Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles, montrer que

$$e^{a_n} \sim \left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n \iff a_n = o(\sqrt{n})$$

Tout d'abord, nous pouvons remarquer que, pour deux suites (a_n) et (b_n)

$e^{an} \sim e^{b_n} \iff \dfrac{e^{a_n}}{e^{b_n}} \to 1 \iff e^{(a_n - b_n)} \to 1 \iff a_n - b_n \to 0$

Nous allons utiliser ce résultat par la suite.

Supposons maintenant que $a_n = o(\sqrt{n})$ et montrons que $e^{a_n} \sim \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n$

Comme $a_n = o(\sqrt{n})$, alors $\dfrac{a_n}{n} = o(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$ et de ce fait,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$$

Nous pouvons faire un développement limité :

$$a_n - n\ln(1 + \frac{a_n}{n}) = a_n - n\left(\frac{a_n}{n} - \frac{a_n^2}{2n^2} + o(1/n)\right)$$

$$a_n - n\ln(1 + \frac{a_n}{n}) = a_n - a_n + \frac{a_n^2}{2n} + o(1)$$

$$a_n - n\ln(1 + \frac{a_n}{n}) = \frac{a_n^2}{2n} + o(1)$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n^2}{2n} = 0$, en utilisant le résultat décrit en introduction

$$\boxed{e^{a_n} \sim \left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n}$$

Pour la réciproque, supposons que $e^{a_n} \sim \left(1 + \dfrac{a_n}{n}\right)^n$

Ce qui est équivalent à $a_n - n\ln(1 + \frac{a_n}{n}) \to 0$

Nous posons la fonction f qui à tout x de $]-1;+\infty[$ associe $f(x) = x - \ln(1+x)$

Une étude de cette fonction montre qu'elle est continue, admet un minimum en 0 qui vaut 0.

Comme $\lim\limits_{n\to\infty} f(\dfrac{a_n}{n}) = 0$, alors nous pouvons montrer par l'absurde que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{n} = 0$

Supposons que la suite $(\dfrac{a_n}{n})$ ne tende pas vers 0, alors

$(\exists\varepsilon > 0)\ (\forall n_0 \in \mathbb{N})\ (n \geq n_0) => (|\dfrac{a_n}{n}| \geq \varepsilon)$

$(\exists\varepsilon' > 0)\ (\forall n_0 \in \mathbb{N})\ (n \geq n_0) => (|f(\dfrac{a_n}{n})| \geq \varepsilon' > 0)$

et alors $n\left(\dfrac{a_n}{n} - \ln(1 + \dfrac{a_n}{n})\right)$ ne peut pas tendre vers 0, ce qui contredit l'hypothèse.

Nous venons de démontrer par l'absurde que $\dfrac{a_n}{n} \to 0$ et donc nous pouvons faire le développement limité.

$$a_n - n\ln(1 + \frac{a_n}{n}) = \frac{a_n^2}{2n} + o(1)$$

Donc forcément, $\dfrac{a_n^2}{n} \to 0$, ce qui est équivalent à $a_n = o(\sqrt{n})$, d'où le résultat.