

# Laboratoire 3

## Preuves :

Ici, assurez-vous en comparant que les preuves présentées sont différentes de celles de vos collègues.

1. Démontrer par contradiction qu'il n'existe pas de plus petit nombre rationnel strictement positif.  
C'est à dire :  $\neg (\exists x \in \mathbb{Q}^+, \forall y \in \mathbb{Q}^+ \mid y \leq x)$  (7 pts)
2. Démontrer que l'ensemble  $S = \{x \in P(\mathbb{R}^+) \mid ((a \in x) \wedge (b \in x)) \rightarrow ab \in x\}$  (7 pts).

## Relations

3. Considérons l'ensemble  $(A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$  et les deux relations suivantes :
  - $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (5, 6), (6, 5)\}$
  - $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$

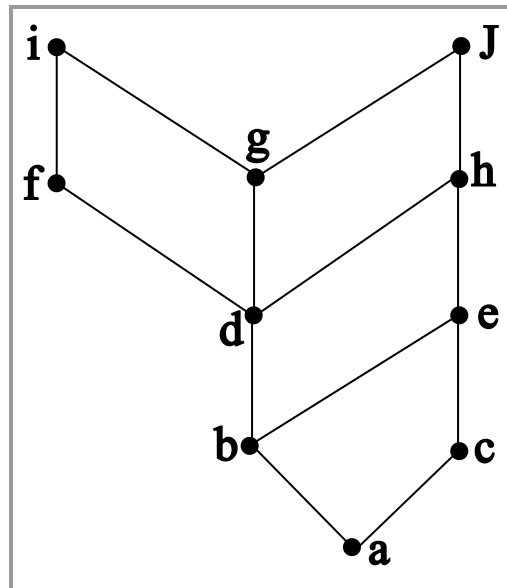
Pour chaque relation  $R_1$  et  $R_2$  :

- a. Construire la matrice d'adjacence (6 pts).
- b. Représenter la relation par un graphe orienté (6 pts).
- c. Déterminer si la relation est (réflexive, irreflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, connexe, dense).  
Justifiez vos réponses en mentionnant les éléments ou contre-exemples pertinents (12 pts).

4. Soit la relation d'équivalence  
 $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ compte le même nombre de facteur que } b\}$  où  
 $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 15\}$ .

- a. Représenter la relation  $R$  en extension (4 pts).
- b. Représenter la relation l'aide d'un graphe orienté (4 pts).
- c. Énumérer toutes les classes d'équivalence de  $R$  (5 pts).

5. Soit la relation d'ordre  $\preceq$  sur l'ensemble  $A = \{a, b, c, d, f, g, h, i, j\}$  représenté par la diagramme de Hasse suivant (15 pts):



- S'agit-il d'un ordre total ou partiel ? Justifier votre réponse.
- Identifier les éléments demandés
  - a. Éléments minimaux
  - b. Éléments maximaux
  - c. Élément le plus grand
  - d. Élément le plus petit
  - e. Minorant de  $\{b,e\}$
  - f. Majorant de  $\{b,e\}$
  - g. Minorant de  $\{b,d,g\}$
  - h. Majorant de  $\{b,d,g\}$
  - i. Infimum de  $\{b,e\}$
  - j. Supremum de  $\{b,e\}$
  - k. Infimum de  $\{b,d,g\}$
  - l. Supremum de  $\{b,d,g\}$

## Remise

- 4 points sont réservés pour la présentation du travail (travail sur 70).
- Remettre 1 copie par équipe de 2 ou 3 étudiants avant le **jeudi 27 novembre à 18h45** dans ma case au 4<sup>me</sup> étage au DIM ou au cours d'algèbre linéaire en main propre.