Indhold

1 Uge 2 **1**

1.1 Basisopgaver . . . 1

1.1.1 i . . . 1

1.1.2 ii . . . 1

1.2 Standard opgaver . . . 1

1.2.1 0.2 . . . 1

1.2.2 0.6 - kun d-e . . . 2

1.2.3 2.16 . . . 2

1.2.4 2.17 . . . 2

1.2.5 2.20 . . . 3

1.3 Opgaver til fordybelse . . . 3

1.3.1 0.5 . . . 3

1.3.2 0.7 . . . 3

1.3.3 2.18 . . . 4

1.3.4 2.19 . . . 4

Litteratur **5**

Alle tal, f.eks. 2.4, refererer til opgaver i [Hesselholt and Wahl, 2017]. Opgaver med bogstaver refererer til ugesedler på Canvas. Det er yderligere indforstået hvorvidt en given variabel er en vektor eller skalar.

1. Uge 2

1.1 Basisopgaver

1.1.1 i

1 Da der kun er indgange i diagonalen er den inverse matrice da

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

per [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 2.4.12]

2 C er ikke invertibel da den har determinant 0.

1.1.2 ii

Svaret er

$$\begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

hvilket enten kan ses ved direkte udregning eller [Hesselholt and Wahl, 2017, Eksempel 3.4.3] (Som jeg nok ville mene er et korrollar).

1.2 Standard opgaver

1.2.1 0.2

a Hverken eller, man rammer ikke -1, men omvendt bliver 1 ramt to gange. Billedet er $\mathbb{R}_+$.

b Bijektiv. Billedet er $\mathbb{R}$. Den inverse er $g : x \mapsto \sqrt[3]{y}$

c Surjektiv, men ej injektiv. F.eks. $(-1, 1) = -1 = (1, -1)$, men $(-1, 1) \neq (1, -1)$. Billdet er $\mathbb{R}$.

d Den er injektiv og surjektiv. $g : (x_2, y_2) \mapsto \left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_1-y_1}{2}\right)$

1.2.2 0.6 - kun d-e

a Tag $s, t \in Z$ hvorom der gælder $g(f(s)) = g(f(t))$. Siden g er injektiv må $f(s) = f(t)$ og da f er injektiv må $s = t$ og deraf må $g \circ f$ også selv være injektiv.

b Tag et vilkårligt $z \in Z$. Da g er surjektiv findes der et $y \in Y$ sådan $g(y) = z$. Da f er surjektiv findes der et $x \in X$ sådan $f(x) = y$. Fra dette må $g \circ f$ også være surjektiv.

c Første del følger af a og b. Fra [Hesselholt and Wahl, 2017, Lemma 0.1.3] ved vi at den inverse eksisterer og den er bijektiv selv. Da $(g \circ f) \circ (f^-1 \circ g^-1) = id$ må $(g \circ f)^-1 = (f^-1 \circ g^-1)$ per unikhed af den inverse.

d Antag for modstrid at der eksisterer $x_1, x_2 \in X$ sådan at $f(x_1) = f(x_2)$. Så ville vi have at $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, men da $f \circ g$ er antaget injektiv kan dette ikke lade sig gøre og f må selv være injektiv

e Da $f(X) \subset Y$ må $g(f(X)) \subset g(Y) \subset Z$. Da $g \circ f$ er antaget surjektiv må $Z \subset g(Y) \subset Z$ hvilket giver at $g(Y) = Z$ og g må derfor selv være surjektiv.

1.2.3 2.16

Ved direkte udregning ses det at $A_1 = A_3^{-1}$, $A_5 = A_6^{-1}$ og $A_7 = A_8^{-1}$.

1.2.4 2.17

Per [Hesselholt and Wahl, 2017, sætning 2.4.9] kan vi vise afbildningen er bijektiv ved at vise at $Ax = b$ har præcis en løsning for hvert $b \in \mathbb{R}^3$. Vi får matricen på reduceret echelon form:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1/4 & b_1 \\ 0 & -2 & 0 & b_2 \\ 3 & 0 & 0 & b_3 \end{array}\right)$$

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 4b_1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2b_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3b_3 \end{array}\right)$$

og det ses for ethvert b har afbildningen præcis løsningen $x = (4b_1, -1/2b_2, 1/3b_3)$.

Per sætning [Hesselholt and Wahl, 2017, 2.4.12] kan den inverse matrix findes til at være

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

og $g(y) = A^{-1}y$.

1.2.5 2.20

Lad f være givet ved $f(x_1, x_2, x_3) = (1, x_1, x_2, x_3)$. Denne afbildning er lineæer og injektiv. Denne kunne også være givet ved $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 1, x_2, x_3)$, den er da ikke entydig.

1.3 Opgaver til fordybelse

1.3.1 0.5

a

f Injektivitet: Antag $f(x, y, z) = f(x', y', z')$, så $(x + y, y + z, x + z) = (x' + y', y' + z', x' + z')$. Dette ville give at $x = x' + y' - y$ og så videre at $(x' + y' - y) + z = x' + z'$ og deraf $y' - y = 0$ sådan at $y' = y$. På samme måde ville det kunne vises at $x = x'$, $z = z'$ og f er deraf injektiv. Surjektiv: Lad (a, b, c) være en vektor i $\mathbb{R}^3$. Man har da 3 ligninger med 3 ubekendte løses disse fåes

$$\begin{aligned} x &= \frac{a - b + c}{2} \\ y &= \frac{a + b - c}{2} \\ z &= \frac{-a + b + c}{2} \end{aligned}$$

g g er ej surjektiv. Laves en lignende isolering fåes at $a = b + c$ hvis der skal være en løsning. Punktet $(1, 0, 0)$ kan derfor ikke rammes.

b

Den inverse er

$$g\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a-b+c}{2} \\ \frac{a+b-c}{2} \\ \frac{-a+b+c}{2} \end{pmatrix}.$$

1.3.2 0.7

F.eks. ville

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{hvis } x = \frac{1}{n} \text{ hvor } n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{ellers} \end{cases}$$

være en bijektion fra $[0, 1] \mapsto [0, 1)$

1.3.3 2.18

Følger af en udvidelse af [Hesselholt and Wahl, 2017, Eksempel 0.1.4]. $a, b, c \neq 0$ og den inverse er da

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/c \\ 0 & 1/b & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.4 2.19

Eftervises let ved Maple.

Litteratur

[Hesselholt and Wahl, 2017] Hesselholt, L. and Wahl, N. (2017). *Lineær Algebra*. Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, København, 2 edition.