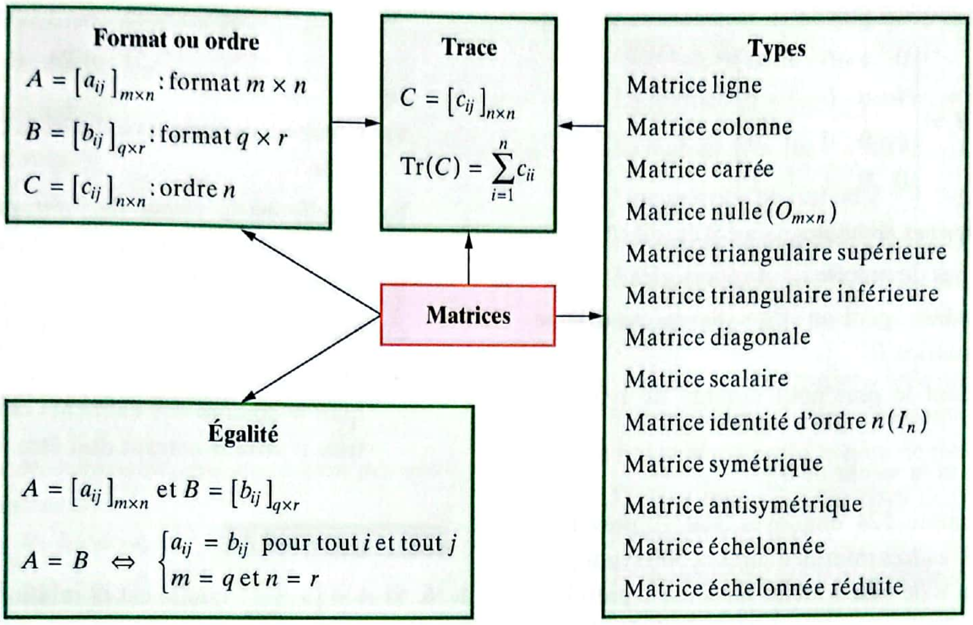
Réseau de concepts



Format ou ordre

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$: format $m \times n$

$B = [b_{ij}]_{q\times r}$: format $q \times r$

$C = [c_{ij}]_{n\times n}$: ordre n

Trace

$C = [c_{ij}]_{n\times n}$

$\mathrm{Tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$

Types

Matrice ligne

Matrice colonne

Matrice carrée

Matrice nulle ($O_{m\times n}$)

Matrice triangulaire supérieure

Matrice triangulaire inférieure

Matrice diagonale

Matrice scalaire

Matrice identité d'ordre n (I_n)

Matrice symétrique

Matrice antisymétrique

Matrice échelonnée

Matrice échelonnée réduite

Matrices

Égalité

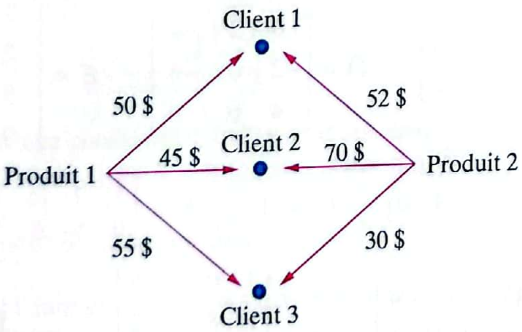
$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ et $B = [b_{ij}]_{q\times r}$

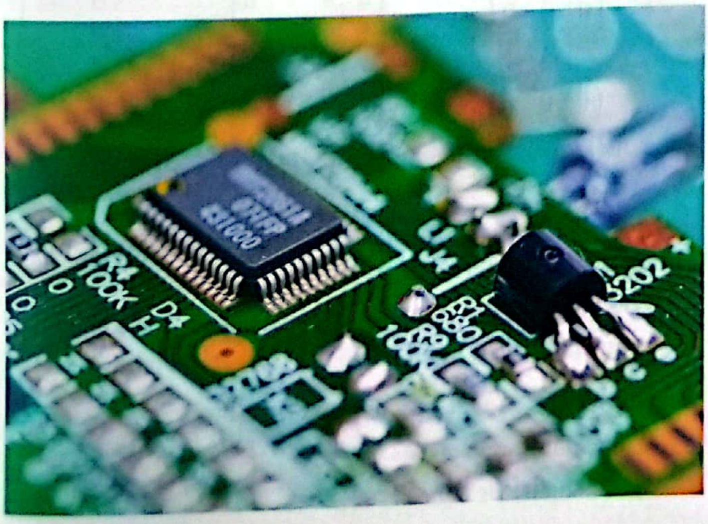
$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_{ij} = b_{ij} \text{ pour tout } i \text{ et tout } j \\ m = q \text{ et } n = r \end{cases}$$

Exercices récapitulatifs

Sections 1.1 et 1.2

1. Un fabricant de composants électroniques vend deux produits différents à trois clients. Les deux produits sont fabriqués dans des usines différentes. Les frais de transport de chaque produit, pour chaque client, sont indiqués dans le schéma suivant.





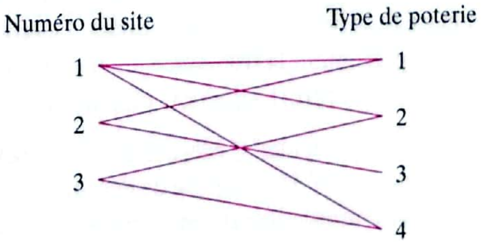
a) Présentez les informations contenues dans le schéma sous la forme d'une matrice A de format 2×3 et où a_{ij} représente les frais de transport à payer pour expédier le produit i au client j.

b) Quelle information la deuxième ligne de la matrice contient-elle ?

c) Quelle information la troisième colonne de la matrice contient-elle ?

d) Quelle information a_{12} donne-t-il ?

2. Une archéologue a étudié trois sites funéraires et y a répertorié quatre types de poterie. Elle a consigné ces informations dans le schéma suivant, où la présence d'un type de poterie dans un site est indiquée par un segment de droite joignant le numéro du site et le type de poterie.



Vous voulez consigner les renseignements du schéma dans une matrice d'observation $A = [a_{ij}]_{3\times 4}$ où

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si le } i^{\text{ième}} \text{ site ne contient pas une poterie du } j^{\text{ième}} \text{ type} \\ 1 & \text{si le } i^{\text{ième}} \text{ site contient une poterie du } j^{\text{ième}} \text{ type} \end{cases}$$

a) Construisez la matrice A.

Un autre archéologue a construit une matrice d'observation B sur le même modèle qu'en a.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Combien de sites cet archéologue a-t-il étudiés ?

c) Combien de types de poterie a-t-il répertoriés ?

d) Quelle information peut-on tirer de la quatrième colonne de la matrice B ?

e) Quel site contient le plus petit nombre de types de poterie ?

f) Donnez le sens et la valeur de b_{31}.

▲ **3.** Une entreprise compte 524 employés, soit : 1 président, 3 vice-présidents, 20 cadres intermédiaires et 500 syndiqués. Leurs salaires annuels de base sont les suivants : le président reçoit 600 000 \$, chaque vice-président 250 000 \$, chaque cadre intermédiaire 100 000 \$, et chaque syndiqué 50 000 \$. En plus de leur salaire de base, les employés touchent une prime annuelle et des actions de la compagnie. La prime annuelle correspond à 10 % du salaire de base, et chaque employé reçoit une action par tranche de 1 000 \$ de salaire. La valeur d'une action est de 5 \$. Construisez la matrice de la rémunération des employés de l'entreprise de manière que les lignes représentent les catégories d'emploi, et les colonnes les différentes modalités de rémunération (dans l'ordre où ces données apparaissent ci-dessus).

■ **4.** On a mené une enquête auprès de 105 détenteurs de permis de conduire, dont 75 sont des hommes. On a dénombré 70 répondants masculins et 25 répondantes qui ont affirmé toujours attacher leur ceinture de sécurité lorsqu'ils conduisent. On a aussi dénombré 7 personnes, dont 3 femmes, qui ont déclaré attacher leur ceinture la plupart du temps. Enfin, les autres personnes ont déclaré ne jamais attacher leur ceinture. Construisez une matrice de format 2×3 où seront consignées les informations concernant le sexe des détenteurs de permis de conduire et la fréquence du port de la ceinture de sécurité. Les données de la première ligne de la matrice se rapportent aux hommes. Les colonnes de la matrice représentent la fréquence du port de la ceinture de sécurité (dans l'ordre : toujours, la plupart du temps, jamais).

■ **5.** En 1936, Wassily Leontief (1906-1999) (Prix Nobel de sciences économiques en 1973) a proposé de décrire les interrelations entre les différents secteurs industriels d'une économie à l'aide d'une matrice carrée. Soit une économie qui compte n industries différentes, chacune produisant des biens (l'extrant) à partir de biens qu'elle a fabriqués elle-même ou encore qu'elle a fait produire par une des autres industries (l'intrant). La matrice des coefficients techniques est la matrice $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$ où a_{ij} représente la valeur (en \$) de l'intrant du $i^{\text{ième}}$ secteur industriel nécessaire à la production de 1 \$ d'extrant par la $j^{\text{ième}}$ industrie.

Soit A la matrice des coefficients techniques d'une

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}15 & 0{,}41 & 0{,}09 \\ 0{,}12 & 0{,}13 & 0{,}35 \\ 0{,}31 & 0{,}24 & 0{,}28 \end{bmatrix}$$

a) Combien de secteurs industriels cette économ t-elle ?

b) Quelle est la valeur de l'intrant du deuxièm industriel nécessaire à la production de 1 \$ d' la troisième industrie ?

c) Quelle information le nombre 0,41 donne-t-il

d) Donnez une raison économique qui explique quoi la somme des éléments d'une colonne d trice d'intrant-extrant doit être inférieure à 1.

Sections 1.2 et 1.3

▲ **6.** Si $A = \left[a_{ij}\right]_{n \times n}$, quelle est la relation ($<$, $>$, ou $=$ indices i et j des éléments de A situés :

a) sur la diagonale principale ?

b) au-dessous de la diagonale principale ?

c) au-dessus de la diagonale principale ?

▲ **7.** Soit les matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 4 \\ -6 & -1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 5 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{bmatrix}$$

a) Donnez le format de chaque matrice et, s'il y calculez-en la trace.

b) Si possible, donnez la valeur de chacun des é suivants : a_{53} ; a_{35} ; b_{23} ; b_{11} ; c_{22} ; d_{12} ; e_{31} ; e_{13} ; h

Lesquelles des matrices données sont :

c) des matrices carrées ?

d) des matrices lignes ?

e) des matrices colonnes ?

f) des matrices nulles ?

g) des matrices triangulaires inférieures ?

h) des matrices triangulaires supérieures ?

i) des matrices diagonales ?

j) des matrices scalaires ?

k) des matrices identités ?

l) des matrices symétriques ?

m) des matrices antisymétriques ?

n) des matrices échelonnées ?

o) des matrices échelonnées réduites ?

▲ **8.** Construisez la matrice des coefficients de chacun des systèmes d'équations suivants :

a)
$$\begin{array}{rcl} 2x + 3y - z + w &=& 6 \\ 5x + w + 3z &=& 2 \\ -3x - 2z + 3y + 5w &=& 9 \\ 4w &=& 12 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcl} x + y - 5 &=& 0 \\ 2x + 3y + 4 &=& 0 \end{array}$$

■ **9.** Quelle est la forme générale d'une matrice diagonale

a) d'ordre 3 ?

b) d'ordre n ?

■ **10.** Quelle est la forme générale d'une matrice antisymétrique d'ordre 3 ?

■ **11.** Une matrice 2×2 échelonnée réduite peut avoir la forme

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où k est une constante. Quelles sont les autres formes possibles d'une matrice 2×2 échelonnée réduite ?

▲ **12.** Construisez les matrices $O_{3\times1}$, $O_{2\times3}$ et I_3.

■ **13.** Dites si l'énoncé est vrai ou faux, et justifiez votre réponse.

■ a) Toutes les colonnes d'une matrice comportent le même nombre d'éléments.

b) Une matrice 50×60 compte plus de lignes que de colonnes.

c) Il n'y a que deux matrices lignes 1×6 qui soient échelonnées.

d) Il n'y a que deux matrices colonnes 6×1 qui soient échelonnées.

e) La seule matrice diagonale d'ordre 3 qui soit échelonnée réduite est I_3.

f) Une matrice $\left[a_{ij}\right]_{3\times2}$ peut être antisymétrique.

g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$

h) La trace d'une matrice antisymétrique vaut 0.

i) Une matrice diagonale est nécessairement échelonnée.

j) Les éléments de la diagonale principale d'une matrice carrée A sont notés a_{ii}.

k) La matrice $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ où $a_{ij} = i \times j$ est symétrique.

l) La matrice $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ où $a_{ij} = i - j$ est antisymétrique.

m) Une matrice de format 8×4 compte 12 éléments.

n) La somme de tous les éléments d'une matrice antisymétrique est égale à la trace de cette matrice.

o) Les matrices d'ordre 1 sont des matrices scalaires.

■ **14.** Une matrice carrée d'ordre n telle que chacune de ses lignes et chacune de ses colonnes ne comptent qu'un seul élément non nul valant 1 porte le nom de matrice de permutation.

a) Écrivez toutes les matrices de permutation d'ordre 2. Combien y en a-t-il ?

b) Écrivez toutes les matrices de permutation d'ordre 3. Combien y en a-t-il ?

▲ **15.** Énoncez les critères d'égalité de deux matrices A et B.

▲ **16.** Pour quelles valeurs des paramètres x et y les matrices A et B sont-elles égales ?

$$A = \begin{bmatrix} 2x + 3 & 8 \\ y & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} x^2 & 8 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

■ **17.** Donnez la forme générale d'une matrice à la fois symétrique et antisymétrique.

▲ **18.** Soit A une matrice symétrique et B une matrice antisymétrique. Inscrivez les éléments manquants des matrices.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \_\_ & 3 & \_\_ & \_\_ \\ -1 & 4 & 9 & \_\_ & -3 \\ \_\_ & \_\_ & -1 & 6 & \_\_ \\ 4 & k & \_\_ & 8 & m \\ -2 & \_\_ & -5 & \_\_ & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \_\_ & 3 & \_\_ & \_\_ \\ -1 & \_\_ & 9 & \_\_ & -3 \\ \_\_ & \_\_ & 0 & 6 & 5 \\ 4 & k & \_\_ & 0 & m \\ -2 & \_\_ & -5 & \_\_ & 0 \end{bmatrix}$$

▲ **19.** Construisez les matrices suivantes :

$$A = \left[a_{ij}\right]_{2\times3} \quad \text{où} \quad a_{ij} = (-1)^{i+j}\, j^2$$

$$B = \left[b_{ij}\right]_{3\times3} \quad \text{où} \quad b_{ij} = i + 2j$$

$$C = \left[c_{ij}\right]_{3\times4} \quad \text{où} \quad c_{ij} = \frac{(-1)^i (i + j)}{j^2}$$

$$D = \left[d_{ij}\right]_{1\times4} \quad \text{où} \quad d_{ij} = 2^j$$

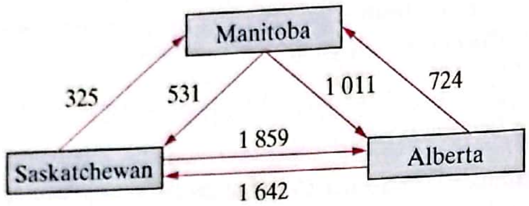
$$E = \left[e_{ij}\right]_{3\times3} \quad \text{où} \quad e_{ij} = (-2)^i\, j$$

20. Donnez l'expression du terme général $(a_{ij}; b_{ij}; c_{ij}; d_{ij}; e_{ij})$ de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -4 & -4 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

21. Le schéma suivant fait état de la migration interprovinciale entre octobre 2013 et décembre 2013, dans les provinces de l'Ouest canadien.



a) À partir des renseignements contenus dans ce schéma, complétez le tableau suivant présentant la matrice de migration interprovinciale nette dans les provinces de l'Ouest.

Migration interprovinciale nette entre octobre 2013 et décembre 2013, provinces de l'Ouest canadien

Résidence (octobre 2013)	**Résidence (décembre 2013)**		
	Manitoba	**Saskatchewan**	**Alberta**
Manitoba			
Saskatchewan			
Alberta			

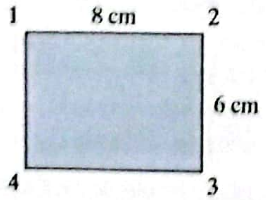
Source : Statistique Canada, *Estimations démographiques trimestrielles. Octobre à décembre 2013*, n° 91-002-X au catalogue, vol. 27, n° 4, mars 2014, p. 48.

b) Faites la somme de tous les nombres de la matrice. Expliquez le résultat.

c) Quelle province affiche le solde migratoire interprovincial net le plus élevé ?

d) Quelle province affiche le solde migratoire interprovincial net le plus faible ?

22. Soit un rectangle dont les côtés mesurent respectivement 6 cm et 8 cm, et dont les sommets sont numérotés 1, 2, 3 et 4.

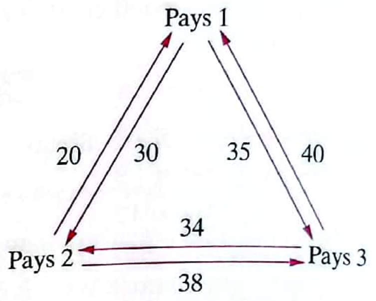


a) Formez la matrice $A = [a_{ij}]_{4\times4}$ où a_{ij} représente la d tance entre les $i^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ sommets.

b) Vérifiez que la matrice A est symétrique et expliquez résultat dans le contexte.

23. On peut représenter les échanges commerciaux (valeur d importations et des exportations) entre des pays sous form matricielle. On peut également représenter la balance com merciale (valeur des exportations moins valeur des impo tations) sous forme matricielle.

a) À partir du schéma suivant, construisez la matric $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ des échanges commerciaux entre trois pay dans laquelle a_{ij} représente la valeur (en milliards de do lars [G\$]) des biens importés par le $i^{\text{ième}}$ pays du $j^{\text{ième}}$ pay



L'origine de la flèche indique le pays exportateur, e l'extrémité le pays importateur, alors que le nombre indique la valeur des importations ou des exportations

b) Expliquez pourquoi les éléments de la diagonale principale d'une matrice des échanges commerciaux entre des pays valent toujours 0.

c) À partir du schéma présenté en *a*, construisez la matrice B de la balance commerciale dans laquelle b_{ij} représente la balance commerciale du $i^{\text{ième}}$ pays à l'endroit du $j^{\text{ième}}$ pays.

d) Comment doit-on interpréter un élément négatif dans la matrice B ?

e) Construisez la matrice $C = [c_{ij}]_{3\times3}$ des échanges commerciaux entre trois pays où c_{ij} représente la valeur (en milliards de dollars [G\$]) des biens importés par le $i^{\text{ième}}$ pays du $j^{\text{ième}}$ pays, sachant que $c_{ij} = i(i-j)^2$.

f) Donnez l'expression générale de l'élément d_{ij} de la matrice D où d_{ij} représente la valeur de la balance commerciale du $i^{\text{ième}}$ pays à l'endroit du $j^{\text{ième}}$ pays, pour les trois pays de la question *e*.

g) Donnez le sens et la valeur de d_{13}.

h) Vérifiez que la matrice D est antisymétrique. Expliquez ce résultat dans le contexte.

24. Un professeur donne un cours par tutorat à trois élèves (James, Jasmine et Julien). L'évaluation des élèves repose sur quatre examens notés sur 25.

a) Quels sont les formats possibles de la matrice R servant à consigner les résultats de ces élèves à chacun des examens ?

b) *Écrivez une matrice R donnant les résultats des trois élèves à chacun des examens, si les résultats de chaque élève se retrouvent sur des lignes différentes de R, selon l'ordre alphabétique.*

c) Donnez le sens de $\sum_{k=1}^{4} r_{2k}$ pour la matrice construite en b.

d) Donnez le sens de $\dfrac{\sum_{k=1}^{3} r_{k4}}{3}$ pour la matrice construite en b.

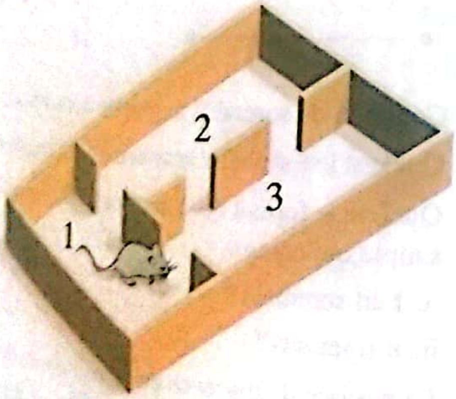
Lorsque plusieurs espèces animales vivent dans un même écosystème, elles entrent généralement en compétition pour leur alimentation. Lorsque deux animaux se disputent la même nourriture, le gagnant est celui qui réussit à s'approprier l'objet de convoitise. Supposons qu'un animal de l'espèce i l'emporte sur un animal de l'espèce j dans une proportion de $c_{ij} = \dfrac{i}{i+j}$.

a) Construisez la matrice de compétition, $C = [c_{ij}]_{3\times3}$, entre trois espèces animales d'un même écosystème.

b) Quelle espèce gagne le plus souvent lorsqu'elle est en compétition avec les autres espèces ?

c) Que vaut $c_{ij} + c_{ji}$? Expliquez ce résultat.

Une souris se déplace entre les compartiments d'un labyrinthe qui en compte trois.



Chaque fois qu'elle entend une cloche, elle change de compartiment en passant au hasard par une des portes existantes. La matrice de transition $P = [p_{ij}]_{3\times3}$ donne les probabilités des déplacements d'un compartiment à l'autre :

p_{ij} = probabilité que la souris se déplace du compartiment j au compartiment i

a) Donnez le sens et la valeur de p_{21}.

b) Que vaut p_{ii} ? Expliquez votre réponse.

c) Construisez la matrice de transition P.

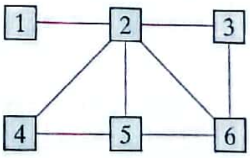
d) Que vaut $\sum_{i=1}^{3} p_{i2}$? Expliquez votre réponse.

27. Au cours du dernier mois, trois revendeurs de service interurbain se sont livrés à une concurrence féroce. Ces trois entreprises détiennent la totalité du marché. L'entreprise 1 a conservé 80 % de sa clientèle, mais en a perdu 10 % au profit de l'entreprise 2. L'entreprise 2 a retenu 75 % de sa clientèle, mais en a perdu 5 % au profit de l'entreprise 3. Enfin, l'entreprise 3 détient toujours 90 % de sa clientèle, mais elle en a perdu 5 % au profit de l'entreprise 2. La matrice de transition $T = [t_{ij}]_{3\times3}$ qui représente les mouvements de clientèle est définie par

t_{ij} = part de la clientèle de j qui passe à i

Construisez la matrice de transition du marché de l'interurbain.

28. Un agent de sécurité effectue sa ronde entre 6 postes différents (notés 1, 2, 3, 4, 5 et 6) où il doit signaler électroniquement sa présence. Après avoir atteint un poste donné, il y reste 15 min et se dirige par la suite vers un autre poste qui lui est adjacent. La direction qu'il prend alors est complètement aléatoire, chaque direction ayant donc une même probabilité d'être prise. Le schéma qui suit indique les trajets possibles entre les différents postes.



a) Construisez la matrice $T = [t_{ij}]_{6\times6}$ où t_{ij} représente la probabilité de passer, après une pause de 15 min, du poste j au poste i lorsque l'agent se déplace entre deux postes adjacents qui sont liés entre eux.

b) Expliquez pourquoi les éléments de la diagonale principale de la matrice T sont tous nuls.

c) Expliquez pourquoi la somme des éléments d'une colonne de T donne 1, quelle que soit la colonne considérée.

⬟ **29.** Un amateur de radio synthonise toujours une de cinq fréquences qu'on note f_1, f_2, f_3, f_4 et f_5. Après 15 min d'écoute, il change de station radio selon les règles suivantes:

- S'il écoutait f_1, alors il synthonise f_2.
- S'il écoutait f_5, alors il synthonise f_4.
- S'il écoutait f_k (où $k = 2, 3$ ou 4), alors il synthonise f_{k-1} avec une probabilité de $1/3$ et f_{k+1} avec une probabilité de $2/3$.

Construisez la matrice $T = [t_{ij}]_{5\times 5}$ où t_{ij} représente la probabilité de passer de la fréquence f_j à la fréquence f_i lorsque l'auditeur effectue un changement de fréquence après une période d'écoute de 15 min.

▲ **30.** Au jeu d'échecs, on joue à deux sur un échiquier formé de 64 cases alternativement noires et blanches, qui forment 8 lignes et 8 colonnes. Chaque joueur dispose de 16 pièces (un roi, une reine, deux fous, deux cavaliers, deux tours et huit pions). Un joueur possède des pièces blanches (les Blancs) et l'autre des pièces noires (les Noirs). La position initiale des pièces sur l'échiquier est indiquée dans la figure suivante.

Étant donné la forme de l'échiquier, on peut représenter un jeu d'échecs par une matrice. On détermine d'abord la valeur des pièces comme suit.

Valeur des pièces

	Couleur	
Pièce	**Blanc**	**Noir**
Roi	9	−9
Reine	8	−8
Fou	4	−4
Cavalier	2	−2
Tour	5	−5
Pion	1	−1

On note la position de chacune des cases de l'échiquier comme si celui-ci constituait une matrice; puis on associe à chaque case occupée le nombre correspondant à la valeur de la pièce qui s'y trouve, et à chaque case libre la valeur 0. Si on note la matrice par $A = [a_{ij}]_{8\times 8}$, alors, par exemple, $a_{85} = 9$, parce qu'au début du jeu le roi blanc se trouve à l'intersection de la huitième ligne et de la cinquième colonne.

a) Complétez la matrice suivante, qui représente la po
initiale des pièces sur un jeu d'échecs.

$$\begin{bmatrix} \_ & -2 & -4 & -8 & \_ & \_ & \_ & -5 \\ -1 & -1 & -1 & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ & \_ \\ \_ & \_ & \_ & \_ & 9 & \_ & \_ & \_ \end{bmatrix}$$

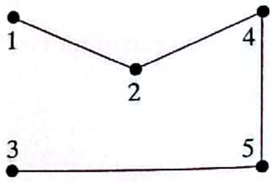
b) Voici la matrice représentant la position des pièce
l'échiquier après plusieurs coups. Quelle notation
tricielle emploie-t-on pour désigner le roi noir dan
échiquier?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Quelles sont les pièces restantes des Blancs?

d) Quelle matrice obtiendra-t-on si les Blancs déplac
leur fou dans la case située au-dessus de leur roi?

▲ **31.** La théorie des graphes est la branche des mathématiq
qui étudie les réseaux (sociaux, électriques, de communi
tion, de transport, etc.). Un graphe simple est un ensem
fini de points (appelés sommets) et de liens entre ces poi
(des segments de droite appelés arêtes). La matrice d'a
jacence d'un graphe simple est $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ où $a_{ij} = 1$ si l
sommets i et j sont liés par une arête et $a_{ij} = 0$ dans le c
contraire. Voici un graphe simple et sa matrice d'adjacen



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Combien de sommets le graphe compte-t-il?

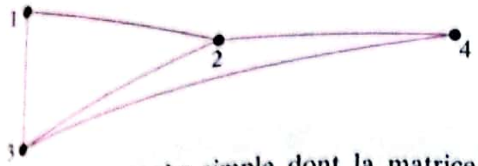
b) Quel est le format de la matrice d'adjacence du graph

c) Quel est le format de la matrice d'adjacence d'un grap
simple qui compte
   i. huit sommets?
   ii. n sommets?

d) La matrice d'adjacence du graphe simple illustré pré
demment est symétrique. Peut-on dire que la matrice d'a
jacence de n'importe quel graphe simple est symétriqu

Si vous répondez oui, justifiez votre réponse. Si vous répondez non, donnez un contre-exemple.

e) Quelle est la matrice d'adjacence du graphe simple suivant ?



f) Construisez un graphe simple dont la matrice d'adjacence est

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

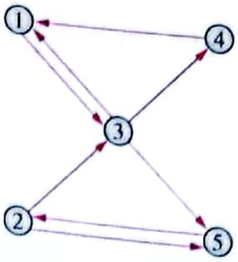
g) Pourquoi la matrice suivante ne peut-elle pas être la matrice d'adjacence d'un graphe simple ?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

h) Si un graphe est formé de sommets et de flèches, on dit qu'il est orienté. La matrice d'adjacence $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ d'un graphe orienté est définie comme suit :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si une flèche part de } i \text{ vers } j \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Construisez la matrice d'adjacence A du réseau de liens aériens entre cinq villes représenté par le graphe orienté suivant :



i) Construisez le graphe orienté représenté par la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Section 1.4

32. Prouvez l'énoncé. Au préalable, distinguez les hypothèses et la conclusion.

a) Une matrice nulle carrée est une matrice scalaire.

b) Une matrice scalaire dont la trace vaut 0 est une matrice nulle.

c) La diagonale principale d'une matrice antisymétrique ne comporte que des zéros.

33. Montrez que deux matrices scalaires de même format sont égales si et seulement si leurs traces sont égales.

Chapitre 1

1. a) $A = \begin{bmatrix} 50 & 45 & 55 \\ 52 & 70 & 30 \end{bmatrix}$

b) Les frais de transport du deuxième produit pour chacun des clients.

c) Les frais de transport de chacun des deux produits pour le troisième client.

d) Les frais de transport (45 $) du premier produit pour le deuxième client.

2. a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) 4

c) 5

d) Le quatrième type de poterie est présent dans 3 sites, soit les premier, deuxième et quatrième sites.

e) Le troisième site, qui ne contient que des poteries du premier type.

f) $b_{31} = 1$; le troisième site contient des poteries du premier type.

3. $\begin{bmatrix} 600\,000 & 60\,000 & 3\,000 \\ 250\,000 & 25\,000 & 1\,250 \\ 100\,000 & 10\,000 & 500 \\ 50\,000 & 5\,000 & 250 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 70 & 4 & 1 \\ 25 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

5. a) 3

b) $a_{23} = 0{,}35$ $

c) Il faut utiliser 0,41 $ de biens (intrant) du premier secteur industriel pour produire 1 $ de biens (extrant) de la deuxième industrie.

d) La production d'un bien n'est rentable que si la valeur des intrants nécessaires à la fabrication de ce bien est inférieure à celle du bien produit. La somme des éléments de la $j^{\text{ième}}$ colonne représente ce qu'il en coûte pour produire 1 $ d'extrants de la $j^{\text{ième}}$ industrie. Il faut donc que cette somme soit inférieure à l'unité pour que la production soit rentable.

6. a) $i = j$ b) $i > j$ c) $i < j$

7. a)

Matrice	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*K*	*L*	*M*	*N*	*P*	*Q*
Format	4×5	3×3	2×2	3×3	4×1	1×3	1×1	2×6	3×3	4×4	2×2	2×3	3×3	2×2
Trace		0	4	0			1		1	21	−1		6	0

b) a_{53} n'est pas défini ; $a_{35} = 10$; $b_{23} = 7$; $b_{11} = 1$; $c_{22} = 2$; $d_{12} = 2$; $e_{31} = 5$; e_{13} n'est pas défini ; $h_{16} = 7$.

c) *B*, *C*, *D*, *G*, *K*, *L*, *M*, *P* et *Q*.

d) *F* et *G*.

e) *E* et *G*.

f) *N*

g) C, G, L et P.
h) C, G, K, M et P.
i) C, G et P.
j) C et G.
k) G
l) B, C, G et P.
m) D
n) G, H, K et N.
o) G et N.

8. a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

9. a) $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$.

b) $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$ où $b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ k_i & \text{si } i = j \end{cases}$ et $k_i \in \mathbb{R}$.

10. $A = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$ où a, b et $c \in \mathbb{R}$.

11. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. $O_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. a) Vrai.
b) Faux.
c) Faux.
d) Vrai.
e) Faux.
f) Faux.
g) Faux.
h) Vrai.
i) Faux.
j) Vrai.
k) Vrai.
l) Vrai.
m) Faux.
n) Vrai.
o) Vrai.

14. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

15. Soit $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ et $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times q}$. Alors $A = B$ si et seulement si :

- les deux matrices ont le même format, à savoir $m = p$ et $n = q$;
- tous les éléments correspondants de A et de B sont égaux, à savoir $a_{ij} = b_{ij}$ pour toutes les valeurs de i et de j.

16. $y = -5$ et $x = -1$ ou $x = 3$.

17. Les seules matrices qui sont à la fois symétriques et antisymétriques sont les matrices nulles $O_{n\times n}$.

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ -1 & 4 & 9 & k & -3 \\ 3 & 9 & -1 & 6 & -5 \\ 4 & k & 6 & 8 & m \\ -2 & -3 & -5 & m & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 9 & -k & -3 \\ -3 & -9 & 0 & 6 & 5 \\ 4 & k & -6 & 0 & m \\ -2 & 3 & -5 & -m & 0 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 \\ -1 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} -2 & -3/4 & -4/9 & -5/16 \\ 3 & 1 & 5/9 & 3/8 \\ -4 & -5/4 & -2/3 & -7/16 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 4 & 8 & 12 \\ -8 & -16 & -24 \end{bmatrix}$

20. $a_{ij} = 2$, $b_{ij} = i$, $c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ i^2 & \text{si } i = j \end{cases}$, $d_{ij} = (-1)^{i+j}$ et $e_{ij} = (-1)^{i+1}\,i$.

21. a) **Migration interprovinciale nette entre octobre 2013 et décembre 2013, provinces de l'Ouest canadien**

Résidence (octobre 2013)	**Résidence (décembre 2013)**		
	Manitoba	**Saskatchewan**	**Alberta**
Manitoba	0	206	287
Saskatchewan	−206	0	217
Alberta	−287	−217	0

Source : Statistique Canada, *Estimations démographiques trimestrielles. Octobre à décembre 2013*, nº 91-002-X au catalogue, vol. 27, nº 4, mars 2014, p. 48.

b) 0

c) L'Alberta.

d) Le Manitoba.

22. a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 10 & 6 \\ 8 & 0 & 6 & 10 \\ 10 & 6 & 0 & 8 \\ 6 & 10 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

b) La matrice est symétrique parce qu'elle est carrée et que $a_{ij} = a_{ji}$: la distance du point i au point j est la même que celle du point j au point i.

23. a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 40 \\ 30 & 0 & 34 \\ 35 & 38 & 0 \end{bmatrix}$

b) Les éléments de la diagonale principale sont de la forme a_{ii}. Ils représentent la valeur des biens importés par le $i^{\text{ième}}$ pays du $i^{\text{ième}}$ pays. Or, pour qu'il y ait importation, il faut que les deux pays soient distincts. Par conséquent, $a_{ii} = 0$.

c) $B = \begin{bmatrix} 0 & 10 & -5 \\ -10 & 0 & 4 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

d) Une balance commerciale négative indique que la valeur des exportations est plus faible que la valeur des importations : on parle alors d'une balance commerciale déficitaire.

e) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 12 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

f) $d_{ij} = c_{ji} - c_{ij} = j(j-i)^2 - i(i-j)^2 = (j-i)^3$

g) $d_{13} = 8$; le premier pays a un excédent commercial de 8 G$ à l'endroit du troisième pays, c'est-à-dire que la valeur des exportations du pays 1 vers le pays 3 dépasse de 8 G$ la valeur des importations du pays 1 en provenance du pays 3.

h) Comme $d_{ij} = (j-i)^3 = -(i-j)^3 = -d_{ji}$, la matrice D est antisymétrique : une balance commerciale déficitaire d'un pays x à l'endroit d'un pays y indique que le pays y affiche une balance commerciale excédentaire de même amplitude à l'endroit du pays x.

24. a) 3×4 ou 4×3.

b) La matrice est constituée d'éléments compris entre 0 et 25. À titre d'exemple, elle pourrait être $R = \begin{bmatrix} 20 & 25 & 21 & 22 \\ 18 & 23 & 21 & 17 \\ 22 & 20 & 23 & 24 \end{bmatrix}$.

c) Cette expression représente la note finale de Jasmine.

d) Cette expression représente la moyenne des notes des trois élèves au dernier examen.

25. a) $C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) La troisième espèce.

c) 1

26. a) L'élément p_{21} représente la probabilité que la souris se déplace du compartiment 1 au compartiment 2. Comme le compartiment 1 compte deux portes, la probabilité que la souris passe au compartiment 2 est de $\frac{1}{2}$, de sorte que $p_{21} = \frac{1}{2}$.

b) $p_{ii} = 0$

c) $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$

d) $\sum_{i=1}^{3} p_{i2} = 1$

27. $T = \begin{bmatrix} 0{,}80 & 0{,}20 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}90 \end{bmatrix}$

28. a) $T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$

b) Chaque élément de la diagonale représente la probabilité que l'agent de sécurité se déplace du poste i au poste i, c'est-à-dire qu'il ne se déplace pas. Or, dans l'énoncé, on indique que l'agent se déplace vers un autre poste après un arrêt de 15 min, de sorte que la probabilité de ne pas se déplacer est nulle, d'où $t_{ii} = 0$ pour toutes les valeurs de i.

c) La somme des éléments de la colonne j représente la somme des probabilités qu'il quitte le poste j pour un autre poste. Comme il doit nécessairement rejoindre un poste, quel qu'il soit, il y a une certitude qu'il rejoint un poste, d'où une somme (une probabilité) de 1.

29. $T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$

30. a) $\begin{bmatrix} -5 & -2 & -4 & -8 & -9 & -4 & -2 & -5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 8 & 9 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) a_{44}

c) Les Blancs possèdent encore cinq pions, un fou, la reine et le roi.

d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

31. a) 5

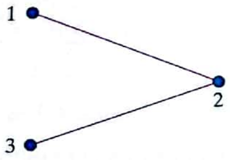
b) 5×5

c) i. 8×8 ii. $n \times n$

d) Oui. Toute matrice d'adjacence est carrée. De plus, un sommet i est relié au sommet j si et seulement si j l'est également à i. Par conséquent, $a_{ij} = 1$ si et seulement si $a_{ji} = 1$. Ainsi, $a_{ij} = a_{ji}$ pour toutes les valeurs de i et de j correspondant à des sommets reliés entre eux: toute matrice d'adjacence est symétrique.

e) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

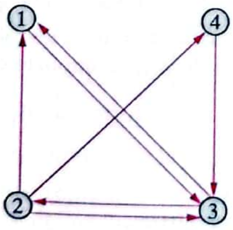
f)



g) La matrice d'adjacence d'un graphe simple doit être symétrique. La matrice A n'étant pas symétrique, elle ne peut pas être la matrice d'adjacence d'un graphe simple.

h) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

i)



32. a) Hypothèse : A est une matrice nulle carrée. Conclusion : A est une matrice scalaire. On aurait également pu formuler le théorème comme suit : « Si A est une matrice nulle carrée, alors A est une matrice scalaire. »

Une matrice nulle carrée est une matrice scalaire.

PREUVE

Si A est une matrice nulle carrée, alors tous ses éléments sont nuls. Tous les éléments de A situés de part et d'autre de la diagonale principale sont donc nuls : A est une matrice diagonale. De plus, tous les éléments de la diagonale principale de A valent 0 et sont donc identiques. Par conséquent, A est une matrice scalaire.

On pourrait également écrire cette preuve en recourant davantage au langage symbolique :

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n} = O_{n\times n} \quad\Rightarrow\quad a_{ij} = 0 \quad\Rightarrow\quad A \text{ est une matrice diagonale}$$

De plus, $a_{ii} = 0$ pour tout i, de sorte que tous les éléments de la diagonale sont égaux. Par conséquent, A est une matrice scalaire. ⊡

b) Hypothèse : A est une matrice scalaire dont la trace vaut 0. Conclusion : A est une matrice nulle. On aurait également pu formuler le théorème comme suit : « Si A est une matrice scalaire dont la trace vaut 0, alors A est une matrice nulle. »

Une matrice scalaire dont la trace vaut 0 est une matrice nulle.

PREUVE

Si A est une matrice scalaire d'ordre n, alors tous les éléments de sa diagonale principale sont égaux et tous les autres éléments de A valent 0. Si on note a la valeur de chaque élément de la diagonale principale, alors la trace de A vaut na. Comme la trace de A vaut 0 par hypothèse, $na = 0 \Rightarrow a = 0$. Ainsi, tous les éléments de A, qu'ils appartiennent ou non à la diagonale principale, valent 0. Par conséquent, la matrice A est une matrice nulle.

On pourrait également écrire cette preuve en recourant davantage au langage symbolique :

Soit $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ une matrice scalaire dont la trace est nulle. Alors

$$i \neq j \quad\Rightarrow\quad a_{ij} = 0$$

De plus, comme A est une matrice scalaire, $a_{ii} = a$, de sorte que

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a = na$$

d'où

$$\mathrm{Tr}(A) = 0 \quad\Rightarrow\quad na = 0 \quad\Rightarrow\quad a = 0 \quad\Rightarrow\quad a_{ii} = 0$$

Par conséquent, $a_{ij} = 0$ pour tout i et pour tout j, de sorte que

$$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n} = O_{n\times n}$$ ⊡

c) Hypothèse : A est une matrice antisymétrique. Conclusion : La diagonale principale de A ne comporte que des zéros. On aurait également pu formuler le théorème comme suit : « Si A est une matrice antisymétrique, alors la diagonale principale de A ne comporte que des zéros. »

La diagonale principale d'une matrice antisymétrique ne comporte que des zéros.

PREUVE

Dans une matrice antisymétrique $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, on a $a_{ij} = -a_{ji}$ pour toutes les valeurs de i et de j. Par conséquent, $a_{ii} = -a_{ii}$, de sorte que $2a_{ii} = 0$, d'où $a_{ii} = 0$. La diagonale principale de A ne comporte donc que des zéros. ⊡

33. Deux matrices scalaires de même format sont égales si et seulement si leurs traces sont égales.

PREUVE

La preuve se divise en deux parties.

(⇒) Distinguons les hypothèses et la conclusion : si A et B sont des matrices scalaires de même format et que A et B sont égales (hypothèses), alors $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ (conclusion).

Comme A et B sont des matrices égales, leurs éléments correspondants sont égaux. Comme cela est vrai en particulier pour les éléments des diagonales principales, la somme des éléments de la diagonale principale de A est égale à la somme des éléments de la diagonale principale de B : $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.

(⇐) Distinguons les hypothèses et la conclusion : si A et B sont des matrices scalaires de même format et que leurs traces sont égales (hypothèses), alors $A = B$ (conclusion).

Comme A et B sont des matrices de même format, il suffit de montrer que leurs éléments correspondants sont égaux pour vérifier l'égalité. Or, tous les éléments non situés sur les diagonales principales respectives des matrices valent 0, car A et B sont des matrices scalaires. De plus, si A et B sont d'ordre n, alors $\text{Tr}(A) = na$ et $\text{Tr}(B) = nb$ où a et b sont les valeurs respectives des éléments de la diagonale principale de A et de la diagonale principale de B. Enfin, également par hypothèse, les traces respectives des deux matrices sont égales ; par conséquent, $na = nb$. On en déduit que $a = b$. Tous les éléments correspondants de A et de B, qu'ils appartiennent ou non à la diagonale principale, sont égaux, et les matrices ont le même format. Par conséquent, $A = B$. ⊡

Chapitre 2

1. a) $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -17 & 13 & 3 \\ 0 & -28 & 20 \\ 5 & -10 & -19 \end{bmatrix}$

c) Non défini.

d) $\begin{bmatrix} 7 & -1{,}5 & 17 & 15 \end{bmatrix}$

e) Non défini.

f) $\begin{bmatrix} -4 & -1 & -5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 11 & -5 \\ 8 & 1 \\ 15 & 8 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 11 & 8 & 15 \\ -5 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

i) A

j) Non défini.

2. $C = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$

3. a) p_{23} représente le prix du deuxième produit dans le troisième point de vente en 2013.

r_{43} représente le prix du quatrième produit dans le troisième point de vente en 2014.

q_{32} représente la quantité vendue du troisième produit dans le deuxième point de vente en 2013.