Examen 3 : Préparation (Nombre complexe, algèbre et géométrie vectorielles dans l'espace)

1. Soit les vecteurs suivants :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

   a. Calculer, si possible, $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v}$.

   b. Calculer, si possible, $(\vec{u} \times \vec{w})\, \vec{v}$.

   c. Calculer, si possible, $(\vec{u} \cdot \vec{w}) \times \vec{v}$.

   d. Calculer, si possible, $(\vec{u}\vec{w}) \cdot \vec{v}$.

   e. Calculer, si possible, $(\vec{u} \times \vec{w}) \times \vec{v}$.

   f. Calculer l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{w}$.

   g. Calculer $\vec{w}_{\vec{u}}$.

   h. Calculer $\vec{u}_{\vec{w}}$.

   i. Construire un vecteur unitaire $\perp$ à $\vec{u}$ et à $\vec{w}$.

   j. Démontrer que ces vecteurs forment une base de $\Re^3$.

   k. Exprimer le vecteur $\vec{z} = \begin{bmatrix} -9 & 8 & -5 \end{bmatrix}$.

   Réponses

   a. -65

   b. $\nexists$

   c. $\nexists$

   d. $\nexists$

   e. $\begin{bmatrix} -3 & -27 & -9 \end{bmatrix}$

   f. $\arccos\left(\dfrac{-11}{\sqrt{9}\sqrt{35}}\right) = 128,3°$

   g. $\dfrac{-11}{9}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{11}{9} & \frac{22}{9} & \frac{22}{9} \end{bmatrix}$

   h. $\dfrac{-11}{35}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-33}{35} & \frac{11}{35} & \frac{-11}{7} \end{bmatrix}$

   i. $\vec{u} \times \vec{w} = \begin{bmatrix} -12 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ et $||\vec{u} \times \vec{w}|| = \sqrt{194}$.
   On obtient donc $\dfrac{1}{\sqrt{194}}\begin{bmatrix} -12 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-12}{\sqrt{194}} & -\frac{1}{\sqrt{194}} & \frac{7}{\sqrt{194}} \end{bmatrix}$ et
   $-\dfrac{1}{\sqrt{194}}\begin{bmatrix} -12 & -1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{\sqrt{194}} & \frac{1}{\sqrt{194}} & -\frac{7}{\sqrt{194}} \end{bmatrix}$.

j. Premier critère: linéairement indépendant (il faut vérifier la seule solution de $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{0}$ est $a=0, b=0, c=0$).

Il faut résoudre le système : $\begin{cases} -a+3b+3c &= 0 \\ -2a+b-c &= 0. \\ -2a-4b+5c &= 0 \end{cases}$

Ce système admet la solution $(0,0,0)$ mais on doit démontrer que c'est la seule solution. Or $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 65 \neq 0$, donc la solution est unique.

Deuxième critère: système générateur (il faut vérifier que $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{x}$ admet au moins une solution).

Il faut résoudre le système : $\begin{cases} -a+3b+3c &= x_1 \\ -2a+b-c &= x_2. \\ -2a-4b+5c &= x_3 \end{cases}$

Ce système a les mêmes coefficients que celui du critère précédant et ainsi la même matrice des coefficients et donc une solution unique.

■

k. On résout $a\vec{u}+b\vec{v}+c\vec{w}=\vec{z}$.

On obtient la matrice : $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & -9 \\ -2 & 1 & -1 & 8 \\ -2 & -4 & 5 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 3 & -9 \\ 0 & -5 & -7 & 26 \\ 0 & 0 & 13 & -39 \end{array}\right] \vec{z} = -3\vec{u}-\vec{v}-3\vec{w}$.

2. Vrai ou faux

a. Le produit de deux nombres complexes n'est pas un nombre réel.

b. Deux vecteurs non nul de l'espace sont perpendiculaires si et seulement si leur produit scalaire est nul.

c. Il y a deux vecteurs unitaires perpendiculaires à une droite dans l'espace.

d. Un plan dans l'espace est définit parfaitement par deux points et un vecteur.

e. Un plan dans l'espace peut-être définit parfaitement par deux points et un vecteur.

Réponses

a. Faux. Par exemple, $i^2=-1$ et -1 est un nombre réel.

b. Vrai. En effet : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,cos(\theta)$. Or si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ alors $cos(\theta)=0$ donc $\theta=90°$ et les vecteurs sont perpendiculaires.

c. Faux. il y en a une infinité. En effet, pour une droite $\Delta : \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$, tous les vecteurs parallèles au plan $\pi : ax+by+cz = ap_1+bp_2+cp_3$ sont perpendiculaires à la droite Δ.

d. Faux. Si on a par exemple A, B et le vecteur $\vec{u}$, il suffit que $\vec{AB} \parallel \vec{u}$, et il n'y a pas un système générateur.

e. Vrai. Si on a par exemple A, B et le vecteur $\vec{u}$, il faut que $\vec{AB} \nparallel \vec{u}$

3. Soit les points $A\,(2,-1,1)$, $B\,(4,2,4)$ et $C\,(-2,3,z)$. Trouver la valeur de z pour que le triangle ABC soit rectangle en B. (5 pts)

Réponses

$$\begin{aligned}
0 &= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} \\
&= \begin{bmatrix}-2 & -3 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & 1 & z-4\end{bmatrix} \\
&= 12-3-3(z-4) \\
&= 9-3z+12 \\
7 &= z
\end{aligned}$$

4. Soit les nombres complexes suivants :
$x=5 \quad y=8i \quad z=4-6i \quad w=-2+4i$

Effectuer les opérations suivantes dans $\mathbb{C}$

a. $\dfrac{z}{x}=$

b. $\dfrac{z}{y}=$

c. $z\times w=$

d. $z\div w=$

e. $z\times(x+y)=$

f. $z^3=$

g. $(x+y)\div z=$

Réponses

a. $\dfrac{z}{x}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{6}{5}i$

b. $\dfrac{z}{y}=-\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{2}i$

c. $z\times w=16+28i$

d. $z\div w=-\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{5}i$

e. $z\times(x+y)=68+2i$

f. $z^3=-368-72i$

g. $(x+y)\div z=-\dfrac{7}{13}+\dfrac{31}{26}i$

5. Soit les nombres complexes suivants :
$x=12\,cis\,(150°) \quad y=4\,cis\,(30°) \quad z=6\,cis\,(300°)$

a. Calculer $x \times y$.

b. Calculer $y \div z$.

c. Calculer $\dfrac{x}{y \times z}$.

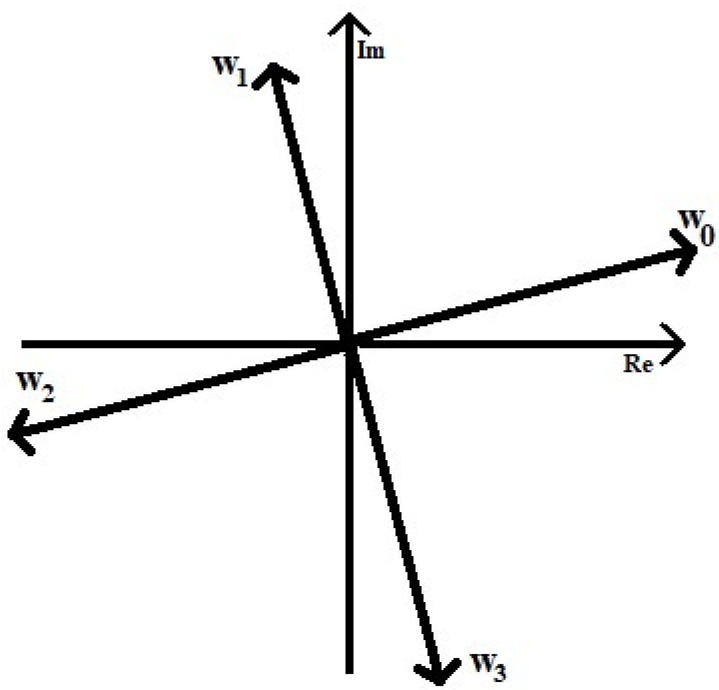
Réponses

1. $48\, cis\,(180°)$
2. $\dfrac{2}{3}\, cis\,(90°)$
3. $\dfrac{1}{2}\, cis\,(180°)$

6. Trouver les 4 racines 4^{me} de $z = 16\, cis\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ et représenter le plan d'Argand.

Réponses

- $w_0 = 2\, cis\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$
- $w_1 = 2\, cis\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$
- $w_2 = 2\, cis\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$
- $w_3 = 2\, cis\left(\dfrac{19\pi}{12}\right)$



7. Évaluer $(1 - i)^{20}$.

Réponses

$$\begin{aligned}(1-i)^{20} &= \left[\sqrt{2}\,cis\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{20}\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^{20}\; cis\left(\frac{140pi}{4}\right)\\ &= 1024\,cis\,(35\pi)\\ &= 1024\,cis\,(\pi)\\ &= 1024\,(\cos(\pi)+i\sin(\pi))\\ &= 1024\,(-1+i\cdot 0)\\ &= -1024\end{aligned}$$

8. Trouver une équation vectorielle de la droite Δ perpendiculaire au plan $\pi\,:\,2x+4y-z=5$ passant par le point $A\,(1,2,5)$.

   Réponses
   $\Delta:\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\end{bmatrix},k\in\mathbb{R}$

9. Trouver une équation cartésienne du plan π_1 passant par le point $B\,(-3,2,-4)$ et qui est perpendiculaire à la fois au plan $\pi_2\,:\,x+y+z=3$ et au plan $\pi_3\,:\,-2x+3y=6$.

   Réponses
   $\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & -2 & 5\end{bmatrix}$.

   $-3(-3)-2(2)+5(-4)=-15$.

   Et on obtient : $\pi_1\,:\,-3x-2y+5z=-15$

10. Trouver une équation cartésienne du plan π qui passe pas les points $P\,(3,-2,5)$, $Q\,(-2,4,3)$, $R\,(1,1,1)$,

    Réponses
    Il nous faut deux vecteur du plan, disons $\vec{PQ}=\begin{bmatrix}-5 & 6 & -2\end{bmatrix}$ et $\vec{PR}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & -4\end{bmatrix}$.

    $\vec{n}=\vec{PQ}\times\vec{PR}=\begin{bmatrix}-18 & -16 & -3\end{bmatrix}$. Prenons $\vec{n}=\begin{bmatrix}18 & 16 & 3\end{bmatrix}$, c'est plus élégant.

    $18(1)+16(1)+3(1)=37$ et on obtient : $\pi\,:\,18x+16y+3z=37$

11. Calculer le point R de la droite $\Delta:\begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}-2 & 1 & -6\end{bmatrix}$ le plus près du point $Q(-4,1,2)$ et calculer la distance entre ce point et Q.

    Réponses
    $\vec{OR}=\vec{OP}+\vec{PR}$

    $$\vec{PR}=\vec{PQ}_{\vec{d}}=\frac{\begin{bmatrix}-6 & 2 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1 & -6\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-2 & 1 & -6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1 & -6\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}-2 & 1 & -6\end{bmatrix}=\frac{20}{41}\begin{bmatrix}-2 & 1 & -6\end{bmatrix}$$

$$\vec{OR} = \begin{bmatrix}2 & -1 & 3\end{bmatrix} + \frac{20}{41}\begin{bmatrix}-2 & 1 & -6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{42}{41} & \frac{-21}{41} & \frac{3}{41}\end{bmatrix}$$

$$d = \sqrt{\left(-4 - \frac{42}{41}\right)^2 + \left(1 - \frac{-21}{41}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{41}\right)^2} = \sqrt{\frac{52\,521}{41}} = \frac{\sqrt{1281}}{\sqrt{41}}$$

12. Soit les trois droites suivantes :

   - $\Delta_1 : \begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix} + k_1\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\end{bmatrix}$
   - $\Delta_2 : \begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5 & -1 & 0\end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$
   - $\Delta_3 : \begin{bmatrix}x & y & z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 3 & -1\end{bmatrix} + k_3\begin{bmatrix}2 & -6 & -10\end{bmatrix}$

   Déterminer précisément la position relative de ces trois droites.

   Réponses

   - Les droite Δ_1 et Δ_3 sont parallèles distinctes. Elles sont distantes de $\frac{\sqrt{1314}}{\sqrt{35}}$.
   - Les droites Δ_1 et Δ_2 sont concourantes. Elles se croisent au point $(-1, 7, 12)$ lorsque $k_1 = 2$ et $k_2 = 4$.
   - Les droites Δ_2 et Δ_3 sont gauches.
     Nous avons $\vec{d_2} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $\vec{d_3} = \begin{bmatrix}2 & -6 & -10\end{bmatrix}$. Et ainsi
     $\vec{d_1} \times \vec{d_2} = \begin{bmatrix}-2 & 16 & -10\end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix}1 & -8 & 5\end{bmatrix}$.
     Le plan construit à partir de ces droites et passant pas le point $(-5, -1, 0)$ est
     $\pi : x - 8y + 5z = 3$.
     Calculons la projection $\vec{QP}_{\vec{n}}$ avec $Q(4, 3, -1) \in \Delta_3$, $P(-5, -1, 0) \in \pi$:
     $\vec{QP}_{\vec{n}} = \frac{\begin{bmatrix}-9 & -4 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & -8 & 5\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}1 & -8 & 5\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 & -8 & 5\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}1 & -8 & 5\end{bmatrix} = \frac{28}{90}\begin{bmatrix}1 & -8 & 5\end{bmatrix}$.
     Et la distance est $\left\|\vec{QP}_{\vec{n}}\right\| = \frac{28}{90}\sqrt{90} = \frac{14 \cdot 3\sqrt{10}}{45} = \frac{14\sqrt{10}}{15}$.