# 数学分析讲义 (第一册)
# 习题解答

October 27, 2025

如有疏漏, 欢迎指正. 联系邮箱: liuyue22@mail.ustc.edu.cn

# 目录

# 第 1 章 极限

## 习题 1.1

**习题 1.1.1** 设 $a$ 是有理数, $b$ 是无理数. 求证: $a+b$ 和 $a-b$ 都是无理数; 当 $a \neq 0$ 时, $ab$ 和 $\dfrac{b}{a}$ 也都是无理数.

**解** 设 $a$ 是有理数,$b$ 是无理数.

(1) 若 $a+b$ 是有理数, 则 $b=(a+b)-a$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $a-b$ 是无理数.

(2) 若 $ab$ 是有理数, 则 $b=\dfrac{ab}{a}$ 是有理数, 矛盾. 同理可证 $\dfrac{b}{a}$ 是无理数.

**习题 1.1.2** 求证: 两个不同的有理数之间有无理数.

**解** 设 $a, b$ 是两个不同的有理数, 不妨设 $a<b$. 则存在正整数 $k, N$ 使得

$$\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} a < N < \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b.$$

具体而言, 取 $k > \lceil \log_2(b-a) \rceil$, 则 $k > \log_2 \dfrac{2\sqrt{2}}{b-a} \Rightarrow 2^k(b-a) > 2\sqrt{2} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b - \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} a > 2$. 因此, 存在整数 $N = \left\lfloor \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b \right\rfloor$, 使得 $\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} a < N < \left(\sqrt{2}\right)^{2k-1} b$. 于是

$$a < \frac{N}{\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}} < b.$$

而 $\dfrac{N}{\left(\sqrt{2}\right)^{2k-1}} = \dfrac{N\sqrt{2}}{2^k}$ 是无理数.

**习题 1.1.3** 求证: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 以及 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 都是无理数.

**解**

(1) 设 $\sqrt{2}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$, 其中 $p, q$ 互素. 因此 $2q^2=p^2$, 由素数分解的唯一性可知 $p$ 是偶数, 设 $p=2k$, 则 $2q^2=4k^2 \Rightarrow q^2=2k^2$, 同理可知 $q$ 也是偶数, 与 $p, q$ 互素矛盾. 因此 $\sqrt{2}$ 是无理数.

(2) 设 $\sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$, 其中 $p, q$ 互素. 因此 $3q^2=p^2$, 由素数分解的唯一性可知 $p$ 是 3 的倍数, 设 $p=3k$, 则 $3q^2=9k^2 \Rightarrow q^2=3k^2$, 同理可知 $q$ 也是 3 的倍数, 与 $p, q$ 互素矛盾. 因此 $\sqrt{3}$ 是无理数.

(3) 设 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是有理数, 则 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{p}{q}$, 其中 $p, q$ 互素. 因此 $2+3+2\sqrt{6}=\dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow \sqrt{6}=\dfrac{p^2-5q^2}{2q^2}$, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 因此 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数.

**习题 1.1.4** 把下列循环小数表示为分数:

(1) $0.24999\ldots$ (2) $0.\dot{3}7\dot{5}$ (3) $4.\dot{5}1\dot{8}$

**解**

(1) 设 $x = 0.24999\ldots$, 则 $10x = 2.4999\ldots$, 因此 $9x = 2.25 \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

(2) 设 $x = 0.\dot{3}7\dot{5}$, 则 $1000x = 375.375375\ldots$, 因此 $999x = 375 \Rightarrow x = \dfrac{375}{999} = \dfrac{125}{333}$.

(3) 设 $x = 4.\dot{5}1\dot{8}$, 则 $1000x = 4518.518518\ldots$, 因此 $999x = 4514 \Rightarrow x = \dfrac{4514}{999} = \dfrac{122}{27}$.

**习题 1.1.5** 设 $r, s, t$ 都是有理数. 求证:

(1) 若 $r + s\sqrt{2} = 0$, 则 $r = s = 0$;

(2) 若 $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0$, 则 $r = s = t = 0$.

**解**

(1) 假设 $s \neq 0$, 则 $\sqrt{2} = -\dfrac{r}{s}$ 是有理数, 与 $\sqrt{2}$ 是无理数矛盾. 因此 $s = 0$, 从而 $r = 0$.

(2) $r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} = 0 \Rightarrow r^2 = 2s^2 + 3t^2 + 2st\sqrt{6} \Rightarrow \left(r^2 - 2s^2 - 3t^2\right) + (-2st)\sqrt{6} = 0.$ :

与 (1) 类似, 若 $st \neq 0$, 则 $\sqrt{6} = \dfrac{r^2 - 2s^2 - 3t^2}{2st}$ 是有理数, 与 $\sqrt{6}$ 是无理数矛盾. 故 $st = 0$,

(a) 若 $t = 0$, 则 $r + s\sqrt{2} = 0$, 由 (1) 可知 $r = s = 0$;

(b) 若 $s = 0$, 则 $r + t\sqrt{3} = 0$, 同理可知 $r = t = 0$.

**习题 1.1.6** 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 有相同的符号, 且都大于 $-1$. 证明:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

**解** 利用数学归纳法:

当 $n = 1$ 时, 等式为

$$1 + a_1 \geqslant 1 + a_1,$$

显然成立.

假设当 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_k) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k.$$

以此作为条件, 当 $n = k + 1$ 时, 由 $a_{k+1} > -1$, 可知 $1 + a_{k+1} > 0$, 因此

$$\begin{aligned}(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_k)(1 + a_{k+1}) &\geqslant (1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k)(1 + a_{k+1}) \\ &= 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \\ &\geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}.\end{aligned}$$

其中 $a_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+1} + \cdots + a_k a_{k+1} \geqslant 0$, 因为 $a_i$ 与 $a_{k+1}$ 符号相同.

**习题 1.1.7** 设 $a, b$ 是实数, 且 $|a| < 1, |b| < 1$. 证明:

$$\left|\frac{a + b}{1 + ab}\right| < 1.$$

**解** 由 $|a|<1,|b|<1$, 可知 $ab \neq -1$. 因此

$$\left|\frac{a+b}{1+ab}\right|<1 \Leftrightarrow |a+b|<|1+ab| \Leftrightarrow (a+b)^2<(1+ab)^2.$$

即

$$a^2+b^2+2ab<1+a^2b^2+2ab \Leftrightarrow a^2+b^2<1+a^2b^2 \Leftrightarrow (1-a^2)(1-b^2)>0.$$

显然成立.

# 习题 1.2

**习题 1.2.1** 用定义证明下面的结论:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{5+3n}=\dfrac{1}{3}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n}=0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n}=0$.

**解**

(1) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{5}{9\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n}{5+3n}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{3n-(5+3n)}{3(5+3n)}\right|=\frac{5}{3(5+3n)}<\frac{5}{9n}<\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin n}{n}-0\right|=\frac{|\sin n|}{n}\leqslant\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

(3) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon^2}-1\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}-0\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon.$$

(4) $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lceil\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rceil$, 则当 $n>N$ 时, 有

$$\left|\frac{n!}{n^n}-0\right|=\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

**习题 1.2.2** 若数列 $\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 满足条件: 任给正数 $\varepsilon$, 存在正整数 $N$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ (其中 $M$ 为常数), 则 $\{a_n\}$ 必以 $a$ 为极限.

$M$ 为常数指的是 $M$ 不依赖于 $\varepsilon$ 和 $n$. 例如 $M=2, M=1000$ 等都是常数. 也就是说, 上述 (2) 其实等价于 $\forall M>0,\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<M\varepsilon$ 成立.

**习题 1.2.3** 证明: 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$ 时, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. (数列极限的许多证明问题, 都可用同样的方法处理.)

**解** 充分性: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

必要性: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^*,\forall n>N$ 都有 $|a_n-a|<\varepsilon$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a)=0$.

**习题 1.2.4** 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$; 反之不一定成立 (试举例说明). 但若 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

**解** 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \varepsilon$. 则

$$||a_n| - |a|| \leqslant |a_n - a| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.

反之不一定成立, 如数列 $a_n = (-1)^n$, 则 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$, 但 $\{a_n\}$ 发散.

若 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, 则 $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $||a_n| - 0| < \varepsilon$. 则

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

即 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**习题 1.2.5** 证明: 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 又 $|b_n| \leqslant M, (n = 1, 2, \cdots)$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

**解** 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$, 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - 0| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. 则

$$|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

即 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

**习题 1.2.6** 证明: 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = a$, 及 $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = a$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

**解** 按已知条件 $\forall\varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$, 当 $n > N_1$ 时 $|x_{2n} - a| < \varepsilon$. 又 $\exists N_2 > 0$, 当 $n > N_2$ 时 $|x_{2n+1} - a| < \varepsilon$. 于是令 $N = \max\{2N_1, 2N_2 + 1\}$, 则 $n > N$ 时恒有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 故 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

**习题 1.2.7** 证明下列数列不收敛:

(1) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$; (2) $a_n = 5\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) + (-1)^n$.

**解**

(1) 取 $a_{2n} = \dfrac{2n}{2n+1}, a_{2n+1} = -\dfrac{2n+1}{2n+2}$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -1$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

(2) 取 $a_{2n} = 5\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) + 1, a_{2n+1} = 5\left(1 - \dfrac{2}{2n+1}\right) - 1$, 则 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 6, \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 4$, 而如果 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$, 矛盾.

**习题 1.2.8** 求下列极限:

(1) $a_n = \dfrac{4n^2 + 5n + 2}{3n^2 + 2n + 1}$;

(2) $a_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{(n-1)n}$;

(3) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{6}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n(n+1)/2}\right),\ n = 2, 3, \ldots$;

(4) $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{2^2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$;

(5) $a_n = (1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^m}),\ (|q| < 1)$.

**解**

(1)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{3+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 4 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}} = \frac{4+0+0}{3+0+0} = \frac{4}{3}.$$

(2)

$$a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1-0 = 1.$$

(3)

$$\begin{aligned} a_n =& \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{(n^2+n-2)/2}{n(n+1)/2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\ =& \frac{(1\cdot 2\cdots(n-1))\cdot(4\cdot 5\cdots(n+2))}{(2\cdot 3\cdots(n))\cdot(3\cdot 4\cdots(n+1))} = \frac{1\cdot(n+2)}{n\cdot 3} = \frac{n+2}{3n}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\frac{1}{n} = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

(4)

$$a_n = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

(5)

$$a_n = \frac{(1-q)(1+q)(1+q^2)(1+q^4)\cdots(1+q^{2^n})}{1-q} = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q},$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-\lim\limits_{m\to\infty} q^{2^{n+1}}}{1-q} = \frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}.$$

**习题 1.2.9** 若 $a_n \neq 0 (n=1,2,\dots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 能否断定 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1$?

**解** 不能. 例如 $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.

一个可能的错误做法是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} a_{n+1}} = \frac{a}{a} = 1,$$

但这是不允许的, 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 可能为 0.

**习题 1.2.10** 若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = 0$, 是否必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$? 若还假设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 回答同样的问题.

**解** 不一定. 例如 $a_n = \begin{cases} 1, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}$, $b_n = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 1, & n\text{为偶数} \end{cases}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, 但

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均不存在.

当 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 时成立. 假设 $a \neq 0$ 时, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n b_n}{a_n} = \dfrac{0}{a} = 0$.

**习题 1.2.11** 若数列 $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则数列 $\{a_n \pm b_n\}, \{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性如何? 举例说明. 若数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 皆发散, 回答同样的问题.

**解**

(1) $\{a_n\}$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 发散, 则

(a) $\{a_n+b_n\}, \{a_n-b_n\}$ 都发散可以采用反证法: 若 $\{a_n+b_n\}$ 收敛, 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 容易知道 $\{a_n+b_n-a_n\} = \{b_n\}$ 收敛, 这与 $\{b_n\}$ 发散矛盾, 因此 $\{a_n+b_n\}$ 发散, $\{a_n-b_n\}$ 同理可得.

(b) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

I. $a_n = \dfrac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = 1$ 收敛;

II. $a_n = 1, b_n = n$, 则 $a_n \cdot b_n = n$ 发散.

(2) $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都发散, 则

(a) $\{a_n + b_n\}$ 的收敛性不确定

I. $a_n = n, b_n = -n$, 则 $a_n + b_n = 0$ 收敛.

II. $a_n = n, b_n = n$, 则 $a_n + b_n = 2n$ 发散.

(b) $\{a_n - b_n\}$ 的收敛性不确定

I. $a_n = n + \dfrac{1}{n}, b_n = n$, 则 $a_n - b_n = \dfrac{1}{n}$, 收敛.

II. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n-1}$, 则 $a_n - b_n = 2 \cdot (-1)^n$ 发散.

(c) $\{a_n \cdot b_n\}$ 的收敛性不确定.

I. $a_n = \begin{cases} 1, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}, b_n = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ 1, & n\text{为偶数} \end{cases}$, 则 $a_n \cdot b_n = 0$ 收敛.

II. $a_n = n, b_n = (-1)^n$, 则 $a_n \cdot b_n = (-1)^n n$ 发散;

**习题 1.2.12** 下面的推理是否正确?

(1) 设数列 $\{a_n\} : a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - 1\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解: 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 在 $a_{n+1} = 2a_n - 1$ 两边取极限, 得 $a = 2a - 1$, 即 $a = 1$.

(2)

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \\
&= \underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n\text{个}} = 0.
\end{aligned}$$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^n=1^n=1.$

**解**

(1) 错误. 不能在未知数列是否收敛时, 就假设极限存在并对递推公式两边取极限. 实际上, 该数列的通项公式为 $a_n=1$, 所以 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$.

(2) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的和. 实际上

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

并有

$$\lim_{n\to}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=1,\lim_{n\to}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

(3) 错误. 不能将一个数列的极限拆成无穷多个数列极限的积. 实际上

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}.$$

**习题 1.2.13** 设数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 分别收敛于 $a,b$. 若 $a>b$, 则从某一项开始, 有 $a_n>b_n$; 反之, 若从某项开始恒有 $a_n\geqslant b_n$, 则 $a\geqslant b$.

**解** 这是保序性的直接推论.

**习题 1.2.14** 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 分别收敛于 $a$ 及 $b$. 记 $c_n=\max(a_n,b_n)$, $d_n=\min(a_n,b_n)$ $(n=1,2,\ldots)$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\max(a,b),\quad\lim_{n\to\infty}d_n=\min(a,b).$$

**解** 由 $\max(x,y)=\dfrac{x+y+|x-y|}{2}$, $\min(x,y)=\dfrac{x+y-|x-y|}{2}$, 以及数列极限的四则运算和绝对值运算可得.

**习题 1.2.15** 求下列极限:

(1) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right]$;

(2) $\lim_{n\to\infty}((n+1)^k-n^k)$, 其中 $0<k<1$;

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$;

(4) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n+2}-n\right)$;

(5) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\cos^2 1+\cos^2 2+\cdots+\cos^2 n}\right)$.

**解**

(1) 由于

$$0\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = 0.$$

(2) 由于

$$0 \leqslant ((n+1)^k - n^k) = n^k \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) \leqslant n^k \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^1 - 1\right) = n^{k-1}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} 0 = 0, \lim_{n\to\infty} n^{k-1} = 0.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} ((n+1)^k - n^k) = 0.$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \sqrt[2^k]{2} = \lim_{n\to\infty} 2^{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} = 2^{\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} = 2^1 = 2.$$

(4) 由 $\frac{1}{n}\ln(n^2-n+2) = O\left(\frac{\ln n}{n}\right) = o(1)$, 故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2-n+2} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln\left(n^2-n+2\right)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(n^2-n+2\right)} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(5) 由于

$$\sqrt[n]{\cos^2 1} \leqslant \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} \leqslant \sqrt[n]{n}.$$

并且

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^2 1} = 1, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

由夹逼准则

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cdots + \cos^2 n} = 1.$$

**习题 1.2.16** 设 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ 为 $m$ 个正数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \ldots, a_m).$$

**解** 设 $a_k = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, 则

$$a_k = \sqrt[n]{a_k^n} \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leqslant \sqrt[n]{m a_k^n} = m^{\frac{1}{n}} a_k.$$

由夹逼定理可得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=a_k=\max(a_1,a_2,\ldots,a_m).$$

**习题 1.2.17** 证明下列数列收敛:

(1) $a_n=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$;

(2) $a_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$;

(3) $a_n=\alpha_0+\alpha_1q+\cdots+\alpha_nq^n$, 其中 $|\alpha_k|\leqslant M,(k=1,2,\ldots)$, 而 $|q|<1$;

(4) $a_n=\dfrac{\cos 1}{1\cdot 2}+\dfrac{\cos 2}{2\cdot 3}+\dfrac{\cos 3}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{\cos n}{n(n+1)}$.

**证明**

(1) 由 $1-\dfrac{1}{2^n}<1$, 可知 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n>0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(2) 由 $a_n<\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}<\frac{1}{2}$, 可知 $\{a_n\}$ 有上界, 且 $a_n$ 单调递增, 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

(3) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor\log_{|q|}\dfrac{\varepsilon(1-|q|)}{2M}\right\rfloor+1$, 则当 $m>n>N$ 时,

$$|a_m-a_n|=|\alpha_{n+1}q^{n+1}+\cdots+\alpha_mq^m|\leqslant M(|q|^{n+1}+|q|^{n+2}+\cdots)=M\frac{|q|^{n+1}}{1-|q|}<\varepsilon.$$

(4) 利用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $N=\left\lfloor\dfrac{1}{\varepsilon}\right\rfloor+1$, 则当 $m>n>N$ 时,

$$|a_m-a_n|=\left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{\cos m}{m(m+1)}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

**习题 1.2.18** 证明下列数列收敛, 并求出其极限:

(1) $a_n=\dfrac{n}{c^n},\ (c>1)$;

(2) $a_1=\dfrac{c}{2},\ a_{n+1}=\dfrac{c}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}\ (0\leqslant c\leqslant 1)$;

(3) $a>0,a_0>0,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)$ (提示: 先证明 $a_n^2\geqslant a$);

(4) $a_0=1,\ a_n=1+\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}$;

(5) $a_n=\sin\sin\cdots\sin 1$ ($n$ 个 sin).

**解**

(1) 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{c^{n+1}-c^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{c^n(c-1)}=0.$$

(2)

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})$$

由 $a_2-a_1=\left(\dfrac{c}{2}\right)^2>0$, 可递归的得知 $a_{n+1}-a_n>0$, 因此 $\{a_n\}$ 单调增, 且 $a_1<c$, 归纳

的可得 $a_{n+1} < \frac{c}{2} + \frac{c^2}{2} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c$, 因此 $\{a_n\}$ 有上界, 故 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a = \frac{c}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 - 2a + c = 0 \Rightarrow a = 1 \pm \sqrt{1-c}$, 又由 $a_n > 0$, 可知 $a = 1 - \sqrt{1-c}$.

(3) 由均值不等式,

$$a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)\right)^2 \geqslant a$$

于是

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a - a_n^2}{2a_n} \leqslant 0$$

因此 $\{a_n\}$ 在 $n \geqslant 1$ 时单调减, 且有下界 $\sqrt{a}$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 则 $l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right)$, 解得 $l = \sqrt{a}$.

(4)

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{a_{n-1} + 1}$$

$$1 + a_n - a_n^2 = 1 + 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1} - \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+1}\right)^2 = \frac{1 + a_{n-1} - a_{n-1}^2}{(a_{n-1}+1)^2}$$

由 $1 + a_0 - a_0^2 = 1 > 0$ 归纳的可得 $1 + a_n - a_n^2 > 0$, 因此 $a_n - a_{n-1} > 0$, 即 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $1 + a_n - a_n^2 > 0 \Rightarrow a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 有上界, 因此 $\{a_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 递推式两侧取极限, 得 $a = 1 + \frac{a}{a+1} \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 由于 $a_n > 0$ 始终成立, 故 $a \geqslant 0$ 而 $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, 故舍去这一值, 进而得到 $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(5) $a_n = \sin a_{n-1} < a_{n-1}$, 因此 $\{a_n\}$ 单调减, 且 $a_n > 0$, 因此 $\{a_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $a = \sin a \Rightarrow a = 0$.

**习题 1.2.19** 设 $a_n \leqslant a \leqslant b_n\ (n = 1, 2, \ldots)$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. 求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

**解** 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时,$|a_n - b_n| < \varepsilon$. 又由 $a_n \leqslant a \leqslant b_n$, 可知 $|a_n - a| = a - a_n \leqslant b_n - a_n < \varepsilon$, 同理 $|b_n - a| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

**习题 1.2.20** 证明: 若 $a_n > 0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = l > 1$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**解** 先证明一个引理: 设 $a_n > 0, n = 1, 2, \ldots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

证明如下

(1) $a = 0$ 时,

$$0 \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

同时, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1} = 0$$

由夹逼定理, 得证.

(2) $a>0$ 时,

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n}} = a,$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

由夹逼定理, 得证.

回到本题,

可知 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{l} < 1$. 因此 $\exists r = \frac{1+\frac{1}{l}}{2} \in (0,1)$, 使得当 $n$ 充分大时, $\sqrt[n]{\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1}} < r$. 由此可知,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{a_2}{a_1} < r^n,$$

即 $a_n < a_1 r^n$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

**习题 1.2.21** 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是正数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n=1,2,\ldots$. 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 收敛.

**解** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 则由 $a_n = a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}} \leqslant a_1\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot\frac{b_3}{b_2}\cdots\frac{b_n}{b_{n-1}} = a_1\cdot\frac{b_n}{b_1}$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b > 0$, 由原式有 $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \leqslant \frac{a_n}{b_n}$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 单调减, 且 $\frac{a_n}{b_n} > 0$, 因此 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = bc$.

**习题 1.2.22** 利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, 求下列数列的极限:

(1) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}$; (2) $a_n = \left(1-\frac{1}{n-2}\right)^{n+1}$;

(3) $a_n = \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$; (4) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{2n^3}$.

简要说明: 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$, 故 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的任意子列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ 也收敛于 e. 因此, 我们可以通过适当的变形, 将题目中的数列变形为 $\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ 的形式, 从而求出极限. 对于类似于 $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ 的形式, 可以考虑先通分再变形去掉指数的负号即可处理.

在此过程中下列命题也相同有用:

**命题** 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a, a_n > 0, a > 0$. $\{b_n\}$ 收敛于 $b$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

请注意, 这条结论对于 $1^\infty$ 型是不能直接使用的, 即若 $a_n \to 1, b_n \to \infty$, 则不能直接说 $a_n^{b_n} \to 1^\infty = 1$. 但是对于 $a_n \to a > 1, b_n \to \infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \to a^{+\infty} = +\infty$; 对于 $a_n \to a < 1, b_n \to +\infty$, 则可以直接说 $a_n^{b_n} \to a^{+\infty} = 0$.

**解**

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m\bigg|_{m=2n+1} = \mathrm{e}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n-2}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^{-n-1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-3}\right)^{(n-3)\cdot\left(-\frac{n+1}{n-3}\right)} = \mathrm{e}^{-1}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+n}{2+n}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\cdot\left(-\frac{n}{n+1}\right)} = \mathrm{e}^{-1}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{2n^3} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^3\cdot 2} = \mathrm{e}^2$.

**习题 1.2.23** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 且 $|b_n| \geqslant b > 0\ (n = 1, 2, \ldots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

**解** 对 $\forall M > 0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, 存在 $N \in \mathbb{N}^*$, 使得当 $n > N$ 时,$|a_n| > \dfrac{M}{b}$. 又由 $|b_n| \geqslant b > 0$, 可知 $|a_n b_n| \geqslant |a_n||b| > M$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$.

**习题 1.2.24** 确定 $n \to \infty$ 时, $\sqrt[n]{n!}$ 与 $n\sin\dfrac{n\pi}{2}\ (n \geqslant 1)$ 是否有界, 是否趋于无穷大.

**解** $\sqrt[n]{n!}$ 无界, 且趋于无穷大. 由均值不等式,

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty$, 由 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

因此,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = +\infty$.

**注** Stolz 定理规范的思路要先说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ 存在, 然后才能说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 存在. 为了方便, 我们也会省去前面的部分, 直接写 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

$n\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 无界, 但是不趋于无穷大. 当 $n = 4k+1$ 时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2} = 4k+1$, 趋于无穷大; 当 $n = 4k+3$ 时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2} = -(4k+3)$, 趋于负无穷大; 当 $n$ 为偶数时,$n\sin\dfrac{n\pi}{2} = 0$.

**习题 1.2.25** 设数列 $\{a_n\}$ 由 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}\ (n \geqslant 1)$ 定义, 证明: $a_n \to +\infty\ (n \to \infty)$.

**解** 由 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n) = \dfrac{1}{a_n}(a_n + a_n + \dfrac{1}{a_n}) = 2 + \dfrac{1}{a_n^2} > 2$, 可知 $a_n^2 > 2(n-1)$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

**习题 1.2.26** 给出 $\dfrac{0}{0}$ 型 Stolz 定理的证明.

**命题 ($\dfrac{0}{0}$ 型的 Stolz 定理)** 设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 都是无穷小量, 其中 $\{a_n\}$ 还是严格单调减少数列, 又

存在 (其中 $l$ 为有限或 $\pm\infty$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l.$$

**证明**

(1) 当 $l$ 为有限值时, 根据条件对 $\varepsilon>0$ 存在 $N$, 使当 $n>N$ 时成立

$$\left|\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}-l\right|<\varepsilon.$$

由于对每个 $n$ 都有 $a_n>a_{n+1}$, 这样就有

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_{n+1})<b_n-b_{n+1}<(l+\varepsilon)(a_n-a_{n+1}).$$

任取 $m>n$, 并且将上述不等式中的 $n$ 换成 $n+1,\ldots,$ 直到$m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$(l-\varepsilon)(a_n-a_m)<b_n-b_m<(l+\varepsilon)(a_n-a_m),$$

以及

$$\left|\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}-l\right|<\varepsilon.$$

令 $m\to\infty$, 并利用条件 $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=\lim\limits_{m\to\infty}b_m=0$, 就知道当 $n>N$ 时成立

$$\left|\frac{b_n}{a_n}-l\right|\leqslant\varepsilon.$$

(2) $l=+\infty$ 时. 根据条件对任意 $M>0$ 存在 $N$, 使当 $n>N$ 时成立

$$\frac{b_n-b_{n+1}}{a_n-a_{n+1}}>M.$$

由于对每个 $n$ 都有 $a_n>a_{n+1}$, 这样就有

$$b_n-b_{n+1}>M(a_n-a_{n+1}).$$

任取 $m>n$, 并且将上述不等式中的 $n$ 换成 $n+1,\ldots,$ 直到$m-1$, 然后将所有这些不等式相加, 就得到

$$b_n-b_m>M(a_n-a_m),$$

以及

$$\frac{b_n-b_m}{a_n-a_m}>M.$$

令 $m\to\infty$, 并利用条件 $\lim\limits_{m\to\infty}a_m=\lim\limits_{m\to\infty}b_m=0$, 就知道当 $n>N$ 时成立

$$\frac{b_n}{a_n}>M.$$

# 习题 1.3

**习题 1.3.1** 按定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0, (a>1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x+1} = 1$;

(3) $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^2-1}{x^2+x} = 2$;

(4) $\lim\limits_{x\to0^+} x^{1/q} = 0$ ($q$ 为正整数).

**解**

(1) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\log_a\varepsilon$, 则当 $x<M$ 时, $|a^x-0|=a^x<a^M=\varepsilon$.

(2) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $M=\dfrac{2}{\varepsilon}+1$, 则当 $|x|>\max\{M,1\}$ 时, $\left|\dfrac{x-1}{x+1}-1\right|=\left|\dfrac{-2}{x+1}\right|\leqslant\dfrac{2}{|x|-1}<\varepsilon$.

(3) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$, 则当 $0<|x+1|<\delta$ 时, $\left|\dfrac{x^2-1}{x^2+x}-2\right|=\left|\dfrac{-x^2-2x-1}{x^2+x}\right|=\left|\dfrac{x+1}{x}\right|<\dfrac{\delta}{1/2}\leqslant\varepsilon$.

(4) 对 $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon^q$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $|x^{1/q}-0|=x^{1/q}<\delta^{1/q}=\varepsilon$.

**习题 1.3.2** 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\left(x^5-5x+2+\dfrac{1}{x}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$ ($n$ 为正整数);

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(3x+6)^{70}(8x-5)^{20}}{(5x-1)^{90}}$.

(1) 由四则运算的极限可知,

$$\lim_{x\to1}\left(x^5-5x+2+\frac{1}{x}\right)=1-5+2+1=-1.$$

(2) $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$, 因此

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=\sum_{k=0}^{n-1}1=n.$$

请注意, 这里 $n$ 是常数, 因此可以交换这 $n$ 个极限与求和的顺序.

(3)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{2}{3}.$$

(4)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(3+\dfrac{6}{x}\right)^{70}(8-\dfrac{5}{x})^{20}}{\left(5-\dfrac{1}{x}\right)^{90}}=\frac{\left(3+\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{x}\right)^{70}\left(8-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x}\right)^{20}}{\left(5-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}\right)^{90}}=\frac{3^{70}\cdot8^{20}}{5^{90}}$$

事实上, $\dfrac{3^{70}\cdot8^{20}}{5^{90}}=\left(\dfrac{3^7\cdot2^6}{5^9}\right)^{10}=0.000000000003572622918985825913651456872761246392142557535369616400676018940233797678923776.$

**习题 1.3.3** 证明下列极限不存在:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$;　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$.

(1) 用 Cauchy 收敛原理. 对 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, 任取 $M>0$, 总总存在 $k=\lceil M/\pi\rceil$, 使得 $x_1=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi>M, x_2=(k+1)\pi>M(k\in\mathbb{N}^*)$, 使得 $|\sin x_1-\sin x_2|=1>\varepsilon$. 因此极限不存在.

(2) 考虑两个单边极限,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}-1=-1.$$

而极限存在的充要条件是两个单边极限存在且相等, 因此极限不存在.

**习题 1.3.4** 设函数 $f(x)$ 在正无穷大处的极限为 $l$, 则对于任意趋于正无穷大的数列 $\{a_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$. 特别地 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$.

**(无穷版本的 Heine 定理)** **解** 对 $\forall\varepsilon>0$, 由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 存在 $M>0$, 使得当 $x>M$ 时, $|f(x)-l|<\varepsilon$. 又由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 存在 $N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, $a_n>M$. 因此当 $n>N$ 时, $|f(a_n)-l|<\varepsilon$. 由此可知 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$. 特别地, 取 $a_n=n$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)=l$.

**习题 1.3.5** 讨论下列函数在 $x=0$ 处的极限.

(1) $f(x)=[x]$;　　(2) $f(x)=\operatorname{sgn}x$;

(3) $f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ 1+x^2, & x<0.\end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0;\\ x, & x\leqslant 0.\end{cases}$

**解** **注** 教材中的符号 $[x]$ 表示 $x$ 的整数部分, 即不大于 $x$ 的最大整数. 本题中, 我们沿用此符号. 其他地方, 我们使用 $\lfloor x\rfloor$ 表示对 $x$ 向下取整, 使用 $\lceil x\rceil$ 表示对 $x$ 向上取整.

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$. 因此极限不存在.

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}x=1,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}x=-1$. 左右极限均存在, 但不相等, 因此极限不存在.

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}2^x=1,\quad \lim\limits_{x\to 0^-}(1+x^2)=1$. 因此极限存在, 且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在, 因此右极限不存在. 左极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$. 函数在 $x=0$ 处的极限不存在.

**注** $\lim\limits_{x\to 0^+}\cos\dfrac{1}{x}$ 的极限过程等同于考虑 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$, 而该极限不存在 (与习题 1.3.3(1)同理).

**习题 1.3.6** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$.

**解**

(1) 当 $\forall m\in\mathbb{N}^*, \sin\dfrac{x}{2^m}\neq 0$ 时, 二倍角公式变形可得 $\cos y=\dfrac{\sin 2y}{2\sin y}$, 当 $\sin y\neq 0$, 反复利用可知

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}}\cdots\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

(2) 若存在 $m_0\geqslant 1, \sin\dfrac{x}{2^m}=0$, 有 $\dfrac{x}{2^{m_0}}=k\pi, x=2^{m_0}k\pi, k\in\mathbb{Z}$. 自然的推论是 $\forall m\leqslant m_0$, 有 $\sin\dfrac{x}{2^m}=\sin(2^{m_0-m}k\pi)=0$.

此时根据是否存在最大的 $m_0$, 使得 $\sin\dfrac{x}{2^{m_0}}=0$ 可以分成两种情况:

(a) $x=0$, 则 $\forall m\in\mathbb{N}^*$, 有 $\cos\dfrac{x}{2^m}=1$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=1$;

(b) $x\neq 0\Leftrightarrow \exists\, m_0, \text{s.t.} \sin\dfrac{x}{2^{m_0}}=0, \sin\dfrac{x}{2^{m_0+1}}\neq 0$, 也就是存在最大的 $m_0$.

因此可以得到 $x=2^{m_0}k\pi, k=2l+1, l\in\mathbb{Z}$(如果 $k$ 是偶数, 那么与 $\sin\dfrac{x}{2^{m_0+1}}=\sin\dfrac{k\pi}{2}\neq 0$ 矛盾).

此时 $\cos\dfrac{x}{2^{m_0+1}}=\cos\dfrac{k\pi}{2}=\cos\left(l+\dfrac{1}{2}\right)\pi=0$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=0$.

不过又由于 $\sin x=0$ 同样成立, 并且 $x\neq 0$, 因此可以把结果合并进 $\dfrac{\sin x}{x}$.

综上所述,

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

**习题 1.3.7** 求证: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{\alpha}{n^2}+\sin\dfrac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n\alpha}{n^2}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$.

**解** 我们先证明如下事实:

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}, & \sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0;\\ 0, & \sin\dfrac{\theta}{2}=0.\end{cases}$$

我们利用积化和差

$$\sin\frac{\theta}{2}\sin k\theta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{\theta}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\right)=&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}-\cos\frac{5\theta}{2}+\cdots+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)\\ =&\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta.\end{aligned}$$

因此, 当 $\sin\dfrac{\theta}{2}\neq 0$ 自然有

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

另一种情况是显然的, 每一项都为 0.

回到本题, 首先, 如果 $\alpha\neq 0$, 那么这意味着存在充分大的 $N$ 使得 $n>N, 0<\left|\dfrac{\alpha}{n^2}\right|<\pi$, 此时, $\sin\dfrac{\alpha}{2n^2}\neq 0$. 因此 $n>N$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\frac{\alpha}{n^2}=\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\sin\frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}$$

考虑 $\sin x\sim x,(x\to 0)$, 于是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin k\frac{\alpha}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\sin\frac{n\alpha}{2n^2}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)\alpha}{2n^2}\cdot\frac{n\alpha}{2n^2}}{\frac{\alpha}{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\alpha}{2n}=\frac{\alpha}{2}.$$

如果 $\alpha=0$, 那么每一项都为 0, 极限自然为 $0=\dfrac{\alpha}{2}$.

综上所述,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\alpha}{n^2}+\sin\frac{2\alpha}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n\alpha}{n^2}\right)=\frac{\alpha}{2}.$$

**习题 1.3.8** 证明: 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确. 叙述并证明, 当 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时类似的结论. (应用本题结论, 可将极限过程为 $x\to\infty$ 的问题化为 $x\to 0$ 处理, 或者反过来. 例如, 我们有 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\mathrm{e}$.)

**解** 我们先给出这条命题的完整表述:

**命题** (1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

(3) 若 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$, 则 $\lim\limits_{x\to 0^-}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 反之亦正确;

**证明:**

(1) 由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l\Rightarrow\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. $\Rightarrow\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$.

反之, 若 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. $\Rightarrow$ $\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=l$.

(2) 由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l\Rightarrow\forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=l$. $\Rightarrow\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$.

反之, 若 $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. $\Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0^+$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$.

(3) 由 Heine 定理, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$. $\Rightarrow \forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0^-$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=-\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$. 反之, 若 $\lim\limits_{x\to0^-} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=l$, 由 Heine 定理, $\forall\{y_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0^-$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{y_n}\right)=l$. $\Rightarrow \forall\{x_n\}$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0^-$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$. 由 Heine 定理可知 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$.

**习题 1.3.9** 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

**解**

(1)

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}=1\cdot1\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}.$$

(2) 由和差化积,

$$\cos x-\cos 3x=2\sin 2x\sin x,$$

因此

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot4=1\cdot1\cdot4=4.$$

(3) 当 $x>\dfrac{7}{2}$ 时, 有 $0<\dfrac{x+1}{2x-1}<\dfrac{3}{4}$ 恒成立, 因此

$$0\leqslant\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^x$$

又由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^x=0$, 由夹逼定理可知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^x=0.$$

(4)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{2}{x^2-1}x^2}=\mathrm{e}^{\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-1}x^2}=\mathrm{e}^2$$

**习题 1.3.10** 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-2x^2}{x-2}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-x+1)$.

**解**

(1) $\arctan x$ 在 $x\to+\infty$ 时有界, 而 $x\to+\infty$ 时无界, 因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x}=0.$$

具体而言,

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

(2) 由夹逼定理,

$$-x^2\leqslant x^2\sin\frac{1}{x}\leqslant x^2,$$

且 $\lim\limits_{x\to0}-x^2=\lim\limits_{x\to0}x^2=0$, 因此

$$\lim_{x\to0}x^2\sin\frac{1}{x}=0.$$

(3)

$$\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)x^2}{x-2}=\lim_{x\to2}x^2=4.$$

(4) 证明:

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2-x+1)=+\infty.$$

由 $2x^2-x+1=x^2+(x-1/2)^2+3/4>x^2$, 因此对 $\forall M>0$, 取 $N=\sqrt{M}$, 则当 $x>N$ 时, $2x^2-x+1>x^2>N^2=M$. 由此可知

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2-x+1)=+\infty.$$

**习题 1.3.11** 按定义证明.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty,(a>1)$;

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\log_a x=-\infty,(a>1)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=+\infty$;

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{1/x}=+\infty$.

**解**

(1) 对 $\forall M>0$, 取 $N=a^M$, 则当 $x>N$ 时, $\log_a x>\log_a N=M$.

(2) 对 $\forall M<0$, 取 $\delta=a^M$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $\log_a x<\log_a\delta=M$.

(3) 对 $\forall M>0$, 取 $\delta=\dfrac{\pi}{2}-\arctan M$, 则当 $\dfrac{\pi}{2}-\delta<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时, $\tan x>\tan(\dfrac{\pi}{2}-\delta)=M$.

(4) 对 $\forall M>0$, 取 $\delta=\dfrac{1}{\ln M}$, 则当 $0<x<\delta$ 时, $\mathrm{e}^{1/x}>\mathrm{e}^{1/\delta}=M$.

**习题 1.3.12** 证明: 函数 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界, 但当 $x\to+\infty$ 时, 这个函数并不是无穷大量.

**解** $\forall M>0$, 存在 $x_0=(2k-1)\pi, k\in\mathbb{N}^*, 2k-1>M$, 因此 $y(x_0)=x_0\sin x_0=x_0>M$. 由此可知 $y=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界.

$\forall X>0$, 总存在 $x_1=2k\pi, k\in\mathbb{N}^*, 2k\pi>X$, 使得 $y(x_1)=x_1\sin x_1=0$. 因此当 $x\to+\infty$ 时, $y=x\sin x$ 并不是无穷大量.

**习题 1.3.13** 函数 $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 内是否有界? 又当 $x\to0^+$ 时, 这个函数是否为无穷大量?

**解** 考虑 $0^+$ 处的 $\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 与考虑 $+\infty$ 处的 $x\cos x$ 是等价的. 以与习题 1.3.12类似的方法可知, $y=x\cos x$ 在 $(0,+\infty)$ 内无界, 但当 $x\to+\infty$ 时, $y=x\cos x$ 并不是无穷大量. 因此, $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界, 但当 $x\to0^+$ 时, $y=\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ 并不是无穷大量.

**习题 1.3.14** 本题所涉及的函数极限有着鲜明的几何意义.

记函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线为 $C$. 若动点沿曲线无限远离原点时, 此动点与某一固定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线 $C$ 的一条渐近线.

(i) 垂直渐近线　易知 (垂直于 $x$ 轴的) 直线 $x=x_0$ 为曲线 $C$ 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty.$$

(ii) 水平渐近线　易知 (平行于 $x$ 轴的) 直线 $y=b$ 为曲线 $C$ 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b.$$

(iii) 斜渐近线　请读者证明, 方程为 $y=ax+b\,(a\neq0)$ 的直线 $L$ 为曲线 $C$ 的渐近线的充分必要条件是

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax);$$

或者

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax).$$

这里自然要假定所说的极限都存在. (提示: 以 $x\to+\infty$ 为例, 设曲线 $C$ 及直线 $L$ 上的横坐标为 $x$ 的点分别为 $M,N$. 则 $M$ 至 $L$ 的距离, 是 $|MN|$ 的一个常数倍. 因此, 直线 $L$ 为曲线 $C$ 的渐近线, 等价于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$, 由此易得所说结果.)

求下列曲线的渐近方程.

(1) $y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x}\right)$;　　(2) $y=\dfrac{3x^2-2x+3}{x-1}$.

**解** 先证明, 仅证明 $+\infty$, 另一种同理. 正如提示所说, 由于距离 $d=\left|\dfrac{f(x)-(ax+b)}{\sqrt{a^2+1}}\right|$, 因此 $l$ 是

渐近线, 等价于 $x \to +\infty$ 时 $d$ 趋于 0, 等价于 $f(x)-(ax+b)$ 趋于 0.

然后问题转化为了证明

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0 \Leftrightarrow a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax).$$

充分性: 由 $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$ 可知,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0.$$

必要性: 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax+b))=0$ 可知,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-a-\frac{b}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a,\quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b.$$

(1) (a) 垂直渐近线, $x=-\frac{1}{\mathrm{e}}$: $\lim\limits_{x\to(-\frac{1}{\mathrm{e}})^-}=-\frac{1}{\mathrm{e}}\lim\limits_{y\to0^+}\ln y=+\infty$;

(b) 斜渐近线, $y=x+\frac{1}{\mathrm{e}}$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(y(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}x(\ln(\mathrm{e}+\frac{1}{x})-1)=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{\mathrm{e}x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{\mathrm{e}x})}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/\mathrm{e}x}{1/x}=\frac{1}{\mathrm{e}}$ ($\pm\infty$ 两侧是同一条渐近线);

(2) (a) 垂直渐近线, $x=1$: $\lim\limits_{x\to1}y(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-2x+3}{x-1}=\infty$;

(b) 斜渐近线, $y=3x+1$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=3$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(y(x)-3x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-1}=1$;

**习题 1.3.15** 证明: 在同一极限过程中等价的无穷小量有下列性质:

(1) $\alpha(x)\sim\alpha(x)$ (自反性);

(2) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$, 则 $\beta(x)\sim\alpha(x)$ (对称性);

(3) 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $\beta(x)\sim\gamma(x)$, 则 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$ (传递性).

(注意, (1) 中自然需假定 $\alpha(x)$ 不取零值; 而在 (2)、(3) 中, 条件蕴含着, 所说的无穷小量在极限过程中均不取零值.)

**解** 解释一下, 这里说的是 (1) 需要没有 $\alpha(x)\equiv0$ 这种情况.(2)(3) 因为有“若 xxx”的假设自然排除了这种情况.

(1) 显然, $\lim\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)}=1$, 因此 $\alpha(x)\sim\alpha(x)$.

(2) 由 $\alpha(x)\sim\beta(x)$ 可知, $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, 因此 $\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=1$, 即 $\beta(x)\sim\alpha(x)$.

(3) 由 $\alpha(x)\sim\beta(x)$, $\beta(x)\sim\gamma(x)$ 可知, $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, $\lim\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1$, 因此 $\lim\frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\cdot\lim\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}=1$, 即 $\alpha(x)\sim\gamma(x)$.

**习题 1.3.16** 当 $x \to 0$ 时, 比较下列无穷小的阶:

(1) $\tan x - \sin x$ 与 $x^3$; (2) $x^3 + x^2$ 与 $\sin^2 x$;

(3) $1 - \cos x$ 与 $x^2$.

**解**

(1)

$$\tan x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} - \sin x = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right) = \sin x \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x}.$$

由 $\sin x \sim x, 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, \cos x \sim 1$, 可知

$$\tan x - \sin x \sim x \cdot \frac{x^2/2}{1} = \frac{x^3}{2}.$$

因此,

$$\tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3.$$

(2)

$$\sin^2 x = (\sin x)^2 \sim x^2 (x \to 0).$$

同时,

$$x^3 + x^2 = (x+1)x^2 \sim x^2 (x \to 0).$$

可得

$$x^3 + x^2 \sim \sin^2 x$$

(3)

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \sim 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}(x \to 0).$$

**习题 1.3.17** 当 $x \to +\infty$ 时, 试比较下列无穷大量的阶:

(1) $n$ 次多项式 $P_n(x)$ 与 $m$ 次多项式 $P_m(x)$ ($m, n$ 均为正整数);

(2) $x^\alpha$ 与 $x^\beta$ ($\alpha, \beta > 0$);

(3) $a^x$ 与 $b^x$ ($a, b > 1$).

**解**

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P_n(x)}{P_m(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{x^m} \dfrac{a_n + a_{n-1}\frac{1}{x} + \cdots}{b_m + b_{m-1}\frac{1}{x} + \cdots}$

$$=\frac{a_n}{b_m}\lim_{x\to+\infty}x^{n-m}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ +\infty, & n>m.\end{cases}\text{, 即得到}\begin{cases}P_n(x)\sim P_m(x), & n=m;\\ P_m(x)\text{更高阶}, & n<m;\\ P_n(x)\text{更高阶}, & n>m.\end{cases}$$

(2) 利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{x^\beta}=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha-\beta}=\begin{cases}1, & \alpha=\beta;\\ 0, & \alpha<\beta;\\ +\infty, & \alpha>\beta.\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x^\alpha\sim x^\beta, & \alpha=\beta;\\ x^\beta\text{更高阶}, & \alpha<\beta;\\ x^\alpha\text{更高阶}, & \alpha>\beta.\end{cases}$

(3) 利用 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{b^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\begin{cases}1, & a=b;\\ 0, & a<b;\\ +\infty, & a>b.\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a^x\sim b^x, & a=b;\\ b^x\text{更高阶}, & a<b;\\ a^x\text{更高阶}, & a>b.\end{cases}$

**习题 1.3.18** 试用等价无穷小量代换的方法计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ ($m,n$ 均为正整数);

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan ax}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

**解**

(1) 由 $\sin x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}.$$

(2) 由 $\tan x\sim x$, 可知 $a\neq0$ 时,

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan ax}{x}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{x}=a.$$

很显然该结果对 $a=0$ 也成立.

(3) 由 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $\arctan x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[n]{1+\sin x}-1}{\arctan x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{n}\sin x}{x}=\frac{1}{n}.$$

(4)

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x})(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}.$$

由 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$, $\sin x\sim x$, 可知

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

(5) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, \sin x \sim x$, 可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x} = \frac{1}{4}.$$

(6) 由 $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, 1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$, 可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{x^2}{2}} = 1.$$

# 第 1 章综合习题

**习题 1.C.1** 求下列数列的极限:

(1) $a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$ (提示: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$);

(2) $a_n = \frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}$;

(3) 设 $a_1>1, a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}, n=1,2,\cdots$;

(4) 设 $a_1=3, a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}, n=1,2,\cdots$.

**解**

(1) 由

$$(2n)^2=4n^2\geqslant 4n^2-1=(2n-1)(2n+1)$$

可得

$$\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}=\sqrt{\frac{2n-1}{2n+1}}.$$

因此

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\leqslant\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdots\frac{2n-1}{2n+1}}=\sqrt{\frac{1}{2n+1}}.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{2n+1}}=0$, 故由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;

(2) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+9}{2n-1}=\frac{1}{2}$, 知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdots\frac{n+9}{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+9}{2n-1}=\frac{1}{2}.$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a_n}\right)^n=0$;

(3) 由 $a_1>1$, 以及若 $a_n>1$ 时, $a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}>1$, 归纳的可知 $a_n>1, \forall n\in\mathbb{N}^+$. 所以数列有下界. 再用归纳法: 当 $n=1$ 时:

$$a_2-a_1=2-\left(\frac{1}{a_1}+a_1\right)\leqslant 2-2=0,$$

推出 $a_2\leqslant a_1$. 假设对 $n$ 有 $a_n\leqslant a_{n-1}$, 那么当 $n+1$ 时

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{a_n-a_{n-1}}{a_na_{n-1}}\leqslant 0.$$

所以 $\{a_n\}$ 是单调减有下界数列, 因此收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geqslant 1$. 在

$$a_{n+1}=2-\frac{1}{a_n}$$

两边取极限得

$$a=2-\frac{1}{a}\implies a^2-2a+1=0$$

解得 $a=\pm 1$. 但 $a=-1$ 不合题意, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$.

(4) $a_{n+2}=\dfrac{1}{1+a_{n+1}}=\dfrac{1}{1+\frac{1}{1+a_n}}=\dfrac{1+a_n}{2+a_n}$. 假如对任何 $n$, 有 $a_{2n}\geqslant a_{2n-2}$; $a_{2n+1}\leqslant a_{2n-1}$, 那么对 $n+1$, 有

$$a_{2n+2}-a_{2n}=\frac{1}{1+a_{2n+1}}-\frac{1}{1+a_{2n-1}}=\frac{a_{2n-1}-a_{2n+1}}{1+a_{2n+1}a_{2n-1}}\geqslant 0$$
$$a_{2n+3}-a_{2n+1}=\frac{1}{1+a_{2n+2}}-\frac{1}{1+a_{2n}}=\frac{a_{2n}-a_{2n+2}}{1+a_{2n+2}a_{2n}}\leqslant 0$$

推出数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{2n}\}$ 单调增有上界, $\{a_{2n-1}\}$ 单调减有下界. 因此分别收敛. 对

$$a_{2n+2}=\frac{1+a_{2n}}{2+a_{2n}},$$

两边取极限得

$$a=\frac{1+a}{2+a}\implies a^2+a-1=0$$

解得 $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 同理, 对

$$a_{2n+3}=\frac{1+a_{2n+1}}{2+a_{2n+1}},$$

两边取极限得

$$b=\frac{1+b}{2+b}\implies b^2+b-1=0$$

解得 $b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

**习题 1.C.2** 设 $\{a_n\}$ 为单调递增的数列, 并且收敛于 $a$, 证明对一切 $n$ 有 $a_n<a$. (对单调递减且有极限的数列, 类似的结论成立.)

**解** 反证法. 假设存在某个 $n_0$, 使得 $a_{n_0}>a$. 由数列单调递增的性质, 对一切 $n>n_0$ 有 $a_n\geqslant a_{n_0}>a$, 于是存在 $\varepsilon=\dfrac{a_{n_0}-a}{2}>0$, 使得 $\forall N$, 存在 $n=\max\{n_0,N\}+1>N$, 使得

$$|a_n-a|=a_n-a\geqslant a_{n_0}-a=2\varepsilon>\varepsilon,$$

这与数列收敛的定义矛盾.

**习题 1.C.3** 证明下面的数列收敛:

(1) $a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$;

(2) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$.

**解**

(1) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\leqslant 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=2-\frac{1}{n}<2,$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 因此 $\{a_n\}$ 收敛;

(2) 由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 又因为

$$a_n = \mathrm{e}^{\sum_{k=1}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)} \leqslant \mathrm{e}^{\sum_{k=1}\frac{1}{2^k}} = \mathrm{e}^1.$$

所以 $\{a_n\}$ 有上界. 又由数列定义可知 $\{a_n\}$ 单调递增. 因此 $\{a_n\}$ 收敛.

**习题 1.C.4** 试构造一个发散的数列 $\{a_n\}$, 满足条件: 对任意正数 $\varepsilon$, 存在正整数 $N$, 使当 $n > N$ 时, 有 $|a_{n+1} - a_n| < \varepsilon$.

**解** 取 $a_n = \sqrt{n}$. 则对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > \dfrac{1}{4\varepsilon^2}$, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_{n+1} - a_n| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

但数列 $\{a_n\}$ 显然发散.

**习题 1.C.5** 若数列 $\{a_n\}$ 满足: 存在常数 $M$, 使得对一切 $n$ 有

$$A_n = |a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leqslant M.$$

证明:

(1) 数列 $\{A_n\}$ 收敛;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 也收敛.

**解**

(1) 由数列定义可知 $\{A_n\}$ 单调递增. 又因为对一切 $n$ 有 $A_n \leqslant M$, 所以 $\{A_n\}$ 有上界. 因此 $\{A_n\}$ 收敛;

(2) 用 Cauchy 收敛准则证明. 由 (1) 知 $\{A_n\}$ 收敛, 因此对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N, \forall n > N+1, p > 0$, 有

$$|A_{n+p} - A_{n-1}| = |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

由三角不等式可知

$$|a_{n+p} - a_n| \leqslant |a_{n+1} - a_n| + |a_{n+2} - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a_{n+p-1}| < \varepsilon.$$

**习题 1.C.6** 设 $\{a_n\}$ 是正严格递增数列. 求证: 若 $a_{n+1} - a_n$ 有界, 则对任意 $\alpha \in (0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$. 并说明此结论的逆不对, 即, 存在正严格递增数列 $\{a_n\}$ 使得对任意 $\alpha \in (0,1)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = 0$, 但是 $a_{n+1} - a_n$ 无界. (提示: 考虑 $a_n = n\ln n$.)

**解**

(1) 若 $\{a_n\}$ 有界, 此时由于其严格单调, 故有极限, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha) = l^\alpha - l^\alpha = 0$.

(2) 若 $\{a_n\}$ 无界, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 设 $|a_{n+1} - a_n| \leqslant M$.

$$0 \leqslant a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha = a_n^\alpha\left(\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^\alpha - 1\right) < a_n^\alpha\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n^{1-\alpha}} \leqslant \frac{M}{a_n^{1-\alpha}}.$$

同时,

$$\lim_{n\to\infty} Ma_n^{\alpha-1}=0.$$

因此由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha})=0$.

(3) 反之不对, 取 $a_n=n\ln n$, 则

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha}&=(n+1)^{\alpha}\ln^{\alpha}(n+1)-n^{\alpha}\ln^{\alpha}\\
&<((n+1)^{\alpha}-n^{\alpha})\ln^{\alpha}n\\
&=n^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1\right)\ln^{\alpha}n\\
&<n^{\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)\ln^{\alpha}n\\
&=n^{\alpha-1}\ln^{\alpha}n=\frac{\ln^{\alpha}n}{n^{1-\alpha}}.
\end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^{\alpha}n}{n^{1-\alpha}}=0,$$

因此由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}^{\alpha}-a_n^{\alpha})=0$. 但

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)\ln(n+1)-n\ln n=\ln(n+1)+n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)>\ln(n+1),$$

显然无界.

**习题 1.C.7** 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=a$.

**解** 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=a.$$

**习题 1.C.8** 证明: 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 且 $a_n>0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

**解** 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}{n}}\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{1}}=\mathrm{e}^{\ln a}=a.$$

**习题 1.C.9** 证明: 若 $a_n>0$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ 也存在, 并且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

**解** 设 $b_n=\frac{a_n}{a_{n-1}},(n>1);b_1=a_1$, 则 $a_n=b_1b_2\cdots b_n$. 由综合习题 1.C.8可知结果. 直接 Stolz 也

可以得到结果.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}&=\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln a_n}{n}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{n}}\\&=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln a_{n+1}-\ln a_n}{1}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}}\\&=\mathrm{e}^{\ln\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}.\end{aligned}$$

**习题 1.C.10** 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$;　　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

**解**

(1) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1;$$

(2) 可以用综合习题 1.C.9来做, 记 $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$ 由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n\cdot(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\mathrm{e}.$$

**习题 1.C.11** 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\dfrac{a}{2}$.

**解** 由 Stolz 定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a}{2}.$$

**习题 1.C.12** 设 $\{a_n\}$ 且 $a_n\to a\in\mathbb{R}$, 又设 $\{b_n\}$ 是正数列, $c_n=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 求证:

(1) $\{c_n\}$ 收敛;

(2) 若 $(b_1+b_2+\cdots+b_n)\to+\infty$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

**解**

(1) 记 $B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 任取 $\varepsilon>0$, 存在 $K$, 当 $k>K$ 时,$|a_k-a|<\varepsilon$. 当 $n>K$, 有

$$c_n-a=\frac{\sum_{k=1}^n(a_k-a)b_k}{B_n}=\frac{\sum_{k=1}^K(a_k-a)b_k}{B_n}+\frac{\sum_{k=K+1}^n(a_k-a)b_k}{B_n}.$$

其中

$$\left|\frac{\sum_{k=K+1}^n(a_k-a)b_k}{B_n}\right|\leqslant\frac{\sum_{k=K+1}^n|a_k-a|b_k}{B_n}<\varepsilon\frac{\sum_{k=K+1}^n b_k}{B_n}<\varepsilon.$$

因此

$$\left|c_n-\left(a+\frac{\sum_{k=1}^K(a_k-a)b_k}{B_n}\right)\right|<\varepsilon.$$

而对于

$$q_n := \frac{\sum_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k}{B_n},$$

$C := \sum\limits_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k$ 是仅与 $K$ 有关, 与 $n$ 无关的常数,$B_n$ 单调增, 因此 $q_n$ 单调有界 ($C>0$ 时 $q_n$ 单调减且 $q_n>0, C<0$ 时 $q_n$ 单调增且 $q_n<0$), 故 $q_n$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = q$, 再取 $N$, 使得当 $n,m>N$ 时,$|q_m-q_n|<\varepsilon$, 则当 $n,m>\max\{N,K\}$ 时,

$$|c_m-c_n| \leqslant |c_n-(a+q_n)|+|c_m-(a+q_m)|+|q_m-q_n|<3\varepsilon.$$

因此由 Cauchy 收敛准则可知 $c_n$ 收敛.

(2) 下给出两种方法,

(a) 由 (1) 中的过程,$q_n=\dfrac{C}{B_n}$, 由于 $B_n\to+\infty, C$ 为常数, 因此 $q_n\to 0$, 因此存在 $N$, 使得当 $n>N$ 时,$|q_n|<\varepsilon$, 则当 $n>\max\{N,K\}$ 时,

$$|c_n-a| \leqslant |c_n-(a+q_n)|+|q_n|<\varepsilon+|q_n|<2\varepsilon.$$

(b) 由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

上述解答中给出了符合题目原意的证明, 即先证明 $c_n$ 收敛, 然后在 $B_n$ 无界时, 再证明 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. 但对于这道题而言, 还可以分类 $B_n$ 有界和无界来讨论, 即先做 (2), 然后对 $B_n$ 有界时, 用 Cauchy 收敛准则证明 $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} a_nb_n\right\}$ 收敛, 即两种分类下以截然不同的方式来证明 $c_n$ 收敛.

**注** $a_n := \cdots$ 中 $:=$ 表示定义. 如 $a_n := \dfrac{1}{n}$ 表示我们新定义了一个数列 $a_n$,其通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n}$. 在上文中“$C := \sum\limits_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k$ 是仅与 $K$ 有关, 与 $n$ 无关的常数.”表示:“记 $C=\sum\limits_{k=1}^{K}(a_k-a)b_k$, 则 $C$ 是仅与 $K$ 有关, 与 $n$ 无关的常数.”有的地方会写为 $a_n \overset{\text{def}}{=} \cdots$.

**习题 1.C.13** 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^p}\right)^x = \begin{cases} 1, & p>1, \\ \mathrm{e}, & p=1, \\ \infty, & p<1. \end{cases}$

**解** 实际上题目中的无穷只能是 $+\infty$.

$p>0$ 时, $x^p\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^{x^p\cdot\frac{1}{x^{p-1}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{p-1}}}=\begin{cases}1, & p>1,\\ \mathrm{e}, & p=1,\\ +\infty, & p<1.\end{cases}$$

$p\leqslant 0$ 时, $x^p\to 0$, 则考虑 $x>1$ 时,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^p}\right)^x\geqslant\lim_{x\to+\infty}2^x=+\infty.$$

**习题 1.C.14** 设 $f(x)$ 为周期函数, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, 证明 $f(x)$ 恒为零.

**解** 设 $f(x)$ 的正周期为 $T>0, \forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^*$, 当 $|x|\geqslant N$ 时 $|f(x)|<\varepsilon$.

因此对于 $n=\left\lceil\dfrac{N}{T}\right\rceil$, 有 $nT\geqslant N$, 故对于任意 $x\in[nT,(n+1)T)$, 有 $f(x)<\varepsilon$.

利用周期性可以得到 $\forall x\in\mathbb{R}, |f(x)|<\varepsilon$. 由于 $\varepsilon$ 是任意的正数, 所以 $f(x)$ 恒为零.

**习题 1.C.15** 证明

(1) 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时有极限 $l$ 的充分必要条件是: 对于任意一个以 $x_0$ 为极限的单调递增数列 $\{a_n\}\,(a_n\neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$;

(2) 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0^+$ 时有极限 $l$ 的充分必要条件是: 对于任意一个以 $x_0$ 为极限的单调递减数列 $\{a_n\}\,(a_n\neq x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$.

**解**

(1) (a) 必要性: 考虑任意数列 $\{a_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$ 且 $\{a_n\}$ 单调递增, .

由于 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=l$, 因此, $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时, 有 $|f(x)-l|<\varepsilon$.

同时对于 $\delta, \exists N\in\mathbb{N}^*$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-x_0|<\delta$, 即 $x_0-\delta<a_n<x_0$.

因此我们有 $m>N$ 时 $|f(a_n)-l|<\varepsilon$. 即得到数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛到 $l$.

(b) 充分性: 反证, 若 $x\to x_0^-$ 时 $f(x)$ 的极限为 $l$ 不成立, 即 $\exists\varepsilon>0, \forall\delta>0, \exists x_0-\delta<x<x_0$, 使得 $|f(x)-l|\geqslant\varepsilon$.

因此我们依次构造 $\delta_1=1, \delta_n=\min\{\dfrac{1}{n}, x_0-a_{n-1}\}, (n>2)$, 则 $\exists a_n, x_0-\delta_n<a_n<x_0$ , 使得 $|f(a_n)-l|\geqslant\varepsilon$. 即有 $a_n>a_{n-1}$, 且 $|x_0-a_n|<\dfrac{1}{n}$. 这意味着 $\{a_n\}$ 单调递增, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$.

由于 $|f(a_n)-l|\geqslant\varepsilon$, 所以 $\{f(a_n)\}$ 不收敛到 $l$, 矛盾, 故充分性成立.

(2) 证明同理. 具体而言:

设 $g(x)=f(-x)$, 则 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$ 时有极限 $l\Leftrightarrow g(x)$ 在 $x\to -x_0^+$ 时有极限 $l$. 由 (1) 可知, 这等价于对于任意一个以 $-x_0$ 为极限的单调递增数列 $\{b_n\}\,(b_n\neq -x_0)$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}g(b_n)=l$. 设 $a_n=-b_n$, 则 $\{a_n\}$ 是以 $x_0$ 为极限的单调递减数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=l$. 因此 (2) 得证.

**习题 1.C.16** 设 $\xi$ 是一个无理数, $a, b$ 是实数, 且 $a < b$. 求证: 存在整数 $m, n$ 使得 $m+n\xi \in (a, b)$, 即, 集合

$$S = \{m + n\xi \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

在 $\mathbb{R}$ 稠密.

**解** 稠密的定义: 设 $S \subset \mathbb{R}$, 若对任意 $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, 都有 $S \cap (a, b) \neq \varnothing$, 则称 $S$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

想法是这样的, 我们为了找到某个 $m + n\xi$ 落在 $(a, b)$ 中, 于是用 $\xi$ 构造一个充分小的实数 $\varepsilon = m_0 + n_0\xi \in (0, b - a)$. 因为这个 $\varepsilon$ 够小, 所以能证明存在某个 $l_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $l_0\varepsilon \in (a, b)$, 直观理解如图 1.1 所示.

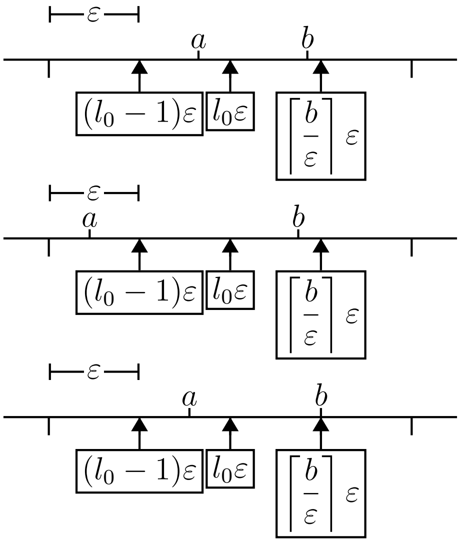



**图 1.1:** $a, b$ 之间的区间长度大于 $\varepsilon$, 因此存在某个 $l_0 \in \mathbb{Z}$, 使得 $l_0\varepsilon \in (a, b)$.
这里的思路和习题 1.1.2中证明两个无理数之间存在有理数的思路是类似的.

随后我们取 $m = l_0 m_0, n = l_0 n_0$ 即有 $m + n\xi = l_0\varepsilon \in (a, b)$.

**构造 $\varepsilon$** 实际上, 对于 $b - a > 0$, 总存在 $k \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\dfrac{1}{k} < b - a$. 因此我们考虑构造一个满足 $\varepsilon < \dfrac{1}{k}, \varepsilon \in S$ 即可.

对于 $l = 1, 2, \cdots, k + 1$, 我们考虑

$$n_l = \lfloor l\xi \rfloor$$

$$x_l = l\xi - n_l \in S.$$

$x_l$ 是 $l\xi$ 的小数部分, 容易知道 $x_l \in [0, 1)$, 并且 $x_l$ 之间总是两两不同的, 否则 $i\xi - n_i = j\xi - n_j, i \neq j$, 这意味着 $\xi = \dfrac{n_i - n_j}{i - j}$, 这与 $\xi$ 为无理数矛盾.

因此对于

$$[0, 1) = \bigcup_{j=1}^{k} \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right),$$

这 $k$ 个区间包括了 $k+1$ 个不同实数 $x_l$. 因此总有一个区间内部存在同时两个实数, 记为 $x_p, x_q \in S, p \neq q$, 不妨认为 $x_q > x_p$.

由 $x_l$ 的构造 $x_p = p\xi - n_p, x_q = q\xi - n_q$, 有

$$x_q - x_p = (q-p)\xi - (n_p - x_q) \in S,$$

且由于 $x_p, x_q$ 落在同一个区间内, 而区间长度为 $\dfrac{1}{k}$, 因此 $0 < x_q - x_p \leqslant \dfrac{1}{k} < b - a$, 所以 $x_q - x_p$ 满足我们对 $\varepsilon$ 的要求. 我们取

$$\varepsilon = x_q - x_p.$$

**构造** $m, n$　我们先证明 $\exists l_0 \in \mathbb{Z}, \mathrm{s.\,t.}\, l_0\varepsilon \in (a, b)$: 我们取 $l_0 = \left\lceil \dfrac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1$, 则

$$l_0\varepsilon = \left( \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon < \left( \frac{b}{\varepsilon} + 1 - 1 \right) \varepsilon = b.$$

同时, 由于 $\varepsilon < b - a$, 因此

$$l_0\varepsilon = \left( \left\lceil \frac{b}{\varepsilon} \right\rceil - 1 \right) \varepsilon \geqslant \left( \frac{b}{\varepsilon} - 1 \right) \varepsilon = b - \varepsilon > b - (b - a) = a.$$

因此 $l_0\varepsilon \in (a, b)$.

于是令

$$m = l_0(n_q - n_p), n = l_0(q - p)$$

即有 $m + n\xi = l_0(n_q - n_p) + l_0(q-p)\xi = l_0\left((q-p)\xi - (n_p - n_q)\right) = l_0\varepsilon \in (a, b)$.

# 第 2 章 连续函数的基本概念

## 习题 2.1

**习题 2.1.1** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 附近有定义, 且 $\lim\limits_{h\to 0}[f(x_0+h)-f(x_0-h)]=0$. 问 $f(x)$ 是否必在 $x=x_0$ 处连续?

**解** 不一定. 例如, 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{h\to 0}[f(0+h)-f(0-h)]=\lim\limits_{h\to 0}(0-0)=0$, 但 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

**习题 2.1.2** 设对任意正数 $\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上连续. 证明 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内连续.

**解** 设 $x_0\in(a,b)$, 则存在 $\varepsilon_0=\min\left\{\dfrac{b-x_0}{2},\dfrac{x_0-a}{2}\right\}>0$, 使得 $a+\varepsilon_0<x_0<b-\varepsilon_0$. 因为 $f(x)$ 在 $[a+\varepsilon_0,b-\varepsilon_0]$ 上连续, 故 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续. 因此 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内连续.

**习题 2.1.3** 设在点 $x=x_0$ 处, 函数 $f(x)$ 连续, 而 $g(x)$ 不连续, 问函数 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 $x_0$ 的连续性如何? 若 $f(x),g(x)$ 在 $x_0$ 处都不连续, 回答同样的问题.

**解**

(1) $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 $x_0$ 处均不连续. 反证: 若 $f(x)+g(x)$ 在点 $x_0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=f(x_0)+g(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]-\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)+g(x_0)-f(x_0)=g(x_0)$, 矛盾. 同理可证 $f(x)-g(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续.

$f(x)g(x)$ 在 $x_0$ 处连续性未知, 例如, 设

$$f(x)=x,\quad g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)\equiv x$, 在点 $x_0=0$ 处连续. 又例如, 设

$$f(x)=1,\quad g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 处不连续.

(2) 若 $f(x),g(x)$ 在 $x_0$ 处都不连续, 则 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 $x_0$ 处可能连续, 也可能

不连续. 例如,

(a) $f(x)+g(x)$ 在点 $x_0$ 处连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ -1, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)+g(x)\equiv 0$, 在点 $x_0=0$ 处连续.

(b) $f(x)+g(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)+g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 2, & x=0;\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 处不连续.

(c) $f(x)g(x)$ 在点 $x_0$ 处连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)\equiv 0$, 在点 $x_0=0$ 处连续.

(d) $f(x)g(x)$ 在点 $x_0$ 处不连续: 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则 $f(x)g(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 处不连续.

**习题 2.1.4**

(1) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=x_0$ 处也连续.

(2) 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在一个区间 $I$ 上连续, 证明: 函数 $M(x)=\max(f(x),g(x))$ 及 $m(x)=\min(f(x),g(x))$ 在区间 $I$ 上均连续.

**解**

(1) 因为 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续, 故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 因此 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 又因为

$$||f(x)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$, 即 $|f(x)|$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

(2) 由 $M(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}+\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$, $m(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{2}-\dfrac{|f(x)-g(x)|}{2}$ 可知, 只需

证明 $|f(x)-g(x)|$ 在区间 $I$ 上连续. 因为 $f(x),g(x)$ 在区间 $I$ 上连续, 故 $f(x)-g(x)$ 在区间 $I$ 上连续. 由 (1) 可知, $|f(x)-g(x)|$ 在区间 $I$ 上连续.

**习题 2.1.5** 证明: 存在这样的函数 $f(x)$, 处处不连续, 但函数 $|f(x)|$ 处处连续. (提示: 适当地修改 Dirichlet 函数可得出一个例子.)

**解** 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ -1, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

则 $f(x)$ 处处不连续, 但 $|f(x)|\equiv 1$, 处处连续.

**证明** 若 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在, 取 $\{a_n\}\subset\mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=1$; 取 $\{b_n\}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(b_n)=-1$, $\lim\limits_{x\to x_0}f(a_n)\neq\lim\limits_{x\to x_0}f(b_n)$, 矛盾. 因此 $f(x)$ 处处不连续.

**习题 2.1.6** 指出下列函数的间断点, 并说明其类型.

(1) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0;\end{cases}$

(3) $f(x)=\lfloor|\cos x|\rfloor$;

(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$;

(5) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+7}, & -\infty<x<-7,\\ x, & -7\leqslant x\leqslant 1,\\ (x-1)\sin\dfrac{1}{x-1}, & 1<x<+\infty;\end{cases}$

(6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ 4, & x=2.\end{cases}$

**解**

(1)

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to 2^+}f(x)=+\infty.$$

左右极限不存在, 因此 $x=2$ 是第二类间断点.

(2)

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)=-1.$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(3) 可知 $f(x)=\begin{cases}1, & x=k\pi,k\in\mathbb{Z};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 在 $x=k\pi$ 处, $\lim\limits_{x\to k\pi}f(x)=0\neq f(k\pi)=1$. 左右极限存在且相等, $x=k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ 是第一类间断点中的可去间断点.

(4)

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}=0,\quad \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{1/x}}=1.$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x=0$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(5) (a) 在 $x=-7$ 处

$$\lim_{x\to-7^-}f(x)=\lim_{x\to-7^-}\frac{1}{x+7}=-\infty,\quad \lim_{x\to-7^+}f(x)=-7,$$

左极限不存在, 因此 $x=-7$ 是第二类间断点.

(b) 在 $x=1$ 处:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=1,\quad \lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x-1)\sin\frac{1}{x-1}=0,\quad f(1)=1,$$

左右极限存在但不相等, 因此 $x=1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点.

(6) 当 $x\neq2$ 时, $f(x)=\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$. $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4$, 但 $f(2)=4$, 函数值与极限值相等. 因此函数在 $x=2$ 处连续, 无间断点.

**习题 2.1.7** 试确定 $a$, 使得函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x, & x<0,\\ a+x, & x\geqslant0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

**解** 由 $f(0)=a$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\mathrm{e}^0=1$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=a+0=a$ 可知, 当 $a=1$ 时, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

**习题 2.1.8** 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{-1/x}}{\mathrm{e}^{1/x}+\mathrm{e}^{-1/x}}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$, 在点 0 处右连续, 但不左连续.

**解** 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{-1/x}}{\mathrm{e}^{1/x}+\mathrm{e}^{-1/x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-2/x}}{1+\mathrm{e}^{-2/x}}=1=f(0)$, 故 $f(x)$ 在点 0 处右连续. 又因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{-1/x}}{\mathrm{e}^{1/x}+\mathrm{e}^{-1/x}}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\mathrm{e}^{2/x}-1}{\mathrm{e}^{2/x}+1}=-1\neq f(0)$, 故 $f(x)$ 在点 0 处不左连续.

**习题 2.1.9** 证明: 对每个实数 $x$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 存在. 将该极限值记为 $f(x)$, 试讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

**解**

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=(1+x)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+(x^2)^n}=\begin{cases}1+x, & |x|<1;\\ \dfrac{1+x}{2}, & x=\pm1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

即

$$f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<1;\\ 1, & x=1;\\ 0, & x>1\text{或}x\leqslant -1.\end{cases}$$

因此,

$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=0=f(-1)$, 故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续;

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=2\neq f(1)$, 故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续; 对于其他点, $f(x)$ 均连续.

综上所述, $f(x)$ 在 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 上连续, 在 $x=1$ 处不连续.

**习题 2.1.10** 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续, 则存在一个正数 $\delta$, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上有界. (这一结果称为连续函数的局部有界性.)

**解** 因为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续, 故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=1$, 则当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<1$, 即 $-1<f(x)-f(x_0)<1$, 故 $f(x_0)-1<f(x)<f(x_0)+1$. 因此, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有 $|f(x)|\leqslant\max\{|f(x_0)-1|,|f(x_0)+1|\}$, 即 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上有界.

**习题 2.1.11** 证明: 若函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续, 且 $f(x_0)\neq0$, 则存在一个正数 $\delta$, 使得函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上与 $f(x_0)$ 同号. (这一结果称为连续函数的局部保号性) 进一步, 存在某个正数 $\gamma$, 使得 $f(x)$ 在这一区间中满足 $|f(x)|\geqslant\gamma$.

**解** 因为 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续, 故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, 即 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. 取 $\varepsilon=\dfrac{|f(x_0)|}{2}$, 则当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{|f(x_0)|}{2},$$

即

$$-\frac{|f(x_0)|}{2}<f(x)-f(x_0)<\frac{|f(x_0)|}{2},$$

故 $f(x_0)-\dfrac{|f(x_0)|}{2}<f(x)<f(x_0)+\dfrac{|f(x_0)|}{2}$.

因为 $f(x_0)\neq0$, 故当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有

(1) $f(x_0)>0$ 时

$$f(x)>f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)}{2}>0.$$

(2) $f(x_0)<0$ 时

$$f(x)<f(x_0)-\frac{f(x_0)}{2}=\frac{f(x_0)}{2}<0.$$

因此, 当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时, 有 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号. 进一步地, 取 $\gamma=\dfrac{|f(x_0)|}{2}$, 则当

$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 有 $|f(x)| \geqslant \gamma$.

**习题 2.1.12** 证明: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a \neq g(x_0)$ (从而 $x_0$ 为 $g(x)$ 的可去间断点), $f(u)$ 在 $u = a$ 处连续, 则

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(a).$$

(这一结论对其他五种极限过程也成立.)

**解** 由于 $\lim\limits_{u\to a} f(u) = f(a)$, 故 $\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta_1 > 0$, 当 $|u-a| < \delta_1$ 时, 有 $|f(u) - f(a)| < \varepsilon$.

又因为 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = a$, 故对于 $\delta_1 > 0, \exists\, \delta_2 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x) - a| < \delta_1$.

因此, 当 $|x-x_0| < \delta_2$ 时, 有 $|g(x)-a| < \delta_1$, 即 $|f(g(x))-f(a)| < \varepsilon$. 综上所述, $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(a)$.

**习题 2.1.13** 证明: 若函数 $u(x), v(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 且 $u(x_0) > 0$, 则函数 $u(x)^{v(x)}$ 也在点 $x_0$ 处连续.

**解** 利用 $\mathrm{e}^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续,$\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续, 以及复合函数的极限可交换性, 有

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{v(x_0)\ln u(x_0)} = u(x_0)^{v(x_0)}.$$

**习题 2.1.14** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且对于任意 $x$ 有 $f(2x) = f(x)$. 求证 $f(x)$ 是常数.

**解** 即证:$f(x) \equiv f(0)$. 对于任意点 $x_0 \in \mathbb{R}$, 考虑任意以 $x_0$ 为极限的数列,$\{x_n\}$, 则由连续性

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_n}{2^n}\cdot 2^n\right) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x_n}{2^n}\right) = f(0),$$

且 $f(x_0) = f(0)$. 由于 $x_0$ 的任意性, 故 $f(x) \equiv f(0)$.

**习题 2.1.15** 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且对于任意 $x, y$ 有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$. 求证 $f(x) = cx$, 其中 $c$ 是常数.

**解**

(1) 由 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ 可知,$f(0) = 0$.

(2) 对 $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx) = f((n-1)x + x) = f((n-1)x) + f(x) = \cdots = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n\text{个}} = nf(x).$$

即对任意自然数 $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$.

(3)

$$f(-x) + f(x) = f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

即对任意整数 $k \in \mathbb{Z}$, $f(kx) = kf(x)$.

(4) 对 $m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$,

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m\cdot\frac{1}{n}\cdot nf\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{m}{n}f\left(x\right)$$

即对任意有理数 $r=\dfrac{m}{n}\in\mathbb{Q}, f(rx)=rf(x)$.

(5) 对 $x\in\mathbb{R}$, 则存在有理数列 $\{r_n\}$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=x$, 因此,

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} r_n f(1)=xf(1).$$

由于 $f$ 在 $x$ 处连续, 故

$$f(x)=f(\lim_{n\to\infty} r_n)=\lim_{n\to\infty} f(r_n)=xf(1).$$

取 $c=f(1)$, 即有 $f(x)=xf(1)=cx$.

**习题 2.1.16** 当 $x\to 0$ 时, 用 $\sin x\sim x, \tan x\sim x$ 证明 $\arcsin x\sim x, \arctan x\sim x$; 用 $\ln(1+x)\sim x$ 证明 $(\mathrm{e}^x-1)\sim x$.

(上述的等价无穷小, 是微积分中非常基本的事实.)

**解**

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续. 设 $g(x)=\arcsin x$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\arcsin x}{\arcsin x}=\lim_{x\to 0} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)=f(0)=1,$$

即 $\arcsin x\sim x$;

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续. 设 $g(x)=\arctan x$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\arctan x}{\arctan x}=\lim_{x\to 0} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)=f(0)=1,$$

即 $\arctan x\sim x$;

(3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续. 设 $g(x)=\mathrm{e}^x-1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$. 因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x-1}=\lim_{x\to 0} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to 0} g(x)\right)=f(0)=1,$$

即 $(\mathrm{e}^x-1)\sim x$.

**习题 2.1.17** 求极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt[10]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin(\sin x)}{1-\cos x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+100}+x)$;

(7) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;　　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$.

**解**

(1) $\sqrt{1+x+x^2}-1\sim\dfrac{1}{2}(x+x^2), \sin 2x\sim 2x, (x\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+x^2)}{2x}=\frac{1}{4};$$

(2) $\sqrt{1+x^2}-1\sim\dfrac{1}{2}x^2, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, (x\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=1;$$

(3) $\sqrt[10]{1+\tan x}-1\sim\dfrac{1}{10}\tan x\sim\dfrac{1}{10}x, \sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x, 2x\sin x\sim 2x^2, (x\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[10]{1+\tan x}-1)(\sqrt{1+x}-1)}{2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{10}x\cdot\frac{1}{2}x}{2x^2}=\frac{1}{40};$$

(4) $x\cdot\arcsin(\sin x)\sim x^2, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2, (x\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\arcsin(\sin x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2;$$

(5) $1-\cos(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}(1-\cos x)^2\sim\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)^2=\dfrac{1}{8}x^4, (x\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4}{x^4}=\frac{1}{8};$$

(6) 令 $y=\dfrac{1}{x}$, 则 $y\to 0^+$,

并且 $x=-\dfrac{1}{y}$, 即有 $x(\sqrt{x^2+100}+x)=-\dfrac{1}{y}\left(\sqrt{\dfrac{1}{y^2}+100}-\dfrac{1}{y}\right)=-\dfrac{\sqrt{1+100y^2}-1}{y^2}$

而 $\sqrt{1+100y^2}-1\sim\dfrac{1}{2}\cdot 100y^2=50y^2, (y\to 0)$, 故

$$\lim_{x\to -\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)=\lim_{y\to 0^+}-\frac{\sqrt{1+100y^2}-1}{y^2}=-\lim_{y\to 0^+}\frac{50y^2}{y^2}=-50$$

(7)

$$\begin{aligned}\left|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right|&=\left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right|\\&=2\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right|\\&\leqslant 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$ 可知, $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$;

(8)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{2-0}=\sqrt{2}.$$

**习题 2.1.18 (旧版教材中的题目)** 函数 $\sinh x=\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 与 $\cosh x=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 分别称为双曲正弦与双曲余弦 (统称为双曲函数), 它们均在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 上连续. 证明以下各题. (可与三角函数的性质作比较.)

(1) $\sinh(-x)=-\sinh x,\quad \cosh(-x)=\cosh x$; (2) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$;

(3) $\sinh 2x=2\sinh x\cosh x$; (4) $\cosh 2x=\sinh^2 x+\cosh^2 x$;

(5) $\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$; (6) $\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$.

**解**

(1) $\sinh(-x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{2}=-\sinh x$, $\cosh(-x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{x}}{2}=\cosh x$;

(2) $\cosh^2 x-\sinh^2 x=\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}}{4}-\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}}{4}=1$;

(3) $\sinh 2x=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}{2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x)^2-(\mathrm{e}^{-x})^2}{2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{2}=2\sinh x\cosh x$;

(4) $\cosh 2x=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{-2x}}{2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x)^2+(\mathrm{e}^{-x})^2}{2}=\dfrac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})^2+(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}{4}=\sinh^2 x+\cosh^2 x$;

(5) $\sinh(x\pm y)=\dfrac{\mathrm{e}^{x\pm y}-\mathrm{e}^{-(x\pm y)}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2}=$ $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right)+\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y$;

(6) $\cosh(x\pm y)=\dfrac{\mathrm{e}^{x\pm y}+\mathrm{e}^{-(x\pm y)}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2}=\dfrac{\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{\mp y}}{2}=$ $\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y}+\mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right)+\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\pm y}-\mathrm{e}^{\mp y}}{2}\right)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y$.

# 习题 2.2

**习题 2.2.1** 证明函数 $x \cdot 2^x - 1$ 在 $[0,1]$ 内有零点.

**解** 设 $f(x) = x \cdot 2^x - 1$, 则 $f(0) = -1 < 0, f(1) = 1 > 0$. 又因 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续. 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

**习题 2.2.2** 证明函数 $x - a\sin x - b$ (其中 $a, b$ 为正数) 在 $(0, +\infty)$ 上有零点, 且零点不超过 $a+b$.

**解** 设 $f(x) = x - a\sin x - b$, 该函数在 $[0, +\infty)$ 连续, 同时 $f(0) = -b < 0, f(a+b+1) = a+b+1-a\sin(a+b+1)-b = a(1-\sin(a+b+1))+1 \geqslant 1 > 0$. 因此由零点定理,$(0, a+b+1)$ 上有零点, 进而 $(0, +\infty)$ 上有零点.

又因对任意 $x > a+b$ 有 $f(x) = x - a\sin x - b > a+b-a\sin x - b \geqslant 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点不超过 $a+b$.

**习题 2.2.3** 证明函数 $x - \sin(x+1)$ 有实零点.

**解** 设 $f(x) = x - \sin(x+1)$, 由 $-1 \leqslant \sin(x+1) \leqslant 1$ 知, 则 $f(-2) \leqslant -2+1 = -1 < 0, f(2) \geqslant 2-1 = 1 > 0$. 又因 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续, 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (-2,2)$, 使得 $f(x_0) = 0$.

**习题 2.2.4** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且值域就是 $[a,b]$. 证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必有不动点, 即有 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) = x_0$.

**解** 函数 $f(x)$ 的值域为 $[a,b]$, 故存在 $x_1, x_2 \in [a,b]$, 使得 $f(x_1) = a, f(x_2) = b$. 设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(a) = f(a) - a \geqslant 0, g(b) = f(b) - x_2 \leqslant 0$.

故结合零点定理可简单推知, 要么 $a$ 或 $b$ 是 $g(x)$ 的零点, 要么存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $g(x_0) = 0$, 总之存在 $x_0 \in [a,b], g(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = x_0$.

**注** 这里给出一个表述的区分.

(1) 如果严格满足零点定理的情形, 即端点处非零异号, 推出开区间内存在零点, 那么表达为由零点定理可知.

(2) 如果和本题类似, 端点处可能为零, 推出推出闭区间内存在零点, 则简单表达为结合零点定理可简单推知.

**习题 2.2.5** 设函数 $f(x), g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$. 试证: 存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$.

**解** 设 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则 $h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $h(a) = f(a) - g(a) > 0, h(b) = f(b) - g(b) < 0$. 故由零点定理知, 存在 $x_0 \in (a,b)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = g(x_0)$.

**习题 2.2.6** 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, 且 $f(0) = f(2a)$. 证明: 在区间 $[0,a]$ 上存在某个 $x_0$, 使得 $f(x_0) = f(x_0 + a)$.

**解** 设 $g(x) = f(x) - f(x+a)$, 则 $g(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续, 且 $g(0) = f(0) - f(a), g(a) = f(a) - f(2a) =$

$f(a)-f(0)=-g(0)$. 因此 $g(0)g(a)=-(g(0))^2\leqslant 0$. 由结合零点定理简单推知, 存在 $x_0\in[0,a]$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=f(x_0+a)$.

**习题 2.2.7** 试证: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 为此区间中的任意点, 则在 $[a,b]$ 中有一点 $\xi$, 使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)).$$

更一般地, 若 $q_1>0,q_2>0,\ldots,q_n>0$, 且 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$, 则在 $[a,b]$ 中有一点 $\xi$, 使得

$$f(\xi)=q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n).$$

**解**

(1) 设 $A=\frac{1}{n}(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n))$. 若 $f(x_i)=f(x_j)$ 对所有 $i,j$ 成立, 则对任意 $k$, 取 $\xi=x_k$ 总是可以的. 否则取 $i,j$ 使得 $f(x_i)=\min\{f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)\},f(x_j)=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$. 则 $f(x_i)\leqslant A\leqslant f(x_j),f(x_i)<f(x_j)$. 由介值定理知, 存在 $\xi\in(\min\{x_i,x_j\},\max\{x_i,x_j\})\subset[a,b]$, 使得 $f(\xi)=A$.

(2) 设 $A=q_1f(x_1)+q_2f(x_2)+\cdots+q_nf(x_n)$. 若 $f(x_i)=f(x_j)$ 对所有 $i,j$ 成立, 则对任意 $k$, 取 $\xi=x_k$ 总是可以的. 否则取 $i,j$ 使得 $f(x_i)=\min\{f(x_1),f(x_2),\ldots,f(x_n)\},f(x_j)=\max\{f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$. 则 $f(x_i)\leqslant A\leqslant f(x_j),f(x_i)<f(x_j)$. 由介值定理知, 存在 $\xi\in(\min\{x_i,x_j\},\max\{x_i,x_j\})\subset[a,b]$, 使得 $f(\xi)=A$.

**习题 2.2.8** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在. 证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

**解** 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 则对于 $\varepsilon=1>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}$, 使得当 $x>N$ 时, 有 $|f(x)-A|<1$, 即 $|f(x)|<|A|+1$. 又因函数 $f(x)$ 在区间 $[a,N]$ 上连续, 故在该闭区间上有界, 即存在 $K>0$, 使得对任意 $x\in[a,N]$ 有 $|f(x)|\leqslant K$. 取 $M=\max\{K,|A|+1\}$, 则对任意 $x\in[a,+\infty)$ 有 $|f(x)|\leqslant N$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

**习题 2.2.9** 证明函数 $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

**解** 由习题 1.3.17 知, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}=0$, 利用习题 2.2.8 知, 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界. 又因 $f(x)$ 是偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上也有界. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

**习题 2.2.10** 是否有满足下面条件的连续函数? 说明理由.

(1) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $(0,+\infty)$;

(2) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $(0,1)$;

(3) 定义域为 $[0,1]$, 值域为 $[0,1]\cup[2,4]$;

(4) 定义域为 $(0,1)$, 值域为 $(2,+\infty)$.

**解**

(1) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(2) 不存在. 这与最值定理矛盾.

(3) 不存在. 这与介值定理矛盾.

(4) 存在. 例如, $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$.

**习题 2.2.11** 举例说明, 对任意正数 $\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上有界, 不能保证 $f(x)$ 在开区间 $(a,b)$ 上有界. (比较习题 2.1 第 2 题.)

**解** 例如, 设 $f(x)=\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{b-x}$, 则对任意正数 $\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$, 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ 上连续, 故有界; 但在开区间 $(a,b)$ 上无界.

**习题 2.2.12** 设 $y=f(x)$ 在开区间 $I=(a,b)$ 上连续并严格单调. 证明 $y=f(x)$ 的值域 $f(I)$ 也是一个开区间.

**解** **注** 不能假设 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.$f(I)$ 可能有无穷端点, 例如 $f(x)=\tan x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上连续且严格单调, 但值域是 $(-\infty,+\infty)$.

(1) 不妨假设是严格递增的, 否则类似考虑 $-f(x)$ 即可. 先证明 $f(I)$ 存在两个不同的点: 取 $x_1,x_2\in I$, 且 $x_1<x_2$, 由严格单调性知, $f(x_1)<f(x_2)$, 故 $f(I)$ 中至少有两个不同的点.

**注** 如果去除单调的严格性, 则 $f(I)$ 不一定是开区间, 例如 $f(x)=1$ 在 $(0,1)$ 上连续且单调, 但值域不是开区间.

(2) $\forall y_1,y_2\in f(I)$, 且 $y_1<y_2$. 则存在 $x_1,x_2\in I$, 使得 $f(x_1)=y_1,f(x_2)=y_2$. 因为 $f(x)$ 在 $I$ 上严格单调, 故 $x_1<x_2$. 对任意 $y\in(y_1,y_2)$, 由介值定理知, 存在 $x\in(x_1,x_2)\subset I$, 使得 $f(x)=y$. 因此, $f(I)$ 是区间.

(3) 下面证明 $f(I)$ 是开区间. $\forall y\in f(I)$, 则存在 $x_0\in I$, 使得 $f(x_0)=y$. 由 $(a,b)$ 是开区间知, 存在 $\delta>0$, 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$. 设 $\eta=\min\{f(x_0)-f(x_0-\delta),f(x_0+\delta)-f(x_0)\}>0$, 则对任意 $y'\in(y-\eta,y+\eta)\subset(f(x_0-\delta),f(x_0+\delta))$, 由介值定理知, 存在 $x'\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$, 使得 $f(x')=y'$. 因此, $f(I)$ 是开区间.

**习题 2.2.13** 设函数 $f(x)$ 在有限区间 $(a,b)$ 上一致连续. 求证 $f(x)$ 在 $a$ 点的右极限和在 $b$ 点的左极限都存在.

**解** $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

现取 $x_1,x_2\in(a,a+\delta)$, 则 $|x_1-x_2|<\delta$, 故 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 因此, 函数 $f(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 上满足柯西收敛准则, 故 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在. 同理可证 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 也存在.

**习题 2.2.14** 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续, $\{a_n\}$ 是正收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛. 又问仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论是否还成立, 为什么?

**解**

(1) 由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 又因 $\{a_n\}$ 是正收敛数列, 故存在 $N\in\mathbf{N}^+$, 使得当 $n,m>N$ 时, 有 $|a_n-a_m|<\delta$, 因此, 对任意 $n,m>N$ 有 $|f(a_n)-f(a_m)|<\varepsilon$. 由柯西收敛准则知, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛.

(2) 仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论不成立. 例如, 设 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 且数列 $a_n=\dfrac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$ 收敛于 0, 但数列 $f(a_n)=\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)=(-1)^n$ 不收敛.

**习题 2.2.15** 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, $\{a_n\}$ 是收敛数列. 求证 $\{f(a_n)\}$ 也收敛.

**解** 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $a\in(-\infty,+\infty)$. 由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续知,$f(x)$ 在 $a$ 点连续, 即 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. 因此, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|x-a|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

又因数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a$, 故存在 $N\in\mathbf{N}^+$, 使得当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\delta$, 因此, 对任意 $n>N$ 有 $|f(a_n)-f(a)|<\varepsilon$. 由数列的收敛定义知, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛于 $f(a)$.

**习题 2.2.16** 给出一个在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界但不一致连续的函数.

**解** 例如, $f(x)=\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且有界, 但不一致连续.

反证法: 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续, 则对 $\varepsilon=1>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<1$. 但倘若我们取 $x_1=\sqrt{2n\pi},x_2=\sqrt{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$, 则当 $n>\left(\dfrac{2}{\delta}\right)^2$ 时, 有 $|x_1-x_2|<\delta$, 但 $|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sin(2n\pi)-\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=1$, 矛盾.

# 第 2 章综合习题

**习题 2.C.1** 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为有理数}, \\ x, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$ 仅在点 $x=0$ 处连续.

**解** 设 $x_0\in\mathbb{R}$, 则对任意 $\varepsilon>0$, 存在有理数列 $\{r_n\}$ 与无理数列 $\{s_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=x_0$. 因此

$$\lim_{n\to\infty} f(r_n)=\lim_{n\to\infty} 0=0, \quad \lim_{n\to\infty} f(s_n)=\lim_{n\to\infty} s_n=x_0.$$

当 $x_0\neq 0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(s_n)=x_0$, 故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处不连续.

当 $x_0=0$ 时, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $|x-0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-f(0)|=|f(x)|\leqslant|x|<\delta=\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$, 即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

**习题 2.C.2** 设 $x_1,x_2,\ldots,x_n\in[0,1]$, 记 $f(x)=\dfrac{|x-x_1|+\cdots+|x-x_n|}{n}$, 证明: 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

**解** 设 $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{2}$, 则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$\begin{aligned} f(0)+f(1) &= \frac{|0-x_1|+\cdots+|0-x_n|}{n}+\frac{|1-x_1|+\cdots+|1-x_n|}{n} \\ &= \frac{(x_1+(1-x_1))+\cdots+(x_n+(1-x_n))}{n}=1. \end{aligned}$$

因此 $g(0)+g(1)=f(0)+f(1)-1=0$. 则 $g(0)g(1)=-(g(0))^2\leqslant 0$. 结合零点定理可简单推知, 存在 $x_0\in[0,1]$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=\dfrac{1}{2}$.

**习题 2.C.3** 证明: 函数 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ (其中 $a_1,a_2,a_3>0$, 且 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$) 在 $(\lambda_1,\lambda_2)$ 与 $(\lambda_2,\lambda_3)$ 内各有一个零点.

**解** 仅证明 $(\lambda_1,\lambda_2)$ 内有一个零点, $(\lambda_2,\lambda_3)$ 内的证明类似.

由 $\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在 $\left[\lambda_1,\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right]$ 上连续, 因此有界, 即存在 $M_1>0$, 使得对任意 $x\in\left[\lambda_1,\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right]$ 有 $|\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}|\leqslant M$.

又由 $\lim\limits_{x\to\lambda_1^+}\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}=+\infty$, 因此存在 $\delta_1\in\left(0,\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta_1)$ 有 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}>M_1$. 因此, 存在 $x_1\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta_1)\subset\left(\lambda_1,\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)$, 使得

$$\frac{a_1}{x_1-\lambda_1}+\frac{a_2}{x_1-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_1-\lambda_3}=\frac{a_1}{x_1-\lambda_1}+\left(\frac{a_2}{x_1-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_1-\lambda_3}\right)>M_1-M_1=0.$$

由 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在 $\left[\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right]$ 上连续, 因此有界, 即存在 $M_2>0$, 使得对任意 $x\in$

$\left[\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right]$ 有 $\left|\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}\right| \leqslant M_2$.

又由 $\lim\limits_{x\to\lambda_2^-}\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}=-\infty$, 因此存在 $\delta_2\in\left(0,\dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x\in(\lambda_2-\delta_2,\lambda_2)$ 有 $\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}<-M_2$. 因此, 存在 $x_2\in(\lambda_2-\delta_2,\lambda_2)\subset\left(\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right)$, 使得

$$\frac{a_1}{x_2-\lambda_1}+\frac{a_2}{x_2-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_2-\lambda_3}=\left(\frac{a_1}{x_2-\lambda_1}+\frac{a_3}{x_2-\lambda_3}\right)+\frac{a_2}{x_2-\lambda_2}<M_2-M_2=0.$$

综上, 存在 $x_1,x_2\in(\lambda_1,\lambda_2)$, 使得对于函数 $f(x)=\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 有 $f(x_1)>0, f(x_2)<0$. 由介值定理知, 存在 $x_0\in(x_1,x_2)\subset(\lambda_1,\lambda_2)$, 使得 $f(x_0)=0$.

同时由于 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1},\dfrac{a_2}{x-\lambda_2},\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在 $(\lambda_1,\lambda_2)$ 上严格单调递减, 因此 $f(x)$ 在 $(\lambda_1,\lambda_2)$ 上严格单调递减. 因此, 零点 $x_0$ 唯一.

**习题 2.C.4** 设 $f(x)$ 是一个多项式, 则必存在一点 $x_0$, 使得 $|f(x_0)|\leqslant|f(x)|$ 对任意实数 $x$ 成立.

**解** 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$, 其中 $a_n\neq0, n\geqslant1$. 则

$$|f(x)|=|x|^n\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right|.$$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}\right)=a_n$, 因此存在 $M>0$, 使得当 $|x|>M$ 时, 有

$$\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right|>\frac{|a_n|}{2}.$$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|a_n|}{2}|x|^n=+\infty$, 因此 $\exists X>M$, 使得当 $|x|>X$ 时, 有 $\dfrac{|a_n|}{2}|x|^n>|f(0)|$. 而由 $|f(x)|$ 在 $[-X,X]$ 上连续, 故由最值性知, 存在 $x_0\in[-X,X]$, 使得 $|f(x_0)|=\inf\{f(x):x\in[-X,X]\}$. 特别的, 对任意 $x\in[-X,X]$ 有 $|f(x_0)|\leqslant|f(0)|$. 因此对于 $|x|>X$ 时, 有 $|f(x)|>\dfrac{|a_n|}{2}|x|^n\geqslant|f(x_0)|$. 综上, 对任意 $x\in\mathbb{R}$ 有 $|f(x_0)|\leqslant|f(x)|$.

**习题 2.C.5** 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$. 证明: 对任意正整数 $n$, 在区间 $\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$ 中有一点 $\xi$, 使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)$.

**解** 设 $g(x)=f(x)-f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$, 则 $g(x)$ 在 $\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$ 上连续, 且

$$g(0)=f(0)-f\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$g\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{2}{n}\right),$$

$$\cdots$$

$$g\left(\frac{n-1}{n}\right)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(1)=f\left(\frac{n-1}{n}\right)-f(0).$$

因此 $\dfrac{1}{n}\left(g(0)+g\left(\dfrac{1}{n}\right)+\cdots+g\left(\dfrac{n-1}{n}\right)\right)=0$. 则 $g(0),g\left(\dfrac{1}{n}\right),\ldots,g\left(\dfrac{n-1}{n}\right)$ 中至少有一

个非正, 另一个非负. 由介值定理知, 存在 $\xi \in \left[0, 1-\dfrac{1}{n}\right]$, 使得 $g(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{1}{n}\right)$.

**习题 2.C.6** 证明: 存在一个实数 $x$, 满足 $x^5+\dfrac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}=72$.

**解** 设 $f(x)=x^5+\dfrac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}$,

$$f(3)=3^5+\frac{\cos 3}{1+3^2+\sin^2 3}\geqslant 243\frac{1}{1+3^2-1}>72,$$

$$f(-3)=(-3)^5+\frac{\cos(-3)}{1+(-3)^2+\sin^2(-3)}\leqslant -243+\frac{1}{1+(-3)^2-1}<-72.$$

由介值定理知, 存在 $x\in[-3,3]$, 使得 $f(x)=72$.

**习题 2.C.7** 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上或者有最大值, 或者有最小值.

**解** 记

$$S=\sup\{f(x):x\in[a,+\infty)\},\ I=\inf\{f(x):x\in[a,+\infty)\},\ L=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

(1) 若 $S>L$, 取 $\varepsilon=\dfrac{S-L}{2}>0$, 则存在 $X>a$, 使得对任意 $x>X$ 有 $|f(x)-L|<\varepsilon$, 即 $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$. 因此, 对任意 $x>X$ 有 $f(x)<L+\varepsilon=\dfrac{S+L}{2}<S$. 因此

$$\sup\{f(x):x\in[a,X]\}=S,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0\in[a,X]$, 使得 $f(x_0)=S$.

(2) 若 $I<L$, 取 $\varepsilon=\dfrac{L-I}{2}>0$, 则存在 $X>a$, 使得对任意 $x>X$ 有 $|f(x)-L|<\varepsilon$, 即 $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$. 因此, 对任意 $x>X$ 有 $f(x)>L-\varepsilon=\dfrac{I+L}{2}>I$. 因此

$$\inf\{f(x):x\in[a,X]\}=I,$$

由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0\in[a,X]$, 使得 $f(x_0)=I$.

(3) 若 $S=L=I$, 则 $f(x)\equiv L$, 即任取 $x_0\in[a,+\infty)$, 均有 $f(x_0)=L$ 同时为最大值和最小值.

**注** 一个只有极限没有最大值的例子是 $f(x)=\arctan x, x\in[0,+\infty)$.

**习题 2.C.8** 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上, 满足条件: $a\leqslant f(x)\leqslant b$ (对任意 $x\in[a,b]$), 且对 $[a,b]$ 中任意的 $x,y$ 有 $|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$. 这里 $k$ 是常数, $0<k<1$. 证明:

(1) 存在唯一的 $x_0\in[a,b]$, 使得 $f(x_0)=x_0$.

(2) 任取 $x_1\in[a,b]$, 并定义数列 $\{x_n\}:x_{n+1}=f(x_n), n=1,2,\ldots$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(3) 给出一个在实轴上的连续函数, 使得对任意 $x\neq y$ 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$, 但方程 $f(x)-x=0$ 无解.

**解**

(1) 先证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续: 设 $x_0\in[a,b]$, 对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{k}>0$, 则对任意 $x\in[a,b]$

且 $|x-x_0|<\delta$, 有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant k|x-x_0|<k\delta=\varepsilon.$$

设 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(a)=f(a)-a\geqslant 0, g(b)=f(b)-b\leqslant 0$. 故结合零点定理可简单推知, 存在 $x_0\in[a,b]$, 使得 $g(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=x_0$. 又因对任意 $x,y\in[a,b]$ 有

$$|g(x)-g(y)|=|f(x)-f(y)-(x-y)|\geqslant|x-y|-|f(x)-f(y)|\geqslant(1-k)|x-y|,$$

故若存在 $x_1\neq x_0$ 使得 $f(x_1)=x_1$, 则

$$(1-k)|x_1-x_0|\leqslant|g(x_1)-g(x_0)|=|f(x_1)-f(x_0)-(x_1-x_0)|=0,$$

即 $x_1=x_0$. 因此 $x_0$ 唯一.

(2) (a) 若 $x_2=x_1$, 则由 $f(x_1)=x_1$ 以及 (1) 中所述的唯一性, 知 $x_2=x_1=x_0$, 则 $x_3=f(x_2)=f(x_0)=x_0$, 依此类推, 有 $x_n=x_0$ 对任意 $n\geqslant 1$ 成立. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(b) 若 $x_2\neq x_1$, 对任意 $n\geqslant 1$ 有

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|\leqslant\ldots\leqslant k^{n-1}|x_2-x_1|.$$

因此, 对任意 $m>n\geqslant 1$ 有

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&\leqslant(k^{m-2}+k^{m-3}+\cdots+k^{n-1})|x_2-x_1|\\&\leqslant\frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2-x_1|.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left\lceil\log_k\dfrac{(1-k)\varepsilon}{|x_2-x_1|}\right\rceil$, 当 $m,n>N$ 时, 有

$$|x_m-x_n|\leqslant\frac{k^{n-1}}{1-k}|x_2-x_1|<\varepsilon.$$

故数列 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列, 故存在 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n:=a$ 存在. 又因 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 对递推式两侧取极限, 有

$$a=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)=f(a).$$

由 (1) 中所述的唯一性, 知 $a=x_0$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(3) 一个不太严谨的思考过程: 我想要构造一个满足 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ 的函数, 我考虑了 $|f'(x)|<1$ 的趋势为增的函数, 同时 $f(x)-x$ 无解要求了 $f(x)$ 应该是贴在 $y=x$ 的 (不妨设为) 上方的, 于是我考虑了 $f(x)=x+g(x)$, 并假设 $g(x)$ 可导, 其中如果 $-1<-g'(x)<0$, 那就能保证 $f(x)$ 的导数满足要求.(当然上述思路中, 对 $g(x)$ 的选取过程都只

是必要的)

$$f(x) = x + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}.$$

(a) 满足 $|f(x)-f(y)| < |x-y|$: 设 $x > y$, 则

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| = f(x)-f(y) &= (x-y) + \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} - \frac{1}{1+\mathrm{e}^y} \\ &= (x-y) - \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{(1+\mathrm{e}^x)(1+\mathrm{e}^y)} \\ &< x-y = |x-y|. \end{aligned}$$

(b) 方程 $f(x)-x=0$ 无解: 由 $f(x)-x = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x} > 0$, 知 $f(x)-x=0$ 无解.

**习题 2.C.9** 证明: 对任意正整数 $n$, 方程 $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ 恰有一个正根 $x_n$; 进一步证明数列 $\{x_n\}$ $(n \geqslant 1)$ 收敛, 并求其极限.

**解**

(1) 设 $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$, 则 $f_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续, 且 $f_n(0) = -1 < 0, f_n(1) = n-1 \geqslant 0$. 故结合零点定理可简单推知, 存在 $x_n \in (0,1]$, 使得 $f(x_n) = 0$. 由于 $f_n(x)$ 的每一项都严格单调递增, 故 $f_n(x)$ 也严格单调递增, 因此 $x_n$ 是唯一解.

(2) 下证明数列 $\{x_n\}$ 单调递减: 若 $x_{n+1} \geqslant x_n$, 由 $x_n > 0$

$$1 = x_{n+1}^{n+1} + x_{n+1}^n + \cdots + x_{n+1} \geqslant x_n^{n+1} + x_n^n + \cdots + x_n > x_n^n + x_n^{n-1} + \cdots + x_n = 1,$$

故矛盾, 因此 $x_{n+1} < x_n$. $\{x_n\}$ 单调递减, 有 0 为下界, 故数列 $\{x_n\}$ 收敛.

(3) 考虑

$$1 - x_n^n = (1-x_n)(1 + x_n + x_n^2 + \cdots + x_n^{n-1}) = 1 - x_n,$$

在两边同时取极限之前, 我们还得先考虑 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n$. 由于 $1 = x_2 + x_2^2 \geqslant x_2 \cdot x_2 + x_2^2 = 2x_2^2 \Rightarrow x_2 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} < 1$, 对 $x_n^n < x_2^n$, 由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = 0$. 因此, 对数列 $\{x_n\}$ 取极限, 有

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 - x_n^n = \lim_{n\to\infty} 1 - x_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

**习题 2.C.10** 设 $a < b$, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且对任意 $x \in [a,b)$ 存在 $y \in (x,b)$ 使得 $f(y) > f(x)$. 求证: $f(b) > f(a)$.

**解** 考虑 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$, 由闭区间上连续函数的最值性, 知存在 $x_0 \in [a,b]$, 使得 $f(x_0) = M$. 若 $\exists x < b, f(x) = M$, 则由题设条件, 存在 $y \in (x,b)$, 使得 $f(y) > f(x) = M$, 矛盾. 因此 $f(b) = M$, 且 $\forall x < b, f(x) < M$. 特别的,$f(a) < f(b)$.

# 第 3 章 单变量函数的微分学

## 习题 3.1

**习题 3.1.1** 讨论下列函数在点 $x=0$ 处是否可导:

(1) $f(x)=|\sin x|$;

(2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geqslant 0, \\ 1, & x<0; \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+x), & x\geqslant 0, \\ x+1, & x<0; \end{cases}$

(5) $f(x)=|x|\mathrm{e}^x$;

(6) $f(x)=|x^3|$.

**解**

(1)

$$f'_+(0)=\lim_{h\to0^+}\frac{|\sin h|-|\sin 0|}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{\sin h}{h}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to0^-}\frac{|\sin h|-|\sin 0|}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{-\sin h}{h}=-1.$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(2)

$$f'_+(0)=\lim_{h\to0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^+}\frac{(h+1)-1}{h}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0^-}\frac{1-1}{h}=0.$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(3)

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to0}h\sin\frac{1}{h}=0.$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$.

(4)

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=1\neq f(0),$$

因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(5)

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{he^h-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}e^h=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-he^h-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}-e^h=-1.$$

$f'_+(0)\neq f'_-(0)$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

(6)

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{|h^3|-0}{h}=\lim_{h\to 0}|h|h=0,$$

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

**习题 3.1.2** 求 $a,b$ 的值, 使下列函数处处可导:

(1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1;\end{cases}$　　(2) $f(x)=\begin{cases}\ln(1+x), & x<0,\\ ax+b, & x\geqslant 0.\end{cases}$

**解**

(1) $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上可导, 故只需讨论 $x=1$ 处的可导性.

由连续性得:

$$f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)\Rightarrow 1=a+b.$$

由可导性得:

$$f'_-(1)=f'_+(1)\Rightarrow 2=a.$$

解得 $a=2,b=-1$.

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上可导, 故只需讨论 $x=0$ 处的可导性.

由连续性得:

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)\Rightarrow b=0.$$

由可导性得:

$$f'_-(0)=f'_+(0)\Rightarrow 1=a.$$

解得 $a=1,b=0$.

**习题 3.1.3** 设函数 $g(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 记 $f(x)=(x-a)g(x)$. 证明 $f'(a)=g(a)$.

**解**

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h-a)g(a+h)-0}{h}=\lim_{h\to 0}g(a+h)=g(a).$$

**习题 3.1.4** 若函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导, 证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=(\alpha+\beta)f'(x_0)\quad(\alpha,\beta\text{为常数}).$$

**解**

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}\\
=&\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-\beta h)}{h}\right]\\
=&\lim_{h\to 0}\left[\alpha\cdot\frac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h}+\beta\cdot\frac{f(x_0)-f(x_0-\beta h)}{\beta h}\right]\\
=&\alpha f'(x_0)+\beta f'(x_0)=(\alpha+\beta)f'(x_0).
\end{aligned}$$

**习题 3.1.5** 设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $f(a)\neq 0$, 证明函数 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 也可导. 若 $f(a)=0$, 结论是否仍成立?

**解**

(1) $f(a)\neq 0$ 时, 不妨设 $f(a)>0$, 则 $\exists\delta>0$, 当 $|x-a|<\delta$ 时,$f(x)>0$, 因此

$$|f(x)|=f(x),$$

因此 $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导, 且 $|f|'(a)=f'(a)$.

(2) 不成立, 如 $f(x)=x$ 在 $x=0$ 处可导, 但是 $|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

**习题 3.1.6** 求下列函数的导数.

(1) $y=\dfrac{x}{3x^2+5x-2}$;

(2) $y=\sin x\tan x+\cot x$;

(3) $y=x^2\log_3 x$;

(4) $y=\dfrac{x}{1-\cos x}$;

(5) $y=\dfrac{1+\ln x}{x^2+1}$;

(6) $y=\dfrac{(1+x^2)\ln x}{\sin x+\cos x}$;

(7) $y=(x^2+1)(3x-1)(1-x^3)$;

(8) $y=x^3\cdot\tan x\cdot\ln x$.

**解**

(1)

$$\begin{aligned}
y'&=\frac{x'(3x^2+5x-2)-x(3x^2+5x-2)'}{(3x^2+5x-2)^2}\\
&=\frac{(3x^2+5x-2)-(6x^2+5x)}{(3x^2+5x-2)^2}=-\frac{3x^2+2}{(3x^2+5x-2)^2}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
y'&=\left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)'\\
&=\frac{(2\sin x\cos x)\cos x-\sin^2 x(-\sin x)}{\cos^2 x}+\frac{-\sin x\sin x-\cos x\cos x}{\sin^2 x}\\
&=\frac{\sin x(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}y' &= (x^2)'\log_3 x + x^2(\log_3 x)' \\ &= 2x\log_3 x + x^2 \cdot \frac{1}{x\ln 3} \\ &= 2x\log_3 x + \frac{x}{\ln 3}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(x)'(1-\cos x) - x(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{1\cdot(1-\cos x) - x(\sin x)}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{1-\cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2}\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(1+\ln x)'(x^2+1) - (1+\ln x)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x}(x^2+1) - (1+\ln x)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x + \frac{1}{x} - 2x - 2x\ln x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{1 - x^2 - 2x^2\ln x}{x(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}y' &= \frac{[(1+x^2)\ln x]'(\sin x+\cos x) - (1+x^2)\ln x(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2} \\ &= \frac{[(1+x^2)'\ln x + (1+x^2)(\ln x)'](\sin x+\cos x) - (1+x^2)\ln x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2} \\ &= \frac{[2x\ln x + (1+x^2)\frac{1}{x}](\sin x+\cos x) - (1+x^2)\ln x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2} \\ &= \frac{(2x\ln x + x + \frac{1}{x})(\sin x+\cos x) - (1+x^2)\ln x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2} \\ &= \frac{\left(x+\frac{1}{x}+(x+1)^2\ln x\right)\sin x + \left(x+\frac{1}{x}-(x-1)^2\ln x\right)\cos x}{(\sin x+\cos x)^2}\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}&y'(x^2+1)'(3x-1)(1-x^3) + (x^2+1)(3x-1)'(1-x^3) + (x^2+1)(3x-1)(1-x^3)' \\ &\quad = 2x(3x-1)(1-x^3) + (x^2+1)3(1-x^3) + (x^2+1)(3x-1)(-3x^2) \\ &\quad = -18x^5 + 5x^4 - 12x^3 + 12x^2 - 2x + 3\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} y' &= (x^3)'(\tan x \cdot \ln x) + x^3(\tan x)' \ln x + x^3 \tan x(\ln x)' \\ &= (3x^2)(\tan x \ln x) + (x^3)(\sec^2 x)(\ln x) + (x^3 \tan x)\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= 3x^2 \tan x \ln x + x^3 \sec^2 x \ln x + x^2 \tan x \\ &= x^2(3\tan x \ln x + x \sec^2 x \ln x + \tan x) \end{aligned}$$

**习题 3.1.7** 求下列函数的导数:

(1) $y = x\sqrt{1-x^2}$;

(2) $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$;

(3) $y = \arccos \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$;

(4) $y = (\sin x + \cos x)^3$;

(5) $y = (\sin x^3)^3$;

(6) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

(7) $y = \sin[\sin(\sin x)]$;

(8) $y = \sin[\cos^5(\arctan x^3)]$;

(9) $y = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3$;

(10)$y = x\sqrt{1+x^2}\sin x$;

(11)$y = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$;

(12)$y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)]$;

(13)$y = x^{x^x} + x^x + x^{2^x}$;

(14)$y = (\ln x)^x$;

(15)$y = (\tan x)^{\cot x}$;

(16)$y = 10^x \cdot (\sin x)^{\cos x}$;

(17)$y = \dfrac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^3(x+4)^{1/2}}$;

(18)$y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\sqrt{\dfrac{1+x}{1+x^2}}$.

**解**

(1)

$$y' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

(2)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}}\left(\ln^2 x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 x}} 2\ln x\,(\ln x)' = \frac{2\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}.$$

(3)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)' = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+4x+2}} = \sqrt{\frac{1}{-2x^2+2x+1}}.$$

(4)

$$y' = 3(\sin x + \cos x)^2(\cos x - \sin x) = 3(1+\cos 2x)(\cos x - \sin x).$$

(5)

$$y' = 3\left(\sin x^3\right)^2\left(\sin x^3\right)' = 3\left(\sin x^3\right)^2\left(\cos x^3\right)3x^2.$$

(6)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(x+\sqrt{x}\right)'\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)
\end{aligned}$$

(7)

$$\begin{aligned}
y' &= \cos[\sin(\sin x)]\left(\sin(\sin x)\right)' \\
&= \cos[\sin(\sin x)]\cos(\sin x)\left(\sin x\right)' \\
&= \cos[\sin(\sin x)]\cos(\sin x)\cos x
\end{aligned}$$

(8) 令 $u = \arctan x^3$, 则 $v = \cos^5 u$, 则 $y = \sin v$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= \cos v \cdot v' = \cos v \cdot (-5\sin^4 u \cdot \cos u)u' \\
&= -5\cos\cos^5(\arctan x^3)\sin^4(\arctan x^3)\cdot\cos(\arctan x^3)\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}.
\end{aligned}$$

(9)

$$y' = \frac{12x^5 - 24x^3 + 12x}{(x^2+1)^3}.$$

(10)

$$y' = \frac{x\sin x + \cos x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(11)

$$y' = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(12) 令 $u = \ln^3 x$, 则 $v = \ln^2 u$, 则 $y = \ln v$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1}{v}\cdot v' = \frac{1}{v}\cdot 2\ln u\cdot\frac{1}{u}u' \\
&= \frac{2\ln(\ln^3 x)}{\ln^2(\ln^3 x)}\cdot\frac{1}{\ln^3 x}\cdot\frac{3\ln^2 x}{x} = \frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}.
\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\mathrm{e}^{x^x \ln x} + \mathrm{e}^{x \ln x} + \mathrm{e}^{2^x \ln x}\right)' \\
&= (\mathrm{e}^{x \ln x} \ln x)' \mathrm{e}^{x^x \ln x} + (x \ln x)' \mathrm{e}^{x \ln x} + (2^x \ln x)' \mathrm{e}^{2^x \ln x} \\
&= \left((1+\ln x)\mathrm{e}^{x \ln x} + \frac{1}{x} x^x\right) \mathrm{e}^{x^x \ln x} + (1+\ln x)\mathrm{e}^{x \ln x} + \left(2^x \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 \ln x\right) \mathrm{e}^{2^x \ln x} \\
&= x^{x^x} \left(x^{x-1} + \ln x(\ln x + 1)x^x\right) + x^x (\ln x + 1) + x^{2^x} \left(2^x \frac{1}{x} + \ln x \cdot 2^x \ln 2\right)
\end{aligned}$$

(14)

$$y' = \frac{(\ln x)^{x+1} \ln(\ln x) + \ln(\ln x)}{\ln x}.$$

(15)

$$y' = (\tan x)^{\cot x} \csc^2 (1 - \ln(\tan x))$$

(16) 设 $y = \mathrm{e}^{2\ln(x+5) + \frac{1}{3}\ln(x-4) - 5\ln(x+2) - \frac{1}{2}\ln(x+4)} := \mathrm{e}^u$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{(x+5)^2 (x-4)^{1/3}}{(x+2)^5 (x+4)^{1/2}} \left(2\frac{1}{x+5} + \frac{1}{3}\frac{1}{x-4} - 5\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+4}\right).
\end{aligned}$$

(17)

$$y' = 10^x \ln 10 \cdot (\sin x)^{\cos x} - 10^x \ln(\sin x)(\sin x)^{\cos x + 1} + 10^x \cos^2 x (\sin x)^{\cos x - 1}.$$

(18) 设 $y = \mathrm{e}^{\ln(1-\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)} := \mathrm{e}^u$, 则

$$\begin{aligned}
y' &= \mathrm{e}^u \cdot u' = y \cdot u' \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2}\right) \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x} - \frac{x}{1+x^2}\right) \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2}\right)
\end{aligned}$$

**习题 3.1.8** 设 $f(x) = x^3$. 求 $f'(x^2)$ 与 $[f(x^2)]'$.

**解**

$$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(x^2) = 3(x^2)^2 = 3x^4,$$

$$[f(x^2)]' = [(x^3)^2]' = (x^6)' = 6x^5.$$

**习题 3.1.9** 设 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), g(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}$. 求 $f'[g(x)], [f(g(x))]'$.

**解**

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\Rightarrow f'[g(x)]=\frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}})^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+1}}}},$$

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))\cdot g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+(\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}})^2}}\cdot\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{(x^2+1)(1+\mathrm{e}^{2\sqrt{x^2+1}})}}.$$

**习题 3.1.10** 设 $f(x)$ 处处可导. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

(1) $y=f(x^3)$;

(2) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

(3) $y=f(\mathrm{e}^x+x^{\mathrm{e}})$;

(4) $y=\sin[f(\sin f(x))]$;

(5) $y=f[f(f(x+\cos x))]$;

(6) $y=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{f(x)}$.

**解**

(1) 令 $u=x^3$, 则
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot(3x^2)=3x^2f'(x^3).$$

(2) 令 $u=\sin^2 x, v=\cos^2 x$, 则 $y=f(u)+f(v)$. 由链式法则:
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(v)\\&=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\\&=f'(u)\cdot(2\sin x\cos x)+f'(v)\cdot(2\cos x(-\sin x))\\&=f'(\sin^2 x)\sin(2x)-f'(\cos^2 x)\sin(2x)\\&=[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]\sin(2x).\end{aligned}$$

(3) 令 $u=\mathrm{e}^x+x^{\mathrm{e}}$, 则 $y=f(u)$. 根据链式法则,
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1})=(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1})f'(\mathrm{e}^x+x^{\mathrm{e}}).$$

(4) 这是一个多次复合的函数. 反复应用链式法则:
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin[f(\sin f(x))]\\&=\cos[f(\sin f(x))]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\sin f(x))\\&=\cos[f(\sin f(x))]\cdot f'(\sin f(x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin f(x))\\&=\cos[f(\sin f(x))]\cdot f'(\sin f(x))\cdot\cos(f(x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\\&=f'(x)\cos(f(x))f'(\sin f(x))\cos[f(\sin f(x))].\end{aligned}$$

(5) 同样, 多次应用链式法则:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f[f(f(x+\cos x))] \\ &= f'[f(f(x+\cos x))]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(f(x+\cos x)) \\ &= f'[f(f(x+\cos x))]\cdot f'(f(x+\cos x))\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x+\cos x) \\ &= f'[f(f(x+\cos x))]\cdot f'(f(x+\cos x))\cdot f'(x+\cos x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+\cos x) \\ &= (1-\sin x)f'(x+\cos x)f'(f(x+\cos x))f'[f(f(x+\cos x))].\end{aligned}$$

(6) 令 $u = f(\mathrm{e}^x)$ 且 $v = \mathrm{e}^{f(x)}$, 则 $y = uv$. 根据乘法法则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}v + u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$. 分别计算:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(\mathrm{e}^x) = f'(\mathrm{e}^x)\cdot(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x).$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x).$$

将它们代入乘法法则：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (\mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x))\cdot\mathrm{e}^{f(x)} + f(\mathrm{e}^x)\cdot(\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)) \\ &= \mathrm{e}^{f(x)}[\mathrm{e}^x f'(\mathrm{e}^x) + f(\mathrm{e}^x)f'(x)].\end{aligned}$$

**习题 3.1.11** 求下列函数的导数:

(1) $y = \begin{cases} \dfrac{x\mathrm{e}^{1/x}}{1+\mathrm{e}^{1/x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

(2) $y = |1-2x|\sin x$.

**解**

(1) 对于 $x \neq 0$,

$$y' = \frac{\mathrm{e}^{1/x}\left(1 - 1/x + \mathrm{e}^{1/x}\right)}{(1+\mathrm{e}^{1/x})^2}$$

对于 $x = 0$,

$$y'_+ = \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{h\mathrm{e}^{1/h}}{1+\mathrm{e}^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\mathrm{e}^{-1/h}+1} = 1, \quad y'_- = \lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{h\mathrm{e}^{1/h}}{1+\mathrm{e}^{1/h}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\mathrm{e}^{1/h}}{\mathrm{e}^{1/h}+1} = 0$$

因此

$$y' = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{1/x}\left(1 - 1/x + \mathrm{e}^{1/x}\right)}{(1+\mathrm{e}^{1/x})^2} & x \neq 0 \\ \text{不存在} & x = 0 \end{cases}$$

(2) (a) $(1-2x) > 0$ 时,$x < \dfrac{1}{2}$, $y' = ((1-2x)\sin x)' = -2\sin x + (1-2x)\cos x$.

(b) $(1-2x) < 0$ 时,$x > \dfrac{1}{2}$, $y' = ((2x-1)\sin x)' = 2\sin x + (2x-1)\cos x$.

(c) $(1-2x) = 0$ 时,$y'_+ = 2\sin\dfrac{1}{2} \neq y'_- = -2\sin\dfrac{1}{2}$.

综上所述,

$$y' = \begin{cases} 2\sin x + (2x-1)\cos x & x > \dfrac{1}{2} \\ -2\sin x + (1-2x)\cos x & x < \dfrac{1}{2} \\ \text{不存在} & x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

**习题 3.1.12** 设 $n$ 为正整数, 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 证明:

(1) 当 $n = 1$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不可导;

(2) 当 $n = 2$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 但导函数在 $x = 0$ 处不连续 (事实上, 在这一点有第二类间断);

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且导函数在 $x = 0$ 处连续.

**解**

(1) 当 $n = 1$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \sin \frac{1}{h},$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \sin \frac{1}{h},$$

显然, $f'_+(0)$ 与 $f'_-(0)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处不可导.

(2) 当 $n = 2$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} h \sin \frac{1}{h} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 且 $f'(0) = 0$. 对于 $x \neq 0$,

$$f'(x) = (x^2 \sin \frac{1}{x})' = 2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \left( -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} \right) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} (2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x})$$

不存在, 故 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不连续.

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^n \sin \frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} h^{n-1} \sin \frac{1}{h} = 0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$. 对于 $x\neq 0$,

$$f'(x)=(x^n\sin\frac{1}{x})'=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}+x^n\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}.$$

因此,

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x})=0,$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

**习题 3.1.13** 证明: 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在区间 $[-1,1]$ 上处处可导, 但导函数在这个区间上无界.

**解** 对于 $x\neq 0$,

$$f'(x)=(x^2\sin\frac{1}{x^2})'=2x\sin\frac{1}{x^2}+x^2\left(-\frac{2}{x^3}\cos\frac{1}{x^2}\right)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

对于 $x=0$,

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}h\sin\frac{1}{h^2}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^2\sin\frac{1}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}h\sin\frac{1}{h^2}=0,$$

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$. 综上所述, $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上处处可导. 而对于 $x=\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}(n=1,2,3,\cdots)$,

$$f'\left(\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\sin(n\pi)-2\sqrt{n\pi}\cos(n\pi)=(-1)^{n+1}2\sqrt{n\pi},$$

显然, 当 $n$ 趋近于无穷大时, $\left|f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}\right)\right|$ 趋近于无穷大, 故导函数在区间 $[-1,1]$ 上无界.

**习题 3.1.14** 求下列函数的反函数的微商.

(1) $y=xe^x$;

(2) $y=\arctan\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=2x^3-e^{-2x}$;

(4) $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$.

按照反函数求导定理, 我们应该写成这样:

$$(f^{-1})'(y)\overset{y=xe^x}{=}\frac{1}{f'(x)}$$

但是考虑到初学者对反函数求导的理解有点困难, 容易把自己绕晕. 我们给出几种推荐且合理的过程, 这几种过程几乎是等价的:

**解**

(1) 将 $x$ 看成 $y$ 的函数并在方程两边对 $y$ 求导

$$1=x'e^x+xx'e^x\Rightarrow x'=\frac{e^{-x}}{1+x}.$$

**注** 对于由方程 $\varphi(x,y)=0$ 给出的反函数或隐函数, 只要认准了一个变量是另一个变量的函数, 在方程两边直接对自变量求导即可. 有关详细内容将在第二册中介绍.

(2)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=-(1+x^2)$$

**注** 这种写法与反函数求导定理的意义是最贴近的, 但是避免了使用重复的符号, 因此看起来清晰一点.

(3)

$$\mathrm{d}y=2\,\mathrm{d}(x^3)-\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-2x}\right)=6x^2\,\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{6x^2+2\mathrm{e}^{-2x}}.$$

**注** 这在利用 3.2 节中微分的知识: 若 $y(x)$ 可微且能表示为 $\mathrm{d}x=A\,\mathrm{d}y$, 那么 $A=x'(y)$.

(4)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{1}{\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\left(\mathrm{e}^x+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}\cdot2\mathrm{e}^{2x}\right)\\&=\frac{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}{(\mathrm{e}^x+\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}})\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}=\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}.\end{aligned}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^x}.$$

**习题 3.1.15** 证明: 可导的偶函数的导数为奇函数; 而可导的奇函数的导数为偶函数.

**解** 设 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x)=f(x)$, 则

$$f'(-x)=\lim_{h\to0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=f'(x),$$

则 $f'(x)$ 为奇函数.

设 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(-x)=-f(x)$, 则

$$f'(-x)=\lim_{h\to0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)+f(x)}{h}=f'(x),$$

则 $f'(x)$ 为偶函数.

**习题 3.1.16** 证明: 可导的周期函数的导数仍是周期函数.

**解** 设 $f(x)$ 为周期为 $T$ 的函数, 则 $f(x+T)=f(x)$, 则 $f'(x+T)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$, 则 $f'(x)$ 为周期为 $T$ 的函数.

**习题 3.1.17** 求下列各式之和:

(1) $P_n=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$;

(2) $Q_n=1^2+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}$;

(3) $R_n=\cos1+2\cos2+\cdots+n\cos n$.

**解**

(1) 令 $A(x)=x+x^2+\cdots+x^n=\dfrac{x(1-x^n)}{1-x}$, 则 $P_n=A'(x)=\dfrac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}$.

(2) $Q_n=(xA'(x))'=\dfrac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$.

(3) 令 $B(x)=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$,

则 $B'(x)=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)2\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\left(2\sin\frac{x}{2}\right)^2}$.

则 $R_n=B'(1)=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)2\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\left(2\sin\frac{1}{2}\right)^2}$.

**习题 3.1.18** 求下列函数的二阶导数:

(1) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$;

(2) $y=x^2 2^{2x}$;

(3) $y=(1+x^2)\arctan x$;

(4) $y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0.\end{cases}$

**解**

(1)

$$y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2},\quad y''=(4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

(2)

$$y'=2x2^{2x}(1+2\ln 2),\quad y''=4x2^{2x}(\ln 2)^2+4(1+\ln 2)2^{2x}.$$

(3)

$$y'=1+2x\arctan x,\quad y''=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}.$$

(4) 当 $y>0$ 时,$y'=2x$; 当 $y<0$ 时,$y'=-2x$; 当 $y=0$ 时,

$$y'_+=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-0}{h}=0=y'_-=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2-0}{h}=0$$

故 $y'(0)=0$ 存在.

当 $y>0$ 时,$y''=2$; 当 $y<0$ 时,$y''=-2$; 当 $y=0$ 时,

$$y''_+=\lim_{h\to 0^+}\frac{2h-0}{h}=2\neq y''_-=\lim_{h\to 0^-}\frac{-2h-0}{h}=-2$$

故 $y''(0)$ 不存在.

**习题 3.1.19** 设函数 $f(x)$ 处处有三阶导数, 求 $y'',y'''$.

(1) $y=f(x^2)$;

(2) $y=f(\mathrm{e}^x+x)$.

**解**

(1)

$$y' = f'(x^2)\cdot 2x, \quad y'' = f''(x^2)\cdot(2x)^2 + f'(x^2)\cdot 2, \quad y''' = f'''(x^2)\cdot(2x)^3 + 3f''(x^2)\cdot(2x)\cdot 2.$$

(2)

$$y' = f'(\mathrm{e}^x + x)\cdot(\mathrm{e}^x+1), \quad y'' = f''(\mathrm{e}^x+x)\cdot(\mathrm{e}^x+1)^2 + f'(\mathrm{e}^x+x)\cdot \mathrm{e}^x,$$

$$y''' = f'''(\mathrm{e}^x+x)\cdot(\mathrm{e}^x+1)^3 + 3f''(\mathrm{e}^x+x)\cdot(\mathrm{e}^x+1)\cdot\mathrm{e}^x + f'(\mathrm{e}^x+x)\cdot\mathrm{e}^x.$$

**习题 3.1.20** 设 $f(x) = x^n|x|$ ($n$ 为正整数), 证明 $f^{(n)}(0)$ 存在, 但 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

**解**

(1) 当 $k \leqslant n$ 时当 $x > 0$ 时,$f(x) = x^{n+1}$, 则 $f^{(k)}(x) = \dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!}x^{n+1-k} = A_{n+1}^k x^{n+1-k}$;

当 $x < 0$ 时,$f(x) = -x^{n+1}$, 则 $f^{(k)}(x) = -\dfrac{(n+1)!}{(n+1-k)!}x^{n+1-k} = -A_{n+1}^k x^{n+1-k}$;

当 $x = 0$ 时,

$$f_+^{(k)}(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{A_{n+1}^{k-1}h^{n+2-k} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} A_{n+1}^{k-1}h^{n+1-k} = 0$$

$$f_-^{(k)}(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f^{(k-1)}(h) - f^{(k-1)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{-A_{n+1}^{k-1}h^{n+2-k} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} -A_{n+1}^{k-1}h^{n+1-k} = 0$$

$f_+^{(n)}(0) = f_-^{(n)}(0)$, 故 $f^{(n)}(0) = 0$ 存在.

(2) 当 $x > 0$ 时,$f^{(n)}(x) = (n{+}1)!x$, 则 $f^{(n+1)}(x) = (n{+}1)!$; 当 $x < 0$ 时,$f^{(n)}(x) = (-1)(n{+}1)!x$, 则 $f^{(n+1)}(x) = (-1)(n+1)!$; 当 $x = 0$ 时,

$$f_+^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(n+1)!h - 0}{h} = (n+1)!$$

$$f_-^{(n+1)}(0) = \lim_{h\to 0^-}\frac{f^{(n)}(h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{(-1)(n+1)!h - 0}{h} = (-1)(n+1)!$$

$f_+^{(n+1)}(0) \neq f_-^{(n+1)}(0)$, 故 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在.

**习题 3.1.21** 证明: 如果 $x_0$ 是多项式 $P_n(x)$ 的 $r$ 重根, 即 $P_n(x)$ 可以分解成

$$P_n(x) = (x - x_0)^r Q_{n-r}(x),$$

其中 $Q_{n-r}(x)$ 是一个 $n - r$ 次多项式, 且 $Q_{n-r}(x_0) \neq 0$. 则 $P_n(x)$ 满足条件

$$P_n(x_0) = 0, \quad P_n'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad P_n^{(r-1)}(x_0) = 0, \quad P_n^{(r)}(x_0) \neq 0.$$

**解** 由题意,$P_n(x) = (x - x_0)^r Q_{n-r}(x)$, 则

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left[(x-x_0)^r\right]^{(i)}\cdot Q_{n-r}^{(k-i)}(x).$$

(a) 当 $k < r$ 时,$[(x-x_0)^r]^{(i)} = 0$, 则 $P_n^{(k)}(x_0) = 0$.

(b) 当 $k = r$ 时,$[(x-x_0)^r]^{(r)} = r!$, 则 $P_n^{(r)}(x_0) = r!Q_{n-r}(x_0) \neq 0$.

**习题 3.1.22** 求下列函数的高阶导数:

(1) $(x^2\mathrm{e}^x)^{(n)}$; (2) $[(x^2+1)\sin x]^{(n)}$;

(3) $\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)}$; (4) $(\sin x\cdot\cos x)^{(n)}$.

我们将会直接使用如下结论:

(1) $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+\dfrac{n\pi}{2}),\ (\cos x)^{(n)}=\cos(x+\dfrac{n\pi}{2})$;

(2) $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$ , $(a^x)^{(n)}=(\ln a)^n a^x$;

(3) $\left(\dfrac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$;

(4) $(\ln(x+a))^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$;

(5) $(x^m)^{(n)}=\begin{cases}0 & n<m;\\ n! & n=m;\\ n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m} & n>m.\end{cases}$;

**解**

(1) 由莱布尼兹公式,

$$(x^2\mathrm{e}^x)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}(\mathrm{e}^x)^{(n-k)}=\sum_{k=0}^{\min\{2,n\}}\binom{n}{k}(x^2)^{(k)}\mathrm{e}^x.$$

(a) 当 $n=1$ 时,$(x^2\mathrm{e}^x)^{(1)}=(x^2)^{(0)}\mathrm{e}^x+(x^2)^{(1)}\mathrm{e}^x=(x^2+2x)\mathrm{e}^x$;

(b) 当 $n\geqslant 2$ 时,$(x^2\mathrm{e}^x)^{(n)}=(x^2)^{(0)}\mathrm{e}^x+n(x^2)^{(1)}\mathrm{e}^x+\dbinom{n}{2}(x^2)^{(2)}\mathrm{e}^x=(x^2+2nx+n(n-1))\mathrm{e}^x$.

(2) 由莱布尼兹公式,

$$[(x^2+1)\sin x]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^2+1)^{(k)}(\sin x)^{(n-k)}.$$

(a) 当 $n=1$ 时,$[(x^2+1)\sin x]^{(1)}=(x^2+1)^{(0)}\sin(x+\dfrac{\pi}{2})+(x^2+1)^{(1)}\sin x=(x^2+1)\cos x+2x\sin x$;

(b) 当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}[(x^2+1)\sin x]^{(n)}&=(x^2+1)^{(0)}\sin(x+\frac{n\pi}{2})+n(x^2+1)^{(1)}\sin(x+\frac{(n-1)\pi}{2})\\&\quad+\binom{n}{2}(x^2+1)^{(2)}\sin(x+\frac{(n-2)\pi}{2})\\&=(x^2+1)\sin(x+\frac{n\pi}{2})+2nx\sin(x+\frac{(n-1)\pi}{2})\\&\quad+n(n-1)\sin(x+\frac{(n-2)\pi}{2})\\&=(x^2+n(n-1)+1)\sin(x+\frac{n\pi}{2})+2nx\sin(x+\frac{(n-1)\pi}{2})\end{aligned}$$

(3) 由莱布尼兹公式,

$$\left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)^{(n)}=\left(\frac{1}{(x-1)(x-2)}\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(k)}\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n-k)}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k k!}{(x-1)^{k+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-k}(n-k)!}{(x-2)^{n-k+1}}$$
$$=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)(x-2)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-1)^k(x-2)^{n-k}}$$

(4)

$$(\sin x\cdot\cos x)^{(n)}=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^{(n)}=2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

**习题 3.1.23** 求曲线 $y=\cos x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程.

**解** $y'=-\sin x$, 则 $y'(\frac{\pi}{4})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $y(\frac{\pi}{4})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 则切线方程为

$$y-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

或

$$y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**习题 3.1.24** 证明: 双曲线 $xy=1$ 上任一点处的切线, 与两坐标轴构成的三角形的面积为定值.

**解** 对 $xy=1$ 两侧对 $x$ 求导,$y'=-\dfrac{y}{x}$, 设切点为 $(x_0,y_0)$, 则切线方程为

$$y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0)$$

即

$$y=-\frac{y_0}{x_0}x+2y_0.$$

切线与 $x$ 轴交点为 $(2x_0,0)$, 与 $y$ 轴交点为 $(0,2y_0)$, 则三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2x_0\cdot 2y_0=2x_0y_0=2.$$

**习题 3.1.25** 有一底半径为 $r$ cm, 高为 $h$ cm 的正圆锥形容器, 现以 $a$ cm$^3$/s 的速度自顶部向其内注水, 求水面上升的速度.

**解** 设水面高度为 $x$ cm, 则水面半径为 $\dfrac{r}{h}x$ cm, 则水体积为

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2x=\frac{\pi r^2}{3h^2}x^3.$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi r^2}{h^2}x^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

由题意,$\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=a$, 则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{ah^2}{\pi r^2x^2}.$$

**习题 3.1.26** 水自高为 18 cm, 底半径为 6 cm 的圆锥形漏斗流入直径为 10 cm 的圆柱形筒中. 已知水在漏斗中深度为 12 cm 时水平面下降的速率为 1 cm/min. 试求圆柱形筒中水面上升的速度.

**解** 设漏斗中水深为 $x$ cm, 则漏斗中水体积为

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{6}{18}x\right)^2x=\frac{\pi}{27}x^3.$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi}{9}x^2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

由题意,$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-1$ cm/min, 当 $x=12$ cm 时,

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=-16\pi\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{min}.$$

设圆柱形筒中水深为 $y$ cm, 则圆柱形筒中水体积为

$$V_2=\pi 5^2y=25\pi y.$$

则

$$\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}=25\pi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

由题意,$-\dfrac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}$, 则

$$-(-16\pi)=25\pi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{16}{25}\ \mathrm{cm}/\mathrm{min}.$$

# 习题 3.2

**习题 3.2.1** 设 $y = x^2 + x$, 计算在 $x = 1$ 处, 当 $\Delta x = 10, 1, 0.1, 0.01$ 时, 相应的函数的改变量 $\Delta y$ 和函数的微分 $\mathrm{d}y$, 并观察差 $\Delta y - \mathrm{d}y$ 随 $\Delta x$ 减小的变化情况.

**解**

(1) 当 $\Delta x = 10$ 时,

$$\Delta y = f(11) - f(1) = 130, \mathrm{d}y = f'(1)\,\mathrm{d}x = 3 \times 10 = 30, \Delta y - \mathrm{d}y = 100.$$

(2) 当 $\Delta x = 1$ 时,

$$\Delta y = f(2) - f(1) = 4, \mathrm{d}y = f'(1)\,\mathrm{d}x = 3 \times 1 = 3, \Delta y - \mathrm{d}y = 1.$$

(3) 当 $\Delta x = 0.1$ 时,

$$\Delta y = f(1.1) - f(1) = 0.31, \mathrm{d}y = f'(1)\,\mathrm{d}x = 3 \times 0.1 = 0.3, \Delta y - \mathrm{d}y = 0.01.$$

(4) 当 $\Delta x = 0.01$ 时,

$$\Delta y = f(1.01) - f(1) = 0.0301, \mathrm{d}y = f'(1)\,\mathrm{d}x = 3 \times 0.01 = 0.03, \Delta y - \mathrm{d}y = 0.0001.$$

从中不难看出, 随着 $\Delta x$ 的减小, $\Delta y - \mathrm{d}y$ 也在减小, 且大体上 $\Delta y - \mathrm{d}y$ 趋于 0.

**习题 3.2.2** 求下列函数的微分:

(1) $y = \ln(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4})$;

(2) $y = \sin x - x\cos x$;

(3) $y = \arccos\frac{1}{|x|}$;

(4) $y = \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$;

(5) $y = 5\sqrt[3]{\arctan x^2}$;

(6) $y = \tan^2(1 + 2x^2)$;

(7) $y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3 - x)$;

(8) $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

**解**

(1)

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}} \cdot \mathrm{d}\left(-\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{x - 2\pi}\,\mathrm{d}x.$$

(2)

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\sin x) - \mathrm{d}(x\cos x) = \cos x\,\mathrm{d}x - (\cos x - x\sin x)\,\mathrm{d}x = x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

(3) $x > 0$ 时,

$$\mathrm{d}y = -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \cdot \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$$

$x<0$ 时,

$$\mathrm{d}y = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot \mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x, |x|>1.$$

(4)

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(\ln|x-1| - \ln|x+1|\right) = \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x, \quad x \neq \pm 1.$$

(5)

$$\mathrm{d}y = 5\cdot\frac{1}{3}(\arctan x^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot \mathrm{d}(\arctan x^2) = \frac{10x}{3(1+x^4)(\arctan x^2)^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x.$$

(6)

$$\mathrm{d}y = 2\tan(1+2x^2)\cdot\sec^2(1+2x^2)\cdot\mathrm{d}(1+2x^2) = 8x\tan(1+2x^2)\sec^2(1+2x^2)\,\mathrm{d}x.$$

(7)

$$\mathrm{d}y = \mathrm{e}^{-x}\cos(3-x)\cdot\mathrm{d}(-x) + \mathrm{e}^{-x}\cdot\mathrm{d}(\cos(3-x)) = \mathrm{e}^{-x}(-\cos(3-x)+\sin(3-x))\,\mathrm{d}x.$$

(8)

$$\mathrm{d}y = \frac{(\sqrt{x^2+1})\cdot\mathrm{d}(x) - x\cdot\mathrm{d}(\sqrt{x^2+1})}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x.$$

**习题 3.2.3** 对下列函数, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

(1) $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctan t; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x = \varphi\cos\varphi, \\ y = \varphi\sin\varphi; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} x = \cos^3\varphi, \\ y = \sin^3\varphi. \end{cases}$

**解**

(1) 对 $x=\ln(1+t^2), y = t-\arctan t$ 两边求微分, 得

$$\mathrm{d}x = \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y = \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

(2) 对 $x=t-\sin t, y=1-\cos t$ 两边求微分, 得

$$\mathrm{d}x=(1-\cos t)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y=\sin t\,\mathrm{d}t,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\frac{\cos t(1-\cos t)-\sin t\cdot\sin t}{(1-\cos t)^2}}{1-\cos t}=\frac{\cos t-1}{(1-\cos t)^3}=-\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

(3) 对 $x=\varphi\cos\varphi, y=\varphi\sin\varphi$ 两边求微分, 得

$$\mathrm{d}x=(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}y=(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{\sin\varphi+\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\\&=\frac{\frac{(\cos\varphi+\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)-(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)(-\sin\varphi-\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)}{(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)^2}}{\cos\varphi-\varphi\sin\varphi}\\&=\frac{\varphi^2+2}{(\cos\varphi-\varphi\sin\varphi)^3}\end{aligned}$$

(4) 对 $x=\cos^3\varphi, y=\sin^3\varphi$ 两边求微分, 得

$$\mathrm{d}x=-3\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}y=3\sin^2\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{3\sin^2\varphi\cos\varphi}{-3\cos^2\varphi\sin\varphi}=-\tan\varphi.$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}=\frac{-\sec^2\varphi}{-3\cos^2\varphi\sin\varphi}=\frac{1}{3\cos^4\varphi\sin\varphi}.$$

**习题 3.2.4** 求下列曲线在已知点处的切线方程.

(1) $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处; (2) $\begin{cases}x=\dfrac{3t}{1+t^2},\\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^2}\end{cases}$ 在 $t=2$ 处.

**解**

(1) 在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处,

$$x=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\cot t,$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -1.$$

切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -1\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

即

$$x + y - \sqrt{2} = 0.$$

(2) 在 $t = 2$ 处,

$$x = \frac{3 \times 2}{1 + 2^2} = \frac{6}{5}, \quad y = \frac{3 \times 2^2}{1 + 2^2} = \frac{12}{5}.$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{6t}{(1+t^2)^2}}{\frac{3(1-t^2)}{(1+t^2)^2}} = \frac{2t}{1-t^2},$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=2} = -\frac{4}{3}.$$

切线方程为

$$y - \frac{12}{5} = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{6}{5}\right),$$

即

$$4x + 3y - 12 = 0.$$

# 习题 3.3

**习题 3.3.1** 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 确定方程 $f'(x)=0$ 的实根的个数, 并指出根所在的区间.

**解** $f'(x)$ 为三次多项式, 故 $f'(x)=0$ 最多有三个实根. 又 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$, 由 Rolle 定理, 在 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 内分别各至少有一点 $\xi_1,\xi_2,\xi_3$, 使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$, 显然该三点互不相同. 因此 $f'(x)=0$ 有且仅有三个实根, 分别在 $(1,2),(2,3),(3,4)$ 内.

**习题 3.3.2** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上有二阶微商, 且 $f(1)=f(2)=0$. 记 $F(x)=(x-1)^2f(x)$, 则在区间 $(1,2)$ 内至少有一点 $\xi$, 使得 $F''(\xi)=0$.

**解** 由 $f(1)=f(2)=0\Rightarrow F(1)=F(2)=0$. 由 Rolle 定理, 在 $(1,2)$ 内至少有一点 $\xi_1$, 使得 $F'(\xi_1)=0$. 又 $F'(1)=2(1-1)f(1)+(1-1)^2f'(1)=0$. 由 Rolle 定理, 在 $(1,\xi_1)$ 内至少有一点 $\xi$, 使得 $F''(\xi)=0$.

**习题 3.3.3** 举例说明, 中值定理的下述意义的逆不成立: 设 $\xi\in(a,b)$ 是指定的一点, 则存在 $c,d\in[a,b]$, 使得 $\dfrac{f(c)-f(d)}{c-d}=f'(\xi)$. (提示: 考虑函数 $f(x)=x^3,\xi=0$.)

**解** 设 $f(x)=x^3,\xi=0$, 则 $f'(\xi)=f'(0)=0$. 若存在 $c,d\in[-1,1]$, 使得 $\dfrac{f(c)-f(d)}{c-d}=f'(\xi)$, 则有

$$\frac{c^3-d^3}{c-d}=0\Rightarrow c^2+cd+d^2=0\Rightarrow c=d=0.$$

但 $c,d$ 不能相等, 故不存在 $c,d\in[-1,1]$, 使得 $\dfrac{f(c)-f(d)}{c-d}=f'(\xi)$.

**习题 3.3.4** 证明下列不等式:

(1) 当 $a>b>0,n>1$ 时, 有 $nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$;

(2) 当 $x>0$ 时, 有 $\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$;

(3) 当 $0<a<b$ 时, 有 $(a+b)\ln\dfrac{a+b}{2}<a\ln a+b\ln b$.

(4) 当 $0<\alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ 时, 有 $\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\dfrac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$.

**解**

(1) 设 $f(x)=x^n$, 则 $f'(x)=nx^{n-1}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 $(b,a)$ 内至少有一点 $\xi$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

又 $a>\xi>b>0$,$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, 故 $nb^{n-1}<f'(\xi)<na^{n-1}$, 于是

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b).$$

(2) 设 $f(x)=\ln(1+x)$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 $(0,x)$ 内至少有一点 $\xi$, 使

得

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

又 $x>\xi>0$,$f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递减, 故 $\dfrac{1}{1+x}<f'(\xi)<1$, 于是

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

(3) 设 $f(x)=x\ln x$, 则 $f'(x)=\ln x+1$. 由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$,$\eta\in\left(\dfrac{a+b}{2},b\right)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\frac{a+b}{2}-a}=\frac{(a+b)\ln\frac{a+b}{2}-2a\ln a}{b-a}$$

$$f'(\eta)=\frac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{b-\frac{a+b}{2}}=\frac{2b\ln b-(a+b)\ln\frac{a+b}{2}}{b-a}$$

又 $a<\xi<\eta<b$, $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增, 故 $f'(\xi)<f'(\eta)$, 于是

$$(a+b)\ln\frac{a+b}{2}<a\ln a+b\ln b.$$

(4) 设 $f(x)=\tan x$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. 由 Lagrange 中值定理, 在 $(\alpha,\beta)$ 内至少有一点 $\xi$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}$$

又 $\beta>\xi>\alpha>0$,$f'(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内单调递增, 故 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}<f'(\xi)<\dfrac{1}{\cos^2\beta}$, 于是

$$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}.$$

**习题 3.3.5** 证明下列恒等式:

(1) $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

(2) $\arctan x+\arctan\dfrac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & x>-1,\\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x<-1.\end{cases}$

**解**

(1) 设 $f(x)=\arctan x-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=0.$$

又 $f(0)=0$, 故 $f(x)=0$, 即 $\arctan x=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(2) 设 $g(x)=\arctan x+\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$, 则

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}\cdot\frac{-2}{(1+x)^2}=0.\quad (x\neq -1)$$

又 $g(0)=\dfrac{\pi}{4}, g(-2)=-\dfrac{3\pi}{4}$, 故 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}, & x>-1,\\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x<-1.\end{cases}$

这道题使用了引理:

**引理** 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续, 且在 $I$ 内部可导. 若 $f'(x)=0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 在 $I$ 上恒为常数.

**证明** 设 $x_1,x_2\in I$, 不妨设 $x_1<x_2$, 则由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0\Rightarrow f(x_2)=f(x_1).$$

因此 $f(x)$ 在 $I$ 上恒为常数.

**习题 3.3.6** 设 $f(x)$ 是闭区间 $[0,1]$ 上的可导函数, 对任意 $x\in[0,1]$ 有 $f(x)\in(0,1)$; 并且对每个 $x, f'(x)\neq 1$. 证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 $x$, 使 $f(x)=x$.

**解** 先证明存在性: 设 $g(x)=f(x)-x$, 则 $g(0)=f(0)>0, g(1)=f(1)-1<0$. 由介值定理, 在 $(0,1)$ 内至少有一点 $\xi$, 使得 $g(\xi)=0$, 即 $f(\xi)=\xi$.

反证法证明唯一性: 假设在 $(0,1)$ 内有两点 $\xi_1,\xi_2$, 使得 $f(\xi_1)=\xi_1, f(\xi_2)=\xi_2$, 则 $g(\xi_1)=g(\xi_2)=0$. 由 Rolle 定理, 在 $(\xi_1,\xi_2)$ 内至少有一点 $\eta$, 使得 $g'(\eta)=0$, 即 $f'(\eta)-1=0$, 与 $f'(x)\neq 1$ 矛盾. 因此在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 $x$, 使 $f(x)=x$.

**习题 3.3.7** 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $|f'(x)|<1$, 又 $f(0)=f(1)$. 证明: 对于 $[0,1]$ 上的任意两点 $x_1,x_2$, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$.

**解** 对于 $x_1,x_2\in[0,1]$, 不妨设 $x_1<x_2$, 则由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi_1,\xi_2,\xi_3\,\mathrm{s.t.}\,0<\xi_1<x_1<\xi_2<x_2<\xi_3<1$, 使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(0)}{x_1-0},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1},\quad f'(\xi_3)=\frac{f(1)-f(x_2)}{1-x_2}.$$

因此

$$|f(x_1)-f(0)|=|f'(\xi_1)|x_1<x_1,$$

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi_2)|(x_2-x_1)<x_2-x_1,$$

$$|f(1)-f(x_2)|=|f'(\xi_3)|(1-x_2)<1-x_2.$$

于是

$$\begin{aligned}2|f(x_1)-f(x_2)| &= |f(x_2)-f(x_1)|+|f(1)-f(x_2)+f(x_1)-f(0)| \\ &\leqslant |f(x_2)-f(x_1)|+|f(1)-f(x_2)|+|f(x_1)-f(0)| \\ &< (x_2-x_1)+(1-x_2)+x_1=1.\end{aligned}$$

故 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{1}{2}$.

**习题 3.3.8** 若 $f(x)$ 处处可导, 且 $f'(x)=f(x)$. 证明 $f(x)=C\mathrm{e}^x, C$ 为任意常数.

**解** 设 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$, 则

$$g'(x)=\frac{f'(x)\mathrm{e}^x-f(x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}=\frac{\mathrm{e}^xf(x)-\mathrm{e}^xf(x)}{(\mathrm{e}^x)^2}=0.$$

因此 $g(x)\equiv g(0)\Rightarrow f(x)=f(0)\mathrm{e}^x$. 设 $C=f(0)$.

**习题 3.3.9** 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 内可导, 且 $f(a)=f(b)$. 证明在 $(a,b)$ 内存在一点 $\xi$, 使得 $f'(\xi)>0$.

**解** 由于 $f(x)$ 不为常函数, 故存在 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)\neq f(a)$.

(1) 若 $f(x_0)>f(a)$, 则 $\exists\xi\in(a,x_0)$, 使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$.

(2) 若 $f(x_0)<f(a)=f(b)$, 则 $\exists\eta\in(x_0,b)$, 使得 $f(\eta)=\dfrac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}>0$.

**习题 3.3.10** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 证明:

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

**解**

(1) 由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi_x\in(x,x+1)$, 使得

$$f'(\xi_x)=\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=f(x+1)-f(x).$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, 故 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0\Rightarrow\forall\varepsilon,\exists X>0,\mathrm{s.t.}\,\forall x>X,|f'(x)|<\varepsilon$. 设 $x>X$, 则由 Lagrange 中值定理,$\exists\eta\in(X,x)$, 使得

$$f'(\eta)=\frac{f(x)-f(X)}{x-X}\Rightarrow f(x)=f'(\eta)(x-X)+f(X).$$

因此

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\left|f'(\eta)\left(1-\frac{X}{x}\right)+\frac{f(X)}{x}\right|\leqslant|f'(\eta)|\left|1-\frac{X}{x}\right|+\left|\frac{f(X)}{x}\right|<\varepsilon+\left|\frac{f(X)}{x}\right|.$$

也就是说, 当 $x>\max\left\{X,\dfrac{|f(X)|}{\varepsilon}\right\}$ 时,$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<2\varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

**习题 3.3.11** 证明: 若函数 $f(x)$ 在 (有限) 开区间 $(a,b)$ 内有有界的导函数, 则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内也有界. 如果有限区间 $(a,b)$ 改为无穷区间, 结论还成立吗? 命题的逆命题是否成立?

**解** $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内可导, 故在 $(a,b)$ 连续. 不妨设 $\forall x\in(a,b), f'(x)\leqslant M$, 同时取 $c=\dfrac{a+b}{2}$, 则

$$\forall x\in(a,b)\setminus\{c\}, \left|\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right|=|f'(\xi)|\leqslant M\Rightarrow|f(x)|\leqslant|f(c)|+M|b-a|$$

显然对于 $c,|f(c)|\leqslant|f(c)|+M|b-a|$ 也成立, 即得 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 内有界.

将 $(a,b)$ 改为无穷区间, 结论不成立. 考虑 $f(x)=x, f'(x)=1$ 在 $(0,+\infty)$ 上有界, 但 $f(x)=x$ 在 $(0,+\infty)$ 上无界.

逆命题不成立. 考虑 $f(x)=\sqrt{x}, f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,1)$ 上有界, 但 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 上无界.

**习题 3.3.12** 设对所有的实数 $x,y$, 不等式 $|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^2$ ($M$ 为常数) 都成立. 证明: $f(x)$ 恒为常数.

**解** $\forall x\neq y, 0\leqslant\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant M|x-y|$. 令 $y\to x$,

$$\lim_{y\to x}0=\lim_{y\to x}M|x-y|=0\Rightarrow|f'(x)|=\lim_{y\to x}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=0\Rightarrow f'(x)=0.$$

故 $f(x)$ 恒为常数.

**习题 3.3.16** 设 $f(x)$ 在一个区间 $I$ 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外, $f(x)$ 在 $I$ 内部的导数为正 (负), 则 $f(x)$ 在 $I$ 上严格单调递增 (减). (注意, 在例外的点处, $f(x)$ 可能不可导.)

**解** 设 $x_1,x_2\in I$, 不妨设 $x_1<x_2$. 若 $f(x)$ 在 $(x_1,x_2)$ 内处处可导, 则由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi\in(x_1,x_2)$, 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

又 $f'(\xi)>0(f'(\xi)<0)$, 故 $f(x_2)>f(x_1)(f(x_2)<f(x_1))$.

若 $f(x)$ 在 $(x_1,x_2)$ 内有有限个点不可导, 设这些点为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$, 则将 $(x_1,x_2)$ 分成 $n+1$ 个子区间 $(x_1,y_1),(y_1,y_2),\cdots,(y_n,x_2)$, 在每个子区间内 $f(x)$ 处处可导, 由上面的结论可知,$f(x_1)<f(y_1)<\cdots<f(y_n)<f(x_2)\,(f(x_1)>f(y_1)>\cdots>f(y_n)>f(x_2))$.

综上所述,$f(x)$ 在 $I$ 上严格单调递增 (递减).

**习题 3.3.17** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均在区间 $I$ 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外, $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $I$ 内部满足 $f'(x)>g'(x)$; 设存在 $a\in I$, 使得 $f(a)=g(a)$ ($a$ 不是区间端点), 则当 $x\in I$ 且 $x>a$ 时, 有 $f(x)>g(x)$; 当 $x\in I$ 且 $x<a$ 时, 有 $f(x)<g(x)$.

**解** 记 $h(x)=f(x)-g(x)$, 则 $h(x)$ 在 $I$ 上连续, 且 (至多) 除了有限个点外,$h(x)$ 在 $I$ 内部满足 $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$. 又 $h(a)=f(a)-g(a)=0$. 由上一题的结论可知, 当 $x\in I$ 且 $x>a$ 时,$h(x)>0\Rightarrow f(x)>g(x)$; 当 $x\in I$ 且 $x<a$ 时,$h(x)<0\Rightarrow f(x)<g(x)$.

**习题 3.3.18** 若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导, $f(0)=0$, $f'(x)$ 严格递增, 证明 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 严格递增.

**解** 设 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则由 Lagrange 中值定理,$\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

又由 Lagrange 中值定理,$\exists \eta \in (0, x_1)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = \frac{f(x_1)}{x_1}.$$

因为 $f'(x)$ 严格递增, 故 $f'(\xi) > f'(\eta)$, 即

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > \frac{f(x_1)}{x_1} \Rightarrow \frac{f(x_2)}{x_2} > \frac{f(x_1)}{x_1}. \quad (\text{习题 } 3.5.3)$$

因此 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 严格递增.

**习题 3.3.19** 设 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的一个驻点 ( $f'(x_0) = 0$), 且 $f(x)$ 在 $x_0$ 处二阶可微, $f''(x_0) \neq 0$. 证明: 若 $f''(x_0) < 0$, 则 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点; 若 $f''(x_0) > 0$, 则 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点.

举例说明: 若 $f''(x_0) = 0$, 则 $x_0$ 可以是 $f(x)$ 的极大值点或极小值点, 也可以不是极值点.

**解** 若 $f''(x_0) < 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), f''(x) < 0$. 由 Lagrange 中值定理,$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \exists \xi = \xi(x) \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$

又 $f''(x) < 0$, 故 $f'(\xi) > f'(x_0) = 0 > f'(\xi_2)$, 由习题 3.3.17 可知, 即当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时,$f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时,$f(x) < f(x_0)$. 因此 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点. 即当 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时,$f(x) < f(x_0)$; 当 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时,$f(x) < f(x_0)$. 因此 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点.

例: 设 $f(x) = x^4$, 则 $f''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点. 设 $g(x) = -x^4$, 则 $g''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的一个极大值点. 设 $h(x) = x^3$, 则 $h''(0) = 0$, 但 $x = 0$ 不是 $h(x)$ 的极值点.

**习题 3.3.20** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且 $f(0) = f'(0), f(1) = f'(1)$. 求证: 存在 $\xi \in (0,1)$, 满足 $f(\xi) = f''(\xi)$.

**解** 设 $g(x) = \mathrm{e}^x (f(x) - f'(x))$, 则

$$g'(x) = \mathrm{e}^x(f(x) - f'(x)) + \mathrm{e}^x(f'(x) - f''(x)) = \mathrm{e}^x(f(x) - f''(x)).$$

又 $g(0) = \mathrm{e}^0(f(0) - f'(0)) = 0, g(1) = \mathrm{e}^1(f(1) - f'(1)) = 0$. 由 Rolle 定理, 在 $(0,1)$ 内至少有一点 $\xi$, 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = f''(\xi)$.

**习题 3.3.21** 求下列函数的单调区间与极值.

(1) $y = 2x^3 - 3x^2$;

(2) $y = x^{2/3}$;

(3) $y = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$;

(4) $y = x^{1/x}$;

(5) $y = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$;

(6) $y = \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

**解** 高中的时候大家就已经很熟悉怎么用导数来求函数的单调区间与极值了,这里仅给出答案.

(1)

$$y' = 6x^2 - 6x = 6x(x-1).$$

单调区间: 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0,1)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 0$ 处取得极大值 $0$, 在 $x = 1$ 处取得极小值 $-1$.

(2)

$$y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}.$$

单调区间: 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 0$ 处取得极小值 $0$.

(3)

$$y' = 2x\mathrm{e}^{-x^2}(1-x^2).$$

单调区间: 在 $(-1, 0)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(0,1)$ 上单调递增.

极值: 在 $x = \pm 1$ 处取得极大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 在 $x = 0$ 处取得极小值 $0$.

(4) 此函数只在 $(0, +\infty)$ 有定义.

$$y' = x^{1/x}\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

单调区间: 在 $(0, \mathrm{e})$ 上单调递增, 在 $(\mathrm{e}, +\infty)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = \mathrm{e}$ 处取得极大值 $\mathrm{e}^{1/\mathrm{e}}$.

(5)

$$y' = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}.$$

单调区间: 在 $(0,1)$ 和 $(\mathrm{e}^2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(1, \mathrm{e}^2)$ 上单调递增.

极值: 在 $x = 1$ 处取得极小值 $0$, 在 $x = \mathrm{e}^2$ 处取得极大值 $\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}$.

(6)

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1-x}{1+x^2}.$$

单调区间: 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

极值: 在 $x = 1$ 处取得极大值 $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

**命题 (极值点的判别法)**

(1) 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 若 $f'(x_0)$ 在 $x_0$ 两侧存在, 异号, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值点.$f'(x_0)$ 可

以不存在. 这即极值存在的一阶导判别法.

(2) 若 $f'(x_0)=0, f''(x_0)>0(<0)$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的二阶导判别法.

(3) 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=f^{(2n-1)}(x_0)=0, f^{(2n)}>0(<0)$, 则 $f(x_0)$ 必是 $f(x)$ 的极小值 (极大值) 点. 此即极值存在的高阶导判别法.

**习题 3.3.22** 求下列函数在所给区间上的最大值和最小值.

(1) $y=x^4-2x^2+5, [-2,2]$;

(2) $y=\sin 2x-x, [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$;

(3) $y=\arctan\frac{1-x}{1+x}, [0,1]$;

(4) $y=x\ln x, (0,+\infty)$.

**解**

(1)

$$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)=0\Rightarrow x=-1,0,1.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y(-2)=13,\quad y(-1)=4,\quad y(0)=5,\quad y(1)=4,\quad y(2)=13.$$

故最大值为 13, 最小值为 4.

(2)

$$y'=2\cos 2x-1=0\Rightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}.$$

计算所有极值点疑点和边界点:

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\quad y\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6},\quad y\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6},\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}.$$

故最大值为 $\frac{\pi}{2}$, 最小值为 $-\frac{\pi}{2}$.

(3)

$$y'=-\frac{2}{(1+x)^2+(1-x)^2}=-\frac{1}{1+x^2}<0\quad (x\in[0,1]).$$

故在 $[0,1]$ 上单调递减, 最大值为 $y(0)=\frac{\pi}{4}$, 最小值为 $y(1)=0$.

(4)

$$y'=\ln x+1=0\Rightarrow x=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

函数在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ 上单调递减, 在 $\left[\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 上单调递增且趋于 $+\infty$. 故最小值为 $y\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$, 无最大值.

**习题 3.3.23** 证明下列不等式:

(1) $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1,\quad x\in[0,1], p>1$;

(2) $\tan x > x - \dfrac{x^3}{3}, \quad x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$;

(3) $\dfrac{\tan x_2}{\tan x_1} > \dfrac{x_2}{x_1}, \quad 0 < x_1 < x_2 < \dfrac{\pi}{2}$;

(4) $\ln(1+x) > \dfrac{\arctan x}{1+x}, \quad x > 0$;

(5) $1 + x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2}, \quad x$ 为任意实数;

(6) $\dfrac{x}{\sin x} > \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}\cos x, \quad x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, 且右端的常数 $\dfrac{4}{3}$ 不能换为更大的数;

(7) $(1 - \dfrac{1}{x})^{x-1}(1 + \dfrac{1}{x})^x < 4, \quad x \in (1, +\infty)$;

(8) $x^{a-1} + x^{a+1} \geqslant \left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\dfrac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}, \quad x \in (0,1), a \in (0,1)$.

**解**

(1) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 则 $f'(x) = p[x^{p-1} - (1-x)^{p-1}]$. 因此 $f(x)$ 在 $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ 上单调递增, 在 $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减. 故 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2^{p-1}}$, 最大值为 $f(0) = f(1) = 1$, 即

$$\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant x^p + (1-x)^p \leqslant 1.$$

(2) 设 $g(x) = \tan x - x + \dfrac{x^3}{3}$, 则 $g'(x) = \sec^2 x - 1 + x^2 = \tan^2 x + x^2 > 0$. 因此 $g(x)$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增, 又 $g(0) = 0$, 故 $g(x) > 0$, 即

$$\tan x > x - \frac{x^3}{3}.$$

(3) 设 $h(x) = \dfrac{\tan x}{x}$, 则 $h'(x) = \dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2} = \dfrac{x\tan^2 x}{x^2} > 0$. 因此 $h(x)$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增, 故 $h(x_2) > h(x_1)$, 即

$$\frac{\tan x_2}{\tan x_1} > \frac{x_2}{x_1}.$$

(4) 设 $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{\arctan x}{1+x}$, 则

$$f'(x) = \frac{\arctan x + x^2\arctan x + x^3 + x^2}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1} > 0, \quad x > 0$$

因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(0) = 0$, 故 $f(x) > 0$, 即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(4) **另解**令 $f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \arctan x, g(x) = \arctan x, \forall x > 0$,

$$\exists \xi_1 \in [0, x], \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi_1) = 1 + \ln(1+x) > 1.$$

$$\exists \xi_2 \in [0, x], \frac{g(x) - g(0)}{g - 0} = \frac{g(x)}{x} = g'(\xi_2) = \frac{1}{1+\xi_2^2} < 1.$$

故

$$g(x) < x < f(x).$$

即

$$\ln(1+x) > \frac{\arctan x}{1+x}.$$

(5) 令 $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2}), \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\exists \xi \in [0,x], \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = f'(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x} \geqslant \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geqslant \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geqslant \sqrt{1+x^2} - 1$$

即

$$1 + x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2}.$$

(6) 令 $f(x) = x - \frac{4}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin x\cos x$, 则

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{3}\cos x + \frac{1}{3}\cos 2x = \frac{1}{3}(2\cos x - 1)^2 \geqslant 0 \Rightarrow g(x) > g(0) = 0.$$

又 $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2}), \sin x > 0$,

$$\frac{x}{\sin x} > \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\cos x.$$

另一方面, 由于

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} - \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\cos x = 0,$$

$\frac{4}{3}$ 不能被替换为更大的数.

(7)

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} = \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x-1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 < \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 < 4$$

(8) 令 $f(x) = x^{a-1} + x^{a+1}$, 则 $\forall x \in (0,1), a \in (0,1)$,

$$f'(x) = (a-1)x^{a-2} + (a+1)x^a = (a+1)\left(x + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right)x^{a-2}.$$

$$\forall x \in \left(0, \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right), f'(x) < 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

$$\forall x \in \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}, 1\right), f'(x) > 0, f(x) > f\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) = \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}.$$

综上, $\forall x \in (0,1), a \in (0,1), x^{a-1} + x^{a+1} \geqslant \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a-1}{2}} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{\frac{a+1}{2}}$.

**习题 3.3.24** 试确定下列函数零点的个数及所在范围:

(1) $x^3 - 6x^2 + 9x - 10$;

(2) $ax - \ln x$ (其中 $a > 0$).

**解**

(1) 令 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$. 我们首先分析 $f(x)$ 的单调性. 求导得:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3).$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = 3$.

- 当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.
- 当 $x \in (1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.
- 当 $x \in (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

$f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值,

$$f(1) = 1^3 - 6(1)^2 + 9(1) - 10 = 1 - 6 + 9 - 10 = -6.$$

$f(x)$ 在 $x = 3$ 处取得极小值,

$$f(3) = 3^3 - 6(3)^2 + 9(3) - 10 = 27 - 54 + 27 - 10 = -10.$$

同时, 考察 $x$ 趋于无穷时的极限:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

由于极大值 $f(1) = -6 < 0$, 且 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, 所以在 $(-\infty, 1]$ 上 $f(x)$ 恒为负, 没有零点. 由于极小值 $f(3) = -10 < 0$, 且极大值 $f(1) = -6 < 0$, 所以在 $(1, 3]$ 上 $f(x)$ 恒为负, 没有零点. 由于 $f(3) = -10 < 0$ 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, 且 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上连续且单调递增, 根据零点存在定理, $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 上有且仅有一个零点.

又因为

$$f(4) = -6 < 0, \quad f(5) = 10 > 0.$$

所以零点在 $(4, 5)$ 范围内.

该函数只有一个零点, 位于区间 $(4, 5)$ 内.

(2) 令 $g(x) = ax - \ln x$. 函数的定义域为 $(0, +\infty)$. (题目已给出 $a > 0$) 我们分析 $g(x)$ 的单调性. 求导得:

$$g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}.$$

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \dfrac{1}{a}$.

- 当 $x \in (0, 1/a)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.
- 当 $x \in (1/a, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

因此, $g(x)$ 在 $x = 1/a$ 处取得全局最小值, 最小值为:

$$g(1/a) = a\left(\frac{1}{a}\right) - \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \ln(a^{-1}) = 1 + \ln a.$$

我们考察 $g(x)$ 在定义域边界的行为:

$$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+}(ax-\ln x)=0-(-\infty)=+\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}(ax-\ln x)=\lim_{x\to+\infty} x\left(a-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty\cdot(a-0)=+\infty.$$

函数 $g(x)$ 从 $+\infty$ 递减到最小值 $1+\ln a$, 然后再递增到 $+\infty$. 零点的个数取决于最小值 $1+\ln a$ 的符号:

**情况 1** 若最小值 $1+\ln a>0$, 即 $\ln a>-1$, $a>\mathrm{e}^{-1}$ $(a>1/\mathrm{e})$. 此时 $g(x)$ 的最小值大于 0, $g(x)$ 恒大于 0, 故函数没有零点.

**情况 2** 若最小值 $1+\ln a=0$, 即 $\ln a=-1$, $a=\mathrm{e}^{-1}$ $(a=1/\mathrm{e})$. 此时 $g(x)$ 的最小值等于 0, $g(x)$ 仅在 $x=1/a=\mathrm{e}$ 处与 $x$ 轴相切, 故函数有且仅有一个零点, 零点为 $x=\mathrm{e}$.

**情况 3** 若最小值 $1+\ln a<0$, 即 $\ln a<-1$, $0<a<\mathrm{e}^{-1}$ $(0<a<1/\mathrm{e})$. 此时 $g(x)$ 的最小值小于 0. 由于 $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty$ 且 $g(1/a)<0$, $g(x)$ 在 $(0,1/a)$ 上连续且单调递减, 故在 $(0,1/a)$ 内必有一个零点. 由于 $g(1/a)<0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$, $g(x)$ 在 $(1/a,+\infty)$ 上连续且单调递增, 故在 $(1/a,+\infty)$ 内必有一个零点. 故函数有两个零点.

结论:

- 若 $a>\mathrm{e}^{-1}$, 函数有 0 个零点.
- 若 $a=\mathrm{e}^{-1}$, 函数有 1 个零点, 位于 $x=\mathrm{e}$.
- 若 $0<a<\mathrm{e}^{-1}$, 函数有 2 个零点, 一个位于 $(0,1/a)$, 另一个位于 $(1/a,+\infty)$.

**习题 3.3.25** 设 $a\in(0,1), b_1=1-a$,

$$b_{n+1}=\frac{b_n}{1-\mathrm{e}^{-b_n}}-a,\quad n=1,2,\ldots.$$

问 $\{b_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则给予证明, 若收敛, 则求极限.

**解** 我们记 $f(x)=\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-a, x>0$, 则有

$$b_{n+1}=f(b_n),\quad n=1,2,\ldots.$$

得出 $f'(x)=\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}}{(1-\mathrm{e}^{-x})^2}$

$$\mathrm{e}^x\geqslant 1+x\quad\Rightarrow\quad 1\geqslant(1+x)\mathrm{e}^{-x}\quad\Rightarrow\quad 1-\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0$$

故 $f'(x)\geqslant 0$.

$$b_{n+2}-b_{n+1}=f(b_{n+1})-f(b_n)=f'(\xi_n)\left(b_{n+2}-b_{n+1}\right).$$

据此可知,$\{b_n\}$ 是一个单调数列, 增减性由 $b_2-b_1$ 确定.

再设 $g(x)=\begin{cases} f(x)-x, & x>0 \\ 1-a, & x=0 \end{cases}$

化简得到 $x>0$ 时,$g(x)=\dfrac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}}-x-a=\dfrac{x\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}-a=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}-1}-a$

$g'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1-x\mathrm{e}^{x}}{(\mathrm{e}^{x}-1)^2}$,

将 $-x$ 替换 $1-\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0$ 里的 $x$ 可得到 $1-\mathrm{e}^{x}+x\mathrm{e}^{x}\geqslant 0$, 即 $g'(x)\leqslant 0$.

可知 $g(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 处连续, 递减. 且由于 $g(0)=1-a>0$,$g(1)=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}}-1-a<0$, 故存在唯一的 $c\in(0,1)$ 使得 $g(c)=0$, 即 $f(c)=c$.

又由于

$$b_2-b_1=f(b_1)-b_1=g(b_1)=\frac{b_1}{\mathrm{e}^{b_1}-1}-a=\frac{1-a}{\mathrm{e}^{1-a}-1}-a=\frac{1-a\mathrm{e}^{1-a}}{\mathrm{e}^{1-a}-1}$$

将 $a-1$ 替换 $1-\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}\geqslant 0$ 里的 $x$ 可得到 $1-\mathrm{e}^{1-a}-(a-1)\mathrm{e}^{1-a}=1-a\mathrm{e}^{1-a}\geqslant 0$, 即 $g(b_1)=b_2-b_1\geqslant 0$.

由上述分析可知 $b_1<c$, 且 $\{b_n\}$ 单调递增

并且 $b_{n+1}-c=f(b_n)-f(c)=f'(\eta_n)(b_n-c)$

可知,$b_n<c$.

综上,$\{b_n\}$ 单调有界, 故收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$, 则

$$b=\lim_{n\to\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(b_n)=f(b).$$

故 $b=c$.

# 习题 3.4

**习题 3.4.1** 试给出 Cauchy 中值定理的几何解释.

**解** 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 $(a,b)$ 内可微. 根据 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

几何上, 这意味着在区间 $[a,b]$ 上, 存在一点 $\xi$, 使得函数 $f(x)$ 在该点的瞬时变化率（导数）与函数 $g(x)$ 在该点的瞬时变化率之比等于它们在端点处的平均变化率之比。换句话说，存在一条切线，其斜率与通过点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的割线的斜率成比例关系，这个比例由函数 $g(x)$ 的变化决定。

**习题 3.4.2** 试说明在闭区间 $[-1,1]$ 上 Cauchy 中值定理对函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^3$ 为什么不正确.

**解** 在闭区间 $[-1,1]$ 上, 函数 $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=x^3$ 都是连续的, 并且在开区间 $(-1,1)$ 内可微. 然而, 我们计算它们在端点处的变化:

$$f(1)-f(-1) = 1^2-(-1)^2 = 0,$$

$$g(1)-g(-1) = 1^3-(-1)^3 = 2.$$

因此, Cauchy 中值定理要求存在 $\xi \in (-1,1)$, 使得

$$\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)} = \frac{0}{2} = 0 = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

计算导数:

$$f'(x)=2x, \quad g'(x)=3x^2.$$

因此,

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} = \frac{2}{3\xi}.$$

要使得 $\dfrac{2}{3\xi}=0$, 必须有 $\xi \to \infty$, 这显然不可能在区间 $(-1,1)$ 内实现。因此, 在这个例子中, Cauchy 中值定理不成立.

这个例子说明了 Cauchy 中值定理的适用条件必须严格满足, 其中要求 $g'(x)$ 在 $(a,b)$ 内不为零，否则可能导致分母为零的情况，从而使得定理无法应用.

**习题 3.4.3** 设 $b>a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内可微，求证：存在 $\xi \in (a,b)$，使得

$$2\xi(f(b)-f(a)) = (b^2-a^2)f'(\xi).$$

**解** 设 $g(x)=x^2$，则 $g'(x)=2x$. 根据 Cauchy 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{2\xi}{f'(\xi)}.$$

整理即得.

**习题 3.4.4** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $(ab>0)$，在 $(a,b)$ 上可微. 求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

**解** 由 Cauchy 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{\frac{f'(\xi)\xi-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}.$$

整理即得.

**习题 3.4.5** 求下列极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ ($m,n$ 为正整数, $\alpha,\beta$ 为实数);

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ ($m,n$ 为自然数);

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}$;

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$;

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}$;

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$ ($\alpha$ 为任意实数);

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}$;

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}$ $(a>0)$;

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}$;

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\tan x}$;

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\arctan^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$;

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln(1-x)}$;

(13) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi}$;

(14) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-\mathrm{e}}{x}$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(1-x)+\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}$;

(16) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(\arcsin x^3)^2}{(1-\cos x)(\mathrm{e}^{x^2}-1)\tan^2 x}$;

(17) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{1/x}$;

(18) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\cdot\left(2-\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\right)$;

(19) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}$ ($n$ 为自然数, $a>1,k>0$);

(20) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^k}$ ($n$ 为正整数, $k>0$).

**解**

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\alpha}{m}(1+\alpha x)^{\frac{1}{m}-1}-\frac{\beta}{n}(1+\beta x)^{\frac{1}{n}-1}}{1}=\frac{\alpha}{m}-\frac{\beta}{n}.$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{nm(1+mx)^{n-1}-mn(1+nx)^{m-1}}{2x}$$
$$\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{nm^2(n-1)(1+mx)^{n-2}-mn^2(m-1)(1+nx)^{m-2}}{2}$$
$$=\frac{mn(n-m)}{2}$$

(3)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=-4.$$

(4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}\overset{\arcsin x=t}{=}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{\sin^3 t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-t}{t^3}=-\frac{1}{6}.$$

(5)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\sin x}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{\cos x}=1.$$

(6)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha.$$

(7)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1}=0.$$

(8)

$$((a+x)^x)'=\left(\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\right)'=\left(\frac{x}{a+x}+\ln(a+x)\right)\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}$$

$$((a+x)^x)''=\left(\frac{x}{a+x}+\ln(a+x)\right)^2\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}+\left(\frac{a}{(a+x)^2}+\frac{1}{a+x}\right)\mathrm{e}^{x\ln(a+x)}\to(\ln a)^2+\frac{2}{a}\quad(x\to 0)$$
$$(a^x)''=\ln^2(a)a^x\to\ln^2(a)\quad(x\to 0)$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\cdots=\frac{(\ln a)^2+\frac{2}{a}-(\ln a)^2}{2}=\frac{1}{a}.$$

(9)

$$\left|\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant\lim_{x\to 0}|x|=0.$$

(10)

$$\left|\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\tan x}\right|\leqslant\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{|\tan x|}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}|\cot x|=0.$$

(11)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\arctan^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\arctan^2 x}{x^2\arctan^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2-\arctan^2 x}{x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{(x-\arctan x)(x+\arctan x)}{x^4}=\lim_{x\to0}2\frac{x-\arctan x}{x^3}\\&\overset{x=\tan y}{=}\lim_{y\to0}2\frac{\tan y-y}{\tan^3 y}=2\lim_{y\to0}\frac{\tan y-y}{y^3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)&=\lim_{x\to0^+}\ln(1-x)\ln x=\lim_{x\to0^+}-x\ln x\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=0\end{aligned}$$

(13)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{(2x-\pi)}&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\mathrm{e}^{(2x-\pi)\ln(\tan x)}=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{2x-\pi}}\right)\\&\overset{L'H}{=}\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\tan x\cos^2 x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}}\right)=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-(2x-\pi)^2}{\sin 2x}\right)\\&\overset{x-\frac{\pi}{2}=y}{=}\exp\left(\lim_{y\to0^+}\frac{-4y^2}{-\sin 2y}\right)=\mathrm{e}^0=1\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{1/x}-\mathrm{e}}{x}&=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right)\right)\\&=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-1\right)\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(15)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}\frac{\ln(1-x)+\tan\frac{\pi}{2}x}{\cot\pi x}&\overset{y=1-x}{=}\lim_{y\to0^+}\frac{\ln y+\tan\frac{\pi}{2}(1-y)}{\cot\pi(1-y)}\\&=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin\pi y(\ln y+\tan\frac{\pi}{2}y)}{-\cos\pi y}\\&=-\lim_{y\to0^+}\frac{\sin\pi y}{\tan\frac{\pi}{2}y}=-2\end{aligned}$$

(16)

$$\lim_{x\to0}\frac{(\arcsin x^3)^2}{(1-\cos x)(\mathrm{e}^{x^2}-1)\tan^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{(x^3)^2}{(\frac{1}{2}x^2)(x^2)x^2}=2$$

(17) 当 $x$ 充分大时,$1<\ln(1+x)<x^{1/2}$, 此时 $\dfrac{1}{x}<\dfrac{\ln(1+x)}{x}<\dfrac{1}{x^{1/2}}$, 同时

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(1/x)\right)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)^{1/x}=\lim_{x\to+\infty}\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x^{-1/2})\right)=1$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{1/2}}\right)^{1/x}=1.$

(18)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\arctan x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\cdot\left(2-\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\left(2-\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+1)}{1+x\sin x-(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2))}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

(19) 转而证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0.$$

而后由 Heine 定理即得.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}\leqslant\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\lceil k\rceil}}{a^x}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\lceil k\rceil\,x^{\lceil k\rceil-1}}{(\ln a)a^x}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\lceil k\rceil!}{(\ln a)^{\lceil k\rceil}a^x}=0.$$

(20) 转而证明:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^k}=0.$$

而后由 Henie 定理即得.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^k}\overset{\text{L'Hôpital 法则}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{kx^{k-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{kx^k}=0.$$

**习题 3.4.6** 设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0)=1, f''(0)\neq0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\in(0,a).$$

(1) 求证: $\{x_n\}$ 收敛并求其极限;

(2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若收敛, 则求其极限.

**解**

(1) $\{x_n\}$ 是递减的, 因为 $x_{n+1}-x_n=f(x_n)-x_n<0$. $\{x_n\}$ 具有下界 0, 故可设 $\{x_n\}$ 收敛到 $x$. 令 $n\to\infty$, 由 $f$ 的连续性, 得 $x=f(x)$, 故 $x=0$.

(2) 由泰勒展开, $f(x)=x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)$, 因此

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}nx_n&\overset{\text{Stolz}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_nx_{n+1}}{x_n-f(x_n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2+o(x_n^2)}{x_n-\left(x_n+\frac{f''(0)}{2}x_n^2+o(x_n^2)\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2}{-\frac{f''(0)}{2}x_n^2+o(x_n^2)}\\&=-\frac{2}{f''(0)}\end{aligned}$$

# 习题 3.5

**习题 3.5.1** 证明 (Jensen (延森) 不等式): 设 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的凸函数, $x_1,\dots,x_n$ 是 $I$ 中 $n$ 个点, 则对任意满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=1$ 的正数 $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, 有

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_nf(x_n).$$

**解** 采用数学归纳法. 当 $n=2$ 时, 结论显然成立.

假设当 $n=k$ 时结论成立, 即对任意满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k=1$ 的正数 $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, 有

$$f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_kx_k)\leqslant\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_kf(x_k).$$

现考虑 $n=k+1$ 的情形. 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_{k+1}$ 是满足 $\alpha_1+\cdots+\alpha_{k+1}=1$ 的正数. 记 $\beta=\alpha_1+\cdots+\alpha_k$, 则有 $0<\beta<1$. 因此,

$$\begin{aligned}f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{k+1}x_{k+1})&=f(\beta(\frac{\alpha_1}{\beta}x_1+\cdots+\frac{\alpha_k}{\beta}x_k)+(1-\beta)x_{k+1})\\&\leqslant\beta f(\frac{\alpha_1}{\beta}x_1+\cdots+\frac{\alpha_k}{\beta}x_k)+(1-\beta)f(x_{k+1})\quad(\text{由凸函数的定义})\\&\leqslant\beta(\frac{\alpha_1}{\beta}f(x_1)+\cdots+\frac{\alpha_k}{\beta}f(x_k))+(1-\beta)f(x_{k+1})\quad(\text{由归纳假设})\\&=\alpha_1f(x_1)+\cdots+\alpha_kf(x_k)+\alpha_{k+1}f(x_{k+1}).\end{aligned}$$

由数学归纳法可知, 对任意正整数 $n$, 结论均成立.

**习题 3.5.2** 设 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 和 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ 都是正数, 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$, 证明: 有不等式

$$x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n}\leqslant\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n.$$

特别, 取 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=\dfrac{1}{n}$, 则得到算术平均不等式

$$\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

(提示: 考虑区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)=-\ln x$ 的凸凹性, 并利用 Jensen 不等式.)

**解** 设 $f(x)=-\ln x$, 则 $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$, 因此 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是凸函数. 由习题 3.5.1, 对任意满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$ 的正数 $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$, 有

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$$

$$-\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\leqslant-(\lambda_1\ln x_1+\lambda_2\ln x_2+\cdots+\lambda_n\ln x_n).$$

即

$$\ln(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n)\geqslant\ln(x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\dots x_n^{\lambda_n}).$$

即

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n \geqslant x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n}.$$

**习题 3.5.3** 设 $a, b, c, d$ 满足 $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$, 其中 $b>0, d>0$, 证明不等式

$$\frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d}.$$

**解** 由 $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ 可得 $ad \leqslant bc$. 因为 $b>0, d>0$, 故有

$$ad+ab \leqslant bc+ab \Rightarrow a(d+b) \leqslant b(c+a) \Rightarrow \frac{a}{b} \leqslant \frac{a+c}{b+d}.$$

同理,

$$ad \leqslant bc \Rightarrow ad+cd \leqslant bc+cd \Rightarrow c(b+d) \geqslant d(a+c) \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} \leqslant \frac{c}{d}.$$

**习题 3.5.4** 设 $f(x)$ 是区间 $I$ 上的凸函数, 证明: $f(x)$ 在 $I$ 的内点是连续的.

**解** 设 $x_0$ 是区间 $I$ 的一个内点, 即证明 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$. 仅证右连续 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 左连续同理.

由于 $x_0$ 是区间 $I$ 的内点, 故存在 $\delta>0$, 使得区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset I$.

任取 $x \in (x_0, x_0+\delta)$, 则由凸函数的定义, 对任意 $a \in (x_0-\delta, x_0)$, 有

$$\frac{f(x)-f(x_0-\delta)}{x-(x_0-\delta)} \leqslant \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{(x_0+\delta)-x_0}.$$

记 $M_1=\frac{f(x_0)-f(x_0-\delta)}{\delta}$, $M_2=\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta}$, 则 $M_1, M_2$ 均为常数, 上式可写为

$$M_1(x-x_0) \leqslant f(x)-f(x_0) \leqslant M_2(x-x_0).$$

当 $x \to x_0^+$ 时, 由夹逼定理可知, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

**习题 3.5.5** 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 上处处可导, 且除了有限个点之外, 均有 $f''(x)>0$, 证明: $f(x)$ 在 $I$ 上是凸的. 将本题用于 $f(-x)$, 就得到关于凹函数的类似结论.

**解** 由题设条件以及习题 3.3.16知, 可得,$f'(x)$ 单调增, 由一阶导判别法即证.

其中, 一阶导判别法表述为:

**定理 (零阶导判别法)** $f(x)$ 在区间 $I$ 上为凸函数 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1<x_2$ 都有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

**定理 (一阶导判别法)** 若 $f'(x)$ 在 $I$ 上存在, 则 $f(x)$ 在 $I$ 上为凸函数 $\Leftrightarrow f'(x)$ 在 $I$ 上单调增.

**证明** 必要求任取 $x_1, x_2 \in I, x_1<x_2, x_1<x<x_2$, 应用3.5 中第一个不等式, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

同理, 对 $x_1 < x' < x_2$, 应用3.5 中的第二个不等式, 有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

并令 $x' \to x_2$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant f'(x_1)$$

所以 $f'(x_1) \leqslant \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. 根据 $x_1, x_2$ 的任意性, 必须性证明毕.

充分析对任意的 $x_1 < x < x_2$, 由微分中值定理, 存在 $\xi \in (x_1, x_2), \eta \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x)-f(x_1) = f'(\xi)\cdot(x-x_1), \quad f(x_2)-f(x_1) = f'(\eta)\cdot(x_2-x_1)$$

因为 $f'(x)$ 单调增, 且 $x_1 < x < x_2$, 即

$$f'(\xi) \leqslant f'(\eta)$$

可知函数 $f$ 是凸函数.

**定理 (二阶导判别法)** 若 $f''(x)$ 在 $I$ 上存在, 则 $f(x)$ 在 $I$ 上为凸函数 $\Leftrightarrow f''(x) \geqslant 0, x \in I$.

**习题 3.5.6** 设函数 $f(x)$ 在区间 $I$ 内有连续的二阶导数. 若 $x_0$ 是 $f(x)$ 的一个拐点, 证明: $f''(x_0) = 0$.

**解** 由拐点的定义可知, 存在 $\delta > 0$, 使得在区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 上, $f(x)$ 为凸函数, 在区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 上, $f(x)$ 为凹函数. 由二阶导判别法知, 对任意 $x \in (x_0-\delta, x_0)$, 有 $f''(x) \geqslant 0$; 对任意 $x \in (x_0, x_0+\delta)$, 有 $f''(x) \leqslant 0$. 由于 $f''(x)$ 在区间 $I$ 内连续, 故有

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f''(x) \geqslant 0, \quad f''(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} f''(x) \leqslant 0.$$

因此, $f''(x_0) = 0$.

**习题 3.5.7** 设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 及其附近二阶可导, 且 $f''(x_0) = 0$. 若 $f'''(x_0)$ 存在但不为零, 证明: $x_0$ 是 $f(x)$ 的拐点.

**解** 不妨设 $f'''(x_0) > 0$. 则 $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} = f'''(x_0) > 0$, 所以存在 $\delta > 0$, 使得当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时, 有

$$\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x) \geqslant 0, & x_0 < x < x_0+\delta; \\ f''(x) \leqslant 0, & x_0-\delta < x < x_0. \end{cases}$$

由二阶导判别法知, $f(x)$ 在区间 $(x_0-\delta, x_0)$ 上为凹函数, 在区间 $(x_0, x_0+\delta)$ 上为凸函数, 因此, $x_0$ 是 $f(x)$ 的拐点.

**习题 3.5.8** 求下列函数的凸、凹区间和拐点.

(1) $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$;  (2) $y = x + \dfrac{1}{x}$;

(3) $y = x^{5/3}$; (4) $y = (1+x^2)\mathrm{e}^x$;

(5) $y = x^4$; (6) $y = x + \sin x$.

**解**

(1) $y' = 6x^2 - 6x - 36, y'' = 12x - 6$.

- 当 $x \in (-\infty, \dfrac{1}{2})$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(-\infty, \dfrac{1}{2})$ 上为凹函数;
- 当 $x \in (\dfrac{1}{2}, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $(\dfrac{1}{2}, +\infty)$ 上为凸函数;

$x = \dfrac{1}{2}$ 为拐点.

(2) $y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}, y'' = \dfrac{2}{x^3}$.

- 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $(0, +\infty)$ 上为凸函数;
- 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(-\infty, 0)$ 上为凹函数;

$y = y(x)$ 在 $x = 0$ 处无定义, 故无拐点.

(3) $y' = \dfrac{5}{3}x^{2/3}, y'' = \dfrac{10}{9}x^{-1/3}$. 函数只在 $x \geqslant 0$ 上有定义, 此时 $y'' > 0$, 函数在 $[0, +\infty)$ 上为凸函数, 无拐点.

(4) $y' = (1 + 2x + x^2)\mathrm{e}^x, y'' = (3 + 4x + x^2)\mathrm{e}^x$.

- 当 $x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $(-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$ 上为凸函数;
- 当 $x \in (-3, -1)$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(-3, -1)$ 上为凹函数;

$x = -3, -1$ 为拐点.

(5) $y' = 4x^3, y'' = 12x^2 \geqslant 0$, 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上为凸函数, 无拐点.

(6) $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$.

- 当 $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ 时, $y'' < 0$, 函数在 $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ 上为凹函数;
- 当 $x \in ((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ 时, $y'' > 0$, 函数在 $((2k+1)\pi, 2(k+1)\pi)$ 上为凸函数;

$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 为拐点.

**习题 3.5.9** 求 $a, b$ 值, 使点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点.

**解** $y' = 3ax^2 + 2bx, y'' = 6ax + 2b$. 因为点 $(1, 3)$ 为曲线 $y = ax^3 + bx^2$ 的拐点, 故有

$$\begin{cases} 3 = a + b; \\ 0 = 6a + 2b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1; \\ b = 2. \end{cases}$$

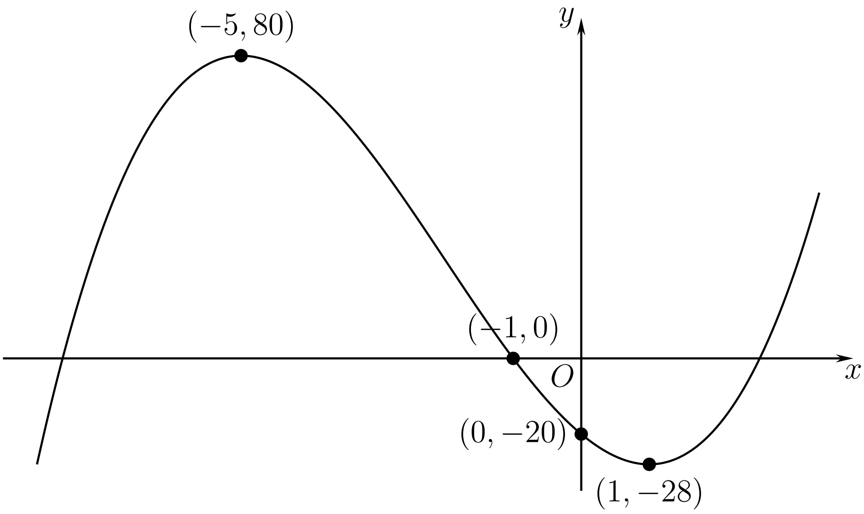
**习题 3.5.10** 描绘下列各曲线的图形.

(1) $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 20$; (2) $y = \dfrac{x^3}{2(1+x)^2}$;

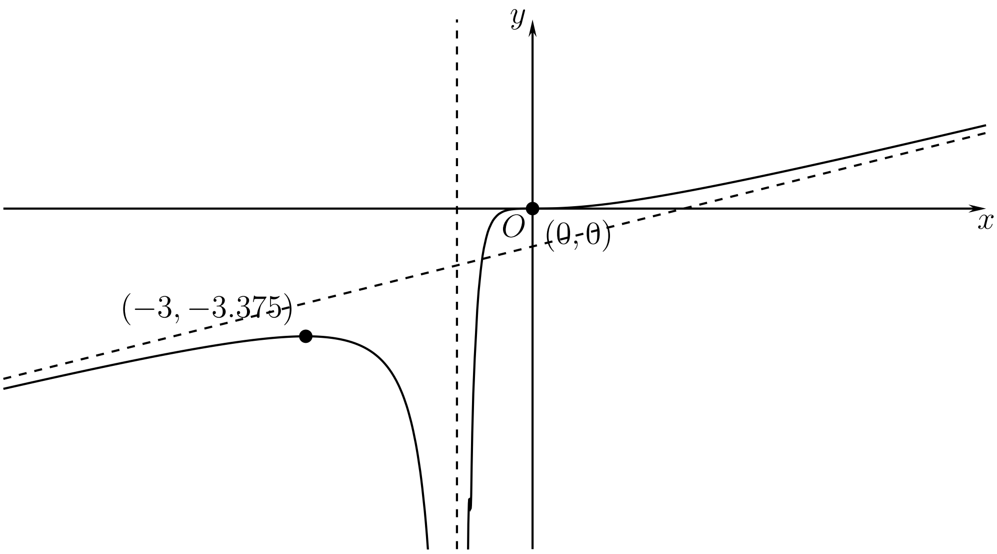
(3) $y = x - 2\arctan x$; (4) $y = x\mathrm{e}^{-x}$.

**解**

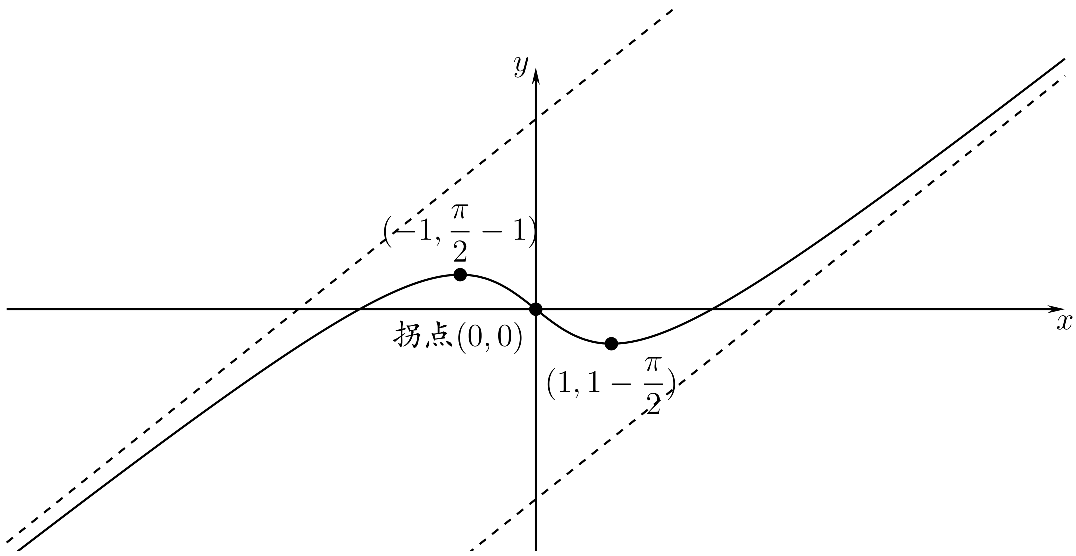
(1)



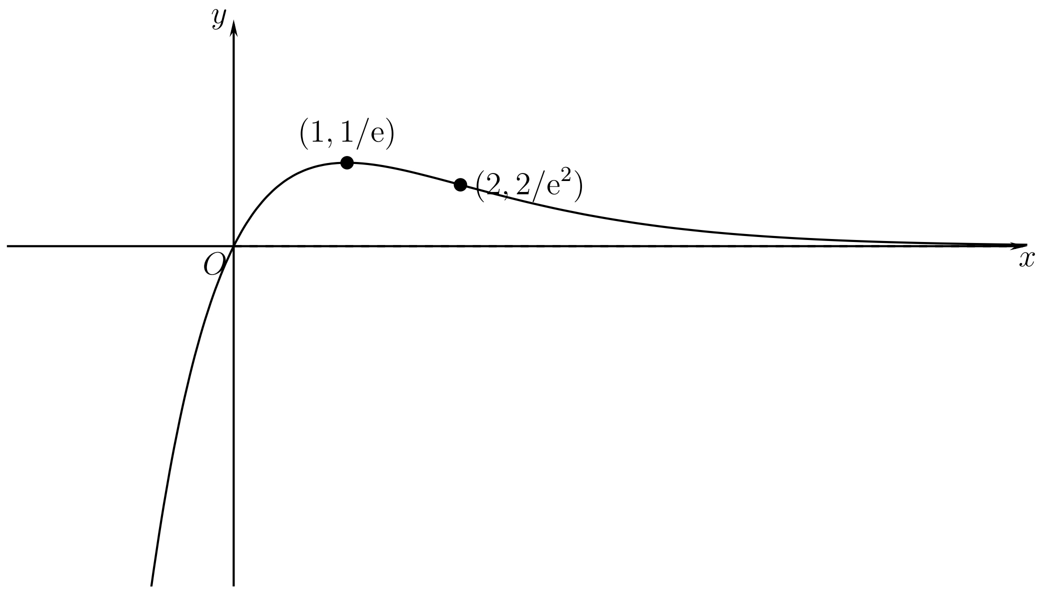

(2)




(3)




(4)




**习题 3.5.11** 设函数 $y=f(x)$ 所表示的曲线为 $C$. 记 $C$ 上一点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $\kappa(\kappa \neq 0)$, 过点 $M$ 引曲线的法线, 在此法线上曲线上凸的一侧取点 $D$, 使 $|DM|=\dfrac{1}{\kappa}=\rho$. 以 $D$ 为圆心, $\rho$ 为半径作圆, 这个圆称为曲线在点 $M$ 处的曲率圆, 其圆心 $D$ 称为曲线在点 $M$ 处的曲率中心, 半径 $\rho$ 称为曲线在点 $M$ 处的曲率半径.

求下列曲线在指定点的曲率、曲率中心及曲率半径.

(1) $xy=1$ 在点 $(1,1)$ 处;　　(2) $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 在点 $(0,1)$ 处.

**解**

(1) 设 $y=\dfrac{1}{x}$, 则 $y'=-\dfrac{1}{x^2}, y''=\dfrac{2}{x^3}$. 在点 $(1,1)$ 处, 有

$$\kappa=\frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}=\frac{2}{(1+1)^{3/2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \sqrt{2}.$$

曲线在点 $(1,1)$ 处的法线方程为 $y-1=x-1$, 即 $y=x$. 因此, 曲率中心 $D$ 的坐标为

$$D\,(2,2)\,.$$

(2) 设 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$, 则 $y'=-2x\mathrm{e}^{-x^2}, y''=(4x^2-2)\mathrm{e}^{-x^2}$. 在点 $(0,1)$ 处, 有

$$\kappa = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}} = \frac{2}{(1+0)^{3/2}} = 2,$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}.$$

曲线在点 $(0,1)$ 处的法线方程为 $y-1=0$, 即 $y=1$. 因此, 曲率中心 $D$ 的坐标为

$$D\left(0, 1-\frac{1}{2}\right) = (0, \frac{1}{2}).$$

**习题 3.5.12** 求下列曲线在指定点的曲率.

(1) $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ ,在 $t=1$ 处;  (2) $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$ 在 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 处.

**解**

(1) 对于参数方程 $\begin{cases} x=3t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$ ，参数方程曲线的曲率公式为：

$$\kappa = \frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

计算各阶导数：

$$x'=6t, \quad x''=6$$

$$y'=3-3t^2, \quad y''=-6t$$

在 $t=1$ 处：

$$x'(1)=6, \quad x''(1)=6$$

$$y'(1)=3-3=0, \quad y''(1)=-6$$

因此曲率为：

$$\kappa = \frac{|6\cdot(-6)-0\cdot 6|}{(6^2+0^2)^{3/2}} = \frac{|-36|}{6^3} = \frac{36}{216} = \frac{1}{6}$$

(2) 对于参数方程 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$ ，计算各阶导数：

$$x' = -\sin t+\sin t+t\cos t = t\cos t$$

$$x'' = \cos t - t\sin t$$

$$y' = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t$$

$$y'' = \sin t + t\cos t$$

在 $t = \frac{\pi}{2}$ 处:

$$x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$x''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$$

因此曲率为:

$$\kappa = \frac{\left|0\cdot 1 - \frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right|}{\left(0^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{\left|\frac{\pi^2}{4}\right|}{\left(\frac{\pi^2}{4}\right)^{3/2}} = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{\frac{\pi^3}{8}} = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{8}{\pi^3} = \frac{2}{\pi}$$

**习题 3.5.13** 对数曲线 $y = \ln x$ 上哪一点的曲率半径最小? 并求出该点的曲率半径.

**解** 设 $y = \ln x$, 则 $y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}$. 曲率半径 $\rho$ 的表达式为

$$\rho = \frac{(1+(y')^2)^{3/2}}{|y''|} = \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{x}.$$

为了求出曲率半径的最小值, 只需求出函数 $g(x) = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{x}$ 的最小值. 计算 $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{3x(x^2+1)^{1/2}\cdot x - (x^2+1)^{3/2}}{x^2} = \frac{(x^2+1)^{1/2}(3x^2-(x^2+1))}{x^2} = \frac{(x^2+1)^{1/2}(2x^2-1)}{x^2}.$$

令 $g'(x) = 0$, 可得 $2x^2 - 1 = 0$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 当 $x > 0$ 时, $g'(x) < 0$ 当 $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, 且 $g'(x) > 0$ 当 $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因此, 函数 $g(x)$ 在 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 处取得最小值. 此时的曲率半径为

$$\rho_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1\right)^{3/2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

**习题 3.5.14** 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的凸函数且有界, 求证: $f(x)$ 是常数.

**解** 反证法. 假设 $f(x)$ 不是常数, 则存在 $x, y \in (-\infty, +\infty)$, 使得 $f(x) > f(y)$. 由凸函数的定义可知, 对任意 $t \in (0,1)$, 有

$$f(x) \leqslant \lambda f\left(\frac{x-(1-\lambda)y}{\lambda}\right) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall\lambda \in (0,1).$$

因此
$$\frac{f(x)-(1-\lambda)f(y)}{\lambda}\leqslant f\left(\frac{x-(1-\lambda)y}{\lambda}\right).$$
由于 $f(x)>f(y)$,
$$\frac{f(x)-(1-\lambda)f(y)}{\lambda}=\frac{f(x)-f(y)}{\lambda}+f(y)\to+\infty,\quad \lambda\to 0^+.$$
所以当 $\lambda\to 0^+$ 时,
$$f\left(\frac{x-(1-\lambda)y}{\lambda}\right)\to+\infty,$$
与 $f(x)$ 有界矛盾. 因此,$f(x)$ 是常数.

# 习题 3.6

**习题 3.6.1** 写出下列函数的（具有 Peano 余项的）Maclaurin 展开式.

(1) $y = \dfrac{x^3+2x+1}{x-1}$; (2) $y = \sin^2 x$.

**解**

(1)

$$\begin{aligned} y = \frac{x^3+2x+1}{x-1} &= -(x^3+2x+1)(1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)) \\ &= -1-3x-3x^2-4x^3-4x^4-\cdots-4x^n+o(x^n) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} y = \frac{1-\cos 2x}{2} &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})\right) \\ &= x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n}). \end{aligned}$$

**习题 3.6.2** 求出函数 $\mathrm{e}^{\sin x}$ 的（具有 Peano 余项的）三阶 Maclaurin 展开式.

**解**

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\sin x} &= 1+\sin x+\frac{(\sin x)^2}{2!}+\frac{(\sin x)^3}{3!}+o((\sin x)^3) \\ &= 1+\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x+o(x)\right)^3+o(x^3) \\ &= 1+x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)\right)+\frac{1}{6}x^3+o(x^3) \\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)x^3+o(x^3) \\ &= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3) \end{aligned}$$

**习题 3.6.3** 求出函数 $\ln(\cos x)$ 的（具有 Peano 余项的）六阶 Maclaurin 展开式.

**解**

$$
\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln(1+(\cos x-1)) \\
&= (\cos x-1) - \frac{(\cos x-1)^2}{2} + \frac{(\cos x-1)^3}{3} + o((\cos x-1)^3) \\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^6)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\right)x^4 + \left(-\frac{1}{6!} + \frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4!}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)x^6 + o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6) \\
&= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6)
\end{aligned}
$$

**习题 3.6.4** 已知 $f(x)$ 是一个四次多项式, 并且 $f(2) = -1, f'(2) = 0, f''(2) = 2, f'''(2) = -12, f^{(4)}(2) = 24$. 计算 $f(-1), f'(0), f''(1)$.

**解**

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + \frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4 \\
&= -1 + (x-2)^2 - 2(x-2)^3 + (x-2)^4
\end{aligned}
$$

因此

$$f(-1) = 143, f'(0) = -60, f''(1) = 26.$$

**习题 3.6.5** 求下列函数具有 Lagrange 余项的 Taylor 公式.

(1) $y = \tan x$ 在 $x = 0$ 的二阶 Taylor 展开式; (2) $y = \dfrac{1}{x}$ 在 $x = -1$ 的 $n$ 阶 Taylor 展开式.

**解**

(1)

$$\tan x = \tan 0 + \sec^2 0\cdot x + \frac{2\tan 0\sec^2 0}{2!}x^2 + \frac{2(\sec^4\xi + 2\tan^2\xi\sec^2\xi)}{3!}x^3 = x + \frac{\sec^4\xi}{3}x^3, \quad \xi\in(0,x).$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{-1} + \frac{-1}{(-1)^2}(x+1) + \frac{2!}{(-1)^3 2!}(x+1)^2 + \cdots + \frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n+1}n!}(x+1)^n + \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{\xi^{n+2}(n+1)!}(x+1)^{n+1} \\
&= -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \cdots - (x+1)^n - \frac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}, \quad \xi\in(-1,x).
\end{aligned}
$$

**习题 3.6.6** 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x}$; (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-x^2}}{x^2}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x) - \cos x}{\sin^4 x}$.

**解**

(1)

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4), \quad \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}}{\sin^4 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{x^4+o(x^4)} = -\frac{1}{12}.$$

(2)

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4), \quad \sqrt[3]{1-x^2} = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{9}x^4 + o(x^4)$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{9}x^4+o(x^4)\right)}{x^2} = \frac{5}{6}.$$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] &= \lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right]\\ &= \lim_{x\to\infty}\left[x-\left(x-\frac{1}{2}+o(1)\right)\right]\\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2}-o(1)\right] = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\cos(\sin x) &= 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^4}{24} + o((\sin x)^4)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^4 + o(x^4)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)\right) + \frac{1}{24}\left(x^4 + o(x^4)\right) + o(x^4)\\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4+o(x^4)\right)-\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\right)}{x^4+o(x^4)} = \frac{1}{6}.$$

**习题 3.6.7** 设函数 $f(x)$ 处处有 $n+1$ 阶导数, 证明: $f(x)$ 为次数不超过 $n$ 的多项式的充分必要条件是 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$.

**解** 充分性: 若 $f^{(n+1)}(x) \equiv 0$, 则由 Taylor 公式可知, 考虑在点 $x=0$ 处的 Taylor 展开式, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

因此, $f(x)$ 为次数不超过 $n$ 的多项式, 各项系数分别为 $f(0), f'(0), \dfrac{f''(0)}{2!}, \dots, \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

必要性: 若 $f(x)$ 为次数不超过 $n$ 的多项式, 则可设

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

因此, 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$f^{(n+1)}(x) = 0.$$

**习题 3.6.8** 设函数 $f'(x)$ 在 $[0,2]$ 上二阶可导, 且对任意 $x \in [0,2]$, 有 $|f(x)| \leqslant 1$ 及 $|f''(x)| \leqslant 1$. 证明: $|f'(x)| \leqslant 2, x \in [0,2]$.

**解**

$$f(0) = f(x) - f'(0)x - \frac{f''(\xi)}{2}x^2, \quad \xi \in (0,x).$$

$$f(2) = f(x) + f'(2)(2-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2, \quad \eta \in (x,2).$$

因此, 对任意 $x \in [0,2]$, 有

$$\begin{aligned}
|f'(x)| &= \frac{\left|f(2) - f(0) + \frac{f''(\xi)}{2}x^2 - \frac{f''(\eta)}{2}(2-x)^2\right|}{2} \\
&\leqslant \frac{|f(2)|}{2} + \frac{|f(0)|}{2} + \frac{|f''(\xi)|x^2}{4} + \frac{|f''(\eta)|(2-x)^2}{4} \\
&\leqslant 1 + \frac{1}{4}(x^2 + (2-x)^2) \\
&\leqslant 2
\end{aligned}$$

**习题 3.6.9** 设 $n$ 为自然数, 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} x^{n+1}, & x\text{为有理数}, \\ 0, & x\text{为无理数}. \end{cases}$ 证明: $f'(0) = 0$, 但 $f''(0)$ 不存在.

(提示: 证明 $f(x)$ 仅在一点 $x = 0$ 可导.)

注意, 我们显然有

$$f(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$$

但当 $n > 1$ 时, 并不能断言 $f^{(k)}(0) = 0 (2 \leqslant k \leqslant n)$. 因此, 定理 3.32 中的条件: 函数在点 $x_0$ 处有 $n$ 阶导数, 是至关重要的.

**解**

$$|f'(0)| = \left|\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right| \leqslant \lim_{x \to 0} x^n = 0.$$

但是, 当 $x \neq 0, x \in \mathbb{Q}$ 时,

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \begin{cases} \lim\limits_{t \to x, t \in \mathbb{Q}} \dfrac{t^{n+1} - x^{n+1}}{t - x} = (n+1)x^n, & t \in \mathbb{Q}, \\ \lim\limits_{t \to x, t \notin \mathbb{Q}} \dfrac{0 - x^{n+1}}{t - x} = \infty, & t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

当 $x \neq 0, x \notin \mathbb{Q}$ 时,

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \begin{cases} \lim\limits_{t \to x, t \in \mathbb{Q}} \dfrac{t^{n+1} - 0}{t - x} = \infty, & t \in \mathbb{Q}, \\ \lim\limits_{t \to x, t \notin \mathbb{Q}} \dfrac{0 - 0}{t - x} = 0, & t \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

因此, $f'(x)$ 在 $x \neq 0$ 处不存在, 故 $f''(0)$ 不存在.

**习题 3.6.10** 考虑函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ 它在 $x \neq 0$ 处显然有任意阶导数. 证明: $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的任意阶导数都存在, 而且都等于零. (提示: 首先, 易用数学归纳法证明, 当 $x \neq 0$ 时, 对 $n = 1, 2, \ldots$ 有 $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$, 这里 $P_{3n}(t)$ 是 $t$ 的 $3n$ 次多项式; 其次, 由导数定义及 L'Hôspital 法则, 得出 (记 $y = \frac{1}{x}$)

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0,$$

即 $f'(0) = 0$. 现在, 说的结论易用数学归纳法及 L'Hôspital 法则证明.)

本题意味着, 对任意的自然数 $n$, 函数 $f$ 在 $x = 0$ 处的 $n$ 阶 Taylor 多项式是 0; 换句话说, 余项总是等于 $f(x)$. 因此, 即使函数在一点附近的性态, 用 (在该点的) 足够高阶的导数也未必能将其揭示出来.

**解** 设 $n$ 为自然数, 当 $x \neq 0$ 时, 用数学归纳法可证 $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$, 这里 $P_{3n}(t)$ 是 $t$ 的 $3n$ 次多项式. 当 $n = 1$ 时,

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3}.$$

假设当 $n = k$ 时结论成立, 则当 $n = k + 1$ 时,

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left(e^{-\frac{1}{x^2}} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) + e^{-\frac{1}{x^2}} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

显然, $\frac{2}{x^3} P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} P'_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的 $3(k+1)$ 次多项式. 因此, 结论对任意自然数 $n$ 都成立.

由 L'Hôspital 法则, 可得

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{y \to \infty} \frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{1}{2ye^{y^2}} = 0,$$

即 $f'(0)=0$. 假设当 $n=k$ 时, $f^{(k)}(0)=0$, 则当 $n=k+1$ 时,

$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(k)}(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}P_{3k}\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$
$$=\lim_{y\to\infty}\frac{P_{3k}(y)}{y\mathrm{e}^{y^2}}=0$$

因此, 结论对任意自然数 $n$ 都成立.

**习题 3.6.11** 设函数 $f(x)$ 在驻点 $x_0$ 处的 $n$ 阶微商存在, 并且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\quad \text{而} f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

证明:

(1) 若 $n$ 为奇数, 则函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处无极值;

(2) 若 $n$ 为偶数, 则函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处取得极值. 当 $f^{(n)}(x_0)>0$ 时, $f(x)$ 在点 $x_0$ 处取极小值; 当 $f^{(n)}(x_0)<0$ 时, $f(x)$ 在点 $x_0$ 处取极大值.

本题表明, 若函数 $f(x)$ 在驻点上存在如上所述的高阶导数, 则由此可确定驻点是否为极值点. 然而, 我们注意, 上一题中的函数 $f$ 在 $x=0$ 处显然有极小值, 但却不能用这一判别法判别.

**解** 不妨设 $f^{(n)}(x_0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $f^{(n)}(x)>0$. 由 Taylor 公式, 对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$, 有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\quad \xi\in(x_0,x)\text{或}(x,x_0).$$

(1) 当 $n$ 为奇数时,

- 若 $x>x_0$, 则 $(x-x_0)^n>0$, 故 $f(x)-f(x_0)>0$;
- 若 $x<x_0$, 则 $(x-x_0)^n<0$, 故 $f(x)-f(x_0)<0$.

因此, 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处无极值.

(2) 当 $n$ 为偶数时,

- 若 $x>x_0$, 则 $(x-x_0)^n>0$, 故 $f(x)-f(x_0)>0$;
- 若 $x<x_0$, 则 $(x-x_0)^n>0$, 故 $f(x)-f(x_0)>0$.

因此, 函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 处取极小值.

对于 $f^{(n)}(x_0)<0$ 的情形, 类似可证.

# 第 3 章综合习题

**习题 3.C.1** 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\dots(x+n)$, 求 $f'(0)$.

**解**

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}(x+1)(x+2)\dots(x+n) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n = n!. \end{aligned}$$

**习题 3.C.2** 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数, 记函数

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0, \\ a, & x=0. \end{cases}$$

(1) 确定 $a$ 的值, 使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(2) 对 (1) 中确定的 $a$, 证明: $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导, 且导函数连续.

**解**

(1) 由于 $f(x)$ 是奇函数, 故 $f(0)=0\Rightarrow g(0)=a=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$.

(2)

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f'(0)x}{x^2} = \frac{f''(0)}{2}, \\ g'(x) &= \frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}, \quad x\neq 0. \end{aligned}$$

又

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)\cdot x-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)\cdot x+f'(x)-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(0)}{2}=g'(0).$$

因此, $g'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

**习题 3.C.3** 设 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0$, 证明: 方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个根.

**解** 设函数 $f(x)=\dfrac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\dfrac{a_1}{n}x^{n-1}+\cdots+a_nx$. 则 $f(0)=0$, 且

$$f(1)=\frac{a_0}{n+1}+\frac{a_1}{n}+\cdots+a_n=0.$$

由 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=0$, 即

$$a_0\xi^{n-1}+a_1\xi^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=0.$$

**习题 3.C.4** 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $(a,b)$ 内可微, 且 $f(a)=f(b)=0$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

**解** 设函数 $g(x)=\mathrm{e}^{x}f(x)$, 则 $g(a)=g(b)=0$. 由 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$g'(\xi)=\mathrm{e}^{\xi}f'(\xi)+\mathrm{e}^{\xi}f(\xi)=\mathrm{e}^{\xi}(f'(\xi)+f(\xi))=0.$$

因为 $\mathrm{e}^{\xi}\neq 0$, 故 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

**习题 3.C.5** 设 $f(x)$ 在区间 $I$ 上连续, 如果任给 $I$ 中两点 $x_1,x_2$, 有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

证明: $f(x)$ 是区间 $I$ 上的凸函数.

我们将此习题完整表示为以下定理:

**定理** 设 $f(x)$ 在 $I$ 上有定义, 若 $\forall x_1,x_2\in I$, 以下三式等价:

$$f\left(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2\right)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2),\quad\forall\lambda_1,\lambda_2\in(0,1),\lambda_1+\lambda_2=1 \tag{A}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \tag{B}$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n},\quad\forall n\in\mathbb{N} \tag{C}$$

**证明** 我们使用向前和向后两步归纳法证明此定理.

(1) 第一步我们先证明: 式 (B) 成立 $\Rightarrow$ 式 (C) 成立.

(a) 由式 (B) 知式 (C) 当 $n=2$ 时成立. 现证 $n=4$ 时式 (C) 成立. 事实上, 对 $x_1,x_2,x_3,x_4\in I$, 由式 (B), 我们有

$$\begin{aligned}f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)=f\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2}\right)&\leqslant\frac{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2}\\&\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)}{4}.\end{aligned}$$

此即式 (C) 对 $n=4$ 成立. 一般来说, 对任一自然数 $k$, 重复上面方法, 应用 (B) 式 $k$ 次, 可知

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2k}}{2^k}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{2k})}{2^k}.$$

这说明式 (C) 对一切 $n=2^k$ 皆成立.

(b) 证明式 (C) 对 $n=k+1$ 成立时, 必对 $n=k$ 也成立. 记 $A=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}$, 则 $x_1+x_2+\cdots+x_k=kA$, 所以

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+A}{k+1}.$$

因此式 (C) 对 $n=k+1$ 成立, 故

$$f(A)=\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k+A}{k+1}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)+f(A)}{k+1}.$$

不等式两边同时乘以 $k+1$, 减去 $f(A)$, 最后除以 $k$. 注意

$$A=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k},$$

我们得到

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_k}{k}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_k)}{k}.$$

此式表示式 (C) 对 $n=k$ 成立.

(2) 第二步我们证明: 式 (C) 成立 $\Rightarrow$ 式 (A) 成立.

(a) 当 $\lambda_1=\dfrac{m}{n},\lambda_2=\dfrac{n-m}{n}$ 为有理数时,

$$\begin{aligned}f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&=f\left(\frac{m}{n}x_1+\frac{n-m}{n}x_2\right)\\&=f\left(\frac{x_1+\cdots+x_1+x_2+\cdots+x_2}{n}\right)\\&\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_2)}{n}\\&=\frac{m}{n}f(x_1)+\frac{n-m}{n}f(x_2).\end{aligned}$$

(b) 当 $\lambda_1,\lambda_2$ 为无理数时, 由有理数的稠密性, 存在 $\lambda_n\to\lambda_1$, 由 $f$ 的连续性, 有

$$\begin{aligned}f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)&=f\left(\lim_{n\to\infty}\lambda_nx_1+(1-\lambda_n)x_2\right)\\&=\lim_{n\to\infty}f(\lambda_nx_1+(1-\lambda_n)x_2)\\&\leqslant\lim_{n\to\infty}\lambda_nf(x_1)+(1-\lambda_n)f(x_2)\\&=\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2).\end{aligned}$$

**习题 3.C.6** 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的二阶可微函数, $f(0)=f(1)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

**解** 设函数 $g(x)=(1-x)f(x)$, 则 $g(0)=g(1)=0$. 由 Rolle 定理, 存在 $\eta\in(0,1)$, 使得

$$g'(\eta)=-f(\eta)+(1-\eta)f'(\eta)=0$$

同时 $g'(1)=-f(1)+(1-1)f'(1)=0$. 再次应用 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$, 使得

$$g''(\xi)=-2f'(\xi)+(1-\xi)f''(\xi)=0.$$

故

$$f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}.$$

**习题 3.C.7** 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)=f(b)=0$, $f'(a)f'(b)>0$. 证明: 在 $(a,b)$ 内存在一点 $\xi$, 使得 $f(\xi)=0$.

**解** 不妨设 $f'(a)>0, f'(b)>0$. 则由

$$f'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

知存在 $\delta_1>0$, 使得当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时,$f(x)>0$. 同理, 由

$$f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}>0,$$

知存在 $\delta_2>0$, 使得当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时,$f(x)<0$. 令 $\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2,\dfrac{b-a}{2}\right\}$, 则 $f(a+\delta)>0, f(b-\delta)<0$. 由介值定理, 存在 $\xi\in(a+\delta,b-\delta)\subset(a,b)$, 使得 $f(\xi)=0$.

**习题 3.C.8** 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=1, f(1)=\dfrac{1}{2}$. 求证: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

**解**

(1) 若 $f(x)>0$ 在 $[0,1]$ 上成立, 则设函数 $g(x)=x-\dfrac{1}{f(x)}$, 则 $g(0)=-1, g(1)=1-2=-1$. 由 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得

$$g'(\xi)=1+\frac{f'(\xi)}{f^2(\xi)}=0.$$

故

$$f^2(\xi)+f'(\xi)=0.$$

(2) 若 $f(x)>0$ 在 $[0,1]$ 上不成立, 考虑 $x_0:=\inf\{x: f(x)=0\}$, 则 $f(x_0)=0$. 这是因为 $x_0=\inf\{x:f(x)=0\}\Rightarrow\exists\{x_n\}, x_n\to x_0, f(x_n)=0$, 由 $f$ 的连续性可知 $f(x_0)=0$.

此时作以下分类:

(a) 若 $f'(x_0)=0$, 则 $f^2(x_0)+f'(x_0)=0$ 成立.

(b) 若 $f'(x_0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时,$f'(x)>0$, 所以 $f$ 在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上单调递增. 又 $f(x_0)=0$, 所以当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时,$f(x)<0$. 这与 $x_0=\inf\{x:f(x)=0\}$ 矛盾.

(c) 若 $f'(x_0)<0$, 再考虑 $f(x)$ 在 $[x_0,1]$ 上的极小值点 $y_0<0$, 有

$$f^2(x_0)+f'(x_0)=f'(x_0)<0,$$

$$f^2(y_0)+f'(y_0)=f^2(y_0)\geqslant 0.$$

**注** 我希望对 $f^2(x)+f'(x)$ 这个函数应用介值性, 但是我们只知道 $f(x)$ 可导, 且不能直接说 $f(x)$ 的连续性, 加 $f'(x)$ 的介值性得到 $f^2(x)+f'(x)$ 的介值性. 所以只好这么别扭的构造如下的 $h(x)$.

考虑 $h(x)=\mathrm{e}^{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}f(x)$, 则 $h'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}(f^2(x)+f'(x))$. 因此 $h'(x_0)<0, h'(y_0)\geqslant 0$.

由 Darboux 定理, 存在 $\xi \in (x_0, y_0) \subset (0,1)$, 使得 $h'(\xi) = 0$, 即

$$f^2(\xi) + f'(\xi) = 0.$$

**习题 3.C.9** 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上二阶可微, 且满足 $f(a) > 0, f'(a) < 0$, 以及当 $x > a$ 时, $f''(x) \leqslant 0$. 试证在区间 $(a, +\infty)$ 内, 函数 $f(x)$ 恰有一个零点.

**解** 若无零点, 取 $x > a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$, 则由拉格朗日中值定理知, 存在 $\xi \in (a, x)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > \frac{-f(a)}{x - a} > f'(a),$$

这与 $f''(x) \leqslant 0$ 矛盾.

若有两个零点, 记为 $x_1 < x_2$, 则由拉格朗日中值定理知, 存在 $\eta \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f'(\eta) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 > f'(a),$$

这与 $f''(x) \leqslant 0$ 矛盾.

**习题 3.C.10** 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f'(x)$ 严格单调增. 若 $f(a) = f(b) = \lambda$, 证明: 对任意 $x \in (a, b)$, 有 $f(x) < \lambda$.

**解** 由课本定理 3.28 , $f'(x)$ 严格单调增, 故为严格凸函数. 由 Jensen 不等式, 对任意 $x \in (a, b)$, 有

$$f(x) = f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) < \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) = \lambda.$$

**习题 3.C.11** 函数 $\dfrac{\sin x^2}{x}(x > 0)$ 表明, 若函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 不能保证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在. 证明: 若已知该极限存在, 则其值必然为零.

**解** 由 L'Hôpital 法则, 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ 存在且等于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$. 又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ 存在, 所以

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{L}{x} = 0.$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

**习题 3.C.12** 设函数 $f(x)$ 在 $x > 0$ 时二阶可微, 且 $f''(x) < 0, f(0) = 0$. 证明: 对任意正数 $x_1, x_2$, 有 $f(x_1 + x_2) < f(x_1) + f(x_2)$.

**解** 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\xi_1 \in (0, x_1), \xi_2 \in (x_1, x_1 + x_2)$, 使得

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_1 + x_2) - f(x_2)}{x_1}.$$

由题设 $f''(x) < 0$, 知 $f'(x)$ 严格单调减, 且 $\xi_1 < \xi_2$, 故 $f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$, 即

$$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1} > \frac{f(x_1 + x_2) - f(x_2)}{x_1}.$$

整理即得.

**习题 3.C.13** 设函数 $f(x)$ 在 $x_0$ 处存在二阶导数, 求

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}.$$

**注** 不能使用 L'Hôpital 法则, 因为缺定理条件.

**解**

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)+f(x_0)-f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2}h^2+o(h^2)-2f(x_0)}{h^2}\\
=&\lim_{h\to 0}\frac{f''(x_0)h^2+o(h^2)}{h^2}=f''(x_0).
\end{aligned}$$

**习题 3.C.14** 证明下列不等式.

(1) 对任意实数 $x$, $\mathrm{e}^x\geqslant 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$;

(2) 对 $x>0$, $x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$;

(3) 对 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}$;

(4) 对任意实数 $x,y$, 有 $2\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}\leqslant \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y$.

**解**

(1)

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{\mathrm{e}^\xi}{24}x^4\geqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6},\xi\in(0,x).$$

(2)

$$\begin{aligned}
\ln(1+x)&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{(1+\xi)^{-3}}{3}x^3\geqslant x-\frac{x^2}{2},\xi\in(0,x),\\
\ln(1+x)&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{(1+\eta)^{-4}}{4}x^4\leqslant x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\eta\in(0,x).
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
\sin x&=x-\frac{x^3}{6}+\frac{\cos\xi}{24}x^4\geqslant x-\frac{x^3}{6},\xi\in(0,x),\\
\sin x&=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{\sin\eta}{720}x^6\leqslant x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},\eta\in(0,x).
\end{aligned}$$

(4) 由 $\mathrm{e}^x$ 为凸函数, 以及 Jensen 不等式, 知

$$\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}\leqslant\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^y}{2}.$$

**习题 3.C.15** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\dots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

**习题 3.C.16** 求 $\sqrt[n]{n}(n=1,2,\dots)$ 的最大值.

**习题 3.C.17** 试给出函数 $x\cos x$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的一个尽可能小的上界.

**习题 3.C.18** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0,f(1)=1,f'(0)=$

0. 证明: 存在 $\xi \in (-1,1)$, 使得 $f'''(\xi) = 3$.

**习题 3.C.19** 设 $a > 1$, 函数 $f : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 可微. 求证: 存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$, 使得

$$f'(x_n) < f(ax_n), \quad n = 1,2,\ldots$$

**习题 3.C.20** 利用凸函数的性质证明 Hölder (赫尔德) 不等式: 设 $a_i, b_i, i = 1,2,\ldots,n$ 是正数, $p, q$ 是大于 1 的正数, 且 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

(提示: 考虑函数 $f(x) = x^p$.)