

### Instrucciones

- Todo el código debe estar incluido en un único fichero Jupyter Notebook `nombre_apellido1_apellido2.ipynb`, que deberá estar debidamente documentado.
- El documento debe contener una sección **Referencias** donde se detallen todos los recursos utilizados para la resolución de los problemas. En el caso de utilizar modelos de lenguaje (LLMs) como ChatGPT debe indicarse tanto el *prompt* como la respuesta del mismo.

## Problema 1: Fenómeno de Runge

(1) Utilizando las funciones de NumPy `polyfit` y `polyval`, escribir una función llamada `interp_lagrange` que, dados los puntos  $\mathbf{x}$ , los nodos de interpolación  $\mathbf{xp}$  y los valores correspondientes de la función en cada nodo  $\mathbf{fp}$ , evalúe el polinomio de Lagrange en los puntos  $\mathbf{x}$ .

La función debe tener los siguientes argumentos:

- $\mathbf{x}$ : Puntos en los que se evaluará el polinomio.
- $\mathbf{xp}$ : Nodos de interpolación.
- $\mathbf{fp}$ : Valores correspondientes de la función  $f(x)$  en cada nodo.

La función debe devolver:

- Valores del polinomio de Lagrange en los puntos  $\mathbf{x}$ .

(2) Realizar un único gráfico que muestre las curvas en el intervalo  $[-1, 1]$  de:

- La función  $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$
- El polinomio de Lagrange  $P_{10}$  correspondiente a 11 nodos equiespaciados en el intervalo  $[-1, 1]$ .
- El polinomio interpolador lineal  $s_{10}$  a trozos correspondiente a los mismos nodos. Utiliza `np.interp()`.

Muestra también los nodos de interpolación en el gráfico.

## Problema 2: Fenómeno de Runge (Error de interpolación)

(1) Para  $N = 10, 15, 20, 25, 30$ , calcula el error máximo de interpolación  $\|f(t) - P_N(t)\|_\infty$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , donde:

- $f$  es la función  $\frac{1}{1 + 25x^2}$
- $P_N$  es el polinomio de interpolación para los nodos  $\{x_j\}_{j=0}^N$  equiespaciados en  $[-1, 1]$ , con  $x_0 = -1, x_N = 1$ .

(2) Para  $N = 10, 15, 20, 25, 30$ , calcula el error máximo de interpolación  $\|f(t) - s_N(t)\|_\infty$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , donde:

- $f$  es la función  $\frac{1}{1 + 25x^2}$

- $s_N$  es el polinomio interpolador lineal a trozos para los nodos  $\{x_j\}_{j=0}^N$  equiespaciados en  $[-1, 1]$ .

### Problema 3: Nodos de Chebyshev

Los **nodos de Chebyshev** en el intervalo  $[-1, 1]$  son los  $N + 1$  puntos

$$x_j = \cos\left(\frac{2j+1}{2N}\pi\right), \quad j = 0, 1, \dots, N$$

(1) Realizar un único gráfico que muestre las curvas en el intervalo  $[-1, 1]$  de:

- La función  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$
- El polinomio de Lagrange  $Q_{10}$  correspondiente a los nodos de Chebyshev.

Muestra también los nodos de interpolación en el gráfico.

(2) Para  $N = 10, 15, 20, 25, 30$ , calcula el error máximo de interpolación  $\|f(t) - Q_N(t)\|_\infty$  en el intervalo  $[-1, 1]$ , donde:

- $f$  es la función  $\frac{1}{1+25x^2}$
- $Q_N$  es el polinomio de interpolación para los nodos de Chebyshev.