|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | | |
| Rozwiązywanie układów równań liniowych | | | |
|  |  | |  |
|  | |  | |

Wprowadzenie

W zagadnieniach technicznych często spotykamy się z układami równań liniowych. Układami równań liniowych nazywamy następujące równanie macierzowe:

,

gdzie , jest macierzą o znanych elementach, jest znanym wektorem tzw. prawych stron, natomiast jest *nieznanym* wektorem rozwiązania układu równań. Zwykle macierz jest kwadratowa, czyli mamy tyle samo równań (wierszy ), co niewiadomych (kolumn ). Czasem spotykamy też przypadki macierzowych układów równań z większą liczbą równań niż niewiadomych, tzw. układy nadokreślone, jednak w tym ćwiczeniu nie będziemy się nimi zajmować.

Znalezienie wektora rozwiązania znając macierz i wektor nie jest tak proste, jak może się wydawać. Teoretycznie, po pomnożeniu obydwu stron równania macierzowego przez odwrotność otrzymamy szukane rozwiązanie. Jednak samo obliczenie odwrotności macierzy jest na tyle kosztowne obliczeniowo, że dla dużych macierzy mija się z celem. Dodatkowo, liczba operacji sprawia, że błędy numeryczne kumulują się i otrzymany wynik jest często niedokładny. Dlatego podczas obliczeń numerycznych unikamy odwracania macierzy za wszelką cenę. Za to korzystamy z metod alternatywnych: eliminacji Gaussa, rozkładu LU czy metody Choleskiego﻿. Każda z tych metod opiera się na prostym pomyśle: takim przetworzeniu oryginalnego układu równań, aby docelowa forma była mniej kosztowna do rozwiązania bez odwracania macierzy.

I tak:

* podczas eliminacji Gaussa, wykorzystujemy operacje odejmowania wierszy macierzy tak, aby macierz po prawej stronie była macierzą górnotrójkątną;
* w metodzie rozkładu LU rozbijamy macierz na iloczyn macierzy , przez co nieznany wektor znajdujemy jako rozwiązanie dwóch trójkątnych układów równań: i (ponieważ jest równoważne );
* w metodzie Choleskiego, dokonujemy również rozłożenia macierzy na iloczyn macierzy trójkątnych, w tym wypadku: (gdzie – macierz *sprzężona* z ).

Dlaczego stosujemy macierze trójkątne? Bo układy równań z nimi możemy łatwo rozwiązać za pomocą metody wstecznego podstawienia albo podstawienia w przód. Koszt przetworzenia oryginalnego układu do prostszej postaci oraz rozwiązania uproszczonego zadania jest mniejszy niż koszt odwrócenia macierzy.

W macierzowych układach równań kolejność wierszy macierzy jest dowolna. Tak samo możemy zamieniać kolejność kolumn tej macierzy (należy wtedy pamiętać, że *należy też zamienić wtedy kolejność elementów w wektorze* ). Często taka zamiana pozytywnie wpływa na dokładność obliczeń. Jako przykład warto rozważyć, który (równoznaczny sobie!) układ równań zostanie lepiej rozwiązany metodą eliminacji Gaussa:

czy ?

Z tego właśnie powodu stosujemy algorytm wyboru elementu głównego (ang. *partial pivoting*). Warto zaimplementować taki algorytm.

Przykład zadania nr 1

Celem tego ćwiczenia jest wykorzystanie samodzielnie zaimplementowanej funkcji rozwiązywania dowolnego, określonego układu równań liniowych, *metodą eliminacji Gaussa*.

Wymagane jest zaimplementowanie algorytmu wyboru elementu głównego. Macierz o wymiarach co najmniej , oraz odpowiedni wektor , zostaną dostarczone przez prowadzącego. Sprawdzić dokładność rozwiązania ( oznacza długość wektora ):

.

Przykład zadania nr 2

Celem tego ćwiczenia jest wykorzystanie samodzielnie zaimplementowanej funkcji rozwiązywania dowolnego, określonego układu równań liniowych, *za pomocą rozkładu LU*. Macierz o wymiarach co najmniej , oraz odpowiedni wektor , zostaną dostarczone przez prowadzącego. Sprawdzić dokładność rozwiązania oraz dokładność rozkładu LU:

, jeżeli zaimplementowano wybór elementu głównego,

, jeżeli nie zaimplementowano wyboru elementu głównego,

Po wczytywaniu danych *easy\_Ab.mat* wyszedł nam wynik

res = 3.973775024332606e+43

err = 9.297116316419806e-13

Po wczytywaniu danych *tricky\_Ab.mat* wyszedł nam wynik

res = 1.433417323631660e+46

err = 2.136456364869685e-07

Przykład zadania nr 3

Celem tego ćwiczenia wykorzystanie samodzielnie zaimplementowanej funkcji do znajdowania macierzy odwrotnej za pomocą *metody Gaussa-Jordana* dla podanej, nieosobliwej macierzy. Macierz o wymiarach co najmniej zostanie dostarczona przez prowadzącego. Sprawdzić poprawność otrzymanej, odwróconej macierzy.

Po przemnożeniu dwóch macierzy wyszła macierz jednostkowa, czyli to pokazuje, że wynik jest dobry.

*Wnioski:*

Dzisiaj na zajęciach zaimplementowaliśmy dwie metody rozwiązywania układów równań liniowych:

*Metoda LU:*

Metoda rozwiązywania układu równań liniowych. Nazwa pochodzi od użytych w tej metodzie macierzy trójkątnych, tj. dolnotrójkątnej (dolnej) i górnotrójkątnej (górnej). Metoda pozwala także na szybkie wyliczenie wyznacznika macierzy układu

Po analizowaniu danych *easy\_Ab.mat* i *tricky\_Ab.mat* błąd wyszedł mniejszy w danych *easy\_Ab.mat .*

Niestety nam się nie udało zaimplementować metodę Gaussa-Jordana w prawidłowy sposób, wychodziła nam macierz, że na przękątnej same jedynki i z innych stron zera.