Indhold

Alle tal, f.eks. 2.4, refererer til opgaver i [Hesselholt and Wahl, 2017]. Opgaver med bogstaver refererer til ugesedler på Canvas. Det er yderligere indforståæt hvorvidt en given variabel er en vektor eller skalar.

1. Uge 3

1.1 Basis opgaver

1.1.1 i

Per [Hesselholt and Wahl, 2017, Eksempel 3.2.25] fåes determinanten til $2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5$.

1.1.2 ii

Vi udregner determinanten af den første matrice til $1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -5 \neq 5$. De er da ikke lig med hinanden.

1.2 Standard opgaver

1.2.1 3.1

i $2 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 = 3$.

ii Vi bruger Laplace udvikling langs 3. søjle. (husk fortegn)

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = 2(-2-9) + (6+8) = -22 + 14 = -8.$$

iii Laplace udvikling langs første søjle

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & \pi & 5 \\ 2 & 1/2 & 2 \end{pmatrix} = 1 \det \begin{pmatrix} \pi & 5 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 5 & \pi \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$= 2\pi - 5/2 - 2(10 - 10) + 5/2 - 2\pi = 0$$

1.2.2 3.2

A Vi laver matricen om til en øvre triangulær matrice og bruger [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 3.3.3]. Vi får

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

B Vi får determinanten $\cos\theta^2 + \sin\theta^2 = 1$, hvor den sidste lighed kommer af grundrelation mellem cosinus og sinu.

C Det ses at determinanten er $(1+i)(1-i) - 2 = 0$

1.2.3 3.3

i Det ses let ved en triangulation at determinanten er -24.

ii Det er matricen i i's transponerede og de har derfor samme determinant, -24.Det ses også let ved en triangulation at determinanten er -24.

1.2.4 3.4

a Ja per [Hesselholt and Wahl, 2017, Sætning 3.2.1] eller det kan indses ved Laplace udvikling af første søjle

b Den er ikke på øvre eller nedre triagulær form, men ved at få den på dette ses det at determinanten er $-abc$. Se opgave 3.9 for generel regel.

c Det er en triagulær matrix, det er sandt.

d Ved tilsvarende argument som i **b** ses det at det er falsk, da determinanten har positivt fortegn. Se opgave 3.9 for generel regel.

1.2.5 3.5

Ved en længere Laplace udvikling fåes determinanten til $a^4b - 2ba^2 + b$.

1.2.6 3.6

i Determinanten er $4 - 1 = 3$.

ii Determinanten er 4.

iii Determinanten er 5.

1.3 Øvelser til fordybelse

1.3.1 3.7

Determinanten er 1. Den drejer rummet, effektivt laver den om på akserne.

1.3.2 3.8

i Determinanten er $(2+i)(1-i) - 12i = 3 - i - 12i = 3 - 13i$.

ii Determinanten er $1 + 9i$.

1.3.3 3.9

a

Dette bliver exchange matricen (enhedsmatricen spejlet).

b

Det lader til determinanten skifter fra -1 til 1 for hver anden dimension du går op.

c

Kan indses ved at 'ombytte' rækker og huske på at fortegnet skifter ved hver operation. Med dette ses det at determinanten er bestem ved

$$\begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} & n \text{ er lige} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ er ulige} \end{cases},$$

hvilket præcis giver det ønskede.

d

Når $\frac{n(n-1)}{2}$, hvor n er dimensionen af matricen, er lige.

Litteratur

[Hesselholt and Wahl, 2017] Hesselholt, L. and Wahl, N. (2017). *Lineær Algebra*. Institut for Matematiske Fag, Københavns Universitet, København, 2 edition.