

目录

第 1 章 衔接课	1
记号	1
映射, 有穷集, 无穷集与等势	1
笛卡尔积	5
等价关系,Cauchy 列与实数	6
开集与闭集	10
第 2 章 数列极限	13
数列极限的定义	13
数列极限存在的准则	16
数列极限的性质	17
数列极限的运算	20
高阶无穷大	30
Stolz 定理及其应用	35
实数集完备性的五个等价命题	38
综合练习	41
第 3 章 函数极限	44
函数极限的定义	45
函数极限的四则运算法则	47
3 个重要的函数极限及其证明	49
函数无穷大的比较	50
函数 $y = f(x)$ 的连续性	51

第 1 章 衔接课

记号

记号 (数集)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 为自然数集, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ 为正整数集.

$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ 为整数集.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^+ \right\}$ 为有理数集.

\mathbb{R} 为实数集.

记号 (大平行算数符号)

\sum 表示求和, 如 $\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

\prod 表示连乘, 如 $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$.

\bigcap 表示交集, 如 $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.

\bigcup 表示并集, 如 $\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$.

对于上述运算, 我们经常称 i 为**指标**, 称 $i = 1$ 与 $i = n$ 分别为**下限**与**上限**. 有时指标的取值范围以集合的形式给出, 如 $\sum_{i \in I} a_i$ 表示对所有 $i \in I$ 的 a_i 求和, 称 I 为**指标集**.

有时指标的个数不止一个, 如 $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij}$ 表示对所有 $1 \leq i \leq m$ 与 $1 \leq j \leq n$ 的 a_{ij} 求和, 即

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}.$$

正如 $0! = 1$ 一样, 我们规定 \sum 与 \prod 的空和与空积为:

$$\sum_{i \in \emptyset} a_i = 0, \quad \prod_{i \in \emptyset} a_i = 1.$$

映射, 有穷集, 无穷集与等势

定义 1.1 (映射) 设 A 与 B 为两个集合, 若对任意 $x \in A$, 都能唯一地指定一个 $y \in B$ 与之对应, 则称从 A 到 B 的这种对应关系为映射, 记为 $f: A \rightarrow B$, 并称 x 为自变量, $y = f(x)$ 为因变量.

A 称为映射 f 的定义域, A 在 f 映射下的像 $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset B$ 称为 f 的值域.

我们在验证一个对应关系是否是映射时, 或者说, 验证一个映射是否良定 (well-defined) 时, 需要验证两个条件:

- (1) 对任意 $x \in A$, 都能找到 $y \in B$ 与之对应.
- (2) 对任意 $x \in A$, 只能找到唯一的 $y \in B$ 与之对应.

前者称为映射的存在性, 后者称为映射的唯一性.

我们将从数集到数集的映射称为函数, 在这门课之中, 我们几乎只考虑从实数集 \mathbb{R} 到实数集 \mathbb{R} 的函数.

记号 对于映射

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto f(x)$$

我们用 \rightarrow 表示映射的范围, $A \rightarrow B$ 表示该映射是从集合 A 到集合 B 的映射. \mapsto 表示映射的具体规则, $x \mapsto f(x)$ 表示 x 在该映射下对应 $f(x)$.

定义 1.2 (单射) 设 A 与 B 为两个集合, 若映射 $f: A \rightarrow B$ 满足: 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为从 A 到 B 的单射.

定义 1.3 (满射) 设 A 与 B 为两个集合, 若映射 $f: A \rightarrow B$ 满足: 对任意 $y \in B$, 存在 $x \in A$, 使得 $f(x) = y$, 则称 f 为从 A 到 B 的满射.

定义 1.4 (双射) 设 A 与 B 为两个集合, 若映射 $f: A \rightarrow B$ 既是单射又是满射, 则称 f 为从 A 到 B 的双射. 也称为 A 与 B 之间存在一一对应关系.

例

$$f: [0, 1] \rightarrow [0, 1)$$

$$x \mapsto x, \quad x \notin \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

$$\frac{1}{k} \mapsto \frac{1}{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}^+$$

不难验证, f 为从 $[0, 1]$ 到 $[0, 1)$ 的双射. 我们将在[后续证明](#)之中使用该思想.

这个双射使用了类似希尔伯特酒店的操作: 通过将某些元素映射到不同位置, 展示了即使是“满”的区间也可以为新的元素腾出“空间”.

下面两个命题建议同学们自己先尝试证明, 以加深对双射的理解.

命题 1.1 双射存在逆映射, 且逆映射也是双射.

证明 设 $f: A \rightarrow B$ 为双射, 则对任意 $y \in B$, 存在唯一 $x \in A$, 使得 $f(x) = y$. 定义映射 $g: B \rightarrow A$ 为: 对任意 $y \in B$, 有 $g(y) = x$, 其中 x 为唯一满足 $f(x) = y$ 的元素. 则 g 为 f 的逆

映射. 我们常将 f 的逆映射记为 f^{-1} .

下面我们证明 g 为双射.

- (1) g 为单射: 对任意 $y_1, y_2 \in B$, 当 $y_1 \neq y_2$ 时, 设 $x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2)$, 则 $f(x_1) = y_1 \neq y_2 = f(x_2)$, 由 f 为单射可知, $x_1 \neq x_2$, 即 $g(y_1) \neq g(y_2)$, 所以 g 为单射.
- (2) g 为满射: 对任意 $x \in A$, 设 $y = f(x)$, 则 $y \in B$, 且 $g(y) = g(f(x)) = x$, 所以对任意 $x \in A$, 都存在 $y \in B$, 使得 $g(y) = x$, 所以 g 为满射.

命题 1.2 双射的复合仍为双射.

证明 设 $f: A \rightarrow B$ 与 $g: B \rightarrow C$ 均为双射, 则对任意 $z \in C$, 存在唯一 $y \in B$, 使得 $g(y) = z$, 又对该 y , 存在唯一 $x \in A$, 使得 $f(x) = y$. 定义映射 $h: A \rightarrow C$ 为: 对任意 $x \in A$, 有 $h(x) = g(f(x))$. 则 h 为从 A 到 C 的映射. 我们常将 f 与 g 的复合记为 $g \circ f$, 表示先用 f 作用 x , 再用 g 作用 $f(x)$, 从而得到 $g(f(x))$.

下面我们证明 h 为双射.

- (1) h 为单射: 对任意 $x_1, x_2 \in A$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 设 $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$, 则 $y_1 \neq y_2$, 又由 g 为单射可知, $g(y_1) \neq g(y_2)$, 即 $h(x_1) \neq h(x_2)$, 所以 h 为单射.
- (2) h 为满射: 对任意 $z \in C$, 存在唯一 $y \in B$, 使得 $g(y) = z$, 又对该 y , 存在唯一 $x \in A$, 使得 $f(x) = y$. 则 $h(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. 所以对任意 $z \in C$, 都存在 $x \in A$, 使得 $h(x) = z$, 所以 h 为满射.

定义 1.5 (有穷集) 设 A 为一个集合, 称 A 为有穷集, 若存在自然数 n , 使得 A 与 $\{1, 2, \dots, n\} = \{i \mid 1 \leq i \leq n, i \in \mathbb{N}\}$ 之间存在一一对应关系.

当 $n = 0$ 时, $\{1, 2, \dots, n\} = \emptyset$, 此时有穷集称为空集.

在此基础上, 我们才可以对有限集合的个数进行计数描述, 具体而言如下例

例 1.1 $A = \{a, b, c, d, e\}$ 为有穷集, 由于 A 与 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 之间存在一一对应关系, 因此 A 中有 5 个元素.

其中的一一对应关系可以取为:

$$f: A \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3, d \mapsto 4, e \mapsto 5.$$

f 是一个双射, 也可以取为:

$$g: A \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad a \mapsto 3, b \mapsto 5, c \mapsto 1, d \mapsto 4, e \mapsto 2.$$

g 也是一个双射.

其中我们可以不在乎 A 与 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 之间具体的对应关系, 只在乎双射到 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的自然数 n . 这就是为什么我们说 A 中有 5 个元素.

顺带一提, $A = \{a, b, c, d, e\}$ 与 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的双射共有 $A_5^5 = 5! = 120$ 种, 这是 a, b, c, d, e

的全排列.

定义 1.6 (等势) 设 A 与 B 为两个集合, 若存在从 A 到 B 的双射, 则称 A 与 B 等势.

也就是说, A 是有穷集等价于: 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 A 与 $\{1, 2, \dots, n\}$ 等势.

记号 我们用 s.t. (such that) 来表示“使得”, 用 i.e. (id est) 来表示“也就是说”.

对于无穷集合, 我们给出两种定义方式:

定义 1.7 (无穷集) 设 A 为一个集合, 称 A 为无穷集, 若 A 不为有穷集.

定义 1.8 (无穷集) 设 A 为一个集合, 称 A 为无穷集, 若存在 A 的真子集 A' , 使得 A 与 A' 等势.

下面我们先承认 **定义 1.7** 是无穷集的定义, 证明上述两种定义方式是等价的.

证明 存在真子集与其等势一定是无穷集

考虑 A 满足: A 与某个真子集 A' 等势. 即 $\exists f: A \rightarrow A'$ 为双射. 使用反证法, 假设 A 为有穷集, 根据 **定义 1.5**, 则 $\exists n \in \mathbb{N}$, s.t. A 与 $\{1, 2, \dots, n\}$ 等势, 即存在双射 $g: A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

由 **命题 1.1** 与 **命题 1.2**, 可知 $g \circ f^{-1}: A' \rightarrow A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 为双射. 又由 $A' \subset A$, 可推出 $A' = A$, 这与 A' 为 A 的真子集矛盾.

其中最后的部分, 我们总结为以下命题

命题 1.3 给定某个 n , 若存在 $f: A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 为双射, 且对于 A 的某个子集 A' , 存在 $\tilde{f}: A' \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ 为双射, 则 $A' = A$.

该命题留作思考, 这里给出助教的证明.

证明 我们归纳的给出证明, 当 $n = 0$ 时, $\{1, 2, \dots, n\} = \emptyset$, 而空集只能双射到空集: 若 $\mu: \emptyset \rightarrow S, S \neq \emptyset$, 则 $\exists s \in S$, 考虑 $\mu^{-1}(s) \in \emptyset$ 可知矛盾. 因此 $A = \emptyset, A' = \emptyset$, 所以 $A' = A$.

当 $n = k$ 成立时, 即存在 $f: A \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 为双射, 且对于 A 的某个子集 A' , 存在 $\tilde{f}: A' \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ 为双射, 则 $A' = A$.

我们希望证明: 若存在 $g: B \rightarrow \{1, 2, \dots, k+1\}$ 为双射, 且对于 B 的某个子集 B' , 存在 $\tilde{g}: B' \rightarrow \{1, 2, \dots, k+1\}$ 为双射, 则 $B' = B$.

取 $b = \tilde{g}^{-1}(k+1) \in B'$, 则 \tilde{g} 将 $B' \setminus \{b\}$ 映射到 $\{1, 2, \dots, k\}$ 上. $g(b) \in \{1, 2, \dots, k+1\}$, 不难证明存在双射 $\tau: \{1, 2, \dots, k+1\} \setminus \{g(b)\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. 因此, 存在双射 $\tau \circ g: B \setminus \{b\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, 且 $B' \setminus \{b\} \subset B \setminus \{b\}$, 由 $n = k$ 时的归纳假设, 可知 $B' \setminus \{b\} = B \setminus \{b\}$, 从而 $B' = B$.

证明 无穷集一定存在真子集与其等势

即证明: 已知 A 是无穷集, 则不存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 A 与 $\{1, 2, \dots, n\}$ 等势.

由 $n = 0$ 时的情况可知, A 非空, 取 $a_1 \in A$, 设 $A_1 = A \setminus \{a_1\}$, 则 A_1 为 A 的真子集, 且不为有穷集. 于是 $A_1 \neq \emptyset$, 取 $a_2 \in A_1 \dots$ 依此类推, 可得 A 的一个真子集列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, 两两不等. 因

此构造出双射:

$$f: A \rightarrow A_1$$

$$x \mapsto x, x \notin \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$$

$$a_i \mapsto a_{i+1}, i = 1, 2, \dots$$

由此可知, A 与 A_1 等势.

接下来, 我们以定义 1.8 作为无穷集的定义, 证明上述两种定义方式是等价的. 这个证明过程留作思考, 这里给出助教的证明.

证明 A 存在等势真子集 $\Rightarrow A$ 不为有穷集

当 $A = \emptyset$ 时, A 不存在真子集.

当 $A \neq \emptyset$ 时, 设 $f: A \rightarrow A'$ 为双射, 其中 A' 为 A 的真子集. 取 $x_0 \in A \setminus A'$, 构造序列:

$$x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$$

则有:

$$(1) x_i \in A' \subset A, i = 1, 2, \dots,$$

$$(2) x_i \neq x_j, \forall i \neq j, i, j = 0, 1, 2, \dots$$

否则, 存在 $n, m \in \mathbb{N}, n > m \geq 0$, 使得 $x_n = x_m$, 则 $f(x_{n-1}) = f(x_{m-1})$, 由 f 为单射可知, $x_{n-1} = x_{m-1}$, 依此类推, 可知 $x_{n-k} = x_{m-k}, k = 1, 2, \dots, m$, 从而 $x_0 = x_{n-m} \in A'$, 这与 $x_0 \in A \setminus A'$ 矛盾.

由此得到了 A 的一个两两不同的无限子集 $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^+, A$ 都不与 $\{1, 2, \dots, n\}$ 等势: 否则 $\exists n \in \mathbb{N}^+, g: A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$. 考虑 $\{g(x_i)\}_{i=0}^{\infty}$ 两两不同, 且都属于 $\{1, 2, \dots, n\}$. 这就证明了 A 不是有穷集.

证明 A 存在等势真子集 $\Leftarrow A$ 不为有穷集

这与上述定义 1.7 定义下的无穷集一定存在真子集与其等势的证明过程完全一样.

笛卡尔积

定义 1.9 (笛卡尔积) 设 A 与 B 为两个集合, 则 A 与 B 的笛卡尔积为:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

其中 (a, b) 为有序对.

例 1.2 设 $A = \{1, 2\}, B = \{x, y, z\}$, 则

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (2, x), (2, y), (2, z)\}.$$

如果 A 与 B 均为有穷集, 且 A 中有 m 个元素, B 中有 n 个元素, 则 $A \times B$ 中有 $m \times n$ 个元素, 即

$$\#(A \times B) = \#A \times \#B.$$

给出一列集合 $\{A_i\}_{i=1}^n$, 则

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

其中 (a_1, a_2, \cdots, a_n) 为 n 元有序组.

例 1.3 $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$, \mathbb{R}^n 称为 n 维欧氏空间.

等价关系, Cauchy 列与实数

定义 1.10 (等价关系) 设 A 为一个集合, 若在 A 上定义了一个关系 \sim , 且对任意 $x, y, z \in A$, 均满足:

- (1) (自反性) $x \sim x$;
- (2) (对称性) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;
- (3) (传递性) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$;

则称 \sim 为 A 上的等价关系.

定义 1.11 集合 A 在等价关系 \sim 下的等价类为: 对任意 $a \in A$, 定义 $[a] = \{b \in A \mid b \sim a\}$, a 称为 $[a]$ 这个等价类的代表元.

注意到

$$[a] \cap [b] = \begin{cases} [a] = [b], & a \sim b \\ \emptyset, & a \not\sim b \end{cases}$$

证明

- (1) 若 $a \sim b$, 则对任意 $x \in [a]$, 有 $x \sim a$, 由 $a \sim b$ 与等价关系的传递性可知, $x \sim b$, 所以 $x \in [b]$, 即 $[a] \subset [b]$. 同理可知 $[b] \subset [a]$, 所以 $[a] = [b]$.
- (2) 若 $a \not\sim b$, 则对任意 $x \in [a]$, 有 $x \sim a$, 由 $a \not\sim b$ 与等价关系的对称性与传递性可知, $x \not\sim b$, 所以 $x \notin [b]$, 即 $[a] \cap [b] = \emptyset$.

因此集合 A 可以被拆为若干 (可能是无穷个) 互不相交的等价类的并, 这称为 A 的一个分拆. 具体而言, 记 A_{\sim} 为 A 中所有等价类构成的集合, 称为 A 在等价关系 \sim 下的商集, 即

$$A_{\sim} := \{[a] \mid a \in A\}.$$

则 A 可以写为不交并

$$A = \bigcup_{[a] \in A/\sim} [a].$$

例 1.4 如果 \sim 是集合 A 上的等价关系, 对于自然映射

$$p: A \rightarrow A/\sim, \quad a \mapsto [a],$$

这个映射是满射, 也称为商映射.

例 1.5 \mathbb{Z} 上有一种基础的等价关系:

$$a \sim b \iff a - b = 2k, k \in \mathbb{Z},$$

即 a 与 b 同为奇数或同为偶数. 则存在两个等价类

$$[0] = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\},$$

$$[1] = \{\dots, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\},$$

且 $[0] \cap [1] = \emptyset$, 且

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1].$$

我们将 $\mathbb{Z} = [0] \cup [1]$ 称为 \mathbb{Z} 在该等价关系下的一个分拆.

商映射

$$p: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/\sim, \quad a \mapsto [a]$$

具体为

$$p(a) = \begin{cases} [0], & a \text{ 为偶数} \\ [1], & a \text{ 为奇数} \end{cases}.$$

例 1.6 集族 \mathcal{A} 上的等价关系:

$$A \sim B \iff \exists \text{ 双射 } f: A \rightarrow B, \quad A, B \in \mathcal{A}.$$

证明

- (1) (自反性) 对任意 $A \in \mathcal{A}$, 恒有 $A \sim A$, 因为恒有恒等映射 $id_A: A \rightarrow A$ 为双射.
- (2) (对称性) 对任意 $A, B \in \mathcal{A}$, 若 $A \sim B$, 则存在双射 $f: A \rightarrow B$, 由 [命题 1.1](#) 可知, f 的逆映射 $f^{-1}: B \rightarrow A$ 也为双射, 所以 $B \sim A$.
- (3) (传递性) 对任意 $A, B, C \in \mathcal{A}$, 若 $A \sim B$ 且 $B \sim C$, 则存在双射 $f: A \rightarrow B$ 与 $g: B \rightarrow C$, 由 [命题 1.2](#) 可知, $g \circ f: A \rightarrow C$ 也为双射, 所以 $A \sim C$.

例 1.7 $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ 上的等价关系:

$$(p, q) \sim (p', q') \iff pq' = p'q, \quad p, p' \in \mathbb{Z}, q, q' \in \mathbb{N}^*.$$

良定的证明

- (1) (自反性) 对任意 $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, 恒有 $(p, q) \sim (p, q)$, 因为 $pq = pq$.
- (2) (对称性) 对任意 $(p, q), (p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, 若 $(p, q) \sim (p', q')$, 则 $pq' = p'q$, 从而 $p'q = pq'$, 所以 $(p', q') \sim (p, q)$.
- (3) (传递性) 对任意 $(p, q), (p', q'), (p'', q'') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, 若 $(p, q) \sim (p', q')$ 且 $(p', q') \sim (p'', q'')$, 则 $pq' = p'q$ 与 $p'q'' = p''q'$ 成立, 从而 $pq'q'' = p'qq'' = p''q'q$, 由于 $q' \neq 0$, 可知 $pq'' = p''q$, 所以 $(p, q) \sim (p'', q'')$.

我们将商集

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*) \sim = \{[(p, q)] \mid (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\}$$

记为 \mathbb{Q} , 并将 $[(p, q)]$ 记为 $\frac{p}{q}$, 则

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\},$$

即有理数集.

$\frac{1}{3} = [(1, 3)] = [(2, 6)] = [(3, 9)] = \dots$, 即 $\frac{1}{3}$ 可以表示为 $(1, 3), (2, 6), (3, 9), \dots$ 等有序对的等价类. 这提供了一个新的看待 $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \dots$ 的视角.

定义 1.12 (Cauchy 列) 设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $m, n > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$, 则称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列.

我们称两个 Cauchy 列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 等价, 若对任意 $M \in \mathbb{N}^*$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - b_n| < \frac{1}{M}$. 记为 $\{a_n\} \sim \{b_n\}$.

命题 1.4 上述等价关系等价于: 对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - b_n| < \varepsilon$.

证明 充分性: 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $M = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rceil \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\frac{1}{M} < \varepsilon$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - b_n| < \frac{1}{M} < \varepsilon$.

必要性: 对任意 $M \in \mathbb{N}^*$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{M}$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - b_n| < \varepsilon = \frac{1}{M}$.

命题 1.5 上述等价关系具有传递性, 即: 若 Cauchy 列 $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ 且 $\{b_n\} \sim \{c_n\}$, 则 $\{a_n\} \sim \{c_n\}$.

证明 对任意 $M \in \mathbb{N}^*$, 取 $\varepsilon = \frac{1}{2M}$, 则存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - b_n| < \varepsilon$, 且当 $n > N_2$ 时, 有 $|b_n - c_n| < \varepsilon$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{1}{M}.$$

因此 $\{a_n\} \sim \{c_n\}$.

或者我们也可以更简化的写为

证明 对任意 $M \in \mathbb{N}^*$, 取 $M \in \mathbb{N}^*$, 则存在 $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - b_n| < \frac{1}{M}$, 且当 $n > N_2$ 时, 有 $|b_n - c_n| < \frac{1}{M}$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - c_n| \leq |a_n - b_n| + |b_n - c_n| < \frac{1}{M} + \frac{1}{M} = \frac{2}{M}.$$

第一种写法用到的是 $\frac{1}{2M}$, 第二种方法用的是 $\frac{1}{M}$. 注意到这两种写法本质上是等价的. 第二种写法得到的是

$$\forall M' \in \mathbb{N}^* \exists N \forall n > N : |a_n - c_n| < \frac{2}{M'},$$

令 $M' = 2M$ 就正好得到

$$\forall M \in \mathbb{N}^* \exists N \forall n > N : |a_n - c_n| < \frac{1}{M}.$$

因此两种写法只是参数选择方式不同, 通过简单的替换 $M' = 2M$ 就可以互相转化, 因而在逻辑上完全等价.

这也启发了我们, 以下命题的成立:

命题 1.6 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 列等价于: 对任意 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - b_n| < c\varepsilon$. 其中 c 为任意正常数.

对于每一个与 n 无关的 $c > 0$, 这个命题都是成立的.

证明 充分性: 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon' = c\varepsilon > 0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $m, n > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon' = c\varepsilon$.

必要性: 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c} > 0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $m, n > N$ 时, 有 $|a_n - a_m| < \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c} < c\varepsilon$.

上述对 Cauchy 列的等价, 就是一个等价关系, 我们仅验证了传递性, 自反性与对称性是显然的.

Cauchy 列之间等价关系的自反性与对称性验证

自反性: 对任意 $M \in \mathbb{N}^*$, 取 $N = 1$, 则当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a_n| = 0 < \frac{1}{M}$, 所以 $\{a_n\} \sim \{a_n\}$.

对称性: 对任意 $M \in \mathbb{N}^*$, 取 N 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - b_n| < \frac{1}{M}$, 则当 $n > N$ 时, 有 $|b_n - a_n| = |a_n - b_n| < \frac{1}{M}$, 所以 $\{b_n\} \sim \{a_n\}$.

现在我们可以定义实数集了. 记 $A = \{\{a_n\} \mid \{a_n\} \text{ 为 Cauchy 列}, a_n \in \mathbb{Q}\}$, \sim 为上述 Cauchy 列之间的等价关系, 则实数集 \mathbb{R} 定义为商集

$$\mathbb{R} = A/\sim = \{[\{a_n\}] \mid \{a_n\} \text{ 为 Cauchy 列}, a_n \in \mathbb{Q}\},$$

其中 $[\{a_n\}]$ 为 Cauchy 列 $\{a_n\}$ 的等价类.

总体来说,在这一节中,我们介绍了等价关系与商集的概念,并通过 Cauchy 列与等价关系的方式定义了实数集. 这种方式虽然比较绕,但它是严谨的,并且可以帮助我们理解实数的本质.

开集与闭集

我们为了描述欧式空间中的点集,引入了开集与闭集的概念.

定义 1.13 (开集) 设 $A \subset \mathbb{R}$, 若对任意 $x \in A$, 都存在 $r > 0$, 使得 $(x-r, x+r) \subset A$, 则称 A 为 \mathbb{R} 中的开集.

例 1.8 \mathbb{R} 与 \emptyset 均为开集. 设 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, 则 (a, b) 为开集. 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 则 \mathbb{R}^n 中的开球

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\},$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$, 为 \mathbb{R}^n 中的开集.

定义 1.14 (闭集) 设 $A \subset \mathbb{R}$, 若 $\mathbb{R} \setminus A$ 为开集, 则称 A 为 \mathbb{R} 中的闭集.

于是我们可以给出聚点的两种定义:

定义 1.15 [聚点] 设 $A \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$, 若存在点列 $\{x_n\} \subset A \setminus \{x\}$, 满足 $x_n \neq x, \forall n \in \mathbb{N}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 则称 x 为 A 的聚点.

定义 1.16 [聚点] 设 $A \subset \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$, 若对任意 $r > 0$, 都有 $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$, 则称 x 为 A 的聚点.

命题 1.7 上述两种聚点的定义是等价的.

定义 1.15 \Rightarrow 定义 1.16

设 x 为 A 的聚点, 则存在点列 $\{x_n\} \subset A \setminus \{x\}$, 满足 $x_n \neq x, \forall n \in \mathbb{N}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. 对任意 $r > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, 可知存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - x| < r$, 即 $x_n \in (x-r, x+r)$. 因此 $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$.

定义 1.16 \Rightarrow 定义 1.15

设 x 为 A 的聚点, 则对任意 $r > 0$, 都有 $(x-r, x+r) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset$. 对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 取 $r = \frac{1}{n}$, 则存在 $x_n \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap A \setminus \{x\}$, 使得 $x_n \neq x$. 由此可构造出点列 $\{x_n\} \subset A \setminus \{x\}$, 满足 $x_n \neq x, \forall n \in \mathbb{N}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

记 A' 为 A 的所有聚点构成的集合, 则称 A' 为 A 的导集. 由定义可知, A' 为闭集.

命题 1.8 A 为闭集等价于 $A' \subset A$.

证明 充分性: 设 $A' \subset A$, 则 $\mathbb{R} \setminus A \subset \mathbb{R} \setminus A'$. 对任意 $x \in \mathbb{R} \setminus A$, 则 $x \notin A'$, 即 x 不是 A 的聚点,

则存在 $r > 0$, 使得 $(x - r, x + r) \cap A \setminus \{x\} = \emptyset$, 从而 $(x - r, x + r) \subset \mathbb{R} \setminus A$. 因此 $\mathbb{R} \setminus A$ 为开集, 所以 A 为闭集.

必要性: 设 A 为闭集, 则 $\mathbb{R} \setminus A$ 为开集. 对任意 $x \in A'$, 若 $x \notin A$, 则 $x \in \mathbb{R} \setminus A$. 由 $\mathbb{R} \setminus A$ 为开集, 则存在 $r > 0$, 使得 $(x - r, x + r) \subset \mathbb{R} \setminus A$. 从而 $(x - r, x + r) \cap A = \emptyset$, 这与 x 为 A 的聚点矛盾. 因此 $x \in A$, 所以 $A' \subset A$.

命题 1.9 开集的任意并与有限交为开集, 闭集的任意交与有限并为闭集.

证明 设 $\{A_i\}_{i \in I}$ 为 \mathbb{R} 中的开集族, 则对任意 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, 存在 $i_0 \in I$, 使得 $x \in A_{i_0}$. 由 A_{i_0} 为开集, 则存在 $r > 0$, 使得 $(x - r, x + r) \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. 因此 $\bigcup_{i \in I} A_i$ 为开集.

注 设 $\{A_i\}_{i \in I}$ 为 \mathbb{R} 中的开集族, 则对任意 $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, 存在 $i_0 \in I$, 使得 $x \in A_{i_0}$. 实际利用了选择公理. 选择公理是集合论中的一个重要公理, 它断言对于任意非空集合族, 都存在一个选择函数, 该函数从每个集合中选择一个元素. 在这里, 我们利用选择公理从开集族 $\{A_i\}_{i \in I}$ 中选择一个包含 x 的开集 A_{i_0} .

设 A_1, A_2, \dots, A_n 为 \mathbb{R} 中的开集, 则对任意 $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$, 则 $x \in A_i, i = 1, 2, \dots, n$. 由 A_i 为开集, 则存在 $r_i > 0$, 使得 $(x - r_i, x + r_i) \subset A_i, i = 1, 2, \dots, n$. 取 $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$, 则 $(x - r, x + r) \subset A_i, i = 1, 2, \dots, n$, 从而 $(x - r, x + r) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$. 因此 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 为开集.

设 $\{B_i\}_{i \in I}$ 为 \mathbb{R} 中的闭集族, 则 $\mathbb{R} \setminus B_i$ 为开集, 则

$$\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus B_i)$$

为开集. 因此 $\bigcap_{i \in I} B_i$ 为闭集.

设 B_1, B_2, \dots, B_n 为 \mathbb{R} 中的闭集, 则 $\mathbb{R} \setminus B_i$ 为开集, 则

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i=1}^n B_i = \bigcap_{i=1}^n (\mathbb{R} \setminus B_i)$$

为开集. 因此 $\bigcup_{i=1}^n B_i$ 为闭集.

上面的证明过程中, 我们用到了 De Morgan 定律, 即

$$A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i),$$

以及

$$A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i).$$

我们给出一个简要的证明.

证明 对任意 $x \in A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i$, 则 $x \in A$ 且 $x \notin \bigcup_{i \in I} B_i$, 则 $x \notin B_i, \forall i \in I$, 从而 $x \in A \setminus B_i, \forall i \in I$, 即 $x \in \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$. 因此 $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i \subset \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$.

对任意 $x \in \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$, 则 $x \in A$ 且 $x \in A \setminus B_i, \forall i \in I$, 则 $x \notin B_i, \forall i \in I$, 从而 $x \notin \bigcup_{i \in I} B_i$, 即 $x \in A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i$. 因此 $\bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i) \subset A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i$.

综上所述, $A \setminus \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus B_i)$. 同理可证 $A \setminus \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \setminus B_i)$.

例 1.9 闭集的无穷并不一定为闭集. 例如, 对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 令

$$A_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right],$$

则 A_n 为闭集, 但

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (-1, 1)$$

为开集, 所以不是闭集.

同理, 开集的无穷交不一定为开集. 例如, 对每个 $n \in \mathbb{N}^*$, 令

$$B_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right),$$

则 B_n 为开集, 但

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = [-1, 1]$$

为闭集, 所以不是开集.

理解了有关开集与闭集的基本性质, 可以更好的理解实数集的等价命题: 开覆盖定理与闭区间套定理.

第2章 数列极限

数列极限的定义

定义 2.1 (数列极限) 对于数列 $\{a_n\}$, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立, 则 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 或 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

常数列是指所有项都相等的数列, 例如 $2, 2, 2, 2, \dots$.

注 一般而言, 对于语句 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 一般暗示了其中 $N = N(\varepsilon)$, 即 N 是依赖于 ε 的. 不太严谨的说, 当 ε 变小时, 对应的 N 会变大.

我们判断数列是否收敛, 就是判断其是否满足数列极限存在的定义.

习题 1.2.1 用定义证明下面的结论:

- | | |
|--|---|
| (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5+3n} = \frac{1}{3};$ | (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0;$ |
| (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0;$ | (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$ |

解

(1) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{5}{9\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{n}{5+3n} - \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{3n - (5+3n)}{3(5+3n)} \right| = \frac{5}{3(5+3n)} < \frac{5}{9n} < \varepsilon.$$

(2) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(3) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon.$$

(4) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$\left| \frac{n!}{n^n} - 0 \right| = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

除定义之外, 也可以使用如下的两个与定义等价的命题:

习题 1.2.2 若数列 $\{a_n\}$ ($n \geq 1$) 满足条件: 任给正数 ε , 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ (其中 M 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 a 为极限.

M 为常数指的是 M 不依赖于 ε 和 n . 例如 $M = 2, M = 1000$ 等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于 $\forall M > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < M\varepsilon$ 成立.

证明 对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{M} > 0$, 则存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < M\varepsilon' = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$.

习题 1.2.3 证明: 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$ 时, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

证明 充分性: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

必要性: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - a) = 0$.

事实上, 所有的收敛的有理数列, 其极限点的全体即是实数集 \mathbb{R} . 即实数集 \mathbb{R} 是有理数列的极限值构成的.

注

(1) \mathbb{Q} 对极限是不封闭的, 即: 由 \mathbb{Q} 组成的数列的极限不一定是 \mathbb{Q} 中的元素;

(2) 由 \mathbb{Q} 组成的数列的极限只能是实数;

(3) 由 \mathbb{Q} 组成的所有收敛数列, 他们的极限的集合, 恰好就是 \mathbb{R} , 不多不少.

理由如下:

对 $\forall x \in \mathbb{R}$, 设 x 的小数表示为: $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 则有有理数列: $a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, \cdots$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 其极限为 x . 若 x 是有理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是有限小数或循环小数, 若 x 是无理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是无限不循环小数, 则极限点 x 是无理数.

此处 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 其中每一个 a_i 都是一个数字, a_0 是整数部分, $a_1a_2a_3\cdots$ 是小数部分. 比如 $x = 3.1415926\cdots$, 那么 $a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 9, a_6 = 2, a_7 = 6, \cdots$.

可以由 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 构造出一个数列 $\tau_1 = a_0, \tau_2 = a_0.a_1, \tau_3 = a_0.a_1a_2, \cdots$, 说 x 为极限指的, 是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = x$. 都用 x 代指, 是因为这里不能确定 x 是不是有限小数, 有理数还是无理数. 但是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限是确定的.

定义 2.2 (子列) 一个数列 $\{a_n\}$ 的子列, 是指取自原数列 $\{a_n\}$ 的无穷多项, 按照原数列中的同样顺序写成的一个新的数列. 于是 $\{a_n\}$ 的子列通常形如 $\{a_{n_k}\} (k \geq 1)$, 其中 n_k 是正整数, 满足 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$.

命题 2.1 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则其任意一个子列也收敛于 a .

证明 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.

对于子列 $\{a_{n_k}\}$, 由于 n_k 是正整数, 且 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$, 因此当 $k > N$ 时, $n_k > N$, 则有

$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$. 由数列极限的定义, 可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

命题 2.2 数列 $\{a_n\}$ 的某个子列收敛于 a 的充要条件在 a 的任意小邻域内有无穷多项.

证明 充分性: 设 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的子列, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}^*, \forall k > K$ 都有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ 成立. 因此 a 的任意小邻域内有无穷多项.

必要性: 设 a 的任意小邻域内有无穷多项. 则 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内有无穷多项. 取 $a_{n_1} \in (a - 1, a + 1), a_{n_2} \in \left(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}\right), \dots, a_{n_k} \in \left(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k}\right), \dots$. 则 $\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的子列, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

聚点对于集合而言的, 极限对于数列而言的, 他们之间存在一些联系:

命题 2.3 a 为数列 $\{a_n\}$ 的聚点, 当且仅当存在收敛于 a 的子列 a_{n_k} .

证明 a 为 $\{a_n\}$ 的聚点 $\Leftrightarrow a$ 的任意小邻域内有无穷多项 \Leftrightarrow 存在收敛于 a 的子列 a_{n_k} (由命题 2.2 可知).

习题 1.2.6 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = a$, 及 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

证明 按已知条件 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$. 又 $\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$. 于是令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, 则 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

对于 m 个子列的情况, 也是类似的, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{mk+1} = a, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{mk+2} = a, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} a_{mk+m} = a$$

上述的例子也能用于判定数列不收敛.

习题 1.2.7 证明下列数列不收敛:

$$(1) a_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}; \quad (2) a_n = 5 \left(1 - \frac{2}{n}\right) + (-1)^n.$$

解

- (1) 取 $a_{2n} = \frac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = -1$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$, 矛盾.
- (2) 取 $a_{2n} = 5 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5 \left(1 - \frac{1}{n}\right) - 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 6, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 4$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

下面两个命题有一定的难度, 可以先自行思考, 这里给出助教的证明.

命题 2.4 数列有界的充要条件为他的每个子列有收敛子列.

证明 充分性: 设数列 $\{a_n\}$ 有界, 则 $\{a_{n_k}\}$ 也有界. 由定理 2.1 可知, $\{a_{n_k}\}$ 有收敛子列.

必要性: 设数列 $\{a_n\}$ 无界, 则对任意 $M > 0$, 都存在 $n \in \mathbb{N}^*$, 使得 $|a_n| > M$. 取 $M = 1$, 则存在 $n_1 \in \mathbb{N}^*$, 使得 $|a_{n_1}| > 1$. 取 $M = |a_{n_1}| + 1$, 则存在 $n_2 > n_1$, 使得 $|a_{n_2}| > |a_{n_1}| + 1$. 依此类推, 可得数列 $\{a_{n_k}\}$, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$, 且 $|a_{n_k}| > k$. 显然, $\{a_{n_k}\}$ 无收敛子列.

命题 2.5 数列收敛的充分必要条件是存在一个数 a , 使数列的每个子列有收敛于 a 的子列.

证明 充分性: 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则其任意子列也收敛于 a . 因此其每个子列都有收敛于 a 的子列.

必要性: 设数列 $\{a_n\}$ 不收敛, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对任意 $N \in \mathbb{N}^*$, 都存在 $n > N$, 使得 $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$. 取 $N = 1$, 则存在 $n_1 > 1$, 使得 $|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon_0$. 取 $N = n_1$, 则存在 $n_2 > n_1$, 使得 $|a_{n_2} - a| \geq \varepsilon_0$. 依此类推, 可得数列 $\{a_{n_k}\}$, 其中 $k \in \mathbb{N}^*$, 且 $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0$. 显然, $\{a_{n_k}\}$ 无收敛于 a 的子列.

数列极限存在的准则

1. 定义判别 如果能够找到合适的 N , 使得后续的定义都成立, 则可以判定数列极限存在. 这里的 N 的存在性一般由构造来得出,

例 2.1 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$

证明 $\forall \varepsilon > 0$, 欲求 N , 使得 $|\sqrt[n]{n+1} - 1| < \varepsilon$, 记 $a_n = \sqrt[n]{n+1} - 1$, 则

$$1 + n = (1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 + \cdots + \alpha^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$$

因此

$$0 < \alpha < \sqrt{\frac{2(n+1)}{n(n-1)}} \leq \sqrt{\frac{4}{n-1}} < \varepsilon$$

对每一个不等号组成的不等式组求解, 就可以得到 n 的范围了, 即得 $N \geq \left\{2, \frac{16}{\varepsilon^2} + 1\right\} + 1$.

例 2.2 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0, \alpha > 0$

证明 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \left\lceil \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\varepsilon}} \right\rceil$, 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{N^\alpha} \leq \varepsilon.$$

记号 记号 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 如 $[3.14] = 3, [-3.14] = -4$. 记号 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数, 如 $\lceil 3.14 \rceil = 4, \lceil -3.14 \rceil = -3$. 即

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\},$$

$$\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geq x\}.$$

2. 单调有界准则 数集的上界和下界定义为:

定义 2.3

(1) $\sup E = \inf\{u \in \mathbb{R} : u \geq x, \forall x \in E\};$

(2) $\inf E = \sup\{u \in \mathbb{R} : u \leq x, \forall x \in E\}.$

定理 2.1 (单调有界极限存在准则) 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n (\inf a_n).$

证明 单调增有界极限存在.

设数列 $\{a_n\}$ 单调增且有上界, 由确界存在定理, $\{a_n\}$ 有上确界. 令 $\sup a_n = \beta$, 则 β 满足以下两点:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \beta;$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in \{a_n\}, \beta - \varepsilon < a_{n_0}.$

又因为 $\{a_n\}$ 单调增, 故 $\forall n > n_0, a_n \geq a_{n_0} > \beta - \varepsilon$, 且 $a_n \leq \beta < \beta + \varepsilon$. 即 $|\beta - a_n| < \varepsilon$ 在 $n > n_0$ 时成立.

由数列极限定义, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta = \sup\{a_n\}$. 同理, 单调减有下界极限存在.

3. 夹逼准则

定理 2.2 (夹逼准则) 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_n \leq b_n \leq c_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

证明 从 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^*, \forall n > N_1$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ 当 $n > N_1$ 时恒成立.

再从 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a \Rightarrow$ 对上述 $\varepsilon, \exists N_2 \in \mathbb{N}^*, \forall n > N_2$ 都有 $|c_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon$ 当 $n > N_2$ 时恒成立.

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$, 即 $|b_n - a| < \varepsilon$ 成立. 由数列定义, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

数列极限的性质

命题 2.6 (唯一性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, 则 $a = b$.

证明 如果 $\{a_n\}$ 有两个极限值 a 和 b . 根据极限的定义, 对于任意的正数 ε , 注意到 $\frac{\varepsilon}{2}$ 也是一个正数, 因此对应两个极限值, 分别存在正整数 N_1 和 N_2 , 使得当

$$\begin{aligned} n > N_1 \text{ 时有 } |a_n - a| &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ n > N_2 \text{ 时有 } |a_n - b| &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

因此, 当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时 (即 $n > N_1, n > N_2$), 上面两个不等式都满足, 所以

$$|a - b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

两个数的距离要小于任意一个正数, 这两个数必须相等, 即 $a = b$.

定义 2.4 (数列有界) 设 $\{a_n\}$ 为实数列, 若存在常数 $M > 0$, 使得对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 都有 $|a_n| < M$, 则称 $\{a_n\}$ 为有界数列.

命题 2.7 (有界性) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则数列 $\{a_n\}$ 有界.

证明 取 $\varepsilon = 1$, 由定义知道, 当存在一个自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < 1$, 即当 $n > N$ 时, 有 $|a_n| < |a| + 1$. 取

$$M = \max \{|a| + 1, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|\}.$$

注意到, 第一, 有有限个数中一定能取得一个最大的; 第二, 上面确定的 M 显然与 n 无关. 则对所有自然数 n , 也就是说数列的所有项, 都会有 $|a_n| \leq M$.

不难推出如下结论:

命题 数列 $\{a_n\}$ 有界等价于数列 $\{a_n\}$ 自第 N 项之后有界, 其中 N 已知.

命题 2.8 (保号性) 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a_n \geq 0, \forall n \geq n_0$, 则必有 $a \geq 0$.

证明 若 $a > l$, 取 $\varepsilon = a - l > 0$, 则存在一个自然数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon = a - l,$$

因此

$$-(a - l) < a_n - a$$

即, 当 $n > N$ 时, 不等式 $a_n > l$ 成立. 对于 $a < l$ 的情况, 可类似证明, 在这种情况下, 只要取 $\varepsilon = l - a > 0$ 即可. 对于此问, 取 $l = 0$.

由此不难推出:

命题 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a_n \geq l, \forall n \geq n_0$, 则必有 $a \geq l$.

该命题的逆命题不成立, 如 $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 但 a_n 既不恒大于零, 也不恒小于零. 然而, 加上如果是不严格不等, 则在 N 充分大时成立, 具体而言如下所述:

命题 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\forall l > a$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $a_n < l$.

证明 反证: 若 $\exists l_0 > a$, 使得对任意 $N \in \mathbb{N}^*$, 都存在 $n > N$, 使得 $a_n \geq l_0$. 取 $\varepsilon_0 = l_0 - a > 0$, 则对任意 $N \in \mathbb{N}^*$, 都存在 $n > N$, 使得 $|a_n - a| \geq \varepsilon_0$. 与数列极限的定义矛盾.

命题 2.9 (保序性) 若 $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow b$, 且 $a_n \leq (\geq) b_n, \forall n \geq n_0$, 则必有 $a \leq (\geq) b$.

证明 令 $c_n = b_n - a_n$, 则 $c_n \rightarrow b - a$, 且 $c_n \leq 0, \forall n \geq n_0$, 由保号性可知, $b - a \leq 0$, 即 $a \leq b$.

其中唯一性暗示了, 改变数列中有限多项的值, 不会影响数列的收敛性及其极限. 例如, 对于数列 $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$, 它的极限是 0, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. 如果我们改变数列的前 10 项, 如

$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1/11, 1/12, 1/13, 1/14, \dots$, 则数列的极限仍然是 0. 这个性质在证明数列极限的存在性时, 常常会被用到.

有界性质给出了收敛数列的一个必要条件. 因此无界数列一定是发散的. 例如对于数列 $0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots$ 显然是无界的, 且发散的.

保号性的条件是不严格不等, 若调整为 $a_n > 0$, 则无法说明 $a > 0$. 例如数列 $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ 的极限是 0, 但数列的每一项都是正数.

习题 1.2.13 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别收敛于 a, b . 若 $a > b$, 则从某一项开始, 有 $a_n > b_n$; 反之, 若从某项开始恒有 $a_n \geq b_n$, 则 $a \geq b$.

解 这是保序性的直接推论.

例 2.3 设 $a \in \mathbb{R}$, $\{a_n\}$ 为实数列, 请考虑以下对命题的语句, 说明了 $\{a_n\}$ 具有什么性质?

- (1) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (2) 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立.
- (3) 存在 $N \in \mathbb{N}$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (4) 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (5) 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (6) 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

解

- (1) $\{a_n\}$ 以 a 为极限.
- (2) a 为 $\{a_n\}$ 的聚点, 或者有一项等于 a .
- (3) $\{a_n\}$ 从某一项开始恒等于 a .
- (4) $\{a_n\}$ 有界.
- (5) 恒成立.
- (6) a 为 $\{a_n\}$ 的聚点.

这里仅给出部分证明.

证明 3. 存在 $N \in \mathbb{N}$, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \{a_n\}$ 从某一项开始恒等于 a .

相邻的全称量词是可以交换的, 因此上式等价于 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N, \forall \varepsilon > 0, |a_n - a| < \varepsilon$. 由 $\forall \varepsilon > 0, |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a_n = a$, 可知 $\exists N \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall n > N, a_n = a$. 即证.

证明 4. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon > 0$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow \{a_n\}$ 有界.

充分性: 取 $N = 1$, 存在 $\varepsilon > 0$, 当 $n > 1$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 则存在 $M = |a| + \varepsilon + |a_1|$, 则

$$|a_1| < |a| + \varepsilon + |a_1| = M$$

$$|a_n| < |a| + \varepsilon < |a| + \varepsilon + |a_1| = M, \forall n > 1$$

即证有界.

必要性: 若有界 M , 则 $\forall N, \exists \varepsilon = M + |a|$, 当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| \leq |a_n| + |a| \leq M + |a| = \varepsilon.$$

证明 5. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $\varepsilon = |a_{N+1} - a| + 1 > 0$, 存在 $n = N + 1 > N$, 使得 $|a_n - a| = |a_{N+1} - a| < \varepsilon$ 成立. 恒成立.

证明 6. 对于任意的 $N \in \mathbb{N}$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > N$, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. $\Leftrightarrow a$ 为 $\{a_n\}$ 的聚点.

充分性: 由 a 为 $\{a_n\}$ 的聚点 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, 在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内有无穷多项. 则对任意的 $N \in \mathbb{N}$, 存在 $n > N$, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$.

必要性: 由对任意的 $N \in \mathbb{N}$, 任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $n > N$, 使得 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 则 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内有无穷多项. 因此 a 为 $\{a_n\}$ 的聚点.

上述例子给出了数列极限的定义, 交换量词后, 会得到意义大相径庭的命题. 通过理解这些含义不同的命题, 可以加深对数列极限的理解.

数列极限的运算

定理 2.3 (数列极限的线性性质) 设 a, b, c_1, c_2 为常数且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b = c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

证明 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_1$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 对上述 $\varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_2$ 时, $|b_n - b| < \varepsilon$.

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon$, 则

$$|c_1 a_n + c_2 b_n - c_1 a - c_2 b| = |c_1(a_n - a) + c_2(b_n - b)| \leq |c_1(a_n - a)| + |c_2(b_n - b)| \leq (|c_1| + |c_2|)\varepsilon,$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_n + c_2 b_n) = c_1 a + c_2 b$.

数列的极限具有线性性质, 同理函数极限也是具有线性性质的, 统称为极限的线性性质. 由极限的线性性质, 可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质. 如函数的导数、导数、微分、积分, 都具有线性性质.

从上述极限的线性性质, 不难得到以下结论:

- (1) 当 $c_1 = c_2 = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;
- (2) 当 $c_1 = 1, c_2 = -1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$;
- (3) 当 $c_1 = k, c_2 = 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (4) 数列的线性性质可推广到任意有限个收敛数列的情形: 设 $a_{1n} \rightarrow a_1, a_{2n} \rightarrow a_2, \dots, a_{mn} \rightarrow$

a_m , 且 $a_1, a_2, \dots, a_m, c_1, c_2, \dots, c_m$ 为常数, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (c_1 a_{1n} + c_2 a_{2n} + \dots + c_m a_{mn}) \\ &= c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_m a_m \\ &= c_1 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{1n} + c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} + \dots + c_m \lim_{n \rightarrow \infty} a_{mn} \end{aligned}$$

对 $\forall m \in \mathbb{N}^*$ 成立.

定理 2.4 (收敛数列极限的四则运算法则) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, 则有

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$.

证明

(1) 由极限的线性性质可得;

(2) 注意到

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n| |b_n - b| + |b_n - b| |a_n - a|.$$

由于 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是收敛数列, 故都是有界的, 取一个大的界 M , 使得

$$|a_n|, |b_n| < M (n \geq 1)$$

因此 $|b| \leq M$. 对于任意的正数 ε , 对应 $\frac{\varepsilon}{2M}$, 分别存在整数 N_1 和 N_2 , 使得当 $n > N$ 时,

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

同时成立. 因此当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n b_n - ab| < M |b_n - b| + M |a_n - a| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

(3) 因为

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n},$$

且 $b \neq 0$, 由 2° 可知, 只需证明数列 $\left\{ \frac{1}{b_n} \right\}$ 收敛于 $\frac{1}{b}$ 即可. 假设 $b > 0$, 则

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b_n - b}{b_n b} \right|.$$

由于 b_n 收敛于 b , 一方面对于正数 $b/2 > 0$, 存在 N_1 , 当 $n > N_1$ 时,

$$|b_n - b| < \frac{b}{2}.$$

另一方面, 对于任意给定的正数 ε , 存在 N_2 , 使得当 $n > N_2$ 时,

$$|b_n - b| < \frac{b^2 \varepsilon}{2}.$$

所以, 当 $n > N = \max\{N_1, N_2\}$ 时,

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| \leq |b_n - b| \cdot \frac{2}{b^2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}.$$

定理 2.4 说明有限组收敛数列的极限运算和四则运算是可以交换的, 并可推广到有限多个收敛数列与四则运算的情况. 对于 3 中的结论, 会因为某些 b_n 为 0 而使得分式没有意义. 但是因为 $\{b_n\}$ 的极限 $b \neq 0$, 所以 b_n 为 0 的项至多只有有限个. 可以改变这有限多项的值, 这不会改变 $\{b_n\}$ 的收敛性和极限. 或者在 $\{a_n b_n\}$ 中删去这些没有定义的有限多项, 不会改变其收敛性和极限.

有了 **定理 2.4**, 在计算数列极限时, 可以将其化为简极限的四则运算, 而不必再使用 “ ε - N ” 语言作繁琐的论述.

习题 1.2.8 求下列极限:

$$(1) a_n = \frac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1};$$

$$(2) a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n};$$

$$(3) a_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n(n+1)/2}\right), n = 2, 3, \dots;$$

$$(4) a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right);$$

$$(5) a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^m}), (|q| < 1).$$

解

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1 - 0 = 1.$$

(3)

$$a_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{2 \cdot 5 \cdots (n^2 + n - 2)}{3 \cdot 6 \cdots n(n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2(n+1)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{1+\frac{2}{n}}{2(1+\frac{1}{n})} = \frac{1+0}{2(1+0)} = \frac{1}{2}.$$

(4)

$$a_n = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n \cdot n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4) \cdots (1+q^{2^m})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{m+1}}}{1-q},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1-q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1-\lim_{m \rightarrow \infty} q^{2^{m+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

然而, 这种交换对于极限和绝对值并不总是成立, 具体而言:

习题 1.2.4 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

证明 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 则

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$.

反之不一定成立, 如数列 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$, 但 $\{a_n\}$ 发散.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $||a_n| - 0| < \varepsilon$. 则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

习题 1.2.5 证明: 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 又 $|b_n| \leq M, (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

证明 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$. 则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

习题 1.2.9 若 $a_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 能否断定 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?

解 不能. 例如 $a_n = \frac{1}{2^n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 可能为 0.

习题 1.2.10 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = 0$, 是否必有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$? 若还

假设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 回答同样的问题.

解 不一定. 例如 $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n(-1)^n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ 不存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 时成立. 假设 $a \neq 0$ 时, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n} = \frac{0}{a} = 0$.

习题 1.2.11 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性如何? 举例说明. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 回答同样的问题.

解 设 $\{a_n\}$ 收敛于 a , $\{b_n\}$ 发散. 则 $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}$ 都发散. 例如 $a_n = 1, b_n = n$, 则 $a_n + b_n = n + 1, a_n - b_n = 1 - n$ 都发散. 但 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定. 例如 $a_n = \frac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = 1$ 收敛; 但 $a_n = 1, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = n$ 发散.

若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散, 则 $\{a_n + b_n\}, \{a_n - b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性都不确定. 例如 $a_n = n, b_n = n$, 则 $a_n + b_n = 2n, a_n - b_n = 0, a_n \cdot b_n = n^2$ 中只有 $a_n - b_n$ 收敛; 又如 $a_n = n, b_n = (-1)^n n$, 则 $a_n + b_n = n + (-1)^n n, a_n - b_n = n - (-1)^n n, a_n \cdot b_n = (-1)^n n^2$ 都发散.

下面三个命题是**定理 2.4**的推广, 它们说明了极限与指数、对数、幂运算是可以交换的. 请利用数列极限的定义先自行尝试, 这里给出助教的证明. 在后续学习了函数极限之后, 会有更简洁的过程.

命题 2.10 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^a$.

证明 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon \in (0, e^a), \exists N \in \mathbb{N}^*,$ 当 $n > N_1$ 时, 有

$$a_n - a < \ln(\varepsilon/e^a + 1),$$

即

$$e^{a_n - a} - 1 < \varepsilon/e^a,$$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*,$ 当 $n > N_2$ 时, 有

$$a - a_n < -\ln(1 - \varepsilon/e^a),$$

即

$$1 - e^{a_n - a} < \varepsilon/e^a.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|e^{a_n} - e^a| = e^a |e^{a_n - a} - 1| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{a_n} = e^a$.

命题 2.11 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$, 其中 $a_n > 0, a > 0$.

证明 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*,$ 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$a_n - a < a(e^{\varepsilon/a} - 1),$$

即

$$\ln a_n - \ln a < \varepsilon.$$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$a - a_n < a(1 - e^{-\varepsilon/a}),$$

即

$$\ln a - \ln a_n < \varepsilon.$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则当 $n > N$ 时, 有

$$|\ln a_n - \ln a| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$.

命题 2.12 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = a^\alpha$, 其中 $a_n > 0, a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

证明 由

$$a_n^\alpha = e^{\alpha \ln a_n}, a^\alpha = e^{\alpha \ln a},$$

结合前两个命题可得, 具体而言:

令 $b_n = \ln a_n, b = \ln a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a = b$. 再令 $c_n = a_n^\alpha = e^{\alpha b_n}, c = a^\alpha = e^{\alpha b}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha b_n} = e^{\alpha b} = c$. 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = a^\alpha$.

命题 2.13 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a, a_n > 0, a > 0$. $\{b_n\}$ 收敛于 b . 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$.

极限与极限, 极限与函数, 极限与无穷运算大都是不可交换的, 如课本例 1.2.6, 如下的做法是完全错误的:

例 2.4 请说明错误在哪里

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0$$

解

第一步将分子拆开是错误的, 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和.

例 2.5 请说明错误在哪里 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{1/n}$

解 我们对整个数列做极限运算, 而不是对数列中的每一个数做极限运算. 这个式子的意义是

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1/n}$ 是一个数, 而 $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^{1/n}$ 是一个数列. 前者与 n 无关, 后者与 n 有关.

习题 1.2.12 下面的推理是否正确?

- (1) 设数列 $\{a_n\} : a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

解: 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 在 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 两边取极限, 得 $a = 2a - 1$, 即 $a = 1$.

(2)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\ &= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n \uparrow} = 0. \end{aligned}$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right]^n = 1^n = 1$.

解

- (1) 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为 $a_n = 1$ 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

- (2) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \sim \frac{1}{n}, (k = 1, 2, \dots, n).$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

- (3) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

例 2.6 设 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n, n \in \mathbb{N}^*$, 证明:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e \approx 2.718281828$;
 (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x, x \in \mathbb{R}$;
 (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, x \in \mathbb{R}$.

解 函数极限还没有讲到, 此处仅证明第 1 问. 证明数列 a_n 收敛即可. 首先证明该数列是递增的. 事实上由二项式定理可得

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^n C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \\ &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right), \\ a_{n+1} &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} \right)^{n+1}. \end{aligned}$$

比较 a_n 和 a_{n+1} 两个表达式的右端和号中的对应项显然前者较小, 而 a_{n+1} 所多出来的一项 $\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > 0$ 故 $a_{n+1} > a_n$. 所以 $\{a_n\}$ 为严格递增数列.

其次我们将证明数列是有界的. 在 a_n 的上述展开式中

$$0 < \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1.$$

所以

$$\begin{aligned} 2 < a_n &< 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &< 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)} = 3 - \frac{1}{n} < 3, \end{aligned}$$

即 $n = 2, 3, \dots$ 也就是说数列 $\{a_n\}$ 是单调递增且有上界的因此一定收敛.

例 2.7

$$(1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}^*.$$

$$(2) \left(\frac{1}{n+1}\right) < \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}^*.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}, \text{ 即 } \sqrt[n]{n!}e \sim n.$$

注 $a_n \sim b_n$ 定义为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

解

(1) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 单调递增且有上界, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e$. 故 $e = \sup a_n$, 由于 a_n 单调增的严格单调, 因此 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \neq e$, 故 $a_n < e, n \in \mathbb{N}^*$.

设 $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. 由平均值不等式, 有

$$\left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \cdot 1\right)^{\frac{1}{n+2}} = \left(\frac{n}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdots \frac{n}{n+1} \cdot 1\right)^{\frac{1}{n+2}} \leq \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1} + \cdots + \frac{n}{n+1} + 1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}.$$

故 $\Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \Rightarrow b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} = b_{n+1}$. 且

$b_n > 0$, 故 $\{b_n\}$ 单调递减有下界, 故有极限. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$. 与 a_n 的推导类似, 可得 $b_n > e, n \in \mathbb{N}^*$.

(2) 对 1. 中的不等式取对数, 得

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}, \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}.$$

(3) 有

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{1}\right)^1 &< e < \left(\frac{2}{1}\right)^2, \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 &< e < \left(\frac{3}{2}\right)^3, \\ &\dots, \\ \left(\frac{n}{n+1}\right)^n &< e < \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

乘积得

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdots \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < e^n < \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdots \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+2}.$$

即

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)^n}{n!} &< e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \\ \Rightarrow \left(\frac{n+1}{e}\right)^n &< n! < \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \\ \Rightarrow \frac{n+1}{ne} &< \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{ne} \sqrt[n]{n+1} \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{ne} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + 1}{e} = \frac{1}{e}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, 故由夹逼定理, 得证.

例 2.8 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \in \mathbb{N}^*$, 证明:

- (1) $\{a_n\}$ 收敛;
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2$;
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+2n} = \ln \frac{5}{3}$;
- (4) $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$.

解

(1) 由例2.6可知,

$$\begin{aligned} \ln \frac{2}{1} &< \frac{1}{1}, \\ \ln \frac{3}{2} &< \frac{1}{2}, \\ &\dots, \\ \ln \frac{n+1}{n} &< \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

相加得 $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. 则 $a_n > 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > 0$. 又 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$, 故 $\{a_n\}$ 单调递减有下界, 故有极限.

(2)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} - \ln 2n \right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) + \ln 2n - \ln n \\
 &= \ln 2.
 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+2n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{5n} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{3n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{5n} - \ln 5n \right) + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{3n} - \ln 3n \right) + \ln 5n - \ln 3n \\
 &= \ln \frac{5}{3}.
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n}{\ln n} + 1
 \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = \gamma$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n}{\ln n} = 0$.

记 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \gamma \approx 0.57721$ 称为 **Euler 常数**.

写成等价无穷大的形式, 即

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n (n \rightarrow \infty).$$

事实上有以下命题

命题 2.14 $a_n \sim b_n \Leftrightarrow a_n = b_n + o(b_n)$.

证明 由 $a_n \sim b_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$, 即 $a_n - b_n = o(b_n)$.

由 $a_n = b_n + o(b_n)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{b_n} = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} - 1 = 0$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, 即 $a_n \sim b_n$.

极限运算与最大值、最小值运算也是可以交换的,

习题 1.2.14 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别收敛于 a 及 b . 记 $c_n = \max(a_n, b_n)$, $d_n = \min(a_n, b_n)$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \max(a, b), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \min(a, b).$$

解 由 $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$, $\min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$, 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

习题 1.2.15 求下列极限:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \right];$
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k)$, 其中 $0 < k < 1$;
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2});$
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 2};$
- (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \right).$

解

(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n+k)^2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = 0.$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^k - n^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^k - 1 \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^1 - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-k} = 0.$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

(4) 由 $\frac{1}{n} \ln(n^2 - n + 2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1)$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 - n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln n^2 - n + 2} = e^0 = 1.$$

(5)

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

高阶无穷大

定义 2.5 (无穷大) 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, 若 $\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n| > M$, 则称 $\{a_n\}$ 是无穷大数列, 记为 $\{a_n\} \rightarrow \infty$.

(1) $\{a_n\} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n > M$.

(2) $\{a_n\} \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n < -M$.

(3) $\{a_n\} \rightarrow \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n| > M$.

命题 2.15 (常用无穷大数列的比较) 设 a, A, m 为常数, 且 $a > 1, \alpha > 0, m > 0$, 证明: $n^n \gg n! \gg a^n \gg n^\alpha \gg (\ln n)^m$, 在 $n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}^*$ 时成立; 其中 $n^n \gg n! \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$, 称

为 n^n 是 $n!$ 的高阶无穷大.

证明

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, 故 $n^n \gg n!$.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n}$, 其中 $\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]+1}$ 是与 n 无关的常数, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, 故 $n! \gg a^n$.
- (3) 先设 $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $a = 1 + \lambda$, 则 $\lambda > 0$, $a^n = (1 + \lambda)^n > C_n^{\alpha+1} \lambda^{\alpha+1}$. 故 $0 > \frac{n^\alpha}{a^n} < \frac{n^\alpha}{C_n^{\alpha+1} \lambda^{\alpha+1}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.
- (4) 仅证 $m = 1$ 时, 令 $n^\alpha = y$, 则 $n \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$, 且 $\frac{\ln n}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\ln y}{y}$. 设 $k \leq y \leq k+1$, 则 $\frac{k}{k+1} < \frac{\ln y}{y} < \frac{\ln(k+1)}{k}$, 故 $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$.

例 2.9 (Stirling 公式) 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1.$$

Stirling 公式的证明在目前不作要求, 这是教材中最后一节的内容. 这里给出一种使用高中知识以及数列极限的证明方法, 仅供参考.

引理 2.1

$$\sin^2 \frac{2\pi}{4m} \sin^2 \frac{4\pi}{4m} \sin^2 \frac{6\pi}{4m} \cdots \sin^2 \frac{(2m-2)\pi}{4m} = \frac{m}{2^{2m-2}}.$$

证明 复数可以写成 $z = x + iy$ 的形式也可以写成三角形式即令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 因此可以设 $z_0 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 为 $z^n - 1 = 0$ 的根, 则由 De Moivre 定理: 若 $z_1 = r_1(\cos \alpha + i \sin \alpha), z_2 = r_2(\cos \beta + i \sin \beta)$, 则 $z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$, 因此

$$z^n = 1 = r^n (\cos x + i \sin x)^n = r^n (\cos nx + i \sin nx),$$

得 $r = 1, \theta = \frac{2k\pi}{n} (k \in \mathbb{N})$, 故 $z_0 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$.

习惯上称 $\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$ 称为 n 次单位原根.

由代数学基本定理可得 $z^n - 1$ 只有 n 个复根, 且上面验证了 $\{\omega^k\}_{k=1}^n$ 恰为这 n 个复根, 因此 $z^n - 1 = (z - 1)(z - \omega)(z - \omega^2) \cdots (z - \omega^{n-1})$, 两边同除 $z - 1$, 得

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = (z - \omega)(z - \omega^2) \cdots (z - \omega^{n-1})$$

代入 $z = 1$, 并对两边取模长, 由 $|1 - \omega^k| = \sqrt{\left(1 - \cos \frac{2\pi k}{n}\right)^2 + \left(2 \sin \frac{\pi k}{n}\right)^2} = \sqrt{2 - 2 \cos \frac{2\pi k}{n}} = 2 \sin \frac{\pi k}{n}$, 可得

$$n = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - \omega^k| = \prod_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{\pi k}{n}$$

取 $n = 2m$, 并注意到对于 $k = 1, 2, \dots, 2m-1$ 有对称性 $\sin \frac{\pi(2m-k)}{2m} = \sin \frac{\pi k}{2m}$, 且当 $k = m$ 时 $\sin \frac{\pi m}{2m} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$, 因此

$$\frac{m}{2^{2m-2}} = \prod_{k=1}^{2m-1} \sin \frac{\pi k}{2m} = \left(\prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{\pi k}{2m} \right)^2 = \sin^2 \frac{2\pi}{4m} \sin^2 \frac{4\pi}{4m} \sin^2 \frac{6\pi}{4m} \cdots \sin^2 \frac{(2m-2)\pi}{4m}$$

引理 2.2

$$\sin^2 \frac{\pi}{4m} \sin^2 \frac{3\pi}{4m} \sin^2 \frac{5\pi}{4m} \cdots \sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m} = \frac{1}{2^{2m-1}}.$$

证明 已知:

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{\pi k}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

取 $n = 4m$ 得

$$\prod_{k=1}^{4m-1} \sin \frac{\pi k}{4m} = \frac{4m}{2^{4m-1}}.$$

偶数项 $k = 2r (r = 1, \dots, 2m-1)$ 为:

$$\prod_{r=1}^{2m-1} \sin \frac{2r\pi}{4m} = \prod_{r=1}^{2m-1} \sin \frac{r\pi}{2m} = \frac{2m}{2^{2m-1}}.$$

奇数项为:

$$\prod_{k=1}^{2m} \sin \frac{(2k-1)\pi}{4m} = \left(\prod_{j=1}^m \sin \frac{(2j-1)\pi}{4m} \right)^2,$$

因此

$$\frac{4m}{2^{4m-1}} = \frac{2m}{2^{2m-1}} \cdot \left(\prod_{j=1}^m \sin \frac{(2j-1)\pi}{4m} \right)^2,$$

整理得

$$\left(\prod_{j=1}^m \sin \frac{(2j-1)\pi}{4m} \right)^2 = \frac{1}{2^{2m-1}},$$

即

$$\sin^2 \frac{\pi}{4m} \sin^2 \frac{3\pi}{4m} \cdots \sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m} = \frac{1}{2^{2m-1}}.$$

引理 2.3

$$\frac{\sin(k-1)a}{\sin ka} \frac{\sin(k+1)a}{\sin ka} < \frac{(k-1)a}{ka} \frac{(k+1)a}{ka}.$$

证明 由以下两恒等式

$$\begin{aligned} \frac{\sin(k-1)a}{\sin ka} \frac{\sin(k+1)a}{\sin ka} &= 1 - \left(\frac{\sin a}{\sin ka} \right)^2, \\ \frac{(k-1)a}{ka} \frac{(k+1)a}{ka} &= 1 - \left(\frac{a}{ka} \right)^2, \end{aligned}$$

以及 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $0 < x < \pi/2$ 单调减, 因此

$$\frac{\sin a}{\sin ka} > \frac{a}{ka},$$

以及

$$\frac{\sin(k-1)a}{\sin ka} \frac{\sin(k+1)a}{\sin ka} < \frac{(k-1)a}{ka} \frac{(k+1)a}{ka}.$$

引理 2.4 (Wallis 公式)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2m-2}{2m-3} \frac{2m-2}{2m-1} = \frac{\pi}{2}$$

证明 由引理 2.1, 引理 2.2 得:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{3\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{5\pi}{4m}} \cdots \frac{\sin^2 \frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{(2m-3)\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m}} = m \sin \frac{\pi}{2m}, \\ & \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{3\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{4\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{5\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{6\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{5\pi}{4m}} \cdots \frac{\sin^2 \frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m}} \frac{\sin^2 \frac{2m\pi}{4m}}{\sin^2 \frac{(2m-1)\pi}{4m}} = m \tan \frac{\pi}{4m}. \end{aligned}$$

由引理 2.3 得

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}} \frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}} \frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}} \cdots \frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-3)\pi}{4m}} \frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}} < m \sin \frac{\pi}{2m}, \\ & \frac{\frac{2\pi}{4m}}{\frac{3\pi}{4m}} \frac{\frac{4\pi}{4m}}{\frac{\pi}{4m}} \frac{\frac{6\pi}{4m}}{\frac{5\pi}{4m}} \cdots \frac{\frac{(2m-2)\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}} \frac{\frac{2m\pi}{4m}}{\frac{(2m-1)\pi}{4m}} > m \tan \frac{\pi}{4m}. \end{aligned}$$

整理得

$$\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2m} > \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2m-2}{2m-3} \frac{2m-2}{2m-1} > \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2m}\right) \tan \frac{\pi}{4m},$$

由夹逼定理即证.

这一条定理在后面学了积分之后可以更快速的得到, 而不途径引理中繁琐的等式.

引理 2.5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2}{\sqrt{n} (2n)!} = \sqrt{\pi}.$$

证明 将 Wallis 公式写为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!!^2}{(2n-1)!!^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

展开分式, 整理得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!^2 (2n)!!^2}{(2n)!!^2 (2n-1)!!^2 (2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{4n} (n!)^4}{(2n)!^2 (2n+1)} = \frac{\pi}{2}.$$

利用 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^\alpha = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^\alpha$, α 为常数, 此处 α 取 $\frac{1}{2}$, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2 \sqrt{2}}{(2n)! \sqrt{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{\pi}.$$

引理 2.6

$$a_n = \frac{n!e^n}{\sqrt{nn^n}}$$

单调递减, 收敛到某个正实数.

证明

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{\sqrt{n} n^n e^{-n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} (n+1)^{n+1} e^{-(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n e} = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{\frac{2n+1}{2}}.$$

设 $b_n := \ln(a_n)$, 由 2.7 有

$$b_n - b_{n+1} = \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \frac{2n+1}{2} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - 1$$

令 $k = \frac{1}{2n+1} > 0$, 得

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) - 1,$$

分析函数 $f(x) = \frac{1}{2x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$ 知 $f'(x) > 0, x \in (0, 1), f\left(\frac{1}{2n+1}\right) > 0$, 即可证明 b_n 单调减, 因此 a_n 单调减.

再由类似的分析方式可以得到

$$(b_n - b_{n+1}) - \frac{1}{4n} + \frac{1}{4(n+1)} = \frac{1}{2k} \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right) - 1 + \frac{k^2}{k^2 - 1} < 0,$$

因此

$$b_n - \frac{1}{4n} < b_{n+1} - \frac{1}{4(n+1)}.$$

因此 $b_n > b_n - \frac{1}{4n} > b_1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow a \geq e^{0.75} > 0$.

a_n 单调减, 有正下界, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 存在且 $a > 0$.

由 $a > 0$ 才可以用极限的四则运算 (除法), 以及由引理 2.5

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2}{a_{2n}} = \frac{\left(\frac{n!e^n}{\sqrt{nn^n}}\right)^2}{\frac{(2n)!e^{2n}}{\sqrt{2n}2n^{2n}}} = \sqrt{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)! \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

由此证明了 Stirling 公式.

更正式地表示无穷大之间的关系需要引入两个记号: O 和 o .

定义 2.6 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是定义在 \mathbb{N}^* 上的数列. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ 则称 a_n 是 b_n 的 $o(b_n)$ 记作 $a_n = o(b_n)(n \rightarrow \infty)$.

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是定义在 \mathbb{N}^* 上的数列. 如果 $\exists M, \frac{a_n}{b_n} \leq M$ 对充分大的 n 成立则称 a_n 是 b_n 的 $O(b_n)$ 记作 $a_n = O(b_n)(n \rightarrow \infty)$.

o, O 仅表示相对的大小关系, 只有在极限意义下才有意义. $o(a_n)$ 的含义实际是所有 a_n 的

无穷小量组成的集合, 因此前面的等号实际含义是 \in . 具体而言

$$o(a_n) = \left\{ t_n \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{a_n} = 0 \right\}, a_n = o(b_n) \Leftrightarrow a_n \in o(b_n).$$

我们试图用阶定量的表示这种无穷小的比较关系, 以一个有显式表达式的数列 $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n} + 10$ 为例, 我们可以说 $a_n = 10 + o(1)$, 也可以说 $a_n = 10 + \frac{2}{n} + o(\frac{1}{n})$, 也可以说 $a_n = 10 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$. 从此可以直观的看出我们逐渐给出了对 a_n 更精确的估计, 可以说这叫做 a_n 的渐近展开, 或者 a_n 的估计.

对于那些不能够给出显式表达式的数列, 如何求解其高阶渐近估计, 这是一个相当复杂的问题, Stolz 定理是解决这类问题的一个重要工具.

习题 1.2.16 设 a_1, a_2, \dots, a_m 为 m 个正数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

解 设 $a_k = \max(a_1, a_2, \dots, a_m)$ 则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{ma_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_m^n} = a_k = \max(a_1, a_2, \dots, a_m).$$

Stolz 定理及其应用

定理 2.5 ($\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 定理) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\{b_n\}$ 严格递增趋于 $+\infty$. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A,$$

其中 A 可以是实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

注 完整的利用 Stolz 定理的计算过程要求先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$ 极限存在并求得 A , 然后

再利用 Stolz 定理求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. 不过不严谨的直接写出 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ 也是能接受的.

注 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \infty$ 时, Stolz 定理不一定成立. 反例可取 $a_n = (-1)^n, b_n = n$.

证明 先证明 A 是有限数 (实数) 的情况. 不妨设 $\{b_n\}$ 是正项数列. 假设条件成立对任意正数 ε 存在自然数 N_1 使得

$$A - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < A + \varepsilon, \quad n > N_1.$$

由于 $\{b_n\}$ 严格单调增所以

$$(A - \varepsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (A + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n), \quad n > N_1.$$

在上面不等式中分别列出 $N_1 + 1, N_1 + 2, \dots, n - 1$ 并将所得不等式相加得到

$$(A - \varepsilon)(b_n - b_{N_1+1}) < a_n - a_{N_1+1} < (A + \varepsilon)(b_n - b_{N_1+1}).$$

同除以 b_n 并整理得

$$\frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} - \frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} - \varepsilon \left(1 - \frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right) < \frac{a_n}{b_n} - A < \frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} - \frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} + \varepsilon \left(1 - \frac{b_{N_1+1}}{b_n}\right).$$

注意到 $\{b_n\} \rightarrow +\infty$ 对固定的 N_1 存在自然数 N_2 使得当 $n > N_2$ 时

$$-\varepsilon < \frac{a_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} - \frac{Ab_{N_1+1}}{b_{N_1+1}} < \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 于是当 $n > N$ 时有

$$-2\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - A < 2\varepsilon.$$

若 $A = +\infty$ 此时由题设及保号性 $\Rightarrow \exists N_2, N \geq N_2$, 使得

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n, \quad n > N.$$

并且 $a_{n+1} - a_n > b_{n+1} - b_n, \quad a_n - a_{n-1} > b_n - b_{n-1}, \dots, a_{N_2+1} - a_{N_2} > b_{N_2+1} - b_{N_2}$. 从而得 $a_{n+1} - a_{N_2} > b_{n+1} - b_{N_2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = +\infty$ 且 $\{a_n\}$ 严格增加.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1} - b_n}{a_{n+1} - a_n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty.$$

定理 2.6 ($\frac{0}{0}$ 型 Stolz 定理) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个收敛于 0 的数列, 且 $\{b_n\}$ 是严格递减数列. 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = A,$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A,$$

其中 A 可以是实数, 也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$.

例 2.10 证明:

- (1) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$;
- (2) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \geq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = a$.
- (3) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \geq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

解

- (1) 令 $b_n = n, \alpha_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 则 $b_n \uparrow +\infty$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n - (n-1)} = a$.

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n}{n} \right) = \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n - n + 1} \right) = e^{\ln a} = a.$$

$$(3) \text{ 改变有限项, 不会影响极限值, 不妨假设 } a_0 = 1, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_1}{a_0} \frac{a_2}{a_1} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}}} = a.$$

例 2.11 设 a_1, a_2, \dots, a_m 是 m 个常数, 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_1|^n + |a_2|^n + \cdots + |a_m|^n} = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_m|\}.$$

解 设 $h = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_m|\}$, 则 $h < (|a_1|^n + |a_2|^n + \cdots + |a_m|^n)^{\frac{1}{n}} < m^{\frac{1}{n}} h$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} m^{\frac{1}{n}} h = h$. 由夹逼定理, 得证.

例 2.12

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{n^2} = \frac{1}{2};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3};$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

解 仅证 4, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k - \cdots}.$

\cdots 中的项形如 n^{k-1}, n^{k-2}, \dots 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k-1}}{n^{k+1}} = 0$. 且至多有 k 项. 有限项极限相加, 可以用极限的四则运算.

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(k+1)n^k - \cdots} = \frac{1}{(k+1) + \lim_{n \rightarrow \infty} (C_{k+1}^2 \frac{1}{n} + \cdots + C_{k+1}^{k+1} \frac{1}{n^k})} = \frac{1}{k+1}.$$

定理 2.7 常用的平均值不等式:

设 a_1, a_2, \dots, a_n 是 n 个正数, 则有:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

取等号的条件是 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

这几个平均数分别名为:

$$\text{调和平均数} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}},$$

$$\text{几何平均数} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

$$\text{算术平均数} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

$$\text{平方平均数} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

实数集完备性的五个等价命题

以下五个命题等价, 且都说明了实数集是完备的.

定理 2.8 (确界存在原理) 有上(下)界的非空实数集 E 必有上(下)确界 $\sup E(\inf E)$.

定理 2.9 (单调有界极限存在准则) 若数列 $\{a_n\}$ 单调增(减)且有上(下)界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup a_n(\inf a_n)$.

定理 2.10 (闭区间套定理) 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $n = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数 ξ , 使得 $\xi \in [a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \dots$.

定理 2.11 (列紧性原理) 若 $\{a_n\}$ 有界且含无穷多项, 则 $\{a_n\}$ 必有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$.

定理 2.12 (柯西 (Cauchy) 准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

证明

$1 \Rightarrow 2$ 设 a_n 单减且有下界 m , $a_n \geq m > m - \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}^*$, 由确界存在原理, $E = \{a_n\}$ 有下确界, 记为 $a = \inf E$, 则 $a \geq m$, 且 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a - \varepsilon < a_n \leq a$, 即 $|a_n - a| < \varepsilon$. 由定义, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \inf \{a_n\}$.

$2 \Rightarrow 3$ 所有区间的左端点构成的数列 $\{a_n\}$ 是单调递增有上界的, 故有极限, 记为 a , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 同理, 所有区间的右端点构成的数列 $\{b_n\}$ 是单调递减有下界的, 故有极限, 记为 b , 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. 因此 $a - b = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, 即 $a = b$. 即证存在 $\xi = a = b$. 若存在另一实数 $\eta \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \dots$, 则 $\xi \leq \eta \leq \xi$, 即 $\xi = \eta$. 故唯一性得证.

$3 \Rightarrow 4$ 设 $|a_n| < M$, 取 $[\alpha_1, \beta_1] = [-M, M]$, 将其二分为 $[\alpha_1, \beta_1] = [\alpha_1, \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}] \cup [\frac{\alpha_1 + \beta_1}{2}, \beta_1]$, 两个子区间中至少有一个子区间包含无穷多个 a_n 的项, 记为 $[\alpha_2, \beta_2]$, 重复上述过程, 得到 $[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n - \alpha_n) = \frac{M - (-M)}{2^n} = 0$, 由闭区间套定理, 存在唯一的实数 ξ , 使得 $\xi \in [\alpha_n, \beta_n], n = 1, 2, \dots$.

然后构造收敛子列 $\{a_{n_k}\}$, 令 $n_1 = 1$, 由于区间 $[\alpha_2, \beta_2]$ 中包含无穷多个 a_n 的项, 可以找到 $n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_2} \in [\alpha_2, \beta_2]$, 以此类推, 可以找到 $n_3 > n_2 > n_1$, 使得 $a_{n_3} \in [\alpha_3, \beta_3]$, 重复此过程, 得到一个收敛子列 $\{a_{n_k}\}$.

$4 \Rightarrow 5$ 必要性是容易证明的, 因为 $\{a_n\}$ 收敛, 对于任意的一个正数 ε , 存在整数 N , 使得当 $m, n > N$ 时 $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}, |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, 因此就有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

下面证明充分性. 对于正数 $\varepsilon = 1$, 存在整数 N_1 , 使得当 $m, n > N_1$ 时, 有 $|a_m - a_n| < 1$. 令

$$M = \max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N_1}|, |a_{N_1+1}|\},$$

则有 $|a_n| \leq M, n = 1, 2, \dots$ 这说明 $\{a_n\}$ 是有界的. 由列紧性原理存在收敛的子列 $\{a_{n_k}\}$. 因为 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列, 所以对于任意意的 ε , 存在整数 N_2 , 使得当 $m, n > N_2$ 时, 有 $|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. 对于这个 ε , 因为 $\lim a_{n_k} = a$, 存在一个整数 K , 使得当 $k > K$ 时, 有 $|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$; 特别取一个 n_k 使得 $n_k > N_2$ 且 $n > N_2$ 时,

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Cauchy 收敛准则的强大之处在于, 它不要求事先猜出极限值. 也正是如此, 在我们说明一个数列发散的时候, 通常不利用极限定义的否定形式 (可以自行尝试一下这有多么繁琐), 而是利用 Cauchy 收敛准则的否命题.

命题 2.16 (Cauchy 收敛准则的否命题) 设数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 发散的充要条件是: 存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使得对 $\forall N \in \mathbb{N}^*$, 存在 $n_0, m_0 > N$, 有 $|a_m - a_n| \geq \varepsilon_0$.

例 2.13 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ 不存在

证明 对于任意 n , 存在 $p_1 = \left\lfloor \frac{n}{\pi} \right\rfloor \pi + \frac{3}{2}\pi, p_2 = \left\lfloor \frac{n}{\pi} \right\rfloor \pi + \frac{5}{2}\pi > \left\lfloor \frac{n}{\pi} + 1 \right\rfloor \pi > n$, 使得

$$|a_{p_1} - a_n|, |a_{p_2} - a_n| > \frac{1}{2}$$

二者至少有一成立.

注 其实我们不满足于这个结果, 在深入的学习中会发现这个数列的极限点几乎可以取遍 $[-1, 1]$, 或者对于任 $[-1, 1]$ 中的点, 都可以找到一个子列收敛到这个点. 这个问题的构造从知识结构上现在就可以解决, 请大家尝试进行证明.

习题 1.2.17 证明下列数列收敛:

- (1) $a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$;
- (2) $a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \cdots + \frac{1}{3^n+1}$;
- (3) $a_n = \alpha_0 + \alpha_1 q + \cdots + \alpha_n q^n$, 其中 $|\alpha_k| \leq M, (k = 1, 2, \dots)$, 而 $|q| < 1$;
- (4) $a_n = \frac{\cos 1}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 2}{2 \cdot 3} + \frac{\cos 3}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$.

解

(1) 由 $1 - \frac{1}{2^n} < 1$, 可知 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 由 $a_n < \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} < \frac{1}{2}$, 可知 $\{a_n\}$ 有上界, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \log_{|q|} \frac{\varepsilon(1-|q|)}{2M} \right\rceil + 1$, 则当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| = |\alpha_{n+1} q^{n+1} + \cdots + \alpha_m q^m| \leq M(|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \cdots) = M \frac{|q|^{n+1}}{1-|q|} < \varepsilon.$$

(4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, 则当 $m, n > N$ 时,

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m}{m(m+1)} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

例 2.14 证明

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} = 2.$$

解 设 $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, 则 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $a_n < 2$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a = \sqrt{2 + a} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$.

习题 1.2.18 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

- (1) $a_n = \frac{n}{c^n}$, ($c > 1$);
- (2) $a_1 = \frac{c}{2}$, $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$ ($0 \leq c \leq 1$);
- (3) $a > 0$, $a_0 > 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right)$ (提示: 先证明 $a_n^2 \geq a$);
- (4) $a_0 = 1$, $a_n = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1}$;
- (5) $a_n = \sin \sin \cdots \sin 1$ (n 个 \sin).

解

- (1) 由 $a_n > 0$, 且 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{c} < 1$ 在充分大时成立, 注 详细而言, 当 $n > \frac{1}{c-1}$ 时, 有 $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. 但数列极限与有限项无关, 我们只需要考虑充分大的 n .
可知 $\{a_n\}$ 在充分大时单调减, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 又由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{c^{n+1} - c^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c^n(c-1)} = 0.$$

(2)

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n)$$

由 $a_2 - a_1 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 > 0$, 可递归的得知 $a_{n+1} - a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $a_1 < c$, 归纳的可得 $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$, 因此 $\{a_n\}$ 有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$, 又由 $a_n > 0$, 可知 $a = 1 - \sqrt{1-c}$.

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right) \right)^2 \geq a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

因此 $\{a_n\}$ 在 $n \geq 1$ 时单调减, 且有下界 \sqrt{a} , 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a =$

$$(4) \quad \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{a} \right) = \sqrt{a}.$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} - \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + 1} \right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1} + 1)^2}$$

由 $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$ 归纳的可得 $1 + a_n - a_n^2 > 0$, 因此 $a_n - a_{n-1} > 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ 有上界, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 递推式两侧取极限, 得

$$a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(5) $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$, 因此 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 $a = \sin a \Rightarrow a = 0$.

综合练习

习题 1.2.19 设 $a_n \leq a \leq b_n$ ($n = 1, 2, \dots$), 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - b_n| < \varepsilon$. 又由 $a_n \leq a \leq b_n$, 可知 $|a_n - a| = a - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon$, 同理 $|b_n - a| < \varepsilon$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

例 2.15 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

证明

(1) $a = 0$ 时,

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \frac{a_n}{1} \rightarrow 0.$$

由夹逼定理, 得证.

(2) $a > 0$ 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = a,$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

由夹逼定理, 得证.

习题 1.2.20 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

解 由 2.15, 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{l} < 1$. 因此 $\exists r = \frac{1 + \frac{1}{l}}{2} \in (0, 1)$, 使得当 n 充分大时, $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}} < r$. 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} < r^n,$$

即 $a_n < a_1 r^n$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

习题 1.2.21 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是正数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, n = 1, 2, \dots$. 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

解 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, 则由 $a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = a_1 \cdot \frac{b_n}{b_1}$ 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b > 0$, 由原式有 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 单调减, 且 $\frac{a_n}{b_n} > 0$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛, 设

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = bc$.

习题 1.2.22 利用极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 求下列数列的极限:

$$(1) a_n = \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1};$$

$$(2) a_n = \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1};$$

$$(3) a_n = \left(\frac{1+2n}{2+2n}\right)^{2n^3};$$

$$(4) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3}.$$

简要说明: 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, 故 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的任意子列 $\left\{\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ 也收敛于 e . 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为 $\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ 的形式, 从而求出极限. 在此过程中

命题 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a, a_n > 0, a > 0$. $\{b_n\}$ 收敛于 b . 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = a^b$.

也相同有用.

解

$$(1) \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \Big|_{m=2n+1} \rightarrow e;$$

$$(2) \left(1 - \frac{1}{n-2}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{n-2 \cdot \frac{n+1}{n-2}} = e^1 = e;$$

$$(3) \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2) \cdot \left(-\frac{n}{n+2}\right)} = e^{-1};$$

$$(4) \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{n^3 \cdot 2} = e^2.$$

习题 1.2.23 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, 且 $|b_n| \geq b > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

解 对 $\forall M > 0$, 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时, $a_n > \frac{M}{b}$. 又由 $|b_n| \geq b > 0$, 可知 $|a_n b_n| \geq a_n |b| > M$. 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$.

习题 1.2.24 确定 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}$ 与 $n \sin \frac{n\pi}{2}$ ($n \geq 1$) 是否有界, 是否趋于无穷大.

解 $\sqrt[n]{n!}$ 无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \stackrel{\text{Stolz 定理}}{=} \frac{1}{\frac{1}{n}} = n \rightarrow \infty.$$

无界, 但是不趋于无穷大. 当 $n = 4k + 1$ 时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = 4k + 1$, 趋于无穷大; 当 $n = 4k + 3$ 时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = -(4k + 3)$, 趋于负无穷大; 当 n 为偶数时, $n \sin \frac{n\pi}{2} = 0$.

习题 1.2.25 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ ($n \geq 1$) 定义, 证明: $a_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$).

解 由 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = \frac{1}{a_n}(a_n + a_n + \frac{1}{a_n}) = 2 + \frac{1}{a_n^2} > 2$, 可知 $a_n^2 > 2(n-1)$, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

第3章 函数极限

三角函数, 反三角函数与双曲函数

正割函数 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, 余割函数 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$, 余切函数 $\cot x = \frac{1}{\tan x}$. 六个三角函数之间有如下关系:

$$(1) \sin x = \tan x \cdot \cos x$$

$$(2) \cos x = \sin x \cdot \cot x$$

$$(3) \tan x = \sin x \cdot \sec x$$

$$(4) 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$(5) 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$(6) \sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$$

$$(7) \sec 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$$

$$(8) \csc 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{2 \tan x}$$

$y = \sin x$ 在 R 上不单调, 不存在反函数. 我们取 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的反函数, 记为 $y = \arcsin x$. 因此 $f(x) = \sin(\arcsin x)$, $g(x) = \arcsin(\sin x)$, 都不一定等于 x .

反三角函数有如下相互关系:

$$(1) \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$(2) \arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$(3) \arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

正割函数 $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, 余割函数 $\csc x = \frac{1}{\sin x}$, 余切函数 $\cot x = \frac{1}{\tan x}$. 六个三角函数之间有如下关系:

$$(1) \sin x = \tan x \cdot \cos x$$

$$(2) \cos x = \sin x \cdot \cot x$$

$$(3) \tan x = \sin x \cdot \sec x$$

$$(4) 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

$$(5) 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

$$(6) \sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$$

$$(7) \sec 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$$

$$(8) \csc 2x = \frac{1 + \tan^2 x}{2 \tan x}$$

双曲正弦函数 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 双曲余弦函数 $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, 双曲正切函数 $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. 双曲函数有如下性质:

$$(1) \sinh(-x) = -\sinh x$$

$$(2) \cosh(-x) = \cosh x$$

$$(3) \sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \quad (4) \cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

$$(5) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$(6) \sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$$

$$(7) \cosh 2x = 2 \cosh^2 x - 1 = 1 + 2 \sinh^2 x$$

$$(8) \sinh' x = \cosh x$$

$$(9) \cosh' x = \sinh x$$

函数极限的定义

之前我们以 ε - N 语言定义了数列极限,

定义 3.1 (数列极限)

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon.$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n > M.$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, a_n < -M.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n > N, |a_n| > M.$$

类似地, 我们可以用 ε - δ 语言定义函数极限.

定义 3.2 设 x_0 为常数, 函数在 x_0 处的极限为 a 定义为:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

若 x 从大于 x_0 的一侧趋近于 x_0 , 则称为 x_0 的右极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon;$$

若 x 从小于 x_0 的一侧趋近于 x_0 , 则称为 x_0 的左极限, 记为

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

考虑 $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \beta$, β 可以是常数 $A, +\infty, -\infty, \infty$. α 可以是常数 $x_0, x_0^+, x_0^-, +\infty, -\infty$. 一共有 24 种情况. 我们全部列举如下:

$$(1) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > M.$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

- (9) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
- (10) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
- (11) $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
- (12) $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists \delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
- (13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
- (14) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
- (15) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
- (16) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
- (17) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
- (18) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
- (19) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
- (20) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
- (21) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
- (22) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
- (23) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
- (24) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$

注 也有的时候将函数 $f(x)$ 在 x_0 处的左极限记为 $f(x_0 - 0)$, 右极限记为 $f(x_0 + 0)$.

定理 3.1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$ (x_0 为常数)

证明 \Rightarrow : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$ 即对 $\forall 0 < x - x_0 < \delta \Leftrightarrow x_0 < x < x_0 + \delta$ 有 $|f(x) - a| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a.$ 同理可证 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a.$

\Leftarrow : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \delta_1 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$ 对上述 $\varepsilon, \exists \delta_2 > 0, \forall x, x_0 - \delta_2 < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$ 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$ 即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$

定理 3.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

证明 令 $x = \frac{1}{t}$, 则 $x \rightarrow \infty \Leftrightarrow t \rightarrow 0.$ 即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = a \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = a = \lim_{t \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$

上述最后一个等式由 $\lim_{t \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{t \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 给出.

例 3.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

函数极限的四则运算法则

定理 3.3 设 x_0, a, b, c_1, c_2 为常数, 令 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, 则:

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 a + c_2 b$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = a \cdot b$; 特别地, $\lim_{x \rightarrow x_0} f^2(x) = a^2$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b} (b \neq 0)$.

证明

- (1) 目的时要证明对于任意的正数 ϵ , 能够找到一个正数 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,
- $$|(c_1 f(x) + c_2 g(x)) - (c_1 a + c_2 b)| \leq \epsilon.$$

由极限的定义, 存在 δ_1, δ_2 , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|c_1|},$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$|g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|c_2|}.$$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 同时有

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|c_1|}, \quad |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|c_2|},$$

因此有

$$|c_1 f(x) + c_2 g(x) - (c_1 a + c_2 b)| = |c_1(f(x) - a) + c_2(g(x) - b)| \leq |c_1||f(x) - a| + |c_2||g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

- (2) 证明类似于第一小题。对于任意的正数 ϵ , 存在 δ_1 和 δ_2 , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|b|},$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$|g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|a|}.$$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, 则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 同时有

$$|f(x) - a| < \frac{\epsilon}{2|b|}, \quad |g(x) - b| < \frac{\epsilon}{2|a|},$$

因此有

$$|f(x)g(x) - ab| = |f(x)g(x) - af(x) + af(x) - ab| \leq |f(x)||g(x) - b| + |g(x) - b||f(x) - a|.$$

由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 附近连续, 故当 $x \rightarrow x_0$ 时, $|f(x)|$ 和 $|g(x)|$ 被有界地控制。因此我们有

$$|f(x)g(x) - ab| < \epsilon.$$

(3) 因为 $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \neq 0$, 我们只需证明数列 $\left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}$ 收敛于 $\frac{1}{b}$. 假设 $b > 0$, 则

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{g(x) - b}{g(x)b} \right|.$$

由于 $g(x)$ 收敛于 b , 一方面对于正数 $b/2 > 0$, 存在 δ_1 , 使得当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时,

$$|g(x) - b| < \frac{b}{2},$$

另一方面, 对于任意给定的正数 ϵ , 存在 δ_2 , 使得当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时,

$$|g(x) - b| < \frac{b^2 \epsilon}{2}.$$

所以, 当 $|x - x_0| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ 时,

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{b} \right| \leq |g(x) - b| \cdot \frac{2}{b^2} \cdot \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b}.$$

函数极限的性质与数列极限的性质类似, 即函数极限有**唯一性**、**局部有界性**、**保号性**、**保序性**. 其中有界性在函数极限中表现为**局部有界性**, 即函数在某点的极限存在, 则该函数在该点的某个邻域内有界. 这与数列极限的有界性表现上略有不同, 这里给出证明:

定理 3.4 (函数极限的局部有界性) 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 点 $x_0 \in I$, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界, 即 $\exists \delta > 0, \exists M > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M$.

证明 局部有界性的证明: 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 I , 点 $x_0 \in I$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon \Leftrightarrow |f(x)| < |a| + \epsilon$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有界, 但 $f(x)$ 在整个定义域 I 内未必有界.

若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 且 $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 I 上连续. 当 $f(x)$ 在 x_0 处连续时, 有 $f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, 即连续函数的极限与函数值可以交换次序.

幂 (x^α, α 为常量), 指数 ($a^x, a > 0$), 三角函数 ($\sin x, \cos x, \tan x$), 对数函数 ($\log_a x, a > 0, a \neq 1$), 指数函数 (e^x), 反三角函数 ($\arcsin x, \arccos x, \arctan x$), 双曲函数 ($\sinh x, \cosh x, \tanh x$) 等函数在其定义域内均连续. 一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.

3 个重要的函数极限及其证明

命题 3.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

证明 首先考虑右极限。设 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, 由于 $\sin x > 0$, 由引理易知

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{即} \quad \frac{\sin x}{x} < \frac{\cos x}{x} < 1.$$

因此

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \left(\sin \frac{x}{2} \right)^2 < 2 \sin \frac{x}{2} < x.$$

所以, 由两边夹的得到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 令 $y = -x$, 则 $y \rightarrow 0^+$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sin y}{y} = 1.$$

命题 3.2

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

证明 由于对于任意的 $x > 1$, 有 $[x] \leq x < [x] + 1$, 以及

$$\left(1 + \frac{1}{[x]} \right)^x < \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x] + 1} \right)^x,$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x]} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{[x] + 1} \right)^x = e.$$

根据两边夹定理, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 令 $y = -x$, 则 $y \rightarrow -\infty$, 利用上面结果, 就有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{1 - y} \right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y - 1} \right)^{y-1} = e.$$

这就证明了

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

命题 3.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$$

证明

- (1) 当 $m > n$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} + \cdots + a_n x^{n-m}}{b_0 + b_1 x^{m-n-1} + \cdots + b_m x^{m-n}} = \frac{a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0}{b_0 + b_1 \cdot 0 + \cdots + b_m \cdot 0} = \frac{0}{b_0} = 0.$
- (2) 当 $m = n$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} = \frac{a_0}{b_0}.$
- (3) 当 $m < n$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \infty.$

函数无穷大的比较

命题 3.4 (常用函数无穷大) 设 a, A, m 为常数, 且 $a > 1, \alpha > 0, m > 0$, 证明: $x^x \gg a^x \gg x^\alpha \gg (\ln x)^m$, 在 $x \rightarrow +\infty, x > 0, x \in R$ 时成立.

证明

- (1) 设 $n \leq x < n+1$, 则 $\begin{cases} n^n \leq n^x < (n+1)^n, \\ a^n \leq a^x < a^{n+1}, \end{cases} \Rightarrow \frac{a^n}{(n+1)^{n+1}} < \frac{a^x}{x^x} < \frac{a^{n+1}}{n^n}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有 $n \rightarrow \infty$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{(n+1)^{n+1}} = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty$, 故 $x^x \gg a^x$.
- (2) 设 $n \leq x < n+1$, 则 $\frac{n^\alpha}{a^{n+1}} < \frac{x^\alpha}{a^x} < \frac{(n+1)^\alpha}{a^n}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有 $n \rightarrow \infty$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^{n+1}} = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{a^x} = +\infty$, 故 $x^\alpha \gg a^x$.
- (3) 设 $n \leq x < n+1$, 则 $\frac{\ln n}{(n+1)^\alpha} < \frac{\ln x}{x^\alpha} < \frac{\ln(n+1)}{n^\alpha}$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有 $n \rightarrow \infty$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{(n+1)^\alpha} = 0$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{x^\alpha} = +\infty$, 故 $x^\alpha \gg a^x$.

例 3.2 证明:

- | | |
|--|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2};$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1;$ |
| (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$ | (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$ |
| (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0, a \neq 1.$ | (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \neq 0.$ |
| (7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$ | (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 6} \right)^{4x} = e^{12}.$ |

上述例 (1) ~ (6) 今后可作为公式直接使用, 并可记为: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

- $$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{1 - \cos x}{x^2} \sim \frac{1}{2}; & (2) \quad & \arcsin x \sim x; \\ (3) \quad & \ln(1+x) \sim x; & (4) \quad & e^x - 1 \sim x; \\ (5) \quad & a^x - 1 \sim \ln a \cdot x; & (6) \quad & (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x. \end{aligned}$$

证明

- $$\begin{aligned} (1) \quad & 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{4} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}. \\ (2) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\arcsin x} = 1. \\ (3) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1. \\ (4) \quad & \text{令 } e^x - 1 = u, \text{ 则 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } u \rightarrow 0, \text{ 且 } x = \ln(1+u), \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \\ & \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \ln(1+u)} = 1. \\ (5) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \ln a, \text{ 令 } u = x \ln a, \text{ 则 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } u \rightarrow 0, \text{ 且 } x = \frac{u}{\ln a}, \text{ 故} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \ln a. \\ (6) \quad & \text{令 } u = \alpha \ln(1+x), \text{ 则 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } u \rightarrow 0, \text{ 且 } x = \frac{u}{\alpha}, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = \\ & \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \ln(1+x)}{x} = 1 \cdot \alpha = \alpha. \\ (7) \quad & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln \cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{\ln \cos x}{x} \right) = \exp \left(\frac{1}{2} \frac{\ln \cos x}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{x} \right) = \\ & \exp \left(\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1) \right) = \frac{1}{\sqrt{e}}. \\ (8) \quad & \frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 6} = 1 + \frac{3x - 11}{x^2 + 6} \rightarrow 1 + 0 = 1, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 3x - 5}{x^2 + 6} \right)^{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{3x - 11}{x^2 + 6} \right)^{\frac{x^2 + 6}{3x - 11} \cdot \frac{3x - 11}{x^2 + 6} \cdot 4x} = \\ & \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{3x - 11}{x^2 + 6} \cdot 4x} = e^{12}. \end{aligned}$$

其中 7, 8 为底数与指数皆为变量, 且底数的极限值为 1, 指数的极限值为 $+\infty$, 这种形式的极限求解时, 可以尝试取对数, 然后利用对数函数的连续性, 将指数提取出来, 再求极限. 我们称这种形式的极限为 1^∞ 型不定式.

不定式是相对于 $\alpha(x)^{\beta(x)}$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ 都有非 0 常数极限而言的, 后者很好求极限. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \beta$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x)^{\beta(x)} = \alpha^\beta$. 当 α, β 中有 $0, +\infty$ 时, 则需要仿照 7, 8 的方法进行求解.

函数 $y = f(x)$ 的连续性

设 x_0 是常数,

(1) $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 处间断 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$: 称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

$f(x)$ 的间断点分类: $\begin{cases} \text{(I)} f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) \text{ 均存在的间断点为第一类间断点;} \\ \text{(II)} f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) \text{ 至少有一个不存在的间断点为第二类间断点.} \end{cases}$

例 3.3 六类基本初等函数 (幂, 指数, 三角, 对数, 指数, 反三角, 双曲) 在其定义域内均连续. 如 $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ 在 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时连续, 且从 $f(\frac{\pi}{2} - 0) = +\infty, f(\frac{\pi}{2} + 0) = -\infty$ 可知 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处第二类间断点.

又如

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处, $f(0 - 0) = -1, f(0 + 0) = 1, f(0) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处第一类间断点.(跳跃间断点)

定理 3.5 连续函数的和, 差, 积, 商仍是连续函数.

例 3.4 设 $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ 在区间 I 上连续, 且 c_1, c_2, \dots, c_m 为常数, 则线性组合 $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_m f_m(x)$ 在 I 上连续. 这表明连续函数具有线性性.

定理 3.6 连续的函数 $y = f(x)$ 若有反函数 $x = g(y)$ 或写为 $y = g(x)$, 则反函数 $y = g(x)$ 也是连续函数. 理由: 函数与其反函数关于直线 $y = x$ 对称.

例 3.5 $y = \sin x$ 在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x = \arcsin y$ 在 $[-1, 1]$ 上连续.

$y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上连续且单调减, 故有反函数 $x = \arccos y$ 在 $[-1, 1]$ 上连续且单调减.

$y = \tan x$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x = \arctan y$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且单调增.

注 六个反三角函数都是有界变量

例 3.6 e^x 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x = \ln y$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续且单调增.

定理 3.7 连续函数的复合函数仍是连续函数.

证明 对于任意给定的正数 ε , 因为 f 在 u_0 连续, 则存在一个正数 $\eta > 0$, 使得当 $|u - u_0| < \eta$ 时,

$$|f(u) - f(u_0)| < \varepsilon.$$

对于上述 $\eta > 0$, 又因为 g 在 x_0 连续, 所以下面存在一个正数 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$

时,

$$|g(x) - g(x_0)| = |u - u_0| < \eta.$$

于是, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 从上面两个不等式得到

$$|f(g(x)) - f(g(x_0))| = |f(u) - f(u_0)| < \varepsilon,$$

即函数 $f(g(x))$ 在 x_0 连续。

该定理也可以表示为下面形式

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right).$$

由六种基本初等函数经过有限次四则运算, 有限次符合运算的函数统称为初等函数.

定理 3.8 一切初等函数, 包括一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.(注: 初等函数的定义域中若存在孤立点 x_0 , 则 $f(x)$ 在 x_0 处仍是连续的.)