Chapitre 1

Réponse - La logique

1.1 Algèbre booléenne

Ex. 1

a. Proposition vraie.
b. Proposition fausse.
c. Proposition vraie.
d. Pas une proposition.
e. Proposition vraie.
f. Pas une proposition.
g. Pas une proposition.
h. Pas une proposition.

Ex. 2

a. Larry n'a pas faim.
b. Il n'y a pas 12 hot-dogs au réfrigérateur.
c. Larry a faim, cela veut dire qu'il n'y a pas de hot-dog au réfrigérateur.
d. Il y a des hot-dogs, donc Larry n'a pas faim.
e. Larry a faim et il y a des hot-dogs au réfrigérateur.
f. Il y a des hot-dogs au réfrigérateur ou pas.
g. Larry a faim ou il y a des hot-dogs au réfrigérateur, mais pas les deux.
h. Larry a faim et il y n'a pas de hot-dogs ou il n'a pas faim et il y a des hot-dogs.

Ex. 3

a. $\neg B$
b. $\neg B \wedge \neg W$
c. $W \to B$
d. $\neg B \vee W$
e. $B \leftrightarrow W$
f. $\neg W \to \neg B$
g. $B \to (W \vee \neg W)$
h. $W \leftrightarrow B$

Ex. 4

a. $N \to B$
b. $N \wedge B$
c. $N \vee B$
d. $\neg(\neg B \wedge N)$
e. $B \wedge \neg N$
f. $B \to N$
g. $N \to B$
h. $N \to B$

Ex. 5

a. $\oplus$
b. $\vee$
c. $\oplus$
d. $\vee$
e. $\vee$
f. $\oplus$

Ex. 6

a. Si tu es plus en santé, alors tu fais du sport.
Si tu n'es pas plus en santé, alors tu ne fais pas de sport.
b. Si une personne étudie, alors elle réussit un cours de mathématique.
Si une personne n'étudie pas, elle ne réussit pas sont cours de mathématique.
c. Si une personne réussit un cours de mathématique, alors elle a étudié.
Si une personne ne réussit pas son cours de mathématique, alors elle n'a pas étudié.

d. Si les riches avaient gardé plus de travail pour eux, alors le travail serait une chose si magnifique.
Si les riches n'ont pas gardé plus de travail, alors le travail n'est pas une chose si magnifique.

Ex. 7

a.

p	q	r	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	V

b.

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \vee r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	V	V

c.

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	F

d.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \to (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

e.

p	q	r	$q \oplus r$	$(q \oplus r) \leftrightarrow p$
V	V	V	F	F
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F
F	F	F	F	V

f.

p	q	r	$p \leftrightarrow r$	$(p \leftrightarrow r) \oplus \neg q$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V
F	F	F	V	F

g.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

h.

p	q	$p \to q$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

1.2 Équivalence

Propriétés des opérateurs logiques

$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	Identité
$p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	Domination
$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	Idempotence
$\neg(\neg p)$	Double négation
$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$	Commutativité
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	associativité
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	Distributivité
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan
$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv q$	Absorbotion
$p \wedge \neg p \equiv F$ $p \vee \neg p \equiv V$	Simplification

Ex. 8

a.

p	q	$\neg(p \wedge \neg q)$	$\neg p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

b.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Ex. 9

a. Tautologie
b. Contingence
c. Contradiction
d. Contingence
e. Contingence
f. Contingence

Ex. 10

a. $s \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
b. $s \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
c. $s \Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
d. $s \Leftrightarrow (p \vee \neg q \vee \neg r)$

Ex. 11

a.

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee \neg(\neg q \wedge r)$
$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg\neg q \vee \neg r)$
$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (q \vee \neg r)$
$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee q) \vee \neg r$
$\Leftrightarrow \neg p \vee V \vee \neg r$
$\Leftrightarrow V \vee \neg r$
$\Leftrightarrow V$

b.

$\Leftrightarrow \neg((\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg p)) \vee ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q))$
$\Leftrightarrow (\neg(\neg p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge r)) \vee (p \wedge (q \vee \neg q))$
$\Leftrightarrow (\neg\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg r)) \wedge (p \wedge (V))$
$\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (p \vee \neg r)) \vee p$
$\Leftrightarrow (p \vee (\neg q \wedge \neg r)) \vee p$
$\Leftrightarrow (p \vee p) \vee (\neg q \wedge \neg r)$
$\Leftrightarrow p \vee (\neg q \wedge \neg r)$

c.

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee \neg(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$
$\Leftrightarrow p \wedge (\neg q \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$
$\Leftrightarrow p \wedge V \vee (\neg p \wedge q)$
$\Leftrightarrow p \vee (\neg p \wedge q)$
$\Leftrightarrow (p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)$
$\Leftrightarrow V \wedge (p \vee q)$
$\Leftrightarrow p \vee q$

Ex. 12

a. $(\neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

b. $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$

c. $(q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$

d.

$$\begin{aligned}
s \Leftrightarrow & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \\
& \quad (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
\Leftrightarrow & [(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \\
& \quad (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)] \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\
\Leftrightarrow & [\neg r \wedge ((p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q))] \vee \\
& \quad (\neg p \wedge q \wedge r) \\
\Leftrightarrow & [\neg r \wedge (p \wedge (q \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\
\Leftrightarrow & [\neg r \wedge (p \vee (\neg p \wedge \neg q)] \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\
\Leftrightarrow & [\neg r \wedge ((p \vee \neg p) \wedge p \vee \neg q)] \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\
\Leftrightarrow & [\neg r \wedge (p \vee \neg q)] \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\
\Leftrightarrow & (\neg r \wedge p) \vee (\neg r \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\
\Leftrightarrow & (p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r)
\end{aligned}$$

Ex. 13

a.

$$\begin{aligned}
(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) & \Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q) \\
& \Leftrightarrow p \wedge V \\
& \Leftrightarrow p
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
p \wedge (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) & \Leftrightarrow p \wedge (p \vee (q \wedge \neg q)) \\
& \Leftrightarrow p \wedge (p \vee F) \\
& \Leftrightarrow p \wedge (p \\
& \Leftrightarrow p
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge \neg (p \vee \neg q) & \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \wedge q) \\
& \Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee q) \wedge q \\
& \Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge q) \wedge q \\
& \Leftrightarrow F \vee (\neg p \wedge q) \wedge q \\
& \Leftrightarrow \neg p \wedge q \wedge q \\
& \Leftrightarrow \neg p \wedge q \\
& \Leftrightarrow q \wedge \neg p
\end{aligned}$$

Ex. 14

Il faut démontrer que l'on peut créer n'importe quelles tables de vérité. Comme on sait que l'on peut construire une proposition en forme canonique avec les opérateurs $(\neg, \wedge, \vee)$, il ne manque que l'opérateur $\wedge$. Or on peut simuler un $\wedge$ avec seulement des $\neg$ et $\vee$:

$$\begin{aligned}
p \wedge q \Leftrightarrow & \neg\neg p \wedge \neg\neg q \\
\leftrightarrow & \neg(\neg p \vee \neg q)
\end{aligned}$$

1.3 Quantificateur

Ex. 15

a. Certains étudiants n'étudient pas l'examen de mathématique.

b. Certains étudiants ont obtenu 100%.

c. Tous les étudiants ratent l'examen de mathématique.

d. Il y a un au moins un étudiant qui n'a pas d'ordinateur.

e. Chaque langage est inconnu par au moins un étudiant.

Ex. 16

a. $\exists x, E(x) \wedge G(x)$

b. $\forall x, E(x) \rightarrow G(x)$

c. $\forall x, G(x) \rightarrow E(x)$

d. $\forall x, \neg(E(x) \wedge G(x))$

e. $\forall x, E(x) \wedge G(x)$

f. $\forall x, E(x) \vee G(x)$

Ex. 17

a. $\forall x, A(x, \text{Chris})$

b. $\forall x \exists y, A(x, y)$

c. $\exists y \forall x, A(x, y)$

d. $\forall x \exists y, \neg A(x, y)$

e. $\exists y \forall x, \neg A(x, y)$

f. $\forall x, A(x, x)$

g. $\exists y \forall x, A(x, y) \wedge (\exists z \forall w, A(w, z)) \rightarrow z = y$

h. $\exists x, A(x, Chris) \wedge (\exists y, x \neq y \wedge A(x, Chris)) \wedge (\forall z, A(a, Chris) \rightarrow z = x \vee z = y)$

i. $\exists x, A(x, x) \wedge \forall y, \neg A(x, y)$

Ex. 18

a.
- $\forall x, L(x) \rightarrow F(x)$
- $\exists x, L(x) \wedge \neg C(x)$
- $\exists x, C(x) \wedge \neg F(x)$

b.
- $\forall x, P(x) \rightarrow V(x)$
- $\nexists x, \neg P(x) \wedge M(x)$
- $\forall x, \neg M(x) \rightarrow \neg V(x)$

Ex. 19

	$\forall x \forall y$	$\forall x \exists y$	$\exists x \forall y$	$\exists x \exists y$
$x + y = 4$	F	V	V	V
$x - y = 4$	F	V	V	V
$xy = yx$	V	V	V	V
$x + y = y$	F	F	V	V
$(x+3)(y-2) = 0$	F	V	V	V
$x^2 + y^2 + 1 = 0$	F	F	F	F