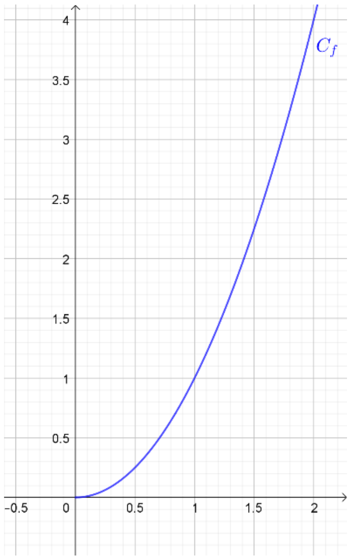
Approximation par balayage

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^2$.



On admet que la fonction f est croissante sur $[0;+\infty[$ et que l'équation $f(x)=2$ a une unique solution sur $[0;+\infty[$, notée $\sqrt{2}$.
Le but de l'exercice est d'obtenir des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

1) Ecrire une fonction Python f qui reçoit une valeur x en argument et renvoie l'image de x par la fonction f.

2) La fonction ci-dessous permet d'obtenir des images successives par la fonction f sur l'intervalle $[1;2]$, avec un pas de $10^{-1}=0{,}1$.

```
# (pour fonctionner, necessite que la fonction f soit creee au prealable)

def balayage():

    x=1
    while x<2:
        print("f(",x,")=",f(x))
        x = x+0.1

    return None
```

a) Utiliser cette fonction pour compléter le tableau :

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$											

b) Pour quelle valeur x_1 du tableau a-t-on $x_1 \leq \sqrt{2} \leq x_1 + 0{,}1$? Justifier.

c) Modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie cette valeur x_1.
Aides : On pourra, entre autres, modifier la condition de la boucle while.
On pourra supprimer les affichages réalisés avec l'instruction print.

3) Compléter la fonction pour qu'elle effectue, à partir de cette valeur x_1, un nouveau balayage de pas $10^{-2}=0{,}01$.
La fonction renverra une valeur x_2 telle que $x_2 \leq \sqrt{2} \leq x_2 + 0{,}01$.

4) Compléter la fonction pour qu'elle renvoie une valeur x_3 telle que $x_3 \leq \sqrt{2} \leq x_3 + 0{,}001$.

5) **a)** En ajoutant une boucle, modifier la fonction précédente pour qu'elle renvoie une valeur x_n telle que $x_n \leq \sqrt{2} \leq x_n + 10^{-n}$, où n est une valeur donnée en argument de la fonction.

b) Donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-7} près.

6) Prolongement :
On admet que l'équation $x^3=5$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$, notée $\sqrt[3]{5}$.
Déterminer une valeur approchée de $\sqrt[3]{5}$ à 10^{-8} près.