第二题中无限循环条件的证明

记某一状态下简历数为 $length$，则当且仅当 $\begin{cases} X = Y \\ (K+M)\ mod\ length = 1 \end{cases}$ 时，简历永远取不完。

命题 1 程序进入无限循环 $\Leftrightarrow$ 从**某一状态**起非空链表长度不再发生变化。

“$\Leftarrow$”是显然的，下面给出“$\Rightarrow$”的证明。

用归谬法证明。假设不存在这样的状态，即非空链表在任意状态之后，都至少存在一个与之长度不同的状态，并且也能进入无限循环。

由题意可知，若 X 和 Y 移动后相遇，则 X 和 Y 将取走同一份简历，简历数减少 1；随后 Z 又放入新的简历，简历数又增加 1，因此操作前后简历数相等。若 X 和 Y 移动后没有相遇，则 X 和 Y 将取走不同简历，简历数减少 2；随后 Z 又放入新的简历，简历数增加 1，操作前后简历数减少。

所以根据假设，链表长度会不断减小，直至长度为 0，与非空链表这一前提矛盾，因此假设不成立。

命题 1 证毕。

命题 2 从某一状态起非空链表长度不再发生变化当且仅当从该状态起 X 和 Y 移动后始终满足$X = Y$。

先证“$\Leftarrow$”。

由于 X 和 Y 移动后相遇的情况下，简历数不发生变化，所以可以更进一步地说，如果从某一状态起始终有$X = Y$，那么简历数就始终不变。

接着证“$\Rightarrow$”。

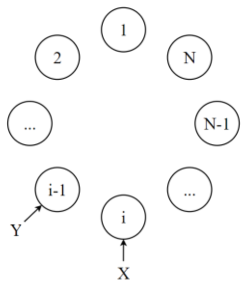
用归谬法证明。假设非空链表在任意状态后都至少存在一个移动后没有相遇的状态，则简历数必然减少，与命题不符，因此假设不成立。

注：当链表长度为 1 时必有$X = Y$，由题意可知，此时简历可被取完，程序应当结束，但这里仍认为符合无限循环的条件，这样做是为了使算法更具一般性。

命题 2 证毕。

下面研究使$X = Y$恒成立的条件。

如果 X 和 Y 移动后满足$X = Y$，则“取走简历”后，Y 必然位于 X 的顺时针相邻位置，如下图所示。



将“Y 位于 X 的顺时针相邻位置”记为状态 S。结合命题 1、2，无限循环条件是从某一状态起 X 和 Y 移动后始终有$X = Y$，故不妨将状态 S 作为初始状态。不考虑结点编号，那么每个结点都是完全等价的，在几何上具有对称性。

所以在状态 S 下，X 和 Y 在任意结点处相遇都能回到状态 S，使过程重复进行下去。

置当前状态为 S，记当前链表长度为 *length*，X 处结点编号为 *i*，目标结点编号为 *j*。不难列出使$X = Y$的条件：

$$\begin{cases} X = Y \\ K = u \cdot length + j - i + 1, u \in N \\ M = v \cdot length + i - j, v \in N \\ 1 \le i, j \le length, \mathrm{i}, \mathrm{j} \in N \end{cases} \tag{1}$$

消去 *i* 和 *j* 可得：

$$\begin{cases} X = Y \\ K + M = (u + v) \cdot length + 1, u, v \in N \end{cases} \tag{2}$$

最后对等式两边取余，消去 u 和 v，便可得到无限循环条件的最简形式：

$$\begin{cases} X = Y \\ (K + M)\ mod\ length = 1 \end{cases} \tag{3}$$

证毕。