

Instrucciones

- Todo el código debe estar incluido en un único fichero Jupyter Notebook `nombre_apellido1_apellido2.ipynb`, que deberá estar debidamente documentado.
- Solo se pueden utilizar la librería `matplotlib` para la realización de gráficos y las siguientes funciones de `numpy`:
 - `np.array`
 - `np.linspace`
 - `np.zeros`
 - `np.ones`
 - `np.dot`
 - `np.sin`
 - `np.deg2rad`
 - `np.vander`
 - `np.linalg.solve`
- El documento debe contener una sección **Referencias** donde se detallen todos los recursos utilizados para la resolución de los problemas. En el caso de utilizar modelos de lenguaje (LLMs) como ChatGPT debe indicarse tanto el *prompt* como la respuesta del mismo.

Problema 1: Coeficientes indeterminados

Escribir una función llamada `coeficientes_lagrange` que, dados los nodos de interpolación x y los valores correspondientes de la función $f(x)$ en cada nodo, construya los coeficientes del polinomio de Lagrange utilizando el método de coeficientes indeterminados.

La función debe tener los siguientes argumentos:

- **x**: Nodos de interpolación.
- **fx**: Valores correspondientes de la función $f(x)$ en cada nodo.

La función debe devolver:

- Coeficientes del polinomio de Lagrange.

Para implementar la función, se pueden utilizar las siguientes funciones de `numpy`:

- `np.vander`: Para construir la matriz de Vandermonde.
- `np.linalg.solve`: Para resolver el sistema lineal de ecuaciones.

Problema 2: Evaluar el polinomio de Lagrange

Escribir una función llamada `evaluar_lagrange` que, dados los puntos z , los nodos de interpolación x y los valores correspondientes de la función $f(x)$ en cada nodo, evalúe el polinomio de Lagrange en los puntos z utilizando el método de coeficientes indeterminados.

La función debe tener los siguientes argumentos:

- **z**: Puntos en los que se evaluará el polinomio.
- **x**: Nodos de interpolación.

- **fx**: Valores correspondientes de la función $f(x)$ en cada nodo.

La función debe devolver:

- Valores del polinomio de Lagrange en los puntos z .

Para implementar la función, se debe utilizar la función `coeficientes_lagrange` del problema anterior para obtener los coeficientes del polinomio de Lagrange y, a continuación, evaluar el polinomio en los puntos z de forma eficiente.

Problema 3: Forma de Lagrange

(1) Escribir una función llamada `base_lagrange` que, dados los puntos z y los nodos de interpolación x , calcule los valores de los elementos de la base de Lagrange en los puntos z .

La función debe tener los siguientes argumentos:

- **z**: Puntos en los que se evaluarán los elementos de la base de Lagrange.
- **x**: Nodos de interpolación.

La función debe devolver:

- Base de Lagrange evaluada en los puntos z .

(2) Extender la función `evaluar_lagrange` del problema anterior para que acepte un argumento adicional `metodo` que especifique el método a utilizar para la evaluación ('`indeterminados`' o '`lagrange`'). Por defecto, el método debe ser '`indeterminados`'.

Si el método especificado es '`lagrange`', la función debe utilizar la función `base_lagrange` para calcular los valores de los elementos de la base de Lagrange en los puntos z y, a continuación, utilizar dichos valores para evaluar el polinomio de Lagrange en los puntos z .

(3) Utilizar la función `evaluar_lagrange`, para evaluar el polinomio de Lagrange de la función $f(x) = \sin(x)$ en los puntos $z = 72$ utilizando los siguientes nodos (en grados):

1. $x = [70, 75]$
2. $x = [65, 70, 75]$

(4) Dibuja la función $f(x) = \sin(x)$ y los dos polinomios de Lagrange correspondientes a los nodos de interpolación del apartado anterior.