Chapitre 5

Structure algébriques

5.1 Structures algébriques

Ex. 1 — Déterminer si les situations suivantes sont des magmas (ensemble munit d'une loi de composition interne).

a. La somme de deux nombres naturels.
b. La différence de deux nombres naturels.
c. Le produit de deux nombres naturels.
d. Le quotient de deux nombres naturels.
e. La racine carrée de la somme de deux nombres réels.
f. La puissance d'un nombre rationnel à un nombre entier dans les réels.

Ex. 2 — Donner la table de Cayley des opérations demandées sur l'ensemble $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

a. $a \star b = a + b \mod 4$
b. $a \star b = a \operatorname{div} b$
c. $a \star b = min(a, b)$
d. $a \star b = c$, où $c = \begin{cases} 1 & \text{si } a \mid b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Ex. 3 — Soit le magma $(A, \star)$ où $A = \{a, b, c, d, e\}$ dont la table de Cayley est représenté ici :

$\star$	a	b	c	d	e
a	e	e	c	d	d
b	d	e	e	c	c
c	d	b	e	c	b
d	d	c	c	d	e
e	b	c	d	c	d

Évaluer les expressions suivantes :

a. $a \star e =$
b. $e \star a =$
c. $a \star d =$
d. $a \star a =$
e. $b \star d =$
f. $b \star e =$
g. $a \star a \star a =$
h. $d \star d =$
i. $d \star d \star d \star d =$
j. $a \star b \star a \star b =$
k. $(a \star b) \star c =$
l. $a \star (b \star c) =$
m. $(a \star d) \star e =$
n. $a \star (d \star e) =$
o. $(a \star b) \star (c \star d) =$
p. $a \star (b \star c) \star d =$

Ex. 4 — Utiliser un ordinateur (Excel) ou beaucoup de patience pour trouver les 8 semigroupes sur l'ensemble $E = \{0, 1\}$ parmi les 16 magmas possibles.

Ex. 5 — Vérifier que les magmas suivants ne sont pas des demi-groupes.

a.

$\star$	a	b	c
a	c	a	c
b	b	c	c
c	c	b	a

b.

$\star$	a	b	c
a	a	a	c
b	c	c	a
c	c	c	b

Ex. 6 — Vérifier si les magmas sur $\{0, 1, 2\}$, dont la table de multiplication est fournie, forment un quasi-groupe, une boucle, un semigroupe, un monoïde ou un groupe.

a.
$$\begin{array}{c|ccc} \star & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

d.
$$\begin{array}{c|ccc} \star & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{c|ccc} \star & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

e.
$$\begin{array}{c|ccc} \star & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{c|ccc} \star & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

f.
$$\begin{array}{c|ccc} \star & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

Ex. 7 — Déterminer si les magmas suivants sont des demi-groupes, quasigroupe, boucle, monoïde, groupe.

Nom	Définition	Associatif	inverse gauche	inverse droite	identité	Type
Multiplication	$\forall x,y \in \mathbb{R}, x \star y = x \times y$					
Minimum	$\forall x,y \in \mathbb{R}, x \star y = min(x,y)$					
Minimum	$\forall x,y \in \mathbb{N}, x \star y = min(x,y)$					
2^{me} composante	$\forall x,y \in \mathbb{R}, x \star y = y$					
Soustraction	$\forall x,y \in \mathbb{R}, x \star y = x - y$					
Union	$\forall A,B \in \mathcal{U}, A \star B = A \cup B$					
PPCM	$\forall a,b \in \mathbb{N}, a \star b = ppcm(a,b)$					
Multiplication banale	$\forall x,y \in \mathbb{R}, x \star y = 0$					

Ex. 8 — Démontrer que pour $(E,\star)$ un monoïde d'identité e, si a et b sont inversibles alors $a \star b$ l'est aussi et $(a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$.

5.2 Isomorphisme

Ex. 9 — Démontrer que les structures algébriques suivantes sont isomorphes.

a.

$\star$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

et

$\cdot$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

b.

$\star$	0	1	2	3
0	3	1	0	1
1	1	1	1	1
2	0	1	2	3
3	1	1	3	2

et

$\star$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	3	0	1
2	0	0	1	2
3	0	1	2	3

Ex. 10 — Vérifier que la fonctions $f : (A, \star) \to (B, \cdot)$ est un homomorphisme.

$(A, \star)$:

*	0	1	2	3	4
0	0	1	0	2	2
1	1	2	1	3	1
2	0	1	2	4	4
3	3	4	3	0	3
4	4	1	4	0	2

, et $(B, \cdot)$:

.	0	1	2
0	1	0	2
1	0	1	1
2	1	2	1

, f est définie par la table :

x	$f(x)$
0	1
1	0
2	1
3	2
4	1