Chapitre 4

Réponse - Relation

Notez : les graphes orientés ont été conçus sur le site de Evan Wallace [1] et les diagrammes de Hasse sur Method Draw Vector Editor [2].

4.1 Définition/ représentation

Ex. 1

a. Oui, une personne est dans son propre programme.

b. Oui, si $(a, b) \in R$ alors b est dans le même programme que a et $(b, a) \in R$.

c. Non, si $(a, b) \in R, a \neq b$ alors b est dans le même programme que a et $(b, a) \in R$.

d. Oui, si a est dans le même programme que b et b est dans le même programme de c, alors a est dans le même programme que c. Notons que dans un autre contexte, il serait possible que b ait « deux programmes » et que R ne soit pas transitive.

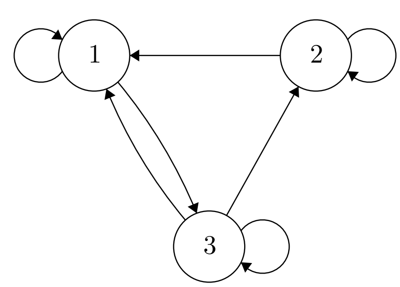
1. https ://madebyevan.com/fsm
2. https ://editor.method.ac/

Ex. 2
Propriétés des relations :

	réflexive	symétrique	antisymétrique	transitive
a.	x	x		
b.	x			
c.	x	x		
d.			x	x
e.				
f			x	x

Ex. 3

a.



b.

$A \times A$	**1**	**2**	**3**
1	1	0	1
2	1	1	0
3	1	1	1

c. R est réflexive $(1,1) \in R, (2,2) \in R, (3,3) \in R$.
d. R n'est pas irréflexive puisque $(1,1) \in R$.
e. R n'est pas symétrique, en effet $(2,1) \in R$ et $(1,2) \notin R$. Pareil pour $(3,2)$.
f. R n'est pas antisymétrique, en effet $(1,3) \in R$ et $(3,1) \in R$.
g. R n'est pas transitive, en effet $(1,3) \in R, (3,2) \in R$ mais $(1,2) \notin R$.
h. R est connexe $(1,2) \in R, (1,3) \in R, (3,2) \in R$.
i. R n'est pas dense puisque $(3,2) \in R$ et le seul élément qui reste (1) ne peut servir d'intermédiaire, $(1,2) \notin A$.

Ex. 4

Propriétés des relations R_i :

a. R_1 :
   - Non réflexive, $(2,2) \notin R_1$
   - Symétrique
   - Antisymétrique
   - Transitive

b. R_2 :
   - Réflexive
   - Symétrique
   - Non antisymétrique $(1,2) \in R_2 \wedge (2,1) \in R_2$
   - Non transitive $(-1,0) \in R_2 \wedge (0,1) \in R_2 \wedge (-1,1) \notin R_2$

c. R_3 :
   - Réflexive
   - Non symétrique $(2,1) \in R_3 \wedge (1,2) \notin R_3$
   - Antisymétrique
   - transitive

d. R_4 :
   - Réflexive
   - Symétrique
   - Non antisymétrique $(0,2) \in R_4 \wedge (0,2) \in R_4$
   - Transitive

e. R_5 :
   - Réflexive
   - Symétrique
   - Non antisymétrique, $(0,10) \in R_5 \wedge (10,0) \in R_5$
   - Transitive

f. R_6 :
   - Non réflexive, $(2,2) \notin R_6$
   - Non symétrique, $(4,2) \in R_6 \wedge (2,4) \notin R_6$
   - Antisymétrique
   - Non transitive $(16,4) \in R_6 \wedge (4,2) \in R_6 \wedge (16,2) \notin R_6$

g. R_7 :
   - Non réflexive, $(1,1) \notin R_7$
   - Non symétrique,$(2,1) \in R_7 \wedge (1,2) \notin R_7$
   - Antisymétrique
   - Transitive

h. R_8 :
   - Réflexive
   - Non symétrique, $(4,2) \in R_8 \wedge (2,4) \notin R_8$
   - Si $b > 0$: antisymétrique, sans contraintes : non antisymétrique car $(-2,2) \in R_8 \wedge (2,-2 \in R_8$
   - Transitive

Ex. 5

a. $2^{3^2} = 512$
b. $2^{\frac{3^2-3}{2}} = 8$
c. $3^{\frac{3^2-3}{2}} = 27$
d. $2^3 = 8$
e. $3^{\frac{3^2-3}{2}} = 27$
f. $2^{3^2-1} = 2^8 = 256$
g. $2^5 = 32$
h. $2^{\frac{3^2-3}{2}-1+3} = 2^5 = 32$
i. $2^3 3^2 = 72$
j. $2^5 = 32$

Ex. 6
Éléments manquants pour les fermetures

	réflexive	symétrique	transitive
a.	(b,b)	$(b,a),(c,b)$	$(b,a),(b,b),(c,b)$
b.	(c,c)	$(a,b),(c,b)$	(c,c)
c.	$(b,b),(c,c),(d,d)$	$(b,a),(c,a),(d,b),(d,c)$	$(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c),(d,b),(d,c),(d,d)$
d.	$(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)$		$(a,a),(a,d),(b,b),(b,c),(d,a),(d,d),(c,b),(c,c)$

4.2 Relation d'équivalence

Ex. 7

a. Relation d'équivalence.
b. Pas symétrique.
c. Relation d'équivalence.
d. Pas transitive, pas symétrique.
e. Pas transitive (probablement pas symétrique).
f. Pas transitif (probablement pas réflexif).

Ex. 8

a. Pas transitive.
b. Pas réflexive.
c. Pas symétrique.
d. Relation d'équivalence.
e. Relation d'équivalence.
f. Relation d'équivalence.

Ex. 9

a. 7 - a. : $[x_i]_R$ où x_i est un élève de chaque programme.
b. 7 - c. : $[x_i]_R$ où x_i est un élève né le i^{me} jour de l'année, $1 \leq i \leq 366$.
c. 8 - d. : $[a]_R$ (ou $[b]_R$)
d. 8 - e. : $[a]_R$ et $[c]_R$
e. 8 - f. : $[a]_R$, $[b]_R$ et $[c]_R$

Ex. 10

a. La relation n'est pas symétrique.
b. La relation n'est pas réflexive.
c. Relation d'équivalence.
d. Relation d'équivalence.

Ex. 11

a. $[2]_R$ et $[3]_R$.
b. $[n]_R$, où $n \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.
c. $[n]_R$, où $n = 7k, k \in \mathbb{M}$.
d. $[n]_R$, où $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.

4.3 Relations d'ordre

Ex. 12

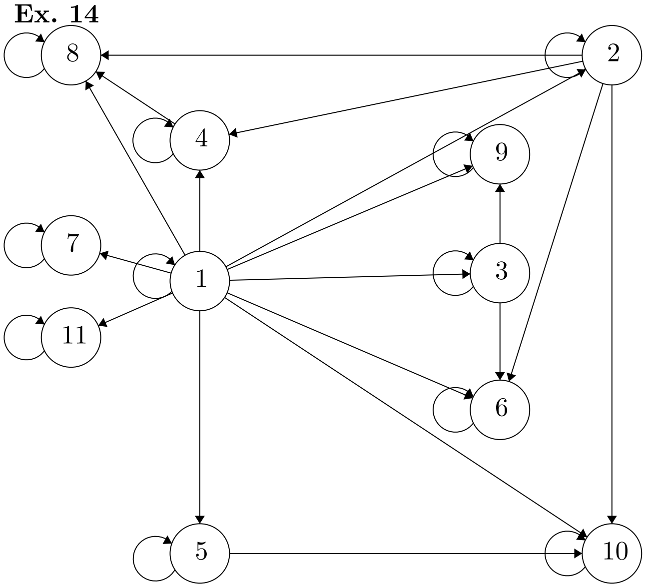
a. Non réflexif.
b. Relation d'ordre total.
c. Ordre partiel.
d. Pas réflexif, pas antisymétrique, pas transitif.
e. Pas réflexif, pas antisymétrique, pas transitif.
f. Relation d'ordre partiel.

Ex. 13

a. Relation d'ordre partiel (a et d incomparables).

b. Pas transitif.
c. Relation d'ordre total.
d. Relation ordre partiel (c et d incomparables).

Ex. 14



Ex. 15

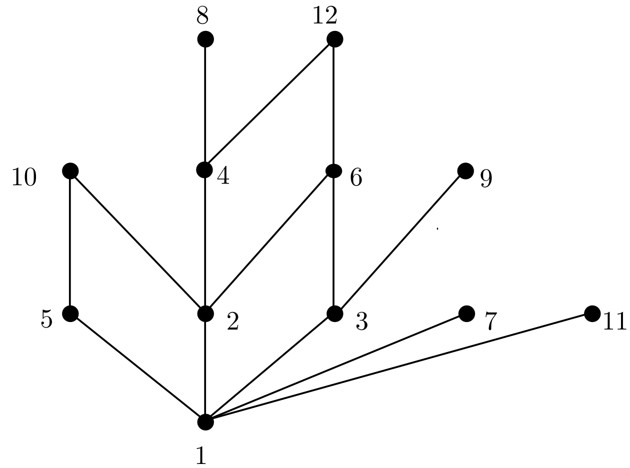
a.

$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),\\ (b,d),(c,c),(c,d),(d,d)\}$$

b.

$$R = \{(a,a),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),\\ (b,d),(c,c),(c,d),(d,d)\}$$

Ex. 16



Ex. 17

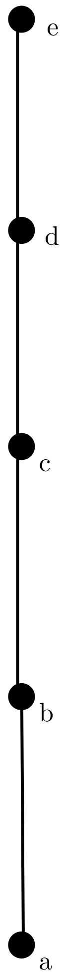
a. $\{a\}$
b. $\{h\}$
c. h
d. a
e. $\{a\}$
f. $\{g,h\}$
g. $\{a,c\}$
h. $\{h\}$
i. a
j. g
k. c
l. h

Ex. 18

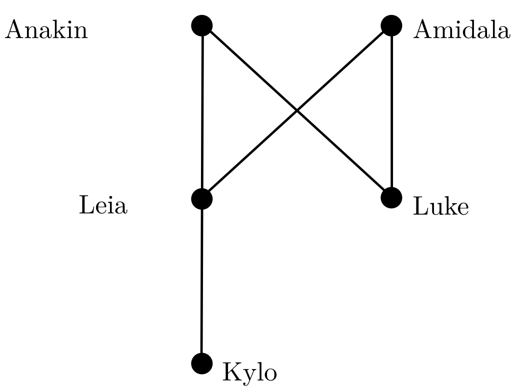
a. $\{a,b,c\}$
b. $\{h,i\}$
c. Aucun
d. Aucun
e. $\{b\}$
f. $\{g,h,i\}$
g. Aucun
h. $\{a,b,c,d,e,f,g\}$
i. b
j. g
k. b
l. d

Ex. 19

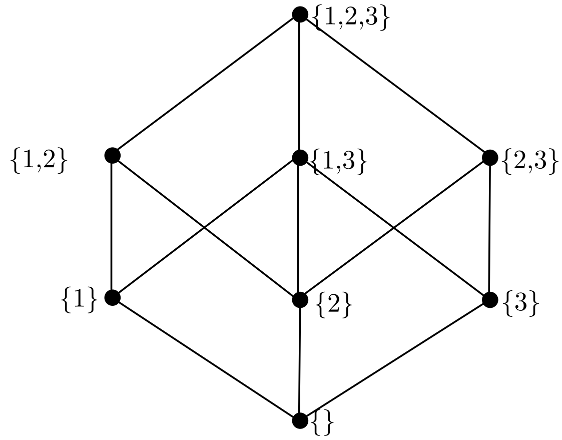
a.


e
d
c
b
a

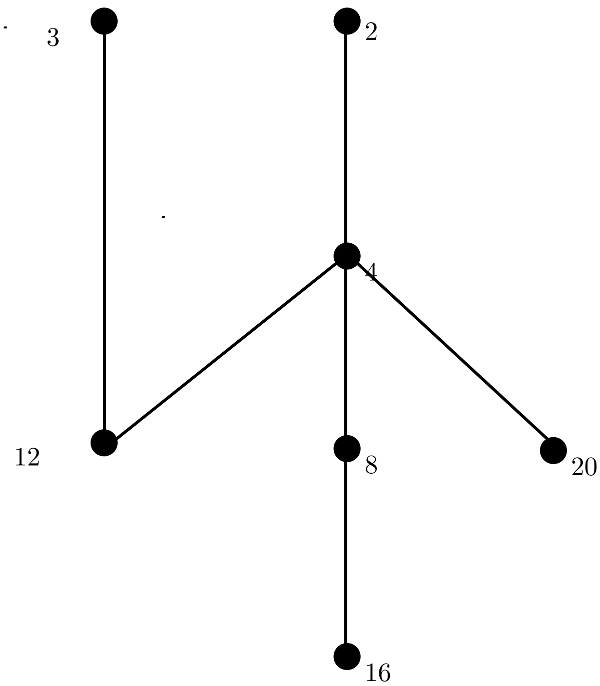
b.


Anakin
Amidala
Leia
Luke
Kylo

c.


{1,2,3}
{1,2}
{1,3}
{2,3}
{1}
{2}
{3}
{}

d.


3
2
4
12
8
20
16