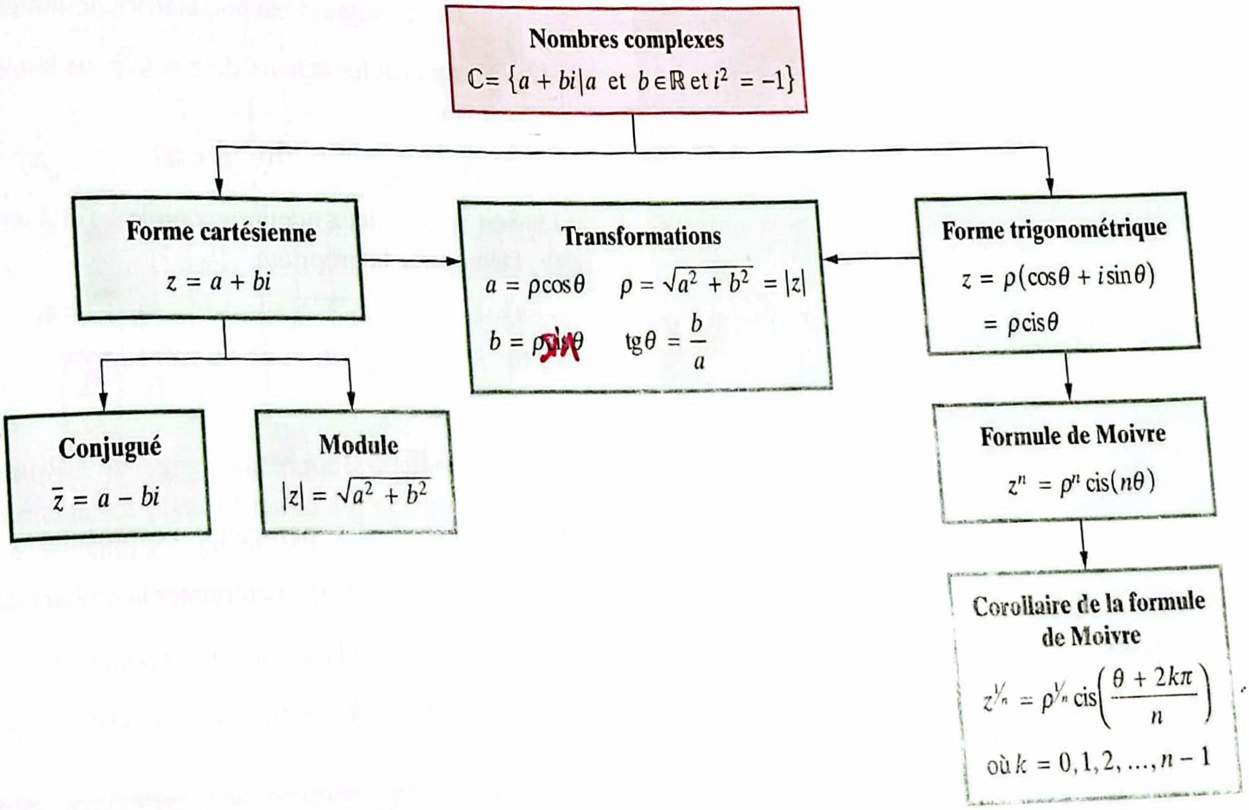
Mots clés

Argument d'un nombre complexe, p. 305
Conjugué d'un nombre complexe, p. 302
Forme cartésienne d'un nombre complexe, p. 298
Forme trigonométrique d'un nombre complexe, p. 306
Formule de Moivre, p. 309
Module d'un nombre complexe, p. 303
Nombres complexes, p. 298
Partie imaginaire d'un nombre complexe, p. 298
Partie réelle d'un nombre complexe, p. 298
Plan d'Argand, p. 304
Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe, p. 310

Réseau de concepts



Exercices récapitulatifs

Sections 7.1 à 7.3

1. Trouvez les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient l'équation.
   a) $z^2 + 4 = 0$
   b) $z^2 + 4z + 6 = 0$
   c) $3z^2 - 5z + 4 = 0$

2. Trouvez deux nombres complexes dont la somme est 8 et le produit 20.

3. Soit $z_1 = 5 + 5i$, $z_2 = -2 + 3i$ et $z_3 = 3 - i$. Évaluez l'ex-

   e) i^{43}
   f) i^{33}
   g) i^{26}
   h) $|z_1 + 3z_2 - 2z_3|$
   i) $\operatorname{Re}(4z_1 - 2z_2 + z_3)$
   j) $\operatorname{Im}(z_1 z_3)$
   k) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$
   l) $\overline{z_1 + z_2}$. Comparez le résultat avec celui obtenu Croyez-vous qu'il s'agit d'une coïncidence ?

p) $\dfrac{z_1 + 3z_2}{z_2 - z_3}$

q) $(z_1)^{-1}$

4. Quelle caractéristique présente un nombre complexe z qui satisfait à la propriété énoncée ?

a) Le nombre complexe z est égal à son conjugué.

b) Le nombre complexe z est égal à l'opposé de son conjugué.

c) Le nombre complexe z est égal à l'inverse de son conjugué.

5. Pour quelles valeurs entières de n l'expression $(n + i)^4$ représente-t-elle un entier ?

6. Si $z = a + bi$, exprimez a et b en fonction de z et de $\overline{z}$.

7. Soit la fonction $f(z) = \dfrac{z}{z^2 + 1}$, où z est un nombre complexe.

a) Quel est le domaine de la fonction ?

b) Déterminez les valeurs de z pour lesquelles $f(z) = \dfrac{2}{3}$.

c) Si $z = a + bi$, déterminez $\mathrm{Re}[f(z)]$ et $\mathrm{Im}[f(z)]$ en fonction de a et de b.

d) Déterminez l'ensemble des valeurs de z pour lesquelles $f(z) \in \mathbb{R}$.

8. Trouvez la valeur de $z \in \mathbb{C}$ qui vérifie l'équation.

a) $(4 - 5i)z + 3 - i = 2 + 3z$

b) $i\overline{z} = 2 + 2i$

c) $\dfrac{z + 5}{z - 2i} = i$

d) $3z - i\overline{z} = 4 + i$

9. Soit les matrices A, B, C et D, dont les éléments sont des nombres complexes.

$$A = \begin{bmatrix} 2+i & 2-3i \\ 3-2i & i \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2-i & 4+2i \\ 1+i & 2-i \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1-i & 2i & 2-i \\ 4 & 3+i & 3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

Évaluez si possible l'expression.

a) $A + B$ d) AB g) D^2

b) $2A + iB$ e) CB h) D^3

c) $2A + C$ f) AC i) D^5

10. Trouvez l'inverse de la matrice.

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+2i & 2i & 1 \\ 2 & -i & i \end{bmatrix}$

11. Soit A une matrice carrée d'ordre n dont les éléments sont des nombres complexes. On note A^* la matrice transposée des conjugués des éléments la matrice A, c'est-à-dire que $A^* = (\overline{A})^t$. Ainsi, si $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, alors $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]_{n\times n}$ et $A^* = (\overline{A})^t$.

a) Si $A = \begin{bmatrix} 2+i & -i & 5 \\ 3-2i & 4 & 5+2i \\ 1-i & 1+i & 3-2i \end{bmatrix}$, que vaut A^* ?

b) Une matrice hermitienne est une matrice carrée d les éléments sont des nombres complexes et telle $A = A^*$. Montrez que les éléments de la diagonale p cipale d'une matrice hermitienne d'ordre n sont nombres réels.

c) On dit d'une matrice carrée A d'ordre n qu'elle est male si et seulement si $A^*A = AA^*$. Montrez que to matrice hermitienne d'ordre n est normale.

d) Soit A une matrice carrée dont les éléments sont nombres réels (des nombres complexes dont la pa imaginaire est nulle). Si A est une matrice symétriq montrez que A est une matrice hermitienne.

12. Déterminez les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles l'énon est vrai.

a) $z = \overline{z}$ b) $|z| < |\overline{z}|$ c) $(\overline{z})^2 = z_2$

13. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes et k un nombre ré Démontrez la propriété.

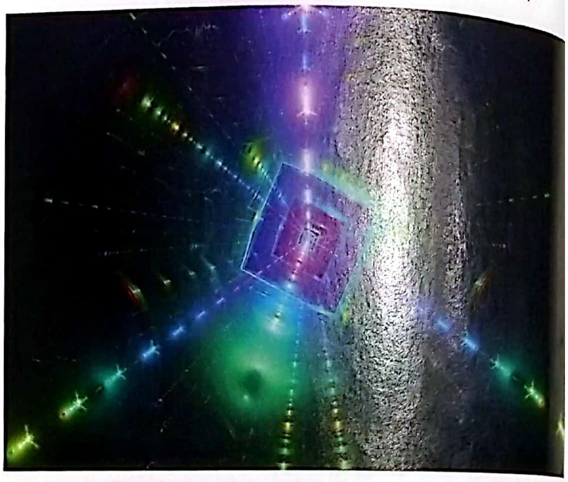
a) $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$ e) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

b) $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$ f) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

c) $\overline{kz_1} = k\overline{z_1}$

d) $|z_1| = |\overline{z_1}|$ g) $z_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1 = \overline{z_1}$

14. En physique des particules, l'expression $\overline{g(\varepsilon)}g(\varepsilon)$, $g(\varepsilon) = \dfrac{i}{\varepsilon + \frac{1}{2}i\lambda}$, sert à déterminer la probabilité d'observ une particule dont l'énergie est ε et dont la durée de vie est où $\varepsilon \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifiez que $\overline{g(\varepsilon)}g(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\lambda^2}$.



15. Si $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ est un polynôme à coefficients réels ($a_k \in \mathbb{R}$), alors les racines de ce polynôme sont les valeurs de z telles que $p(z) = 0$. Servez-vous des égalités prouvées au numéro 13 pour démontrer que si z est une racine du polynôme, alors $\overline{z}$ en est aussi une racine c'est-à-dire que l'ensemble des racines d'un polynôme à coefficients réels est formé de paires de nombres conjugués.

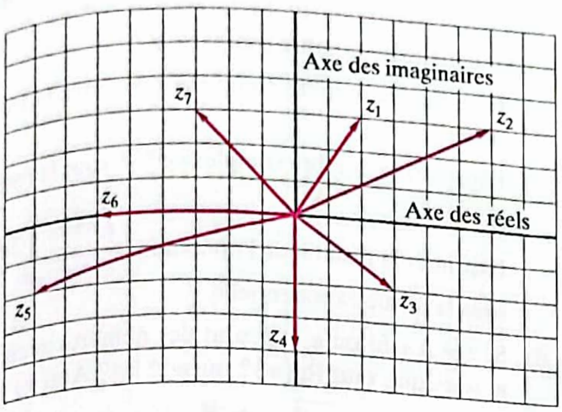
16. Dans le plan complexe, quel est le lieu géométrique décrit par les coordonnées (x, y) du nombre complexe $z = x + yi$ satisfaisant à l'équation ?

a) $z\bar{z} = 9$
b) $|z - (5 - i)| = 6$
c) $|z + 2|^2 = |z - i|^2$
d) $|z - 6 + 4i|^2 = 4$

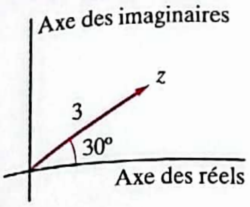
Sections 7.4 et 7.5

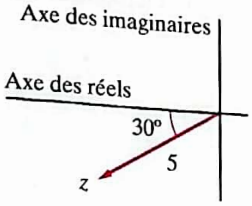
17. Représentez les nombres complexes $z_1 = 5 + 5i$, $z_2 = -2 + 3i$ et $z_3 = 3 - i$ dans un plan d'Argand.

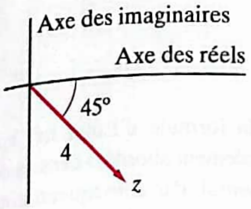
18. Écrivez sous la forme cartésienne les nombres complexes représentés dans un plan d'Argand.

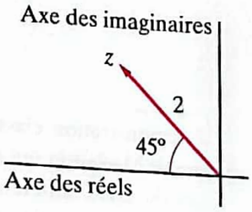


19. Écrivez sous la forme trigonométrique le nombre complexe z représenté dans un plan d'Argand. Le nombre associé au vecteur correspond à sa longueur.

a)


c)


b)


d)


20. Écrivez le nombre complexe sous la forme trigonométrique.

a) $z_1 = -5 + 5i$
b) $z_2 = -2i$
c) $z_3 = 4$
d) $z_4 = -3\sqrt{3} - 3i$
e) $z_5 = 1 - \sqrt{3}i$

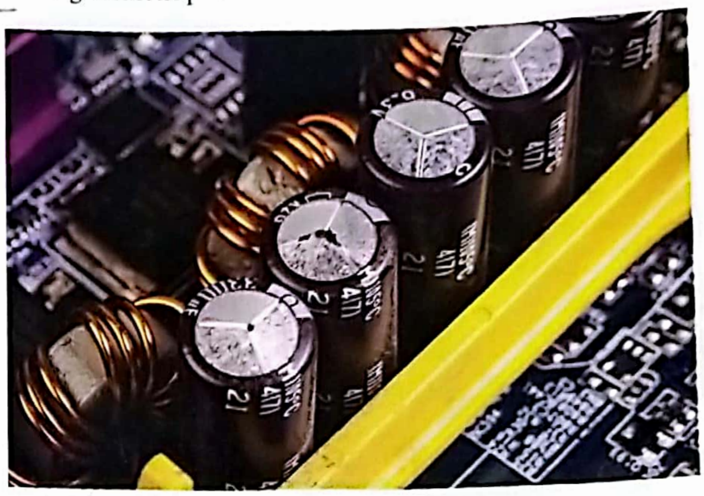
21. Écrivez le nombre complexe sous la forme cartésienne.

a) $z_1 = 4\,\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
b) $z_2 = \text{cis}(150°)$
c) $z_3 = 3\,\text{cis}\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$
d) $z_4 = 2\,\text{cis}(\pi)$

22. Dans un circuit à courant alternatif, la tension V (en volts) est donnée par $V = IZ$, où I représente le courant (en ampères), et Z l'impédance (en ohms). Tous ces paramètres sont des nombres complexes. Déterminez la valeur du paramètre manquant.

a) $I = 0{,}8 - 0{,}4i$ et $Z = 200 + 200i$
b) $V = 6 - 4i$ et $I = 0{,}4 + 0{,}6i$
c) $V = 80 + 70i$ et $Z = 20 + 10i$. Exprimez votre réponse sous la forme cartésienne et sous la forme trigonométrique.

23. Dans un circuit à courant alternatif, deux impédances, Z_1 et Z_2, sont équivalentes à $Z_e = \dfrac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$. Trouvez l'impédance équivalente Z_e si $Z_1 = 4 - 3i$ et $Z_2 = 3 + 2i$. Exprimez votre réponse sous la forme cartésienne et sous la forme trigonométrique.



Sections 7.6 et 7.7

24. La puissance P dissipée dans un composant d'un circuit électrique correspond au produit de la tension V et du courant I. Trouvez la valeur de la puissance dissipée si $V = 20\,\text{cis}(50°)$ et $I = 2\,\text{cis}(140°)$.

25. On considère les nombres complexes $z_1 = \text{cis}(30°)$, $z_2 = 2\,\text{cis}(45°)$, $z_3 = \text{cis}(\theta)$ et $z_4 = 2 - 3i$ comme des vecteurs dans un plan d'Argand.

a) Quel est le module de chaque nombre ?
b) Quel est l'argument de chaque nombre ?
c) Que vaut $z_1 z_2$?
d) Comparez les modules de z_2 et de $z_1 z_2$.
e) Comparez les arguments de z_2 et de $z_1 z_2$.
f) Représentez z_1, z_2 et $z_1 z_2$ dans un plan d'Argand.
g) Quel est l'effet géométrique de la multiplication de z_1 par i ?
h) Quel est l'effet géométrique de la division de z_1 par i ?
i) Quel est l'effet géométrique de la multiplication de z_2 par z_1 ?
j) Quel est l'effet géométrique de la multiplication de z_2 par z_3 ?

k) Par quel nombre complexe faut-il multiplier z_2 pour que le rayon vecteur qui représente ce nombre subisse une rotation de 60° ?

l) Quel nombre complexe obtient-on si on fait subir au rayon vecteur qui représente z_4 une rotation de 150° ?

26. Évaluez l'expression.

a) $\left[2\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]\left[5\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right]$

b) $\dfrac{[3\operatorname{cis}(60°)][5\operatorname{cis}(25°)]}{[2\operatorname{cis}(130°)][6\operatorname{cis}(40°)]}$

c) $\left[3\operatorname{cis}\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right]^5$

d) $\left[2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{-6}$

e) $\dfrac{[6\operatorname{cis}(15°)]^7}{[4\operatorname{cis}(45°)]^3}$. Exprimez votre réponse sous la forme cartésienne.

f) $(-1+i)^{20}$. Exprimez votre réponse sous la forme cartésienne.

g) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)^{-10}$. Exprimez votre réponse sous la forme cartésienne.

h) $\left(1+i+i^2+i^3+i^4\right)^{100}$

i) $i^{4k}, i^{4k+1}, i^{4k+2}$ et i^{4k+3} lorsque k est un entier positif.

j) $i^{45\,435}$

27. Pour quelle valeur entière et positive de n l'expression $(\sqrt{3}+i)^n$ est-elle un nombre réel ?

28. Établissez une identité trigonométrique pour chacune des fonctions $\cos 2\theta$ et $\sin 2\theta$ en comparant l'expression de $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$, obtenue à l'aide de la formule de Moivre, au résultat de $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$.

▲**29.** Trouvez toutes les racines $n^{\text{ièmes}}$ demandées du nombre complexe.

a) $z_1 = 1, n = 4$

b) $z_2 = 1+i, n = 3$

c) $z_3 = 3\sqrt{3} - 3i, n = 6$

▲**30.** Trouvez toutes les solutions de l'équation.

a) $z^4 - 81 = 0$

b) $z^6 - 19z^3 - 216 = 0$

▲**31.** Dites si l'énoncé est vrai ou faux, et justifiez votre réponse. Les symboles z, z_1 et z_2 représentent des nombres complexes.

a) $z_1^3 = z_2^3 \Rightarrow z_1 = z_2$

b) $\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Im}(z)$

c) $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{i}\right) = -\operatorname{Re}(z)$

d) $z - \bar{z} \in \mathbb{R}$

e) $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

f) $z\bar{z} = |z|$

32. Une étude plus poussée des nombres complexes permett de démontrer la formule d'Euler*:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta \\ &= \operatorname{cis}\theta \end{aligned}$$

où θ est mesuré en radians et e est la constante de Nép ($e \approx 2{,}718...$). Ainsi, tout nombre complexe z peut s'écri sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est le module du nombre com plexe et θ son argument. La forme $z = \rho e^{i\theta}$ est dite form exponentielle du nombre complexe z.

a) Exprimez le nombre complexe $1+i$ sous la forme ex ponentielle.

b) Exprimez le nombre complexe $e^{(\pi/3)i}$ sous la forme car tésienne.

c) Exprimez le résultat de l'opération $\dfrac{[4e^{(\pi/2)i}][2e^{(2\pi/3)i}]}{e^{\pi i}}$ sous la forme exponentielle.

d) Si $z = a + bi$ où a et b sont des nombres réels et qu $w = e^z$, que vaut $\operatorname{Re}(w)$? $\operatorname{Im}(w)$? $|w|$? $\operatorname{Arg}(w)$?

e) Démontrez que $\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$.

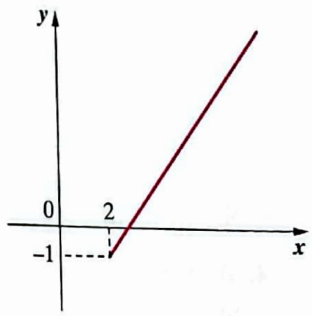
f) Démontrez que $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.

g) Démontrez l'admirable formule d'Euler†: $e^{i\pi} + 1 = 0$.

* La démonstration classique de la formule d'Euler fait appel aux séries de Maclaurin, qui sont généralement abordées dans un deuxième cours de calcul différentiel et intégral. Par conséquent, nous omettrons la démonstration de cette identité. Soulignons toutefois que la formule d'Euler présente une certaine cohérence : en effet, lorsqu'on multiplie des nombres complexes sous la forme trigonométrique, on additionne les arguments, ce qui correspond à additionner des exposants lorsqu'on multiplie deux nombres ayant une même base (ici le nombre e).

† La formule d'Euler a longtemps été considérée comme l'aboutissement des mathématiques parce qu'elle mettait en relation cinq des constantes les plus marquantes de l'histoire des mathématiques, soit 0, 1, e, i et π. Tobias Dantzig, père de George Bernard Dantzig dont nous parlerons au chapitre 10, dira de cette formule qu'elle contient « les symboles les plus importants : union mystérieuse dans laquelle l'arithmétique est représentée par 0 et 1, l'algèbre par i, la géométrie par π et l'analyse par e ».

d) Les points d'intersection de Δ_3 avec les axes de coordonnées sont $(11/3, 0)$ et $(0, -11/2)$.
e) Δ_4
f) $\theta = \text{arctg}(-1/3) + 180° \approx 161{,}6°$
g) Δ_1: $3x - 2y = 8$
h) La pente de la droite Δ_1 est $3/2$, et son angle d'inclinaison est $\theta = \text{arctg}\,3/2 \approx 56{,}3°$.
i) Les droites Δ_1 et Δ_2 sont concourantes. Elles se coupent en $(54/13, 29/13)$ et elles déterminent un angle de 90°.
j) Les droites Δ_1 et Δ_3 sont parallèles, et la distance qui les sépare est de $\dfrac{3\sqrt{13}}{13} \approx 0{,}8$ unité.
k) Les droites Δ_1 et Δ_4 sont concourantes. Elles se coupent en $(34/11, 7/11)$, et elles déterminent un angle de $\theta = \arccos\left|\dfrac{-3}{\sqrt{13}\sqrt{10}}\right| \approx 74{,}7°$.
l) Δ_4: $\dfrac{x-5}{-3} = \dfrac{y}{1}$
m) Δ_3: $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -4 + 3k \end{cases}$ où $k \in \mathbb{R}$.
n) Δ_5: $[x \quad y] = [1 \quad 1] + k_5[-3 \quad 2]$ où $k \in \mathbb{R}$.
o) $\dfrac{3\sqrt{10}}{2} \approx 4{,}7$ unités
p) $(7/2, 1/2)$
q) $(30/13, 45/13)$
r) Si $x = 2$, alors $k = 1$, et si $x = 14$, alors $k = -5$. Par conséquent, $k \in [-5, 1]$.
s) Il s'agit d'une demi-droite issue du point pour lequel $k = 1$, soit $(2, -1)$, et qui passe par le point $(4, 2)$, pour lequel $k = 0$.



t) Les équations cartésiennes des droites Δ_2 et Δ_3 sont

$$\Delta_2: 2x + 3y = 15 \text{ et } \Delta_3: 3x - 2y = 11$$

Le vecteur $\vec{n_2} = [2 \quad 3]$ est normal à la droite Δ_2 et le vecteur $\vec{n_3} = [3 \quad -2]$ est normal à la droite Δ_3. Ces deux vecteurs sont perpendiculaires puisque $\vec{n_2} \cdot \vec{n_3} = 0$. Par conséquent, les droites Δ_2 et Δ_3 sont perpendiculaires.

44. a) Vrai. c) Faux. e) Vrai. g) Faux. i) Vrai.
b) Vrai. d) Faux. f) Vrai. h) Faux.

Chapitre 7

1. a) $z = \pm 2i$
b) $z = -2 \pm \sqrt{2}i$
c) $z = \dfrac{5}{6} \pm \dfrac{\sqrt{23}}{6}i$

2. Soit x et z les nombres complexes cherchés. On a alors $x + z = 8$ et $xz = 20$. En isolant x dans la première équation et en remplaçant x par sa valeur dans la deuxième équation, on obtient $(8 - z)z = 20$ ou, ce qui est encore mieux, $z^2 - 8z + 20 = 0$. Les solutions de cette équation quadratique sont données par $z = 4 \pm 2i$. Par conséquent, les nombres $z = 4 + 2i$ et $x = 4 - 2i$ sont les deux nombres complexes dont la somme est 8 et le produit 20.

3. a) $-7 + 16i$

b) $-25 + 5i$

c) $-2 + i$

d) $-250 + 250i$

e) $-i$

f) i

g) -1

h) $\sqrt{305} \approx 17{,}5$

i) 27

j) 10

k) $3 - 8i$

l) $3 - 8i$. Les deux résultats sont identiques. Il ne s'agit pas d'une coïncidence. En effet, si $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$, alors

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a - bi) + (c - di) = (a + c) - (b + d)i = \overline{z_1 + z_2}$$

m) $-25 - 5i$

n) $-25 - 5i$. Les deux résultats sont identiques. Il ne s'agit pas d'une coïncidence. En effet, si $z_1 = a + bi$ et $z_2 = c + di$, alors, d'une part,

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

et, d'autre part,

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \Rightarrow \overline{z_1 z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

Par conséquent, $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$.

o) $\dfrac{5}{13} - \dfrac{25}{13}i$

p) $\dfrac{61}{41} - \dfrac{66}{41}i$

q) $\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{10}i$

4. a) $z = \overline{z} \Rightarrow a + bi = a - bi \Rightarrow b = 0 \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

b) $z = -\overline{z} \Rightarrow a + bi = -(a - bi) \Rightarrow a = 0 \Rightarrow z$ est un nombre imaginaire.

c) $z = \dfrac{1}{\overline{z}} \Rightarrow z\overline{z} = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$. Il s'agit des nombres complexes dont le module vaut 1.

5. On a $(n + i)^4 = (n^4 - 6n^2 + 1) + 4n(n^2 - 1)i$. Par conséquent, le nombre $(n + i)^4$ est un entier si et seulement si sa partie réelle est un entier et sa partie imaginaire est nulle. Or, la partie réelle de $(n + i)^4$ est effectivement un entier parce qu'elle est égale à une somme d'entiers. La partie imaginaire de $(n + i)^4$ est nulle si et seulement si $4n(n^2 - 1) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $n = 0$, $n = 1$ ou $n = -1$. En conclusion, $(n + i)^4$ est un entier si et seulement si $n = 0$, $n = 1$ ou $n = -1$.

6. Si $z = a + bi$, alors $\overline{z} = a - bi$, de sorte que $z + \overline{z} = 2a$, d'où $a = ½(z + \overline{z})$. De même, $z - \overline{z} = 2bi$, de sorte que $b = \dfrac{z - \overline{z}}{2i} = \dfrac{i(z - \overline{z})}{2i^2} = ½(\overline{z} - z)i$.

7. a) $\mathrm{Dom}_f = \mathbb{C}\backslash\{i, -i\}$

b) $\dfrac{z}{z^2 + 1} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 3z = 2(z^2 + 1) \Rightarrow 2z^2 - 3z + 2 = 0$

$$\Rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(2)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

c) $$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z}{z^2+1} \\ &= \frac{a+bi}{(a+bi)^2+1} \\ &= \frac{a+bi}{a^2-b^2+1+2abi} \\ &= \frac{a+bi}{a^2-b^2+1+2abi}\,\frac{a^2-b^2+1-2abi}{a^2-b^2+1-2abi} \\ &= \frac{a^3+ab^2+a+\left(-a^2b-b^3+b\right)i}{\left(a^2-b^2+1\right)^2+4a^2b^2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Re}\left[f(z)\right] = \frac{a\left(a^2+b^2+1\right)}{\left(a^2-b^2+1\right)^2+4a^2b^2}$$

et

$$\mathrm{Im}\left[f(z)\right] = \frac{-b\left(a^2+b^2-1\right)}{\left(a^2-b^2+1\right)^2+4a^2b^2}$$

d) $$f(z)\in\mathbb{R} \Rightarrow \mathrm{Im}\left[f(z)\right]=0 \Rightarrow \frac{-b\left(a^2+b^2-1\right)}{\left(a^2-b^2+1\right)^2+4a^2b^2}$$
$$\Rightarrow b=0 \text{ ou } a^2+b^2=1$$

De plus, il faut que $z \neq \pm i$, de façon que le dénominateur soit non nul. Par conséquent, $z \in \left\{a+bi \middle| b=0 \text{ ou } a^2+b^2=1 \text{ et } a\in\mathbb{R} \text{ et } b\in\mathbb{R}\right\}\backslash\{\pm i\}$.

8. a) $-\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$

b) $2+2i$

c) $-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$

d) $\frac{13}{8}+\frac{7}{8}i$

9. a) $\begin{bmatrix} 4 & 6-i \\ 4-i & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5+4i & 2-2i \\ 5-3i & 1+4i \end{bmatrix}$

c) Non définie.

d) $\begin{bmatrix} 10-i & 7 \\ 3-6i & 17 \end{bmatrix}$

e) Non définie.

f) $\begin{bmatrix} 11-13i & 7-3i & 11-9i \\ 1-i & 3+9i & 4-4i \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

10. a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 2 \end{bmatrix}$

b) $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-9+2i}{17} & \frac{1-4i}{17} & \frac{4+i}{17} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{13-18i}{17} & \frac{8+2i}{17} & \frac{-2-9i}{17} \end{bmatrix}$

11. a) $A^* = \begin{bmatrix} 2-i & 3+2i & 1+i \\ i & 4 & 1-i \\ 5 & 5-2i & 3+2i \end{bmatrix}$

b) Les éléments de la diagonale principale d'une matrice hermitienne d'ordre n sont des nombres réels.

Preuve

Soit $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ une matrice hermitienne d'ordre n. Les éléments de la diagonale principale de A sont de la forme $a_{kk} = \alpha_{kk} + i\beta_{kk}$, où $\alpha_{kk} \in \mathbb{R}$ et $\beta_{kk} \in \mathbb{R}$, et ceux de la diagonale principale de A^* sont de la forme $\overline{a_{kk}} = \overline{\alpha_{kk} + i\beta_{kk}} = \alpha_{kk} - i\beta_{kk}$. Si $A = A^*$, alors

$$a_{kk} = \overline{a_{kk}} \quad\Rightarrow\quad \alpha_{kk} + i\beta_{kk} = \alpha_{kk} - i\beta_{kk} \quad\Rightarrow\quad \beta_{kk} = 0 \quad\Rightarrow\quad a_{kk} = \alpha_{kk} \in \mathbb{R}$$

Les éléments de la diagonale principale d'une matrice hermitienne sont des nombres réels. $\boxed{\cdot}$

c) Toute matrice hermitienne d'ordre n est une matrice normale.

Preuve

Soit A une matrice hermitienne d'ordre n. Alors $A^* = A$, de sorte que $A^*A = AA = AA^*$. Par conséquent, toute matrice hermitienne d'ordre n est une matrice normale. $\boxed{\cdot}$

d) Si A est une matrice symétrique dont les éléments sont des nombres réels (des nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle), alors A est une matrice hermitienne.

Preuve

Soit A une matrice symétrique d'ordre n dont les éléments sont des nombres réels. Alors,

$$\begin{aligned} A^* &= \left(\overline{A}\right)^t \\ &= A^t \quad \text{Puisque les éléments de } A \text{ sont des réels.} \\ &= A \quad \text{Puisque } A \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

Par conséquent, une matrice symétrique dont les éléments sont des nombres réels est une matrice hermitienne. $\boxed{\cdot}$

12. a) Cet énoncé est vrai seulement dans le cas où $z \in \mathbb{R}$.

b) Cet énoncé est faux quelle que soit la valeur de z.

c) L'énoncé est vrai lorsque $z = 0 + 0i$, $z = 2 + 0i$, $z = -1 + \sqrt{3}i$ ou $z = -1 - \sqrt{3}i$.

13. a) $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

Preuve

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$, alors $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, de sorte que

$$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i$$

Par ailleurs, $\overline{z_1} = a_1 - b_1 i$ et $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$, de sorte que

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i$$

Par conséquent, $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$. $\boxed{\cdot}$

b) $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$

Preuve

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$, alors $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$, de sorte que

$$\overline{z_1 z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Par ailleurs, $\overline{z_1} = a_1 - b_1 i$ et $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$, de sorte que

$$\overline{z_1}\,\overline{z_2} = (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$$

Par conséquent, $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$. ⊡

c) Si $z_1 \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$, alors $\overline{kz_1} = k\overline{z_1}$.

Preuve

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$ et k est un nombre réel, alors

$$\begin{aligned}\overline{kz_1} &= \overline{k(a_1 + b_1 i)}\\ &= \overline{ka_1 + kb_1 i}\\ &= ka_1 - kb_1 i\\ &= k(a_1 - b_1 i)\\ &= k\overline{z_1}\end{aligned}$$ ⊡

d) $|z_1| = |\overline{z_1}|$

Preuve

Si $z_1 = a_1 + b_1 i$, alors

$$\begin{aligned}|z_1| &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2}\\ &= \sqrt{a_1^2 + (-b_1)^2}\\ &= |\overline{z_1}|\end{aligned}$$ ⊡

e) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

Preuve

$z_1 = a_1 + b_1 i \Rightarrow \overline{z_1} = a_1 - b_1 i \Rightarrow \overline{\overline{z_1}} = a_1 - (-b_1 i) = a_1 + b_1 i = z_1$ ⊡

f) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Preuve

Nous allons utiliser les résultats obtenus en *b*, en *c*, en *d* et en *e*, ainsi que les propriétés des nombres complexes.

$$\begin{aligned}\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\,\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}\right)}\\ &= \overline{\left(\frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}\right)}\\ &= \frac{1}{|z_2|^2}\overline{(z_1\overline{z_2})}\\ &= \frac{1}{|z_2|^2}(\overline{z_1}z_2)\\ &= \frac{1}{|z_2|^2}\left(\overline{z_1}z_2\,\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}\right)\\ &= \frac{1}{|z_2|^2}\left(\frac{\overline{z_1}|z_2|^2}{\overline{z_2}}\right)\\ &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\end{aligned}$$ ⊡

g) $z_1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z_1 = \overline{z_1}$

Preuve

On pose $z_1 = a_1 + b_1 i$.

($\Rightarrow$)

Si $z_1 \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Im}(z_1) = 0$, de sorte que $z_1 = a_1 + 0i$. Par conséquent,

$$z_1 = a_1 + 0i = a_1 - 0i = \overline{z_1}$$

($\Leftarrow$)

Si $z_1 = \overline{z_1}$, alors $a_1 + b_1 i = a_1 - b_1 i$, de sorte que $b_1 = 0$. Par conséquent,

$$z_1 = a_1 + 0i = a_1 \in \mathbb{R}$$

Donc, $z_1 \in \mathbb{R}$. ▪

14. On a

$$\begin{aligned}\overline{g(\varepsilon)} &= \overline{\left(\frac{i}{\varepsilon + \frac{1}{2}i\lambda}\right)} \\ &= \frac{\bar{i}}{\overline{\varepsilon + \frac{1}{2}i\lambda}} \\ &= \frac{-i}{\varepsilon - \frac{1}{2}i\lambda}\end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\overline{g(\varepsilon)}g(\varepsilon) &= \left(\frac{-i}{\varepsilon - \frac{1}{2}i\lambda}\right)\left(\frac{i}{\varepsilon + \frac{1}{2}i\lambda}\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2 + \frac{1}{4}\lambda^2}\end{aligned}$$

15. Si $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$ est un polynôme à coefficients réels $(a_k \in \mathbb{R})$ et si z est une racine de ce polynôme, alors $\overline{z}$ en est aussi une racine.

Preuve

Si z est une racine du polynôme, alors

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n = 0$$

d'où

$$\overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = \overline{0} = 0$$

Il faut montrer que

$$p(\overline{z}) = a_0 + a_1\overline{z} + a_2\overline{z}^2 + \cdots + a_n\overline{z}^n = 0$$

Or, en employant les propriétés démontrées au numéro 13 pour transformer l'équation $\overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = 0$, on obtient

$$\overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = 0$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \overline{a_2 z^2} + \cdots + \overline{a_n z^n} = 0$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_2}\,\overline{z^2} + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{z^n} = 0$$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_2}\,\overline{z}^2 + \cdots + \overline{a_n}\,\overline{z}^n = 0$$

De plus, comme $a_k \in \mathbb{R}$, en vertu de la dernière propriété du numéro 13, $\overline{a_k} = a_k$, de sorte que

$$a_0 + a_1\overline{z} + a_2\overline{z}^2 + \cdots + a_n\overline{z}^n = 0$$

Par conséquent, $p(\overline{z}) = a_0 + a_1\overline{z} + a_2\overline{z}^2 + \cdots + a_n\overline{z}^n = 0$: l'ensemble des racines d'un polynôme à coefficients réels est formé de paires de nombres conjugués. ▪

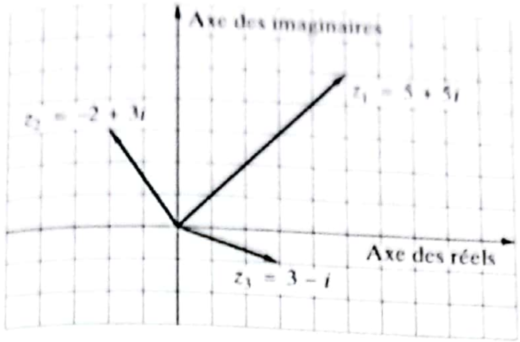
16. a) Les coordonnées de z sont situées sur un cercle de rayon 3 centré à l'origine.

b) Les coordonnées de z sont situées sur un cercle de rayon 6 centré au point $(5, -1)$.

c) Les coordonnées du point z sont situées sur la droite d'équation $y = -2x - \frac{3}{2}$.

d) Les coordonnées du point z sont situées sur le cercle de rayon 2 centré en $(6, -4)$, soit le cercle d'équation $(x-6)^2 + (y+4)^2 = 4$.

17.



18. $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 6 + 3i$, $z_3 = 3 - 2i$, $z_4 = 0 - 4i = -4i$, $z_5 = -8 - 2i$, $z_6 = -6 + 0i = -6$, $z_7 = -3 + 3i$

19. a) $z = 3\,\text{cis}(30°)$
b) $z = 4\,\text{cis}(315°)$
c) $z = 5\,\text{cis}(210°)$
d) $z = 2\,\text{cis}(135°)$

20. a) $z_1 = 5\sqrt{2}\,\text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$
b) $z_2 = 2\,\text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$
c) $z_3 = 4\,\text{cis}(0)$
d) $z_4 = 6\,\text{cis}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$
e) $z_5 = 2\,\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$

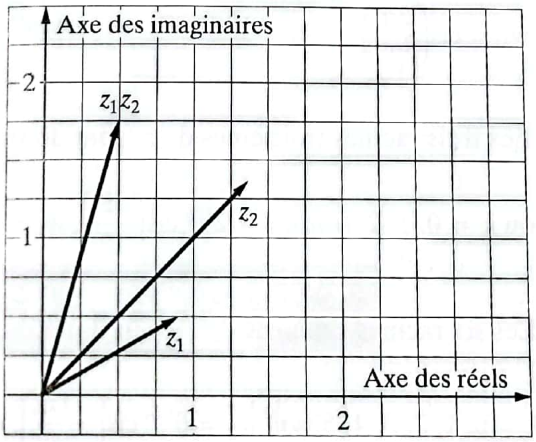
21. a) $z_1 = 4i$
b) $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$
c) $z_3 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$
d) $z_4 = -2 + 0i = -2$

22. a) $V = IZ = 240 + 80i$
b) $Z = \dfrac{V}{I} = -10i$
c) $I = \dfrac{V}{Z} = 4{,}6 + 1{,}2i \approx 4{,}8\,\text{cis}(14{,}6°)$

23. $Z_e = 2{,}54 + 0{,}22i \approx 2{,}55\,\text{cis}(5{,}0°)$

24. $P = 40\,\text{cis}(190°)$

25. a) $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$, $|z_3| = 1$ et $|z_4| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$.
b) $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 45°$, $\theta_3 = \theta$ et $\theta_4 = 360° + \text{arctg}(-3/2) \approx 303{,}7°$.
c) $z_1z_2 = 2\,\text{cis}(75°)$
d) Les modules des deux nombres complexes sont identiques : $|z_2| = 2 = |z_1z_2|$.
e) $\text{Arg}(z_2) = 45°$ et $\text{Arg}(z_1z_2) = 75°$. L'écart entre les arguments des deux nombres complexes est de 30°, soit la valeur de l'argument de z_1.
f)



g) On a $i = \text{cis}(90°)$, de sorte que $z_1 i = 1(1)\text{cis}(30° + 90°) = \text{cis}(120°)$. La multiplication de z_1 par i produit une rotation de 90° de z_1.

h) On a $i = \text{cis}(90°)$, de sorte que $\dfrac{z_1}{i} = \text{cis}(300°)$. La division de z_1 par i produit une rotation de 270° de z_1.

i) La multiplication de z_2 par z_1 produit une rotation de 30° de z_2.

j) La multiplication de z_2 par z_3 produit une rotation de θ de z_2.

k) Il faut multiplier z_2 par cis(60°).

l) Le nombre obtenu est égal à $z_4\,\text{cis}(150°) = \dfrac{-2\sqrt{3}+3}{2} + \dfrac{2+3\sqrt{3}}{2}i$.

26. a) $10i$

b) $1{,}25\,\text{cis}(275°)$

c) $243\,\text{cis}\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$

d) $1/64$

e) $2\,187\sqrt{3}, -2\,187i$

f) -2^{10}

g) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

h) 1

i) $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$ et $i^{4k+3} = -i$.

j) $-i$

27. On a $(\sqrt{3}+i)^n = \left[2\,\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^n = 2^n\,\text{cis}\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$. Ce nombre est réel si sa partie imaginaire $\left[2^n \sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)\right]$ vaut 0. Si n est un entier positif, alors $\sin\left(\dfrac{n\pi}{6}\right) = 0$ lorsque l'angle $\dfrac{n\pi}{6}$ est un multiple entier positif de π, c'est-à-dire lorsque $\dfrac{n\pi}{6} = k\pi$ ou encore $n = 6k$. Ainsi, $(\sqrt{3}+i)^n$ est un nombre réel lorsque n est un multiple entier positif de 6.

28. En vertu de la formule de Moivre, $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$. Si on évalue $(\cos\theta + i\sin\theta)^2$ en multipliant les deux facteurs exprimés sous la forme cartésienne, $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2i\sin\theta\cos\theta$. En posant

$$\cos(2\theta) + i\sin(2\theta) = (\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 2i\sin\theta\cos\theta$$

et en établissant l'égalité entre les parties réelles et les parties imaginaires des deux expressions, on obtient $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$.

29. a) Les quatre racines quatrièmes de 1 sont données par $w_k = 1^{1/4}\,\text{cis}\left(\dfrac{0+2k\pi}{4}\right)$ où $k = 0, 1, 2, 3$, soit $w_0 = \text{cis}\,0 = 1$, $w_1 = \text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = i$, $w_2 = \text{cis}(\pi) = -1$ et $w_3 = \text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -i$.

b) Les trois racines troisièmes de z_2 sont données par $w_k = (\sqrt{2})^{1/3}\,\text{cis}\left[\dfrac{(\pi/4)+2k\pi}{3}\right]$ où $k = 0, 1, 2$, soit $w_0 = 2^{1/6}\,\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$, $w_1 = 2^{1/6}\,\text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ et $w_2 = 2^{1/6}\,\text{cis}\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)$.

c) Les six racines sixièmes de z_3 sont données par $w_k = (6)^{1/6}\,\text{cis}\left[\dfrac{(11\pi/6)+2k\pi}{6}\right]$ où $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, soit $w_0 = 6^{1/6}\,\text{cis}\left(\dfrac{11\pi}{36}\right)$, $w_1 = 6^{1/6}\,\text{cis}\left(\dfrac{23\pi}{36}\right)$, $w_2 = 6^{1/6}\,\text{cis}\left(\dfrac{35\pi}{36}\right)$, $w_3 = 6^{1/6}\,\text{cis}\left(\dfrac{47\pi}{36}\right)$, $w_4 = 6^{1/6}\,\text{cis}\left(\dfrac{59\pi}{36}\right)$ et $w_5 = 6^{1/6}\,\text{cis}\left(\dfrac{71\pi}{36}\right)$.

30. a) On a $z^4 - 81 = 0 \Rightarrow z = 81^{1/4}$. Il faut donc trouver les quatre racines quatrièmes de 81. Puisque $81 = 81\,\text{cis}\,0$, ces quatre racines de 81 sont données par $w_k = 81^{1/4}\,\text{cis}\left[\dfrac{0 + 2k\pi}{4}\right]$ où $k = 0, 1, 2, 3$, soit $w_0 = 3\,\text{cis}\,0 = 3$,

$w_1 = 3\,\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 3i$, $w_2 = 3\,\text{cis}(\pi) = -3$ et $w_3 = 3\,\text{cis}\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -3i$.

b) On a

$$z^6 - 19z^3 - 216 = 0 \Rightarrow z^3 = \frac{-(-19) \pm \sqrt{(-19)^2 - 4(1)(-216)}}{2} = -8 \text{ ou } 27$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les racines troisièmes de -8 et de 27.

Les racines troisièmes de $-8 = 8\,\text{cis}(\pi)$ sont $2\,\text{cis}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $2\,\text{cis}(\pi)$ et $2\,\text{cis}\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$;

les racines troisièmes de $27 = 27\,\text{cis}(0)$ sont $3\,\text{cis}\,0$, $3\,\text{cis}\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ et $3\,\text{cis}\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

31. a) Faux. b) Faux. c) Vrai. d) Faux. e) Vrai. f) Faux.

Chapitre 8

32. a) $\sqrt{2}e^{(\pi/4)i}$

b) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

c) $8e^{(\pi/6)i}$

d) $w = e^z \Rightarrow w = e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a\,\text{cis}\,b = e^a(\cos b + i\sin b)$. Par conséquent, $\text{Re}(w) = e^a \cos b$, $\text{Im}(w) = e^a \sin b$, $|w| = e^a$ et $\text{Arg}(w) = b$.

e) $\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$

Preuve

$$\rho e^{i\theta} = \rho\cos\theta + i\rho\sin\theta \Rightarrow \overline{\rho e^{i\theta}} = \rho\cos\theta - i\rho\sin\theta$$
$$= \rho\cos(-\theta) + i\rho\sin(-\theta)$$
$$= \rho e^{-i\theta}$$

$\boxdot$

f) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

Preuve

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \text{ et } e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta$$
$$\Rightarrow e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$\boxdot$

g) $e^{i\pi} + 1 = 0$

Preuve

$$e^{i\pi} + 1 = \cos\pi + i\sin\pi + 1$$
$$= -1 + 0(i) + 1$$
$$= 0$$

$\boxdot$

Chapitre 8

1\. a) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GF}$

b) $\overrightarrow{AF}$

c) Oui.

d) $\overrightarrow{BH}$