Examen 1 : préparation

1. Soit les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 2 & x \\ x & 2 \end{bmatrix}, \text{ si } x \neq 0$$

Pour chacune des matrices suivantes, indiquer si elles sont :

	A	B	C	D	E
matrice ligne					
matrice colonne					
triangulaire supérieure					
triangulaire inférieure					
diagonale					
scalaire					
identité					
échelonnée					
échelonnée réduite					
symétrique					
antisymétrique					
carrée					
nulle					
idempotente					
régulière					
singulière					
inversible					

Réponses

	A	B	C	D	E
matrice ligne			X		
matrice colonne			X		
triangulaire supérieure			X		
triangulaire inférieure		X	X		
diagonale			X		
scalaire			X		
identité					
échelonnée				X	
échelonnée réduite					
symétrique			X		X
antisymétrique					
carrée	X	X	X		X
nulle					
idempotente				N/A	
régulière	X	X	X	N/A	si $x \neq \pm 2$
singulière				N/A	si $x = \pm 2$
inversible	X	X	X	N/A	si $x \neq \pm 2$

2. Soit les 5 matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$$

Évaluer :

a. $2A + D =$

b. $AB =$

c. $BA + C =$

d. $BA + BD + I_2$

e. Trouver G si $A + 2G = D$

Réponses

a. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 11 \\ -11 & 8 & 19 \\ 4 & 11 & 16 \end{bmatrix}$ c. $\begin{bmatrix} 7 & 16 \\ 4 & 19 \end{bmatrix}$ d. $\begin{bmatrix} 4 & -13 \\ 48 & 33 \end{bmatrix}$ e. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-5}{2} \\ 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

3. Soit la matrice $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ où a_{ij} est la balance (positive/négative) monétaire entre i et j deux personnes d'un groupe de n amis. Par exemple j doit a_{ij} dollars à i.

a. Que représente la somme des éléments de la i$^{\text{ème}}$ ligne ?

b. Que représente la somme des éléments de la j$^{\text{ème}}$ colonne ?

c. Est-ce que A est antisymétrique. Expliquer votre réponse.

d. Que représente A^2

Réponses

a. les avoirs de *i*.

b. les dettes de *j*.

c. *A* est antisymétrique puisque *i* ne se doit pas d'argent à lui-même donc $a_{ii} = 0$. De plus, si $a_{ij} > 0$ alors j doit a_{ij} à i et alors a_{ji} indique donc $-a_{ij}$ puique la balance de j est négative envers i.

d. Rien du tout.

.

4. Soit un groupe de personnes numérotées de 1 à n . Soit $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ où

$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la i}^{me} \text{ personne est ami avec la j}^{me} \text{ personne} \\ 0 & \text{si la i}^{me} \text{ personne n'est pas ami avec la j}^{me} \text{ personne} \end{cases}$ (8 pts).

1. Dans le contexte, expliquer pourquoi la matrice A devrait être symétrique.
2. On dit souvent « Les amis de mes amis sont mes amis ». Compléter l'énoncé mathématique qui rend compte de ce dicton :
   Si $a_{ik} = a_{kj} = 1$, alors $= 1$.
3. Si $G = AA^t$, que représente les éléments g_{ij} de cette matrice dans le contexte.

Réponses

1. Si *i* est ami avec *j*, alors *j* est ami avec *i*. L'amitié est à double sens. Donc, $a_{ij} = a_{ji}$
2. $a_{ij} = 1$
3. g_{ij} représente le nombre d'ami commun entre *i* et *j*.

5. Construire la matrice $A = [a_{ij}]_{3\times 3}$ où $a_{ij} = i^2 - j^2$. Qu'a de spécial A? Expliquer votre réponse.

Réponses

$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -8 \\ 3 & 0 & -5 \\ 8 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ qui est antisymétrique.

En effet :

$$\begin{aligned} a_{ij} &= (i^2 - j^2) \\ &= -(-i^2 + j^2) \\ &= -(j^2 - i^2) \\ &= -a_{ji} \end{aligned}.$$

6. Laquelle des matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ est idempotente ?

Réponses

A est idempotente. $B^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. Démontrer que si une matrice A est antisymétrique, alors A^2 est symétrique.

Réponses

$$A = -A^t \Rightarrow A^2 = \left(A^2\right)^t$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \left(A^2\right)^t &= (AA)^t \\ &= A^t A^t (\text{on inverse les } A) \\ &= (-A)(-A)(\text{par hypothése}) \\ &= (-1)(-1)(AA) \\ &= AA \\ &= A^2 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

8. Faux ou faux.

a. Si A et B sont des matrices diagonales de même ordre, alors : $Tr(A) = Tr(B) \Rightarrow A = B$.

b. Le déterminant d'une matrice antisymétrique est positif.

c. Le déterminant d'une matrice carrée ayant une ligne identique à une colonne, est nul.

Réponses

9. Calculer le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 & 0 & -7 & 0 \\ -9 & -1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 4 & -3 & 2 & 8 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Réponses

On peut jouer avec les lignes et les colonnes $\begin{pmatrix} C_2 \leftrightarrow C_6 \\ C_1 \leftrightarrow C_4 \\ L_1 \leftrightarrow L_3 \end{pmatrix}$ et obtenir une matrice triangulaire supérieure :

$$detA = (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 8 & 4 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -9 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \times 240 = -240$$

10. Démontrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.
    Réponses
    Si $A_{n\times n}, n$ impair, et $A = -A^t$, alors $detA = 0$.
    Preuve :
    Soit $A_{n\times n}, n = 2k+1, k \in \mathbb{N}$ et $A = -A^t$. On a donc que :
$$\begin{aligned} A &= -A^t \\ detA &= det\left(-A^t\right) \\ detA &= (-1)^n det\left(A^t\right) \\ detA &= (-1)^{2k+1} det\left(A^t\right) \\ detA &= (-1)^{2k}(-1) det\left(A^t\right) \\ detA &= \left((-1)^2\right)^k (-1) det\left(A^t\right) \\ detA &= 1^k(-1) det\left(A^t\right) \\ detA &= -det\left(A^t\right) \\ detA &= -detA \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} detA + detA &= 0 \\ 2detA &= 0 \\ detA &= 0 \end{aligned}$$
    ■

11. Montrer que si *A* est une matrice symétrique d'ordre *m* et que *B* est une matrice quelconque de format $m \times n$, alors $B^t AB$ est une matrice symétrique.

    Réponses
    $A_{m\times m} = A^t_{m\times m} \Rightarrow B^t AB = \left(B^t AB\right)^t$
    Preuve:
    Soit $A_{m\times m} = A^t$ et $B_{m\times n}$. Alors :
$$\begin{aligned} \left(B^t AB\right)^t &= \left(B^t (AB)\right)^t \\ &= (AB)^t \left(B^t\right)^t \\ &= \left(B^t A^t\right) B \\ &= B^t AB \end{aligned}$$
    ■

12. Démontrer que $det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{detA}$.

    Réponses
    $det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{detA}$
    Preuve :

Soit $A_{n\times n}$ une matrice inversible. Alors $detA \neq 0$. On a :

$$AA^{-1} = I$$

$$det(AA^{-1}) = detI$$

$$det(A) \times det(A^{-1} = 1$$

$$detA^{-1} = \frac{1}{detA}$$

■

13. Soit la matrice $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ avec $detA = 2$.

Calculer :

a. $det(3A^2) =$

b. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 4+x & 3+y & 2+z \end{vmatrix} =$

c. $\begin{vmatrix} z & 2 & 1 \\ y & 2 & 2 \\ x & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Réponses

a. $det(3A^2) = 27(detA^2) = 27(detA)^2 = 108$

b.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 4+x & 3+y & 2+z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4+x & 3+y & 2+z \end{vmatrix} L_3 = L_3 - L_2 - L_1$$

$$= -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 4+x-1-x & 3+y-1-y & 2-1-z \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -detA$$

$$= -2$$

c.

$$\begin{vmatrix} z & 2 & 1 \\ y & 2 & 2 \\ x & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & y & x \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} z & y & x \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2detA$$

$$= -4$$

14. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ en utilisant la définition.

Réponses

$$A^{-1} = \frac{1}{-7} \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$= -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -6 & -8 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 9 & 12 & -2 \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{6}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{9}{7} \\ \frac{8}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{12}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

15. Résoudre le système d'équation linéaire suivant: $\begin{cases} 2x - y + 3z & = 11 \\ 4x - 3y & = 1 \\ x - y + 2z & = 9 \end{cases}$

Réponses

$$\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -9 \\ 8 & -1 & -12 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Et $x = -2, y = -3, z = 4$.