Gdańsk, 30.05.2025
Jakub Pastuszka 198339

Metody Numeryczne, projekt 3: Aproksymacja profilu wysokościowego

Wstęp:

Współczesne społeczeństwo coraz częściej angażuje się w aktywności fizyczne, takie jak turystyka górska czy jazda na rowerze. Zarówno amatorzy górskich wędrówek, jak i kolarze planujący swoje trasy, muszą dostosować ich przebieg do własnych możliwości fizycznych. W tym celu niezwykle pomocne jest przedstawienie profilu wysokościowego trasy, czyli wykresu pokazującego zmiany wysokości bezwzględnej w zależności od odległości od początku trasy.

Celem niniejszego projektu jest analiza profilu wysokościowego wybranych tras wyścigu Giro d'Italia 2025 przy użyciu metod interpolacyjnych. Zastosowano dwie techniki: interpolację wielomianową metodą Lagrange'a oraz funkcje sklejenia trzeciego stopnia (ang. cubic splines). Obie metody zostaną porównane pod kątem dokładności odwzorowania profilu trasy, a także ich zachowania przy różnych liczbach i rozmieszczeniach punktów węzłowych.

Do realizacji projektu wykorzystano język Python oraz biblioteki: numpy i matplotlib.pyplot. Dane pobrałem w formacie .gpx ze strava.com z oficjalnego profilu Giro, a następnie przekonwertowałem je na .csv i użyłem ich przy generowaniu wykresów. Wszystkie dane, wykresy oraz kod źródłowy są w odpowiednich folderach.

Opis zastosowanych metod:

W projekcie użyłem dwóch metod - interpolację wielomianową metodą Lagrange'a oraz interpolację za pomocą funkcji sklejenia trzeciego stopnia. Celem było porównanie jakości odwzorowania profilu wysokościowego wybranych tras przy różnych liczbach i rozmieszczeniach punktów węzłowych.

Interpolacja wielomianem Lagrange'a:

Interpolacja Lagrange'a polega na utworzeniu wielomianu stopnia n-1, który przechodzi przez wszystkie węzły interpolacyjne, jego postać wygląda następująco:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \cdot l_i(x)$$

Gdzie $l_i(x)$ to tak zwane wielomiany podstawowe Lagrange'a:

$$l_i(x) = \prod_{j=0\ \&\ j\neq i}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Zmiana jednego punktu wpływa na cały wielomian. Przy dużej liczbie węzłów równomiernie rozmieszczonych może prowadzić do niestabilności numerycznej oraz powstawania znacznych oscylacji zwanych efektem Rungego. W celu jego minimalizachi węzły zostały rozmieszczone według rozkładu punktów Chebysheva, które w ogólności są gęstsze przy krańcach przedziału.

W celu poprawy obliczeń wartości zostały znormalizowane do przedziału <0,1>, a następnie przywrócone do orginalnych jednostek odległości.

Interpolacja funkcjami sklejenia trzeciego stopnia:

Funkcje sklejenia trzeciego stopnia (ang. natural cubic splines) to metoda interpolacji oparta na złożeniu wielu wielomianów stopnia trzeciego, definiowanych lokalnie pomiędzy kolejnymi punktami danych. Każdy z tych wielomianów jest skonstruowany tak, aby przechodził dokładnie przez dwa sąsiednie węzły, zapewniał ciągłość wartości funkcji oraz jej pierwszej i drugiej pochodnej w punktach łączenia.

Dodatkowo, w przypadku tzw. spline'ów naturalnych, przyjmuje się warunek zerowania drugiej pochodnej na końcach przedziału interpolacji, co zapobiega nadmiernemu zakrzywieniu wykresu na krańcach.

Analiza błędu interpolacji:

W celu oceny jakości dopasowania metod interpolacyjnych, przeprowadzono analizę błędów dla każdej z nich. Jako główną miarę błędu przyjęto średni błąd kwadratowy (ang. Mean Squared Error, MSE), który obliczany jest według wzoru:

$$MSE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i')^2$$

Gdzie:

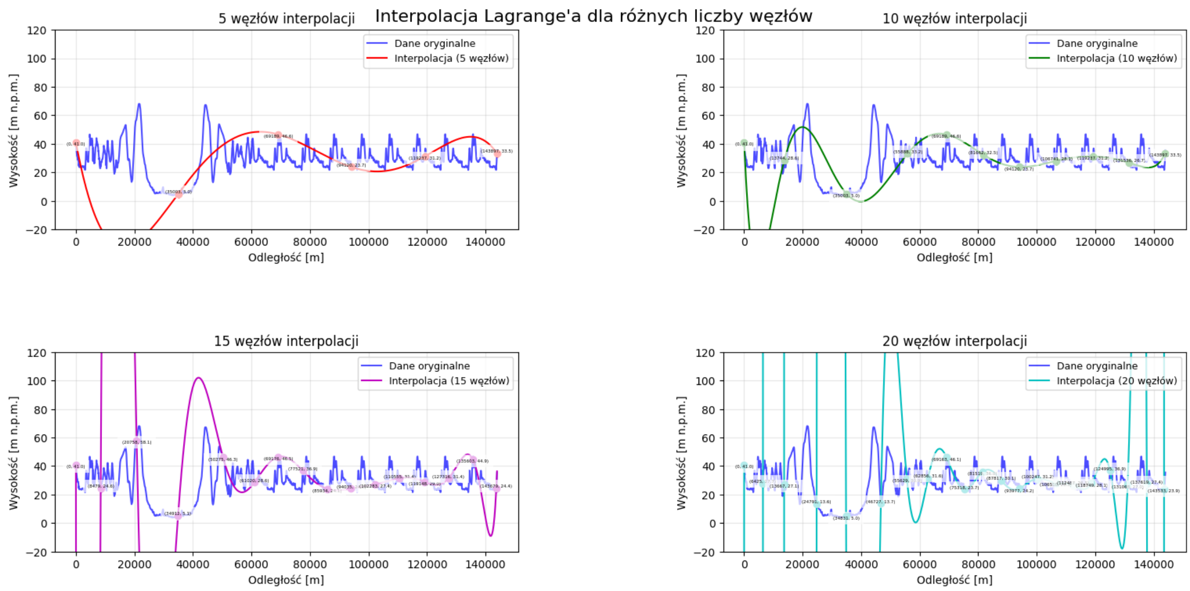
- y_i to rzeczywista wartość wysokości trasy
- y_i' to wartość uzyskana z interpolacji
- n to liczba punktów porównawczych

MSE mierzy przeciętny kwadrat różnicy między wartościami interpolowanymi a rzeczywistymi. Im niższy wynik MSE, tym lepsza dokładność odwzorowania profilu trasy. Dodatkowo obliczono maksymalny błąd bezwzględny, który informuje o największym lokalnym odchyleniu interpolacji od danych rzeczywistych.

Analiza tras Giro d’Italia 2025:

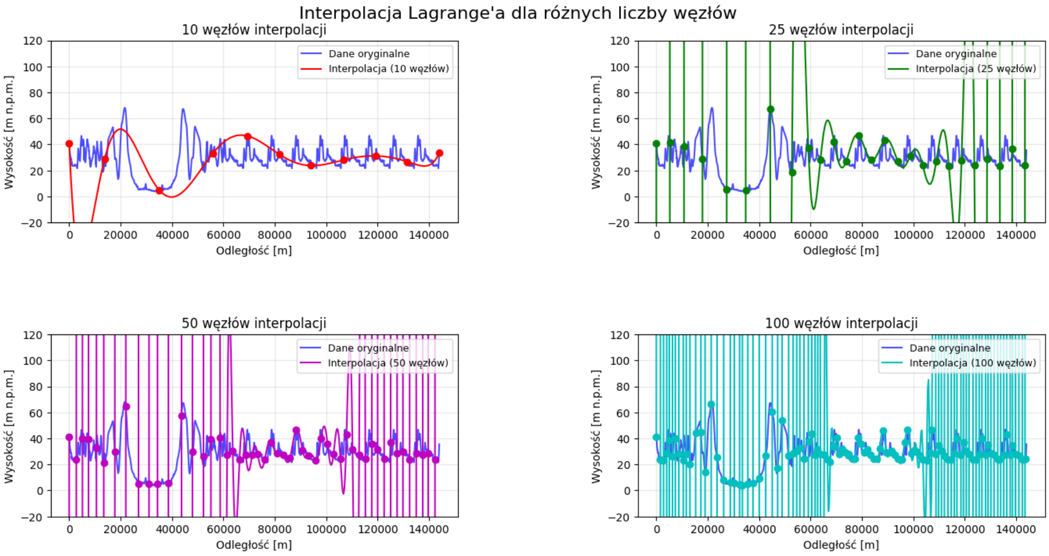
Trasa 1: Etap 21 –> Roma – Roma -> Płaska

Pierwszą analizowaną trasą będzie ostatni etap aktualnego Giro. Jest to względnie płaski etap po stolicy włoch gdzie na koniec kolaże będą wieżdżać na swego rodzaju finisz, przez który będą musieli przejechać kilka razy.



Rys 1: Wykres przedstawia interpolacje metodą Lagrange’a dla równomiernego rozłożenia węzłów

Pierwsze co rzuca się w oczy jest efet Rungego, który jest widoczny tak naprawdę dla każdej liczby węzłów równomiernie rozłożonych. Efekt ten potęguje się ze wzrostem liczby węzów, lecz dzięki zwięszkonej liczbie węzów można zauważyć interpolacja przyjmuje bardziej dokładne wartości co pokazuje podany wykres.



RYS 2: WYRES PRZEDSTAWIAJĄCY WIĘKSZĄ LICZBĘ WEZÓW INTERPOALCJI

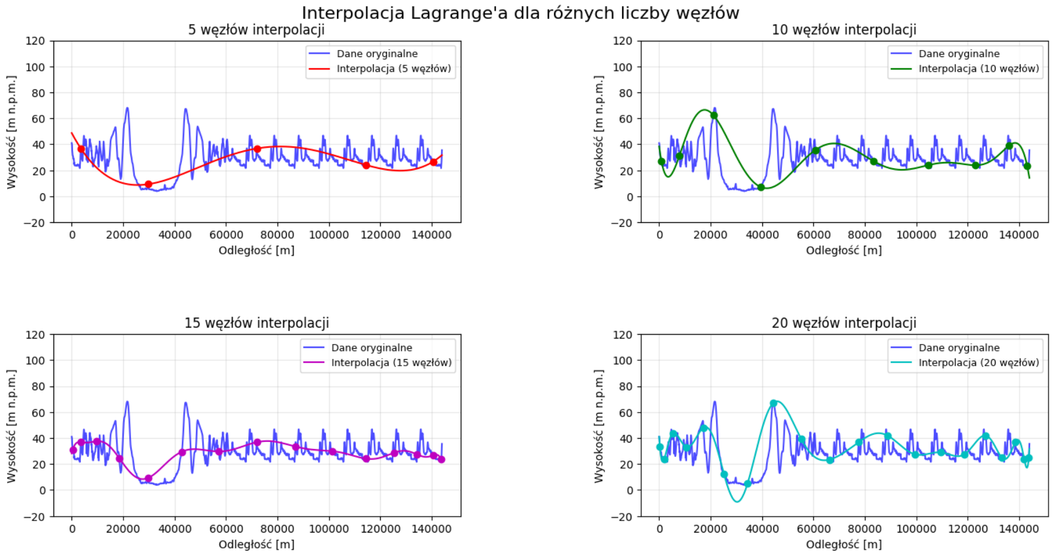
Metoda ta z równomiernym rozmieszczeniem węzłów nie przyniosła oczekiwanych wyników na całej trasie, dzięki niej możemy określić względnie tylko część trasy.

```
Metoda: lagrange_uniform
Węzły: 5    | MSE: 709.6406 | MaxError: 95.8734
Węzły: 10   | MSE: 474.9453 | MaxError: 90.8569
Węzły: 15   | MSE: 188062.3102 | MaxError: 2427.7665
Węzły: 20   | MSE: 5534748377.0373 | MaxError: 526103.0018
Węzły: 25   | MSE: 132404188418125.8750 | MaxError: 93184571.9801
Węzły: 50   | MSE: 162102923979977442669322934681 60.0000 | MaxError: 48903015652722840.0000
Węzły: 100  | MSE: 236492087458421976541903131178141189629865686397130400176706580119552.0000 | MaxError: 28337371659
957936711247695863349248 0.0000
```

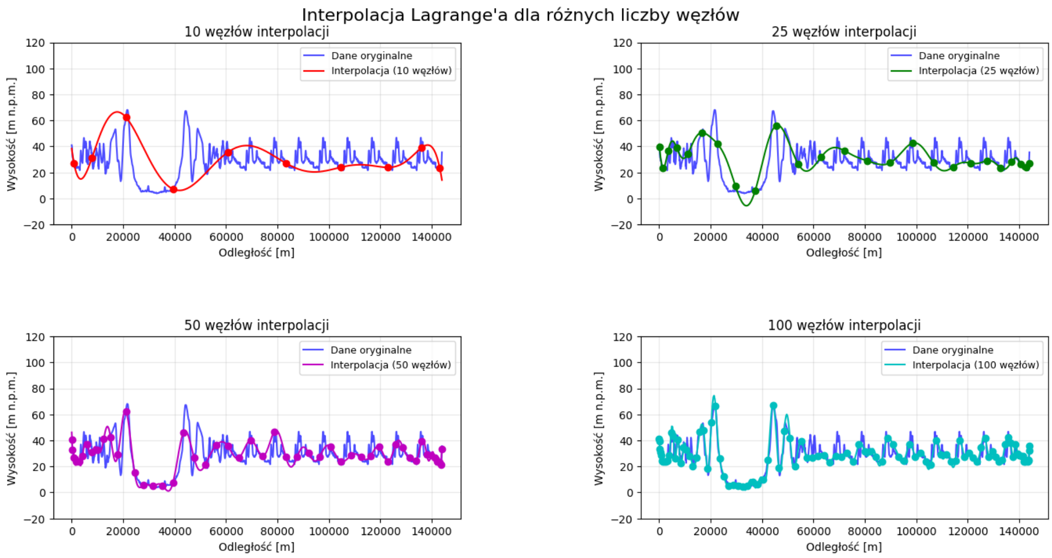
RYS 3: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

MSE trasy dla dużej liczby węzłów jest nieakceptowalny, a dla małej liczby węzłow trasa nie przypomina orginalnej

W celu dalszego badania tej trasy do rozmieszczenia punktów interpolacji użyłem rozkładu Chebysheva, która zagęszcza liczbę węzłów przy krańcach przedziału.



Rys 4: Wykres przedstawia interpolacje metodą Lagrange'a dla rozłożenia węzłów według rozkładu Chebysheva



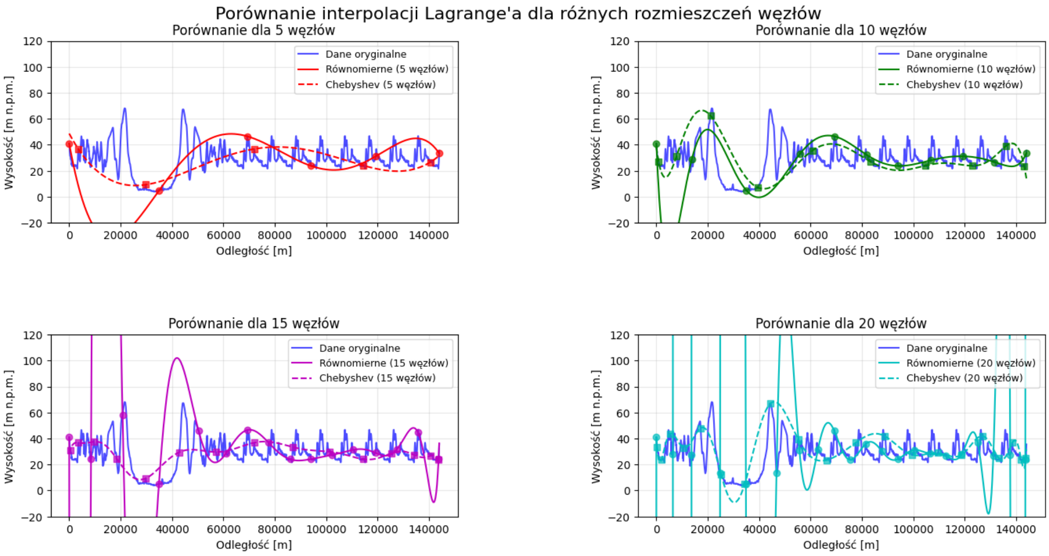
Rys 5: Wyres przedstawiający większą liczbę wezów interpoalcji

Jak można zauważyć tak zwane węzły Chebysheva zniwelowały efekt Rungego. W ogólności można powiedzieć, że interpolacja wygląda lepiej i gdyby trasa rzeczywiście była płaska to znaczy jej przewyższenia wynosiłyby maksymalnie 5 metów to interpolacja można powiedzieć, że byłaby idealna, a tak przez to, że węzły nie są rozmieszczone równomiernie tracimy dużą liczbę lekkich wzniesień, na bardziej płaską trasę nie miałoby to znaczenia.

```
Metoda: lagrange_chebyshev
Węzły: 5     | MSE: 191.0538 | MaxError: 58.7535
Węzły: 10    | MSE: 270.6540 | MaxError: 59.9562
Węzły: 15    | MSE: 120.3805 | MaxError: 52.0599
Węzły: 20    | MSE: 179.9383 | MaxError: 54.1413
Węzły: 25    | MSE: 114.9347 | MaxError: 42.2360
Węzły: 50    | MSE: 77.1922 | MaxError: 34.9935
Węzły: 100   | MSE: 22.4256 | MaxError: 18.8488
```

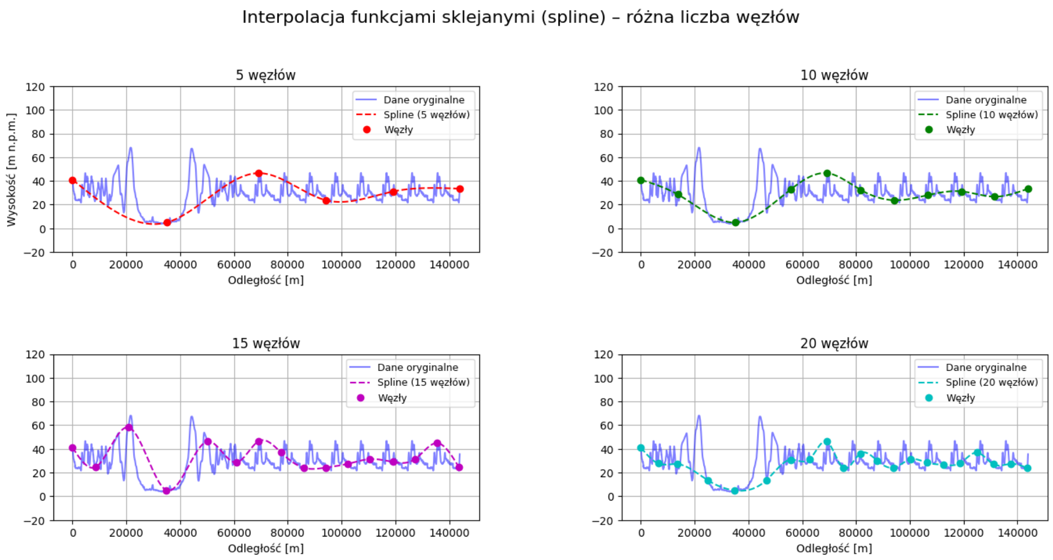
RYS 6: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Jak można zauważyć MSE jest znacznie mnijsze przy tym rozłożeniu węzłów oraz malejej wraz ze zwiększającą się ich liczbą co dobrze świadczy o tej metodzie.

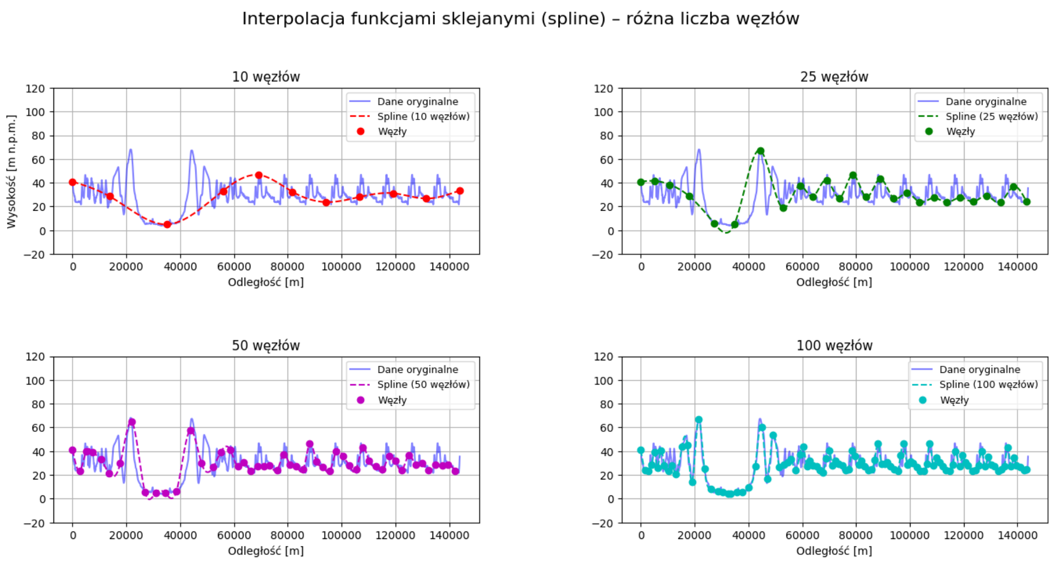


RYS 7: PORÓWNANIE INTERPOLACJI

Powyższy wykres pokazuje, że równomierne rozmieszczenie węzłów jest gorsze w tym przypadku.



RYS 8: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ FUNKCJI SKLEJANYCH



RYS 9: WYRES PRZEDSTAWIAJĄCY WIĘKSZĄ LICZBĘ WEZÓW INTERPOALCJI

Metoda ta działa bardzo dobrze dla bardzo płaskich tras tak jak Largrange w wariancie Chebysheva, lecz nadal poprzez rozłożenie węzłów możemy tracić dokładność interpolacji.

```
Metoda: spline
Węzły: 5    | MSE: 202.6592 | MaxError: 60.3740
Węzły: 10   | MSE: 163.2787 | MaxError: 54.3811
Węzły: 15   | MSE: 154.6696 | MaxError: 43.8923
Węzły: 20   | MSE: 154.4372 | MaxError: 57.8097
Węzły: 25   | MSE: 157.3349 | MaxError: 47.4060
Węzły: 50   | MSE: 84.9121 | MaxError: 31.4495
Węzły: 100  | MSE: 17.5470 | MaxError: 18.4234
```

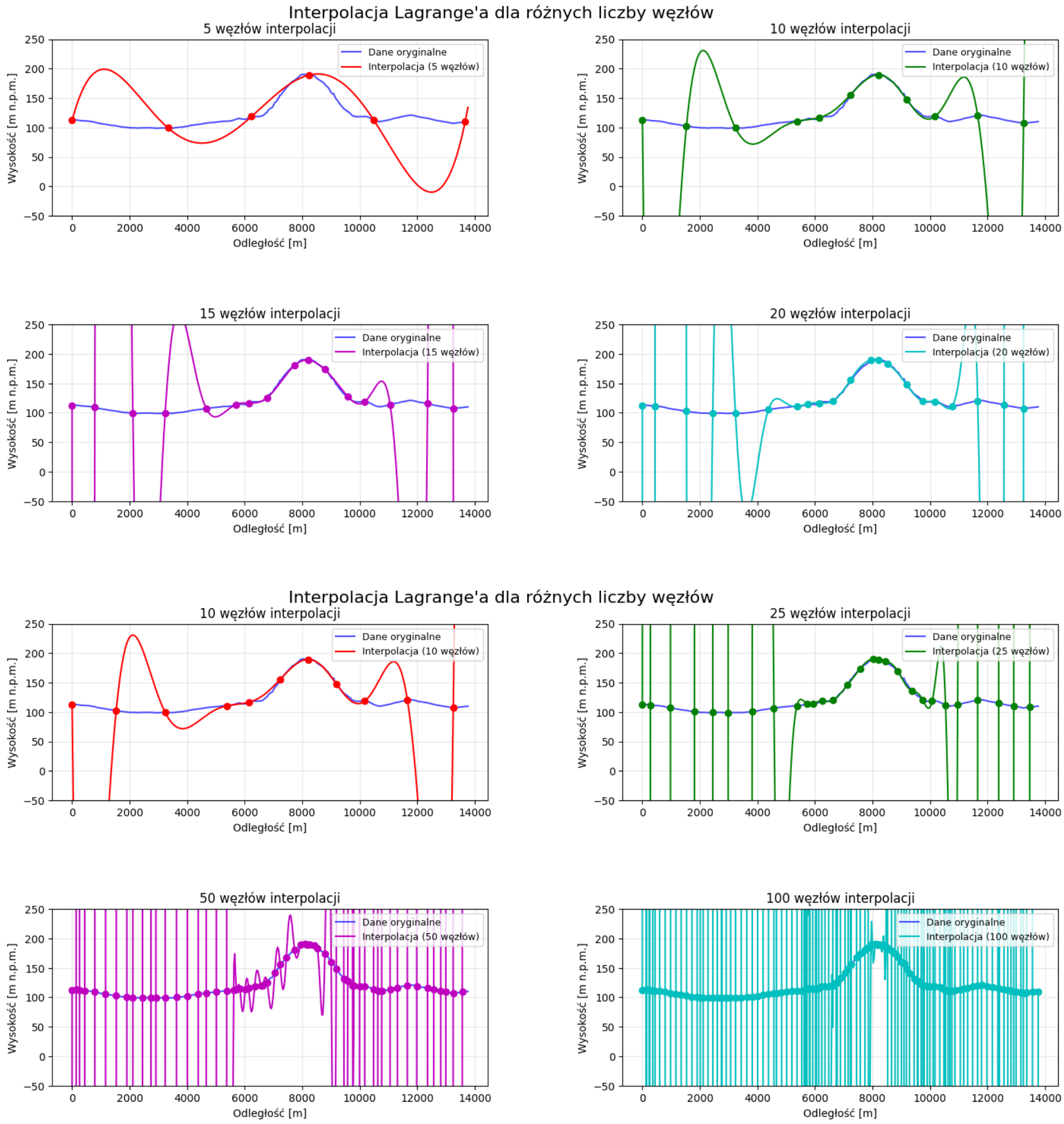
RYS 10: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

W metodzie spline jak i w Lagrange wraz ze zwiększającą się liczbą węzów MSE maleje oraz warto zauważyć, że duży skok przy wartośćiach MSE widnieje pomiędzy 50, a 100 węzłami.

Podsumowując dla płaskiej trasy metoda spline przy dużej liczbie węzłów jest bardzo dobra, lecz gdy zdarzają się lekkie pagórki każda metoda może je przypadkiem je uciąć poprzez złe ułożenie węzłów interpolacji.

Trasa 2: Etap 2 -> Tirana – Tirana -> krótki jedna góra

Następną analizowaną trasą będzie drugi etap Giro, jest jazdą na czas. Jest to krótki etap z jedną dużą i długą górą.

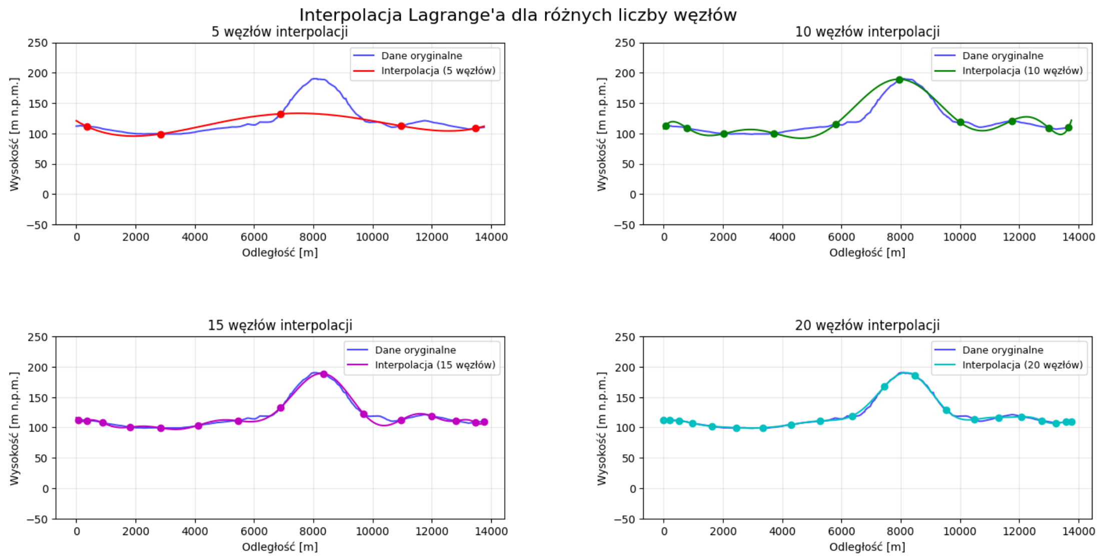


RYS 11: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ LAGRANGE'A DLA RÓWNOMIERNEGO ROZŁOŻENIA WĘZŁÓW

```
Metoda: lagrange_uniform
Węzły: 5    | MSE: 3039.5464 | MaxError: 124.6887
Węzły: 10   | MSE: 253320.8735 | MaxError: 4584.7437
Węzły: 15   | MSE: 170731412.0992 | MaxError: 142884.5948
Węzły: 20   | MSE: 34868342984.2252 | MaxError: 2265740.8559
Węzły: 25   | MSE: 62938818101624560.0000 | MaxError: 3648011606.1401
Węzły: 50   | MSE: 180837772603167572856634731242828189969164533376.0000 | MaxError: 251286131064329956910 6944.0000
Węzły: 100  | MSE: 788532710495633016504082729084670707147395485643152711806258345171656995965466637593330342848 1024.
0000 | MaxError: 586189788374753415872949934788625857893267396 36224.0000
```

RYS 12: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Trasa z jedą znaczną górą jest znacznie trudniejsza do zinterpolowania niż względnie płaska trasa. Efekt Rungego towarzysz tej interpolacji tak naprawdę nie patrząc na liczbę węzłów. Wraz ze wzrastającą liczbą węzłów rośnie MSE. W okolicach od 10 do 30 węzłów można zauważyć w miarę dokładną interpolazje wzgórza

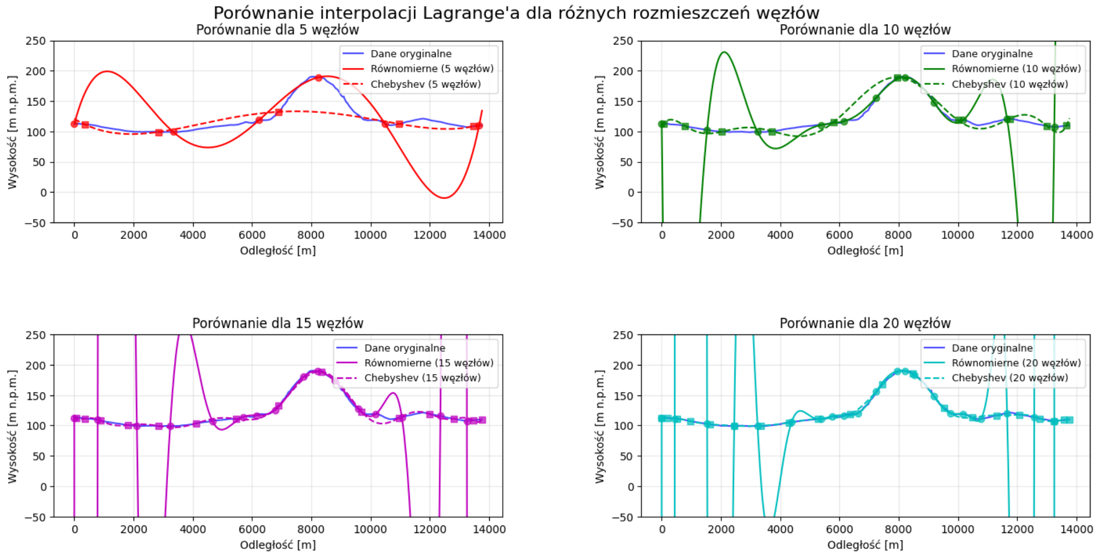


RYS 13: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ LAGRANGE'A DLA ROZŁOŻENIA WĘZŁÓW WEDŁUG ROZKŁADU CHEBYSHEVA

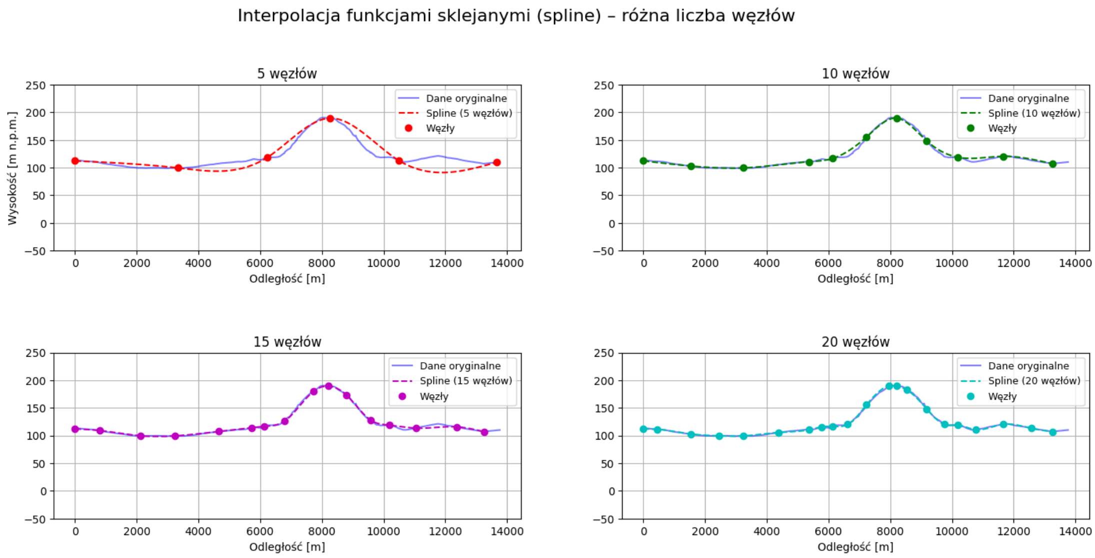
```
Metoda: lagrange_chebyshev
Węzły: 5    | MSE: 356.6604 | MaxError: 57.8211
Węzły: 10   | MSE: 113.9108 | MaxError: 33.6502
Węzły: 15   | MSE: 15.1484 | MaxError: 14.6343
Węzły: 20   | MSE: 3.8859 | MaxError: 6.6713
Węzły: 25   | MSE: 2.4487 | MaxError: 7.6560
Węzły: 50   | MSE: nan | MaxError: nan
Węzły: 100  | MSE: nan | MaxError: nan
```

RYS 14: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Rozłożenie punktów interpolacji według rozkładu Chebysheva bardzo pomogło w interpolacji trasy. Trasa ta została bardzo dobrze odwzorowana przy względnie małej liczbie węzłów interpolacji. Przy większej liczbie węzłów nie ma sensu prowadzić obliczeń, ponieważ rożnica trasy, a interpolacji jest znikoma, więc tak naprawdę 25 węzły już są bardzo dobrą interpolacją.



RYS 15: PORÓWNANIE INTERPOLACJI METODĄ LAGRANGE'A

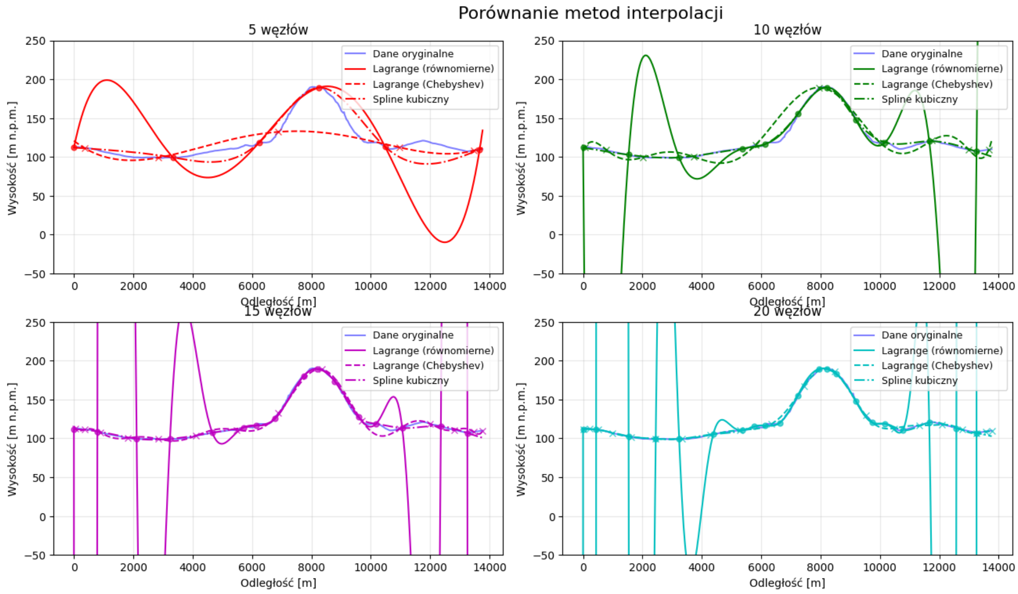


RYS 16: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ FUNKCJI SKLEJANYCH

```
Metoda: spline
Węzły: 5    | MSE: 153.3257 | MaxError: 29.8601
Węzły: 10   | MSE: 8.4489 | MaxError: 9.5099
Węzły: 15   | MSE: 4.2549 | MaxError: 9.1759
Węzły: 20   | MSE: 1.9192 | MaxError: 7.2737
Węzły: 25   | MSE: 0.5700 | MaxError: 2.4889
Węzły: 50   | MSE: 0.2333 | MaxError: 3.9202
Węzły: 100  | MSE: 0.1559 | MaxError: 2.6646
```

RYS 17: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Metoda interpolachi funkcjami sklejanymi wypada bardzo dobrze już dla małych ilości węzłów interpolacji. Jak można zauważyć, krótka tasa z jedną niewysoką górą jest dobrym przykładem na interpolacje tą metodą, a MSE jest stosunkowo niskie od 10 węzłów interpolacji.

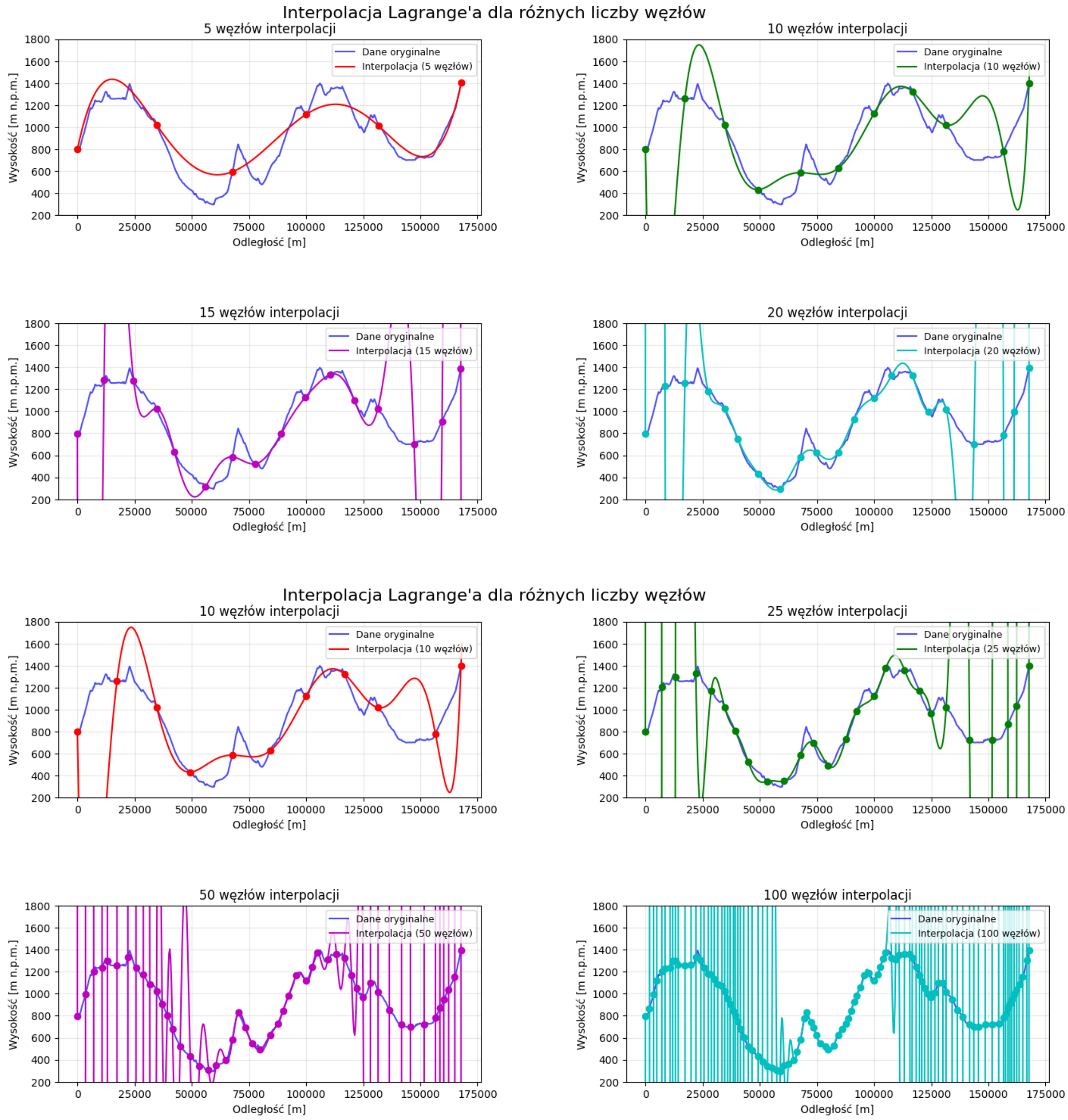


RYS 18: RYSUNEK PRZEDSTAWIA PORÓWNANIE WSZYSTKICH METOD INTERPOLACJI

Podsumowując trasę drugiego etapu Giro można pokusić się o stwierdzenie, że krótkie trasy są bardzo dobrze interpolowane przez różne metody. I tak naprawdę nie trzeba dużo węzłów, aby przeprowadzić na niej interpolacje.

Trasa 3: Etap 7: Castel di Sangro – Tagliacozzo -> Trzy góry, średnia długość etapu

Następna trasa jest przykładem trasy o zmiennym profilu, dolinach i pagórkach (górach), gdzie są ogromne przewyższenia.

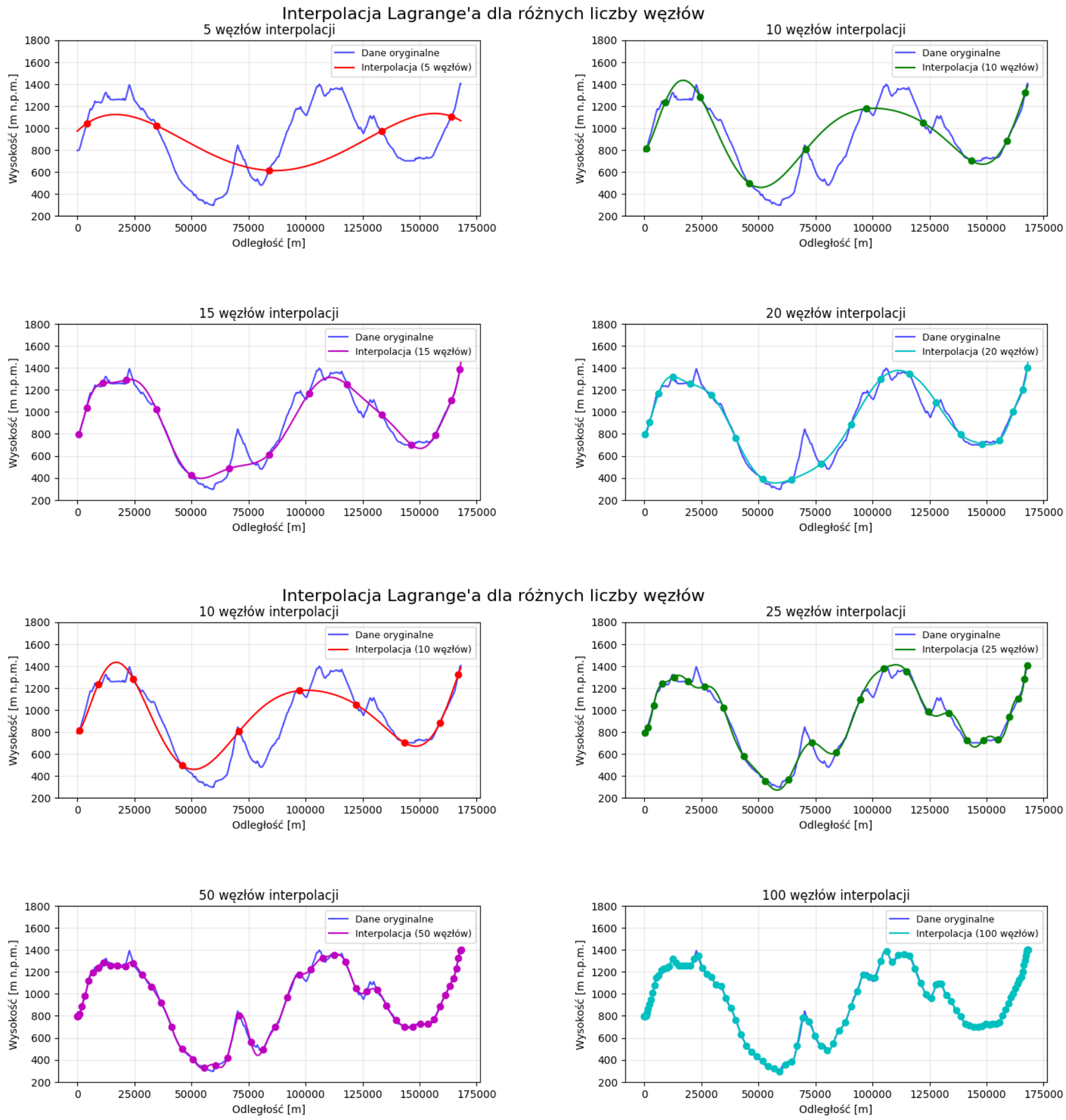


RYS 19: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ LAGRANGE'A DLA RÓWNOMIERNEGO ROZŁOŻENIA WĘZŁÓW

```
Metoda: lagrange_uniform
Węzły: 5    | MSE: 18199.1995 | MaxError: 296.2552
Węzły: 10   | MSE: 417737.1179 | MaxError: 2797.6893
Węzły: 15   | MSE: 25293548.9546 | MaxError: 26101.8256
Węzły: 20   | MSE: 654012493.3177 | MaxError: 151512.4610
Węzły: 25   | MSE: 66968134875.9124 | MaxError: 1956042.6432
Węzły: 50   | MSE: 1543909587071727200601374720.0000 | MaxError: 144497723621688.3125
Węzły: 100  | MSE: 64449776666420987694094031114628483265602338568829665280.0000 | MaxError: 45800119318059536972710412288.0000
```

RYS 20: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Jak w poprzednich trasach efekt Rungego jest bardzo widoczny, lecz dzięki temu, że ta trasa jest dłuższa można zauważyć miejsce, gdzie interpolacja jest względnie dokładna.

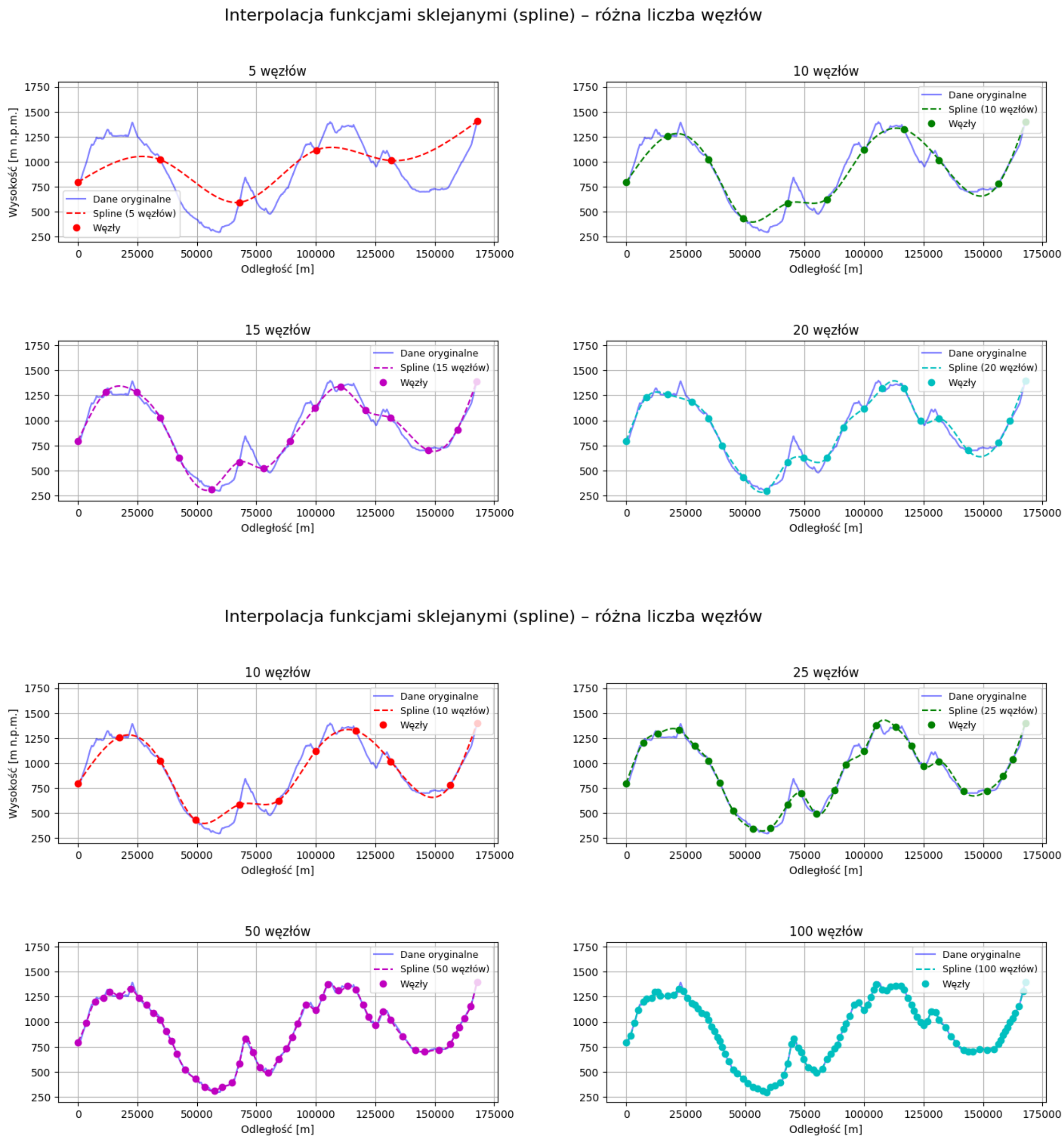


RYS 21: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ LAGRANGE'A DLA ROZŁOŻENIA WĘZŁÓW WEDŁUG ROZKŁADU CHEBYSHEVA

```
Metoda: lagrange_chebyshev
Węzły: 5    | MSE: 103659.0738 | MaxError: 705.4304
Węzły: 10   | MSE: 30380.6662 | MaxError: 539.6159
Węzły: 15   | MSE: 6012.9017 | MaxError: 336.3853
Węzły: 20   | MSE: 6748.7293 | MaxError: 403.3228
Węzły: 25   | MSE: 3456.2770 | MaxError: 191.9324
Węzły: 50   | MSE: 683.2894 | MaxError: 107.1856
Węzły: 100  | MSE: 95.8630 | MaxError: 46.8387
```

RYS 22: PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Trasa poprzez swoją charakterystykę jest trudna do interpolacji, ponieważ ma dużo stromych podjazdów, czyli szybkich krótkich wzniesień przez co miejscami interpolacja nie jest najlepsza. Duży błąd MSE wynika z tego, że obliczenia są na dużych liczbach przez co błędy również takie będą, lecz można zauważyć duża tendencję spadkową.



RYS 23: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ FUNKCJI SKLEJANYCH

```
Metoda: spline
Węzły: 5    | MSE: 58454.3052 | MaxError: 465.3647
Węzły: 10   | MSE: 7309.6291 | MaxError: 243.8545
Węzły: 15   | MSE: 4468.0442 | MaxError: 256.7770
Węzły: 20   | MSE: 2827.2098 | MaxError: 212.5318
Węzły: 25   | MSE: 2066.6935 | MaxError: 170.5159
Węzły: 50   | MSE: 261.5065 | MaxError: 71.5876
Węzły: 100  | MSE: 74.6845 | MaxError: 54.7883
```

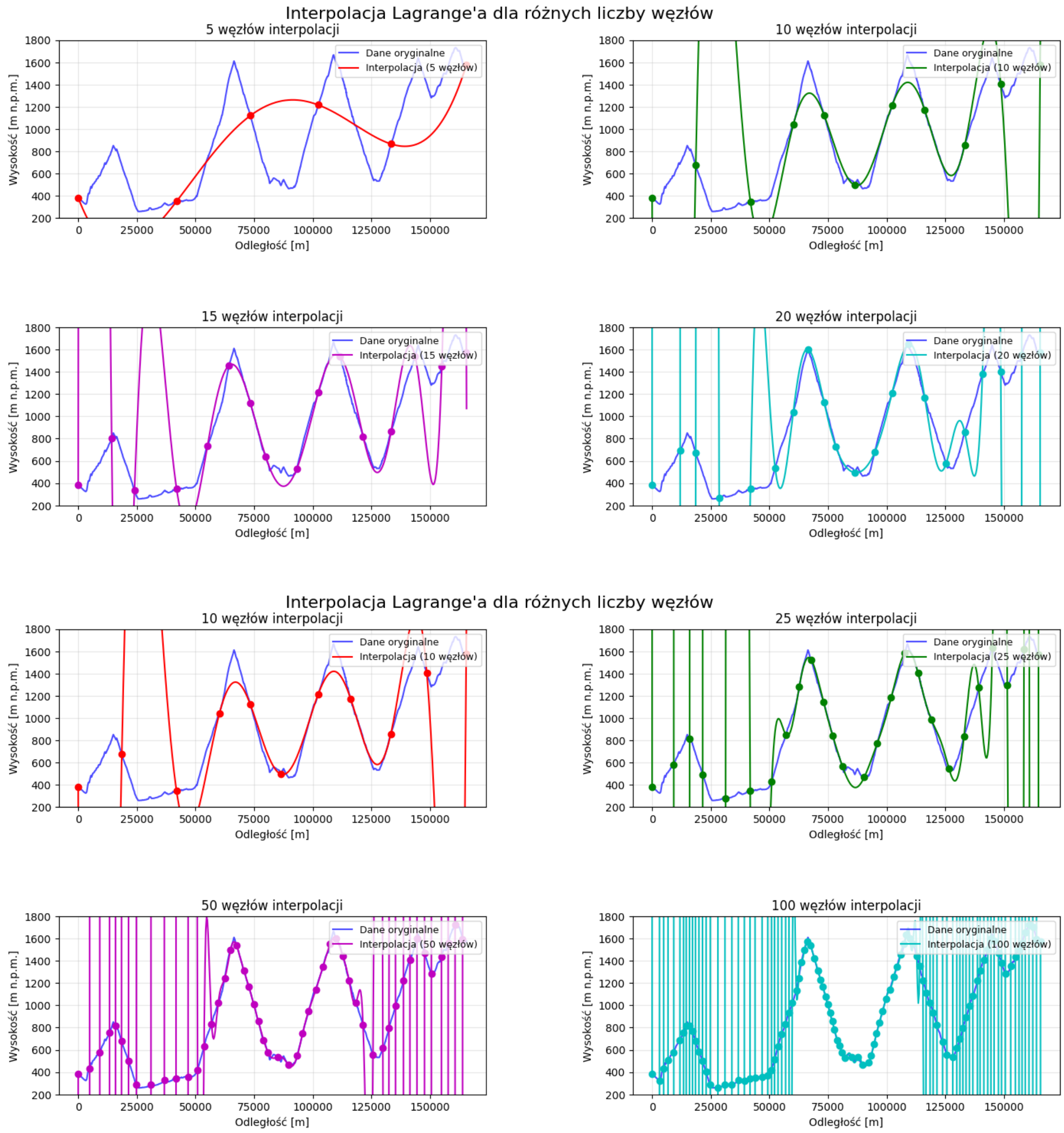
RYS 24: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Funkcje sklejane również dla takiej trasy są bardzo dobrą metodą interpolacji. Jak przy poprzednikach nadal można zauważyć odcięcia kilku podjazdów, lecz w ogólności trast są bardzo dobrze interpolowane. Można się pokusić o stwierdzenie, że przy takiej długości trasy można byłoby zwiększyć ilość węzłów interpolacji.

Trasa jest dosyć ciężka do interpolacji na stosunkowo dużą ilość krótkich podjazdów przez co przy mniejszej liczbie węzłów interpolacji możemy je utracić, lecz patrząc na rozmiar trasy można zauważyć, że liczba tych węzłów również powinna być stosunkowo większa.

Trasa 4: Etap 19: Biella – Champoluc -> Wysokie góry długie podjazdy, średnia długość trasy

Trasa ta charakteryzuje się ogromnymi podjazdami, które łatwo zauważyć, trasa jest podobnej długości co poprzednik, więc można zakładać, że potrzeba będzie dużej liczby węzłów interpolacji.

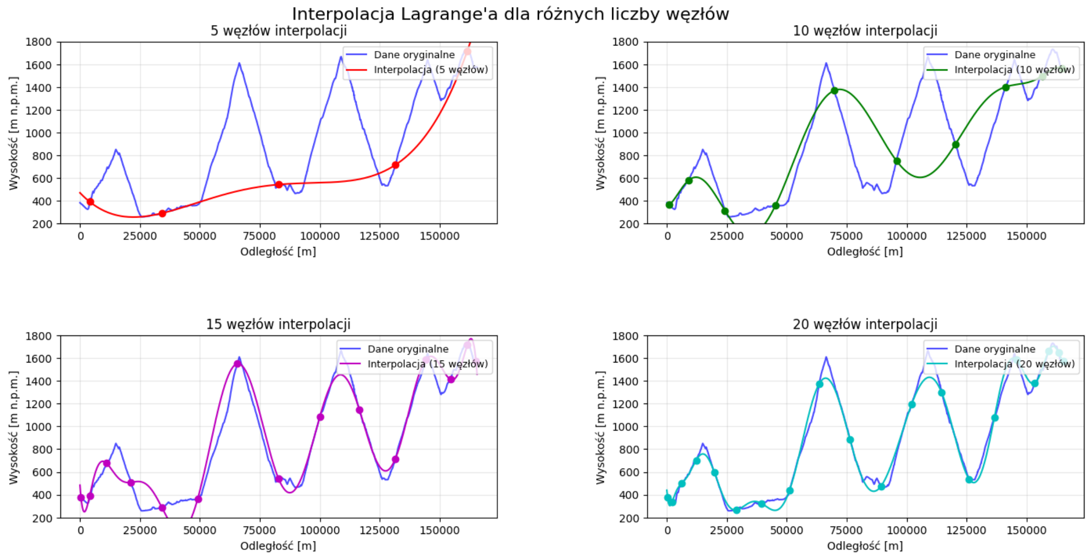


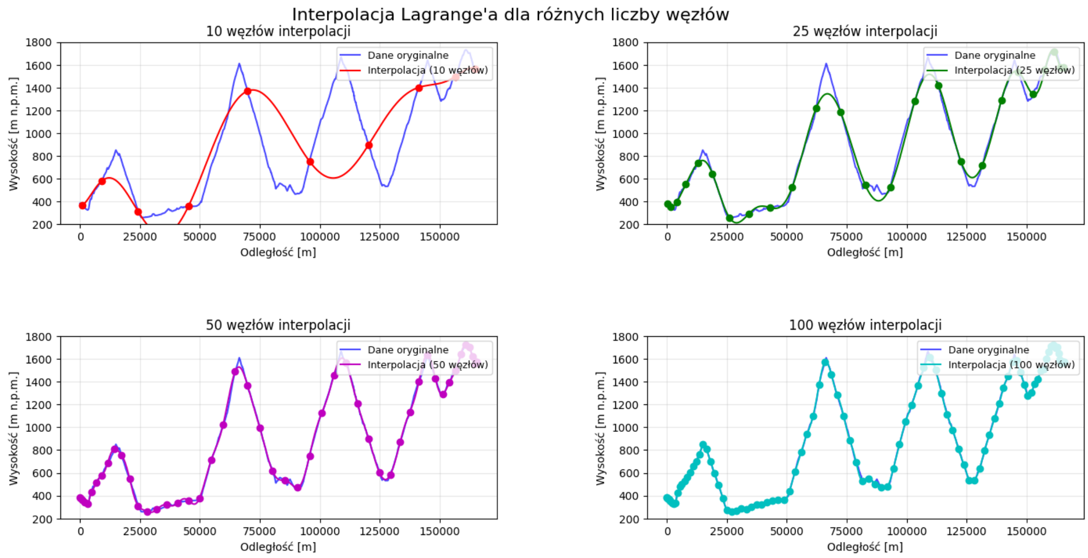
RYS 25: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ LAGRANGE'A DLA RÓWNOMIERNEGO ROZŁOŻENIA WĘZŁÓW

```
Metoda: lagrange_uniform
Węzły: 5    | MSE: 175474.8167 | MaxError: 903.6306
Węzły: 10   | MSE: 18679055.5479 | MaxError: 18142.5180
Węzły: 15   | MSE: 65915407.3670 | MaxError: 42858.9517
Węzły: 20   | MSE: 1272217098996.2312 | MaxError: 7094240.6504
Węzły: 25   | MSE: 833370739875483.1250 | MaxError: 208516911.5099
Węzły: 50   | MSE: 4433610485763300480007229616947 2.0000 | MaxError: 70123337080882688.0000
Węzły: 100  | MSE: 1662364201492321120298882761841679584395692622362705521777925169348608.0000 | MaxError: 6268300236
782462045604671957772533 76.0000
```

RYS 26: PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Trasa ta jest tak jak poprzednie trasy interpolowane tą metodą jest podatna na efekt Rungego, lecz przy dużej liczbie węzłów interpolacji można zauważyć, że fragmenty trasy są bardzo dobrze interpolowane, lub przynajmniej zadowalająco.



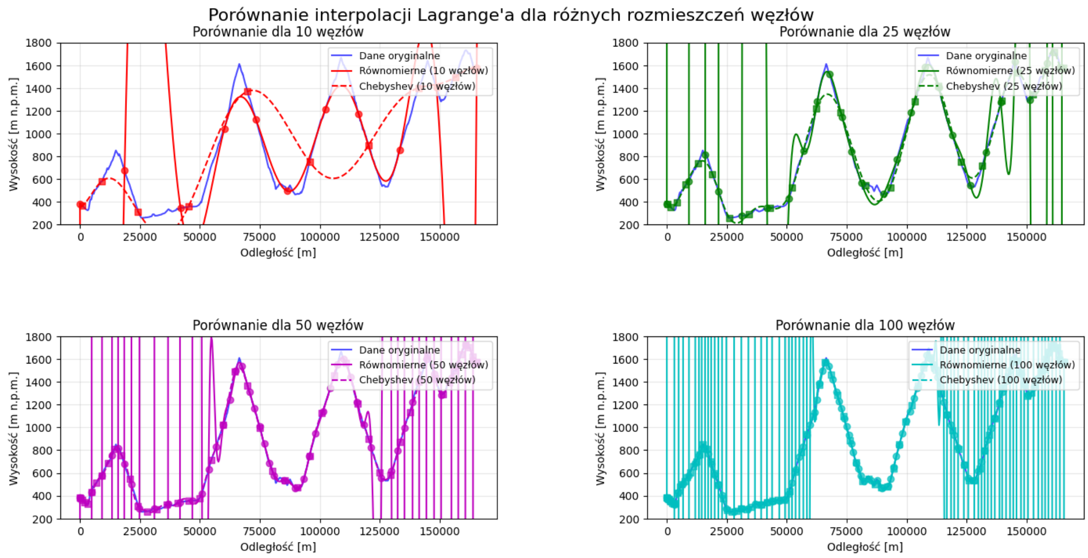


RYS 27: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ LAGRANGE'A DLA ROZŁOŻENIA WĘZŁÓW WEDŁUG ROZKŁADU CHEBYSHEVA

```
Metoda: lagrange_chebyshev
Węzły: 5    | MSE: 189091.5948 | MaxError: 1119.4761
Węzły: 10   | MSE: 125608.2180 | MaxError: 1043.9478
Węzły: 15   | MSE: 15890.5478 | MaxError: 306.6994
Węzły: 20   | MSE: 3986.7154 | MaxError: 235.2554
Węzły: 25   | MSE: 3208.2913 | MaxError: 263.8134
Węzły: 50   | MSE: 365.4473 | MaxError: 77.4495
Węzły: 100  | MSE: 108.6615 | MaxError: 60.6956
```

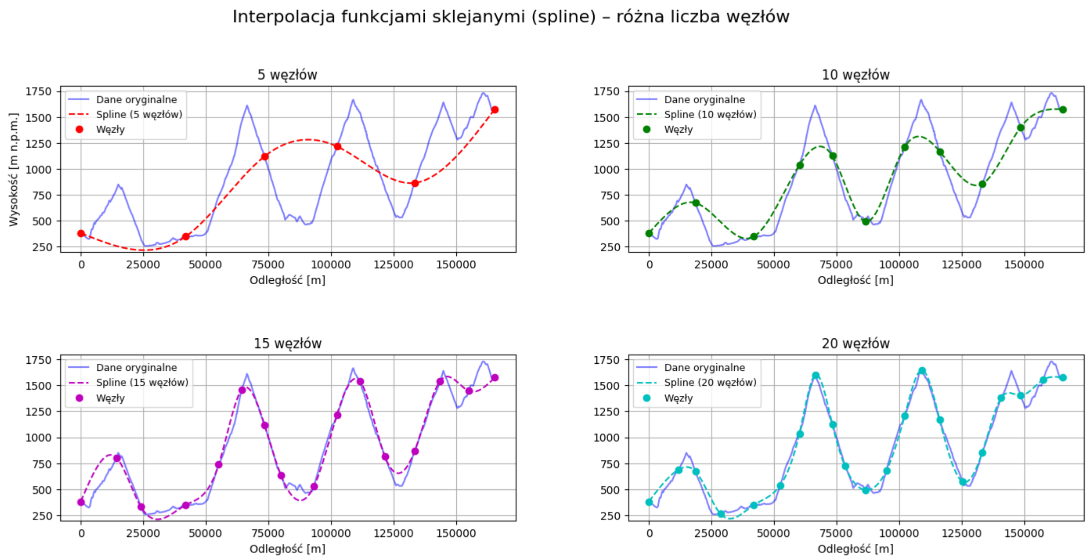
RYS 28: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Rozkład Chebysheva znowu był bardzo pomocny i pomógł w interpolacji trasy. Największe różnice są na szczytach gór, gdzie brakuje węzłów do zaznaczenia miejsca najwyższego, przez który musi przechodzić trasa, która przez ich brak zaokrąglała je.



RYS 29: WYKRES PRZEDSTAWIA PORÓWNANIE ROZŁOŻENIA PUNKTÓW INTERPOLACJI

Można zauważyć, że dla środkowych dwóch gór lepszą interpolacje ma rozłożenie równomierne niż Chebysheva.



RYS 30: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ FUNKCJI SKLEJANYCH

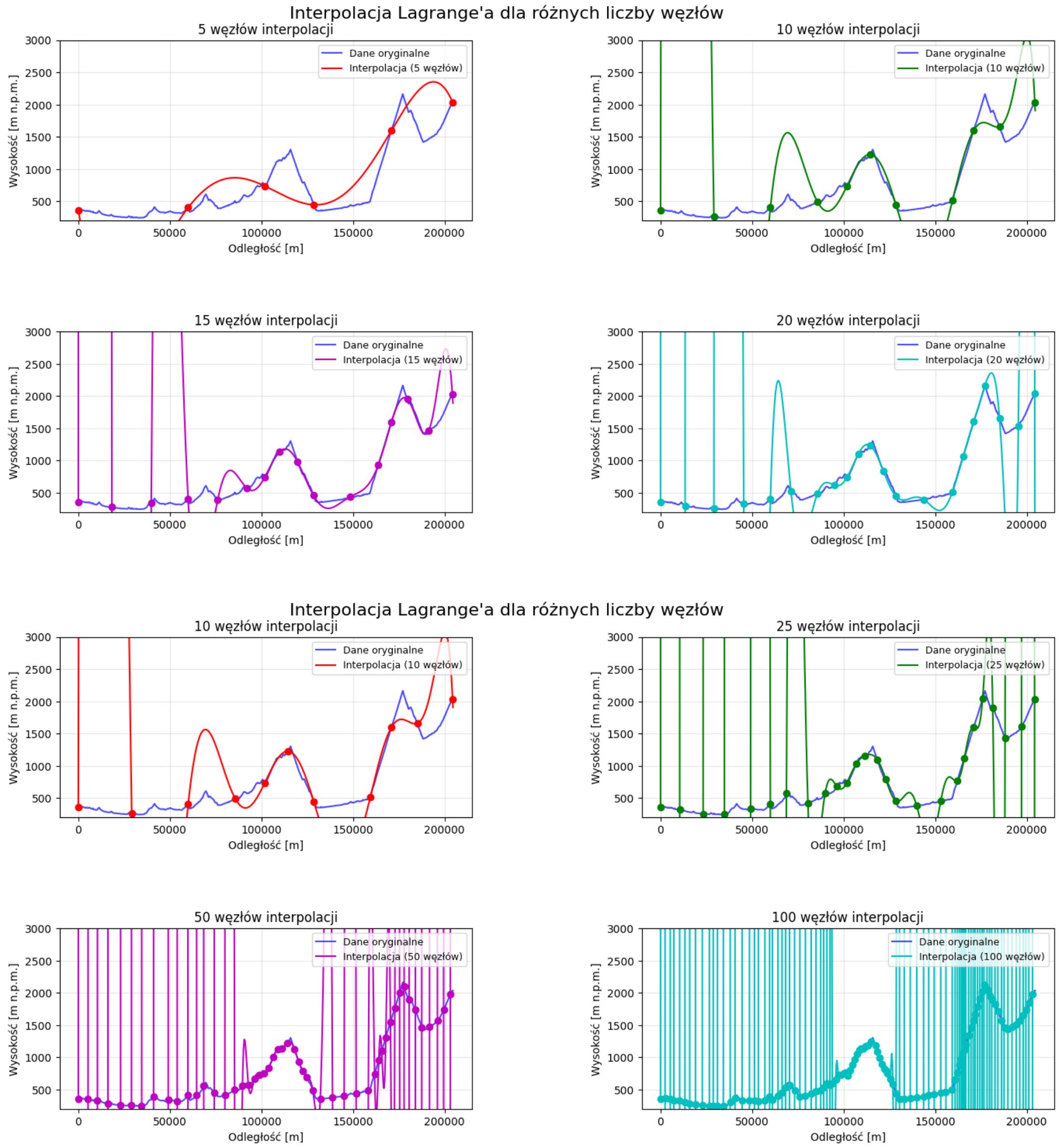
```
Metoda: spline
Węzły: 5     | MSE: 127143.6920 | MaxError: 817.6796
Węzły: 10    | MSE: 26340.2381 | MaxError: 403.5748
Węzły: 15    | MSE: 8318.3940 | MaxError: 254.8976
Węzły: 20    | MSE: 4239.6991 | MaxError: 211.7931
Węzły: 25    | MSE: 1435.5973 | MaxError: 135.8497
Węzły: 50    | MSE: 272.9114 | MaxError: 87.2014
Węzły: 100   | MSE: 81.2558 | MaxError: 51.9721
```

RYS 31: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Interpolacja ta w tym przypadku ta działa naprawdę dobrze przy długich podjazdach i wiążących się z nimi długimi zjazdami w takim przypadku funkcje sklejane mogą dawać najlepsze wyniki, co znakomicie pokazuje rysunek numer 30, na którym widać, że dla długich i przewidywalnych odcinków interpolacja zachowuje się znakomicie, a gdy trasa zaczyna zmieniać swój charakter nasza interpolacja zaczyna się psuć.

Trasa 5: Etap 20 -> Verrès - Sestrière -> bardzo wysokie góry, długa trasa

Trasa ta charakteryzuje się swoją długością oraz szczytami pod jakie jest podjazd. Dla interpolacji będzie kilka ciężkich miejsc, gdzie gwałtownie zmienia się charakterystyka trasy.

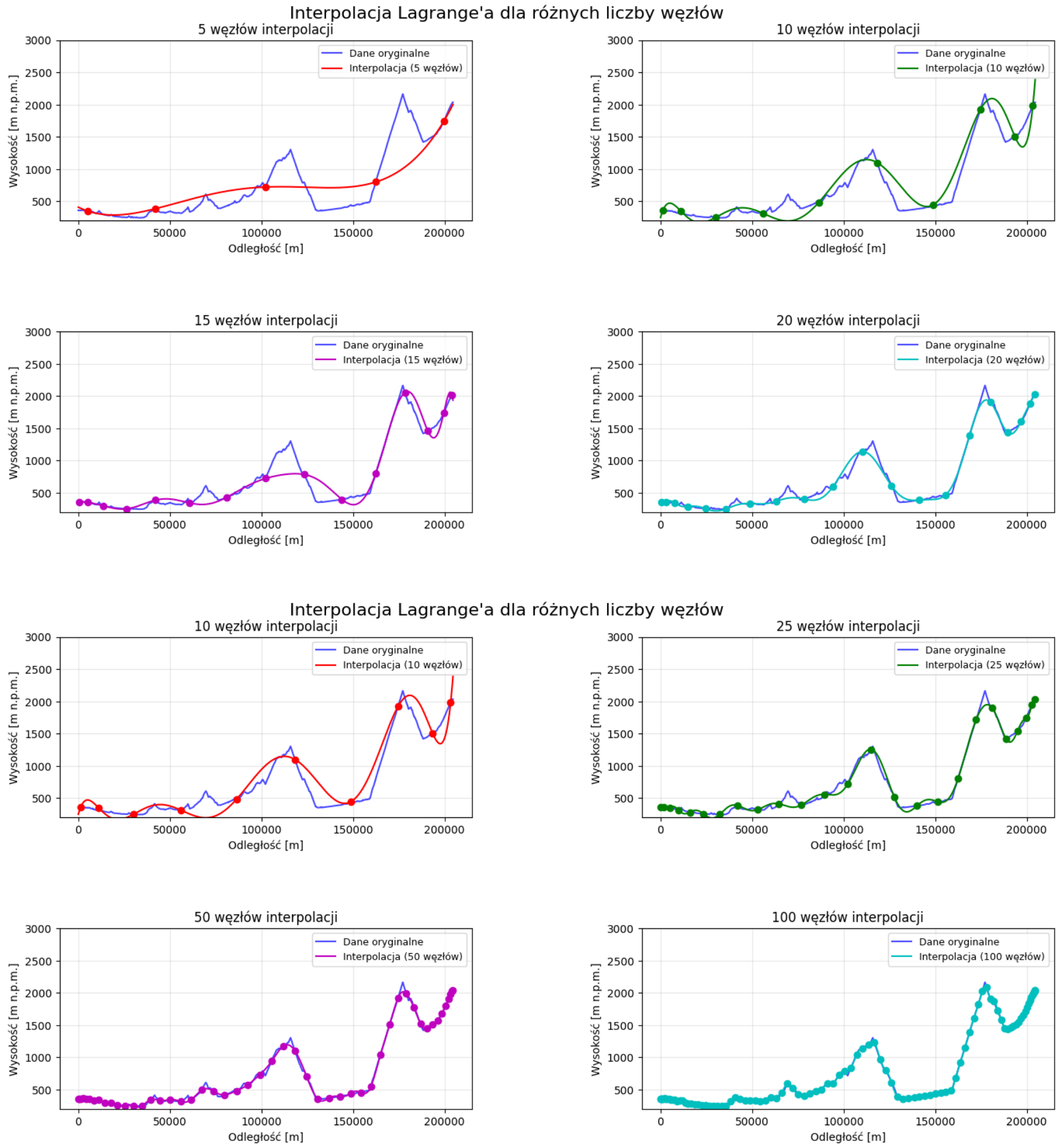


RYS 32: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ LAGRANGE'A DLA RÓWNOMIERNEGO ROZŁOŻENIA WĘZŁÓW

```
Metoda: lagrange_uniform
Węzły: 5    | MSE: 373557.7506 | MaxError: 1398.0019
Węzły: 10   | MSE: 260989362.3725 | MaxError: 65145.0877
Węzły: 15   | MSE: 42359746278.1288 | MaxError: 1066240.1499
Węzły: 20   | MSE: 8374729165381.1572 | MaxError: 17791501.9350
Węzły: 25   | MSE: 4555347472228592640.0000 | MaxError: 15159454302.9182
Węzły: 50   | MSE: 123462659680291058832951245838840391270 4.0000 | MaxError: 3705808669900288819 20.0000
Węzły: 100  | MSE: 671034744503428790567305637423947951938571608090490705031267581662762598474306289664.0000 | MaxErr
or: 133648735378675634897529289212849493429 45280.0000
```

RYS 33: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Tak jak w poprzednich wypadkach trasach interpolacja jest dobra w pewnych przedział i wszędzie jest wszechobecny efekt Rungego.

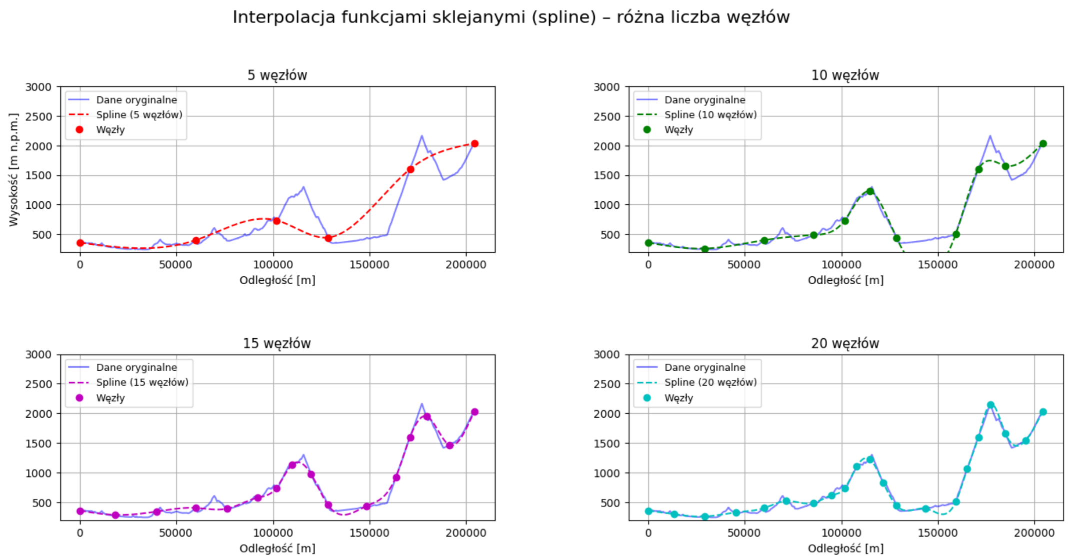


RYS 34: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ LAGRANGE'A DLA ROZŁOŻENIA WĘZŁÓW WEDŁUG ROZKŁADU CHEBYSHEVA

```
Metoda: lagrange_chebyshev
Węzły: 5    | MSE: 96504.4082 | MaxError: 1154.6509
Węzły: 10   | MSE: 31551.1559 | MaxError: 434.7672
Węzły: 15   | MSE: 20464.0901 | MaxError: 496.6667
Węzły: 20   | MSE: 4124.8065 | MaxError: 250.3168
Węzły: 25   | MSE: 3705.2020 | MaxError: 239.0900
Węzły: 100  | MSE: 169.0525 | MaxError: 71.2490
```

RYS 35: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Tak jak w poprzedniej trasie interpolacja ma problem ze szczytami gór i przy zbyt małej ilości węzłów interpolacji trasa ta jest źle odwzorowywana.



RYS 36: WYKRES PRZEDSTAWIA INTERPOLACJE METODĄ FUNKCJI SKLEJANYCH

```
Metoda: spline
Węzły: 5    | MSE: 81550.5905 | MaxError: 749.7024
Węzły: 10   | MSE: 30541.8882 | MaxError: 553.2405
Węzły: 15   | MSE: 3757.5601 | MaxError: 229.2236
Węzły: 20   | MSE: 2497.8153 | MaxError: 173.9331
Węzły: 25   | MSE: 1398.4317 | MaxError: 122.9972
Węzły: 50   | MSE: 392.2976 | MaxError: 71.4060
Węzły: 100  | MSE: 81.9477 | MaxError: 44.5172
```

RYS 37: RYSUNEK PRZEDSTAWIA BŁĄD INTERPOLACJI TRASY

Metoda funkcji sklejnanych znowu wypada najlepiej przy mniejszych liczbach węzłów interpolacji, przy nieznie większym MSE niż poprzednik.

Wnioski:

Na podstawie przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że wybór metody interpolacji ma kluczowe znaczenie dla jakości odwzorowania profilu wysokościowego tras. Interpolacja wielomianowa metodą Lagrange’a sprawdza się jedynie w ograniczonych przypadkach – zwłaszcza gdy liczba węzłów jest niewielka i rozmieszczona według rozkładu Chebysheva. Przy równomiernym rozmieszczeniu węzłów i większej ich liczbie pojawia się wyraźny efekt Rungego, który prowadzi do znacznych zniekształceń wykresu, szczególnie na końcach przedziałów.

Zastosowanie punktów Chebysheva pozwala na częściowe wyeliminowanie tych problemów, szczególnie na trasach o łagodnym przebiegu. Niemniej jednak, metoda ta wciąż ma ograniczenia w odwzorowywaniu gwałtownych zmian wysokości, które są charakterystyczne dla tras górskich. W takich przypadkach mimo poprawy, interpolacja nadal może tracić lokalne szczegóły – zwłaszcza krótkie i strome podjazdy.

Interpolacja przy użyciu funkcji sklejenia trzeciego stopnia okazała się bardziej elastyczna i odporna na wspomniane problemy. Dzięki lokalnemu charakterowi działania oraz zapewnieniu ciągłości pierwszej i drugiej pochodnej, metoda ta lepiej odwzorowuje profil wysokościowy niezależnie od typu trasy. Już przy niewielkiej liczbie węzłów interpolacja spline’ami daje dobre wyniki, szczególnie na krótkich trasach oraz tych o przewidywalnym charakterze, jak długie podjazdy i zjazdy.

Podsumowując, metoda funkcji sklejenia trzeciego stopnia wydaje się najbardziej odpowiednia do interpolacji profili wysokościowych tras rowerowych, zwłaszcza w kontekście tras o zróżnicowanej topografii. Mimo to, również metoda Lagrange’a z odpowiednim doborem węzłów (Chebyshev) może być przydatna w analizie tras o łagodnym przebiegu i małej liczbie punktów charakterystycznych.