# 1713105354-laboratorio-1-clculo-numrico

# Laboratorio 1

## Problema 1: Resolución de la ecuación de segundo grado

La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ se resuelve de la forma ordinaria utilizando las fórmulas de Bhaskara:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. Pruebe que si se define

$$y_1 = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$
$$y_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

entonces $y_1 = x_1$ y $y_2 = x_2$.

### Prueba:

- Para $y_1$:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}} = \\
&= \frac{2c}{-(b+\sqrt{b^2-4ac})} \cdot \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{b-\sqrt{b^2-4ac}} = \\
&= \frac{2c(b-\sqrt{b^2-4ac})}{-(b^2-(b^2-4ac))} = \\
&= \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{-2a} = \\
&= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x_1
\end{aligned}
$$

- Para $y_2$:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= \frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}} = \\
&= \frac{2c}{-b+\sqrt{b^2-4ac}} \cdot \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{b+\sqrt{b^2-4ac}} = \\
&= \frac{2c(b+\sqrt{b^2-4ac})}{-b^2+b^2-4ac} = \\
&= \frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{-2a} = \\
&= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = x_2
\end{aligned}
$$

2. Evalúe, utilizando Python, $x_1, x_2, y_1, y_2$ cuando $a = 1, b = 9^{12}$ y $c = -3$.

- $x_1$ dará 0 ya que $b$ y $\sqrt{b^2-4ac}$ son números grandes muy cercanos que por el límite de la precisión de la máquina se cancelan.
- $x_2$ y $y_1$ darán resultados correctos.
- $y_2$ dará error de división entre cero ya que $b$ y $\sqrt{b^2-4ac}$ son números grandes muy cercanos que por el límite de la precisión de la máquina se cancelan.

```
a = 1, b = 282429536481, c = -3
x_1 = 0.0
x_2 = -282429536481.0
y_1 = 1.062211848441645e-11
Error y_2: float division by zero
```

3. Evalúe, utilizando python, $x_1, x_2, y_1, y_2$ cuando $a = 1, b = -9^{12}$ y $c = -3$.

- $x_1$ y $y_2$ darán resultados correctos.
- $x_2$ y $y_1$ darán los mismos errores que en el apartado anterior ya que hemos cambiado el signo de $b$.

```
a = 1, b = -282429536481, c = -3
x_1 = 282429536481.0
x_2 = 0.0
Error y_1: float division by zero
y_2 = -1.062211848441645e-11
```

4. Para cada uno de los apartados anteriores, indica cuáles son las soluciones de la ecuación de segundo grado y explique los resultados obtenidos en Python.

- Para el primer apartado, las soluciones de la ecuación de segundo grado son $x_1 = 1.062211848441645e-11$ y $x_2 = -282429536481.0$. Los resultados obtenidos en Python no son los esperados en $x_1$ y $y_2$ debido al límite de precisión de la mantisa.
- Para el segundo apartado, las soluciones de la ecuación de segundo grado son $x_1 = 282429536481.0$ y

$x_2 = -1.0622118484441645e - 11$. Los resultados obtenidos en Python no son los esperados en $x_2$ y $y_1$ debido al límite de precisión de la mantisa.

# Problema 2: Algoritmo de Horner I

El algoritmo de Horner se define formalmente así.
Dados un natural no nulo $N$ y $a_0, \dots a_N, x_0,$ hacer:

$$\begin{aligned} &q_{N-1} := a_N \\ &q_{N-i-1} := q_{N-i} \cdot x_0 + a_{N-i}, \text{ para } i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

1. Demuestre con el mayor rigor de que sea capaz, que $Q(x) = q_{N-1}x^{N-1} + \cdots + q_0$ y $q_{-1}$ son respectivamente el cociente y resto de la división euclidea de $P$ entre $x - x_0$.

## Prueba:

Para demostrar que $Q(x) = q_{N-1}x^{N-1} + \cdots + q_0$ y $q_{-1}$ son respectivamente el cociente y resto de la división euclidea de $P$ entre $x - x_0$, se debe demostrar que $P(x) = Q(x)(x - x_0) + q_{-1}$.

Para ello, con el algoritmo de Horner definimos:

$$\begin{aligned} &a_N = q_{N-1} \\ &a_{N-1} = q_{N-2} - q_{N-1}x_0 \\ &\dots \\ &a_1 = q_0 - q_1x_0 \\ &a_0 = q_{-1} - q_0x_0 \end{aligned}$$

Ahora, desarrollamos $Q(x)(x - x_0) + q_{-1}$:

$$
\begin{aligned}
&(x-x_0)(q_{N-1}x^{N-1}+\cdots+q_0)+q_{-1}= \\
&(q_{N-1}x^N+q_{N-2}x^{N-1}+\cdots+q_1x^2+q_0x)- \\
&(q_{N-1}x^{N-1}x_0+\cdots+q_1xx_0+q_0x_0)+q_{-1}= \\
&x^N(q_{N-1})+x^{N-1}(q_{N-2}-q_{N-1}x_0)+\cdots+x(q_0-q_1x_0)+(q_{-1}-q_0x_0)= \\
&x^Na_N+x^{N-1}a_{N-1}+\cdots+x^2a_2+xa_1+a_0=P(x)
\end{aligned}
$$

2. Demuestre como consecuencia, que $q_{-1}=P(x_0)$

### Prueba:

$$
\begin{aligned}
P(x_0)&=(x_0-x_0)(q_{N-1}x_0^{N-1}+\cdots+q_0)+q_1= \\
&=0\cdot(q_{N-1}x_0^{N-1}+\cdots+q_0)+q_{-1}=q_{-1}
\end{aligned}
$$

## Problema 3: Algoritmo de Horner II

Utilize reiteradamente el algoritmo de Horner para escribir $x^3+x^2-x-1$ en potencias de $(x-2)$.

- Empezamos con el polinomio $P(x)=x^3+x^2-x-1$ y $x_0=2$ .

$$
\begin{aligned}
q_3&=1 \\
q_2&=q_3\cdot 2+1=3 \\
q_1&=q_2\cdot 2-1=5 \\
q_0&=q_1\cdot 2-1=9
\end{aligned}
$$

- Ahora volvemos a aplicar el algoritmo de Horner con el polinomio $Q_1(x)=x^2+3x+5$ y $x_0=2$.

$$
\begin{aligned}
q_2&=1 \\
q_1&=q_2\cdot 2+3=5 \\
q_0&=q_1\cdot 2+5=15
\end{aligned}
$$

- Finalmente, aplicamos el algoritmo de Horner con el polinomio $Q_2(x)=x+5$ y $x_0=2$.

$$
\begin{aligned}
q_1&=1 \\
q_0&=q_1\cdot 2+5=7
\end{aligned}
$$

Utilizando los restos y el polinomio $Q_3(x) = 1$, podemos escribir $x^3 + x^2 - x - 1$ en potencias de $(x - 2)$:

$$\begin{aligned}
&9 + (x-2)(15 + (x-2)(7 + (x-2)(1))) = \\
&9 + 15(x-2) + 7(x-2)^2 + (x-2)^3 = \\
&(x-2)^3 + 7(x-2)^2 + 15(x-2) + 9
\end{aligned}$$