Examen 2 : Préparation

Résolution de systèmes d'équations, vecteur du plan et droite du plan

1. Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 5 \\ 4x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 4x & - & 4y & + & z & = & -3 \end{cases}$$

   Résoudre ce système en utilisant la méthode de Cramer.

   Réponses

$$\Delta = 20, \Delta_x = 28, \Delta_y = 60, \Delta_z = 68$$
$$x = \frac{7}{5}, y = 3, z = \frac{17}{5}$$

2. Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x & - & 2y & + & 2z & = & 5 \\ 3x & + & 2y & - & z & = & -3 \\ 5x & - & 2y & + & 3z & = & 5 \end{cases}$$

   Résoudre ce systeme en utilisant la méthode d'élimination Gaussienne.

   Réponses

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 \quad & 5 \\ 3 & 2 & -1 \quad L_2 - 3L_1 & -3 \\ 5 & -2 & 3 \quad L_3 - 5L_1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 5L_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & -7 & -18 \\ 0 & 8 & -7 & -20 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 8 & -7 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

   Aucune solution.

3. Pour un voyage, un autobus part à 9h00 et un autre à 10h00. Le premier voyage à 90km/h et le second à 110km/h. À quelle distance du départ, le second autobus doublera le premier ?

   Réponses

d_1 : nombre de km parcouru par l'autobus 1

d_2 : nombre de km parcouru par l'autobus 2

d_3 : nombre d'heures depuis le départ de l'autobus 1

$d_1 = 90 \times t$

$d_2 = 110 \times (t-1)$

$d_1 = d_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -90 & 0 \\ 0 & 1 & -110 & -110 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -90 & 0 \\ 0 & 1 & -110 & -110 \\ 0 & 0 & 200 & 110 \end{array}\right]$$ (une fois la matrice échelonnée)

$$t = \frac{11}{2} = 5h30$$

$d_1 = 495\,km$

$d_2 = 495\,km$

L'autobus 2 effectue un dépassement 495 km après le départ.

4. Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x & - & 2y & - & 2z & + & 3w & = & 1 \\ 2x & - & 5y & + & 2z & + & 3w & = & -2 \\ -8x & + & 13y & + & 7z & - & 6w & = & 7 \\ -4x & + & 4y & + & 5z & + & 3w & = & 7 \end{cases}$$

Résoudre ce système en utilisant la méthode d'élimination Gaussienne.

Réponses

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 2 & 3 & -2 \\ -8 & 13 & 7 & -6 & 7 \\ -4 & 4 & 5 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -9 & 18 & 15 \\ 0 & -4 & -3 & 15 & 11 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -27 & 27 & 27 \\ 0 & 0 & -27 & 27 & 27 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -27 & 27 & 27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Infinité de solution, posons $w = k$.

$$\begin{aligned} -27z + 27k &= 27 \\ -27z &= 27 - 27k \\ z &= -1 + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -y + 6(-1+k) - 3k &= -4 \\ -y - 6 + 6k - 3k &= -4 \\ -2 + 3k &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2(-2+3k) - 2(-1+k) + 3k &= 1 \\ x + 4 - 6k + 2 - 2k + 3k &= 1 \\ x &= -5 + 5k \end{aligned}$$

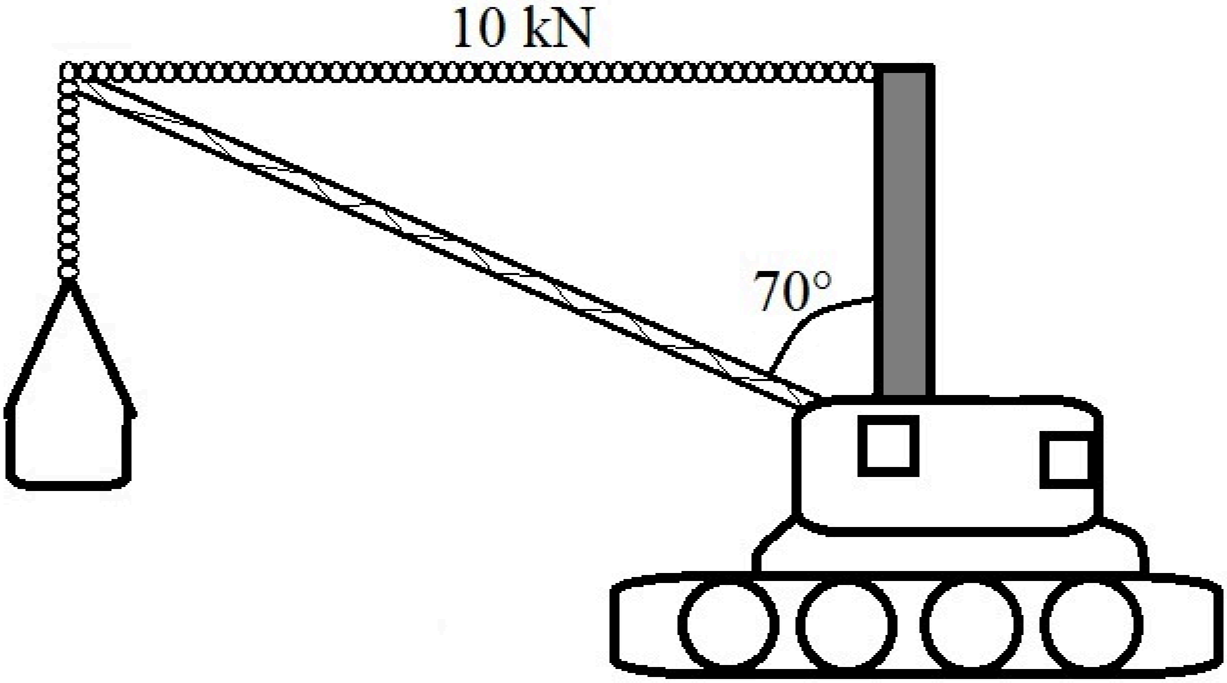
Réponse : $\begin{bmatrix} 5k-5 & 3k-2 & k-1 & k \end{bmatrix}^t$

5. Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} 4 & 16 & -9 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 9 & -5 \end{bmatrix}$ en utilisant la méthode de Gauss-Jordan.

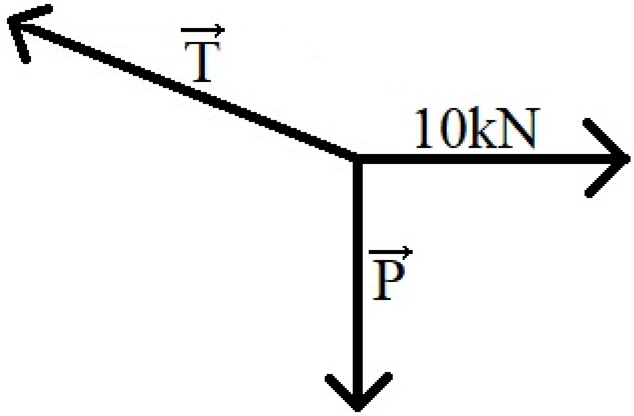
Réponses

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

6. Calculer le poids maximal en kN que la grue à cable représentée sur le dessin suivant peut tenir à 70° d'angle avec la verticale. :



[Réponses](#)
Diagramme des forces :



On obtient le système suivant :
$\begin{cases} \left\|\vec{T}\right\| cos160° + \left\|\vec{P}\right\| cos270° + 10cos0° & = 0 \\ \left\|\vec{T}\right\| sin160° + \left\|\vec{P}\right\| sin270° + 10sin0° & = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} \left\|\vec{T}\right\| cos160° + 10 & = 0 \\ \left\|\vec{T}\right\| sin160° - \left\|\vec{P}\right\| + & = 0 \end{cases}$ et ainsi $\left\|\vec{T}\right\| = 10,64kN$ et $\left\|\vec{P}\right\| = 3,64kN$. Le poids maximal est de $3,64kN$.

7. Soit les vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix}, \overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \end{bmatrix}, \overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$

   a. Calculer $\overrightarrow{u} \cdot 2\overrightarrow{v}$

   b. Calculer l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

   c. Calculer $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$

   d. Calculer $\overrightarrow{u} \cdot (2\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w})$

e. Calculer $\overrightarrow{u}_{\overrightarrow{v}}$

f. Exprimer $\overrightarrow{w}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Réponses

a. 78

b. $18,4°$

c. Ça n'existe pas, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ est un scalaire.

d. 84

e. $\frac{39}{130}\begin{bmatrix}7 & -9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{273}{130} & \frac{-351}{130}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{21}{10} & \frac{-27}{10}\end{bmatrix}$

f. On résout le système $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$ en a et b. On obtient : $\overrightarrow{w} = \frac{46}{13}\overrightarrow{u} - \frac{16}{13}\overrightarrow{v}$

8. Construire deux vecteurs unitaires perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix}4 & -3\end{bmatrix}$.

Réponses

$\overrightarrow{u_1} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2} = \begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}$

9. Soit la droite Δ qui passe par les points $(2, -3)$ et $(4, -9)$.

a. Écrire une équation vectorielle pour la droite Δ.

b. Écrire une équation cartésienne pour la droite Δ.

c. Écrire une équation paramétrique pour la droite Δ.

d. Écrire une équation symétrique pour la droite Δ.

Réponses

a.

Avec :

$$\overrightarrow{d} = \begin{bmatrix}4-2 & -9--3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -6\end{bmatrix}$$

On a :

$$\Delta : \begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}2 & -6\end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

b.

Avec :

$$\overrightarrow{n} = \begin{bmatrix}6 & 2\end{bmatrix}$$
$$6 \times 2 + 2 \times -3 = 6$$

On a :

$$\Delta : 6x + 2y = 6$$

c.

$$\Delta : \begin{matrix}x = 2 + 2k \\ y = -3 - 6k\end{matrix}, k \in \mathbb{R}$$

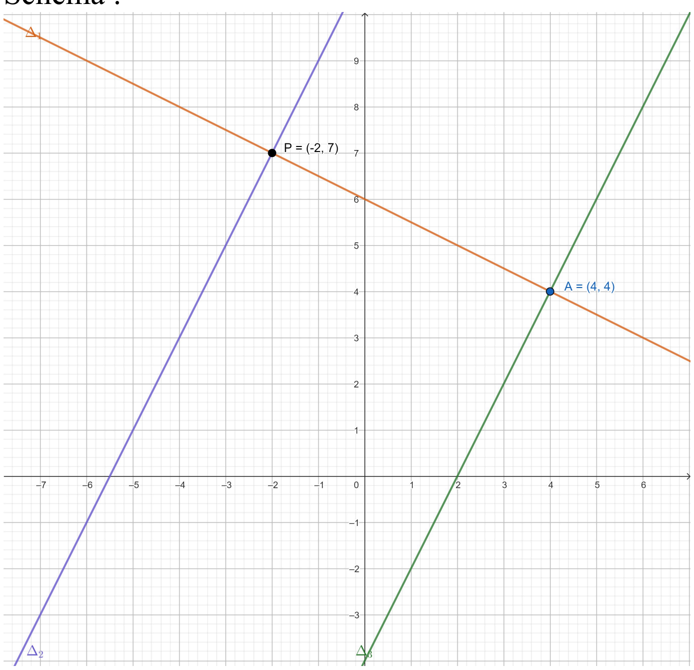
d.

$$\Delta : \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-6}$$

10. Déterminer la position relative des droites suivantes :
   - $\Delta_1 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 8 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R}$
   - $\Delta_2 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 & -4 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{R}$
   - $\Delta_3 : \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y-10}{4}$

   Réponses

   Schéma :

   On a : $\vec{d_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \vec{d_2} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \end{bmatrix}, \vec{d_3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$.

   $$\Delta_2 \parallel \Delta_3, \text{ Distance : } \sqrt{45}$$

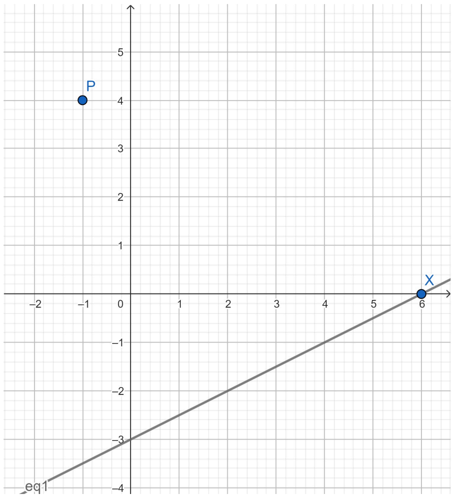
   Donc $\Delta_1 \perp \Delta_2, \text{ Pt. rencontre} = (-2, 7)$.

   $$\Delta_1 \perp \Delta_3, \text{ Pt. rencontre} = (4, 4)$$

11. Calculer le point de la droite $\Delta : x - 2y = 6$ le plus près du point $P(-1, 4)$ en utilisant une projection orthogonale sur une normale.

   Réponses

Schéma :



Nommons R le pt de Δ le plus près de $P(-1, 4)$ et prenons $X(6, 0)$.

$$\overrightarrow{PX} = \begin{bmatrix} 6 - -1 & 0 - 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{PX}_{\vec{n}} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 7 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{15}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -6 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

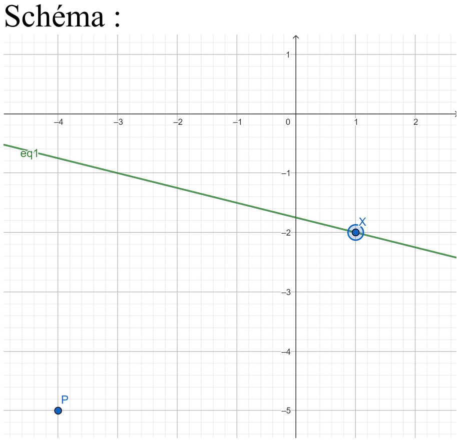
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Et ainsi, on obtient $R(-2, 2)$.

12. Calculer le point de la droite Δ : $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix}$ le plus près du point $P(-4, -5)$ en utilisant une projection orthogonale sur un vecteur directeur.

Réponses

Schéma :



Nommons R le pt de Δ le plus près de $P(-4,-5)$ et prenons $X(1,-2)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{XR} &= \overrightarrow{XP}_{\overrightarrow{d}} \\
&= \frac{\begin{bmatrix}-5 & -3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4 & -1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}4 & -1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}4 & -1\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}4 & -1\end{bmatrix} \\
&= \frac{-17}{17} \begin{bmatrix}4 & -1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}-4 & 1\end{bmatrix} \\
\overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XR} \\
&= \begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-4 & 1\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}-3 & -1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Et ainsi, on obtient $R(-3,-1)$.