Indhold

Alle tal, f.eks. 2.4, refererer til opgaver i [Hesselholt and Wahl, 2017]. Opgaver med bogstaver refererer til ugesedler på Canvas. Det er yderligere indforstået hvorvidt en given variabel er en vektor eller skalar.

1. Uge 7

1.1 Basisopgaver

1.1.1 i

Den er lineær, men ikke en isometri. F.eks. bliver $f(1,0) = (2,0)$. $(1,0)$ har norm 1, mens $(2,0)$ har norm 2 og det ikke være en isometri per definition

1.1.2 ii

Den adjungerede matrix er

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

hvilket oplagt ikke er den inverse til matricen A da den har determinant 2. Den er derfor ikke ortogonal per definition.

1.2 Standardopgaver

1.2.1 6.8

1. Alle kvadratiske matricer har egenvektore i $\mathbb{C}$ (da det er algebraisk lukket), svaret er derfor ja.

2. Dette er ækvivalent med at endomorfien er normal, hvilket ikke er givet. Svaret er derfor nej.

3. Ja, per [Hesselholt and Wahl, 2017, Korollar 6.2.11]

4. Ja, per [Hesselholt and Wahl, 2017, Korollar 6.2.11]

5. Nej. Dette gælder hvis og kun hvis $AA^* = I$ (Brødtekst s.239)

1.2.2 6.9

a og b Det ses ved direkte udregning af den inverse til Q at den er normal, da inverse er

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2.3 6.10

Det ses at matricerne både er unitære og hermitiske per [Hesselholt and Wahl, 2017, Definition 6.3.14]. Det ses også ved at hver matrix giver opgaver til polynomiet $\lambda^2 - 1$, hvilket har løsningerne ± 1.

1.2.4 6.12

a Vi har $1 = \det I = \det Q^*Q = \det Q^* \det Q = (\det Q)^2$.

b Samme bevis som i a.

1.2.5 6.15

a Vi får det karakteriske polynomium til $-t^3 + 11t^2 - 38t + 40$. Løses med maple og man får her 5, 2, 4 som løsninger.

b Vi udregner først egenvektorene ved at Gauss-eliminere matricen A med rødderne fra det karakteristiske polynomium sat ind. Vi får da vektorene $(-1, -1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(2, -1, 1)$. Disse kan derefter laves om til en ortonormal base med Gram Schmidt og det ses også denne udspænder hele $\mathbb{R}^3$. Her f.eks.

$$[\begin{bmatrix} -1/3\sqrt{3} \\ -1/3\sqrt{3} \\ 1/3\sqrt{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/6\sqrt{6} \\ 1/6\sqrt{6} \\ 1/3\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} \\ -1/2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}]$$

c Tag vektorene i din ortonormale basis.

1.2.6 6.16

a og b Samme som i 6.15. Egenværdierne bliver 8, 2 og 2. Og en ortonormal basis:

$$[\begin{bmatrix} -1/6\sqrt{6} \\ 1/6\sqrt{6} \\ 1/3\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/3\sqrt{3} \\ -1/3\sqrt{3} \\ 1/3\sqrt{3} \end{bmatrix}]$$

c Tag vektorene i din ortonormale basis.

6.17

a og b Samme som i de to foregående. Egenvektore: $1-i, 1+i$. Ortonormal basis:

$$[\begin{bmatrix} -1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} \\ 1/2\sqrt{2} \end{bmatrix}]$$

c Tag vektorene i din ortonormale basis.

1.2.7 Opgaver til fordybelse

6.11

6.13

6.19

6.20

6.21

Litteratur

[Hesselholt and Wahl, 2017] Hesselholt, L. and Wahl, N. (2017). *Lineær Algebra*. Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, København, 2 edition.