Indhold

1	\mathbf{Uge}	1	1
	1.1	Basis opgaver	1
		1.1.1 i	1
		1.1.2 ii	1
	1.2	Standard opgaver	1
		1.2.1 1.1	1
		1.2.2 1.2	2
		1.2.3 1.4	3
		1.2.4 1.5	5
		1.2.5 1.6	6
		1.2.6 1.7	6
		1.2.7 1.9	7
		1.2.8 1.10	7
		1.2.9 M1	8
		1.2.10 M2	8
	1.3	Opgaver til fordybelse	8
		1.3.1 1.12	8
		1.3.2 1.13	8
		1.3.3 M3	9
2	\mathbf{Uge}	2	9
	2.1	Basisopgaver	9
		2.1.1 i	9
		2.1.2 ii	9
	2.2	Standard opgaver	9
		2.2.1 0.2	9
		2.2.2 0.6	10
		2.2.3 2.16	10
		2.2.4 2.17	10
		2.2.5 2.20	11
	2.3	Opgaver til fordybelse	11
		231 05	11

2.3.2	0.7 .			 											 				1	1
2.3.3	2.18			 											 				1	2
2.3.4	2.19			 											 				1	.2
Litteratur																			1	.3

1 LinAlg 19/20 Anton Suhr

Alle tal, f.eks. 2.4, refererer til opgaver i [Hesselholt and Wahl, 2017]. Opgaver med bogstaver refererer til ugesedler på Canvas. Det er yderligere indforstået hvorvidt en given variabel er en vektor eller skalar.

1. Uge 1

1.1 Basis opgaver

1.1.1 i

Angiv totalmatricen for ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = -4 \end{cases}$$

Per [Hesselholt and Wahl, 2017, Eksempel 1.1.2] får vi at

$$\left(\begin{array}{cc|c}
1 & 7 & -1 \\
3 & 4 & -4
\end{array}\right)$$
(1.1)

er totalmatrixen for ligningssytemet.

1.1.2 ii

 Er

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$
(1.2)

på echelon form?

Den opfylder ikke betingelse (1) i [Hesselholt and Wahl, 2017, Def. 1.2.7], da den har to ledende indgange over hinanden. Den er derfor ikke på echelon form. Flyene skal således flyve i vifte.

1.2 Standard opgaver

1.2.1 1.1

Vi får matricen på reduceret echelonform, f.eks. ved:

$$A = \left(\begin{array}{rrrrrrrrrr} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{array}\right)$$

2 LinAlg 19/20 Anton Suhr

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{pmatrix} -2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} -3R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} -3R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} -2R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} -2R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

1.2.2 1.2

Vi får matricen på reduceret echelonform, f.eks. ved:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix} -3R_1$$

$$-2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{pmatrix} -R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} -R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} -3/2R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} -2R_3$$

$$B' = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$1.2.3 \quad 1.4$

Vi bruger her [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18]

 \mathbf{a}

Vi har fået givet

a)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3\\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6\\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

Den tilhørende totalmatrice er da

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Denne løses:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} -2R_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 & -15 \\ 0 & 3 & 9 & 15 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} -15 \begin{pmatrix} R_2 \\ 1/3 \\ -1/3R_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi har at r=2<3=n vi er derfor i tilfælde (4). Vi aflæser løsningsmængden til

$$x = \left(\begin{array}{c} 4 - 2t \\ 5 - 3t \\ t \end{array}\right).$$

b

Vi har fået givet

b)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

Den tilhørende totalmatrice er da

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ -1 & 2 & 4 & | & 6 \\ 1 & 1 & 5 & | & 9 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Denne løses:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} -2R_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -9 & -14 \\ 0 & 3 & 9 & 15 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} -1/3R_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi er nu i tilfælde (2), ligningssystemet har da ingen løsninger.

 \mathbf{c}

Vi har fået givet

c)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

Den tilhørende totalmatrice er da

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & | & 4 \\ -1 & 2 & 4 & | & 6 \\ 1 & 1 & 5 & | & 9 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Denne løses:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 4 & 1 & -2R_3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 & 1 & R_3 \\ 1 & 1 & 5 & 9 & R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -8 & -14 & R_2 \\ 0 & 3 & 9 & 15 & 1/3 \\ 1 & 1 & 5 & 9 & -1/3R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 & -2R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi er nu i tilfælde (3), ligningssystemet har da præcis løsningen $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 1.$

1.2.4 1.5

Vi bruger her [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18]. Totalmatricen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} -2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} 3R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix} -R_4$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & | & -6 \\ 0 & 0 & 21 & | & 21 \\ 0 & 0 & -18 & | & -18 \\ 0 & 1 & 7 & | & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R_4 \\ 3R_4 \\ -2R_4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix},$$

hvorfra det ses x = -1, y = 2, z = 1 er den eneste løsning.

1.2.5 1.6

Inter nyt, vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18].

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & -7 & 3 & 9 \\ 5 & 8 & -7 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vi får da løsningsmængden til

$$x = \begin{pmatrix} 2+3t \\ 1+s-2t \\ 2+2s \\ s \\ t \end{pmatrix}.$$

$1.2.6 \quad 1.7$

Vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18]. Den kompleks konjugerede er ofte brugbar her.

$$A = \begin{pmatrix} i & 2 & 1 \\ 1+2i & 2+2i & 3i \end{pmatrix} \frac{-i}{iR_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i & -i \\ 2i & 2+4i & 4i \end{pmatrix} \frac{-2i}{-2i}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i & -i \\ 4 & 8-4i & 8 \end{pmatrix} \frac{-4R_1}{-4R_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i & -i \\ 0 & 8+4i & 8+4i \end{pmatrix} \frac{1}{80(8-4i)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{2iR_2}{1}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vi har præcis løsningen $x_1 = i$ og $x_2 = 1$.

1.2.7 1.9

Vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18].

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & i & 3 & 0 \\ 0 & 2i & 2 & 0 \\ 2 & 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$
$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Og løsningen er da x = 0.

1.2.8 1.10

Vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18].

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} -R_3$$

$$-2R_3$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & a - 6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} -2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a - 5 \end{pmatrix}$$

og det ses herfra at for $a \neq 5$ eksisterer der ingen løsninger. Hvis a = 5 er løsningsmængden givet ved

$$x = \left(\begin{array}{c} 3 - 2t \\ -1 + 3t \\ t \end{array}\right).$$

8 LinAlg 19/20 Anton Suhr

1.2.9 M1

a Et homogent ligningssystem tillader altid løsningen x = 0.

b Et ikke homogent ligningssystem kan ikke have 0 som løsning.

1.2.10 M2

a Ja,
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

b Nej, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$ 5 gange har f.eks. løsningen x = 0.

c Nej, hvis vi lavede det på reduceret echelon form ville vi se at der ville være en fri variabel altid. Se f.eks. opgave 1.5.

d Ja, massere af eksempler.

e a) Ja, oftest. b) Nej, hvis ligningerne f.eks. er ens. c) Ja, den ene ligning kan være overflødig og vi har så egentlig en 5 ligninger med 5 ubekendte. d) Ja med samme argument som før. Ligninger kan være overflødige.

1.3 Opgaver til fordybelse

$1.3.1 \quad 1.12$

Lad f.eks. x_2 til x_6 være frie variable og lad x_1 være bestemt af disse.

1.3.2 1.13

Hvis det prøves at få totalmatricen på reduceret echelon form fåes

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & b & 0 \\ 0 & ad-bc & 0 \end{array}\right).$$

Det ses herfra at 0 er den unikke løsning til ligningssystemet hvis og kun hvis $ad - bc \neq 0$. Bemærk vi har divideret med a for at få matricen på reduceret echelon form, men hvis a = 0 ville det oplagt være rigtigt.

1.3.3 M3

Det ses at d = -1 og c = 5 fra de to første betingelser. De to næste betingelse kan skrives op som to ligninger med to ubekendte, hvor det let udregnes at b = 1 og a = -2. Samlet bliver polynomiet $-2x^3 + x^2 + 5x - 1$. Kan også opskrive som en matrice og løse systemet derfra.

2. Uge 2

2.1 Basisopgaver

2.1.1 i

1 Da der kun er indgange i diagonalen er den inverse matrice da

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right).$$

 $\mathbf{2}$ C er ikke invertibel da den har determinant 0.

2.1.2 ii

Svaret er

$$\left(\begin{array}{cc} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{array}\right),\,$$

hvilket enten kan ses ved direkte udregning eller [Hesselholt and Wahl, 2017, Eksempel 3.4.3] (Som jeg nok ville mene er et korrollar).

2.2 Standard opgaver

2.2.1 0.2

a Hverken eller, man rammer ikke -1, men omvendt bliver 1 ramt to gange. Billedet er \mathbb{R}_+ .

b Bijektiv. Billedet er \mathbb{R} . $g: x \mapsto \sqrt[3]{y}$

c Surjektiv, men ej injektiv. Billdet er \mathbb{R} .

d Den er injektiv og surjektiv. $g:(x_2,y_2)\mapsto \left(\frac{x_1+y_1}{2},\frac{x_1-y_1}{2lv}\right)$

$2.2.2 \quad 0.6$

a Tag $s, t \in Z$ hvorom der gælder g(f(s)) = g(f(t)). Siden g er injektiv må f(s) = f(t) og da f er injektiv må s = t og deraf må $g \circ f$ også selv være injektiv.

b Tag et vilkårligt $z \in Z$. Da g er surjektiv findes der et $y \in Y$ sådan g(y) = z. Da f er surjektiv findes der et $x \in X$ sådan f(x) = y. Fra dette må $g \circ f$ også være surjektiv.

c Første del følger af a og b. Fra [Hesselholt and Wahl, 2017, Lemma 0.1.3] ved vi at den inverse eksisterer og den er bijektiv selv. Da $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id$ må $(g \circ f)^{-1} = (f^{-1} \circ g^{-1})$ per unikhed af den inverse.

d Antag for modstrid at der eksisterer $x_1, x_2 \in X$ sådan at $f(x_1) = f(x_2)$. Så ville vi have at $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, men da $f \circ g$ er antaget injektiv kan dette ikke lade sig gøre og f må selv være injektiv

e Da $f(X) \subset Y$ må $g(f(X)) \subset g(Y)$. Da $g \circ f$ er antaget surjektiv må g(f(X)) = Z, hvilket giver at g(Y) = Z og g må selv være surjektiv.

$2.2.3 \quad 2.16$

Ved direkte udregning ses det at $A_1 = A_3^{-1}$, $A_5 = A_6^{-1}$ og $A_7 = A_8^{-1}$.

$2.2.4 \quad 2.17$

Per [Hesselholt and Wahl, 2017, sætning 2.4.9] kan vi vise afbildningen er bijektiv ved at vise at Ax = b har præcis en løsning for hvert $b \in \mathbb{R}^3$. Vi får matricen på reduceret echelon form:

$$A|b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 \\ 3 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$$
$$A|b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 4b_1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2b_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3b_3 \end{pmatrix}$$

og det ses for ethvert b har afbildningen præcis løsning $x(4b_1, -1/2b_2, 1/3b_3)$.

Per sætning [Hesselholt and Wahl, 2017, 2.4.12] kan den inverse matrix findes til at være

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

og $g(y) = A^{-1}y$.

$2.2.5 \quad 2.20$

Lad f være givet ved $f(x_1, x_2, x_3) = (1, x_1, x_2, x_3)$. Denne afbildning er lineæer og injektiv. Denne kunne også være givet ved $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 1, x_2, x_3)$, den er da ikke entydig.

2.3 Opgaver til fordybelse

$2.3.1 \quad 0.5$

 \mathbf{a}

f Injektivitet: Antag f(x, y, z) = f(x', y', z'), så (x + y, y + z, x + z) = (x' + y', y' + z', x' + z'). Dette ville give at x = x' + y' - y og så videre at (x' + y' - y) + z = x' + z' og deraf y' - y = 0 sådan at y' = y. På samme måde ville det kunne vises at x = x', z = z' og f er deraf injektiv. Surjektiv: Lad (a, b, c) være en vektor i \mathbb{R}^3 . Man har da 3 ligninger med 3 ubekendte løses disse fåes

$$x = \frac{a-b+c}{2}$$
$$y = \frac{a+b-c}{2}$$
$$z = \frac{-a+b+c}{2}$$

g g er ej surjektiv. Laves en lignende isolering fåes at a = b + c hvis der skal være en løsning. Punktet (1,0,0) kan derfor ikke rammes.

b

Den inverse er

$$g \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-b+c}{2} \\ \frac{a+b-c}{2} \\ \frac{-a+b+c}{2} \end{pmatrix}.$$

$2.3.2 \quad 0.7$

F.eks. ville

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{hvis } x = \frac{1}{n} \text{ hvor } n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{ellers} \end{cases}$$

være en bijektion fra $[0,1] \mapsto [0,1)$

$2.3.3 \quad 2.18$

Følger af en udvidelse af [Hesselholt and Wahl, 2017, Eksempel 0.1.4]. $a,b,c\neq 0$ og den inverse er da

$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1/c \\ 0 & 1/b & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \end{array}\right).$$

2.3.4 2.19

Eftervises let ved Maple.

Litteratur

[Hesselholt and Wahl, 2017] Hesselholt, L. and Wahl, N. (2017). *Lineær Algebra*. Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, København, 2 edition.