# Fonctions élémentaires autour de la dérivation

***But de l'activité :** Ecrire des fonctions Python permettant le calcul de taux de variation, de nombres dérivés, du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine d'une tangente à une courbe.*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 3$.

**1)** Ecrire une fonction Python **f** qui :
- reçoit en argument une valeur $x$
- renvoie son image par la fonction $f$.

**2)** Ecrire une fonction Python **coeff_dir** qui :
- reçoit en arguments les coordonnées de deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ (avec $x_A \neq x_B$)
- renvoie le coefficient directeur de la droite $(AB)$.

**3)** A l'aide de la fonction précédente, écrire une fonction Python **taux_variation** qui :
- reçoit en arguments une fonction $f$ et deux valeurs $a$ et $h$
- renvoie le taux de variation de la fonction $f$ entre $a$ et $a + h$.

**4)** A l'aide de cette fonction, calculer le taux de variation de $f$ entre 3 et 3,000001.
Conjecturer la valeur du nombre dérivé $f'(3)$, puis effectuer un calcul pour vérifier.

**5)** L'import « from scipy import misc » permet d'utiliser la fonction **misc.derivative** qui :
- reçoit en arguments une fonction $f$ et une valeur $a$
- renvoie le nombre dérivé de $f$ en $a$.
Tester cette fonction pour calculer $f'(3)$.

**6)** Ecrire une fonction Python **coeff_tang** qui :
- reçoit en arguments une fonction $f$ et une valeur $a$
- renvoie le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la tangente à $f$ en $a$.
Tester cette fonction pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe de $f$ en 2.

**7)** La fonction **tab_val** ci-contre permet d'obtenir une liste de valeurs de la fonction $f$ :

```
def tab_val(f):
    t=[]
    x=0
    for k in range(10):
        t.append(f(x))
        x=x+2
    return t
```

**a)** Quelle est la valeur initiale de cette liste ? le pas ? le nombre de valeurs obtenues ?
**b)** Adapter cette fonction pour qu'elle reçoive en argument la valeur initiale $x\_0$, le pas $p$ et le nombre de valeurs $n$.

**8)** Ecrire une fonction Python cdir_secantes qui :
- reçoit en arguments une fonction $f$, une valeur $x\_0$, un pas $p$ et un entier $n$.
- renvoie la liste des $n$ coefficients directeurs des sécantes à la courbe de $f$ à partir de $x\_0$ avec un pas en abscisse $p$.

# Méthode de Newton

***Prérequis :*** *Fonctions Pythons réalisées dans l'activité « Fonctions élémentaires autour de la dérivation »*
***But de l'activité :*** *Approcher la solution d'une équation à l'aide de la méthode de Newton.*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 3$.

**1)** Démontrer que $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
*On admettra pour la suite que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée $\alpha$.*

**2)** Justifier que pour toute abscisse $a$, la tangente $T_a$ à la courbe de $f$ en $a$ coupe l'axe des abscisses en un point $P$.
Déterminer l'expression de l'abscisse de $P$ en fonction de $a$, $f'(a)$ et $f(a)$.
Ecrire une fonction Python **etap_Newton** qui :
- reçoit en argument une fonction $f$ et une valeur $a$
- renvoie l'abscisse du point $P$ correspondant

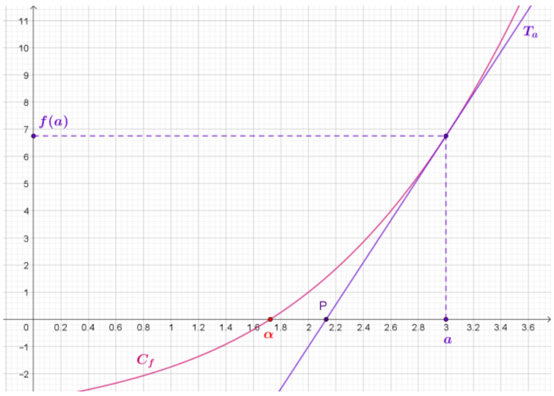



**Figure pour la question 2**

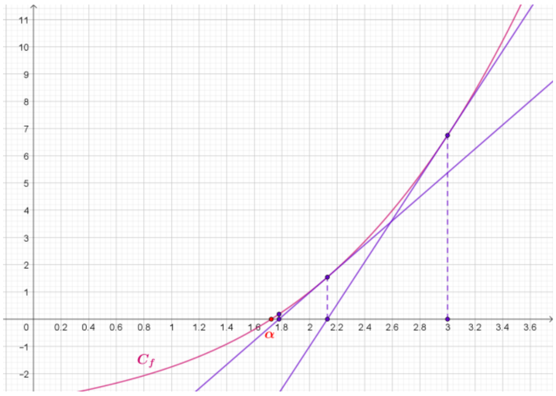



**Figure pour la question 3**

**3)** *A partir d'un point de l'axe des abscisses, on peut donc construire une suite de points.*
*On admettra ici que la suite des abscisses de ces points a pour limite $\alpha$.*

**a)** La fonction Python **appl_Newton** donnée ci-contre :
- reçoit en arguments une fonction $f$, une valeur $a$ et un entier $n$
- renvoie une liste de valeurs.

Expliquer ce que représentent les termes de la liste renvoyée.

```
def appl_Newton(f,a,n):
    t=[a]
    for k in range(n):
        a=etap_Newton(f,a)
        t.append(a)
    return t
```

**b)** Coder cette fonction et tester pour la fonction $f$ de l'énoncé avec $a = 3$ et $n = 10$.

**4)** **a)** Proposer et coder en Python des fonctions $g$ et $h$ s'annulant respectivement en $\sqrt{5}$ et $\sqrt[3]{7}$.
**b)** A l'aide des fonctions Python précédentes, proposer des valeurs approchées de ces deux nombres.

# Algorithme de dichotomie

***Prérequis :*** *Aucun, mais les question 1)a)b) peuvent être supprimées si l'activité « Méthode de Newton » a été traitée.*
***But de l'activité :*** *Approcher la solution d'une équation à l'aide d'un algorithme de dichotomie (méthode plus lente que la méthode de Newton, mais pour laquelle la précision du résultat est connue).*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x - 3$.

**1)** **a)** Démontrer que $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$

*On admettra pour la suite que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée $\alpha$*

**b)** Ecrire une fonction Python **f** qui :

- reçoit en argument une valeur $x$
- renvoie son image par la fonction $f$.

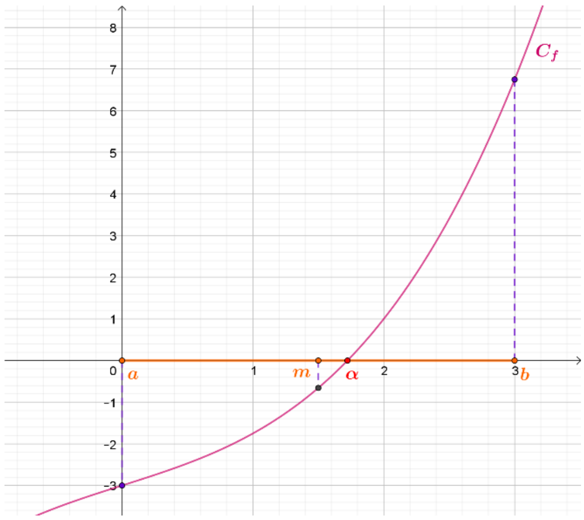
**c)** Déterminer les images de 0 et 3 par $f$, et en déduire que $\alpha \in [0; 3]$.

**2)** **a)** On considère un intervalle $[a; b]$ contenant $\alpha$ et on pose $m = \frac{a+b}{2}$.

Justifier que : **(*) si $f(a) \times f(m) < 0$ alors $\alpha \in [a; m]$, et sinon $\alpha \in [m; b]$**

**b)** En utilisant **(*)**, écrire une fonction Python **etap_dichoto** qui :

- reçoit en arguments une fonction $f$ et les bornes $a$ et $b$ d'un intervalle contenant $\alpha$
- renvoie les bornes $a$ et $b$ d'un nouvel intervalle contenant $\alpha$.




**c)** A partir de l'intervalle $[a; b] = [0; 3]$, obtenir successivement 3 nouveaux intervalles contenant $\alpha$.

**d)** Que peut-on dire de la longueur de chaque intervalle obtenu par rapport à la précédente ?

**3)** **a)** Ecrire une fonction Python **dichoto_iter** qui :

- reçoit en arguments une fonction $f$, les bornes $a$ et $b$ d'un intervalle contenant $\alpha$ et un entier $n$
- renvoie les bornes d'un nouvel intervalle contenant $\alpha$ obtenu en répétant $n$ fois la fonction précédente.

**b)** Tester avec la fonction $f$ de l'énoncé en partant de l'intervalle $[0; 3]$ et en répétant 10 fois la méthode.

**4)** **a)** Ecrire une fonction Python **dichoto_test** qui :

- reçoit en arguments la fonction $f$, les bornes $a$ et $b$ d'un intervalle contenant $\alpha$ et une valeur $h$
- renvoie les bornes du premier intervalle de longueur inférieure à $h$ obtenu avec la méthode décrite précédemment.

**b)** Tester avec la fonction $f$ de l'énoncé pour obtenir un encadrement de $\alpha$ à $10^{-5}$ près.

**5)** **a)** Proposer et coder en Python des fonctions $g$ et $h$ s'annulant respectivement en $\sqrt{5}$ et $\sqrt[3]{7}$.

**b)** A l'aide des fonctions Python précédentes, proposer des encadrements de ces deux nombres à $10^{-7}$ près.