2. Espacios Topológicos I
(Definición y Construcciones)

Por fin Topología

El desarrollo de la teoría ha extendido el concepto de continuidad más allá de los espacios métricos creando los espacios topológicos. A pesar de que, según parece, en el resto de la licenciatura apenas aparecerán espacios topológicos que no sean métricos, no podemos suprimir su definición a no ser que cambiemos el título de la asignatura.

Como ya hemos visto, para hablar de continuidad basta definir cuáles son los abiertos. ¿Pero cómo hacerlo si no sabemos definir los puntos cercanos a uno dado porque no tenemos una distancia con qué medir? Fijémonos en dos propiedades que satisfacen los abiertos en espacios métricos:

-La unión (arbitraria) de abiertos es un abierto.

-La intersección finita de abiertos es un abierto.

La primera es trivial y la segunda se reduce a observar que la intersección finita de bolas abiertas concéntricas es de nuevo una bola abierta.

Pues bien, matemáticos sesudos (por cierto, J.B. Listing, alumno de Gauss, inventó la palabra *Topología* en 1847) llegaron al convencimiento de que esto es lo único que deberían satisfacer ciertos conjuntos para ser dignos de llamarse abiertos de forma que la definición de continuidad sea natural (al menos para ellos). Además, como los abiertos especifican la continuidad y por tanto la forma, dijeron que formaban una topología (= ciencia de la forma).

Definición: Dado un conjunto, X, se dice que $\mathcal{T}$ es una topología definida sobre X si $\mathcal{T}$ es una colección de subconjuntos de X tales que

$$a)\ \emptyset,\ X \in \mathcal{T}$$

$$b)\ \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{T}$$

$$c)\ \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots \mathcal{U}_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i \in \mathcal{T}.$$

Además a los elementos de $\mathcal{T}$ se les llama abiertos y se dice que el par $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico.

Notación: Como en el caso de espacios métricos, muchas veces se abrevia $(X, \mathcal{T})$ por X si $\mathcal{T}$ se sobreentiende.

Esta definición es tan rara que merece una disculpa. De nuevo debemos confiar en los matemáticos del siglo XX y creer que salvaguarda nuestra intuición de forma y continuidad. Lo mejor es considerarla como un convenio al que recurrimos cuando queremos comprobar que algo es una topología; igual que un fabricante de reglas debe ir a una copia fidedigna del metro patrón. Por mucho que compliquemos la definición de metro (de 1960 a 1986 fue $1'65076373 \cdot 10^6$ longitudes de onda de la radiación emitida por el isótopo ^{86}Kr en su transición entre los estados $2p_{10}$ y $5d_5$) no debemos olvidarnos de que da igual metros que yardas, lo importante es medir. De la misma forma, a traves de los ejemplos en espacios métricos desarrollaremos cierta intuición con respecto a la definición de espacio topológico y seguramente si supiéramos muchísima Topología diríamos que la forma de definición no es tan importante sino su significado abstracto. De hecho ha habido varias definiciones a lo largo del tiempo (M. Fréchet 1906, F. Hausdorff 1914, C. Kuratowski 1922 ...) y la dada aquí (P.S. Alexandroff 1925) quizá no es la más intuitiva.

> *– Necesito que existas y que no cambies. Eres como ese metro de platino que se conserva en alguna parte, en París o en los alrededores. No creo que nadie haya tenido nunca ganas de verlo.*
>
> *– En eso te equivocas.*
>
> *– En fin, poco importa; yo no. Bueno, me gusta saber que existe, que mide exactamente la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Lo pienso cada vez que me miden un piso o que me venden tela por metros.*
>
> *– ¿Ah, sí? – digo fríamente.*
>
> *– Pero podría muy bien pensar en ti sólo como en una virtud abstracta, una especie de límite.*

Algunas definiciones dan prioridad al concepto de complementario de un abierto.

DEFINICIÓN: Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Se dice que $F \subset X$ es un cerrado, si su complementario es abierto, esto es, $X - F \in \mathcal{T}$.

Observación: De la definición de topología se deduce que la intersección arbitraria de cerrados es un cerrado y que la unión finita de cerrados es un cerrado. La notación "F" viene de la inicial de "cerrado" en francés. Je ne parle Français non plus.

Ejemplo-definición: Se llama topología discreta sobre X, $\mathcal{T}_{dis}$ a la formada por todos los subconjuntos de X. Por ejemplo, si $X = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

$$\mathcal{T}_{dis} = \big\{\emptyset, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\big\}.$$

Es trivial comprobar que la topología discreta es realmente una topología.

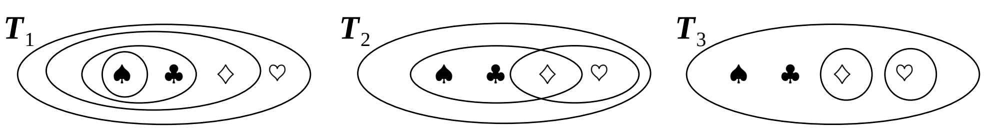
Ejemplo-definición: Se llama topología trivial sobre X a $\mathcal{T}_{tr} = \{\emptyset, X\}$. Es decir, sólo hay dos abiertos (que además son cerrados).

Aunque en ambas sus elementos sean simultáneamente abiertos y cerrados, en cierto sentido estas dos topologías son complementarias: la primera distingue demasiado los elementos de X y la segunda demasiado poco.

Ejemplo: Sea $X = \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit\}$. Las colecciones de subconjuntos de X

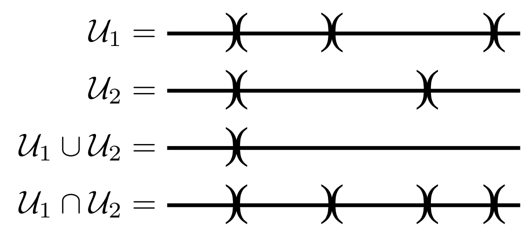
$$\mathcal{T}_1 = \big\{\emptyset, X, \{\spadesuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}\big\} \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_2 = \big\{\emptyset, X, \{\diamondsuit\}, \{\diamondsuit, \heartsuit\}, \{\spadesuit, \clubsuit, \diamondsuit\}\big\}$$

son topologías sobre X (comprobarlo) pero $\mathcal{T}_3 = \big\{\emptyset, X, \{\diamondsuit\}, \{\heartsuit\}\big\}$ no lo es porque $\{\diamondsuit\}$ y $\{\heartsuit\}$ son abiertos pero su unión no. Dibujando todos los abiertos con diagramas de Venn:



Ejemplo-definición: En cualquier conjunto, X, se define la topología cofinita como aquella tal que sus abiertos son $\emptyset, X$ y todos los subconjuntos de X cuyo complementario tenga un número finito de elementos. Por ejemplo, si $X = \mathbb{R}$, $(-\infty, 1)$ no es abierto en la topología cofinita porque su complementario, $[1, +\infty)$ no contiene un número finito de puntos; sin embargo, $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ sí es abierto. La definición nos dice que todos los abiertos, aparte de $\emptyset$ y $\mathbb{R}$, son de la forma $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{N}\{x_n\}$.

Observación: En realidad no hemos demostrado que la topología cofinita es siempre una topología. Es muy fácil demostrarlo comprobando las tres propiedades, pero por si acaso, los siguientes ejemplos para $X = \mathbb{R}$ quizá ayuden:



Observación: Si X es un conjunto finito, todos sus subconjuntos son abiertos con la topología cofinita, por tanto ésta pierde su interés ya que coincide con la discreta.

En una topología la intersección infinita de abiertos o la unión infinita de cerrados no tiene por qué ser un abierto o un cerrado, respectivamente. Por ejemplo, en la cofinita, tomando los abiertos $\mathcal{U}_x = \mathbb{R} - \{x\}$ se tiene

$$\bigcap_{x \in \mathbb{Q}} \mathcal{U}_x = \mathbb{R} - \mathbb{Q} \notin \mathcal{T}_{cof}.$$

Una manera crear artificialmente una topología es dividir el conjunto en unos cuantos trozos y hacer todas las intersecciones y uniones necesarias para que se satisfaga la definición de topología.

Definición: Se dice que $\mathcal{S}$ es una subbase si es una colección de subconjuntos de X cuya unión es X, y se llama topología generada por la subbase $\mathcal{S}$ a aquella cuyos abiertos son $\emptyset$ y las uniones (arbitrarias) de intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$.

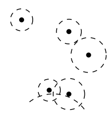
Observación: La demostración de que la topología generada por una subbase es realmente una topología, se reduce a la distributiva para $\cup$ y $\cap$.

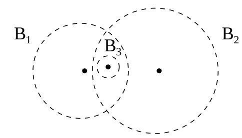
Veamos un ejemplo, pero no insistiremos mucho porque el concepto de subbase no es demasiado relevante aunque la crease N. Bourbaki, el único matemático con varios cerebros.

Ejemplo: En $X = \mathbb{R}$ si imponemos que $\mathcal{U}_1 = (-\infty, 0]$, $\mathcal{U}_2 = (0, 2]$, $\mathcal{U}_3 = [1, +\infty)$, $\mathcal{U}_4 = [2, 3]$, esto es, si consideramos la subbase $\mathcal{S} = \{\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \mathcal{U}_4\}$ aparecen los abiertos $\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_3 = [1, 2]$, $\mathcal{U}_2 \cap \mathcal{U}_4 = \{2\}$ (las intersecciones de tres o más son vacías) y las uniones de todos ellos.

$\mathcal{T} = \big\{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, 2], [1, +\infty), [2, 3], [1, 2], \{2\}, (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), [1, 3], (-\infty, 0] \cup \{2\}\big\}.$

Para estudiar continuidad y convergencia uno debería saber especificar lo que son los abiertos muy, muy pequeños, por ello se introduce el concepto de base, que es como una subbase en la que podemos empequeñecer los subconjuntos arbitrariamente. Para hacernos una idea intuitiva, podemos visualizar los elementos de la base como las bolas abiertas en $\mathbb{R}^2$ y las dos propiedades de la definición nos dirán que las bolas abiertas





lo cubren todo y se pueden empequeñecer

Para ser sincero, según fuentes autorizadas, son razones de economía, en el sentido del próximo lema, las que motivan la definición de base, así que el que quiera puede tachar el párrafo anterior aunque su autor lo crea. La racionalidad científica consiste, en gran medida, en inventar justificaciones de todo lo que se dice para sugerir su necesidad.

> *Por ejemplo, ésta es una caja de cartón que contiene mi frasco de tinta.* [...] *Es un paralelepípedo rectángulo; se recorta sobre..., es estúpido, no hay nada que decir. Eso es lo que hay que evitar, no hay que introducir nada extraño donde no lo hay. Pienso que éste es el peligro de llevar un diario: se exagera todo, uno está al acecho, forzando continuamente la verdad.*

Definición: Dado un conjunto X, se dice que $\mathcal{B}$ es una base si es una colección de subconjuntos de X que satisface

1) $\forall x \in X\ \exists B \in \mathcal{B} : x \in B$

2) $\forall x \in B_1 \cap B_2,$ con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}, \exists B_3 \in \mathcal{B} : x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Si los elementos de las bases son como las bolas abiertas en espacios métricos, entonces podremos definir los abiertos de igual manera.

Definición: Dada una base $\mathcal{B}$ en X la topología generada por $\mathcal{B}$, es aquella tal que $\mathcal{U}$ es abierto si y sólo si para todo $x \in \mathcal{U}$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subset \mathcal{U}$.

Notación-definición: Muchas veces se escribe $\mathcal{U}(x)$ ó $B(x)$ para indicar que $\mathcal{U}$ ó B son entornos de x, esto es, como abreviatura de "$\mathcal{U} \in \mathcal{T}$ tal que $x \in \mathcal{U}$" o "$B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$". Con esta notación las propiedades que definen base se escriben como

$$1)\ \forall x \in X\ \exists B(x) \in \mathcal{B} \qquad 2) \forall B_1(x), B_2(x) \in \mathcal{B}\ \exists B_3(x) \in \mathcal{B} : B_3(x) \subset B_1(x) \cap B_2(x).$$

El siguiente resultado, para el que no se necesita saber que la topología generada por una base cumple la definición de topología, justifica el nombre de *base*. De alguna forma una base contiene los ladrillos necesarios para construir cualquier abierto.

Lema 2.1: *Dada una base, $\mathcal{B}$, cada uno de sus elementos es abierto en la topología que genera y, de hecho, todo abierto en dicha topología se puede escribir como unión (quizá infinita) de elementos de $\mathcal{B}$.*

Observación: Evidentemente si $\mathcal{T}$ es una topología también es una base y la topología que genera es ella misma. En contra de lo que ocurre en álgebra lineal las bases no son "minimales" con respecto a su cardinal: podemos añadir más elementos y seguir teniendo una base. (*Curiosidad para leer y olvidar*: Al menor cardinal de todas las posibles bases de un espacio topológico se le llama densidad de dicho espacio y, como veremos al final del tercer capítulo, algunos matemáticos se ponen muy contentos cuando pueden probar que la densidad es $\aleph_0$).

Dem.: Tomando $\mathcal{U} = B$, con $B \in \mathcal{B}$, en la definición anterior, se tiene automáticamente que B es abierto. Por otra parte, para cualquier abierto

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x\in\mathcal{U}} \{x\} \subset \bigcup_{x\in\mathcal{U}} B(x) \subset \mathcal{U}$$

y se sigue que las inclusiones se pueden reemplazar por igualdades. ■

Aunque la notación nos los sugiera como evidente, hay que comprobar que lo generado por una base es una topología.

Proposición 2.2: *La topología generada por una base es realmente una topología.*

Dem.: Comprobaremos ordenadamente las propiedades de la definición de topología.

1) Es trivial.

2) Si $\mathcal{U}_\alpha$ son abiertos en la topología generada por la base $\mathcal{B}$, queremos comprobar que $\bigcup \mathcal{U}_\alpha$ también lo es. Pero esto es claro porque si $x \in \bigcup \mathcal{U}_\alpha$ entonces $x \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ para algún α_0, y como $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ es abierto existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset \mathcal{U} \subset \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, con lo cual, $\bigcup \mathcal{U}_\alpha$ es abierto (revisar paso a paso este trabalenguas).

3) Queremos comprobar que la intersección finita de abiertos en la topología generada por la base $\mathcal{B}$ también es abierto. Basta considerar el caso de dos abiertos $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ ya que el caso general es idéntico (o se sigue por inducción, si uno quiere ser pedante).

Si $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son abiertos no disjuntos y $x \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ entonces por la definición de abierto en la topología generada por $\mathcal{B}$, existen $B_1(x), B_2(x)$ tales que $B_1(x) \subset \mathcal{U}_1$, $B_2(x) \subset \mathcal{U}_2$. Así pues, por la segunda propiedad de base existe $B_3(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B_3(x) \subset B_1(x) \cap B_2(x) \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ y se sigue que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ es abierto. ■

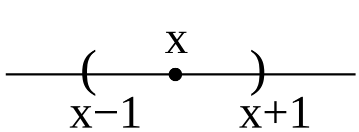
Seguramente es imposible entender todo esto sin algunos ejemplos.

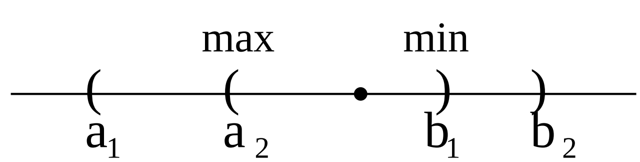
Ejemplo: La colección de todos los intervalos abiertos, $\mathcal{B}_1 = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$, es una base en $\mathbb{R}$. Es obvio que los intervalos abiertos lo cubren todo y que se pueden achicar, pero como excusa para practicar con estos conceptos veamos la demostración detallada:

1) $\forall x \in \mathbb{R}\ x \in (x-1, x+1) \in \mathcal{B}_1$

2) $\forall x \in \mathbb{R}\ x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \Rightarrow x \in (\max(a_1, a_2), \min(b_1, b_2)) \subset (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2)$.

De hecho la última inclusión es una igualdad.





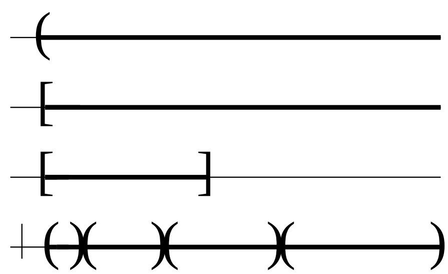
Ejemplo: La colección $\mathcal{B}_2 = \{[a,b) \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}$ es una base en $\mathbb{R}$. La prueba es similar a la anterior.

DEFINICIÓN: A la topología en $\mathbb{R}$ generada por $\mathcal{B}_1$ se le llama topología usual y a la generada por $\mathcal{B}_2$ se le llama topología de límite inferior o topología de Sorgenfrey.

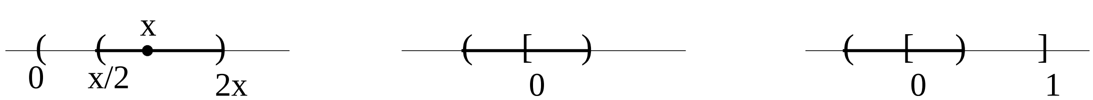
Ejemplo: El conjunto $A = \mathbb{Q}$ no es ni abierto ni cerrado en las topologías usual y de Sorgenfrey, porque no existe ningún intervalo (a,b) ni $[a,b)$, $a < b$, totalmente contenido en $\mathbb{R}$ ni en $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Ejemplo: Consideremos los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A_1 = \{x > 0\}$$
$$A_2 = \{x \geq 0\}$$
$$A_3 = [0,1]$$
$$A_4 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$$

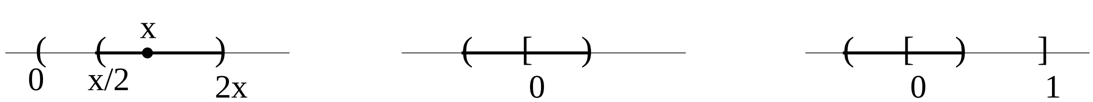


A_1 es un abierto en la topología usual porque si $x \in A_1$ entonces, por ejemplo, $x \in (x/2, 2x) \in \mathcal{B}_1$. Sin embargo A_2 no es abierto porque no existe ningún intervalo (a,b) tal que $0 \in (a,b) \subset A_2$. Lo mismo ocurre con A_3. Tanto A_2 como A_3 son cerrados en la topología usual ya que sus complementarios son abiertos.



A_4 también es abierto en la topología usual. En lugar de dar una "fórmula" para un intervalo que contenga a cada x, simplemente podemos decir que $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}_1$ y por tanto $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ es abierto y como la unión de abiertos es un abierto, A_4 también lo es.

Con la topología de límite inferior A_1 y A_2 son abiertos porque $x \in A_1$ (ó $x \in A_2$) implica $x \in [x, x+1) \subset A_1$ (ó $\subset A_2$). Pero A_3 no es abierto porque no existe $[a,b)$ tal que $1 \in [a,b)$ y $[a,b) \subset [0,1]$. De nuevo, A_3 es cerrado.



Según lo anterior, para ver que A_4 es abierto en esta topología basta comprobar que $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ es abierto. En general (a,b) es abierto en la topología de límite inferior ya que para cualquier $x \in (a,b)$ se cumple $x \in [x,b) \subset (a,b)$.

De alguna forma los abiertos en la topología usual de $\mathbb{R}$ son aquellos que no contienen a su frontera mientras que los de la topología de límite inferior hacen la "vista gorda" con las fronteras de la izquierda, Por ello hay más abiertos en esta última topología. Demos un nombre a esta situación.

DEFINICIÓN: Dadas dos topologías $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ sobre X, se dice que $\mathcal{T}$ es <u>más fina</u> que $\mathcal{T}'$ (o que $\mathcal{T}'$ es <u>menos fina</u> que $\mathcal{T}$) si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Si además $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}'$, se dice que $\mathcal{T}$ es <u>estrictamente más fina</u> que $\mathcal{T}'$ (o que $\mathcal{T}'$ es <u>estrictamente menos fina</u> que $\mathcal{T}$).

<u>Observación:</u> ¿Hay una errata en la definición anterior? ¿El que inventó esta definición era primo del que llamó cosecante al inverso del seno y secante al del coseno? No, la notación es lógica. Si $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ entonces $\mathcal{T}$ tiene más abiertos que $\mathcal{T}'$, por consiguiente los abiertos de $\mathcal{T}$ serán "más pequeños" y $\mathcal{T}$ distinguirá más. En ese sentido es *más* fina.

Con las bases lo vemos más claro: elementos de la base más pequeños $\Rightarrow$ topología más fina.

Proposición 2.3: *Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases para las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente, sobre X. Entonces*

$$\mathcal{T}' \subset \mathcal{T} \ \Leftrightarrow\ \forall x \in X\ \forall B'(x) \in \mathcal{B}'\ \ \exists B(x) \in \mathcal{B} \,:\, B(x) \subset B'(x).$$

<u>Dem.</u>:

$\Rightarrow$) Dados $x \in X$ y $B'(x) \in \mathcal{B}'$ con $x \in B'$, queremos hallar $B(x) \in \mathcal{B}$, $B(x) \subset B'(x)$.

Como $B'(x) \in \mathcal{T}'$, entonces $B'(x)$ también es abierto en la topología $\mathcal{T}$, y como $\mathcal{B}$ es base de $\mathcal{T}$, existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset B'(x)$.

$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{U}' \in \mathcal{T}'$, queremos demostrar que $\mathcal{U}' \in \mathcal{T}$.

Como $\mathcal{B}'$ es base y $\mathcal{U}'$ es abierto, para todo $x \in \mathcal{U}'$ existe $B'(x) \in \mathcal{B}'$ tal que $B'(x) \subset \mathcal{U}'$ y nuestra hipótesis asegura que existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset B'(x) \subset \mathcal{U}'$, por consiguiente $\mathcal{U}' \in \mathcal{T}$. $\blacksquare$

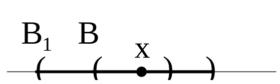
<u>Ejemplo</u>: La topología de Sorgenfrey en $\mathbb{R}$ es más fina que la usual porque, como dijimos al final del último ejemplo, para cualquier $x \in (a,b) \in \mathcal{B}_1$ podemos tomar $[x,b) \in \mathcal{B}_2$ y se cumple $x \in [x,b) \subset (a,b)$. De hecho es estrictamente más fina, porque $A_2 = [0,+\infty)$ es abierto en la topología de Sorgenfrey pero no en la usual (también se puede decir que no existe (a,b) tal que $x \in (a,b) \subset [x,x+1)$).

Si se prueba que una topología es más y menos fina que otra, obviamente son iguales. Este truco se utiliza muchas veces en combinación con la proposición anterior para demostrar que una base es base de cierta topología dada.

<u>Ejemplo</u>: Comprobar que $\mathcal{B} = \{(a,b) \,:\, b-a \le 1\}$ es una base de la topología usual. (Por cierto, la comprobación de que $\mathcal{B}$ es una base es similar a la de que $\mathcal{B}_1$ lo es).

Sea $\mathcal{T}_{usu}$ la topología usual (generada por $\mathcal{B}_1$) y sea $\mathcal{T}$ la generada por $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1$ y los abiertos son uniones de elementos de la base, se tiene que $\mathcal{T}_{usu}$ es más fina que $\mathcal{T}$. Por otra parte si $x \in B_1 \in \mathcal{B}_1$ podemos encontrar un intervalo abierto, B, de longitud menor o igual que uno tal que $x \in B \subset B_1$. Basta tomar, por ejemplo, $B = (x - 0'5, x + 0'5) \cap B_1$. Así pues, según la proposición $\mathcal{T}$ es más fina que $\mathcal{T}_{usu}$ y se deduce que ambas son iguales.

$$\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{T}_{usu} \supset \mathcal{T}$$



$$\Rightarrow \qquad x \in B \subset B_1 \ \Rightarrow\ \mathcal{T}_{usu} \subset \mathcal{T}$$

Ejemplo: Demostrar que $\mathcal{B} = \{\mathcal{U} : \mathbb{R} - \mathcal{U}$ es un subconjunto acotado de $\mathbb{Z}\}$ genera una topología sobre $\mathbb{R}$, digamos $\mathcal{T}$, que es estrictamente menos fina que la cofinita.

Comprobemos primero que $\mathcal{B}$ es de hecho una base:

1) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{n\} \in \mathcal{B}$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq x$.

2) $x \in (\mathbb{R} - \{n_1, \dots, n_r\}) \cap (\mathbb{R} - \{m_1, \dots, m_s\}) \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s\} \in \mathcal{B}$.

Desde luego que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_{cof}$ así que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{cof}$. Por otra parte, $\mathbb{R} - \{\sqrt{3}\} \in \mathcal{T}_{cof}$ pero no existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset \mathbb{R} - \{\sqrt{3}\}$ así que $\mathbb{R} - \{\sqrt{3}\} \notin \mathcal{T}$ y por tanto $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_{cof}$. Nótese que, de hecho, $\mathcal{T} = \mathcal{B} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.

Más ejemplos, por favor

En esta sección veremos varias maneras de crear topologías relevantes. En primer lugar, veamos como fabricar una topología natural en un espacio métrico y así las dos definiciones de abierto que hemos dado (elemento de una topología y ciertos subconjuntos en espacios métricos) coincidirán.

DEFINICIÓN: Dado un espacio métrico (X, d), se llama topología inducida por d o topología métrica a la generada por la base formada por todas las bolas abiertas.

Observación: Comprobar que las bolas abiertas forman realmente una base requiere demostrar que si $x \in B(x_1, \epsilon_1) \cap B(x_2, \epsilon_2)$ existe $B(x_3, \epsilon_3)$ tal que $x \in B(x_3, \epsilon_3) \subset B(x_1, \epsilon_1) \cap B(x_2, \epsilon_2)$.

En un dibujo es claro, pero demostrarlo rigurosamente es un poco más difícil excepto para los que hayan hecho un ejercicio anterior. Sólo hay que tomar

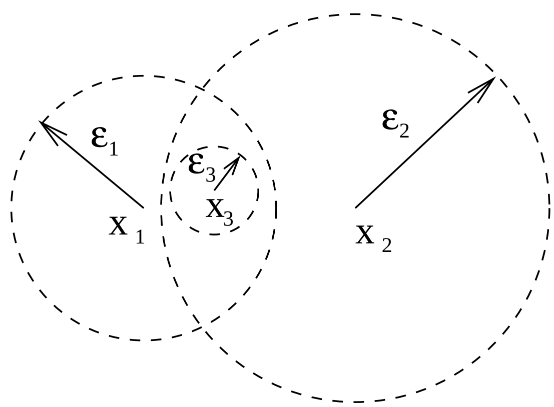
$$x_3 = x$$

$$\epsilon_3 = \min\big(\epsilon_1 - d(x, x_1), \epsilon_2 - d(x, x_2)\big).$$

¿Por qué? Nótese que basta probar

$$B(x, \epsilon_i - d(x, x_i)) \subset B(x_i, \epsilon_i)$$

y esto se puede reducir a la desigualdad triangular.

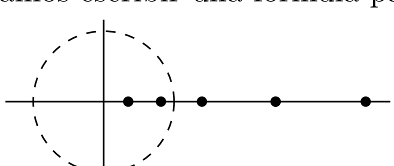


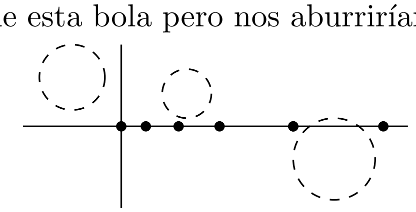
De este modo podemos generalizar la topología usual en $\mathbb{R}$ de la sección anterior.

DEFINICIÓN: Se llama topología usual en $\mathbb{R}^n$ a la inducida por la distancia usual.

Ejemplo: El conjunto $A_1 = \{(1/n, 0) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{Z}^+\}$ no es cerrado en la topología usual de $\mathbb{R}^2$ pero $A_2 = A_1 \cup \{(0,0)\}$ sí lo es.

Si A_1 fuera cerrado, $\mathbb{R}^2 - A_1$ sería abierto, y esto no es cierto porque $(0,0) \in \mathbb{R}^2 - A_1$ pero cualquier bola abierta, B, conteniendo al origen contiene también infinitos puntos de A_1; esto es $B \not\subset \mathbb{R}^2 - A_1$. Esta situación no se da en A_2 porque $(0,0) \notin \mathbb{R}^2 - A_2$. Es claro que alrededor de cualquier otro de los puntos de $\mathbb{R}^2 - A_1$ cabe una bola abierta. Podríamos escribir una fórmula para el posible radio de esta bola pero nos aburriríamos.





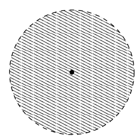
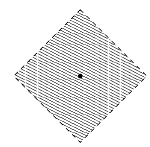
En el ejemplo anterior aparece por primera vez uno de los grandes problemas notacionales de este curso: la notación (a, b) significa simultáneamente el intervalo $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ y el punto (o vector) de $\mathbb{R}^2$ con $x = a$, $y = b$. A pesar de este lío, los puntos y los intervalos son cosas tan diferentes que es difícil encontrar ejemplos sensatos que den lugar a confusión.

Ejemplo: La distancia usual en $\mathbb{R}^2$, d, y la distancia d' definida por

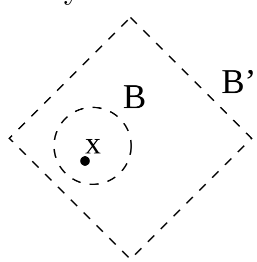
$$d'\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

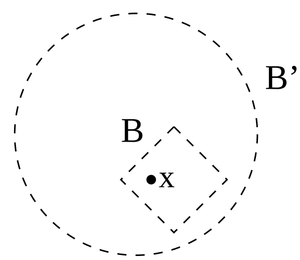
inducen la misma topología en $\mathbb{R}^2$: la topología usual.

Para demostrarlo hay que ver que la topología inducida por d es más y menos fina que la generada por d' y, según la proposición de la sección anterior, esto se reduce a ver que, alrededor de cada punto, las bolas abiertas en $(\mathbb{R}^2, d)$ se pueden meter dentro de las bolas abiertas en $(\mathbb{R}^2, d')$ y viceversa. Como se tiene

bola abierta en $(\mathbb{R}^2, d)$ =  bola abierta en $(\mathbb{R}^2, d')$ = 

Basta decir que un círculo se puede meter dentro de un cuadrado girado alrededor de cualquier punto y viceversa.





De nuevo, si uno se pusiera pesadísimo podría hallar una fórmula para calcular un posible B dados x y B', pero es un poco absurdo en vista de la sencillez del dibujo. Ser riguroso no quiere decir ser un pelmazo ni desdeñar la geometría y demostrar ritualmente las cosas evidentes e irrelevantes sólo conduce al aburrimiento, del cual ya tenemos bastante.

Me aburro, eso es todo. De vez en cuando bostezo tan fuerte que las lágrimas me ruedan por las mejillas. Es un aburrimiento profundo, profundo, el corazón profundo de la existencia, la materia misma de que estoy hecho. No me descuido, por el contrario; esta mañana me bañé, me afeité. Sólo que cuando pienso en todos esos pequeños actos cuidadosos, no comprendo cómo pude ejecutarlos; son tan vanos. Sin duda el hábito los ejecuta por mí.

Dos distancias d y d', como las del ejemplo anterior, tales que d es pequeña cuando d' lo es y viceversa, se dice que son equivalentes; más rigurosamente, lo son cuando para todo $\epsilon, \epsilon' > 0$, existen $\delta, \delta' > 0$ tales que $d(x,y) < \delta$ y $d'(x,y) < \delta'$ implican, respectivamente, $d'(x,y) < \epsilon'$ y $d(x,y) < \epsilon$. Distancias equivalentes generan la misma topología pero el recíproco no siempre se cumple.

Ejemplo: La topología generada por la distancia discreta es la topología discreta. Para comprobarlo basta notar que con la distancia discreta $B(x, 0'5) = \{x\}$, así que cualquier punto es abierto y por tanto, todo es abierto. La distancia obtenida al cambiar 1 por $e^x + e^y$ en la definición de la discreta no es equivalente a ella pero genera la misma topología.

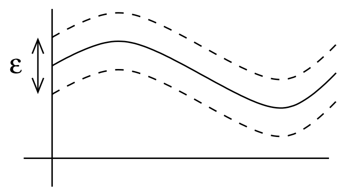
En cualquier espacio métrico (X, d) tal que X sólo tenga un número finito de elementos, tomando ϵ menor que la mínima distancia entre ellos se tiene $B(x,\epsilon) = \{x\}$ y, como antes, la topología inducida por d es la discreta. En particular, las distancias torre, caballo, dama y rey, introducidas en el primer capítulo, inducen la topología discreta en el tablero de ajedrez. En consecuencia, como en un conjunto finito una topología no discreta no es métrica, no todos los espacios topológicos son métricos (¿sabría el lector dar un ejemplo? Es realmente *trivial*) aunque éstos sean los más comúnmente empleados.

Ejemplo: Sea X el conjunto de funciones continuas en $[0,1]$ y tomemos las distancias

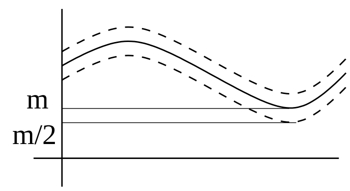
$$d_1(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| \,:\, x\in[0,1]\} \quad \text{y} \quad d_2(f,g) = \int_0^1 |f-g|.$$

Entonces el conjunto $\mathcal{U} = \{f \in X \,:\, f > 0\}$ es un abierto con la topología inducida por d_1 pero no lo es con la inducida por d_2.

El caso de d_1 es el más fácil porque $B(f,\epsilon)$ no es nada más que el conjunto de funciones con gráfica en una “banda” de radio ϵ alrededor de la de f. Si $f\in\mathcal{U}$ y $m>0$ es el mínimo de f, entonces $B(f,m/2)\subset\mathcal{U}$ ya que $|f-g|<m/2 \Rightarrow g > f-m/2 > 0$.

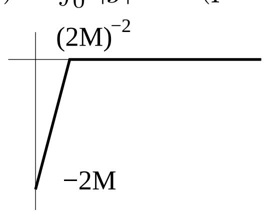


$B(f,\epsilon)$

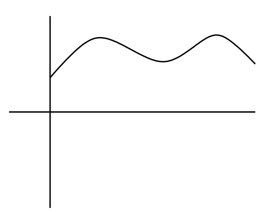


$B(f,m/2)$

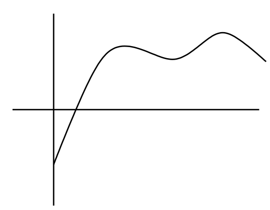
En (X,d_2) las bolas abiertas son muy difíciles de imaginar mediante un dibujo. La idea para probar que $\mathcal{U}$ no es abierto, es que hundiendo una parte muy fina de la gráfica hasta la parte negativa podemos conseguir que la integral apenas varíe. Concretamente, no puede existir $B(f,\epsilon)\subset\mathcal{U}$ porque tomando $g(x) = \min\big(2M(4M^2x-1),0\big)$ (ver el dibujo) donde M es mayor que ϵ y que el máximo de f, se tiene que $f+g\notin\mathcal{U}$ y sin embargo $d(f+g,f) = \int_0^1 |g| < \epsilon$ (pensarlo hasta que no sea necesario hacer ninguna cuenta).



Gráfica de $g(x) = \min\big(2M(4M^2x-1),0\big)$



Gráfica de f



Gráfica de $f+g$

Si d define una distancia en un conjunto también la define en cualquiera de sus subconjuntos sin más que restringirla (olvidarse de los puntos entre los que no queremos hallar distancias). Algo parecido podemos hacer en un ámbito más general: si nos quedamos con un trozo de espacio topológico sigue siendo un espacio topológico.

Definición: Sea $(X,\mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A\subset X$. Se llama topología del subespacio, topología inducida, topología relativa o topología heredada (de $\mathcal{T}$) a la topología sobre A dada por

$$\mathcal{T}_A = \{\mathcal{U} \cap A \,:\, \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}.$$

Observación: Lo único que nos dice la definición anterior es que los abiertos en A se obtienen intersecando con A los de X (en particular $\mathcal{T}_A$ *hereda* las propiedades de topología de las de $\mathcal{T}$). Lo mismo ocurre con los cerrados y las bases, para practicar podemos demostrarlo, aunque es realmente sencillo.

Lema 2.4: *Con la notación anterior*

1) $B \subset A$ *es cerrado en* $\mathcal{T}_A \Leftrightarrow B = C \cap A$ *donde* C *es cerrado en* $\mathcal{T}$

2) $\mathcal{C} = \{C_\alpha\}$ *es una base de* $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B} = \{B_\alpha\}$ *es base de* $\mathcal{T}_A$ *con* $B_\alpha = C_\alpha \cap A$.

Observación: Lógicamente, "cerrado" en $\mathcal{T}_A$ ó $\mathcal{T}$ quiere decir que el complementario pertenece a dichas topologías. Es un buen ejercicio hallar una condición necesaria y suficiente sobre A para que todos los cerrados en $\mathcal{T}_A$ lo sean también en $\mathcal{T}$.

Dem.: 1) El conjunto B es cerrado en $\mathcal{T}_A$ si y sólo si $A - B \in \mathcal{T}_A$, es decir, si y sólo si $A - B = \mathcal{U} \cap A$ para cierto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$, y esto equivale a (pensarlo) $B = (X - \mathcal{U}) \cap A$ con lo que basta tomar $C = X - \mathcal{U}$.

2) Basta notar que para $x \in A$, $x \in C_\alpha \;\Rightarrow\; x \in B_\alpha$ y que $x \in C_{\alpha_3} \subset C_{\alpha_1} \cap C_{\alpha_2} \Rightarrow x \in C_{\alpha_3} \cap A \subset (C_{\alpha_1} \cap A) \cap (C_{\alpha_2} \cap A)$. ∎

Ejemplo: Sea $A = [0,2] \cup [3,5)$. Los conjuntos $\mathcal{U}_1 = (1,2] \cup [3,4)$, $\mathcal{U}_2 = [0,1) \cup (1'5,2)$ y $\mathcal{U}_3 = [3,5)$ son abiertos en la topología heredada de la usual en $\mathbb{R}$ porque

$$\mathcal{U}_1 = (1,4) \cap A, \qquad \mathcal{U}_2 = \big((-1,1) \cup (1'5,2)\big) \cap A, \qquad \mathcal{U}_3 = (2'5,5) \cap A.$$

Sin embargo $F = [4,5)$ no es abierto en la topología relativa porque, si lo fuera, existiría un elemento de la base $(a,b) \cap A$ tal que $4 \in (a,b) \cap A \subset F$, y esto es imposible. Es fácil ver que F es cerrado porque $F = [4,6] \cap A$.

Notación: Para simplificar (o liar) normalmente también se llama *topología usual* en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ a la heredada de la usual en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: La topología usual (en el sentido recién introducido) en el conjunto $A = \{1/n \,:\, n \geq 2\}$ coincide con la discreta. Para comprobarlo basta ver que cada punto de A es abierto, lo cual se reduce a escribir $\{1/n\} = \big(1/(n+1), 1/(n-1)\big) \cap A$. Pero si tomamos $B = A \cup \{0\}$, la topología relativa en B ya no es la discreta, porque es imposible escribir $\{0\} = \mathcal{U} \cap B$ con $\mathcal{U}$ abierto de la usual en $\mathbb{R}$, ya que si fuera así, tomando (a,b) con $0 \in (a,b) \subset \mathcal{U}$ se tendría $\{0\} = (a,b) \cap B$, lo cual no es posible (¿por qué?).

Ejemplo: La topología inducida en $A = \{-1/n \,:\, n \geq 2\} \cup \{0\}$ por la topología de límite inferior es la discreta, ya que

$$\{-1/n\} = \big[-1/(n-1), -1/(n+1)\big) \cap A, \qquad \{0\} = [0,1) \cap A.$$

Sin embargo la usual no sería la discreta por la misma razón que en el ejemplo anterior. Con la usual en A, $\mathcal{U} = \{-1/n \,:\, n \geq 100\} \cup \{0\}$ es abierto porque $\mathcal{U} = (-1/99, 1) \cap A$ pero $C = \{-1/n \,:\, n \text{ es par} \geq 2\} \cup \{0\}$ no es abierto porque cualquier intervalo (a,b) conteniendo al cero contiene infinitos valores $-1/n$ con n impar.

Hemos visto que los intervalos abiertos, $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\ :\ a<x<b\}$ generan una topología (la usual). Una idea para crear nuevas topologías es cambiar el significado de "$<$". Recordemos la definición relevante.

Definición: Se dice que "$\le$" es una <u>relación de orden lineal</u> en un conjunto X si para todo $a,b,c\in X$ se cumple

$$1)\ a\le a, \qquad 2)\ a\le b,\ b\le a\Rightarrow a=b, \qquad 3)\ a\le b,\ b\le c\ \Rightarrow a\le c$$

y además dados $a,b\in X$ siempre se cumple exactamente una de las relaciones $a<b$, $b>a$. $b=a$.

<u>Notación:</u> Aquí hemos usado "$a<b$" como abreviatura de "$a\le b,\ a\ne b$". Los "intervalos" se denotan como en $\mathbb{R}$

$$(a,b)=\{x\in X\ :\ a<x<b\}, \qquad [a,b]=\{x\in X\ :\ a\le x\le b\}, \qquad \text{etc.}$$

y además a veces se fuerza un poco la notación escribiendo

$$(a,+\infty)=\{x\in X\ :\ x>a\}, \qquad (-\infty,b]=\{x\in X\ :\ x\le b\}, \qquad \text{etc.}$$

<u>Ejemplo</u>: Si en el conjunto $X=\{\spadesuit,\clubsuit,\diamondsuit,\heartsuit\}$ definimos la relación de orden lineal $\spadesuit\le\clubsuit\le\diamondsuit\le\heartsuit$, entonces

$$(\spadesuit,\diamondsuit)=\{\clubsuit\}, \qquad [\clubsuit,\heartsuit)=\{\clubsuit,\diamondsuit\}, \qquad [\clubsuit,\spadesuit]=\emptyset.$$

Definición: Sea X un conjunto con una relación de orden lineal. Se llama <u>topología del orden</u> a la generada por los intervalos abiertos (a,b) con $a,b\in X$ y por $[m,b)$ y/o $(a,M]$ si X tuviera un elemento mínimo, m, y/o un elemento máximo, M.

<u>Observación:</u> La demostración de que la base de la topología del orden es realmente una base es tan sencilla como en el caso de la topología usual.

El primero en considerar separadamente estos *espacios ordenados* fue uno de los axiomatizadores de la Topología Algebraica, S. Eilenberg, quien según un rumor no confirmado clasificaba a los matemáticos en tres grupos: a los que les gusta la música, a los que les gusta subir montañas y a los que les gusta beber vino.

<u>Ejemplo</u>: En el ejemplo anterior $m=\spadesuit$, $M=\heartsuit$ y la topología del orden es la discreta, ya que todo elemento de X es abierto, de hecho es un elemento de la base:

$$\{\spadesuit\}=[\spadesuit,\clubsuit), \qquad \{\clubsuit\}=(\spadesuit,\diamondsuit), \qquad \{\diamondsuit\}=(\clubsuit,\heartsuit), \qquad \{\heartsuit\}=(\diamondsuit,\heartsuit].$$

En general, en cualquier conjunto finito la topología del orden es la discreta (¿por qué?).

Parece irrelevante (y lo es) insistir en que en la definición anterior $a,b\in X$, pero la práctica muestra que al principio hay muchas confusiones al pensar que X está contenido dentro de un conjunto mayor.

<u>Ejemplo (importante)</u>: La topología del orden en $X=(-2,0)\cup[1,3)$ no coincide con (la inducida por) la usual.

Nótese en primer lugar que X <u>no</u> tiene ni mínimo ni máximo ya que $-2,3\notin X$. La base de la topología del orden es $\mathcal{B}=\{(a,b)\ :\ a,b\in X\}$. Por ejemplo

$$(-1,2)=\{-1<x<2\ :\ x\in X\}=(-1,0)\cup[1,2).$$

Pero $[1,2)$ no es un elemento de la base. No se puede decir que es $(0,2)$ porque $0 \notin X$. En definitiva sólo se consideran intervalos que tengan extremos en X. De hecho $[1,2)$ no es un abierto en la topología del orden porque no se pueden encontrar $a, b \in X$ tales que

$$1 \in \{a < x < b \,:\, x \in X\} \subset [1,2).$$

Sin embargo $[1,2) = (0,2) \cap X$, de modo que sí es abierto en la topología inducida por la usual.

Un ejemplo interesante de orden viene sugerido por la forma en que buscamos en el diccionario. Primero necesitamos una palabra que desconozcamos (a no ser que tengamos diez años y busquemos guarrerías), digamos "*fundíbulo*", vamos a la letra "*f*", después buscamos "*fu*" pero todavía hay muchas palabras con este empiece. Con "*fundibul...*" sólo encontramos dos: "*fundibulario*" y "*fundíbulo*", como la "*a*" va antes que la "*o*" en el alfabeto, aparecerán en el orden aquí escrito.

> *De pronto me vuelven a la memoria los nombres de los últimos autores que ha consultado: Lambert, Langlois, Larbalétrier, Lastev, Lavergne. Es una iluminación; he comprendido el método del Autodidacta: se instruye por orden alfabético.*
>
> [...] *Un día, hace siete años (me ha dicho que estudia desde hace siete años), entró con gran pompa en esta sala.* [...] *Hoy está en la L. K después de J, L después de K. Pasó brutalmente del estudio de los coleópteros al de la teoría de los cuanta,* [...]

Este proceso de ordenar palabras comparando letras hasta encontrar una diferente y en ese caso tomar el orden natural del alfabeto se puede hacer con números en lugar de letras induciendo el llamado orden lexicográfico en $\mathbb{R}^n$. Si $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ se define recursivamente de la forma siguiente

$$\text{En } \mathbb{R}^2, \qquad \vec{x} \le \vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < y_1 \\ \quad \text{ó} \\ x_1 = y_1,\ x_2 \le y_2. \end{cases}$$

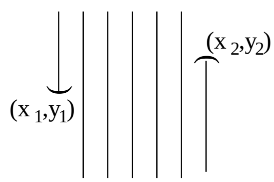
$$\text{En } \mathbb{R}^n, \qquad \vec{x} \le \vec{y} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, \dots, x_{n-1}) < (y_1, \dots, y_{n-1}) \\ \quad \text{ó} \\ \quad x_i = y_i,\ i = 1, \dots, n-1, \qquad x_n \le y_n. \end{cases}$$

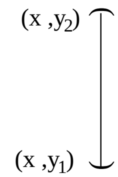
Es fácil comprobar que el orden lexicográfico define realmente una relación de orden lineal.

Observación: Lo equívoco de la notación (a, b) llega ahora a su culminación. Nótese que con el orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ la notación $\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big)$ significa los puntos que están entre el punto (x_1, y_1) y el punto (x_2, y_2), ambos sin incluir. O sea, que el primer y el último paréntesis indican *intervalo* y los otros *punto*, sin embargo pensándolo un poco no puede haber confusión.

Ejemplo: Según la definición, $\mathcal{B} = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \,:\, x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}\}$ es una base para la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$. Veamos que $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\big((x, y_1), (x, y_2)\big) \,:\, x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}\}$ también lo es.

Como $\mathcal{B} \supset \widetilde{\mathcal{B}}$ la topología generada por $\widetilde{\mathcal{B}}$ es menos fina que la del orden lexicográfico. Según la proposición para comparar topologías, para probar la igualdad sólo hay que comprobar que dentro de cada elemento de $\mathcal{B}$ cabe uno de $\widetilde{\mathcal{B}}$ conteniendo a un punto dado; y esto es obvio sin más que hacer un dibujo.





Intervalo $\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big)$ Intervalo $\big((x, y_1), (x, y_2)\big)$

La definición del orden lexicográfico no es exclusiva de $\mathbb{R}^n$ o de las palabras de una lengua, basta que tengamos que tengamos cierta cantidad de componentes (letras) y alguna forma de compararlas.

<u>Ejemplo</u>: Sea $X = [0,1] \times [0,1]$. La topología del orden lexicográfico en X no coincide con la topología inducida en X por la del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$.

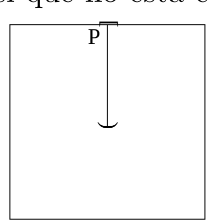
(Antes de seguir conviene leerlo de nuevo hasta conseguir no bizquear). Yendo a las definiciones tenemos que la primera topología de la que nos hablan es la generada por

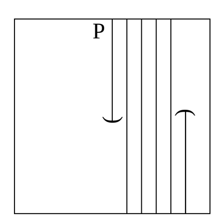
$$\mathcal{B}_{lex} = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \,:\, (x_1, y_1) \in X,\ (x_2, y_2) \in X\}$$

y la segunda es la generada por

$$\mathcal{B}_{ind} = \{\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \cap X \,:\, (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2,\ (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Basta encontrar un punto $P \in X$ y un elemento de $\mathcal{B}_{ind}$ que lo contenga de manera que no quepa dentro ningún elemento de $\mathcal{B}_{lex}$ conteniendo a P (¿se entiende?). Tomemos por ejemplo $P = (1/2, 1)$ y $B = \big((1/2, 1/2), (1/2, 2)\big) \cap X$. Se tiene que $B \in \mathcal{B}_{ind}$, $B = \big((1/2, 1/2), P\big]$ y sin embargo cualquier $\widetilde{B} = \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) \in \mathcal{B}_{lex}$ conteniendo a P debe tener $x_2 > 1/2$, así que no está contenido en B.





$B = \big((1/2, 1/2), (1/2, 2)\big) \cap X$ $P \in \big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big)$

Dada una topología sobre X y otra sobre Y hay una forma canónica de crear una topología sobre el producto cartesiano $X \times Y$.

Definición: Sean $\mathcal{B}_X$ y $\mathcal{B}_Y$ bases de topologías sobre X e Y, respectivamente. Se llama <u>topología producto</u> a la topología sobre $X \times Y$ generada por

$$\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y = \{B_X \times B_Y \,:\, B_X \in \mathcal{B}_X,\ B_Y \in \mathcal{B}_Y\}.$$

Nótese que si nos dieran topologías en X e Y pero no nos dijeran cuáles son sus bases, podríamos tomar todos los abiertos, porque el conjunto de todos los abiertos de cada una de ellas cumple obviamente las propiedades de base. Una duda natural es que si escogiéramos bases diferentes, en principio, podríamos obtener definiciones diferentes de la topología producto. Veamos que no es así.

Lema 2.5: *Si $\mathcal{B}_X$ y $\widetilde{\mathcal{B}}_X$ son bases de una misma topología en X y $\mathcal{B}_Y$ y $\widetilde{\mathcal{B}}_Y$ son bases de una misma topología en Y, entonces $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ genera la misma topología en $X \times Y$ que $\widetilde{\mathcal{B}}_X \times \widetilde{\mathcal{B}}_Y$.*

Dem.: Dado $x \in X$, como cualquier $\widetilde{B}_X \in \widetilde{\mathcal{B}}_X$ debe ser abierto en la topología generada por $\mathcal{B}_X$ (porque $\mathcal{B}_X$ y $\widetilde{\mathcal{B}}_X$ generan la misma topología) existe $B_X \in \mathcal{B}_X$ tal que $x \in B_X \subset \widetilde{\mathcal{B}}_X$. De la misma forma dados $y \in \widetilde{B}_Y \subset \widetilde{\mathcal{B}}_Y$ existe $B_Y \in \mathcal{B}_Y$ tal que $y \in B_Y \subset \widetilde{B}_Y$. Por tanto, para cada $(x, y) \in X \times Y$ y cada $\widetilde{B}_X(x) \times \widetilde{B}_Y(y) \in \widetilde{\mathcal{B}}_X \times \widetilde{\mathcal{B}}_Y$

$$\exists B_X(x) \times B_Y(y) \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y \ : \ (x, y) \in B_X(x) \times B_Y(y) \subset \widetilde{B}_X(x) \times \widetilde{B}_Y(y).$$

Así pues, la topología generada por $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ es más fina que la generada por $\widetilde{\mathcal{B}}_X \times \widetilde{\mathcal{B}}_Y$. Intercambiando tildes por no tildes en el argumento anterior, se tiene la inclusión contraria. ■

Observación: Igual que se define la topología producto en $X \times Y$, se puede definir en $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. El caso de productos infinitos es importante en ciertos contextos, pero requiere una definición especial muy diferente de la que todos pensaríamos, de otro modo no comparte algunas buenas propiedades del caso finito, concretamente la continuidad de las proyecciones definidas a continuación. Como curiosidad, diremos que si (X, d) es un espacio métrico, entonces el producto infinito (numerable) $X \times X \times X \times \ldots$ puede considerarse como el espacio de todas las sucesiones en X y la topología producto coincide con la inducida por la distancia

$$D\big(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d(x_n, y_n)}{1 + d(x_n, y_n)}.$$

Definición: A la función

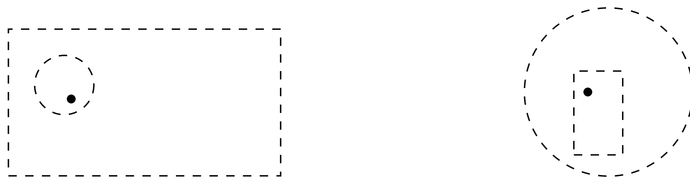
$$\pi_j \ : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \longrightarrow X_j$$
$$(x_1, \ x_2, \ \ldots\ldots, \ x_n) \mapsto x_j$$

con $1 \le j \le n$, se le llama proyección sobre la j-ésima coordenada.

Observación: Para que la definición anterior tenga sentido hay que suponer que los X_j son no vacíos y así lo haremos implícitamente en los resultados que involucren π_j.

Ejemplo: Considerando $\mathbb{R}$ con la topología usual, la topología producto en $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ coincide con la usual en $\mathbb{R}^n$ (en símbolos $usual \times \ldots \times usual = usual$).

Para demostrarlo hay que comparar la base usual de $\mathbb{R}^n$, que está formada por las bolas abiertas, con la base de la topología producto que está formada por productos de intervalos (= rectángulos n-dimensionales). De nuevo es sencillo ver que en $\mathbb{R}^n$, alrededor de cada punto, se pueden meter rectángulos dentro de bolas y viceversa. El caso $n = 2$ responde al siguiente dibujo



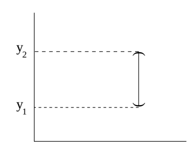
Ejemplo: La topología del orden lexicográfico en $X = [0,1] \times [0,1]$ no coincide con la producto de la discreta en $[0,1]$ por (la inducida por) la usual en $[0,1]$.

El conjunto $\{1/2\}$ es un abierto de la discreta en $[0,1]$ y $(1/2,1]$ lo es en la usual en $[0,1]$; así que $\mathcal{U} = \{1/2\} \times (1/2,1]$ es abierto en la producto, pero como ya vimos en un ejemplo anterior, $\mathcal{U}$ no es abierto en la topología del orden lexicográfico porque no *cabe* ningún abierto de la base dentro de él conteniendo al punto $P = (1/2,1)$.

Ejemplo: La topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ coincide con la producto de la discreta en $\mathbb{R}$ por la usual en $\mathbb{R}$.

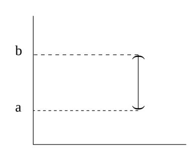
Sabíamos que una base de la topología del orden lexicográfico en $\mathbb{R}^2$ es

$$\mathcal{B}_{lex} = \big\{ \big((x,y_1),(x,y_2)\big) \ : \ x, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \big\}.$$



Por otra parte, las bases de la discreta y de la usual en $\mathbb{R}$ son $\mathcal{B}_{dis} = \big\{ \{x\} \ : \ x \in \mathbb{R} \big\}$ y $\mathcal{B}_{usu} = \big\{ (a,b) \ : \ a, b \in \mathbb{R} \big\}$, con lo cual una base de la producto es

$$\mathcal{B}_{lex} = \big\{ \{x\} \times (a,b) \ : \ x, a, b \in \mathbb{R} \big\}.$$



Por tanto ambas coinciden. Aquí la confusión de la notación se vuelve un galimatías y es mejor fijarse en los dibujos.

La última manera que veremos de construir topologías es la más complicada teóricamente, porque involucra el conjunto cociente. Afortunadamente (¿?) no se insistirá mucho en ella este curso.

Recuérdese que si en un conjunto X tenemos una relación de equivalencia, $\sim$, se llama *conjunto cociente*, $X/\sim$, al conjuto de clases de equivalencia.

Definición: Sea X un espacio topológico, $\sim$ una relación de equivalencia definida en X y $p : X \longrightarrow X/\sim$ la función que asigna a cada elemento de X la clase de equivalencia a la que pertenece. Se llama topología cociente sobre $X/\sim$ a la topología en la que un conjunto $\mathcal{U} \subset X/\sim$ es abierto si y sólo si $p^{-1}(\mathcal{U})$ es abierto en X.

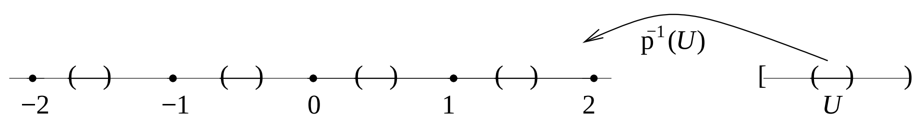
Intuitivamente, el conjunto cociente es aquel que agrupa elementos similares. Así que lo que hace p es *pegar* esos puntos (a veces se la llama *proyección*), y la topología cociente nos dice que algo será abierto si al *despegarlo* lo es en el espacio topológico inicial. Esto es incomprensible pero ayudará a desentrañar los razonamientos del siguiente ejemplo. Otra manera de entender la topología cociente es como la más fina sobre $X/\sim$ tal que p es continua. (Ejercicio para después de leer el ejemplo y dormir un poco: Demostrar que esta propiedad caracteriza a la topología cociente).

Ejemplo: Se considera $\mathbb{R}$ con la topología usual y la relación de equivalencia en $\mathbb{R}$ dada por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Las clases de equivalencia son $\{x\} + \mathbb{Z}$ (con el significado obvio). En cada clase de equivalencia habrá exactamente un número $0 \le x < 1$, escogiéndolo como representante se tiene que $\mathbb{R}/\sim$ se puede identificar con $[0, 1)$. Es decir

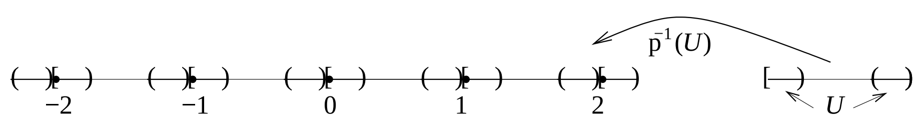
$$p : X \longrightarrow [0, 1) \qquad \text{con } p(x) = \operatorname{Frac}(x)$$

donde $\operatorname{Frac}(x)$ significa la parte fraccionaria.

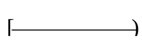
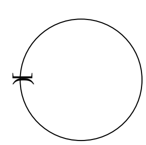
De acuerdo con la definición, si $\mathcal{U} \subset (0, 1)$, $\mathcal{U}$ es abierto en la topología cociente $\Leftrightarrow$ $p^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} + \mathbb{Z}$ es abierto en la usual $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}$ es abierto en la usual (¿por qué? Ver el dibujo).



Por tanto la única diferencia con respecto a la topología usual, si la hubiera, tiene que estar en los abiertos que contienen a $x = 0$. Considerando $\mathcal{U} = [0, b) \cup (a, 1)$, $0 < b < a < 1$ se tiene que es abierto en la topología cociente ya que $p^{-1}(\mathcal{U}) = (a - 1, b) + \mathbb{Z}$ es abierto en la usual.



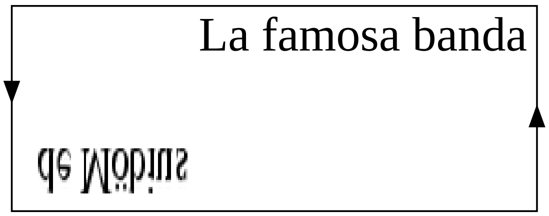
Es decir, que los abiertos pueden *salir* por cero y continuar por detras del uno. Sin embargo $[0, b)$ no es abierto en la topología cociente. A todos los efectos es como si el cero y el uno estuvieran pegados.

$\mathbb{R}/\sim$ "="  con la top. cociente"="  "=" $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ con la top. usual

En definitiva, $\sim$ pega todos los puntos de $\mathbb{R}$ que se diferencian en enteros, y da lugar a una circunferencia.

¿Para qué sirven estas cosas tan raras? Es siempre peligroso hacerse esta pregunta en Matemáticas y no se puede forzar a nadie a contestar a no ser que tenga que pedir una beca de investigación; por tanto nos contentaremos con unos cuantos dibujos y alguna idea geométrica.

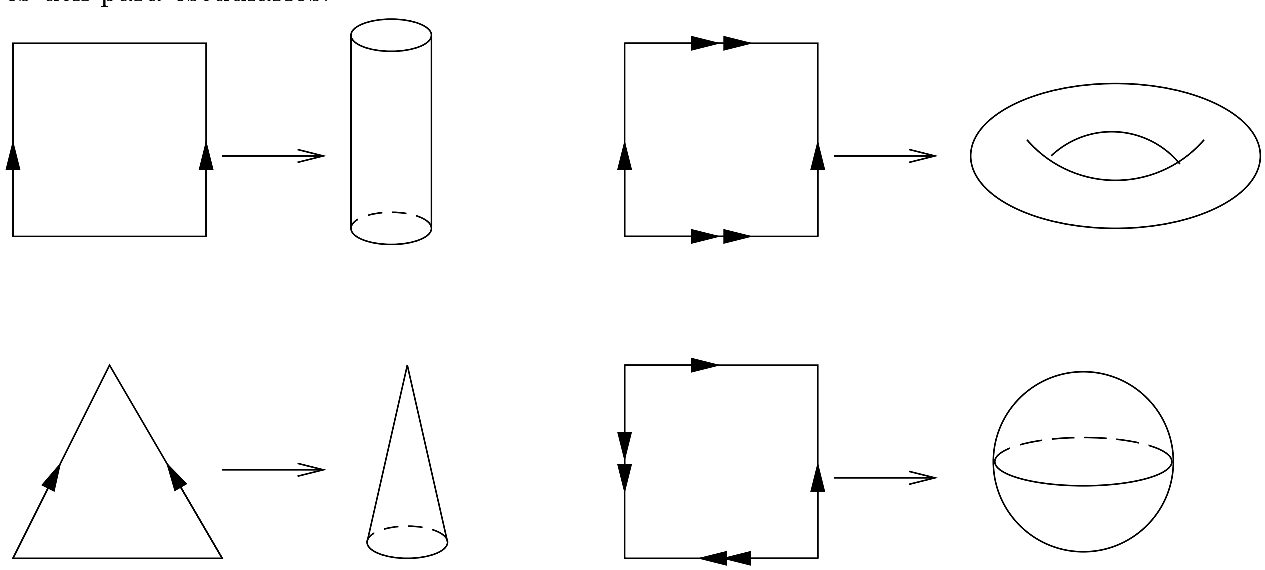
Para mayor comodidad, en un dibujo bidimensional se indica una relación de equivalencia que relaciona dos segmentos poniendo flechas o dobles flechas. Por ejemplo



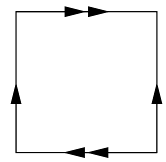
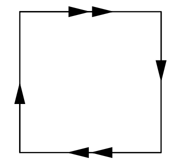
indica que en el rectángulo anterior cada punto del borde derecho está relacionado con el simétrico del lado izquierdo, $(x, y) \sim (-x, -y)$ si $(x, y) \in$ borde derecho. Como en el ejemplo anterior, con la topología cociente los abiertos que salen por la derecha apareceran dados la vuelta por la izquierda. Es como si pegásemos el rectángulo por la flechas para obtener una banda retorcida, llamada *banda de Möbius*, introducida por A.F. Möbius en 1850 e independientemente por J.B. Listing en su “Panorama de los complejos espaciales” (buen título para una secuela de “An overview to kill” y “Moonraker”).

Entre las propiedades más conocidas de la banda de Möbius están que es unilátera (tiene una sola cara) y que al cortarla por su ecuador no se separa en dos.

En general tenemos una manera *bidimensional* de ver objetos que viven en $\mathbb{R}^3$, lo cual es útil para estudiarlos.



Un teorema muy importante dice que todas las superficies “cerradas” se obtienen con relaciones de equivalencia en los lados de un polígono. Aunque parezca mentira existen superficies cerradas que no podemos dibujar directamente en $\mathbb{R}^3$ y sólo las vemos bien con estos dibujos. Los ejemplos más simples son

Botella de Klein =  Plano proyectivo = 

La segunda superficie es bien conocida, aunque no tanto con esta representación. La primera la introdujo F. Klein en 1882 y es una botella muy rara porque es unilátera y, por tanto, todo lo que está dentro de ella también está fuera. Como Brasil es un país muy grande y lo de Klein suena a poco, allí la llaman garrafa de Klein.

Realmente es notable que la complicación geométrica de estas superficies admita una representación plana, finita y sencilla, mientras que elude acomodarse al espacioso, infinito y confortable mundo tridimensional.

> *¡Qué 'natural' parece la ciudad a pesar de todas sus geometrías, qué aplastada por la noche! Es tan... evidente, desde aquí: ¿es posible que yo sea el único que lo ve? ¿No hay en ninguna parte otra Casandra, en la cima de una colina, mirando a sus pies una ciudad sumergida en el fondo de la naturaleza?*

Quien se atreva a dudar que estos objetos no se pueden construir (sin autointersecciones) en $\mathbb{R}^3$, que coja un trapo cuadrado e intente coser los lados correspondientes identificando las direcciones de las flechas. Y el que no tenga ganas que vaya a la biblioteca y mire la portada y la contraportada del libro de M. Spivak, "*A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*" Vol. II Publish or Perish 1970.

3. Espacios Topológicos II
(Conjuntos asociados, continuidad y propiedades)

La frontera cierra el interior

Dado un subconjunto A de un espacio topológico X, hay conjuntos naturales *asociados* a A que están recogidos en las definiciones siguientes.

DEFINICIÓN: Se llama interior de A, y se denota con $\text{Int}(A)$, a la unión de todos los abiertos contenidos en A.

DEFINICIÓN: Se llama cierre o clausura o adherencia de A, y se denota con $\overline{A}$, a la intersección de todos los cerrados que contienen a A.

DEFINICIÓN: Se llama frontera de A, y se denota con $\text{Fr}(A)$, al conjunto de puntos que pertenecen simultáneamente al cierre de A y de su complementario. Esto es, $\text{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{(X-A)}$.

DEFINICIÓN: Se llama conjunto de puntos límite o de acumulación (o también conjunto derivado) de A, y se denota con A', al conjunto de puntos tales que cualquier entorno suyo interseca a A en algún punto distinto de él mismo. Esto es

$$A' = \{x \in X \ : \ \forall \mathcal{U} \text{ abierto}, \ x \in \mathcal{U} \Rightarrow (\mathcal{U} - \{x\}) \cap A \neq \emptyset\}.$$

A veces se define también el *exterior* de A como $X - \overline{A}$, pero no nos referiremos a él en este curso.

Seguramente es difícil imaginar, incluso para alguien que ha llegado hasta este capítulo, *todos* los cerrados que contienen a A o *todos* los abiertos contenidos en A; por ello veremos primero una caracterización más práctica del interior y el cierre.

Proposición 3.1: *Sea $\mathcal{B}$ una base de un espacio topológico X y sea $A \subset X$. Entonces*

$$1)\ x \in \text{Int}(A) \ \Leftrightarrow \ \exists B \in \mathcal{B} \ : \ x \in B \subset A$$

$$2)\ x \in \overline{A} \ \Leftrightarrow \ \forall B \in \mathcal{B}, \ \textit{con } x \in B, \ B \cap A \neq \emptyset.$$

Dem.: 1) Si $x \in \text{Int}(A)$, como $\text{Int}(A)$ es abierto, existe $B(x) \in \mathcal{B}$ tal que $B(x) \subset \text{Int}(A) \subset A$. Recíprocamente, si $B(x) \subset A$ con $B(x) \in \mathcal{B}$ entonces, como $B(x)$ es abierto, $B(x) \subset \text{Int}(A)$.

2) Vamos a probar $x \notin \overline{A} \Leftrightarrow \exists B(x) \in \mathcal{B} \ : \ B \cap A = \emptyset$. Si $x \notin \overline{A}$, existe un cerrado $F \supset A$ tal que $x \notin F$, por consiguiente x pertenece al abierto $X - F$ y debe existir $B(x)$ en la base con $B(x) \subset X - F \subset X - A$ de donde se deduce $B(x) \cap A = \emptyset$. Recíprocamente, si $B(x) \in \mathcal{B}$ con $B(x) \cap A = \emptyset$, tomando $F = X - B(x)$ se tienen $F \supset A$ y $x \notin F$, por tanto $x \notin \overline{A}$. ■

Ejemplo: Calculemos $\text{Int}(A)$, $\overline{A}$, $\text{Fr}(A)$ y A' donde $A = (1,2] \subset \mathbb{R}$ con la topología usual en $\mathbb{R}$.

Si $x \in (1,2)$, como $x \in (1,2) \subset A$, se tiene $x \in \text{Int}(A)$. Por otra parte, no existen a, b tales que $2 \in (a,b) \subset A$, así pues $2 \notin \text{Int}(A)$ y se tiene $\text{Int}(A) = (1,2)$.

Si $x > 2$ entonces $(2,x)\cap A=\emptyset$ y $x\notin \overline{A}$. Lo mismo ocurre para $x<1$. Además si $x\in[1,2]$ cualquier intervalo (a,b) conteniendo a x corta a A en infinitos puntos, así que $\overline{A}=A'=[1,2]$. Un argumento similar prueba que $\overline{X-A}=(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$, en consecuencia $\mathrm{Fr}(A)=\{1\}\cup\{2\}$.

<u>Ejemplo</u>: Con la topología usual en $\mathbb{R}$ se tiene que $\mathrm{Int}(\mathbb{Q})=\emptyset$ porque no existe $a<b$ con $(a,b)\subset\mathbb{Q}$ ya que cualquier intervalo contiene infinitos puntos racionales e irracionales, a su vez esto implica $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}'=\mathbb{R}$. Finalmente, como $\overline{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ se deduce $\mathrm{Fr}(\mathbb{Q})=\mathbb{R}$.

La idea de interior y cierre es fácilmente comprensible: el interior es el abierto *más grande* dentro del conjunto y el el cierre es el cerrado *más pequeño* que contiene al conjunto. Obviamente, $A=\mathrm{Int}(A)\Leftrightarrow A$ es abierto y $A=\overline{A}\Leftrightarrow A$ es cerrado. (Ejercicio: reemplazar "obviamente" por una demostración). También la definición de frontera es intuitiva, es algo así como los puntos "adyacentes" al conjunto y a su complementario. Pero seguramente los ejemplos anteriores no dan una idea clara de lo que son los puntos límite. Al menos en el caso métrico, es como el conjunto de posibles límites (de ahí el nombre) de sucesiones no constantes contenidas en el conjunto. A este respecto merece la pena recordar la definición dada por G. Cantor allá por 1883 para $\mathbb{R}$ con la usual: "Por punto límite de un conjunto A quiero decir un punto de la recta tal que en cualquier entorno suyo se encuentran infinitos puntos de A, entendiendo que puede ocurrir que el punto (límite) mismo también pertenezca al conjunto".

<u>Ejemplo</u>: Si $A=[1,2]\cup\{3\}\subset\mathbb{R}$ (con la topología usual) entonces $3\notin A'$ porque $\big((2'5,3'5)-\{3\}\big)\cap A=\emptyset$. De hecho es fácil comprobar como antes (ejercicio) que $A'=[1,2]$ mientras que $\overline{A}=A$ porque A es cerrado.

A los elementos de $\overline{A}-A'$ se les llama <u>puntos aislados</u>. Como en el resto de conjuntos asociados antes introducidos, el nombre no siempre corresponde a nuestra intuición geométrica habitual. Por ejemplo, en $\mathbb{R}$ con la topología discreta, 1 es un punto aislado de $A=[0,2]$, pero no lo es de $A=\{0,1,2\}$ si usamos la topología trivial. Es fácil probar en general que

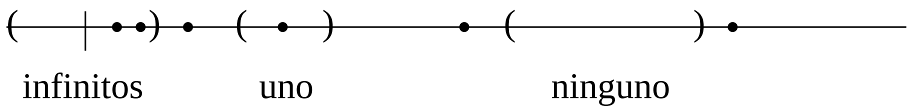
$$x\in\overline{A}-A' \;\Leftrightarrow\; \exists\,\mathcal{U}(x)\,:\,\mathcal{U}(x)\cap A=\{x\}.$$

Por tanto, cuando usemos topologías distintas de la usual, más que imaginar los elementos de $\overline{A}-A'$ como *aislados* con nuestra intuición euclídea, debemos pensarlos como no *relacionados* con otros puntos de A mediante entornos de la topología.

> –[...] *No sabía qué hacer, languidecía. Donde veía hombres reunidos, allí me metía. Hasta he llegado –agrega sonriendo– a seguir el cortejo fúnebre de un desconocido. Un día, desesperado, arrojé al fuego la colección de sellos... Pero encontré mi camino.*[...]
> *Se yergue, infla los carrillos.*
> *–Ya no estoy solo, señor. Nunca.*
> *–Ah, ¿conoce usted a mucha gente? –digo.*
> *Sonríe y en seguida me doy cuenta de mi ingenuidad.*
> *–Quiero decir que ya no me 'siento' solo. Pero naturalmente, señor, no es necesario que esté con alguien.*

<u>Ejemplo</u>: Sea $A=\{1/n\,:\,n\in\mathbb{Z}^+\}\subset\mathbb{R}$ con la topología usual. Entonces $\mathrm{Int}(A)=\emptyset$ (A no contiene ningún intervalo), $\overline{A}=A\cup\{0\}$ y $A'=\{0\}$. Las dos últimas igualdades

responden a la misma idea: los únicos puntos, x, tales que $(x-\epsilon, x+\epsilon)\cap A \neq \emptyset$, son $x=0$ y $x=1/n$ por pequeño que sea ϵ. Para $x=0$ la intersección cuenta con más de un punto (de hecho infinitos) y para $x=1/n$ no, por ello $A'=\{0\}$ y todos los puntos de A son puntos aislados.



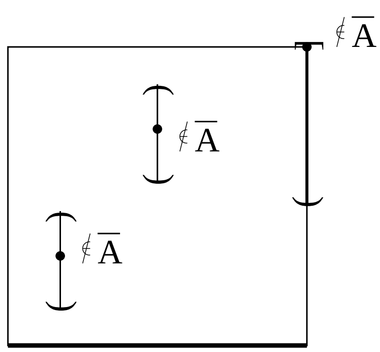
Si la topología que usamos es muy extraña, es muy probable que $\text{Int}(A)$, $\overline{A}$, $\text{Fr}(A)$ y A' sean conjuntos difíciles de intuir.

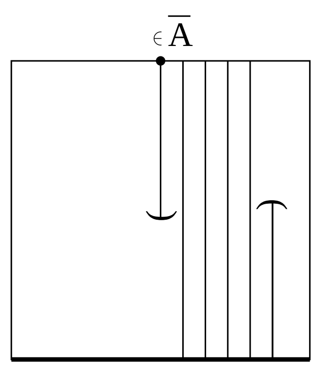
<u>Ejemplo</u>: Considerando $\mathbb{R}$ con la topología cofinita, vamos a hallar $\text{Int}(A)$, $\overline{A}$, A' y $\text{Fr}(A)$ para $A=[0,1]$. Sabíamos que todos los abiertos (excepto el vacío y el total) son de la forma $\mathcal{U}=\mathbb{R}-\bigcup_{n=1}^{N}\{x_n\}$, por tanto nunca se cumple $\mathcal{U}\subset A$ y siempre se cumple que $\mathcal{U}\cap A$ contiene infinitos puntos, y lo mismo sucede con $(\mathbb{R}-A)\cap\mathcal{U}$, así pues

$$\text{Int}(A)=\emptyset, \qquad \overline{A}=A'=\text{Fr}(A)=\mathbb{R}.$$

<u>Ejemplo</u>: Si consideramos $X=[0,1]\times[0,1]$ con la topología del orden lexicográfico, entonces la clausura de la línea horizontal $A=\{(x,y)\in X\ :\ 0\le x\le 1,\ y=0\}$ es $\overline{A}=A\cup\{(x,y)\in X\ :\ 0\le x<1,\ y=1\}$. Veámoslo con detalle:

Si un punto no está en el borde superior ni en el borde inferior, no pertenece a $\overline{A}$ ya que existe algún elemento B de la base de la topología del orden lexicográfico (un intervalo vertical) conteniendo al punto y con $A\cap B=\emptyset$. También es claro que $(1,1)\notin\overline{A}$, para verlo basta tomar $B=\big((1,0'5),(1,1)\big]$ que es de la base. Finalmente, los otros puntos del borde superior están siempre contenidos en elementos de la base que necesariamente cortan a A y por tanto pertenecen a $\overline{A}$.





Como es fácil sospechar, los conjuntos $\text{Int}(A)$, $\overline{A}$, A' y $\text{Fr}(A)$ no son del todo independientes. Dos de las relaciones más sencillas se incluyen en el siguiente resultado. La segunda da título a esta sección.

Proposición 3.2: *Sea X un espacio topológico y A uno de sus subconjuntos, entonces*

$$1)\ \overline{A}=A\cup A', \qquad 2)\ \overline{A}=\text{Int}(A)\cup\text{Fr}(A).$$

Dem.: 1) La inclusión $\overline{A} \supset A \cup A'$ es obvia. Por otro lado, si $x \in \overline{A}$, para todo abierto $\mathcal{U}$ con $x \in \mathcal{U}$ se tiene $\mathcal{U} \cap A \neq \emptyset$ y si $x \notin A$ entonces $(\mathcal{U} - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ y $x \in A'$.

2) El segundo miembro se puede escribir como $\big(\text{Int}(A) \cup \overline{(X-A)}\big) \cap \overline{A}$, con lo que basta probar $\text{Int}(A) = X - \overline{(X-A)}$. Como $\overline{(X-A)}$ es cerrado, $x \in X - \overline{(X-A)}$ si y sólo si existe $\mathcal{U}(x) \subset X - (X-A) = A$, esto es, si y sólo si $x \in \text{Int}(A)$. ■

Ejemplo: Comprobar la segunda propiedad para el conjunto

$$A = \big\{ -\frac{1}{n} - 1 \, : \, n \in \mathbb{Z}^+ \big\} \cup [0,1) \cup \big\{ 2 + \frac{1}{n} \, : \, n \in \mathbb{Z}^+ \big\}$$

incluido en $\mathbb{R}$ con la topología de límite inferior.

Sólo repasaremos los puntos conflictivos mientras que los detalles se dejan como ejercicio por ser análogos a ejemplos anteriores.

Tomando el abierto de la base $B = [1, 1'5)$ se tiene $A \cap B = \emptyset$ así que $1 \notin \overline{A}$. De la misma forma $-1 \notin \overline{A}$. Sin embargo $2 \in \overline{A}$ porque $[2, 2+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. En definitiva, se obtiene $\overline{A} = A \cup \{2\}$. Como $[0,1)$ es abierto y en las otras partes del conjunto no "cabe" ningún abierto, $\text{Int}(A) = [0,1)$. Finalmente, se tiene $\overline{\mathbb{R} - A} = \mathbb{R} - [0,1)$ (nótese que cada punto de las sucesiones está "rodeado" por infinitos puntos que no pertenecen a ellas) y en consecuencia $\text{Fr}(A) = \big(A - [0,1)\big) \cup \{2\}$, y la relación se cumple.

Hay muchas "propiedades" que se cumplen en ejemplos sencillos de $\mathbb{R}^n$ pero que son falsas en general. Por ejemplo, $\text{Int}(A) \cup \text{Int}(B) = \text{Int}(A \cup B)$ o $\text{Int}\big(\text{Fr}(A)\big) = \emptyset$ parecen evidentes con unos cuantos dibujos en $\mathbb{R}^2$, pero no son ciertas. Como regla (por supuesto falsa), la dificultad en demostrar una cosa suele ser directamente proporcional a la cercanía del contraejemplo. Por ello, si nos cuesta mucho probar alguna de estas posibles identidades, antes y después de creernos ignorantes, tendríamos que buscar un contraejemplo que invalide el paso que no sabemos dar. Pues bien, anímese el lector a encontrar sendos contraejemplos que prueben la falsedad de las igualdades del comienzo del párrafo.

Recogemos aquí una de esas pocas propiedades que son universalmente ciertas.

Lema 3.3: *Sea X un espacio topológico. Para cualquier par de subconjuntos A_1, A_2, se cumple*

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}.$$

Dem.: Como $A_1 \cup A_2 \supset A_1, A_2$ se cumple $\overline{A_1 \cup A_2} \supset \overline{A_1}, \overline{A_2}$ y por tanto $\overline{A_1 \cup A_2} \supset \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$. Sólo resta demostrar que $x \notin \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \Rightarrow x \notin \overline{A_1 \cup A_2}$. Si $x \notin \overline{A_1}$ y $x \notin \overline{A_2}$, entonces $\mathcal{U}_1 = X - \overline{A_1}$ y $\mathcal{U}_2 = X - \overline{A_2}$ son dos abiertos conteniendo a x tales que $\mathcal{U}_1 \cap A_1 = \mathcal{U}_2 \cap A_2 = \emptyset$, por tanto $x \in \mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ y $\mathcal{V} \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$. Así pues $x \notin \overline{A_1 \cup A_2}$. ■

Es difícil reproducir el proceso dialéctico a seguir, antes descrito, frente a una propiedad que no sabemos si es cierta o no. Quizá ayude el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Estudiar si la propiedad

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$$

es o no cierta en general.

Primero tanteamos con algunos ejemplos; si tenemos suerte y hallamos un contraejemplo habremos terminado. Digamos que hemos probado en $\mathbb{R}$ con $A_n = \{n\}$, $A_n = (n, n+1)$ o $A_n = (-1/n, 1/n)$ para los que la propiedad funciona y no se nos ocurren más ejemplos.

Todo sugiere, por ahora, que es cierta y debemos buscar una demostración. Lo primero que a uno se le ocurre es copiar la anterior, con lo cual obtenemos inmediatamente de la primera parte

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n.$$

Pero la segunda parte no es válida porque $\mathcal{V}$ sería la intersección de infinitos abiertos y, por tanto, no necesariamente abierto.

Por consiguiente, tras la última observación, tratamos de fabricar un contraejemplo en que $\mathcal{V}$ no sea abierto. En $\mathbb{R}$ con la usual, si $x \notin \bigcup \overline{A}_n$ pero los A_n están cada vez "más cerca" de $x = 0$ entonces no existirá ningún $\mathcal{V}(x)$ abierto con $\mathcal{V}(x) \cap \bigcup A_n = \emptyset$. Tomemos, por ejemplo, $A_n = \{1/n\}$ y habremos conseguido el contraejemplo.

Naturalmente si tuviéramos que escribir esto en un libro daríamos el contraejemplo y suprimiríamos el proceso mental que nos ha llevado a considerarlo, en la línea de la afirmación de C. F. Gauss de que un arquitecto no deja los andamios al terminar el edificio, redarguyendo así al matemático que lo acusaba de borrar sus huellas como un zorro con su cola.

Aquí hemos tenido la guía de la demostración del lema pero ante una propiedad totalmente desconocida se pueden recorrer los vericuetos más dispares y disparatados. Se deja como ejercicio encontrar el error en las siguientes pruebas $\boxed{\text{falsas}}$ de la propiedad $\boxed{\text{falsa}}$ del ejemplo anterior.

a) Por inducción completa(mente mal): Definiendo

$$\text{Izq}(N) = \overline{\bigcup_{1\le n\le N} A_n}, \qquad \text{Der}(N) = \bigcup_{1\le n\le N} \overline{A}_n,$$

la igualdad $\text{Izq}(N) = \text{Der}(N)$ se cumple para $N = 2$ (por el lema) y si se cumple para N también se cumple para $N + 1$ porque el lema implica

$$\text{Izq}(N+1) = \text{Izq}(N) \cup \overline{A}_{N+1} = \text{Der}(N) \cup \overline{A}_{N+1} = \text{Der}(N+1).$$

Por inducción se deduce $\text{Izq}(\infty) = \text{Der}(\infty)$.

b) Por deducción a lo absurdo: Sabemos que $\overline{\bigcup A_n} \supset \bigcup \overline{A}_n$. Supongamos que existiera $x \in \overline{\bigcup A_n}$ tal que $x \notin \bigcup \overline{A}_n$. Por definición de cierre, para todo $\mathcal{U}(x)$ se tiene que cumplir

$\mathcal{U}(x) \cap \bigcup A_n \neq \emptyset$, por consiguiente debe existir algún A_{n_0} tal que $\mathcal{U}(x) \cap A_{n_0} \neq \emptyset$ y en consecuencia $x \in \overline{A}_{n_0} \subset \bigcup \overline{A}_n$, lo cual contradice nuestra hipótesis.

Recuérdese que tanto a) como b) son demostraciones $\boxed{\text{falsas}}$.

Para terminar esta sección, veremos que en espacios métricos $\overline{A}$ y A' están relacionados con los posibles límites de sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$.

Proposición 3.4: *Sea X un espacio métrico y A uno de sus subconjuntos, entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión de elementos de A, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, convergiendo a x. Además, se puede reemplazar $\overline{A}$ por A' si se impone que $x_n \neq x$.*

Dem.: $\Rightarrow$) Si $x \in \overline{A}$ entonces $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{Z}^+$. Tomando $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$ se tiene $x_n \to x$.

$\Leftarrow$) Si $x_n \to x$ entonces por la definición de convergencia, cualquier bola $B(x, \epsilon)$ contiene infinitos términos de la sucesión, y como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, se tiene $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$, lo que implica $x \in \overline{A}$.

La demostración de la segunda parte es similar reemplazando $B(x, \epsilon)$ por $B(x, \epsilon) - \{x\}$ (ejercicio). $\blacksquare$

Aplastar, encoger, estirar

Hace muchas, muchas páginas habíamos demostrado que la continuidad en espacios métricos se podía caracterizar diciendo que la imagen inversa de un abierto es un abierto y de este modo nos podíamos liberar de la tiranía ϵ-δ. En espacios topológicos generales, como no tenemos una distancia, no podemos ni siquiera enunciar la definición ϵ-δ, así que sólo nos queda una posibilidad.

Definición: Sean $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos. Dada $f : X \longrightarrow Y$ se dice que es continua si para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_Y$ se tiene que $f^{-1}(\mathcal{U}) \in \mathcal{T}_X$. Esto es, si la imagen inversa de un abierto es siempre un abierto.

Observación: Una vez más se recuerda que f^{-1} indica la imagen inversa conjuntista, $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$. No se requiere que la función sea inyectiva ni sobreyectiva.

Ya hemos visto que como las bases generan los abiertos, todo lo que funciona bien con ellas funciona bien siempre. La continuidad no es una excepción.

Proposición 3.5: *Sean $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $\mathcal{B}$ una base que genera $\mathcal{T}_Y$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua si y sólo si $B \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_X$.*

Dem.: Cada abierto $\mathcal{U} \in \mathcal{T}_Y$ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$ y

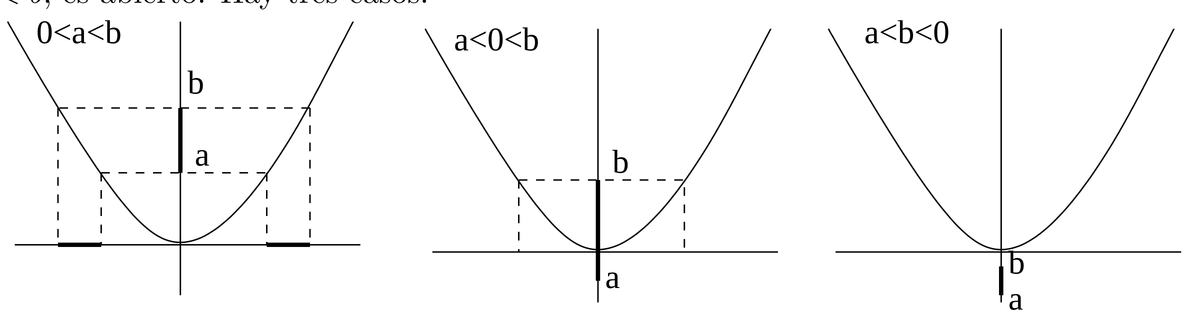
$$\mathcal{U} = \bigcup_\alpha B_\alpha \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(\mathcal{U}) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha).$$

Por consiguiente, si los $f^{-1}(B_\alpha)$ son abiertos, $f^{-1}(\mathcal{U})$ también lo es. ∎

Observación: Como la imagen inversa también funciona correctamente con respecto a las intersecciones, el resultado anterior sigue cumpliéndose exigiendo que $\mathcal{B}$ sea subbase en lugar de base.

Ejemplo: Vamos a demostrar la continuidad de $f(x) = x^2$ sin usar ϵ ni δ. Desde luego que suponemos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y la topología usual.

Según la proposición basta demostrar que $f^{-1}\big((a,b)\big) = \{x \in \mathbb{R} : a < f(x) < b\}$, con $a < b$, es abierto. Hay tres casos:



$f^{-1}\big((a,b)\big) = (-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b})$ $\quad$ $f^{-1}\big((a,b)\big) = (-\sqrt{b}, \sqrt{b})$ $\quad$ $f^{-1}\big((a,b)\big) = \emptyset$

En cualquier caso $f^{-1}\big((a,b)\big)$ es abierto.

Nótese que $f^{-1}(\text{abierto}) = \text{abierto} \not\Rightarrow f(\text{abierto}) = \text{abierto}$ porque, $f\big(f^{-1}(A)\big) \neq A$, en general.

DEFINICIÓN: Se dice que una función $f : X \longrightarrow Y$ es <u>abierta</u> si para todo abierto $\mathcal{U} \subset X$, $f(\mathcal{U})$ es abierto en Y. Análogamente, se dice que es <u>cerrada</u> si para todo cerrrado $F \subset X$, $f(F)$ es cerrado en Y.

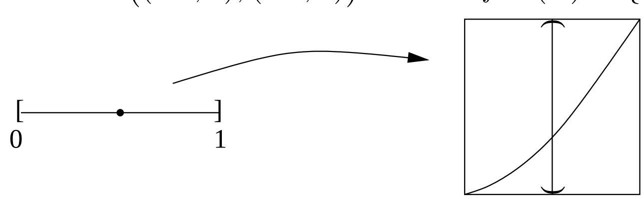
<u>Ejemplo</u>: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x^2$, no es abierta (con la topología usual) porque $f\big((-1,1)\big) = (0,1]$. Por otra parte, se puede comprobar que f es cerrada, pero no lo haremos aquí.

<u>Ejemplo</u>: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, no es cerrada porque $\mathbb{R}$ es cerrado (ya que $\emptyset$ es abierto) pero $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ no es cerrado. Además f es abierta, porque todo abierto es unión de intervalos abiertos y $f\big((a,b)\big) = (e^a, e^b)$.

Si las topologías o los conjuntos se complican, nuestra intuición acerca de la continuidad se pierde.

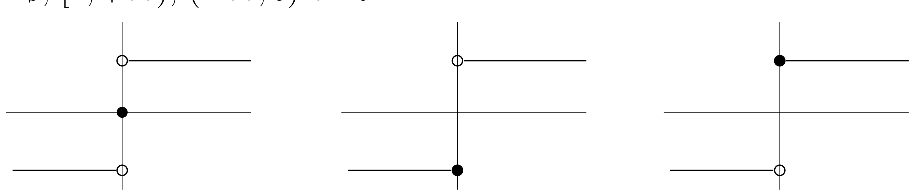
<u>Ejemplo 1</u>: Sea $X = \{1/n : n \in \mathbb{Z}^+\}$, entonces con la topología usual, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(1/n) = (-1)^n n$, es continua. Basta recordar que la topología (inducida por la) usual en X es la discreta, así que sea cual sea $f^{-1}(\mathcal{U})$ será abierto, porque cualquier subconjunto de X lo es.

<u>Ejemplo 2</u>: Si $Y = [0,1] \times [0,1]$ con la topología del orden lexicográfico y $X = [0,1]$ con la topología usual, $f : X \longrightarrow Y$, definida por $f(t) = (t, t^2)$, no es continua. Tomando por ejemplo, la "vertical" $\mathcal{U} = \big((0'5, 0), (0'5, 1)\big)$ se tiene $f^{-1}(\mathcal{U}) = \{0'5\}$ que no es abierto.



<u>Ejemplo 3</u>: La función $f(x) = x$ no es continua cuando la consideramos como $f : X \longrightarrow Y$ donde $X = (1,3] \cup (5,7)$ tiene la topología del orden e $Y = \mathbb{R}$ la usual, porque $f^{-1}\big((2,4)\big) = (2,3]$ que no es abierto en la del orden. Si diéramos a X la topología inducida por la usual, sí sería continua, y el intervalo $(2,3]$ sería abierto porque $(2,3] = (2,4) \cap X$.

<u>Ejemplo 4</u>: Consideramos $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x) = x/|x|$ para $x \neq 0$, con $f_1(0) = 0$, $f_2(0) = -1$ y $f_3(0) = 1$. Si $f_i : X \longrightarrow Y$, $i = 1,2,3$, donde $Y = \mathbb{R}$ con la topología usual y $X = \mathbb{R}$ con la topología de límite inferior, entonces f_1 y f_2 no son continuas pero f_3 sí lo es; porque $f_1^{-1}\big([-0'5, 0'5)\big) = \{1\}$, $f_2^{-1}\big([-2,0)\big) = (-\infty, 0]$ no son abiertos mientras que $f_3^{-1}\big([a,b)\big) = \emptyset$, $[1,+\infty)$, $(-\infty, 0)$ ó $\mathbb{R}$.



Como los abiertos de la base de la topología de límite inferior son $[a, b)$ con $a < b$, sólo vemos lo que ocurre *hacia adelante*. Como ayuda a nuestra intuición podemos pensar que el eje X representa el tiempo, de manera que los únicos acontecimientos alcanzables son los del futuro inmediato y no podemos volver a lo que ya ha sucedido. Así, un observador que viajase por la gráfica de f_1 o de f_2 partiendo del punto $(0, f_1(0))$ o $(0, f_2(0))$, respectivamente, se vería obligado a saltar en el siguiente instante, pero no así el situado en $(0, f_3(0))$ viajando por la gráfica de f_3. Por ello, ni f_1 ni f_2 son continuas mientras que f_3 sí lo es ya que su aparente discontinuidad sólo es detectable yendo *hacia atrás*, hacia el pasado. De hecho se puede probar que, con estas topologías, una función f es continua si y sólo si $f(a) = \lim_{x\to a^+} f(x)$, con el sentido usual del límite. Por otra parte, ni f_1 ni f_2 ni f_3 son continuas con la topología usual porque con ella sí nos podemos mover hacia adelante y hacia atrás dentro de cada abierto.

> *¿Acaso no será siempre irreversible el tiempo? Hay momentos en que uno tiene la impresión de que puede hacer lo que quiere, adelantarse o retroceder, que esto no tiene importancia; y otros en que se diría que las mallas se han apretado, y en esos casos se trata de no errar el golpe, porque sería imposible empezar de nuevo.*

Aunque sólo estamos interesados en la *continuidad global* podemos copiar la definición de continuidad en $x = a$ en espacios métricos $(\forall\epsilon\ \exists\delta\ :\ B(a,\delta) \subset f^{-1}\big(B(f(a),\epsilon)\big))$.

Definición: Dados $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$, se dice que f es <u>continua en el punto a</u> si para todo entorno de $f(a)$, $\mathcal{U}(f(a)) \in \mathcal{T}_Y$, existe un entorno de a, $V(a) \in \mathcal{T}_X$, tal que $V(a) \subset f^{-1}\big(\mathcal{U}(f(a))\big)$.

Teorema 3.6: *Dada una función $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es continua*

2) *f es continua en el punto a para todo $a \in X$*

3) *F cerrado en $Y \Rightarrow f^{-1}(F)$ cerrado en X*

4) *$A \subset X \Rightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

<u>Dem.</u>: 1) $\Leftrightarrow$ 2) La implicación "$\Rightarrow$" es obvia. Para la otra implicación, dado $\mathcal{U}$ abierto de Y, para cada $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$ se tiene que $f(x) \in \mathcal{U}$ y por tanto existe $\mathcal{V}(x) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$. Tomando $W = \bigcup \mathcal{V}(x)$, donde x recorre $f^{-1}(\mathcal{U})$, se tiene $f^{-1}(\mathcal{U}) = W =$ abierto.

1) $\Leftrightarrow$ 3) Es una consecuencia sencilla de que el complementario de la imagen inversa es la imagen inversa del complementario. (De verdad que es fácil).

3) $\Rightarrow$ 4) Trivialmente se tiene (sin ninguna hipótesis) $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. Como $\overline{f(A)}$ es cerrado, tomando clausuras se obtiene $\overline{A} \subset \overline{f^{-1}(f(A))} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ lo que implica el resultado deseado.

4) $\Rightarrow$ 3) Si F es cerrado, tomando $A = f^{-1}(F)$ se tiene $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$, por tanto $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$ y se concluye que $f^{-1}(F)$ es cerrado. ∎

También se puede demostrar que f es continua $\Leftrightarrow \operatorname{Fr}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(\operatorname{Fr}(A))$ (ejercicio) y hay otras muchas equivalencias.

Notación: Dados $A \subset X$ y $f : X \longrightarrow Y$ se suele denotar con $f\big|_A$ a la *restricción* de f a A, esto es, $f\big|_A = f \circ j$ donde $j : A \longrightarrow X$ es la inclusión $j(x) = x$. Dicho de otra forma, $f\big|_A$ es lo mismo que f pero prohibimos evaluarla fuera de A.

Algunas propiedades bastante naturales de las funciones continuas están recogidas en el siguiente resultado.

Teorema 3.7: *Sean X, Y, Z, espacios topológicos.*

1) *Si $A \subset X$, la inclusión $j : A \longrightarrow X$, $j(x) = x$, es continua.*

2) *Si $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ son continuas, $g \circ f : X \longrightarrow Z$ también lo es.*

3) *$f : X \longrightarrow Y \times Z$ es continua $\Leftrightarrow \pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ lo son.*

4) *(Pasting Lemma ¿Lema del pegado?) Si $X = A \cup B$ con A, B cerrados en X, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua $\Leftrightarrow f\big|_A$ y $f\big|_B$ lo son.*

Observación: Naturalmente, en los apartados 1) y 4) en los que aparecen subespacios de X, se sobreentiende que la topología que se toma es la relativa.

Dem.: 1) $\mathcal{U} \subset X$ abierto $\Rightarrow j^{-1}(\mathcal{U}) = j^{-1}(\mathcal{U} \cap A) = \mathcal{U} \cap A$ abierto (en la topología relativa).

2) $\mathcal{U} \subset Z$ abierto $\Rightarrow g^{-1}(\mathcal{U})$ abierto $\subset Y \Rightarrow f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{U})\big) = (g \circ f)^{-1}(\mathcal{U})$ abierto $\subset X$.

3) $\pi_1 : Y \times Z \longrightarrow Y$ y $\pi_2 : Y \times Z \longrightarrow Z$ son funciones continuas porque para cada abierto $\mathcal{U} \subset Y$ ó $\mathcal{V} \subset Z$, $\pi_1^{-1}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \times Z$, $\pi_2^{-1}(\mathcal{V}) = Y \times \mathcal{V}$, por tanto la implicación "$\Rightarrow$" se deduce de 2). Por otra parte, si $B_X \times B_Y$ es un abierto de la base, $x \in f^{-1}(B_X \times B_Y)$ si y sólo si $(\pi_1 \circ f)(x) \in B_X$ y $(\pi_2 \circ f)(x) \in B_Y$ (tras pensarlo un poco, es obvio) de donde
$$f^{-1}(B_X \times B_Y) = (\pi_1 \circ f)^{-1}(B_X) \cap (\pi_2 \circ f)^{-1}(B_Y)$$
y se deduce la otra implicación.

4) Por 1), la implicación "$\Rightarrow$" es inmediata. Para la otra, vemos que para cualquier cerrado $F \subset Y$, $f^{-1}(F) = \big(f\big|_A\big)^{-1}(F) \cup \big(f\big|_B\big)^{-1}(F)$ (trivial si uno entiende la notación), pero como $f\big|_A$ y $f\big|_B$ son continuas, $\big(f\big|_A\big)^{-1}(F)$ y $\big(f\big|_B\big)^{-1}(F)$ serán cerrados en A y en B, respectivamente. De ahí se deduce que también lo son en X porque A y B son cerrados. (A cámara lenta: $\big(f\big|_A\big)^{-1}(F)$ cerrado en $A \Rightarrow \big(f\big|_A\big)^{-1}(F) = C \cap A$ con C cerrado en X $\Rightarrow \big(f\big|_A\big)^{-1}(F)$ cerrado en X). ■

El nombre del cuarto apartado viene de que f es el resultado de *pegar* las funciones $f\big|_A$ y $f\big|_B$. De hecho en otras formulaciones se parte de $f_1 : A \longrightarrow Y$, $f_2 : B \longrightarrow Y$ que coinciden en $A \cap B$ y se construye f tal que $f\big|_A = f_1$, $f\big|_B = f_2$.

Ejemplo: En el último capítulo, dadas dos funciones continuas $\alpha : [0,1] \longrightarrow X$, $\beta : [0,1] \longrightarrow X$ con $\alpha(1) = \beta(0)$, consideraremos

$$\gamma(t) = \alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$

(nótese que $\alpha(1) = \beta(0)$ implica que γ está bien definida). El cuarto apartado nos dice que como $[0,1/2]$ y $[1/2,1]$ son cerrados en $[0,1]$ y cada parte de la definición es continua, entonces γ también lo es. Para los lectores perdidos, con la notación anterior

$$X = [0,1], \qquad A = [0,1/2], \qquad B = [1/2,1], \qquad \gamma\big|_A(t) = \alpha(2t), \qquad \gamma\big|_B(t) = \beta(2t-1).$$

Ahora vamos a una de las definiciones centrales del curso, una de esas que hay que marcar con el rotulador verde *fosforito*.

Definición: Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$. Se dice que f es un homeomorfismo y que X e Y son homeomorfos si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas.

Antes de seguir, es obvio que decir que una función biyectiva, $f : X \longrightarrow Y$, es un homeomorfismo es equivalente a cualquiera de las afirmaciones citadas a continuación. Y es tan obvio, que quien necesite una demostración debería ser castigado a volver, al menos, al comienzo de la sección.

- $\mathcal{U} \subset X$ es abierto $\Leftrightarrow f(\mathcal{U}) \subset Y$ es abierto.
- f es continua y abierta.
- $F \subset X$ es cerrado $\Leftrightarrow f(F) \subset Y$ es cerrado.
- f es continua y cerrada.

Recuérdese que en todos los casos hemos dado por supuesto que f es biyectiva. Una última equivalencia más compleja es

- $\forall A \subset X \quad f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

La cual se deduce notando que la continuidad de f y f^{-1} se traduce en que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ y $f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$ para todo $A, B \subset X$. Tomando $B = f(A)$, se tiene la igualdad.

¿Por qué ese extraño nombre de *homeomorfismo*? Como otras veces, la excusa es la etimología: homeo-morfo = semejante-forma, aunque también es cierto que a la cardiode (= parecida al corazón) se la llama así y cualquiera sabe que no es exactamente de corazón de lo que tiene forma.

¿Por qué son importantes? Un homeomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ transforma en correspondencia uno a uno los abiertos de X en los de Y y viceversa. Así que *dos espacios homeomorfos son indistinguibles desde el punto de vista topológico*, sólo difieren en el "nombre" de los abiertos. De alguna forma, la Topología estudia lo que es invariante bajo homeomorfismos, al igual que la Teoría de Grupos lo que es invariante bajo isomorfismos, la Geometría Proyectiva lo que es invariante por transformaciones proyectivas, etc. (¿alguien está de acuerdo?). Esta manera de estudiar espacios y estructuras a través de las transformaciones que los dejan invariantes es en lo que consiste el llamado *Erlanger Programm* de F. Klein.

Cuando a una función sólo le falta ser sobreyectiva para llegar a ser homeomorfismo recibe el nombre de *inmersión*, lo cual es una notación un poco ambigua en castellano.

DEFINICIÓN: Se dice que $f : X \longrightarrow Y$ es una <u>inmersión</u> si $f : X \longrightarrow \operatorname{Im} f$ es un homeomorfismo.

En los siguientes ejemplos suponemos siempre la topología usual (o la inducida por ella). Como es habitual, S^1 denota la circunferencia unidad $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$ que en coordenadas polares también se puede escribir como $\{(r,\theta) \in [0,+\infty)\times[0,2\pi) : r = 1\}$.

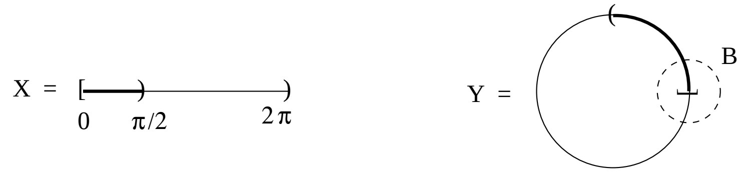
<u>Ejemplo 1</u>: $X = [0,1]$ e $Y = [a,b]$, con $a < b$, son homeomorfos. Basta considerar la función $f(x) = (b-a)x + a$ que estira y traslada convenientemente $[0,1]$. Evidentemente f es biyectiva y continua y $f^{-1}(y) = (y-a)/(b-a)$ también lo es (así lo pone en los libros de Cálculo).

<u>Ejemplo 2</u>: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$ no es un homeomorfismo ni una inmersión porque f no es inyectiva y por tanto no admite inversa. La continuidad de f se deduce de la de $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ porque podemos considerar $f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y $(\pi_1 \circ f)(x) = \cos x$, $(\pi_2 \circ f)(x) = \operatorname{sen} x$ son continuas (de nuevo apelamos a conocimientos previos de Cálculo).

<u>Ejemplo 3</u>: La función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ no es un homeomorfismo porque no es sobreyectiva, ya que $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^+ = (0,+\infty)$. Sin embargo sí que es inmersión porque $f : \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^+$ admite la inversa $f^{-1}(y) = \log y$ que es continua, al igual que la función.

<u>Ejemplo 4 (interesante)</u>: La función $f : X \longrightarrow Y$, con $X = [0,2\pi)$, $Y = S^1$, $f(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, es continua y biyectiva pero <u>no</u> es un homeomorfismo ni una inmersión. Este hecho debería extrañarnos porque los libros de introducción al Cálculo Real dicen que en $\mathbb{R}$, f continua y biyectiva $\Rightarrow$ f^{-1} continua. Pero éste es un fenómeno particular de $\mathbb{R}$ que no se extiende a otros espacios aunque sean subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ con la usual.

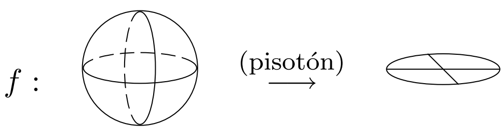
Veamos que la inversa no es una función continua. Dicha función inversa, asigna a cada punto de S^1 el ángulo, en el rango $[0,2\pi)$ que subtiende su radiovector.

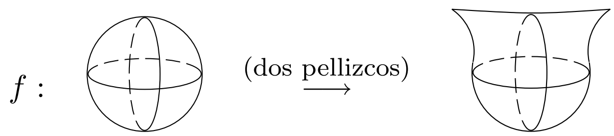


Consideremos $\mathcal{U} = [0,\pi/2)$ que es abierto en X (con la topología inducida) por ser $\mathcal{U} = (-\pi/2,\pi/2)\cap X$. Si f^{-1} fuera continua, $\left(f^{-1}\right)^{-1}(\mathcal{U}) = f(\mathcal{U})$ sería abierto en Y, pero $f(\mathcal{U})$ es, en polares, $\{r = 1,\ 0 \le \theta < \pi/2\}$ que no es abierto porque cualquier bola abierta, $B \subset \mathbb{R}^2$, que contenga a $r = 1$, $\theta = 0$, contendrá también a puntos con $\theta \in (2\pi - \epsilon, 2\pi)$ y por tanto $B \not\subset f(\mathcal{U})$.

<u>Ejemplo 5</u>: Los espacios $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$ son homeomorfos. Basta considerar los homeomorfismos $f(x) = \tan(\pi x/2)$ ó $f(x) = x/(1-|x|)$ ó $f(x) = x/(1-x^2)$... Procediendo como en el primer ejemplo, se tiene que $\mathbb{R}$ es homeomorfo a cualquier intervalo abierto. El próximo capítulo veremos que no es homeomorfo a ninguno cerrado.

La idea intuitiva, al menos en espacios métricos, es que las funciones continuas aplican puntos muy, muy próximos en puntos muy, muy próximos y pueden pegar los pares de puntos (ejemplo 2) o acercar infinitamente un punto a otros (ejemplo 4). Sin embargo los homeomorfismos se limitan a contraer o expandir distancias sin que lleguen a colapsar; esta es la idea de la definición primera dada por A.F. Möbius en 1858 antes de que el resto de la banda la hiciera totalmente rigurosa.



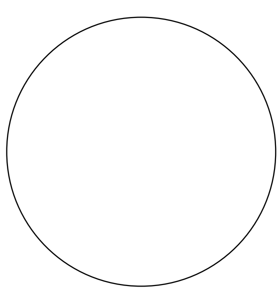


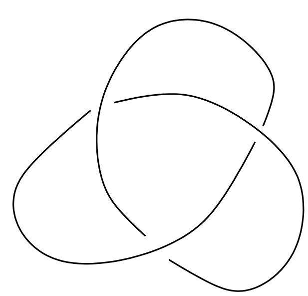
f es continua (no homeomorfismo) $\qquad$ f es homeomorfismo

De modo que, en cierta manera, con las salvedades indicadas más adelante, la idea de función continua está asociada a "aplastar" y la de homeomorfismo a "encoger" o "estirar" (a veces se dice que la Topología es la Geometría de la banda de goma). No hay manera topológica de diferenciar, por ejemplo, $\diamondsuit$, $\bigcirc$, $\bigtriangledown$ y $\heartsuit$. Todos estos objetos corresponden a un mismo tipo topológico y adjetivos como poligonal, circular, triangular, cardiáceo, no tienen un significado intrínseco en Topología.

> *Creía que era posible resplandecer de odio o de muerte. ¡Qué error! Sí, realmente, pensaba que existía "el Odio", que venía a posarse en la gente y a elevarla sobre sí misma. Naturalmente, sólo existo yo, yo que odio, yo que amo. Y entonces soy siempre la misma cosa, una pasta que se estira, se estira... y es siempre tan igual que uno se pregunta cómo se le ha ocurrido a la gente inventar nombres, hacer distinciones.*

La idea intuitiva antes señalada y nuestra visión *erretresiana* muchas veces confunden el concepto de homeomorfismo con el de familia continua de homeomorfismos. Un homeomorfismo no requiere necesariamente una deformación que se vaya haciendo poco a poco. Por ejemplo, S^1 y el nudo trébol son homeomerfos (¿sabría el lector por qué?) y sin embargo si S^1 fuera de goma tendríamos que vivir en $\mathbb{R}^4$ para poder deformarlo continuamente poco a poco hasta obtener el nudo trébol. En $\mathbb{R}^3$ es imposible (pero demostrarlo es bastante difícil).

$S^1 =$ 

Nudo trébol = 

Hausdorff y cosas raras

Cuando F. Hausdorff dio su definición de topología (en 1914 en su libro "*Grundzüge der Mengenlehre*") incluyó una propiedad que no es equivalente a ninguna de las tres que nosotros hemos exigido, y era que cualquier par de puntos pudiera separarse mediante un par de abiertos.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ tiene la propiedad de Hausdorff o que es un espacio T_2, si para cada pareja de puntos distintos $x, y \in X$ existen entornos disjuntos de ellos. Esto es, $\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(y) \in \mathcal{T}$ tales que $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{V}(y) = \emptyset$.

A Hausdorff no le parecía muy decente un espacio en el que dos puntos vecinos estuvieran tan próximos que no hubiera forma de construirles casas separadas. El desarrollo ulterior de la Topología y el sadismo de los fanáticos dieron lugar a ejemplos de cierto interés en los que se podría construir cada una de las dos casas pero no las dos al mismo tiempo.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es un espacio T_1 si para cada pareja de puntos disitntos $x, y \in X$ existen entornos $\mathcal{U}(x), \mathcal{V}(y) \in \mathcal{T}$ tales que $x \notin \mathcal{V}(y)$, $y \notin \mathcal{U}(x)$.

La historia sigue y al menos existen ya T_0, T_1, T_2, $T_{5/2}$, T_3, $T_{7/2}$, T_4 y T_5 (seguramente haya más). Cuanto mayor es el subíndice más exigente es la propiedad. La "T" es la inicial de *separación* en alemán, de ahí la notación, aunque también puede influir que quien introdujo la palabra en este contexto se apellidaba Tietze. Como orientación diremos que $\mathbb{R}^n$ con la topología usual las cumple todas y que algunas de ellas reflejan la posibilidad de que cada función continua definida en un cerrado admita una *extensión* continua, con ciertas propiedades, a todo el espacio. (Nota para los muy repetidores: el teorema de Hahn-Banach puede considerarse un resultado en esta dirección para espacios lineales, incluso de dimensión infinita).

Esto es lo que respecta a los axiomas llamados de separación. Veamos ahora los de numerabilidad.

Para estudiar convergencia y continuidad en espacios métricos habíamos usado en las demostraciones sucesiones de bolas abiertas, $B(x, 1/n)$ o $B(x, \epsilon_n)$, que se contraían. Es posible encontrar espacios topológicos muy raros tales que las únicas familias de abiertos que se contraen bien alrededor de un punto no son numerables; esencialmente esto provoca que las sucesiones no representen bien la topología del espacio.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ satisface el primer axioma de numerabilidad, si para cualquier $x \in X$ existe una colección numerable de abiertos $\{\mathcal{U}_1(x), \mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x), \ldots\}$ tales que cualquier entorno de x, $\mathcal{U}(x)$, contiene necesariamente a alguno de ellos.

Muchas veces se dice que $\{\mathcal{U}_1(x), \mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x), \ldots\}$ es una base de entornos de x porque si hacemos variar $x \in X$, la unión de estas familias da lugar a una base de la topología (ejercicio sencillo pero como esto es tan lioso pocos lo completarán).

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ satisface el segundo axioma de numerabilidad, si alguna de sus bases es numerable.

Seguro que el lector se pregunta el porqué de estas definiciones. Como veremos después, los espacios que no cumplen estas propiedades tienen algunas características monstruosas. Dándoles un nombre las trivializamos y podemos evitarlos en nuestros teoremas. Es lo mismo que cuando a uno le dicen que hay una curva continua $\alpha : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que rellena todo el plano ($\operatorname{Im}\alpha = \mathbb{R}^2$), puede contestar: "¡Bah!, es una curva de Peano". Ahora nos dirán que el límite de una sucesión en un espacio topológico no es único y replicaremos: "¡Bah!, no es Hausdorff".

Y otro encontrará que algo le raspa en la boca. Y se acercará al espejo, abrirá la boca; y su lengua se habrá convertido en un enorme ciempiés vivo, que agitará las patas y le arañará el paladar. Querrá escupirlo, pero el ciempiés será una parte de sí mismo y tendrá que arrancárselo con las manos. Y aparecerán multitud de cosas para las cuales habrá que buscar nombres nuevos: el ojo de piedra, el gran brazo tricornio, el pulgar-muleta, la araña-mandíbula.

Casi todas las monstruosidades tienen que ver con la convergencia. Si copiamos la definición que dimos en el primer capítulo cambiando bolas abiertas por entornos, obtenemos:

DEFINICIÓN: Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ converge a $l \in X$ si

$$\forall \mathcal{U}(l) \in \mathcal{T} \;\; \exists N \in \mathbb{Z}^+ \, : \, n > N \;\Rightarrow\; x_n \in \mathcal{U}(l).$$

Como en los chistes, veamos primero las buenas noticias y después las malas.

- La Proposición 1.1 y la Proposición 3.4 también se cumplen espacios topológicos que satisfagan el primer axioma de numerabilidad. La demostración es un ejercicio (que nadie va a hacer).

Proposición 3.8: *Si X es Hausdorff, el límite, si existe, es único.*

Dem.: Si $x_n \to l_1$ y $x_n \to l_2$ con $l_1 \neq l_2$, tomando $\mathcal{U}_1(l_1) \cap \mathcal{U}_2(l_2) \neq \emptyset$ se llega a una contradicción con que $x_n \in \mathcal{U}_1(l_1)$, $x_n \in \mathcal{U}_2(l_2)$ a partir de cierto n. ∎

Proposición 3.9: *X es T_1 si y sólo si los puntos son conjuntos cerrados.*

Dem.: $\Rightarrow$) Dado $y \neq x$, $\exists \mathcal{V}(y) : x \notin \mathcal{V}(y) \Rightarrow \mathcal{V}(y) \subset X - \{x\} \Rightarrow \{x\}$ es cerrado.

$\Leftarrow$) Basta tomar $\mathcal{U}(x) = X - \{y\}$, $\mathcal{V}(y) = X - \{x\}$ en la definición. ∎

DEFINICIÓN: Se dice que un subconjunto A es denso en el espacio topológico X si $\overline{A} = X$.

Proposición 3.10: *Si X cumple el segundo axioma de numerabilidad entonces tiene un subconjunto numerable denso.*

Dem.: Basta elegir un punto arbitrario de cada elemento de la base. El conjunto formado por ellos es el buscado. (Ejercicio: completar los detalles). ∎

Esto entra dentro de las buenas noticias porque encontrar subconjuntos densos "sencillos" es muy conveniente en muchos temas de análisis. Por ejemplo, el lema de Riemann-Lebesgue dice que para toda función integrable en $[0,1]$ se cumple

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)dx = 0.$$

Si $f \in C^1([0,1])$ es fácil demostrarlo integrando por partes. Si supiéramos que $C^1([0,1])$ es denso en el espacio de las funciones integrables, con la (semi-)distancia $\int |f-g|$, para probar el lema de Riemann-Lebesgue sería suficiente decir (como hacen algunos libros): "Por densidad, basta considerar $f \in C^1([0,1])$ e integrar por partes. Q.E.D.".

Como la propiedad de la proposición es interesante, recibe un nombre especial.

DEFINICIÓN: Se dice que un espacio topológico es separable si tiene un subconjunto numerable denso.

Un conocido teorema debido a K. Weierstrass afirma que cualquier función continua en $[0,1]$ se puede aproximar uniformemente mediante polinomios. Como todo polinomio se puede aproximar por otro con coeficientes racionales, deducimos que las funciones continuas con la distancia $\sup|f-g|$ forman un espacio separable y que todo teorema acerca de funciones continuas que sea preservado por aproximaciones uniformes basta demostrarlo para polinomios.

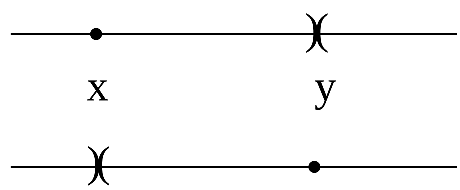
Ahora veamos una galería de los horrores de ejemplos y contraejemplos.

Ejemplo: El espacio $X=\{\spadesuit,\clubsuit,\diamondsuit,\heartsuit\}$ con la topología

$$\mathcal{T}=\big\{\emptyset, X, \{\spadesuit\}, \{\spadesuit,\clubsuit\}, \{\spadesuit,\clubsuit,\diamondsuit\}, \{\heartsuit\}\{\spadesuit,\heartsuit\}\{\spadesuit,\clubsuit,\heartsuit\}\big\}$$

no es Hausdorff y ni siquiera T_1, porque, por ejemplo, no existe ningún entorno de $\clubsuit$ que no contenga a $\spadesuit$. La sucesión $\spadesuit,\clubsuit,\spadesuit,\clubsuit,\spadesuit,\clubsuit,\dots$ tiene dos límites: $\clubsuit$ y $\diamondsuit$. Y la sucesión $\spadesuit,\spadesuit,\spadesuit,\spadesuit,\dots$ tiene tres límites. Esto está relacionado con que $\overline{\{\spadesuit\}}=\{\spadesuit,\clubsuit,\diamondsuit\}$ (en particular, los puntos de X no son siempre cerrados).

Ejemplo: $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no es Hausdorff pero sí T_1.



Para ver que es T_1 basta elegir $\mathcal{U}(x)=X-\{y\}$, $\mathcal{V}(y)=X-\{x\}$. Imaginando la forma de los abiertos es evidente que no es Hausdorff. Una prueba formal es la siguiente: $\mathcal{U}(x)\cap\mathcal{V}(y)=\emptyset \Rightarrow X=X-\mathcal{U}(x)\cap\mathcal{V}(y)=\big(X-\mathcal{U}(x)\big)\cup\big(X-V(y)\big)$ y esto es imposible porque ambos conjuntos son finitos.

Observación: Es fácil comprobar que todo espacio métrico es T_2 (ejercicio), así que no existen distancias que induzcan las topologías indicadas en los dos ejemplos anteriores.

Ejemplo: La base habitual de $\mathbb{R}$ con la la topología usual no es numerable, sin embargo se satisfacen los dos axiomas de numerabilidad.

Basta comprobar el segundo que es más exigente (¿está claro?). Y para ello es suficiente verificar que la siguiente familia numerable de intervalos racionales

$$\mathcal{B}=\big\{(a,b)\;:\;a<b,\;a,b\in\mathbb{Q}\big\},$$

es una base de la usual (ejercicio). Según sabemos, debe existir un conjunto numerable denso, un ejemplo es $\mathbb{Q}$ ya que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ con la topología de Sorgenfrey es un espacio separable que no satisface el segundo axioma de numerabilidad pero sí el primero.

Tomando $\mathcal{U}_n(x) = [x, x+1/n)$ se sigue inmediatamente el primer axioma. Por otra parte, como antes, $\mathbb{Q}$ es un subconjunto numerable denso. Viendo el ejemplo anterior, uno estaría tentado a decir que se cumple el segundo axioma tomando la base

$$\mathcal{B}' = \big\{[a,b) \, : \, a < b, \ a, b \in \mathbb{Q}\big\},$$

pero no genera la topología de Sorgenfrey porque no existe $B(\sqrt{2}) \in \mathcal{B}'$ tal que $B(\sqrt{2}) \subset [\sqrt{2}, 2)$. La demostración de que no puede existir una base, $\mathcal{B}$, numerable es ingeniosa pero breve: Dado $x \in \mathbb{R}$ existe $B_x \subset \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subset [x, +\infty)$, ahora si $y \neq x$, digamos $x < y$, se cumple $B_x \neq B_y$ porque $x \notin [y, +\infty)$. Como para números reales distintos hemos encontrado elementos de $\mathcal{B}$ distintos, el cardinal de $\mathcal{B}$ es al menos el de $\mathbb{R}$.

Observación: Se puede demostrar que si la topología de Sorgenfrey estuviera inducida por una distancia, como $\mathbb{Q}$ es denso, las bolas de centro y radio racionales formarían una base numerable (ejercicio). Como no satisface el segundo axioma, se concluye que no existe tal distancia.

Ejemplo: $\mathbb{R}$ con la topología cofinita no cumple el primer axioma de numerabilidad.

Aplicamos una versión en miniatura de la *prueba diagonal* de Cantor. Sean $\mathcal{U}_1(x)$, $\mathcal{U}_2(x), \mathcal{U}_3(x) \ldots$ como en la definición, entonces

$$\mathcal{U}_1(x) = X - A_1, \qquad \mathcal{U}_2(x) = X - A_2, \qquad \mathcal{U}_3(x) = X - A_3, \qquad \ldots$$

donde A_n son conjuntos finitos. Eligiendo $y \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$, con $y \neq x$, se tiene que $\mathcal{U} = X - \{y\} \Rightarrow \mathcal{U}_1(x) \not\subset \mathcal{U}, \mathcal{U}_2(x) \not\subset \mathcal{U}, \mathcal{U}_3(x) \not\subset \mathcal{U}, \ldots$ etc.

Ejemplo: Sea en $\mathbb{R}$ la topología en la que $\mathcal{U}$ es abierto si y sólo si $\mathcal{U} = \emptyset$, $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ ó $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ para alguna sucesión real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces no existen conjuntos numerables densos. Si A fuera uno de ellos, entonces $\mathcal{U} = \mathbb{R} - A$ sería abierto y, por tanto, $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x \notin \overline{A}$. Se puede probar como antes que esta topología no cumple el primer axioma de numerabilidad.

La aproximación de puntos del cierre por sucesiones tampoco se cumple en este ejemplo. Si $A = [0,1]$ entonces $\overline{A} = \mathbb{R}$, en particular $3 \in \overline{A}$, pero no existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ con $x_n \to 3$ porque $\mathcal{U} = \mathbb{R} - \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ es un abierto que contiene a 3 pero no contiene a ningún término de la sucesión. Parece que para recuperar la Proposición 3.4 debiéramos considerar algo así como "sucesiones no numerables", esto es, indizadas por números reales en vez de por los naturales (x_r en vez de x_n), lo que da lugar a conceptos como las *redes* y otras palabrotas dignas del primer cine de terror (¿qué tal la invasión de los *ultrafiltros*?) que en cursos de Análisis de algunas ingenierías se emplean para evitar la masificación.

Para terminar, diremos a título meramente informativo, como cultura particular, que los axiomas de separación y numerabilidad están relacionados con los *teoremas de* *metrización* que nos dicen cuando un espacio topológico es metrizable (admite una distancia que induce la topología dada). Un ejemplo es un teorema de P. Urysohn de 1925 que afirma que si un espacio es T_4 (espacio en el que se pueden separar mediante abiertos, no sólo puntos, sino también cerrados disjuntos) y verifica el segundo axioma de numerabilidad, entonces es metrizable. Un famoso teorema de J. Nagata e Y. Smirnov, de principios de los 50, da condiciones necesarias y suficientes para la metrizabilidad pero es más difícil de enunciar.