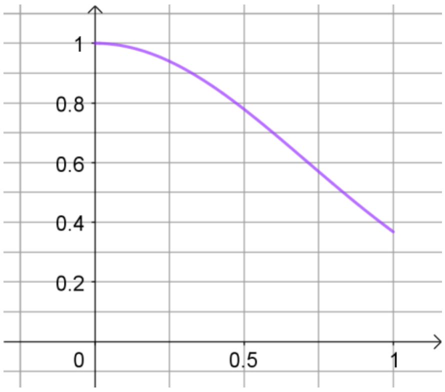
Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles

Certaines fonctions n'ont pas de primitives qui peuvent s'écrire à l'aide des fonctions usuelles.
C'est par exemple le cas de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$.
Le but de cette activité est d'obtenir malgré tout des valeurs approchées de l'intégrale :

$$K = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

I] Introduction de la méthode

On a représenté ci-contre la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.



1) Placer les points M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 et M_4 de la courbe de f d'abscisses respectives 0 ; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{4}$.

2) A l'aide de ces points, inscrire 4 rectangles <u>sous</u> la courbe de f, de largeur $\frac{1}{4}$ et de longueur maximale.

3) **a)** Ecrire une fonction Python **f** qui prend x en argument et renvoie l'image de x par f.
Important : Ne pas utiliser la fonction exp. Utiliser les notations de puissances à partir de la constante e, obtenue avec **from math import e**.

b) Ecrire une fonction Python **Aire_rect** qui reçoit en argument la largeur **l** et la longueur **L** d'un rectangle et renvoie son aire.

c) A l'aide de ces fonctions, calculer la somme des aires des 4 rectangles précédents, et en déduire un minorant de K.

II] Automatisation de la construction et du calcul

1) Ajouter à votre programme Python la fonction fournie dans le fichier « Méthode des rectangles (élève).py », qui trace la courbe représentative de f sur l'intervalle $[0; 1]$ et construit les 4 rectangles sous la courbe de f. Tester.

```python
# cette fonction utilise la fonction f
def Methode_rectangle():

    # tracé de la courbe de f
    prec=0.05
    abs_fonc = np.arange(0,1+prec,prec)
    ord_fonc = f(abs_fonc)
    plt.plot(abs_fonc,ord_fonc,color='green')

    ax = plt.gca()

    # tracé des rectangles
    l=1/4
    for k in range(4):
        x=k*1/4
        L=f(x+1/4)
        #Rectangle défini par le point en bas à gauche,
        #sa largeur l et sa longueur L
        rect=ptc.Rectangle( (x,0) , l, L, fill=False)
        ax.add_patch(rect)

    # reglage des bornes des axes du repere
    plt.axis([0,1,0,1])
    # affichage
    plt.show()
    # attente d'une action de clic sur la fenetre puis fermeture
    plt.waitforbuttonpress()
    plt.close()

    return None
```

2) **a)** Prévoir les valeurs successives prises par les variables x, l et L dans la boucle en complétant ce tableau :

k	0	1	2	3
x				
l				
L				

b) Compléter la fonction pour qu'elle renvoie **Aire_inf** qui est la somme des aires de ces rectangles.

Aides :

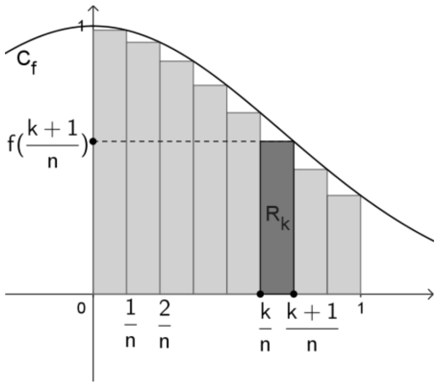
• On pourra ajouter un compteur qui s'incrémente à chaque étape de la boucle, en utilisant la fonction **Aire_rect** précédemment écrite.

• On pourra éventuellement utiliser l'instruction **plt.text(0,-0.1,'Aire='+str(Aire_inf))** pour afficher cette aire sur le graphique.

c) Tester et vérifier qu'on retrouve le résultat de la question I]3)c).

3) Modifier la fonction pour qu'elle reçoive en argument le nombre n de rectangles souhaités, et adapter l'affichage et le calcul. Tester pour $n = 10$ puis pour $n = 100$.

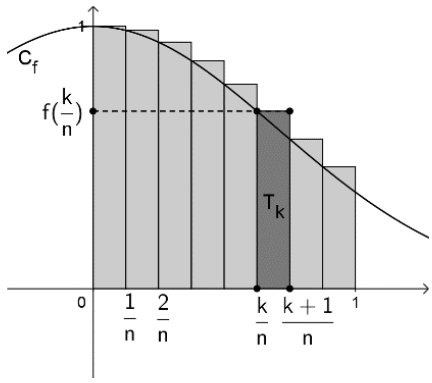
III] Recherche de la précision de la méthode



1) On se place dans le cas général où on trace n rectangles de même largeur sous la courbe de f sur l'intervalle $[0; 1]$, et on note s_n la somme de leurs aires.

Justifier que :

$$s_n = \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$



2) On considère de la même façon S_n la somme des aires de n rectangles de même largeur construits au-dessus de la courbe de f sur l'intervalle $[0; 1]$.

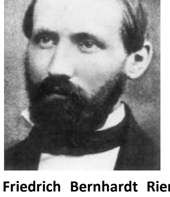
Donner une expression de S_n similaire à celle de s_n.

3) **a)** Exprimer $S_n - s_n$ en fonction de n.

b) En admettant que $s_n \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq S_n$, en déduire que :

$$0 \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx - s_n \leq \frac{1}{n}$$

4) Quelle valeur de *n* faut-il choisir pour que s_n soit une valeur approchée de K à 10^{-4} près ?
Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de cette intégrale K à l'aide de votre programme.



Georg Friedrich Bernhardt Riemann (1826-1866) est à l'origine de cette méthode d'approximation d'intégrales à l'aide de rectangles