7.1 FORME CARTÉSIENNE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Dans cette section: *nombres complexes – forme cartésienne d'un nombre complexe – partie réelle d'un nombre complexe – partie imaginaire d'un nombre complexe.*

On sait qu'il n'existe aucun nombre réel qui vérifie l'équation $x^2 + 1 = 0$. Pour contourner cette difficulté, les mathématiciens, comme ils l'ont souvent fait au cours de l'histoire, ont simplement inventé une solution en créant un nouveau système de nombres, soit les nombres complexes. Ces nombres servent à résoudre non seulement des équations algébriques, mais également certaines équations différentielles. Ils ont en outre des applications en physique, notamment en électricité.

Le symbole i représente le nombre complexe qui vérifie l'équation $i^2 = -1$. Grâce à l'emploi de ce symbole, l'équation $x^2 + 1 = 0$ trouve sa solution:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 = 0 &\Rightarrow x^2 - (-1) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 - i^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x - i)(x + i) = 0 \\ &\Rightarrow x = i \text{ ou } x = -i \end{aligned}$$

Ce nombre i est appelé unité imaginaire. Mais ce qualificatif ne doit pas faire croire que i est plus mystérieux que n'importe quel autre nombre. Tous les nombres ne sont-ils pas des symboles, des fruits de l'imagination humaine?

L'ensemble des **nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, est défini comme suit:

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a \text{ et } b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$$

On emploie généralement la lettre z pour désigner un nombre complexe. Dans l'expression $z = a + bi$, le membre de droite est appelé **forme cartésienne** (ou encore *rectangulaire* ou *algébrique*) **du nombre complexe** z. Comme cette forme ressemble à un binôme en i, on la qualifie également de *binomiale*. Tout nombre complexe exprimé sous la forme cartésienne comporte deux parties. Si $z = a + bi$, le nombre a est appelé **partie réelle** de z, ce qu'on écrit $a = \text{Re}(z)$, alors que le nombre b est appelé **partie imaginaire** de z, ce qu'on écrit $b = \text{Im}(z)$.

● Nombres complexes
L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est
$\mathbb{C} = \{a + bi | a \text{ et } b \in \mathbb{R} \text{ et } i^2 = -1\}$

● Forme cartésienne d'un nombre complexe
La forme cartésienne (ou *binomiale*, ou *rectangulaire*, ou *algébrique*) du nombre complexe z est donnée par $z = a + bi$, où a et b sont des nombres réels et $i^2 = -1$.

● Partie réelle d'un nombre complexe
La partie réelle du nombre complexe $z = a + bi$ est égale à a, et on écrit $\text{Re}(z) = a$.

● Partie imaginaire d'un nombre complexe
La partie imaginaire du nombre complexe $z = a + bi$ est égale à b, et on écrit $\text{Im}(z) = b$.

EXEMPLE 7.1

Le tableau 7.1 présente cinq nombres complexes ainsi que leur partie réelle et leur partie imaginaire.

La dernière ligne du tableau 7.1 indique clairement que les nombres réels sont des nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle. Ainsi, les nombres réels constituent un sous-ensemble des nombres complexes.

TABLEAU 7.1

Parties réelles et imaginaires de nombres complexes

z	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
$2 + 3i$	2	3
$5 - 2i$	5	−2
$-3 + i$	−3	1
$4i$	0	4
8	8	0

Encore une fois, ne vous laissez pas impressionner par la terminologie. Les nombres complexes appartiennent tout autant à la réalité que les nombres réels. Vous est-il déjà venu à l'idée que les nombres irrationnels sont moins conformes à la raison que les nombres rationnels? Les nombres complexes ne sont pas plus «complexes» ou difficiles à manipuler que les nombres réels.

Le choix des termes (*positif, négatif, rationnel, irrationnel, réel, imaginaire, complexe*) servant à désigner des ensembles de nombres n'a pas été des plus heureux. À l'origine, chaque ensemble de nombres a revêtu un caractère plus ou moins mystérieux ou douteux. Avec le temps, les nouveaux nombres sont devenus d'usage courant: on leur a trouvé diverses applications, et leur aspect un peu magique a disparu. Ils n'ont pas perdu pour autant leur nom initial, qui maintient le mystère

N PEU D'HISTOIRE

octeur en biochimie et professeur à la Boston University Medical School, Isaac Asimov (1920-1992) fut un grand vulgarisateur scien-que et l'auteur de nombreux ouvrages de science-fiction. Dans xtrait qui suit, il raconte la discussion qu'il eut avec un professeur de ologie alors qu'il étudiait à l'université. Asimov avait l'habitude ssister au cours de ce professeur pour accompagner un ami.

« Les mathématiciens, dit le professeur, sont des mystiques, car ils roient en l'existence de nombres qui n'ont aucune réalité. »

D'habitude, n'étant pas inscrit à ce cours, je m'asseyais dans un coin et je bâillais d'ennui. Mais cette fois je me levai d'un bond et dis : « Quels nombres ? »

Le professeur regarda dans ma direction et répondit : « La racine arrée de moins un. Ce nombre n'existe pas. Les mathématiciens le qua-fient d'imaginaire tout en lui attribuant une existence qui relève de la ystique. »

« Il n'y a rien de mystique là-dedans, dis-je avec emportement. La cine carrée de moins un est aussi réelle que n'importe quel autre nombre. »

Le professeur sourit à l'idée d'avoir devant lui un éventuel faire-aloir de sa supériorité intellectuelle. (Comme j'ai moi-même donné des urs depuis, je sais exactement ce qu'il ressentait.) Il dit, sur un ton ucereux : « Nous avons parmi nous un jeune mathématicien, qui veut ouver le caractère réel de la racine carrée de moins un. Alors, jeune mme, donnez-moi la racine carrée de moins un d'un bâton de craie ! »

Je rougis et bafouillai : « Eh bien ! Alors… »

« Cela règle la question », dit le professeur, qui s'imaginait s'être quitté de sa mission avec adresse et en douceur.

Mais j'élevai la voix : « Je vais le faire. Je vais vous donner la racine carrée de moins un d'un bâton de craie si vous me donnez un demi-bâton de craie. »

Le professeur sourit de nouveau et répondit : « Très bien. » Il brisa en deux un bâton de craie neuf et me tendit l'une des deux moitiés, en ajoutant : « À vous maintenant de remplir votre partie de contrat. »

« Ah ! Un instant !, dis-je. Vous n'avez pas rempli la vôtre. Ce que vous m'avez donné, c'est un bâton de craie et non un demi-bâton de craie. » Je levai la main pour montrer le morceau de craie à la classe. « N'êtes-vous pas tous d'accord que ceci est un bâton de craie ? Il ne s'agit certainement pas de deux ni de trois bâtons. »

Le professeur ne souriait plus. « Un bâton de craie est un bâton de longueur standard. Le morceau que vous tenez a une longueur égale à la moitié de la longueur standard. »

Je répondis : « Vous me balancez de but en blanc une définition arbitraire. Même si je l'accepte, pouvez-vous soutenir que ce morceau de craie est bien une moitié d'un bâton, et non les 48 centièmes ou les 52 centièmes d'un bâton ? Et puis, croyez-vous être réellement qualifié pour discuter de la racine carrée de moins un alors que vous n'avez pas une idée très claire de ce qu'est une moitié ? »

À ce moment, le professeur avait déjà perdu sa belle sérénité. Il me fut impossible de répliquer à son dernier argument : « Foutez-moi le camp d'ici ! » Je sortis en riant et, par la suite, j'attendis mon ami dans le corridor*.

* I. Asimov, *Asimov on Numbers*, New York, Pocket Books, 1977, p. 115-116.

chez les non-initiés. C'est ce que le grand mathématicien Gauss soutenait quand il écrivait :

> Si les unités 1, -1 et $\sqrt{-1}$ avaient été appelées directe, inverse et latérale, plutôt que positive, négative et imaginaire, toute la mystique entourant ces nombres n'aurait probablement pas eu lieu*.

Les nombres complexes n'ont donc rien de « complexe ».

QUESTION ÉCLAIR 7.1

Complétez le tableau 7.2.

TABLEAU 7.2

Parties réelles et imaginaires de nombres complexes

z	$\mathrm{Re}(z)$	$\mathrm{Im}(z)$
$-2+i$		
$-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$		
$-2i$		
	$-\sqrt{3}$	0
	1	$-\pi$
	4	-3
	0	$-\sqrt{5}$

* J. P. Colette, *Histoire des mathématiques*, tome 2, Montréal, Éditions du Renouveau Pédagogique, 1979, p. 182.

7.2 SOLUTION D'UNE ÉQUATION QUADRATIQUE

La solution générale d'une équation quadratique $ax^2 + bx + c = 0$ est donnée par la formule quadratique :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cette solution est un nombre réel seulement si le discriminant, $b^2 - 4ac$, est positif ou nul. Les équations quadratiques dont le discriminant est négatif admettent comme solutions des nombres complexes.

EXEMPLE 7.2

L'équation $x^2 - 4x + 8 = 0$ n'a pas de solution dans les réels parce que $b^2 - 4ac = 16 - 32 = -16 < 0$. Toutefois, elle admet deux solutions complexes, données par la formule quadratique :

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16i^2}}{2} \\ &= \frac{4 \pm 4i}{2} \\ &= 2 \pm 2i \end{aligned}$$

EXERCICE 7.1

Résolvez l'équation quadratique.

a) $x^2 - 2x + 5 = 0$

b) $x^2 - 6x + 10 = 0$

7.3 OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES

Dans cette section : *conjugué d'un nombre complexe – module d'un nombre complexe.*

Comme les nombres complexes sont représentés par des binômes en i, les relations et les opérations d'addition et de multiplication sur les nombres complexes sont définies de la même façon que dans le cas des binômes, à la différence qu'on remplace i^2 par -1.

Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ deux nombres complexes, et k un nombre réel.

1. $z_1 = z_2$ si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$ Égalité de deux nombres complexes.
2. $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \in \mathbb{C}$ Addition de deux nombres complexes.
3. $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \in \mathbb{C}$ Soustraction de deux nombres complexes.
4. $kz_1 = ka_1 + kb_1 i \in \mathbb{C}$ Multiplication d'un nombre complexe par un scalaire réel.
5. $\begin{aligned}[t] z_1 z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1a_2 + a_1b_2 i + a_2b_1 i + b_1b_2 i^2 \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \in \mathbb{C} \end{aligned}$ Multiplication de deux nombres complexes.

EXEMPLE 7.3

$$\begin{aligned}(2+3i)+(5-2i) &= (2+5)+(3-2)i\\ &= 7+i\end{aligned}$$

EXEMPLE 7.4

$$\begin{aligned}(8-6i)-(3+4i) &= (8-3)+(-6-4)i\\ &= 5-10i\end{aligned}$$

EXEMPLE 7.5

$$\begin{aligned}(2+3i)+(0+0i) &= (2+0)+(3+0)i\\ &= 2+3i\end{aligned}$$

On remarque que $(a+bi)+(0+0i) = a+bi$, de sorte que le nombre $0+0i$ est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathbb{C}$.

EXEMPLE 7.6

$$\begin{aligned}(4-i)+4(-2+4i) &= (4-i)+(-8+16i)\\ &= -4+15i\end{aligned}$$

QUESTION ÉCLAIR 7.2

Évaluez l'expression.

a) $(-5+3i)-(-2+i)$

b) $(-5+3i)+(5-3i)$

c) $(3-i)+\frac{1}{2}(5+2i)$

d) $5+2i-3(4-2i)$

EXEMPLE 7.7

$$\begin{aligned}(2+3i)(5-2i) &= 2(5)+2(-2i)+(3i)(5)+(3i)(-2i)\\ &= 10-4i+15i-6i^2\\ &= 10+11i-6(-1)\\ &= 16+11i\end{aligned}$$

EXEMPLE 7.8

$$\begin{aligned}(2+3i)(1+0i) &= 2(1)+2(0i)+(3i)(1)+(3i)(0i)\\ &= 2+3i\end{aligned}$$

On remarque que $(a+bi)(1+0i) = a+bi$, de sorte que le nombre $1+0i$ est l'élément neutre pour la multiplication dans $\mathbb{C}$.

QUESTION ÉCLAIR 7.3

Exprimez le produit $(-5+3i)(-2+i)$ sous la forme cartésienne.

EXEMPLE 7.9

$$\begin{aligned}(-3i)^7 &= (-3)^7 i^7\\ &= -2\,187(i)(i^6)\\ &= -2\,187(i)(i^2)^3\\ &= -2\,187(i)(-1)^3\\ &= 2\,187i\end{aligned}$$

● **Conjugué d'un nombre complexe**
Le conjugué du nombre complexe $z = a + bi$ est noté $\bar{z}$ et il est donné par $\bar{z} = a - bi$.

Le **conjugué d'un nombre complexe** $z = a + bi$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - bi$. La multiplication d'un nombre complexe par son conjugué donne un nombre réel. En effet,

$$\begin{aligned}z\bar{z} &= (a + bi)(a - bi)\\ &= a^2 - abi + abi - b^2i^2\\ &= a^2 + b^2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

QUESTION ÉCLAIR 7.4

Quel est le conjugué $\bar{z}$ du nombre complexe z ?

a) $z = -5 + 3i$ b) $z = 2i$ c) $z = 4$ d) $z = 3 - 5i$

Cette propriété sert dans la division de deux nombres complexes. Pour effectuer l'opération $\frac{z_1}{z_2}$ (où $z_2 \neq 0$), on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de z_2. Les exemples 7.10 et 7.11 illustrent le fait que le quotient de deux nombres complexes est un nombre complexe.

EXEMPLE 7.10

$$\begin{aligned}\frac{5 - 2i}{4 + 3i} &= \left(\frac{5 - 2i}{4 + 3i}\right)\left(\frac{4 - 3i}{4 - 3i}\right)\\ &= \frac{14 - 23i}{25}\\ &= \frac{14}{25} - \frac{23}{25}i\end{aligned}$$

EXEMPLE 7.11

$$\begin{aligned}\frac{1}{3 - 2i} &= \left(\frac{1}{3 - 2i}\right)\left(\frac{3 + 2i}{3 + 2i}\right)\\ &= \frac{3 + 2i}{13}\\ &= \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i\end{aligned}$$

QUESTION ÉCLAIR 7.5

Exprimez le quotient $\frac{2+i}{3-2i}$ sous la forme cartésienne.

Module d'un nombre complexe
Le module du nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre réel noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Le **module du nombre complexe** $z = a + bi$ est le nombre réel noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. On peut également exprimer le module d'un nombre complexe z en fonction du nombre z et de son conjugué $\overline{z}$. En effet, si $z = a + bi$, alors

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2 - abi + abi - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

de sorte que $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

QUESTION ÉCLAIR 7.6

Quel est le module $|z|$ du nombre complexe z ?

a) $z = -5 + 3i$ c) $z = 4$ e) $z = -2 - 4i$

b) $z = 2i$ d) $z = -3 + 5i$

L'inverse, $\frac{1}{z}$, d'un nombre complexe z non nul est noté z^{-1} et il est égal à $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$. En effet, si z est un nombre complexe non nul, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \left(\frac{1}{z}\right)\left(\frac{\overline{z}}{\overline{z}}\right) \\ &= \frac{\overline{z}}{|z|^2} \end{aligned}$$

Vous devriez vérifier que cette dernière expression est un nombre complexe, c'est-à-dire qu'elle s'écrit sous la forme $a + bi$. On déduit de la dernière égalité que si $z_2 \neq 0$, alors

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$$

EXERCICE 7.2

Soit $z_1 = 4 - 2i$, $z_2 = 2 - 5i$ et $z_3 = 3 + 3i$. Évaluez l'expression.

a) $3z_1 - 4z_2$ d) $\overline{z_1}$ g) $\text{Re}\left(\frac{z_2+z_3}{i}\right)$

b) z_1z_2 e) $\frac{z_1z_3}{z_2}$ h) $\text{Im}\left(\frac{2z_1-3z_2}{i}\right)$

c) $i^{13}z_3$ f) $\left|\frac{1}{z_3}\right|$

…s pouvez maintenant …e les exercices …apitulatifs 1 à 16.

7.4 REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

Dans cette section : *plan d'Argand.*

Soyons maintenant audacieux ! Traitons les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe comme si elles étaient les composantes d'un vecteur algébrique. Cette façon de voir révélera la similitude entre les concepts d'égalité de deux nombres complexes et de deux vecteurs du plan, de même qu'entre les concepts d'addition, de module et de multiplication par un scalaire réel dans l'un et l'autre ensemble.

Ces similarités incitent à représenter les nombres complexes comme des vecteurs géométriques dans un plan cartésien, alors appelé **plan d'Argand** ou *plan complexe*. Dans un plan d'Argand, l'axe des abscisses est l'axe des réels, et l'axe des ordonnées est l'axe des imaginaires.

● **Plan d'Argand**
Un plan d'Argand est un plan cartésien où l'axe horizontal est appelé *axe des réels* et où l'axe vertical est appelé *axe des imaginaires*. Un tel plan sert à la représentation graphique des nombres complexes interprétés comme des vecteurs.

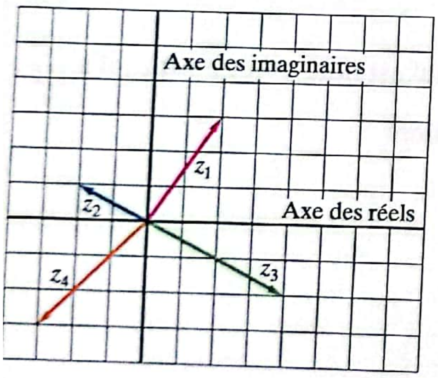
Ainsi, tout nombre complexe $z = a + bi$ s'écrit sous la forme vectorielle $z = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$. Il est à noter qu'on désigne par z, et non par $\vec{z}$, le vecteur représentant un nombre complexe z. Notez également qu'on pourrait considérer un nombre complexe comme un point du plan complexe, auquel cas on écrirait plutôt $z = (a, b)$.

EXEMPLE 7.12

Dans un plan d'Argand, on représente comme dans la figure 7.1 les nombres complexes $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = 4 - 2i$ et $z_4 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \end{bmatrix}$.

FIGURE 7.1

Représentation de nombres complexes dans un plan d'Argand

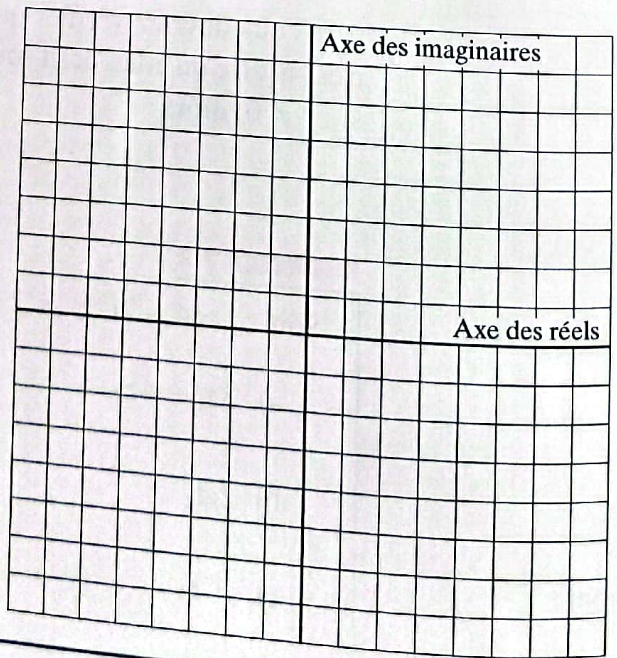


QUESTION ÉCLAIR 7.7

Représentez les nombres complexes $z_1 = 3i$, $z_2 = 1 - 4i$ et $z_3 = \begin{bmatrix} -4 & 0 \end{bmatrix}$ dans le plan d'Argand de la figure 7.2.

FIGURE 7.2

Représentation de nombres complexes dans un plan d'Argand



UN PEU D'HISTOIRE

L'histoire des nombres complexes débute en 1545 avec la publication du *Ars Magna* de J. Cardan (1501-1576). Cet ouvrage contient la première mention de la racine d'un nombre négatif et en décrit l'utilité dans des calculs. D'autres mathématiciens, dont R. Descartes (1596-1650), G. W. Leibniz (1646-1716) et L. Euler (1707-1783), employèrent par la suite les nombres complexes, sans toutefois leur accorder une véritable légitimité.

En 1806, J. R. Argand (1768-1822) publia, sous le couvert de l'anonymat, l'*Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Dans cet ouvrage, il donna une description géométrique des nombres complexes et des opérations sur ces nombres. De plus, il recourut aux nombres complexes pour prouver des théorèmes de trigonométrie, de géométrie et d'algèbre. Malheureusement, au moment de sa parution, le livre d'Argand ne retint pas l'attention des mathématiciens.

Il en avait été de même pour un article de l'arpenteur danois C. Wessel (1745-1818) publié dès 1799 dans les mémoires de l'Académie royale du Danemark. À l'instar d'Argand, Wessel y décrivit les nombres complexes comme des vecteurs du plan.

Bien que l'article de Wessel ait précédé le livre d'Argand, c'est le nom de ce dernier qui a été donné au plan complexe, en raison d'un concours de circonstances.

Argand fit part de ses découvertes au célèbre mathématicien Adrien-Marie Legendre (1752-1833). Ce dernier exposa les idées d'Argand dans une lettre adressée au frère de J.-F. Français, sans toutefois en nommer la source. Français prit connaissance de la correspondance entre son frère décédé et Legendre, et, en s'appuyant sur les informations qu'elle contenait, il publia, en 1813, un mémoire dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées*, la toute première revue savante entièrement consacrée aux mathématiques. À la fin de son mémoire, Français affirma que les principales idées qu'il y présentait n'étaient pas de lui, mais d'un mathématicien inconnu, cité dans une lettre de Legendre. Il termina en demandant à cet inconnu de se manifester.

Ayant pris connaissance de l'article de Français, Argand écrivit à J.-D. Gergonne (1771-1859), le fondateur des *Annales*, pour se révéler comme étant ce mathématicien inconnu cité par Français. Il présenta également un résumé du livre qu'il avait publié. Cette lettre fut suivie d'un article d'Argand dans les *Annales*. C'est donc grâce à l'honnêteté intellectuelle remarquable de J.-F. Français qu'Argand occupe aujourd'hui une petite place dans l'histoire des mathématiques.

L'acceptation générale des nombres complexes a certainement été facilitée par l'existence de modèles géométriques, dont ceux de J. R. Argand et de C. Wessel, mais elle a été retardée à cause du manque de notoriété de ces deux novateurs. C'est grâce au prestige de l'illustre C. F. Gauss (1777-1855) que les nombres complexes furent admis comme de véritables entités mathématiques. Dans un article célèbre publié en 1831, ce dernier écrivit que les représentations géométriques des nombres complexes leur donnent un sens qui satisfait l'intuition et qu'il n'est pas besoin d'autre justification pour accepter ces nombres.

Comme le fait remarquer Crowe, c'est cette publication de Gauss qui donna leur pleine légitimité aux nombres complexes :

> Cependant, l'acceptation du concept [de la représentation des nombres complexes] ne se fit que très lentement et celui-ci attira peu l'attention avant la publication de l'article de Gauss, en 1831. Il n'est pas étonnant que cette notion soit passée inaperçue jusqu'à sa consécration par Gauss. Les historiens des sciences ont montré à maintes reprises que le seul mérite des idées radicalement nouvelles ne suffit généralement pas à les faire valoir. Il faut aussi que leurs auteurs possèdent déjà une certaine renommée. Or, les mathématiciens qui ont traité des nombres complexes avant Gauss étaient tous peu connus ; en fait, s'ils sont entrés dans l'histoire, c'est grâce à une unique découverte d'importance. Mais lorsque Gauss a écrit sur le sujet, il l'a fait avec toute l'autorité que lui conférait la célébrité qu'il avait acquise par ses travaux impressionnants dans des domaines traditionnels et par sa prédiction, largement diffusée, de la position où l'astéroïde Cérès allait réapparaître après sa disparition dans l'ombre du Soleil*.

On doit à de grands mathématiciens une partie de la terminologie et du symbolisme relatifs aux nombres complexes. Descartes a été le premier a avoir employé le mot *imaginaire* ; Gauss a institué le terme *complexe* pour désigner les nombres de la forme $a + bi$, qu'il traite comme des points du plan et non comme des vecteurs ; Euler a créé le symbole « i » ; Cauchy a donné aux mots *conjugué* et *module* leur sens mathématique.

* M. J. Crowe, *A History of Vector Analysis : The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, New York, Dover Publications, Inc., 1994, p. 11.

7.5 FORME TRIGONOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

Dans cette section : *argument d'un nombre complexe – forme trigonométrique d'un nombre complexe.*

Argument d'un nombre complexe

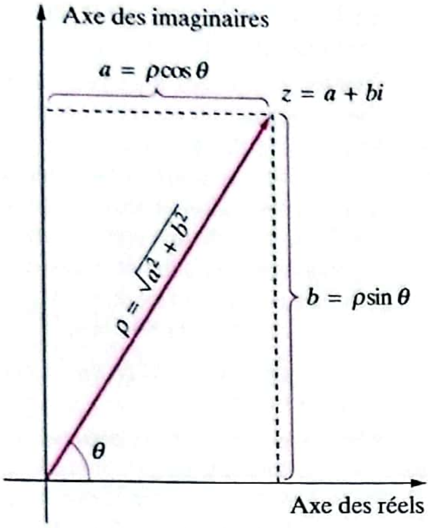
Si z est un nombre complexe non nul ($z \neq 0 + 0i$), alors l'argument de z, noté $\theta = \text{Arg}(z)$, est égal à l'angle θ, mesuré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, que détermine le vecteur représentant ce nombre complexe avec l'axe des réels dans un plan d'Argand. La valeur de l'argument est telle que $0 \leq \theta < 2\pi$ ou encore $0° \leq \theta < 360°$, selon que l'angle est mesuré en radians ou en degrés. L'argument du nombre complexe nul n'est pas défini.

Nous avons défini le module du nombre complexe $z = a + bi$ par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. On désigne aussi le module d'un nombre complexe z par le symbole ρ (la lettre grecque *rhô*, correspondant à r), qui évoque la longueur du *rayon* vecteur représentant ce nombre. Par ailleurs, si on traite les nombres complexes comme des points du plan, le module représente la distance du point à l'origine.

Dans le cas d'un nombre complexe, la direction du vecteur est appelée argument. **L'argument d'un nombre complexe** z, noté $\text{Arg}(z)$, est donc l'angle, mesuré dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, que détermine le vecteur géométrique

FIGURE 7.3

Représentation de nombres complexes dans un plan d'Argand



avec l'axe des réels (figure 7.3). Tout comme dans le cas du vecteur nul, l'argument du nombre complexe $z = 0 + 0i$ n'est pas défini.

On appelle **forme trigonométrique d'un nombre complexe** l'expression de ce nombre en fonction de son module et de son argument:

$$\begin{aligned} z &= \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta \\ &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

qui s'écrit également sous la forme abrégée

$$z = \rho\,\mathrm{cis}\,\theta \text{ où } \mathrm{cis}\,\theta = \cos\theta + i\sin\theta$$

On passe de la forme cartésienne à la forme trigonométrique, et vice versa, à l'aide des équations suivantes:

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \mathrm{tg}\,\theta = \frac{b}{a}$$
$$a = \rho\cos\theta \qquad b = \rho\sin\theta$$

Ces équations sont essentiellement identiques aux équations présentées à la section 5.5.3 (p. 225). Tout comme précédemment, on choisit la valeur de l'argument dans l'intervalle $0 \le \theta < 2\pi$ ou $0° \le \theta < 360°$ (selon que l'angle θ est mesuré en radians ou en degrés) en fonction de la position de l'extrémité du rayon vecteur représentant le nombre complexe dans le plan d'Argand*.

● Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe non nul. La forme trigonométrique de z est donnée par l'une des expressions suivantes:

$$\begin{aligned} z &= \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta \\ &= \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \rho\,\mathrm{cis}\,\theta \end{aligned}$$

où $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{b}{a}$.

EXEMPLE 7.13

Pour exprimer le nombre complexe $z_1 = 2 - 2i$ sous la forme trigonométrique, il faut calculer son module:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{2^2 + (-2)^2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Comme l'extrémité du rayon vecteur du nombre z_1 est située dans le quatrième quadrant, l'argument de ce dernier est

$$\begin{aligned} \theta &= 2\pi + \mathrm{arctg}\left(\frac{-2}{2}\right) \\ &= \frac{7\pi}{4} \text{ (ou } 315°) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 - 2i \\ &= 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{7\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

* Tout point du plan peut être défini par les distances du point aux axes de coordonnées; on parle alors des coordonnées cartésiennes d'un point, qu'on note (x, y). On peut également déterminer un point différent de l'origine par ses coordonnées dites polaires, qu'on note (r, θ), où r donne la distance du point à l'origine, et θ l'angle que fait le rayon vecteur du point avec la partie positive de l'axe des abscisses. On peut donc représenter tout nombre complexe non nul par des coordonnées polaires. L'expression (r, θ) donne la forme polaire du nombre complexe $z = r\,\mathrm{cis}\,\theta$.

Par ailleurs, pour écrire le nombre complexe $z_2 = 3\text{cis}(30°)$ sous la forme cartésienne, il faut d'abord calculer la partie réelle et la partie imaginaire de ce nombre :

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(z_2) &= 3\cos(30°)\\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\\ \operatorname{Im}(z_2) &= 3\sin(30°)\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Par conséquent, $z_2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

EXERCICE 7.3

Exprimez le nombre complexe sous la forme indiquée.

a) $z_1 = -\sqrt{3} - i$, sous la forme trigonométrique.

b) $z_2 = 4\,\text{cis}(330°)$, sous la forme cartésienne.

…ous pouvez maintenant …ire les exercices …capitulatifs 17 à 23.

7.6 OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES COMPLEXES ÉCRITS SOUS LA FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Il est facile d'effectuer les opérations d'addition et de soustraction sur des nombres complexes exprimés sous la forme cartésienne ou vectorielle, mais il n'est pas approprié d'effectuer directement ces opérations sur des nombres complexes exprimés sous la forme trigonométrique.

Par contre, la forme trigonométrique convient parfaitement pour les opérations de multiplication, de division, d'élévation à une puissance et d'extraction d'une racine.

THÉORÈME 7.1

Si $z_1 = \rho_1 \,\text{cis}\,\theta_1$ et $z_2 = \rho_2 \,\text{cis}\,\theta_2$, alors $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 \,\text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.

Preuve

Si $z_1 = \rho_1 \,\text{cis}\,\theta_1$ et $z_2 = \rho_2 \,\text{cis}\,\theta_2$, alors

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (\rho_1\cos\theta_1 + i\rho_1\sin\theta_1)(\rho_2\cos\theta_2 + i\rho_2\sin\theta_2)\\ &= \rho_1\rho_2\cos\theta_1\cos\theta_2 - \rho_1\rho_2\sin\theta_1\sin\theta_2\\ &\qquad + i(\rho_1\rho_2\cos\theta_1\sin\theta_2 + \rho_1\rho_2\cos\theta_2\sin\theta_1)\\ &= \rho_1\rho_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_2\sin\theta_1)]\\ &= \rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]\\ &= \rho_1\rho_2\,\text{cis}(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$

MaBiblio
> Multimédia
> 17. Représentation graphique du produit de deux nombres complexes

Accédez directement à l'animation.

goo.gl/h5vBzM

Cette dernière expression est un nombre complexe exprimé sous forme trigonométrique. Ainsi, le module du produit de deux nombres co plexes est égal au produit des modules de ces nombres, alors que l'argum du produit est égal à la somme des arguments des deux nombres. On recou au fait que la fonction $\text{cis}(\theta)$ est périodique de période 2π (ou $360°$) po ajuster l'argument θ du nombre complexe afin que ce dernier soit tel q $0 \leq \theta < 2\pi$ ou $0° \leq \theta < 360°$, selon qu'il est mesuré en radians ou degrés.

EXEMPLE 7.14

Soit $z_1 = 5\,\text{cis}(200°)$ et $z_2 = 8\,\text{cis}(220°)$. Les fonctions sinus et cosinus ét périodiques de période $360°$,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (5)(8)\,\text{cis}(200° + 220°) \\ &= 40\,\text{cis}(420°) \\ &= 40\,\text{cis}(60°) \end{aligned}$$

QUESTION ÉCLAIR 7.8

Que vaut z^3 si $z = 5\,\text{cis}(200°)$?

On peut également montrer que, si $z_1 = \rho_1 \,\text{cis}\,\theta_1$, si $z_2 = \rho_2 \,\text{cis}\,\theta_2$ et si $z_2 \neq$ alors $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{\rho_2}\text{cis}(-\theta_2)$ et $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.

EXEMPLE 7.15

Soit $z_1 = 5\,\text{cis}(200°)$ et $z_2 = 8\,\text{cis}(220°)$. Les fonctions sinus et cosinus éta périodiques de période de $360°$,

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{5}{8}\text{cis}(200° - 220°) \\ &= \frac{5}{8}\text{cis}(-20°) \\ &= \frac{5}{8}\text{cis}(340°) \end{aligned}$$

EXERCICE 7.4

Prouvez que, si $z_1 = \rho_1 \,\text{cis}\,\theta_1$, si $z_2 = \rho_2 \,\text{cis}\,\theta_2$ et si $z_2 \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{\rho_2}\text{cis}(-\theta$ et $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$.

(Indice : Tracez un plan d'Argand, et représentez-y un nombre complexe et so conjugué. Quel est le lien entre les modules et les arguments des deux nombres?

7.7

FORMULE DE MOIVRE

Dans cette section: *formule de Moivre – racine $n^{ième}$ d'un nombre complexe.*

Formule de Moivre
En vertu de la formule de Moivre, si $z = \rho\,\text{cis}\theta$ et si n est un entier positif, alors $z^n = (\rho\,\text{cis}\theta)^n = \rho^n\,\text{cis}(n\theta)$.

La **formule de Moivre*** est l'une des conséquences directes du théorème 7.1. Elle indique comment élever un nombre complexe à une puissance entière.

THÉORÈME 7.2 | Formule de Moivre

Si $z = \rho\,\text{cis}\theta$ et si n est un entier positif, alors

$$\begin{aligned} z^n &= (\rho\,\text{cis}\theta)^n \\ &= \rho^n\,\text{cis}(n\theta) \end{aligned}$$

ou, ce qui est équivalent,

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

PREUVE†

Si $z = \rho\,\text{cis}\theta$, alors, en vertu du théorème 7.1,

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{zz\cdots z}_{n\text{ facteurs.}} \\ &= \underbrace{(\rho\,\text{cis}\theta)(\rho\,\text{cis}\theta)\cdots(\rho\,\text{cis}\theta)}_{n\text{ facteurs.}} \\ &= \underbrace{\rho\rho\cdots\rho}_{n\text{ facteurs.}}\,\text{cis}\underbrace{(\theta + \theta + \cdots + \theta)}_{n\text{ termes.}} \\ &= \rho^n\,\text{cis}(n\theta) \end{aligned}$$

Le théorème 7.2 se généralise aux entiers négatifs. En effet, si $z \neq 0$ et si $n < 0$, alors $-n > 0$ et

$$\begin{aligned} z^n &= (z^{-1})^{-n} \\ &= \left[\frac{1}{\rho}\,\text{cis}(-\theta)\right]^{-n} \\ &= \left(\frac{1}{\rho}\right)^{-n}\text{cis}[(-n)(-\theta)] \\ &= \rho^n\,\text{cis}(n\theta) \end{aligned}$$

* On trouve aussi l'expression «formule de De Moivre». Nous avons plutôt opté pour l'expression la plus courante dans les dictionnaires et les encyclopédies mathématiques de langue française mentionnés dans la bibliographie.

† Il ne s'agit pas ici d'une preuve formelle, il s'agit plutôt d'un argument heuristique, mais néanmoins satisfaisant. Une preuve formelle aurait exigé le recours à l'induction mathématique, qui est une technique de démonstration usuelle en mathématiques.

MaBiblio
> Multimédia
> 18. Formule de Moivre

Accédez directement à l'animation.

goo.gl/xwwny1

EXEMPLE 7.16

Pour évaluer $(1 + i)^{10}$, il est préférable d'écrire ce nombre complexe sous la forme trigonométrique avant d'appliquer la formule de Moivre. Étant donné que $1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis}(45°)$,

$$\begin{aligned}(1+i)^{10} &= \left[\sqrt{2}\operatorname{cis}(45°)\right]^{10} \\ &= 32\operatorname{cis}(450°) \\ &= 32\operatorname{cis}(90°) \\ &= 32i\end{aligned}$$

EXERCICE 7.5

Évaluez l'expression.

a) $\left[3\operatorname{cis}(20°)\right]^{12}$ b) $(2 - 2i)^6$ c) $(-\sqrt{3} + i)^{-7}$

On peut déduire de la formule de Moivre un corollaire* important qui permet de déterminer les n racines $n^{\text{ièmes}}$ de tout nombre complexe différent de 0.

Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe
On appelle racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe z différent de 0 tout nombre complexe w tel que $w^n = z$, et on écrit $w = z^{1/n}$.

On appelle **racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe** z différent de 0 tout nombre complexe w tel que $w^n = z$ et on écrit $w = z^{1/n}$.

Nous allons donner deux preuves différentes du corollaire de la formule de Moivre.

THÉORÈME 7.3 | Corollaire de la formule de Moivre

Si $z = \rho\operatorname{cis}\theta$, alors $z^{1/n} = \rho^{1/n}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ où $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

PREUVE 1

Si on pose $w = \rho^{1/n}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ où $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, il faut vérifier que $w^n = z$. Or, en vertu de la formule de Moivre et de la périodicité des fonctions sinus et cosinus,

$$\begin{aligned}w^n &= \left[\rho^{1/n}\operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]^n \\ &= \left(\rho^{1/n}\right)^n\operatorname{cis}\left[n\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= \rho\operatorname{cis}(\theta + 2k\pi) \\ &= \rho\operatorname{cis}\theta \\ &= z\end{aligned}$$

Par conséquent, $z^{1/n} = \rho^{1/n}\operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ où $k = 0, 1, \ldots, n - 1$.

* Un corollaire est une proposition qui découle directement d'un théorème déjà démontré.

PREUVE 2

Si $w = r\,\mathrm{cis}\,\alpha$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de $z = \rho\,\mathrm{cis}\,\theta$, alors $w^n = z$. En vertu de la formule de Moivre, il faut donc que

$$\begin{aligned} w^n &= r^n \,\mathrm{cis}(n\alpha) \\ &= \rho\,\mathrm{cis}\,\theta \\ &= z \end{aligned}$$

Cette égalité est vraie seulement si les modules des deux nombres complexes sont égaux, c'est-à-dire si $r^n = \rho$ ou, ce qui est équivalent, si $r = \rho^{1/n}$.

Il faut également que les arguments des deux nombres soient égaux, ou qu'ils diffèrent par un multiple entier de 2π étant donné la périodicité des fonctions sinus et cosinus ; on doit donc avoir $n\alpha = \theta + 2k\pi$ où k est un entier, ou encore $\alpha = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ où k est un entier. Donc,

$$w = \rho^{1/n}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

où k est un entier. Si on limite les valeurs de k à $k = 0, 1, \ldots, n-1$, on obtient quand même toutes les valeurs de w, les autres valeurs de k donnant des résultats identiques aux précédents. En effet, par exemple, w est le même pour $k = 0$ ou $k = n$. Par conséquent,

$$w = z^{1/n} = \rho^{1/n}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \text{ où } k = 0, 1, \ldots, n-1$$ ▣

MaBiblio
> Multimédia
> 19. Corollaire de la formule de Moivre

Accédez directement à l'animation.

EXEMPLE 7.17

Pour trouver les racines quatrièmes de $z = 1 + i$, il faut d'abord écrire ce nombre complexe sous sa forme trigonométrique, soit $z = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, puis appliquer le corollaire de la formule de Moivre. On désigne les quatre racines quatrièmes de z par w_k où $k = 0, 1, 2, 3$, et

$$w_k = \left(\sqrt{2}\right)^{1/4}\mathrm{cis}\left[\frac{(\pi/4) + 2k\pi}{4}\right] \text{ où } k = 0, 1, 2, 3$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} w_0 &= 2^{1/8}\,\mathrm{cis}\left(\frac{\pi}{16}\right) \\ w_1 &= 2^{1/8}\,\mathrm{cis}\left(\frac{9\pi}{16}\right) \\ w_2 &= 2^{1/8}\,\mathrm{cis}\left(\frac{17\pi}{16}\right) \\ w_3 &= 2^{1/8}\,\mathrm{cis}\left(\frac{25\pi}{16}\right) \end{aligned}$$

sont les quatre racines quatrièmes de $z = 1 + i$. Il est d'ailleurs facile de vérifier que $(w_k)^4 = 1 + i$.