

Chapitre 1

La logique

1.1 Algèbre booléenne

Ex. 1 — Identifier dans les phrases suivantes les propositions et leur valeur de vérité.

- a. $10_b + 11_b = 101_b$ (indice b indique un nombre en binaire)
- b. $D_x = 1010$ (l'indice x indique un nombre en hexadécimal)
- c. Nintendo est une entreprise multinationale japonaise fondée en 1889.
- d. C'est très important.
- e. Dennis Ritchie est un des pionniers de l'informatique moderne, inventeur du langage C et codéveloppeur de Unix.
- f. John Von Neumann, quel génie !
- g. Il est plus important d'étudier en mathématique qu'en physique.
- h. Steeve Job était-il un génie ?

Ex. 2 — Soit les propositions suivantes :

L : Larry a faim.

H : Il y a 12 hot-dogs au réfrigérateur.

Écrire en langage courant les propositions suivantes :

- | | |
|---------------------------|---|
| a. $\neg L$ | e. $L \wedge H$ |
| b. $\neg H$ | f. $H \vee \neg H$ |
| c. $L \rightarrow \neg H$ | g. $(L \vee H) \wedge \neg(L \wedge H)$ |
| d. $H \rightarrow \neg L$ | h. $(L \wedge \neg H) \vee (\neg L \wedge H)$ |

Ex. 3 — Soit les propositions suivantes :

B : Bob réussit son examen.

W : La sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* est reportée.

Écrire les phrases suivantes en utilisant **B** et **W** et les opérateurs logiques ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)

- a. Bob ne réussit pas son examen.
- b. Bob ne réussit pas son examen et la sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* n'est pas reportée.
- c. Bob réussit son examen seulement si la sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* est reportée.
- d. Bob ne réussit pas son examen ou la sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* est reportée.
- e. Le report de la sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* est une condition nécessaire et suffisante pour que Bob réussisse son examen.
- f. Bob ne réussit pas son examen lorsque la sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* n'est pas reportée.

- g. Si Bob réussit son examen alors *Warhammer 40,000 : Darktide* sortira à temps ou pas.
- h. Le report de la sortie de *Warhammer 40,000 : Darktide* est équivalent à la réussite de l'examen par Bob.

Ex. 4 — Soit les propositions suivantes :

B : Bruce a ses raquettes.

N : Il y a de la neige.

Écrire les phrases suivantes en utilisant **B** et **N** et les opérateurs logiques ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$)

- a. S'il y a de la neige, alors Bruce a ses raquettes.
- b. Il y a de la neige et Bruce a ses raquettes.
- c. Il y a de la neige ou Bruce a ses raquettes.
- d. Il n'arrive jamais que Bruce n'a pas ses raquettes et qu'il y ait beaucoup de neige.
- e. Bruce a ses raquettes, mais il n'y pas beaucoup de neige.
- f. Quand Bruce a ses raquettes, c'est qu'il y a de la neige.
- g. Il est suffisant qu'il y ait de la neige pour que Bruce ait ses raquettes.
- h. Bruce a ses raquettes chaque fois qu'il neige.

Ex. 5 — Dans chacun des cas suivants, selon le contexte, indiquer s'il s'agit d'une disjonction (\vee) ou d'une disjonction exclusive (\oplus).

- a. Au restaurant vous devez choisir thé ou café.
- b. Pour arracher un clou, il faut un marteau ou un pied-de-biche.
- c. On peut payer son nouvel ordinateur en argent ou par crédit.
- d. Pour faire de l'ombre, il faut planter un érable ou un chêne.
- e. Pour avoir accès à internet, il faut un accès filaire ou sans-fil.
- f. Un programme peut être développé en Java ou en C#.

Ex. 6 — Pour chacune des phrases suivantes, écrire la réciproque et la contraposée.

- a. Si tu fais du sport, alors tu es plus en santé.
- b. Il est nécessaire qu'une personne étudie pour réussir un cours de mathématique.
- c. Il est suffisant d'étudier pour réussir un cours de mathématique.
- d. Si le travail était une si magnifique chose, les riches en auraient gardé plus pour eux.

Ex. 7 — Construire la table de vérité des propositions suivantes :

- | | |
|--|--|
| a. $p \rightarrow (q \vee r)$ | e. $(q \oplus r) \leftrightarrow p$ |
| b. $(p \rightarrow q) \vee r$ | f. $(p \leftrightarrow r) \oplus \neg q$ |
| c. $p \wedge (p \rightarrow q)$ | g. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$ |
| d. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ | h. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ |

1.2 Équivalence

Propriétés des opérateurs logiques

$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Identité
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	Domination
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Idempotence
$\neg(\neg p)$	Double négation
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Commutativité
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	associativité
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributivité
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$	Absorbotion
$p \wedge \neg p \equiv F$ $p \vee \neg p \equiv V$	Simplification

Ex. 8 — Utiliser des tables de vérité afin de vérifier que les expressions suivantes sont équivalentes.

a. $\neg(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$

b. $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

Ex. 9 — Identifier parmi les propositions suivantes les contradictions, les tautologies et les contingences.

a. $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

d. $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg q$

b. $p \wedge q \vee p$

e. $\neg(p \wedge q) \wedge \neg q$

c. $\neg(p \vee q) \wedge q$

f. $(p \vee q) \rightarrow \neg(\neg p \wedge q)$

Ex. 10 — Donner une expression de s sous forme canonique en fonction de p, q, r respectant les tables de vérité suivantes :

a.

p	q	s
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

b.

p	q	r	s
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

c.

p	q	r	s
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

d.

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

Ex. 11 — Démontrer les équivalences suivantes en utilisant les propriétés des opérateurs logiques.

a. $\neg(p \wedge q) \vee \neg(\neg q \wedge r) \Leftrightarrow V$

$p \vee (\neg q \wedge \neg r)$

b. $\neg((\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)) \vee ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)) \Leftrightarrow$

c. $(p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee q) \Leftrightarrow p \vee q$

Ex. 12 — Donner une expression de s simplifiée en fonction de p, q, r en utilisant seulement les opérateurs \neg, \wedge, \vee .

a.

p	q	r	s
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	F

b.

p	q	r	s
V	V	V	F
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	F

c.

p	q	r	s
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

d.

p	q	r	s
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

Ex. 13 — Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes en utilisant les propriétés.

- $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$
- $p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \Leftrightarrow p$
- $(p \vee q) \wedge \neg (p \vee \neg q) \Leftrightarrow q \wedge \neg p$

Ex. 14 — Démontrer que non (\neg) et ou (\vee) forme un ensemble d'opérateurs logiques fonctionnellement complet.

1.3 Quantificateur

Ex. 15 — Écrire la négation des propositions suivantes en langage courant.

- Tous les étudiants étudient l'examen de mathématique.

- b. Aucun étudiant n'a obtenu 100%.
- c. Certains étudiants réussissent l'examen de mathématique.
- d. Chaque étudiant a au moins un ordinateur.
- e. Il y a un langage que tous les étudiants connaissent.

Ex. 16 — Écrire les énoncés demandés à partir des deux fonctions propositionnelles suivantes :

— $E(x)$: x est un étudiant d'info.

— $G(x)$: x est un gamer.

- | | |
|---|--|
| a. Il y a des étudiants d'info qui sont des gamers. | d. Aucun étudiant d'info n'est un gamer. |
| b. Tous les étudiants d'info sont des gamers. | e. Tout le monde est un gamer et un étudiant d'info. |
| c. Seuls les étudiants d'info sont des gamers. | f. Les gens sont étudiants d'info ou gamer. |

Ex. 17 — Soit la fonction propositionnelle $A(x, y)$: x aime y . Exprimer les énoncés suivants à l'aide des quantificateurs.

- a. Tout le monde aime Chris.
- b. Tout le monde aime quelqu'un.
- c. Il y a quelqu'un que tout le monde aime.
- d. Personne n'aime tout le monde.
- e. Il y a quelqu'un que personne n'aime.
- f. Chaque personne s'aime.
- * g. Il y a exactement une personne que tout le monde aime.
- * h. Il y a exactement deux personnes qui aiment Chris.
- * i. Il y a une personne qui n'aime qu'elle-même.

Ex. 18 — Lewis Carroll (Charles Lutwidge Dodgson), un professeur de Christ Church, écrivit sous le nom de plume Lewis Carroll

les romans « Les Aventures d'Alice au pays des merveilles » (1865) et sa suite : « De l'autre côté du miroir » (1871). Mais il écrivit également des manuels scolaires sur la logique. Dans l'un d'eux, il présente les problèmes suivants :

- a. (problème #12) Dans une savane remplie d'animaux divers, soit les propositions suivantes :
 - Tous les lions sont féroces.
 - Certains lions ne boivent pas de café.
 - Certaines créatures qui boivent du café ne sont pas féroces.

Soit les fonctions propositionnelles suivantes :

- $L(x)$: x est un lion.
- $F(x)$: x est féroce.
- $C(x)$: x boit du café.

Exprimer les trois propositions en utilisant ces fonctions propositionnelles.

- b. Soit les propositions suivantes :
 - Tous les petits oiseaux ont des couleurs vives.
 - Aucun gros oiseau ne mange de miel.
 - Les oiseaux qui ne mangent pas de miel ont des couleurs fades.

Soit les fonctions propositionnelles suivantes :

- $P(x)$: x est un petit oiseau.

- $M(x)$: x mange du miel.
- $V(x)$: x a des couleurs vives.

Exprimer les trois propositions en utilisant ces fonctions propositionnelles.

Ex. 19 — Pour chacun des exemples suivants, déterminer la valeur de vérité de $\forall x \forall y$, $\forall x \exists y$, $\exists x \forall y$ et $\exists x \exists y$

- $x + y = 4$
- $x - y = 4$
- $xy = yx$
- $x + y = y$
- $(x + 3)(y - 2) = 0$
- $x^2 + y^2 + 1 = 0$