Assignment 7

4.2

1) $$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -3 \\ 6 & -2 & 0 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-15+12 \\ 6-6+0 \\ -8+12-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ yes

3) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 7x_3 - 6x_4$

$x_2 = -4x_3 + 2x_4$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 7x_3 - 6x_4 \\ -4x_3 + 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

5) $$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 2x_2 - 4x_4$

$x_3 = 9x_4$

$x_5 = 0$

$$\therefore \vec{x} = x_2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

7) $$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$2+2+0 = 4 \neq 2$

not closed under addition.

11) $\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b-2d\\s+d\\b+3d\\d\end{bmatrix}$

$s+d=0$
$d=-s$
$b-2d=0$
$b-2(-s)=0$
$b+10=0$
$b=-10$

$b+3d=-10+3(-s)$
$=-7s\neq 0$

$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$ not in space.
Not vector space

15) $\begin{bmatrix}2s+3t\\r+s-2t\\4r+s\\3r-s-t\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}2\\1\\1\\-1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}3\\-2\\0\\-1\end{bmatrix} + r\begin{bmatrix}0\\1\\4\\3\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}2&3&0\\1&-2&1\\1&0&4\\-1&-1&3\end{bmatrix}$

17) a) $k=2$
b) $k=4$

23) $-6x_1+12x_2=2$
$-3x_1+6x_2=1$
$\boxed{\text{not in Col}A}$ X

$x_1-2x_2=1/3$
$x_1=2x_2+1/3$

$-6(2x_2+1/3)+12x_2=2$
$\cancel{-12x_2}+-2\cancel{+12x_2}=2$

$\begin{bmatrix}-6&12\\-3&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$
$\boxed{\text{in Nul}A \checkmark}$

39) if $\vec{x}=\begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}30\\20\\-10\end{bmatrix}=10\vec{x}$

4.3

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ linearly independent

I spans $\mathbb{R}^3$

$\dim \operatorname{Col} A = 3$

$\dim \operatorname{Nul} A = 0$

$\dim A = 3$

spans $\mathbb{R}^3$

~~yes~~

3) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ not basis for $\mathbb{R}^3$, linearly dependent

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b \\ -2 & -4 & 1 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b \\ 0 & 2 & -5 & c+2a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b \\ 0 & 0 & 0 & c+2a-b \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 & a \\ 0 & 1 & -5/2 & b/2 \\ 0 & 0 & 0 & c+2a-b \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 9/2 & a-\frac{3b}{2} \\ 0 & 1 & -5/2 & b/2 \\ 0 & 0 & 0 & c+2a-b \end{bmatrix}$

$x_1 = -9/2x_3 + a - \frac{3b}{2}$

$x_2 = 5/2x_3 + b/2$

$x_3 = x_3$

infinite solutions, doesn't span $\mathbb{R}^3$

5) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ∴ not basis,

$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & 9 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

linearly dependent, does span $\mathbb{R}^3$

7) $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ linearly independent, not basis for $\mathbb{R}^3$, doesn't span $\mathbb{R}^3$

9) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & -2 & 10 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x_1 = 3x_3 - 2x_4$
$x_2 = 5x_3 - 4x_4$

$\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

11) $x + 2y + z = 0$ $\quad x = -2y - z$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{x} = \begin{bmatrix} -2y - z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

13) $B(\text{Col } A) = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}$

Basis of

$x_1 = -6x_3 - 5x_4$
$x_2 = -5/2\, x_3 - 3/2\, x_4$

$\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad B(\text{Nul } A) = \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ -5/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$B(\text{Row } A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

15) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -8 & -6 \\ 2 & -3 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 12 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix} \right\}$

19) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 \\ -3 & 9 & 11 \\ 7 & -2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 7/4 \\ 0 & 39/4 & 65/4 \\ 0 & -15/4 & -25/4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 7/4 \\ 0 & 39 & 65 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

4.4

1) $x = P_B [x]_B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -4 & 2 & -7 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 9 \end{bmatrix}$

5) $P_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} \qquad P_B^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$P_B^{-1} x = [x]_B = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \end{bmatrix}$

7) $P_B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -3 & 9 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 9 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 34/10 & 3 & -2/10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/10 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}$

$P_B^{-1} = \begin{bmatrix} 17/5 & 3 & -1/5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 17/5 & 3 & -1/5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3/10 & 0 & 1/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 8 \end{bmatrix}$

13) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}}$

15) T, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots v_n\}$

$[x]_{\mathcal{B}} \cong c_1 v_1 + c_2 v_2 \dots + c_n v_n$

$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

21) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0v_1 - v_2 - v_3 = 5v_1 - 2v_2 + 0v_3$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & -8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ $x_1 - 5x_3 = 5$, $x_1 = 5x_3 + 5$, $x_2 = -x_3 - 2$

$\vec{x} = x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$5\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

25) $P_{\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 9 - -2 \cdot -4} \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}$

31) $\{1 + 2t^3, 2 + t - 3t^2, -t + 2t^2 - t^3\} \cong \left\{ \begin{array}{c} t^0 \\ t^1 \\ t^2 \\ t^3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ linearly independent, no free variables

4.5

1) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ dim = 2

3) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ dim = 3

5) $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$ dim = 3

7) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$B = \{0\}$ dim = 0

9) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -5 & -20 & 15 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

dim = 2

11) dim Nul $A = 2$

dim Col A = dim Row A = 3

13) dim Nul $A = 2$

dim Col A = dim Row $A = 2$

15) dim Nul $A = 0$

dim Col A = dim Row $A = 3$

27) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

pivots

spans $\mathbb{R}^4$ $\therefore$ basis of $\mathbb{R}^3$

29) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & -12 & -12 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 12 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$

$$[p]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$