# Chapitre 3

# Ensemble, relation, fonction

## 3.1 Définitions

**Ex. 1** — Remplir si possible chacune des cases suivantes :

| Mots | Extension | Compréhension | intervalle |
|---|---|---|---|
| Les nombres pairs. | | | |
| | $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$ | | |
| | | $\{x \in \mathbb{Z} \mid \lvert x\rvert \leq 5\}$ | |
| | | | $]0,1[$ |
| Nombre premier plus petit que 5. | | | |

**Ex. 2** — Vrai ou faux

a. $\dfrac{18}{2} \in \mathbb{Z}$
b. $\{2,4,6\} \in \mathbb{N}$
c. $\pi \in \mathbb{Q}$
d. $2 \in \{\{2\}\}$
e. $\{2\} \in \{\{2\}\}$
f. $\{2,3,5\} \subseteq \mathbb{R}$
g. $\varnothing \in \{0,1,2,3,\ldots\}$
h. $\varnothing \subseteq A$, $A$ un ensemble
i. $A \subseteq A$, $A$ un ensemble
j. $\{\varnothing\} \subseteq \mathbb{N}$
* k. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
* l. $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$
* m. $\varnothing \subseteq \mathbb{R}^3$
* n. $I_2 \in \mathbb{R}^2$
* o. $\varnothing \in \mathbb{R}^3$

**Ex. 3** — Soit $A = \{a,b,c\}$ et $B = \{1,2,3,4\}$. Énumérer les éléments de $A \times B$.

**Ex. 4** — Représenter en extension l'ensemble puissance des ensembles suivants :

a. $\{a,b\}$
b. $\{a,b,c\}$
c. $\{a\}$
d. $\{\{\}\}$ (c'est à dire $\{\varnothing\}$)
e. $P(\{a,b\})$
f. $\{a,b\} \times \varnothing$

**Ex. 5** — Donner la cardinalité des ensembles suivants :

a. $\varnothing$
b. $\{\varnothing, \{a\}\}$
c. $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$
d. $P(\{a, b, c\})$
e. $P(\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\})$
f. $P(\varnothing)$
g. $P(P(\varnothing))$
h. $\mathbb{Z}$
i. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ est premier}\}$
j. $A \times A$, si $A = \{a, b, c\}$
k. $P(A) \times A$, si $A = \{a, b, c\}$
l. $\{x \in \mathbb{N} \mid x_b \text{ a au plus 5 chiffres }\}$

## 3.2 Opérations sur les ensembles

**Ex. 6** — Soit les trois ensembles suivants :

- $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- $A = \{a, b, c, d, e\}$
- $B = \{a, b, f\}$
- $C = \{b, c, d, g\}$

2

a. Représenter par un diagramme de Venn les ensembles $A, B, C$.
b. Énumérer l'ensemble $A \cup B$.
c. Énumérer l'ensemble $A \cap \overline{C}$.
d. Énumérer l'ensemble $A - B$.
e. Énumérer l'ensemble $A \cap B \cap C$.
f. Énumérer l'ensemble $A \cup B \cup C$.
g. Énumérer l'ensemble $\overline{A \cap B \cap C}$.
h. Énumérer l'ensemble $\overline{A \cap B}$.
i. Énumérer l'ensemble $\overline{A} \cup \overline{B}$.
j. Énumérer l'ensemble $\overline{A} \cap B$.

**Ex. 7** — Soient $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est pair}\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ est multiple de } 3\}$.

a. Quelle est l'union $A \cup B$ ?
b. Quelle est l'intersection $A \cap B$ ?

**Ex. 8** — Soit $U = \mathbb{R}$ (ensemble des réels), $A = [0, 5]$et $B = [3, 10]$.

a. Quelle est l'union $A \cup B$ ?
b. Quelle est l'intersection $A \cap B$ ?
c. Quelle est $\overline{A}$ ?
d. Quel est $\overline{A \cup B}$ ?

**Ex. 9** — Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$.

a. Quel est le complémentaire de l'union $A$ et de $B$ ?
b. Quel est le complémentaire de l'intersection $A$ et de $B$ ?

**Ex. 10** — Parmi 40 postes de travail, 25 ont des licences *Maple* et 30 ont des licences *Office* et 4 n'en ont aucune. Calculer le nombre de postes qui ont les deux licences ?

**Ex. 11** — Dans un groupe de 38 personnes :

- 18 parlent français ;
- 18 parlent anglais ;
- 26 parlent espagnol ;
- 14 parlent français et espagnol ;
- 9 parlent français et anglais ;
- 13 parlent anglais et espagnol ;
- 4 ne parlent ni français, ni anglais, ni espagnol.

Représenter cette situation avec un diagramme de Venn.

**Ex. 12** — On a catégorisé les dépenses d'un groupe de 160 étudiants. Parmi ceux-ci, 81 possède un cellulaire, 97 une automobile et 89 un logement. De plus, 21 ont ces trois dépenses et 4 n'en n'ont aucune. Finalement, 140 ont un cellulaire ou une automobile et 151 ont une automobile ou un logement
Calculer combien d'étudiants ont seulement un cellulaire.

## 3.3 Produit cartésien, relations et fonctions

**Ex. 13** — Identifier les fonctions dans les réels parmi les relations suivantes :

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

b. $f(x) = 3 + \dfrac{2}{x}$

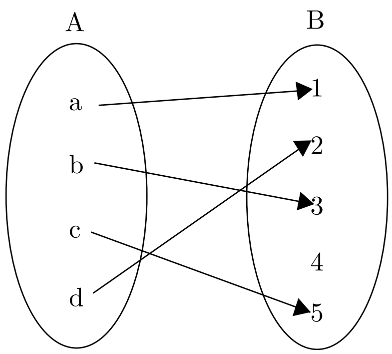
c. $f(x) = log(x^2 - 1)$

d. $f(x) = sin(x)$

e. $f(x) = \pm\sqrt{x^4+3}$

f. $f(x) = tan(x)$

**Ex. 14** — Identifier le domaine et la portée des fonctions suivantes :

a. 


b. $f(x) = \sqrt{x^2+6x+5}$

c. $f(x) = log_\pi\left(\dfrac{4}{x^2}\right)$

**Ex. 15** — Décrire en compréhension la portée de $f : A \to B$.

**Ex. 16** — Déterminer si les relations décrites sont des fonctions injectives, surjectives et bijectives de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

a. $f(n) = n + 1$

b. $f(n) = 2n^2 + 1$

c. $f(n) = 2n^3 + 1$

d. $f(n) = \left\lfloor \dfrac{n}{3} \right\rfloor$

**Ex. 17** — Déterminer si les relations décrites sont des fonctions injectives, surjectives et bijectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. $f(x) = k, k \in \mathbb{Z}$

b. $f(x) = 2x + 1$

c. $f(x) = 2x^2 + 1$

d. $f(x) = 2x^3 + 1$

**Ex. 18** — Démontrer que $f(x) = 3x^2 - 6x + 4$ n'est pas une fonction surjective de $\mathbb{R}^2$.

**Ex. 19** — Démontrer que $f(x) = 5x - 3$ est une fonction injective de $\mathbb{R}^2$.

## 3.4 Quelques paradoxes

**Ex. 20** — Donner un exemple d'ensemble qui appartient à lui-même.

## 3.5 La théorie des ensembles

**Ex. 21** — Vrai ou faux (en ZF)

a. L'ensemble $\varnothing$ est un élément de $\{\varnothing\}$.
b. L'axiome de la séparation interdit la construction de $\{x \mid x \notin x\}$.
c. L'ensemble des ensembles appartient à lui-même.
d. L'axiome de l'infini garantit l'existence des entiers naturels.
e. Dans ZF, il existe un ensemble qui contient tous les ensembles.
f. L'axiome de la fondation interdit $A \in A$.

**Ex. 22** — Déterminer si les ensembles suivants respectent une construction axiomatique ZF.

a. $X = \{X\}$
b. $Y = \{Y, \{Y\}\}$
c. $Z = \{X \mid X \notin X\}$
d. $U = \{X \mid X \text{ est un ensemble}\}$
e. $V = \{\{\{\{\dots\}\}\}\}$
f. $\{x \in V \mid x \in x\}$
g. $\{x \in V \mid x \notin x\}$
h. $\{x \in V \mid x \text{ est un ensemble de tous les ensembles}\}$
i. $\{x \in \{N\} \mid x \notin \{N\}\}$
j. $\{x \in V \mid \exists y (x \in y \wedge y \in x)\}$

## 3.6 Les grands ensembles

**Ex. 23** — Représenter les nombres suivants sous forme d'une fraction réduite de nombres entiers.

a. $0,0625$
b. $0,21$
c. $0,123\,456\,789$
d. $0,\overline{5}$
e. $0,\overline{35}$
f. $0,41\overline{62}$