Indhold

Alle tal, f.eks. 2.4, refererer til opgaver i [Hesselholt and Wahl, 2017]. Opgaver med bogstaver refererer til ugesedler på Canvas. Det er yderligere indforstået hvorvidt en given variabel er en vektor eller skalar.

1. Uge 1

1.1 Basisopgaver

1.1.1 i

Angiv totalmatricen for ligningssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = -4 \end{cases}$$

Per [Hesselholt and Wahl, 2017, Eksempel 1.1.2] får vi at

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 4 & -4 \end{array}\right) \tag{1.1}$$

er totalmatrixen for ligningssytemet.

1.1.2 ii

Er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

på echelon form?

Den opfylder ikke betingelse (1) i [Hesselholt and Wahl, 2017, Def. 1.2.7], da den har to ledende indgange over hinanden. Den er derfor ikke på echelon form. Flyene **skal** således flyve i vifte.

1.2 Standardopgaver

1.2.1 1.1

Vi får matricen på reduceret echelonform, f.eks. ved:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -4 & 8 & 3 & 10 & 7 \\ 3 & -6 & 10 & 6 & 5 & 27 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 \\ -3R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3R_3 \\ -2R_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3R_3 \\ -2R_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 & -5 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2R_2 \\ -1 \\ R_2 \leftrightarrow R_3 \end{matrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

1.2.2 1.2

Vi får matricen på reduceret echelonform, f.eks. ved:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 7 & 20 \\ 2 & 7 & 9 & 23 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3R_1 \\ -2R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} -R_2 \\ 1/2 \\ -3/2R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -R_2 \\ 1/2 \\ -3/2R_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3R_3 \\ -2R_3 \\ \\ \end{matrix}$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2.3 1.4

Vi bruger her [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18]

a

Vi har fået givet

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

Den tilhørende totalmatrice er da

$$A = \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right). \tag{1.3}$$

Denne løses:

$$\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) & \begin{array}{c} -2R_3 \\ R_3 \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -3 & -9 & -15 \\ 0 & 3 & 9 & 15 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) & \begin{array}{c} R_2 \\ 1/3 \\ -1/3R_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) & \\ A' = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). & \end{array}$$

Vi har at $r = 2 < 3 = n$ vi er derfor i tilfælde (4). Vi aflæser løsningsmængden til

$$x = \begin{pmatrix} 4 - 2t \\ 5 - 3t \\ t \end{pmatrix}.$$

b

Vi har fået givet

$$\text{b)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

Den tilhørende totalmatrice er da

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right). \tag{1.4}$$

Denne løses:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2R_3 \\ R_3 \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -9 & -14 \\ 0 & 3 & 9 & 15 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \\ 1/3 \\ -1/3R_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \\ B' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \end{array}$$

Vi er nu i tilfælde (2), ligningssystemet har da ingen løsninger.

c

Vi har fået givet

$$\text{c)} \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 9 \end{cases}$$

Den tilhørende totalmatrice er da

$$C = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right). \tag{1.5}$$

Denne løses:

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2R_3 \\ R_3 \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -3 & -8 & -14 \\ 0 & 3 & 9 & 15 \\ 1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} R_2 \\ 1/3 \\ -1/3R_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -2R_1 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \\ C' = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right). \end{array}$$

Vi er nu i tilfælde (3), ligningssystemet har da præcis løsningen $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

1.2.4 1.5

Vi bruger her [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18]. Totalmatricen:

$$\begin{array}{c} A = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2R_1 \\ -R_1 \\ 3R_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} -R_4 \\ 3R_4 \\ -2R_4 \\ \end{array} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & -18 & -18 \\ 0 & 1 & 7 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{c} -R_4 \\ 3R_4 \\ -2R_4 \\ \end{array}$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

hvorfra det ses $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$ er den eneste løsning.

1.2.5 1.6

Intet nyt, vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18].

$$A = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -1 & -2 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & -7 & 3 & 9 \\ 5 & 8 & -7 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$A' = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right).$$

Vi får da løsningsmængden til

$$x = \begin{pmatrix} 2+3t \\ 1+s-2t \\ 2+2s \\ s \\ t \end{pmatrix}.$$

1.2.6 1.7

Vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18]. Den kompleks konjugerede er ofte brugbar her.

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} i & 2 & 1 \\ 1+2i & 2+2i & 3i \end{array}\right) \begin{array}{c} -i \\ iR_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & -i \\ 2i & 2+4i & 4i \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -2i \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & -i \\ 4 & 8-4i & 8 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -4R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & -i \\ 0 & 8+4i & 8+4i \end{array}\right) \quad 1/80(8-4i)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2i & -i \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad 2iR_2$$

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Vi har præcis løsningen $x_1 = i$ og $x_2 = 1$.

1.2.7 1.9

Vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18].

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & i & 3 & 0 \\ 0 & 2\,i & 2 & 0 \\ 2 & 1-i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Og løsningen er da $x = 0$.

1.2.8 1.10

Vi bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 1.2.18].

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{c} -R_3 \\ -2R_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & a-6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \quad -2R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 \end{array}\right)$$

og det ses herfra at for $a \neq 5$ eksisterer der ingen løsninger. Hvis $a = 5$ er løsningsmængden givet ved

$$x = \begin{pmatrix} 3-2t \\ -1+3t \\ t \end{pmatrix}.$$

1.2.9 M1

a Et homogent ligningssystem tillader altid løsningen $x = 0$.

b Et ikke homogent ligningssystem kan ikke have 0 som løsning.

1.2.10 M2

a Ja, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

b Nej, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$ 5 gange har f.eks. løsningen $x = 0$.

c Nej, hvis vi lavede det på reduceret echelon form ville vi se at der ville være en fri variabel altid. Se f.eks. opgave 1.5.

d Ja, massere af eksempler.

e a) Ja, oftest. b) Nej, hvis ligningerne f.eks. er ens. c) Ja, den ene ligning kan være overflødig og vi har så egentlig en 5 ligninger med 5 ubekendte. d) Med samme argument som før, ligninger kan være overflødige.

1.3 Opgaver til fordybelse

1.3.1 1.12

Lad f.eks. x_2 til x_6 være frie og lad x_1 være bestemt af disse.

1.3.2 1.13

Hvis det prøves at få totalmatricen på reduceret echelon form fåes

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & b & 0 \\ 0 & ad - bc & 0 \end{array}\right).$$

Det ses herfra at 0 er den unikke løsning til ligningssystemet hvis og kun hvis $ad - bc \neq 0$.

1.3.3 M3

Det ses at $d = -1$ og $c = 5$ fra de to første betingelser. De to næste betingelse kan skrives op som to ligninger med to ubekendte, hvor det let udregnes at $b = 1$ og $a = -2$. Samlet bliver polynomiet $-2x^3 + x^2 + 5x - 1$. Kan også opskrive som en matrice og løse systemet derfra.

Litteratur

[Hesselholt and Wahl, 2017] Hesselholt, L. and Wahl, N. (2017). *Lineær Algebra*. Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, København, 2 edition.