

Laboratoire 3

Preuves :

Ici, assurez-vous en comparant que les preuves présentées sont différentes de celles de vos collègues.

1. Démontrer par contradiction qu'il n'existe pas de plus petit nombre rationnel strictement positif.
C'est à dire : $\neg (\exists x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q} \mid y \leq x)$ (7 pts)
2. Démontrer que l'ensemble $S = \{x \in P(\mathbb{R}^+) \mid ((a \in x) \wedge (b \in x)) \rightarrow ab \in x\}$ (7 pts).

Relations

3. Considérons l'ensemble $(A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ et les deux relations suivantes :

- $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (2, 1), (3, 4), (4, 3), (5, 6), (6, 5)\}$
- $R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$

Pour chaque relation R_1 et R_2 :

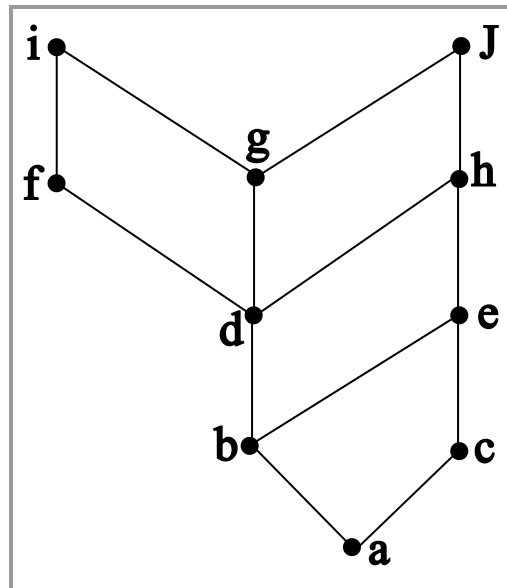
- a. Construire la matrice d'adjacence (6 pts).
- b. Représenter la relation par un graphe orienté (6 pts).
- c. Déterminer si la relation est (réflexive, irreflexive, symétrique, antisymétrique, transitive, connexe, dense).
Justifiez vos réponses en mentionnant les éléments ou contre-exemples pertinents (12 pts).

4. Soit la relation d'équivalence

$R = \{(a, b) \in A \times A \mid a \text{ compte le même nombre de facteur que } b\}$ où
 $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 15\}$.

- a. Représenter la relation R en extension (4 pts).
- b. Représenter la relation l'aide d'un graphe orienté (4 pts).
- c. Énumérer toutes les classes d'équivalence de R (5 pts).

5. Soit la relation d'ordre \preceq sur l'ensemble $A = \{a, b, c, d, f, g, h, i, j\}$ représenté par la diagramme de Hasse suivant (15 pts):



- S'agit-il d'un ordre total ou partiel ? Justifier votre réponse.
- Identifier les éléments demandés
 - a. Éléments minimaux
 - b. Éléments maximaux
 - c. Élément le plus grand
 - d. Élément le plus petit
 - e. Minorant de $\{b,e\}$
 - f. Majorant de $\{b,e\}$
 - g. Minorant de $\{b,d,g\}$
 - h. Majorant de $\{b,d,g\}$
 - i. Infimum de $\{b,e\}$
 - j. Supremum de $\{b,e\}$
 - k. Infimum de $\{b,d,g\}$
 - l. Supremum de $\{b,d,g\}$

Remise

- 4 points sont réservés pour la présentation du travail (travail sur 70).
- Remettre 1 copie par équipe de 2 ou 3 étudiants avant le **jeudi 27 novembre à 18h45** dans ma case au 4^{me} étage au DIM ou au cours d'algèbre linéaire en main propre.