

Corso di Laurea in Ingegneria e Scienze Informatiche

# Studio e applicazione del filtro di Kalman e sue varianti per il tracciamento di oggetti

Tesi di laurea in:  
METODI NUMERICI

*Relatore*  
**Prof.ssa Damiana Lazzaro**

*Candidato*  
**Marco Buda**

---

---

# Sommario

Max 2000 characters, strict.

---

---

*Optional. Max a few lines.*

---

---

# Indice

Sommario	iii
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2 Fondamenti teorici</b>	<b>3</b>
2.1 I sistemi dinamici . . . . .	3
2.2 Il filtro di Kalman . . . . .	5
2.3 Costruzione del filtro lineare . . . . .	6
2.4 Varianti non lineari . . . . .	12
2.5 Limitazioni . . . . .	14
<b>3 Evoluzione e sviluppi recenti</b>	<b>15</b>
3.1 Dalla guerra fredda ad oggi . . . . .	15
3.2 Iteratively Saturated Kalman Filtering . . . . .	16
3.3 AI-Aided Kalman Filters . . . . .	16
<b>4 Contribution</b>	<b>17</b>
4.1 Fancy formulas here . . . . .	17
	<b>19</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>19</b>





---

# Elenco delle figure

2.1	Diagramma di classificazione delle varianti del filtro di Kalman. . .	14
-----	---	----



---

# List of Listings

listings/HelloWorld.java . . . . .	17
------------------------------------	----

## LIST OF LISTINGS

---

---

# Capitolo 1

## Introduzione

Write your intro here.

You can use acronyms that you defined previously, such as `cro:IoT`Internet of Thing (IoT). If you use acronyms twice, they will be written in full only once (indeed, you can mention the IoT now without it being fully explained). In some cases, you may need a plural form of the acronym. For instance, that you are discussing `cro:vm`Virtual Machines (VMs), you may need both VM and VMs.

**Marco Buda :** Add sidenotes in this way. They are named after the author of the thesis

### Structure of the Thesis

**Marco Buda :** At the end, describe the structure of the paper

---

---

# Capitolo 2

## Fondamenti teorici

In questo capitolo si definiscono i concetti di base su cui si svilupperanno gli argomenti di questa tesi, insieme ai modelli matematici che li descrivono. Si presenta, inoltre, una costruzione algebrica del filtro di Kalman e si offre una panoramica delle sue varianti.

### 2.1 I sistemi dinamici

Un sistema dinamico è un qualunque sistema che evolve nel tempo secondo una determinata legge.

A seconda dell'obiettivo, si individuano le proprietà del sistema che interessa esaminare (es.: posizione e velocità di un oggetto), dette variabili di stato, e le si raccoglie in un vettore, generalmente  $x \in \mathbb{R}^n$ , andando a definire una cosiddetta rappresentazione in spazio di stato.

Nella forma generale, si considera il tempo come continuo ( $t \in \mathbb{R}$ ), per cui si parla di modelli continui, espressi con equazioni differenziali:

$$\frac{d}{dt}(x(t)) = f(t, x(t))$$

Tuttavia, si può decidere di considerare lo stato soltanto in determinati istanti  $t_k$ . Ne risultano modelli discreti, su cui si concentrerà questa tesi, i quali possono essere espressi con relazioni di ricorrenza:

$$x_k = f(k, x_{k-1})$$

In genere si sceglie di esplicitare la presenza di ingressi  $u \in \mathbb{R}^l$  nel sistema (*control input*, es.: forza di gravità, propulsione...), assunti deterministici, e di misurazioni  $z \in \mathbb{R}^m$  (*measurement*), effettuate sulle variabili osservabili. Dunque il modello viene espresso con le equazioni:

$$\begin{aligned} x_k &= f(k, x_{k-1}, u_{k-1}) \\ z_k &= h(k, x_k) \end{aligned}$$

La prima è detta “equazione di stato” e la seconda “trasformazione di uscita”.

Modellizzare la realtà comporta spesso che la legge di evoluzione  $f$  del sistema sia non deterministica, per via di approssimazioni o fenomeni trascurati (*process noise*,  $w \in \mathbb{R}^n$ ), da cui l’importanza di effettuare misurazioni periodiche per monitorare la reale evoluzione dello stato.

Poiché le misurazioni stesse sono soggette a disturbi (*measurement noise*,  $v \in \mathbb{R}^m$ ), il modello completo diventa:

$$x_k = f_{\text{det}}(k, x_{k-1}, u_{k-1}) + w_{k-1} \quad (2.1)$$

$$z_k = h(k, x_k) + v_k \quad (2.2)$$

Un caso particolare riguarda i modelli lineari, cioè esprimibili nella seguente forma matriciale:

$$x_k = A_k x_{k-1} + B_k u_{k-1} + w_{k-1} \quad (2.3)$$

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad (2.4)$$

In questo caso,  $A_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  è detta “matrice dinamica” e determina l’evoluzione dello stato dal passo  $k - 1$  al passo  $k$  in assenza di ingressi e disturbi,  $B_k \in \mathbb{R}^{l \times n}$



è detta “matrice di ingresso” e determina il contributo degli ingressi che agiscono dal passo  $k - 1$  al passo  $k$  e  $H_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$  è detta “matrice di uscita” e determina le variabili osservate in base alle variabili da stimare.

In generale, i modelli sono tempo-varianti (o non stazionari), da cui  $k$  al pedice di  $A_k$ ,  $B_k$  e  $H_k$ , ma si evidenziano i modelli LTI, ossia lineari tempo-invarianti (o lineari stazionari) in cui le matrici  $A$ ,  $B$  e  $H$  sono costanti nel tempo.

Dalla combinazione delle imprecisioni nel modello e nelle misurazioni, nasce la necessità di algoritmi che raccolgano ed interpretino i dati osservati per determinare una stima (*state estimate*,  $\hat{x}$ ) dello stato reale (*ground truth*,  $x$ ). Questi algoritmi sono detti, appunto, stimatori.

## 2.2 Il filtro di Kalman

Il filtro di Kalman [1] [2] [3] è uno stimatore lineare ricorsivo che minimizza l’errore quadratico medio.

L’aspetto ricorsivo implica, innanzitutto, che si tratta di un filtro a tempo discreto e si rifà al fatto che ogni stima  $\hat{x}_k$  è determinata in base alla stima precedente  $\hat{x}_{k-1}$  e alla misurazione attuale  $z_k$ , senza richiedere l’utilizzo esplicito di  $\hat{x}_0, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{k-2}$  o  $z_0, \dots, z_{k-1}$ . Si tratta di uno dei principali vantaggi del filtro, in quanto riduce sia la complessità temporale che quella spaziale, senza compromettere l’ottimalità. Come anticipato, l’ottimalità è definita dal fatto che, ad ogni passo  $k$ , l’algoritmo produce la stima  $\hat{x}_k$  che minimizza la quantità  $\mathbb{E}[\|e_k\|^2]$ , con  $e_k = \hat{x}_k - x_k$ .

Il filtro è applicabile a un qualsiasi modello lineare a tempo discreto, anche tempo-variante, ossia descritto dalle equazioni 2.3 e 2.4.

Sono, però, posti vincoli di non correlazione sulle variabili aleatorie:

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(w_k, v_j) &= 0_{n \times m}, & \forall k, \forall j \\
\text{Cov}(w_k, u_j) &= 0_{n \times l}, & \forall k, \forall 0 \leq j \leq k-1 \\
\text{Cov}(v_k, u_j) &= 0_{m \times l}, & \forall k, \forall 0 \leq j \leq k-2 \\
\text{Cov}(w_k, w_j) &= 0_{n \times n}, & \forall k, \forall j \neq k \\
\text{Cov}(v_k, v_j) &= 0_{m \times m}, & \forall k, \forall j \neq k \\
\text{Cov}(w_k, x_0) &= 0_{n \times n}, & \forall k \\
\text{Cov}(v_k, x_0) &= 0_{m \times n}, & \forall k
\end{aligned}$$

Infine, nelle formulazioni standard del filtro, si richiede che  $w$  e  $v$  siano privi di *bias*, ossia che  $\mathbb{E}[w_k] = \underline{0}$  e  $\mathbb{E}[v_k] = \underline{0}$ , ad ogni passo  $k$ .

## 2.3 Costruzione del filtro lineare

Nella letteratura sono riportate diverse derivazioni e dimostrazioni di ottimalità del filtro di Kalman [4, pp. 107-113] [5]. Si presenta qui una costruzione algebrica il più elementare possibile.

Il primo passo è descrivere l'espressione che calcoli la stima  $\hat{x}_k$ . Al passo  $k \geq 1$  sono disponibili le informazioni riguardo  $\hat{x}_{k-1}$ ,  $u_{k-1}$  e  $z_k$ , per cui l'espressione lineare avrà la forma generica:

$$\hat{x}_k = \mathcal{A}_k \hat{x}_{k-1} + \mathcal{B}_k u_{k-1} + \mathcal{K}_k z_k \quad (2.5)$$

Per quanto riguarda il passo  $k = 0$ , la scelta della stima iniziale  $\hat{x}_0$  è libera, purché sia deterministica. Se si hanno informazioni sulla distribuzione di  $x_0$ , è consigliabile scegliere  $\hat{x}_0 = \mathbb{E}[x_0]$ .

Una condizione implicita sul filtro richiede che anche l'errore sulle stime gene-

rate  $e_k$  sia privo di *bias*, ossia, ad ogni passo  $k$ :

$$\mathbb{E}[e_k] = \mathbb{E}[\hat{x}_k - x_k] = \underline{0}$$

Da questa condizione si otterranno informazioni sulle matrici incognite  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{K}$ . In effetti, considerando per  $k \geq 1$  e sostituendo  $\hat{x}_k$  con la sua definizione (2.5), si ottiene:

$$\mathbb{E}[\mathcal{A}_k \hat{x}_{k-1} + \mathcal{B}_k u_{k-1} + \mathcal{K}_k z_k - x_k] = \underline{0}$$

Successivamente, sostituendo  $z_k$  con la sua definizione (2.4):

$$\mathbb{E}[\mathcal{A}_k \hat{x}_{k-1} + \mathcal{B}_k u_{k-1} + \mathcal{K}_k (H_k x_k + v_k) - x_k] = \underline{0}$$

Sostituendo  $x_k$  con la relazione di ricorrenza (2.3) e manipolando i termini:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\mathcal{A}_k \hat{x}_{k-1} + \mathcal{B}_k u_{k-1} + \mathcal{K}_k (H_k (A_k x_{k-1} + B_k u_{k-1} + w_{k-1}) + v_k) + \\ & \quad - (A_k x_{k-1} + B_k u_{k-1} + w_{k-1})] = \underline{0} \\ \Rightarrow & \mathbb{E}[\mathcal{A}_k \hat{x}_{k-1} + \mathcal{B}_k u_{k-1} + \mathcal{K}_k H_k A_k x_{k-1} + \mathcal{K}_k H_k B_k u_{k-1} + \mathcal{K}_k H_k w_{k-1} + \\ & \quad + \mathcal{K}_k v_k - A_k x_{k-1} - B_k u_{k-1} - w_{k-1}] = \underline{0} \\ \Rightarrow & \mathbb{E}[\mathcal{A}_k \hat{x}_{k-1} + \mathcal{B}_k u_{k-1} + \mathcal{K}_k H_k A_k x_{k-1} + \mathcal{K}_k H_k B_k u_{k-1} + \mathcal{K}_k H_k w_{k-1} + \\ & \quad + \mathcal{K}_k v_k - A_k x_{k-1} - B_k u_{k-1} - w_{k-1} - \mathcal{A}_k x_{k-1} + \mathcal{A}_k x_{k-1}] = \underline{0} \\ \Rightarrow & \mathbb{E}[\mathcal{A}_k (\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}) + (\mathcal{K}_k H_k A_k - A_k + \mathcal{A}_k) x_{k-1} + \\ & \quad + (\mathcal{K}_k H_k B_k - B_k + \mathcal{B}_k) u_{k-1} + (\mathcal{K}_k H_k - I) w_{k-1} + \mathcal{K}_k v_k] = \underline{0} \\ \Rightarrow & \mathcal{A}_k \mathbb{E}[\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}] + (\mathcal{K}_k H_k A_k - A_k + \mathcal{A}_k) \mathbb{E}[x_{k-1}] + \\ & \quad + (\mathcal{K}_k H_k B_k - B_k + \mathcal{B}_k) \mathbb{E}[u_{k-1}] + (\mathcal{K}_k H_k - I) \mathbb{E}[w_{k-1}] + \mathcal{K}_k \mathbb{E}[v_k] = \underline{0} \end{aligned}$$

Sfruttando l'ipotesi che le quantità  $\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}$ ,  $w_{k-1}$  e  $v_k$  siano prive di *bias*:

$$(\mathcal{K}_k H_k A_k - A_k + \mathcal{A}_k) \mathbb{E}[x_{k-1}] + (\mathcal{K}_k H_k B_k - B_k + \mathcal{B}_k) \mathbb{E}[u_{k-1}] = \underline{0}$$

Non potendo fare assunzioni su  $x$  e  $u$ , ne segue che:

$$\mathcal{K}_k H_k A_k - A_k + \mathcal{A}_k = 0_{n \times n} \quad , \quad \mathcal{K}_k H_k B_k - B_k + \mathcal{B}_k = 0_{l \times n}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_k = (I - \mathcal{K}_k H_k) A_k, \quad \mathcal{B}_k = (I - \mathcal{K}_k H_k) B_k$$

Risulta pratico definire la seguente quantità, per  $k \geq 1$ , come una stima *a priori*, ossia che non tenga conto della misurazione  $z_k$ :

$$\hat{x}_k^- = A_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_{k-1}$$

Così facendo, si vanno a distinguere due fasi all'interno di ogni passo: una fase di predizione, o *time update*, in cui si calcola  $\hat{x}_k^-$  in base alle conoscenze sul modello, e una fase di correzione, o *measurement update*, in cui si combina  $\hat{x}_k^-$  con la misurazione  $z_k$  per ottenere una stima ottimale  $\hat{x}_k$ .

L'espressione per ricavare  $\hat{x}_k$ , ossia la stima *a posteriori*, diventa ora:

$$\begin{aligned} \hat{x}_k &= (I - \mathcal{K}_k H_k) A_k \hat{x}_{k-1} + (I - \mathcal{K}_k H_k) B_k u_{k-1} + \mathcal{K}_k z_k = \\ &= (I - \mathcal{K}_k H_k) (A_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_{k-1}) + \mathcal{K}_k z_k = (I - \mathcal{K}_k H_k) \hat{x}_k^- + \mathcal{K}_k z_k = \\ &= \hat{x}_k^- + \mathcal{K}_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-) \end{aligned}$$

Proseguendo, si definisca  $e_k^- = \hat{x}_k^- - x_k$  come l'errore sulla stima *a priori* e si consideri:

$$\begin{aligned} e_k^- &= \hat{x}_k^- - x_k = (A_k \hat{x}_{k-1} + B_k u_{k-1}) - (A_k x_{k-1} + B_k u_{k-1} + w_{k-1}) = \\ &= A_k (\hat{x}_{k-1} - x_{k-1}) - w_{k-1} = A_k e_{k-1} - w_{k-1} \end{aligned}$$

Si osservi che anche  $e_k^-$  è privo di *bias*:

$$\mathbb{E}[e_k^-] = \mathbb{E}[A_k e_{k-1} - w_{k-1}] = A_k \mathbb{E}[e_{k-1}] - E[w_{k-1}] = \underline{0}$$

Si definiscano, per  $k \geq 1$ , le auto-covarianze degli errori  $P_k^- = \text{Cov}(e_k^-, e_k^-)$  e  $P_k = \text{Cov}(e_k, e_k)$ .

Si ha:

$$\begin{aligned}
 P_k^- &= \mathbb{E} [(e_k^- - \mathbb{E}[e_k^-])(e_k^- - \mathbb{E}[e_k^-])^T] = \mathbb{E} [e_k^- (e_k^-)^T] = \\
 &= \mathbb{E} [(A_k e_{k-1} - w_{k-1})(A_k e_{k-1} - w_{k-1})^T] = \\
 &= \mathbb{E} [(A_k e_{k-1} - w_{k-1}) (e_{k-1}^T A_k^T - w_{k-1}^T)] = \\
 &= A_k \mathbb{E} [e_{k-1} (e_{k-1})^T] A_k^T - A_k \mathbb{E} [e_{k-1} (w_{k-1})^T] + \\
 &\quad - \mathbb{E} [w_{k-1} (e_{k-1})^T] A_k^T + \mathbb{E} [w_{k-1} (w_{k-1})^T] = \\
 &= A_k \mathbb{E} [(e_{k-1} - \underline{0})(e_{k-1} - \underline{0})^T] A_k^T - A_k \mathbb{E} [(e_{k-1} - \underline{0})(w_{k-1} - \underline{0})^T] + \\
 &\quad - \mathbb{E} [(w_{k-1} - \underline{0})(e_{k-1} - \underline{0})^T] A_k^T + \mathbb{E} [(w_{k-1} - \underline{0})(w_{k-1} - \underline{0})^T] = \\
 &= A_k \mathbb{E} [(e_{k-1} - \mathbb{E}[e_{k-1}])(e_{k-1} - \mathbb{E}[e_{k-1}])^T] A_k^T + \\
 &\quad - A_k \mathbb{E} [(e_{k-1} - \mathbb{E}[e_{k-1}])(w_{k-1} - \mathbb{E}[w_{k-1}])^T] + \\
 &\quad - \mathbb{E} [(w_{k-1} - \mathbb{E}[w_{k-1}])(e_{k-1} - \mathbb{E}[e_{k-1}])^T] A_k^T + \\
 &\quad + \mathbb{E} [(w_{k-1} - \mathbb{E}[w_{k-1}])(w_{k-1} - \mathbb{E}[w_{k-1}])^T] = \\
 &= A_k \text{Cov}(e_{k-1}, e_{k-1}) A_k^T - A_k \text{Cov}(e_{k-1}, w_{k-1}) + \\
 &\quad - \text{Cov}(w_{k-1}, e_{k-1}) A_k^T + \text{Cov}(w_{k-1}, w_{k-1})
 \end{aligned}$$

Si osservi che i termini centrali si annullano se  $e_{k-1}$  e  $w_{k-1}$  sono non correlati. In effetti, analizzando ricorsivamente l'errore  $e_{k-1}$ , si trova che le uniche variabili aleatorie da cui esso dipende sono  $u_0, \dots, u_{k-2}$ ,  $w_0, \dots, w_{k-2}$ ,  $v_1, \dots, v_{k-1}$  e  $x_0$ , ossia variabili con cui  $w_{k-1}$  è non correlato per ipotesi.

Ricordando la definizione di  $P_{k-1}$  e definendo  $Q_{k-1}$  come la auto-covarianza di  $w_{k-1}$ , si trova, dunque, l'espressione:

$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_{k-1}$$

La scelta iniziale di  $P_0$  è pressoché libera. Se si hanno informazioni sulla distribuzione di  $x_0$ , è consigliabile utilizzare una stima della sua auto-covarianza. In ogni caso, è necessario avere  $P_0 \neq 0_{n \times n}$  e semidefinita positiva.

Per trovare un'espressione per  $P_k$ , si consideri inizialmente:

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= (I - \mathcal{K}_k H_k) \hat{x}_k^- + \mathcal{K}_k z_k \\ \Rightarrow e_k &= \hat{x}_k - x_k = (I - \mathcal{K}_k H_k) \hat{x}_k^- + \mathcal{K}_k z_k - x_k\end{aligned}$$

Sostituendo  $z_k$  con la sua definizione (2.4):

$$\begin{aligned}e_k &= (I - \mathcal{K}_k H_k) \hat{x}_k^- + \mathcal{K}_k (H_k x_k + v_k) - x_k = \\ &= (I - \mathcal{K}_k H_k) \hat{x}_k^- + \mathcal{K}_k H_k x_k + \mathcal{K}_k v_k - x_k = \\ &= (I - \mathcal{K}_k H_k) \hat{x}_k^- - (I - \mathcal{K}_k H_k) x_k + \mathcal{K}_k v_k = \\ &= (I - \mathcal{K}_k H_k) (\hat{x}_k^- - x_k) + \mathcal{K}_k v_k = (I - \mathcal{K}_k H_k) e_k^- + \mathcal{K}_k v_k\end{aligned}$$

Dunque, si ha:

$$\begin{aligned}P_k &= \mathbb{E} [(e_k - \mathbb{E}[e_k])(e_k - \mathbb{E}[e_k])^T] = \mathbb{E} [e_k (e_k)^T] = \\ &= \mathbb{E} \left[ ((I - \mathcal{K}_k H_k) e_k^- + \mathcal{K}_k v_k) ((I - \mathcal{K}_k H_k) e_k^- + \mathcal{K}_k v_k)^T \right] = \\ &= \mathbb{E} \left[ ((I - \mathcal{K}_k H_k) e_k^- + \mathcal{K}_k v_k) ((e_k^-)^T (I - \mathcal{K}_k H_k)^T + v_k^T \mathcal{K}_k^T) \right] = \\ &= (I - \mathcal{K}_k H_k) \mathbb{E} [e_k^- (e_k^-)^T] (I - \mathcal{K}_k H_k)^T + (I - \mathcal{K}_k H_k) \mathbb{E} [e_k^- (v_k)^T] \mathcal{K}_k^T + \\ &\quad + \mathcal{K}_k \mathbb{E} [v_k (e_k^-)^T] (I - \mathcal{K}_k H_k)^T + \mathcal{K}_k \mathbb{E} [v_k (v_k)^T] \mathcal{K}_k^T\end{aligned}$$

Anche in questo caso, l'espressione si riduce alle covarianze. I termini centrali si annullano, poiché le uniche variabili aleatorie ad influenzare  $e_k^-$  sono  $u_0, \dots, u_{k-2}$ ,  $w_0, \dots, w_{k-1}$ ,  $v_1, \dots, v_{k-1}$  e  $x_0$ , ossia variabili con cui  $v_k$  è non correlato per ipotesi. Ricordando la definizione di  $P_k^-$  e definendo  $R_k$  come la auto-covarianza di  $v_k$ , si trova l'espressione provvisoria:

$$P_k = (I - \mathcal{K}_k H_k) P_k^- (I - \mathcal{K}_k H_k)^T + \mathcal{K}_k R_k \mathcal{K}_k^T$$

Si osservi che minimizzare l'errore quadratico medio  $\mathbb{E}[\|e_k\|^2]$  equivale a minimizzare la traccia di  $P_k$ . In effetti:

$$\mathbb{E}[\|e_k\|^2] = \mathbb{E}[e_k^T e_k] = \mathbb{E}[\text{tr}(e_k^T e_k)] = \mathbb{E}[\text{tr}(e_k (e_k)^T)] = \text{tr}(\mathbb{E}[e_k (e_k)^T]) = \text{tr}(P_k)$$

Dunque, si calcoli:

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(P_k) &= \text{tr}\left((I - \mathcal{K}_k H_k) P_k^- (I - \mathcal{K}_k H_k)^T + \mathcal{K}_k R_k \mathcal{K}_k^T\right) = \\
 &= \text{tr}\left((I - \mathcal{K}_k H_k) P_k^- (I - H_k^T \mathcal{K}_k^T) + \mathcal{K}_k R_k \mathcal{K}_k^T\right) = \\
 &= \text{tr}\left(P_k^- - P_k^- H_k^T \mathcal{K}_k^T - \mathcal{K}_k H_k P_k^- + \mathcal{K}_k H_k P_k^- H_k^T \mathcal{K}_k^T + \mathcal{K}_k R_k \mathcal{K}_k^T\right)
 \end{aligned}$$

Essendo  $P_k^-$  simmetrica, vale  $P_k^- H_k^T \mathcal{K}_k^T = (P_k^-)^T H_k^T \mathcal{K}_k^T = (\mathcal{K}_k H_k P_k^-)^T$ , per cui:

$$\text{tr}(P_k) = \text{tr}(P_k^-) - 2 \text{tr}(\mathcal{K}_k H_k P_k^-) + \text{tr}(\mathcal{K}_k H_k P_k^- H_k^T \mathcal{K}_k^T) + \text{tr}(\mathcal{K}_k R_k \mathcal{K}_k^T)$$

Per ricercare  $\mathcal{K}_k$  che minimizzi  $\text{tr}(P_k)$  si ponga:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \text{tr}(P_k)}{\partial \mathcal{K}_k} &= 0_{n \times n} \\
 \Rightarrow \frac{\partial \text{tr}(P_k^-)}{\partial \mathcal{K}_k} - 2 \frac{\partial \text{tr}(\mathcal{K}_k H_k P_k^-)}{\partial \mathcal{K}_k} + \frac{\partial \text{tr}(\mathcal{K}_k H_k P_k^- H_k^T \mathcal{K}_k^T)}{\partial \mathcal{K}_k} + \\
 &\quad + \frac{\partial \text{tr}(\mathcal{K}_k R_k \mathcal{K}_k^T)}{\partial \mathcal{K}_k} = 0_{n \times n}
 \end{aligned}$$

Si osservi che  $\text{tr}(P_k^-)$  è costante in  $K_k$ , per cui il primo termine si annulla. Per calcolare i termini restanti, si utilizzino le seguenti identità, con la seconda valida se  $N$  è simmetrica:

$$\frac{\partial \text{tr}(MN)}{\partial M} = N^T, \quad \frac{\partial \text{tr}(MNM^T)}{\partial M} = 2MN$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned}
 -2(H_k P_k^-)^T + 2\mathcal{K}_k (H_k P_k^- H_k^T) + 2\mathcal{K}_k R_k &= 0_{n \times n} \\
 \Rightarrow -2P_k^- H_k^T + 2\mathcal{K}_k H_k P_k^- H_k^T + 2\mathcal{K}_k R_k &= 0_{n \times n} \\
 \Rightarrow \mathcal{K}_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}
 \end{aligned}$$

Esaminando la matrice Hessiana di  $\text{tr}(P_k)$ , la quale risulta essere semidefinita positiva, si può verificare che il valore trovato rappresenta un minimo globale.

La quantità  $\mathcal{K}_k$  è detta matrice dei guadagni di Kalman (*Kalman gain*) e può essere pensata come un indice di affidabilità delle misurazioni rispetto al modello teorico. In effetti, per  $R_k \rightarrow 0_{m \times m}$  si ha  $\mathcal{K}_k \rightarrow H^{-1}$ , per cui  $\hat{x}_k \rightarrow z_k$ , mentre per  $P_k^- \rightarrow 0_{n \times n}$  si ha  $\mathcal{K}_k \rightarrow 0_{n \times m}$ , per cui  $\hat{x}_k \rightarrow \hat{x}_k^-$ .

Sostituendo il valore trovato, l'espressione per  $P_k$  diventa:

$$\begin{aligned} P_k &= P_k^- - P_k^- H_k^T \mathcal{K}_k^T - \mathcal{K}_k H_k P_k^- + \mathcal{K}_k H_k P_k^- H_k^T \mathcal{K}_k^T + \mathcal{K}_k R_k \mathcal{K}_k^T = \\ &= (I - \mathcal{K}_k H_k) P_k^- - P_k^- H_k^T \mathcal{K}_k^T + \mathcal{K}_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) \mathcal{K}_k^T = \\ &= (I - \mathcal{K}_k H_k) P_k^- - P_k^- H_k^T \mathcal{K}_k^T + \\ &\quad + P_k^- H_k^T \underbrace{(H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} (H_k P_k^- H_k^T + R_k)}_I \mathcal{K}_k^T = \\ &= (I - \mathcal{K}_k H_k) P_k^- - P_k^- H_k^T \mathcal{K}_k^T + P_k^- H_k^T \mathcal{K}_k^T = \\ &= (I - \mathcal{K}_k H_k) P_k^- \end{aligned}$$

Riassumendo, l'algoritmo si basa sulle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \mathbb{E}[x_0] \\ P_0 &= \text{Cov}(x_0, x_0) \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= A_k \hat{x}_{k-1} + B u_{k-1} \\ P_k^- &= A_k P_{k-1} A_k^T + Q_{k-1} \\ \mathcal{K}_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + \mathcal{K}_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-) \\ P_k &= (I - \mathcal{K}_k H_k) P_k^- \end{aligned}$$

## 2.4 Varianti non lineari

Sulla base della formulazione originale di Kálmán, sono state sviluppate numerose varianti del filtro, con l'obiettivo principale di estenderne il campo di applicazione, specie a modelli non lineari. Si presenta qui un elenco delle varianti più conosciute, successivamente schematizzate in fig. 2.1:



- KF (“Standard” Kalman Filter) [1] [2]: Semplice ed ottimale per sistemi lineari.
- EKF (Extended Kalman Filter) [2]: Basato sulla linearizzazione di una funzione di transizione non lineare, con rischio di divergenza.
  - EKF2 o SO-EKF (Second-Order Extended Kalman Filter) [4, pp. 191-192]
  - MEKF (Multiplicative Extended Kalman Filter) [6]: Specifico per la stima dell’assetto (orientamento) espresso come quaternione.
- Filtri Sigma-Point: Accurati e robusti in sistemi altamente dinamici, con costo di esecuzione maggiore.
  - UKF (Unscented Kalman Filter) [7]
  - QKF (Quadrature Kalman Filter), come il GHKF (Gauss-Hermite Kalman Filter)
  - CKF (Cubature Kalman Filter)
- Metodo Monte Carlo: Basato sull’utilizzo di campioni.
  - EnKF (Ensemble Kalman Filter)
  - PF (Particle Filter): Efficace anche quando i disturbi hanno distribuzione non Gaussiana.

Nell’utilizzo delle varianti EKF e Sigma-Point, spesso si sceglie di memorizzare  $P_k$  fattorizzata sotto forma di radice quadrata  $\sqrt{P_k}$ , per favorire la stabilità numerica dell’algoritmo. Si parla, in questo caso, di SRKF (Square-Root Kalman Filters).

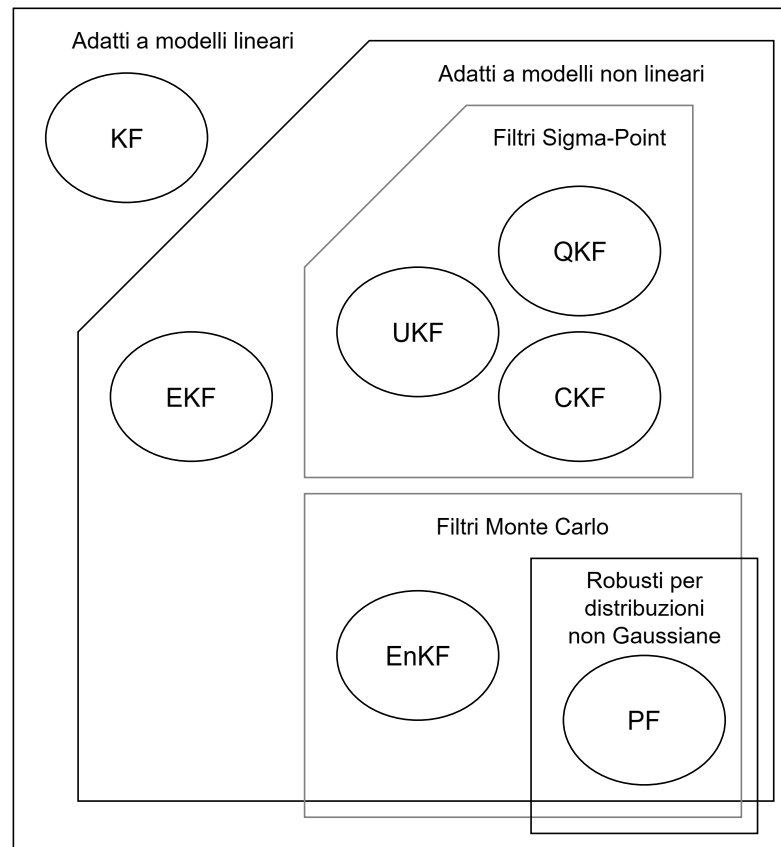


Figura 2.1: Diagramma di classificazione delle varianti del filtro di Kalman.

## 2.5 Limitazioni

Sebbene oggi assuma un ruolo fondamentale nell'ingegneria aerospaziale e in diversi altri settori, il filtro di Kalman presenta alcune limitazioni intrinseche:

- Per sistemi non lineari con distribuzioni non Gaussiane, non è garantita, in generale, l'ottimalità.
- Benché la conoscenza del sistema reale sia la base dell'efficacia del filtro, questa può anche costituire un limite sulla precisione, qualora modelli sufficientemente accurati non siano disponibili.

---

## Capitolo 3

# Evoluzione e sviluppi recenti

Lo studio del filtro di Kalman resta un settore vivo, a più di 60 anni dalla sua concezione. Si continuano a identificare nuovi settori di applicazione, nuove tecniche di miglioramento dell'accuratezza, della stabilità numerica e della performance computazionale. Nuove varianti, sia generiche che specializzate, si aggiungono a quelle già consolidate. In questo capitolo si presenta un riassunto della storia ed evoluzione del filtro, insieme alle missioni che ne hanno dimostrato il merito, e si riportano alcuni dei progressi più recenti, fornendo un'anteprima della direzione attuale della ricerca.

### 3.1 Dalla guerra fredda ad oggi

Rudolf Emil Kálmán studiò i sistemi dinamici lineari a tempo discreto già nel 1954 per la sua tesi di laurea magistrale al MIT. Nel 1958, con l'intensificarsi della corsa allo spazio, il governo federale degli Stati Uniti d'America finanziò gli studi di Kálmán e del collega Richard S. Bucy per la stima e il controllo di sistemi aerospaziali. In questo contesto, a novembre dello stesso anno, nacque l'idea di riformulare il metodo di stima ottimale dell'esistente filtro di Wiener-Kolmogorov, utilizzando una rappresentazione in spazio di stato generica e spostando il problema dal dominio delle frequenze al dominio del tempo. Il filtro ottenuto rimuoveva il requisito di un modello tempo-invariante, richiedeva di esprimere il modello con equazioni più semplici da ricavare e prometteva un algoritmo più adatto all'implementazione a

computer. Nel 1960, Kálmán pubblicò la descrizione del filtro a tempo discreto [1] e nel 1961, insieme a Bucy, il filtro a tempo continuo [8], chiamato oggi filtro di Kalman-Bucy.

## **3.2 Iteratively Saturated Kalman Filtering**

## **3.3 AI-Aided Kalman Filters**

---

# Capitolo 4

## Contribution

You may also put some code snippet (which is NOT float by default), eg: capitolo 4.

### 4.1 Fancy formulas here

```
1 public class HelloWorld {
2     public static void main(String[] args) {
3         // Prints "Hello, World" to the terminal window.
4         System.out.println("Hello, World");
5     }
6 }
```



---

# Bibliografia

- [1] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, pp. 35–45, Mar. 1960.
- [2] G. Welch and G. Bishop, “An introduction to the kalman filter,” Tech. Rep. 95-041, University of North Carolina at Chapel Hill, 1995.
- [3] Y. Pei, S. Biswas, D. S. Fussell, and K. Pingali, “An elementary introduction to kalman filtering,” *Communications of the ACM*, vol. 62, p. 122–133, Oct. 2019.
- [4] A. Gelb and T. A. S. Corporation, *Applied Optimal Estimation*. The MIT Press, 1974.
- [5] H. Masnadi-Shirazi, A. Masnadi-Shirazi, and M. A. Dastgheib, “A step by step mathematical derivation and tutorial on kalman filters.” ArXiv Preprint ArXiv:1910.03558, Oct. 2019.
- [6] F. L. Markley, “Multiplicative vs. additive filtering for spacecraft attitude determination,” in *Proceedings of the 6th Cranfield Conference on Dynamics and Control of Systems and Structures in Space*, pp. 467–474, 2004.
- [7] E. Wan and R. Van Der Merwe, “The unscented kalman filter for nonlinear estimation,” in *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*, pp. 153–158, 2000.
- [8] R. E. Kalman and R. S. Bucy, “New results in linear filtering and prediction theory,” *Journal of Basic Engineering*, vol. 83, pp. 95–108, Mar. 1961.





---

# Acknowledgements

Optional. Max 1 page.