

Chapitre 3

Réponse - Ensemble, relation, fonction

3.1 Définitions

Ex. 1

Mots	Extension	Compréhension	intervalle
Les nombres pairs.	$\{2, 4, 6, 8, \dots\}$	$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}^*\}$	Pas un intervalle
Les fractions positives ayant 1 pour numérateur.	$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$	$\left\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^*\right\}$	Pas un intervalle
Les entiers de -5 à 5 inclus.	$\{-5, -4, -3, \dots, 4, 5\}$	$\{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 5\}$	Pas un intervalle
Les nombre entre 0 et 1.	impossible à définir	$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$	$]0, 1[$
Nombre premier plus petit que 5.	$\{2, 3\}$	$\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2 \vee x = 3\}$	Pas un intervalle

Ex. 2

- a. Vrai
- b. Faux
- c. Faux
- d. Faux
- e. Vrai
- f. Vrai
- g. Faux
- h. Vrai
- i. Vrai
- j. Faux
- k. Vrai
- l. Faux
- m. Vrai
- n. Faux
- o. Faux

Ex. 3 $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (a, 4), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (b, 4), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4)\}$

Ex. 4

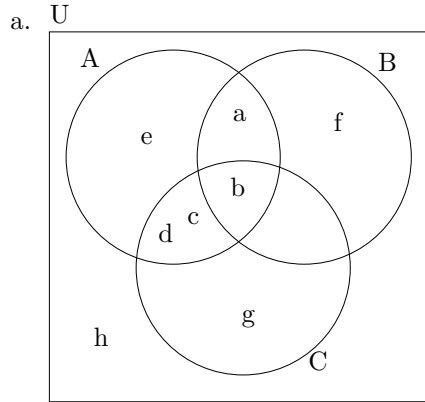
- a. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
- b. $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
- c. $\{\emptyset, \{a\}\}$
- d. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\{\}, \{\{\}\}\}$
- e. $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a, b\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a, b\}\},$
 $\{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a, b\}\}, \{\{b\}, \{a, b\}\},$
 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\},$
 $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}\}$
- f. $\{\emptyset\}$

Ex. 5

- a. 0
- b. 2
- c. 3
- d. 8
- e. 8
- f. 1
- g. 2
- h. ensemble infini
- i. ensemble infini
- j. 9
- k. 24
- l. 32

3.2 Opérations sur les ensembles

Ex. 6



- b. $\{a, b, c, d, e, f\}$
- c. $\{a, e\}$
- d. $\{c, d, e\}$
- e. $\{b\}$
- f. $\{a, b, c, d, e, f, g\}$
- g. $\{a, c, d, e, f, g, h\}$
- h. $\{c, d, e, f, g, h\}$
- i. $\{c, d, e, f, g, h\}$
- j. $\{f\}$

Ex. 7

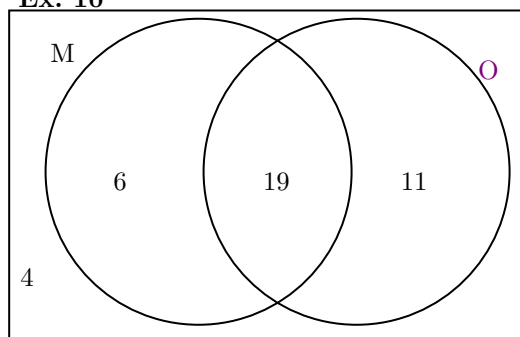
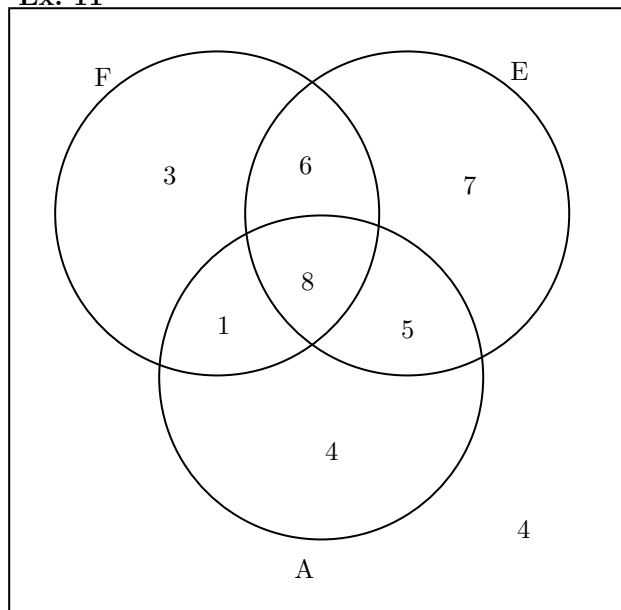
- a. $A \cup B$ est l'ensemble de tous les entiers x qui sont soit pairs, soit multiples de 3 (ou les deux), donc :
 $A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2k \vee x = 3m, k, m \in \mathbb{Z}\}.$
- b. $A \cap B$ est l'ensemble des entiers x qui sont à la fois pairs et multiples de 3. Ces entiers sont des multiples de 6, donc :
 $A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 6k, k \in \mathbb{Z}\}.$

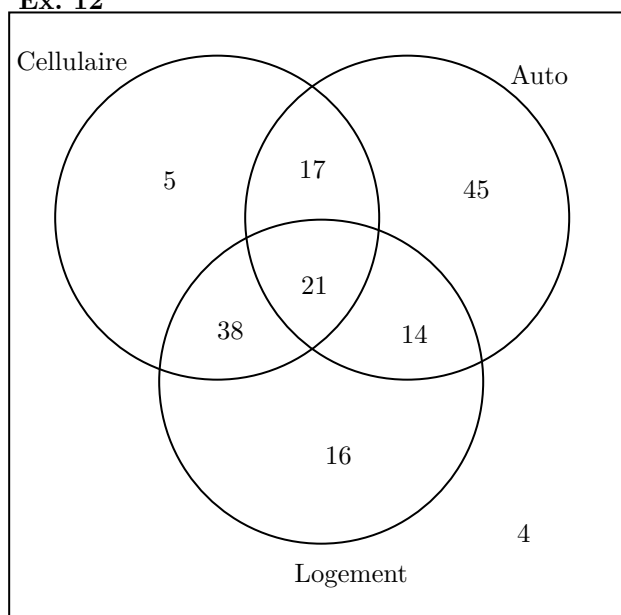
Ex. 8

- a. $A \cup B = [0, 10].$
- b. $A \cap B = [3, 5].$
- c. $\overline{A} = -\infty, 0[\cup]5, \infty$
- d. $\overline{A \cup B} = \mathbb{R} \setminus [0, 10] = -\infty, 0[\cup]10, \infty.$

Ex. 9

- a. $\overline{A} = -\infty, 1]$ et $\overline{B} =]4, \infty$. Donc, $\overline{A \cup B} = \emptyset.$
- b. $\overline{A \cap B} = -\infty, 1] \cup]4, \infty).$

Ex. 10**Ex. 11**

Ex. 12

3.3 Produit cartésien, relations et fonctions

Ex. 13

- Pas une fonction, non définie pour $x = 1$.
- Pas une fonction, non définie pour $x = 0$.
- Pas une fonction, non définie pour $-1 < x < 1$.
- C'est une fonction.
- Pas une fonction, deux valeurs pour chaque x .
- Pas une fonction, non définie pour $x = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ex. 14

- Domaine de $f : \{a, b, c, d\}$, Portée de $f : \{1, 2, 3, 5\}$
- Domaine de $f : -\infty, -5] \cup [-1, \infty$, Portée de $f : [0, \infty$
- Domaine de $f : \mathbb{R} - \{0\}$, Portée de $f : \mathbb{R}$,

Ex. 15 $\{b \in B \mid \exists a \in A, (a, b) \in f\}$ ou $\{f(a) \in B \mid \exists (a, (f(a)) \in f\}$

Ex. 16

- Bijective
- Ni injective, ni surjective
- injective
- Surjective

Ex. 17

- Ni injective, ni surjective
- Bijective
- Ni injective, ni surjective
- Bijective

Ex. 18

Preuve : (contre-exemple)

Le sommet de la parabole est $(1, 1)$ et la parabole est ouverte vers le haut. Donc, $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} . ■

Ex. 19

Preuve : (contradiction)

Supposons le contraire et que f n'est pas injective. Donc, $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2)$. On peut calculer :

$$5x_1 - 3 = 5x_2 - 3$$

$$5x_1 = 5x_2$$

$$x_1 = x_2 \nrightarrow$$

■