Chapitre 4

Relation

Notez : les graphes orientés ont été conçus sur le site de Evan Wallace [1] et les diagrammes de Hasse sur Method Draw Vector Editor [2].

4.1 Définition/ représentation

Ex. 1 — Soit l'ensemble A, l'ensemble des étudiants de la classe et
$R = \{(a,b) \in A \times A \mid a \text{ est dans le même programme que } b\}$.

a. Vérifier si R est réflexive.
b. Vérifier si R est symétrique.
c. Vérifier si R est antisymétrique.
d. Vérifier si R est transitive.

Ex. 2 — Vérifier si les relations suivantes sur les étudiants du Québec sont réflexives, symétriques, antisymétriques et transitives.

a. x et y ont vu un film ensemble.
b. x a déjà embarqué dans l'auto de y.
c. x est dans la classe de y.
d. x a réussi plus de cours de math que y.
e. x a été refusé dans le programme de y.
f. x est entrée dans son programme avant y.

Ex. 3 — Soit l'ensemble $A = \{1,2,3\}$ et la relation $R = \{(1,1), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$.

a. Représenter R avec un graphe orientée.
b. Représenter R avec une matrice d'adjacence.
c. Vérifier si R est réflexive.
d. Vérifier si R est irréflexive.
e. Vérifier si R est symétrique.
f. Vérifier si R est antisymétrique.
g. Vérifier si R est transitive.
h. Vérifier si R est connexe.
i. Vérifier si R est dense.

Ex. 4 — Déterminer si les relations suivantes dans $\mathbb{Z}$ sont réflexives, symétriques, antisymétriques et transitives.

a. $R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid ab = 1\}$
b. $R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid ab \geq 0\}$
c. $R_3 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a - b \geq 0\}$
d. $R_4 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \mod 2\}$
e. $R_5 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv b \mod 9\}$
f. $R_6 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 = b\}$
g. $R_7 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \frac{a}{b} > 1\}$
h. $R_8 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv 0 \mod b\}$

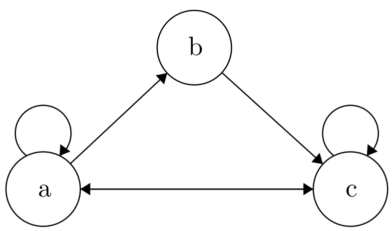
1. https ://madebyevan.com/fsm
2. https ://editor.method.ac/

Ex. 5 — Sur l'ensemble $A = \{a, b, c\}$. Dénombrer le nombre de relations dans A ...

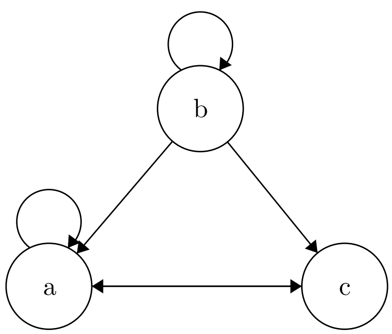
a. sans contraintes.
b. sont réflexives et symétriques.
c. sont réflexives et antisymétriques.
d. sont symétriques et antisymétriques.
e. sont irréflexives et antisymétriques.
f. ont le couple (a, b).
g. ont le couple (a, b) et sont réflexives.
h. ont le couple (a, b) et sont symétriques.
i. ont le couple (a, b) et sont antisymétriques.
j. n'ont pas le couple (a, b) et sont symétriques.

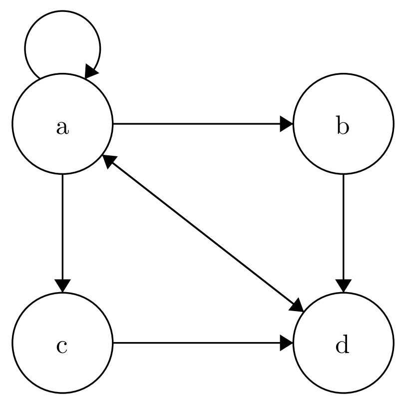
Ex. 6 — Pour chacune des relations représentées par un graphe orienté suivantes, énumérer les éléments manquants pour obtenir les fermetures réflexive, symétrique et transitive.

a.

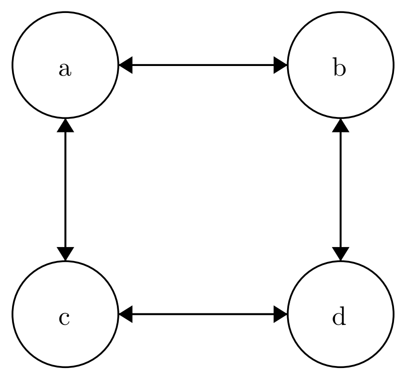


b.





d.



c.

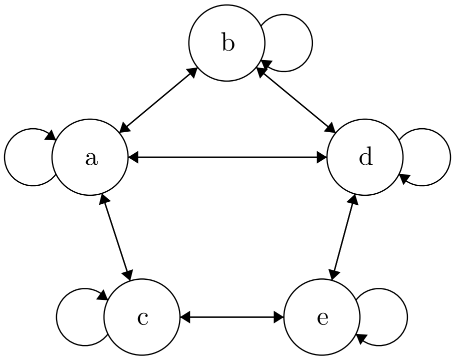
4.2 Relation d'équivalence

Ex. 7 — Parmi les relations suivantes, identifier celles qui sont des relations d'équivalence. Considérer que A est l'ensemble des étudiants du Québec.

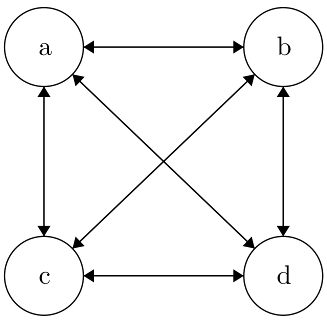
a. $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a$ est dans le programme de $b\}$. (un programme par étudiant)
b. $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a$ est plus vieux que $b\}$.
c. $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a$ a la même date de fête que $b\}$.
d. $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a$ doit de l'argent à $b\}$.
e. $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a$ connaît le nom de $b\}$.
f. $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a$ est ami FB avec $b\}$.

Ex. 8 — Parmi les relations représentées sur les graphiques suivants, identifier celles qui sont des relations d'équivalence.

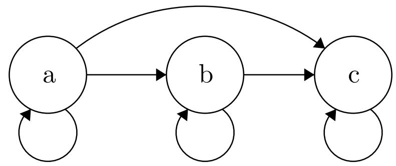
a.



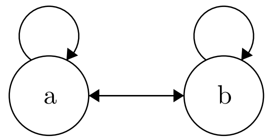
b.



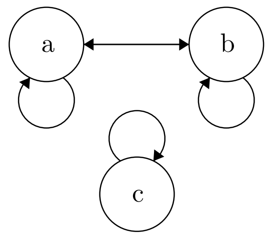
c.



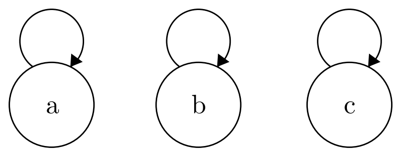
d.



e.



f.



Ex. 9 — Pour chaque relation représentée aux numéros 7 et 8 qui est une relation d'équivalence, énumérer les classes d'équivalences.

Ex. 10 — Parmi les relations suivantes dans les nombres naturels, identifier celles qui sont des relations d'équivalence.

a. $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \mid b\}$.

b. $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid ab = 1\}$.

c. $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \equiv b \mod 7\}$.

d. $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \operatorname{div} 7 = b \operatorname{div} 7\}$.

Ex. 11 — Quelle sont les classes d'équivalence des relations dans les nombres naturels suivantes (plusieurs réponses sont possibles) :

a. $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ et } b \text{ ont la même parité}\}$.

b. $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \equiv b \mod 7\}$.

c. $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \operatorname{div} 7 = b \operatorname{div} 7\}$.

d. $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \lceil log_2(a) \rceil = \lceil log_2(b) \rceil\}$.

4.3 Relations d'ordre

Ex. 12 — Déterminer si les relations suivantes sont des relations d'ordre (partiel ou total) dans l'univers des graphes orientés $(G(A))$, A l'ensemble des sommets :

a. $R = \{(a,b) \in G(A) \times G(A) \mid a \text{ compte plus de sommets que } b\}$.

b. $R = \{(a,b) \in G(A) \times G(A) \mid a \text{ compte au moins le même nombre d'arcs que b}\}$.

c. $R = \{(a,b) \in G(A) \times G(A) \mid a \text{ a tous les sommets de } b\}$.

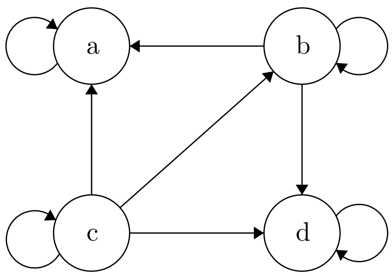
d. $R = \{(a,b) \in G(A) \times G(A) \mid a \text{ n'a aucun sommets de } b\}$.

e. $R = \{(a,b) \in G(A) \times G(A) \mid \text{si l'arc } (v_1, v_2) \in a \text{ alors l'arc } (v_1, v_2) \notin b\}$.

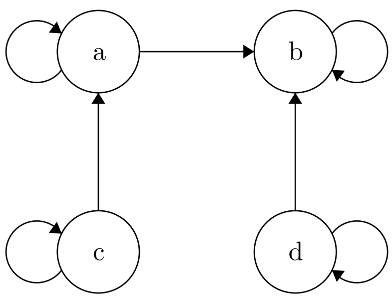
f. $R = \{(a,b) \in G(A) \times G(A) \mid a \text{ est contenu dans b (arcs et sommets)}\}$.

Ex. 13 — Déterminer si les relations associées au graphes orientés suivants sont des relations d'ordre (partiel ou total).

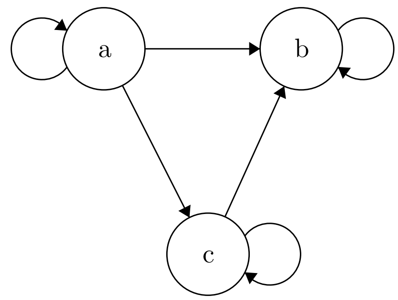
a.



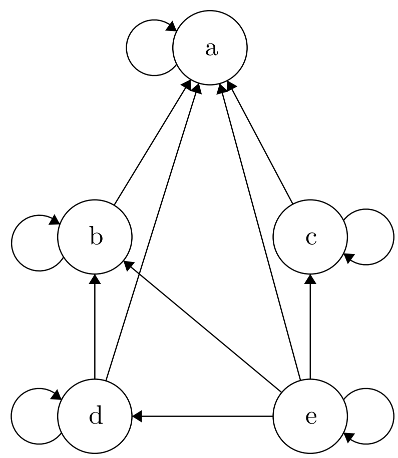
b.



c.



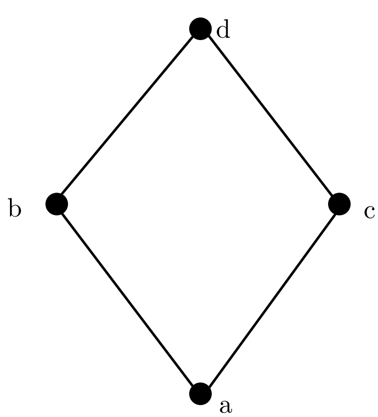
d.



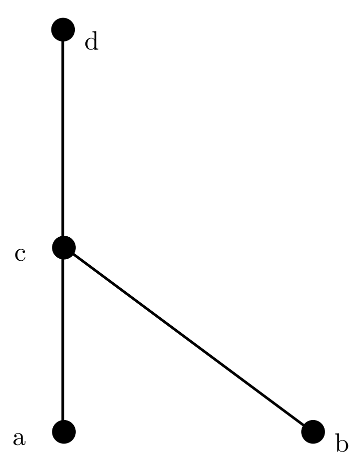
Ex. 14 — Représenter lisiblement, par un graphe orienté, la relation sur $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ si $R = \{(a,b) \in A \times A \mid b \equiv 0 \mod a\}$.

Ex. 15 — Énumérer les couples des relations représentées par les diagrammes de Hasse suivants :

a.

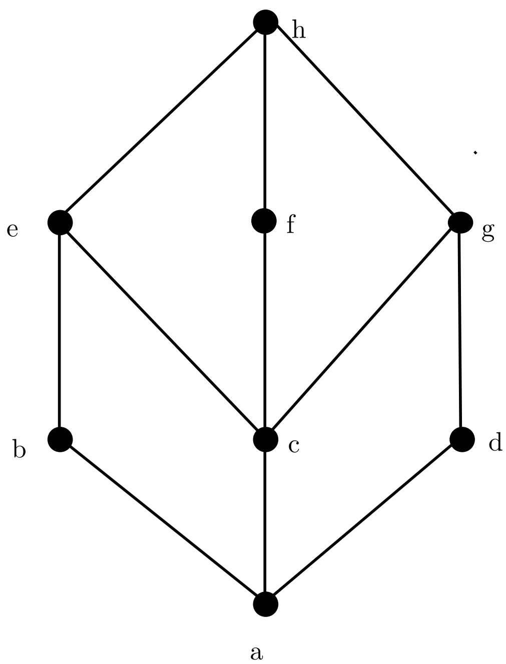


b.



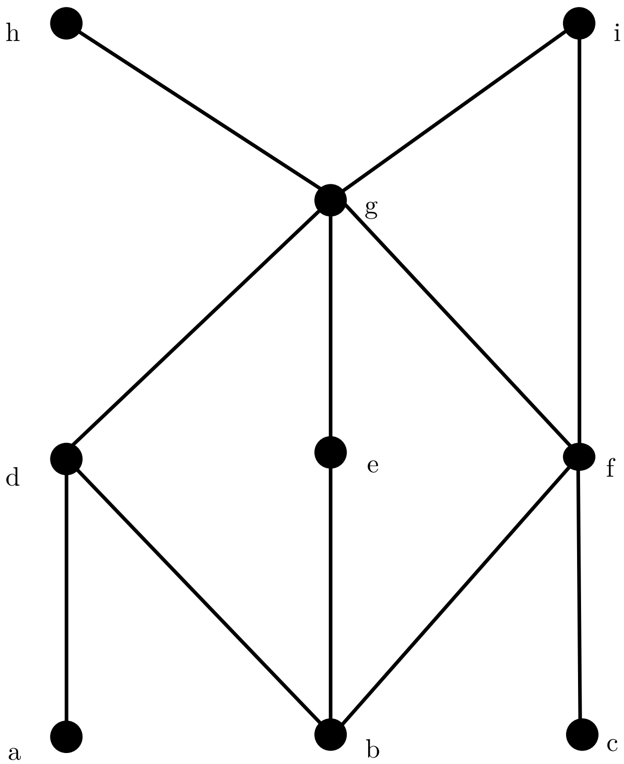
Ex. 16 — Représenter par un diagramme de Hasse, la relation sur $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ si $R = \{(a,b) \in A \times A \mid b \equiv 0 \mod a\}$.

Ex. 17 — Identifier les éléments demandés sur la relation d'ordre partiel représentée par le diagramme de Hasse suivant :



a. Éléments minimaux.
b. Éléments maximaux.
c. Élément le plus grand.
d. Élément le plus petit.
e. Minorant de $\{c, d\}$.
f. Majorant de $\{c, d\}$.
g. Minorant de $\{c, f, g\}$.
h. Majorant de $\{c, f, g\}$.
i. Infimum de $\{c, d\}$.
j. Supremum de $\{c, d\}$.
k. Infimum de $\{c, f, g\}$.
l. Supremum de $\{c, f, g\}$.

Ex. 18 — Identifier les éléments demandés sur la relation d'ordre partiel représentée par le diagramme de Hasse suivant :



a. Éléments minimaux.
b. Éléments maximaux.
c. Éléments le plus grand.
d. Éléments le plus petit.
e. Minorant de $\{d, f\}$.
f. Majorant de $\{d, f\}$.
g. Minorant de $\{g, h, i\}$.
h. Majorant de $\{g, h, i\}$.
i. Infimum de $\{d, f\}$.
j. Supremum de $\{d, f\}$.
k. Infimum de $\{e, f, g\}$.
l. Supremum de $\{a, b, d\}$.

Ex. 19 — Concevoir le diagramme de Hasse des relations d'ordre partiel suivantes :

a. Si $A = \{a, b, c, d, e\}, (A, \preceq) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, c), (b, d), (b, e), (c, d), (c, c), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e)\}$
b. Si $A = \{\text{Anakin, Luke, Leia, Amidala, Kylo}\}, (A, \preceq) = \{(a, b) \in P(A) \times P(A) \mid b \text{ est } a \text{ ou l'ancêtre de } a\}$
c. Si $A = \{1, 2, 3\}, (P(A), \preceq) = \{(a, b) \in P(A) \times P(A) \mid b \subseteq a\}$
d. Si $A = \{2, 3, 4, 8, 12, 16, 20\}, (A, \preceq) = \{(a, b) \in P(A) \times P(A) \mid a \text{ multiple de } b\}$