Exercices de diagonalisation

1. Calculer les valeurs propres et une matrice de passage pour les matrices suivantes :

   a. $\begin{bmatrix} -8 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

   Réponses
   Valeurs propres : $\{-9, 6\}$
   Les solutions sont respectivement : $\begin{bmatrix} -2k \\ k \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \frac{k}{7} \\ k \end{bmatrix}$
   Matrice de passage : $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

   Réponses
   Valeurs propres : $\{-6, 2\}$
   Les solutions sont respectivement : $\begin{bmatrix} -3k \\ k \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$
   Matrice de passage : $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   c. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

   Réponses
   Valeurs propres : $\{3\}$
   Cette matrice n'est pas diagonalisable, on ne peux construire deux vecteurs linéairement indépendant.

   d. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   Réponses
   Valeurs propres : $\{1, 2\}$
   Les solutions sont respectivement : $\begin{bmatrix} k-l \\ k \\ l \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$.
   Matrice de passage : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, (il y en a d'autres)

e. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Réponses
Valeurs propres : $\{1, 2, -4\}$

Les solutions sont respectivement : $\begin{bmatrix} k \\ k \\ k \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2k \\ \frac{-3k}{2} \\ k \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} k \\ \frac{-3k}{2} \\ k \end{bmatrix}$

Matrice de passage : $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

f. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Réponses
Valeurs propre : $\{-1, 1, 3\}$

Les solutions sont respectivement : $\begin{bmatrix} k \\ k \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ k \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} k \\ 0 \\ k \end{bmatrix}$

Matrice de passage : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$