算法设计Assignment_1

ZY2006109_姬轶

一、用动态规划方法手工求解下面的问题：

某工厂调查了解市场情况，估计在今后四个月内，市场对其产品的需求量如下表所示。

时期（月）	需要量（产品单位）
1	2
2	3
3	2
4	4

已知：对每个月来讲，生产一批产品的固定成本费为 3（千元），若不生产，则为零。每生产单位产品的成本费为 1（千元)。同时，在任何一个月内，生产能力所允许的最大生产批量为不超过 6 个单位。

又知每单位产品的库存费用为每月 0.5 （千元），同时要求在第一个月开始之初，及在第四个月末，均无产品库存。

问：在满足上述条件下，该厂应如何安排各个时期的生产与库存，使所花的总成本费用最低?

要求：写出各种变量、状态转移方程、递推关系式、和详细计算步骤。

> 解：
> 每个月的需求量：n_k。
> 状态变量：每月初的库存容量：x_k，有$x_1 = x_5 = 0$，$0 \leq x_k \leq n_k + \cdots + n_4$。
> 决策变量：每月初需要生产的容量：p_k，有$max\{0, n_k - x_k\} \leq p_k \leq min\{n_k + \cdots + n_4 - x_k, 6\}$。
> 状态转移方程：$x_{k+1} = x_k + p_k - n_k$。
> 则每月花费（Cost）：
>
> $$c_k = \begin{cases} 0.5(x_k - n_k) & 若\ p_k = 0 \\ 3 + p_k + 0.5(x_k + p_k - n_k) & 若\ p_k \neq 0 \end{cases}$$

递推关系式为：

$$F_k(x_k) = min\{c_k + F_{k+1}(x_{k+1})\}$$
$$= \begin{cases} min\{0.5(x_k - n_k) + F_{k+1}(x_{k+1})\} & 若\ p_k = 0 \\ min\{3 + p_k + 0.5(x_k + p_k - n_k) + F_{k+1}(x_{k+1})\} & 若\ p_k \neq 0 \end{cases}$$
$$F_5(x_5) = 0$$

本题最优条件即为：$F_1(x_1)$最小。下面进行推导：

1）$k = 4$时，$x_4 + p_4 = 4$为最优决策，$x_5 = 0$，

	x_4	p_4	x_5	c_4	$F_5(x_5)$	$c_4 + F_5(x_5)$
$F_4(0)$	0	4	0	7	0	7
$F_4(1)$	1	3	0	6	0	6
$F_4(2)$	2	2	0	5	0	5
$F_4(3)$	3	1	0	4	0	4
$F_4(4)$	4	0	0	0	0	0

2）$k = 3$时，$max\{0, 2 - x_3\} \leq p_3 \leq min\{6 - x_3, 6\}$，

a) $x_3 = 0$时：

	x_3	p_3	x_4	c_3	$F_4(x_4)$	$c_3 + F_4(x_4)$
$F_3(0)$	0	2	0	5	7	12
$F_3(0)$	0	3	1	6.5	6	12.5
$F_3(0)$	0	4	2	8	5	13
$F_3(0)$	0	5	3	9.5	4	13.5
$F_3(0)$	0	6	4	11	0	11

此时可以得到$F_3(0) = 11$。

b) $x_3 = 1$时：

	x_3	p_3	x_4	c_3	$F_4(x_4)$	$c_3 + F_4(x_4)$

	x_3	p_3	x_4	c_3	$F_4(x_4)$	$c_3+F_4(x_4)$
$F_3(1)$	1	1	0	4	7	11
$F_3(1)$	1	2	1	5.5	6	11.5
$F_3(1)$	1	3	2	7	5	12
$F_3(1)$	1	4	3	9.5	4	13.5
$F_3(1)$	1	5	4	10	0	10

此时可以得到$F_3(1)=10$。
c) $x_3=2$时:

	x_3	p_3	x_4	c_3	$F_4(x_4)$	$c_3+F_4(x_4)$
$F_3(2)$	2	0	0	0	7	7
$F_3(2)$	2	1	1	4.5	6	10.5
$F_3(2)$	2	2	2	6	5	11
$F_3(2)$	2	3	3	7.5	4	11.5
$F_3(2)$	2	4	4	9	0	9

此时可以得到$F_3(2)=7$。
d) $x_3=3$时:

	x_3	p_3	x_4	c_3	$F_4(x_4)$	$c_3+F_4(x_4)$
$F_3(3)$	3	0	1	0.5	6	6.5
$F_3(3)$	3	1	2	5	5	10
$F_3(3)$	3	2	3	6.5	4	10.5
$F_3(3)$	3	3	4	8	0	8

此时可以得到$F_3(3)=6.5$。
e) $x_3=4$时:

	x_3	p_3	x_4	c_3	$F_4(x_4)$	$c_3+F_4(x_4)$
$F_3(4)$	4	0	2	1	5	6

	x_3	p_3	x_4	c_3	$F_4(x_4)$	$c_3+F_4(x_4)$
$F_3(4)$	4	1	3	5.5	4	9.5
$F_3(4)$	4	2	4	7	0	7

此时可以得到$F_3(4)=6$。
f) $x_3=5$时:

	x_3	p_3	x_4	c_3	$F_4(x_4)$	$c_3+F_4(x_4)$
$F_3(5)$	5	0	3	1.5	4	5.5
$F_3(5)$	5	1	4	6	0	6

此时可以得到$F_3(5)=5.5$。
f) $x_3=6$时:

	x_3	p_3	x_4	c_3	$F_4(x_4)$	$c_3+F_4(x_4)$
$F_3(6)$	6	0	4	2	0	2

此时可以得到$F_3(6)=2$。

3) $k=2$时，$max\{0,3-x_2\}\leq p_2\leq min\{9-x_2,6\}$，
a) $x_2=0$时:

	x_2	p_2	x_3	c_2	$F_3(x_3)$	$c_2+F_3(x_3)$
$F_2(0)$	0	3	0	6	11	17
$F_2(0)$	0	4	1	7.5	10	17.5
$F_2(0)$	0	5	2	9	7	16
$F_2(0)$	0	6	3	10.5	6.5	17.5

此时可以得到$F_2(0)=16$。
b) $x_2=1$时:

	x_2	p_2	x_3	c_2	$F_3(x_3)$	$c_2+F_3(x_3)$
$F_2(1)$	1	2	0	5	11	16

	x_2	p_2	x_3	c_2	$F_3(x_3)$	$c_2+F_3(x_3)$
$F_2(1)$	1	3	1	6.5	10	16.5
$F_2(1)$	1	4	2	8	7	15
$F_2(1)$	1	5	3	9.5	6.5	16
$F_2(1)$	1	6	4	11	6	17

此时可以得到$F_2(1)=15$。

c) $x_2=2$时:

	x_2	p_2	x_3	c_2	$F_3(x_3)$	$c_2+F_3(x_3)$
$F_2(2)$	2	1	0	4	11	15
$F_2(2)$	2	2	1	5.5	10	15.5
$F_2(2)$	2	3	2	7	7	14
$F_2(2)$	2	4	3	8.5	6.5	15
$F_2(2)$	2	5	4	10	6	16
$F_2(2)$	2	6	5	11.5	5.5	17

此时可以得到$F_2(2)=14$。

d) $x_2=3$时:

	x_2	p_2	x_3	c_2	$F_3(x_3)$	$c_2+F_3(x_3)$
$F_2(3)$	3	0	0	0	11	11
$F_2(3)$	3	1	1	4.5	10	14.5
$F_2(3)$	3	2	2	6	7	13
$F_2(3)$	3	3	3	7.5	6.5	14
$F_2(3)$	3	4	4	9	6	15
$F_2(3)$	3	5	5	10.5	5.5	16
$F_2(3)$	3	6	6	12	2	14

此时可以得到$F_2(3)=11$。
e) $x_2=4$时:

	x_2	p_2	x_3	c_2	$F_3(x_3)$	$c_2+F_3(x_3)$
$F_2(4)$	4	0	1	0.5	10	10.5
$F_2(4)$	4	1	2	5	7	13
$F_2(4)$	4	2	3	6.5	6.5	13
$F_2(4)$	4	3	4	8	6	14
$F_2(4)$	4	4	5	9.5	5.5	15
$F_2(4)$	4	5	6	11	2	13

此时可以得到$F_2(4)=10.5$。
f) $x_2=5$时:

	x_2	p_2	x_3	c_2	$F_3(x_3)$	$c_2+F_3(x_3)$
$F_2(5)$	5	0	2	1	7	8
$F_2(5)$	5	1	3	5.5	6.5	12
$F_2(5)$	5	2	4	7	6	13
$F_2(5)$	5	3	5	8.5	5.5	14
$F_2(5)$	5	4	6	10	2	12

此时可以得到$F_2(5)=8$。
f) $x_2=6$时:

	x_2	p_2	x_3	c_2	$F_3(x_3)$	$c_2+F_3(x_3)$
$F_2(6)$	6	0	3	1.5	6.5	8
$F_2(6)$	6	1	4	6	6	12
$F_2(6)$	6	2	5	7.5	5.5	13
$F_2(6)$	6	3	6	9	2	1

此时可以得到$F_2(6)=8$。
g) $x_2=7$时:

	x_2	p_2	x_3	c_2	$F_3(x_3)$	$c_2+F_3(x_3)$
$F_2(7)$	7	4	2	1.5	6	8
$F_2(7)$	7	5	6.5	6	5.5	12
$F_2(7)$	7	6	8	7.5	2	10

此时可以得到$F_2(7)=8$。

h) $x_2=8$时:

	x_2	p_2	x_3	c_2	$F_3(x_3)$	$c_2+F_3(x_3)$
$F_2(8)$	8	5	3	2.5	5.5	8
$F_2(8)$	8	6	4	7	2	9

此时可以得到$F_2(8)=8$。

i) $x_2=9$时:

	x_2	p_2	x_3	c_2	$F_3(x_3)$	$c_2+F_3(x_3)$
$F_2(9)$	9	0	6	3	2	5

此时可以得到$F_2(9)=5$。

3）$k=1$时，$x_1=0$，$max\{0,2\}\leq p_2\leq min\{6,11\}$，

	x_1	p_1	x_2	c_1	$F_2(x_2)$	$c_1+F_2(x_2)$
$F_1(0)$	0	2	0	5	16	21
$F_1(0)$	0	3	1	6.5	15	21.5
$F_1(0)$	0	4	2	8	7	22
$F_1(0)$	0	5	3	9.5	11	20.5
$F_1(0)$	0	6	4	11	10.5	21.5

此时可以得到$F_1(0)=20.5$。

通过以上步骤可以得出，最优总成本为$F_1(0)=20.5$（千元）。

每月产能安排如下所示：

月份k	月初库存量x_k	月需求量n_k	月产量p_k	月成本c_k
1	0	2	5	9.5
2	3	3	0	0
3	0	2	6	11
4	4	4	0	0
5	0	---	---	---

二、用动态规划方法编程求解下面的问题：

某推销员要从城市 v_1 出发，访问其它城市 v_2， v_3， $\ldots$， v_6 各一次且仅一次，最后返回 v_1。D为各城市间的距离矩阵。

问：该推销员应如何选择路线，才能使总的行程最短？

$$D = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \\ 12 & 0 & 18 & 30 & 25 & 21 \\ 23 & 19 & 0 & 5 & 10 & 15 \\ 34 & 32 & 4 & 0 & 8 & 16 \\ 45 & 27 & 11 & 10 & 0 & 18 \\ 56 & 22 & 16 & 20 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

要求：写出递推关系式、伪代码和程序相关说明，并分析时间复杂性。

解：