

Nombre: \_\_\_\_\_

Apellidos: \_\_\_\_\_

Elige en cada apartado el ítem que NO vas a desarrollar y táchalo en el enunciado del examen

1. DEFINICIONES (2 puntos máximo)
  - a. (0,5) Espacio topológico
  - b. (0,5) Función continua
  - c. (0,5) La clausura y el interior
  - d. (0,5) Espacios Hausdorff y  $T_1$
  - e. (0,5) Conjunto denso y no denso en ninguna parte
2. EJERCICIOS (4 puntos máximo)
  - a. (0,8) ¿Son distancias?
    1.  $d(x, y) = |x^2 - y^2|$  en  $\mathbb{R}$
    2. "la cantidad de caracteres de la unión menos la de la intersección" en el conjunto de cadenas de caracteres.  $D(\text{"mapa"}, \text{"mama"}) = 1$   
( $\text{"mapa"} \cup \text{"mama"} = \{m, a, p\}$ ,  $\text{"mapa"} \cap \text{"mama"} = \{m, a\}$ )
  - b. (1,2) ¿Son topologías? ¿Son bases? Si son topologías, ¿son Hausdorff?
    1.  $\mathcal{C}_q = \{\emptyset, \mathbb{R}^+, (\frac{1}{a}, a) : a > 1\}$
    2.  $\mathcal{T}_a = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$
    3.  $\mathcal{T}_c = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
  - c. (0,6) ¿Qué funciones son continuas? ¿Cuáles son abiertas? Ambas preguntas en la topología de semirrectas derechas  $f(x): SR \rightarrow SR$ ,  $SR = \{\emptyset, \mathbb{R}, (a, +\infty)\}$ 
    1.  $f(x) = 1 - x$
    2.  $f(x) = x^2$
  - d. (0,8) Busca Clausura, Interior y Frontera de
    1.  $\{-3 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup (1; 2) \cup \{4 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$  en Sorgenfrey
    2.  $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}^2$
  - e. (0,6) Define la clase de equivalencia que convierte
    1. Un cuadrado en un toro
    2. Una esfera en un plano proyectivo
  - f. (0,6) ¿Son homeomorfos? Presenta un homeomorfismo
    1.  $(-3; -1)$  y  $(6; 12)$
    2. El interior de un círculo sin el centro y su exterior

3. CONSTRUYE UN EJEMPLO Y JUSTIFÍCALO (2 puntos máximo)
- (1) Dos distancias no equivalentes pueden generar la misma topología
  - (1) La unión de clausuras de  $A_n$  no siempre coincide con la clausura de la unión
  - (1) Construye un conjunto no numerable que no es denso en ninguna parte
4. TEOREMAS (1,5 puntos máximo)
- (0,75) Una función es continua localmente ( $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(f(x))$ ) si y sólo si la preimagen de un conjunto abierto es abierta
  - (0,75) Demuestra el teorema de Banach: en un espacio completo una función contractiva siempre tiene exactamente un punto fijo
  - (0,75) La clausura es la intersección de todos los cerrados que contienen A
5. PREGUNTAS PRÁCTICAS (0,5 máximo)
- (0,25) ¿Qué distancia en el espacio de las funciones elegirías para comparar el rendimiento académico de los alumnos si no te importa que algún día durante el curso tengan un rendimiento bajo?
  - (0,25) Tu intención es representar el tiempo en un espacio bidimensional donde el eje X marca los días del año. ¿Qué topología es más adecuada para ello?
  - (0,25) ¿Qué objeto matemático nos permite modelizar la propagación de enfermedades infecciosas? ¿Qué entornos podemos definir?