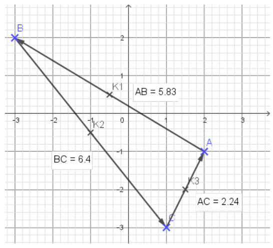
IUT Lyon 1 — BUT Info. 3A — R5.12 Géométrie

A. BERGER — *Automne 2024*

Chapitre 5 : Géométrie analytique - Partie 1
Correction

Exercice 5.1



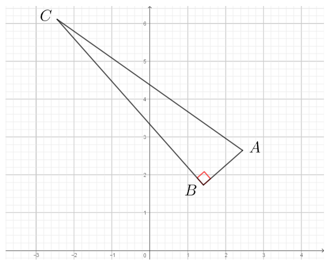
1. Soient $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$.
   (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.
   (b) $K_1\begin{pmatrix}-1/2\\1/2\end{pmatrix}$, $K_2\begin{pmatrix}-1\\-1/2\end{pmatrix}$ et $K_3\begin{pmatrix}3/2\\-2\end{pmatrix}$.
   (c) $AB=\sqrt{34}$, $AC=\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{41}$.
2. $A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

   En effet, posons $B\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x-5\\y-2\end{pmatrix}$

   d'où $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-5\\y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x-5=-2\\y-2=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}$.
3. $A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$.

Exercice 5.2

On se place dans $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ repère orthonormé direct.



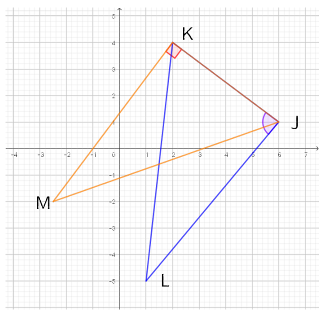
1. $A\begin{pmatrix}\sqrt{6}\\\sqrt{7}\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-\sqrt{6}\\\sqrt{7}+2\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}\sqrt{6}-\sqrt{2}\\\sqrt{7}-\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-\sqrt{6}-\sqrt{2}\\\sqrt{7}+\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

   On en déduit que

   $$\left(\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{BC}\right)=(\sqrt{6}-\sqrt{2})(-\sqrt{6}-\sqrt{2})+(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})$$
   $$=-4+4=0 \text{ donc } \overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{BC} \text{ sont orthogonaux}$$

   et le triangle ABC est rectangle en B.
2. $J\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$, $K\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, $L\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix}-5/2\\-2\end{pmatrix}$.

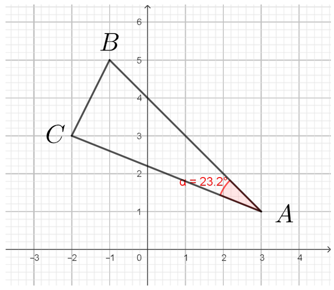


   (a) On a $\overrightarrow{JK}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JL}\begin{pmatrix}-5\\-6\end{pmatrix}$.

   Ainsi, $\left(\overrightarrow{JK}|\overrightarrow{JL}\right)=(-4)\times(-5)+3\times(-6)=2\neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JL}$ ne sont pas orthogonaux et le triangle JKL n'est pas rectangle en J.

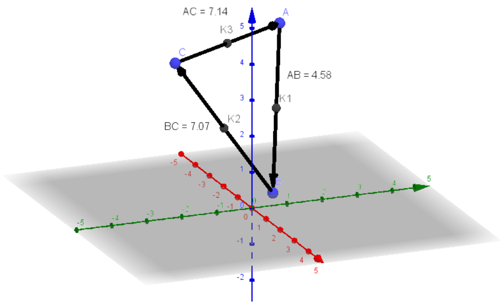
   (b) D'autre part, on a $\overrightarrow{MK}\begin{pmatrix}9/2\\6\end{pmatrix}$. Ainsi $\left(\overrightarrow{JK}|\overrightarrow{MK}\right)=(-4)\times\frac{9}{2}+3\times 6=0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{MK}$ sont orthogonaux et le triangle JKM est rectangle en K.

3. $A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$
   donc $AB = 4\sqrt{2}$, $AC = \sqrt{29}$, $\left(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}\right) = 20 + 8 = 28$ et $\left(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}\right) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.
   D'où $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\left(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}\right)}{AB \times AC} = \dfrac{28}{4\sqrt{58}} = \dfrac{7}{\sqrt{58}}$ et $\widehat{BAC} \approx 23,2°$.



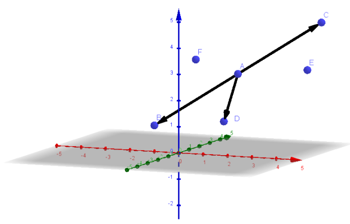
Exercice 5.3
On se place dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ repère orthonormé direct.

1. $A\begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$.
   (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}-5\\5\\-1\end{pmatrix}$.
   (b) $K_1\begin{pmatrix}-2\\3/2\\2\end{pmatrix}$, $K_2\begin{pmatrix}1/2\\-1\\5/2\end{pmatrix}$ et $K_3\begin{pmatrix}-1/2\\-1/2\\9/2\end{pmatrix}$.
   (c) $AB = \sqrt{21}$, $AC = \sqrt{51}$, $BC = 5\sqrt{2}$.



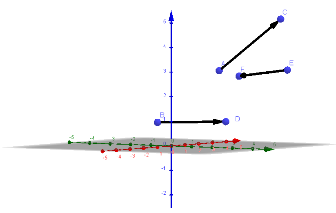
2. On donne $A\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 5.4
1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$
   d'où $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
   mais $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD})\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{0}$ donc $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.

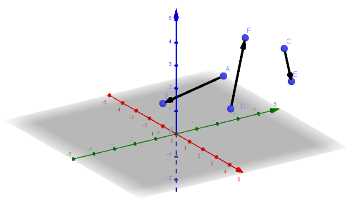


2. $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-4\\4\\4\end{pmatrix}$ et $(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}|\overrightarrow{EF}) = 24$ OU $\begin{vmatrix}3 & 2 & -5\\1 & 2 & 1\\2 & 0 & 0\end{vmatrix} = 24$
   d'où $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EF}] = 24 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas coplanaires.



$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CE} | \overrightarrow{DF}) = -24$ OU $\begin{vmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -24$
d'où $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DF}] = -24 \neq 0$ donc $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EF}$ ne sont pas coplanaires.

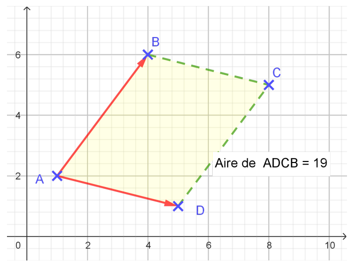


Exercice 5.5

1. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

   donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

   aire$(ABCD) = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})| = |-19| = 19$.



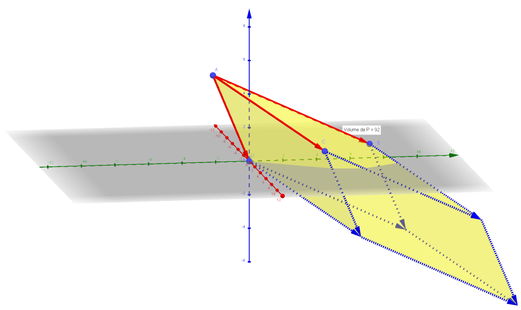
2. $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ -24 \end{pmatrix}$ d'où $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} | \overrightarrow{AO}) = 92$

   OU $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 2 \\ -4 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 92$

   D'où, si P est le parallélépipède construit sur $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AO}$,
   $\text{Vol}(P) = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO}] \right| = 92$.



Exercice 5.6

1. (a) $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ base de $\mathbb{R}^2$ par exemple car $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.

   Donc $\mathcal{R}_1 = (O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un repère.

   (b) Quelles sont les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}_1$.
   Par définition, $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.

   Or $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{OB} = -2\,\overrightarrow{i} + 3\,\overrightarrow{j} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{i} = \frac{3}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{-2}{7}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{j} = \frac{2}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{OB} \end{cases}$

   $$\begin{aligned} \text{Donc } \overrightarrow{OM} &= x\left(\frac{3}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{-2}{7}\overrightarrow{OB}\right) + y\left(\frac{2}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{7}\overrightarrow{OB}\right) \\ &= \frac{3x+2y}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{-2x+y}{7}\overrightarrow{OB}, \end{aligned}$$

   c'est-à-dire les coordonnées de M dans $\mathcal{R}_1$ sont $\begin{pmatrix} (3x+2y)/7 \\ (-2x+y)/7 \end{pmatrix}$.

Remarque : si on note P la matrice de passage de la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ à la base $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3x+2y \\ -2x+y \end{pmatrix}$.

2. (a) $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ base de $\mathbb{R}^2$.

   Donc $\mathcal{R}_2 = (A, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est un repère.

   (b) Pour déterminer les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}_2$ il faut exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   Par définition on sait que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
   Or par la relation de Chasles
   $$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} &= -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} \\ &= -(\vec{i} + 2\vec{j}) + (x\vec{i} + y\vec{j}) \\ &= (-1+x)\vec{i} + (-2+y)\vec{j}.\end{aligned}$$
   D'autre part $\overrightarrow{AC} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{j}$ donc $\overrightarrow{AM} = (-1+x)\overrightarrow{AC} + (-2+y)\overrightarrow{AD}$.
   Ainsi les coordonnées de M dans le repère $\mathcal{R}_2$ sont $\begin{pmatrix} -1+x \\ -2+y \end{pmatrix}$.

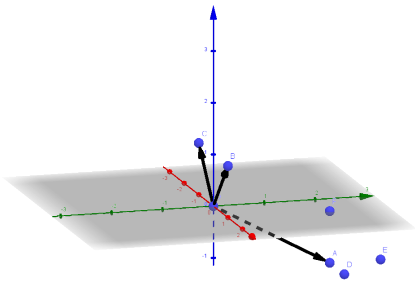
   Remarque : $\begin{pmatrix} -1+x \\ -2+y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Exercice 5.7

1. Notons $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ et $\mathcal{B}_1 = \{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$.

   Comme $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

   $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$



   $$\begin{aligned}[D]_{\mathcal{R}_1} &= [\overrightarrow{OD}]_{\mathcal{R}_1} = [\overrightarrow{OD}]_{\mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}[\overrightarrow{OD}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}[\overrightarrow{OD}]_{\mathcal{R}} = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}}[D]_{\mathcal{R}} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

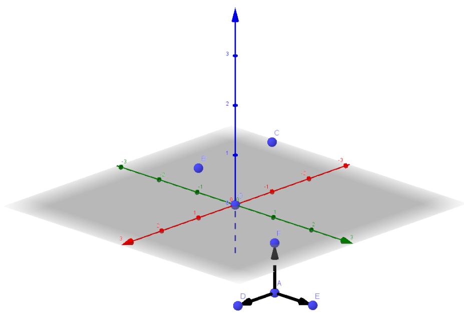
   On obtient de même $[E]_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ et $[F]_{\mathcal{R}_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

2. Comme $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{i}$, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{k}$,

   entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_2$ on a simplement modifié l'origine.

   Donc $[O]_{\mathcal{R}_2} = [O]_{\mathcal{R}} - [A]_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

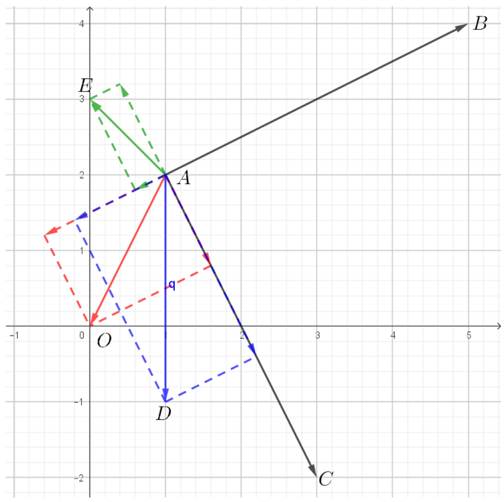
   On obtient de même $[B]_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $[C]_{\mathcal{R}_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Exercice 5.8

Pour que la nouvelle origine du repère soit A il faut $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

D'autre part, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$



Notons $\mathcal{R}'' = \{O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

$P_{\mathcal{R},\mathcal{R}''} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et on obtient le changement de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}''$ en faisant $P_{\mathcal{R},\mathcal{R}''}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

où $P_{\mathcal{R},\mathcal{R}''}^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

D'où pour un point quelconque $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{R}$ pour obtenir ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$ on change l'origine puis on fait le changement de base d'où les coordonnées dans $\mathcal{R}'$ s'obtiennent en calculant

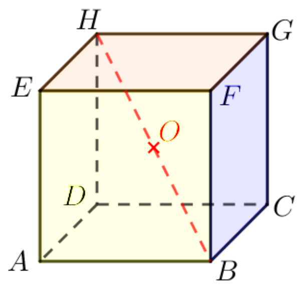
$$P_{\mathcal{R},\mathcal{R}''}\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right].$$

Ainsi les coordonnées de O dans $\mathcal{R}'$ sont $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$,

les coordonnées de D dans $\mathcal{R}'$ sont $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$,

les coordonnées de E dans $\mathcal{R}'$ sont $\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Exercice 5.9



1. $(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}) = a^2$, $(\overrightarrow{AE}|\overrightarrow{BG}) = a^2$, $(\overrightarrow{AH}|\overrightarrow{EC}) = 0$,

   $(\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OG}) = \dfrac{-3a^2}{4}$, $(\overrightarrow{OE}|\overrightarrow{FB}) = \dfrac{-a^2}{2}$.

   Pour trouver ces valeurs on peut en particulier :
   - utiliser la formule $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;
   - exprimer les coordonnées de tous les points dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

2. $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$,

   $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \wedge (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 2\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE}$,

   $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AE} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) \wedge \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$,

   $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \wedge (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB}$,

   $\overrightarrow{AF} \wedge \overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) \wedge (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$.

   Pour trouver ces valeurs on peut en particulier :
   - utiliser la définition de $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ (orthogonalité + orientation + formule pour la norme) ;
   - exprimer les coordonnées de tous les points dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$;
   - utiliser la bilinéarité du produit vectoriel.

Exercice 5.10

1. Pendule simple : coordonnées polaires.
2. Position de la pédale d'un vélo : coordonnées polaires.
3. Position du bout d'un tire-bouchon dans un bouchon : coordonnées cylindriques.
4. Position d'un bateau sur la Terre : coordonnées sphériques.

Exercice 5.11

1. (a) Pour tout point M on a $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MG}$.
   En particulier pour $M = A$ on a $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB}$.

   (b) $AG = \|\overrightarrow{AG}\| = \|3\overrightarrow{AB}\| = 3\|\overrightarrow{AB}\| = 3AB$.
   En prenant $M = B$ on a $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{AB}$ et donc $BG = 2AB$.

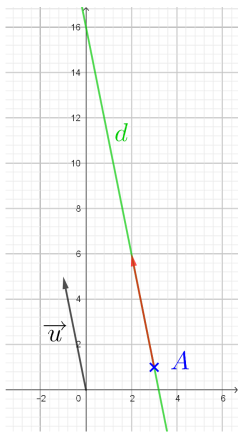
2. Pour tout point M on a $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 8\overrightarrow{MG}$.
   En particulier pour $M = A$ on a $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

3. Pour tout point M on a $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC} + 5\overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MG}$.
   En particulier pour $M = A$ on a $6\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$.
   Or $ABCD$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
   D'où $\overrightarrow{AG} = \frac{-1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

4. Pour tout point M on a $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG}$.
   En particulier si O est l'origine du repère, $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$. D'où $G\begin{pmatrix}-8\\-3\\0\end{pmatrix}$.

Exercice 5.12

1. • Représentation paramétrique de d : $\begin{cases} x = 3 - k \\ y = 1 + 5k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

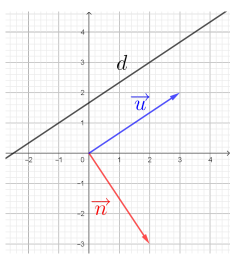
   

   • Équation cartésienne de d : $5x + y - 16 = 0$.
   Pour la trouver on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

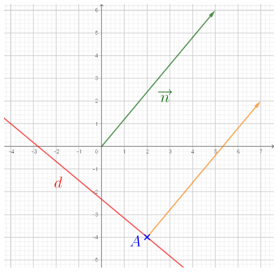
   ◇ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ y-1 & 5 \end{vmatrix} = 0$
   $$\Leftrightarrow 5(x-3) - (-1)\times(y-1) = 0$$
   $$\Leftrightarrow 5x + y - 16 = 0\,;$$

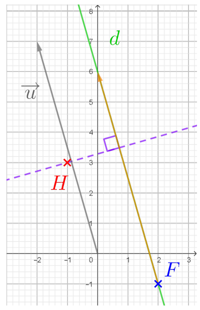
   ◇ on sait que l'équation d'une droite est $ax + by + c = 0$ si et seulement si son vecteur directeur a pour coordonnées $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
   Donc ici la droite a pour équation $5x + y + c = 0$.
   Pour trouver c : $A \in d \Leftrightarrow 5\times 3 + 1 + c = 0 \Leftrightarrow 16 + c = 0 \Leftrightarrow c = -16$.

2. d : $2x - 3y + 5 = 0$ si et seulement si le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d et le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d.



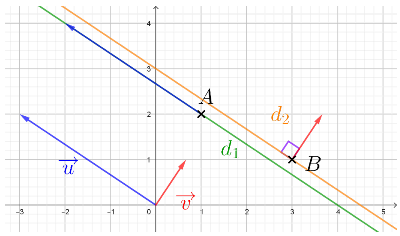
3. Équation cartésienne de d : $5x + 6y + 14 = 0$.
   Pour la trouver on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :
   - $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}|\overrightarrow{u}) = 0$
     $\Leftrightarrow (x-2)\times 5 + (y+4)\times 6 = 0$
     $\Leftrightarrow 5x + 6y + 14 = 0$;
   - on sait que l'équation d'une droite est $ax + by + c = 0$ si et seulement si son vecteur normal a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
     Donc ici la droite a pour équation $5x + 6y + c = 0$.
     Pour trouver c : $A \in d \Leftrightarrow 5 \times 2 + 6 \times (-4) + c = 0$
     $\Leftrightarrow -14 + c = 0 \Leftrightarrow c = 14$.





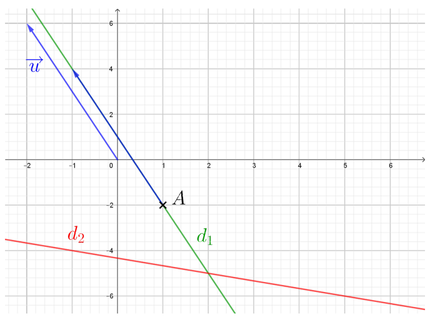
4. On commence par trouver une équation de la droite d : $7x + 2y - 12 = 0$.
   $d(H,d) = \dfrac{|7\times(-1) + 2\times 3 - 12|}{\sqrt{7^2+2^2}} = \dfrac{13}{\sqrt{53}} = \dfrac{13\sqrt{53}}{53}$.

Exercice 5.13



1. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc d_1 et d_2 ne sont pas orthogonales.

   $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux donc d_1 et d_2 sont parallèles.



2. Un vecteur directeur de d_2 est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

   $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = 12$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas orthogonaux donc d_1 et d_2 ne sont pas orthogonales.

   Par conséquent les droites d_1 et d_2 sont sécantes.

   Remarque : On aurait aussi pu raisonner avec un vecteur normal à d_2.

   Pour trouver leur intersection, commençons par trouver une équation cartésienne de d_1.

   On trouve $d_1 : 6x + 2y - 2 = 0$ (ou encore $d_1 : 3x + y - 1 = 0$).

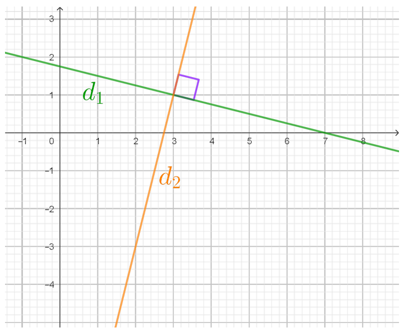
   Ainsi $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (d_1 \cap d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y - 1 = 0 \\ x + 3y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$.

   Ainsi le point d'intersection de d_1 et d_2 est le point de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

3. Un vecteur normal à d_1 est $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à d_2 est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

   $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux donc d_1 et d_2 sont orthogonales.

   Par conséquent les droites d_1 et d_2 sont sécantes.

   Remarque : On aurait aussi pu raisonner avec des vecteurs directeurs de d_1 et d_2.

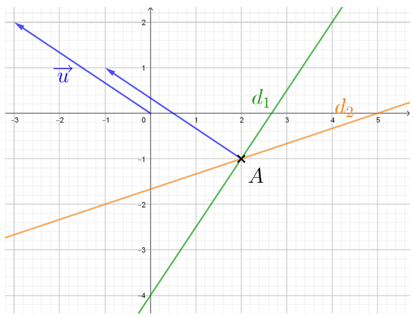
   Alors $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (d_1 \cap d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+4y-7=0 \\ -4x+y+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$.

   Ainsi le point d'intersection de d_1 et d_2 est le point de coordonnées $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

4. Un vecteur directeur de d_2 est $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires donc d_1 et d_2 ne sont pas orthogonales.

   $(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{v}) = -16$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas orthogonaux donc d_1 et d_2 ne sont pas parallèles.

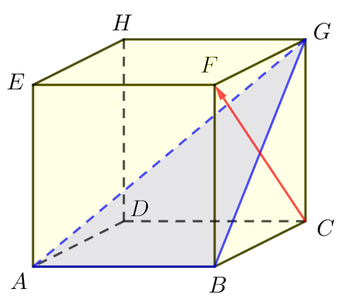
   Par conséquent les droites d_1 et d_2 sont sécantes.

   Remarque : On aurait aussi pu raisonner avec un vecteur normal à d_2.
   Pour trouver leur intersection, commençons par trouver une équation cartésienne de d_1.
   On trouve $d_1 : 3x-2y-8=0$.
   Ainsi $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (d_1 \cap d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y-8=0 \\ -x+3y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$.

   Ainsi le point d'intersection de d_1 et d_2 est le point de coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.

   Remarque : On aurait aussi pu se rendre compte que les coordonnées de A sont solutions de l'équation de d_2.

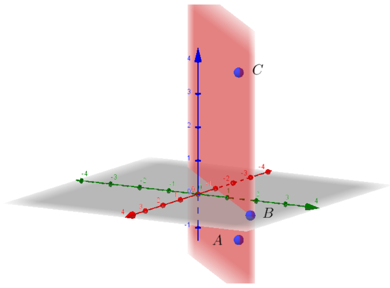
Exercice 5.14
On considère le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF})$.
Dans ce repère : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.



On a ainsi $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$.
Donc $(\overrightarrow{CF}|\overrightarrow{BG}) = 0$ et $(\overrightarrow{CF}|\overrightarrow{AB}) = 0$.
Donc $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG).
Il est donc normal à (ABG).

Exercice 5.15

1. Deux vecteurs directeurs de P sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}$.



   - Représentation paramétrique de P (par exemple en utilisant le point A) : $\begin{cases} x = 1 + k_1 \\ y = 2 + k_1 \\ z = -1 + k_1 + 5k_2 \end{cases}$, $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$
   - Équation cartésienne de d : $x - y + 1 = 0$.

     Pour la trouver on peut utiliser l'une des méthodes suivantes :

     ◇ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z+1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 5(x-1) - 5(y-2) = 0$

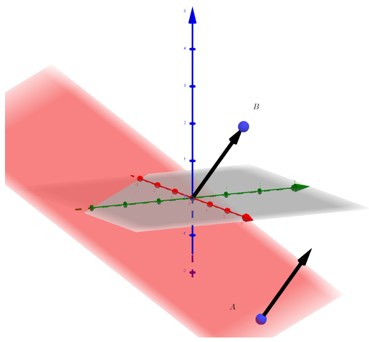
     $\Leftrightarrow 5x - 5y + 5 = 0$;

     ◇ on sait que l'équation d'un plan est $ax + by + cz + d = 0$ si et seulement si son vecteur normal a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

     Or un vecteur normal à P est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}$.

     Donc ici le plan a pour équation $5x - 5y + d = 0$.
     Pour trouver d : $A \in P \Leftrightarrow 5 \times 1 - 5 \times 2 + d = 0 \Leftrightarrow -5 + d = 0 \Leftrightarrow d = 5$.

2. On sait que l'équation d'un plan est $ax + by + cz + d = 0$ si et seulement si son vecteur normal a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.
   Donc ici le plan a pour équation $x + y + 2z + d = 0$.
   Pour trouver d : $A \in P \Leftrightarrow 2 + 1 + 2 \times (-3) + d = 0 \Leftrightarrow -3 + d = 0 \Leftrightarrow d = 3$.
   Donc P : $x + y + 2z + 3 = 0$.

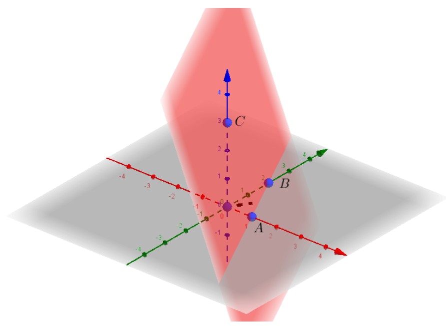


3. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\5\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P d'équation $2x - 3y + 5z - 7 = 0$.

4. (a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$.

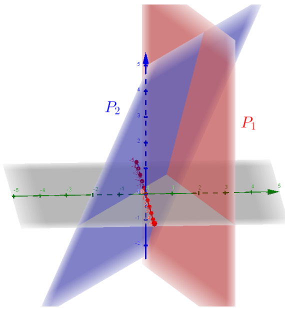
   Un vecteur normal au plan est $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$.

   Donc P : $6x + 3y + 2z + d = 0$.
   Mais $A \in P \Leftrightarrow 6 \times 1 + 3 \times 0 + 2 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -6$.
   Donc P : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

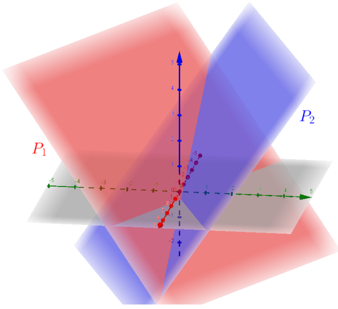


   (b) $d(O, \mathcal{P}) = \dfrac{|6 \times 0 + 3 \times 0 + 2 \times 0 - 6|}{\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2}} = \dfrac{6}{7}$.

5. Un vecteur normal de P_1 est $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-4\\0\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P_2 est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires donc les plans P_1 et P_2 ne sont pas parallèles ou confondus et donc sont sécants.



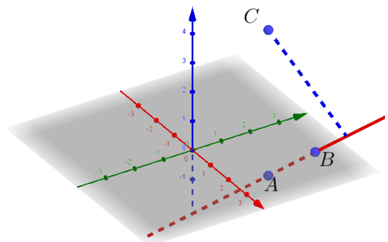
6. Un vecteur normal de P_1 est $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P_2 est $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$.
   $\left(\overrightarrow{n_1}|\overrightarrow{n_2}\right) = 0$ donc les vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ sont orthogonaux donc les plans P_1 et P_2 sont orthogonaux.



Exercice 5.16
On se place à chaque fois dans un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Représentation paramétrique de D : $\begin{cases} x = 2 + k \\ y = 1 + k \\ z = -3 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

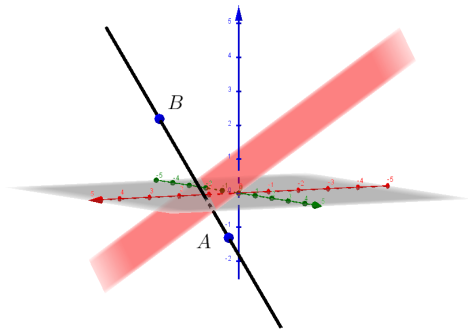
2. $\overrightarrow{CA}\begin{matrix}0\\0\\-5\end{matrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix}$, $\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AB}\| = 5\sqrt{2}$
   et $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3}$
   Donc $d(C,(AB)) = \dfrac{\|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{3}$.



3. On commence par déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
   Un vecteur directeur est $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-6\\3\end{pmatrix}$ donc une représentation paramétrique de (AB) est
   $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
   Soit maintenant $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
   On a $z = 0$ car M appartient au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Donc $M \in (AB) \cap (O, \vec{i}, \vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \\ z = 0 \end{cases}$

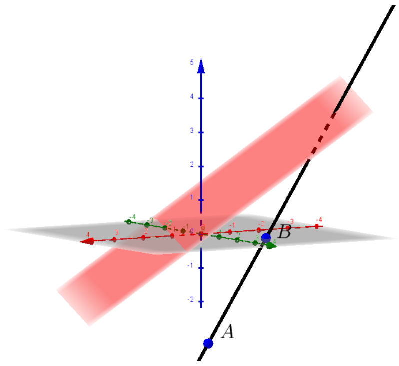
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3} \\ y = 3 - 6 \times \dfrac{1}{3} = 1 \\ z = 0 \\ t = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$



Le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. (a) Un vecteur normal de P est $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $(\overrightarrow{AB}|\vec{n}) = 5 \neq 0$. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ ne sont pas orthogonaux donc on en déduit que (AB) et P ne sont pas parallèles, et donc sont sécants.



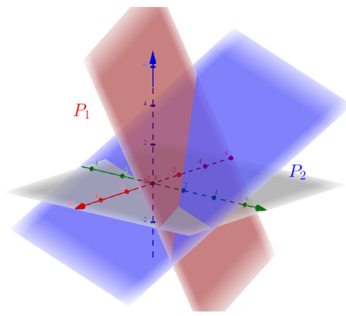
   (b) Une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \end{cases}$

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (AB) \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2 \times \dfrac{11}{5} = \dfrac{-17}{5} \\ y = 2 \\ z = -3 + 3 \times \dfrac{11}{5} = \dfrac{18}{5} \\ t = \dfrac{11}{5} \end{cases}$$

   Donc la droite (AB) et le plan P sont sécants en $M\begin{pmatrix} -17/5 \\ 2 \\ 18/5 \end{pmatrix}$.

5.
   (a) Un vecteur normal à P est $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal à P' est $\vec{n'}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires et donc les plans P et P' sont sécants.



   (b) $d = P \cap P'$ et $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z - 5 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -x + 2y + z - 5 = 0 \\ 3y + 5z - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = -2y - z + 5 \\ 3y = -5z + 11 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{7}{3} - \dfrac{7}{3}t \\ y & = & \dfrac{11}{3} - \dfrac{5}{3}t \\ z & = & t \end{array} \right.$$