

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right).$$

由六种基本初等函数经过有限次四则运算, 有限次符合运算的函数统称为初等函数.

**定理 3.8** 一切初等函数, 包括一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.(注: 初等函数的定义域中若存在孤立点  $x_0$ , 则  $f(x)$  在  $x_0$  处仍是连续的.)