

Indhold

1	Uge 1	1
1.1	Basisopgaver	1
1.1.1	i	1
1.1.2	ii	1
1.2	Standardopgaver	1
1.2.1	1.1	1
1.2.2	1.2	2
1.2.3	1.4	3
1.2.4	1.5	5
1.2.5	1.6	6
1.2.6	1.7	6
1.2.7	1.9	7
1.2.8	1.10	7
1.2.9	M1	8
1.2.10	M2	8
1.3	Opgaver til fordybelse	8
1.3.1	1.12	8
1.3.2	1.13	8
1.3.3	M3	8
	Litteratur	9

Alle tal, f.eks. 2.4, refererer til opgaver i [Hesselholt and Wahl, 2017]. Opgaver med bogstaver refererer til ugesedler på Canvas. Det er yderligere indforstået hvorvidt en given variabel er en vektor eller skalar.

1. Uge 1

1.1 Basisopgaver

1.1.1 i

Angiv totalmatricen for ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = -4 \end{cases}$$

Per [Hesselholt and Wahl, 2017, Eksempel 1.1.2] får vi at

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \end{array} \right) \quad (1.1)$$

er totalmatrixen for ligningssystemet.

1.1.2 ii

Er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

på echelon form?

Den opfylder ikke betingelse (1) i [Hesselholt and Wahl, 2017, Def. 1.2.7], da den har to ledende indgange over hinanden. Den er derfor ikke på echelon form. Flyene **skal** således flyve i vifte.

1.2 Standardopgaver

1.2.1 1.1

Vi får matricen på reduceret echelonform, f.eks. ved:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2R_1 \\ -3R_1 \end{array} \\
& \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3R_3 \\ -2R_3 \end{array} \\
& \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3R_3 \\ -2R_3 \end{array} \\
& \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2R_2 \\ -1 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \end{array} \\
A' = & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

1.2.2 1.2

Vi får matricen på reduceret echelonform, f.eks. ved:

$$\begin{aligned}
B = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -3R_1 \\ -2R_1 \end{array} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -R_2 \\ 1/2 \\ -3/2R_2 \end{array} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -R_2 \\ 1/2 \\ -3/2R_2 \end{array} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3R_3 \\ -2R_3 \end{array}
\end{aligned}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2.3 1.4

Vi bruger her [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18]

a

Vi har fået givet

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

Den tilhørende totalmatrice er da

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array} \right). \quad (1.3)$$

Denne løses:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 3 \\ -1 & 2 & 4 & | & 6 \\ 1 & 1 & 5 & | & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2R_3 \\ R_3 \\ \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 & | & -15 \\ 0 & 3 & 9 & | & 15 \\ 1 & 1 & 5 & | & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2 \\ 1/3 \\ -1/3R_2 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 3 & | & 5 \\ 1 & 0 & 2 & | & 4 \end{pmatrix} \\ & A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vi har at $r = 2 < 3 = n$ vi er derfor i tilfælde (4). Vi aflæser løsningsmængden til

$$x = \begin{pmatrix} 4 - 2t \\ 5 - 3t \\ t \end{pmatrix}.$$

b

Vi har fået givet

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

Den tilhørende totalmatrice er da

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array} \right). \quad (1.4)$$

Denne løses:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2R_3 \\ R_3 \\ \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -9 & -14 \\ 0 & 3 & 9 & 15 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \\ 1/3 \\ -1/3R_2 \end{array} \\ & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \\ & B' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Vi er nu i tilfælde (2), ligningssystemet har da ingen løsninger.

c

Vi har fået givet

$$\text{c)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

Den tilhørende totalmatrice er da

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array} \right). \quad (1.5)$$

Denne løses:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2R_3 \\ R_3 \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -8 & -14 \\ 0 & 3 & 9 & 15 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} R_2 \\ 1/3 \\ -1/3R_2 \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} -3R_1 \\ -2R_1 \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \\
 C' = & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Vi er nu i tilfælde (3), ligningssystemet har da præcis løsningen $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

1.2.4 1.5

Vi bruger her [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18]. Totalmatricen:

$$\begin{aligned}
 A = & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \\
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2R_1 \\ -R_1 \\ 3R_3 \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} -R_4 \\ 3R_4 \\ -2R_4 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \end{array} \right) \begin{array}{l} -R_4 \\ 3R_4 \\ -2R_4 \end{array}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

hvorfra det ses $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$ er den eneste løsning.

1.2.5 1.6

Intet nyt, vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18].

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & -7 & 3 & 9 \\ 5 & 8 & -7 & 6 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right).$$

Vi får da løsningsmængden til

$$x = \begin{pmatrix} 2 + 3t \\ 1 + s - 2t \\ 2 + 2s \\ s \\ t \end{pmatrix}.$$

1.2.6 1.7

Vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18]. Den kompleks konjugerede er ofte brugbar her.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} i & 2 & 1 \\ 1 + 2i & 2 + 2i & 3i \end{array} \right) \begin{array}{l} -i \\ iR_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & -i \\ 2i & 2 + 4i & 4i \end{array} \right) \begin{array}{l} -i \\ -2i \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & -i \\ 4 & 8 - 4i & 8 \end{array} \right) \begin{array}{l} -i \\ -4R_1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & -i \\ 0 & 8+4i & 8+4i \end{array} \right) \quad 1/80(8-4i) \\
 & \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad 2iR_2 \\
 A' &= \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Vi har præcis løsningen $x_1 = i$ og $x_2 = 1$.

1.2.7 1.9

Vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18].

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1-i & i & 3 & 0 \\ 0 & 2i & 2 & 0 \\ 2 & 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix} \\
 A' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Og løsningen er da $x = 0$.

1.2.8 1.10

Vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18].

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} -R_3 \\ -2R_3 \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & a-6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \quad -2R_1 \\
 & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

og det ses herfra at for $a \neq 5$ eksisterer der ingen løsninger. Hvis $a = 5$ er løsningsmængden givet ved

$$x = \begin{pmatrix} 3-2t \\ -1+3t \\ t \end{pmatrix}.$$

1.2.9 M1

- a Et homogent ligningssystem tillader altid løsningen $x = 0$.
- b Et ikke homogent ligningssystem kan ikke have 0 som løsning.

1.2.10 M2

- a Ja, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- b Nej, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$ 5 gange har f.eks. løsningen $x = 0$.
- c Nej, hvis vi lavede det på reduceret echelon form ville vi se at der ville være en fri variabel altid. Se f.eks. opgave 1.5.
- d Ja, massere af eksempler.
- e a) Ja, oftest. b) Nej, hvis ligningerne f.eks. er ens. c) Ja, den ene ligning kan være overflødig og vi har så egentlig en 5 ligninger med 5 ubekendte. d) Ja med samme argument som før. Ligninger kan være overflødige.

1.3 Opgaver til fordybelse

1.3.1 1.12

Lad f.eks. x_2 til x_6 være frie variable og lad x_1 være bestemt af disse.

1.3.2 1.13

Hvis det prøves at få totalmatricen på reduceret echelon form fås

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & b & 0 \\ 0 & ad - bc & 0 \end{array} \right).$$

Det ses herfra at 0 er den unikke løsning til ligningssystemet hvis og kun hvis $ad - bc \neq 0$.

1.3.3 M3

Det ses at $d = -1$ og $c = 5$ fra de to første betingelser. De to næste betingelse kan skrives op som to ligninger med to ubekendte, hvor det let udregnes at $b = 1$ og $a = -2$. Samlet bliver polynomiet $-2x^3 + x^2 + 5x - 1$. Kan også opskrive som en matrice og løse systemet derfra.

Litteratur

[Hesselholt and Wahl, 2017] Hesselholt, L. and Wahl, N. (2017). *Lineær Algebra*. Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, København, 2 edition.