Aula 17/18: Resolução de exercícios

Eduardo Fernandes Montesuma

Universidade Federal do Ceará

edumontesuma@gmail.com

8 de maio de 2018

Outline

Introdução

Na aula de hoje nós iremos,

- Resolver exercícios para a prova,
- Tirar dúvidas sobre os conceitos ensinados em aula,
- Tirar dúvidas sobre Matlab/LaTeX

Processos de 1ª Ordem

Processos de 1ª Ordem têm origem em equações diferenciais de 1ª Ordem,

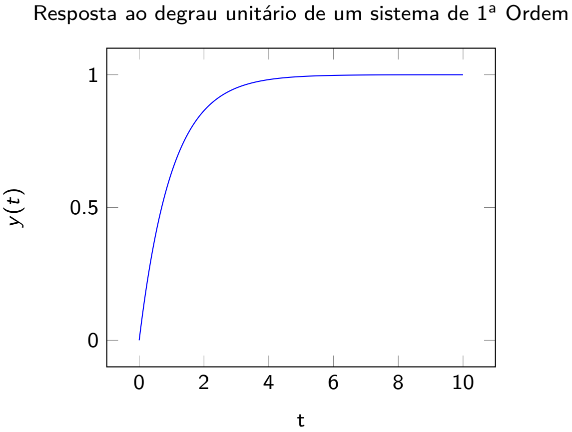
$$\dot{y}(t) + ay(t) = au(t)$$
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a}{s+a}$$

A resposta ao degrau se dá quando $U(s) = \frac{1}{s}$. Portanto,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{a}{s(s+a)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

Ou seja, $y(t) = 1 - e^{-at}$

Processos de 1ª Ordem



Como $\lim_{t \to \infty} y(t) = 1$, dizemos que o sistema tem ganho unitário.

Caracterização de sistemas de 1ª ordem

Dada uma função de transferência qualquer,

$$T(s) = \frac{K}{s+a}$$

Definimos os seguintes parâmetros,

- $K_{gain} = \frac{K}{a}$ é chamado de ganho do sistema. Ele determina o valor de $y(\infty)$.
- $\tau = |1/a|$, é chamado de constante de tempo. Ele dá uma ideia sobre a velocidade de crescimento/decrescimento da resposta.

Caracterização de sistemas de 1ª ordem

Dada uma função de transferência qualquer,

$$T(s) = \frac{K}{s + a}$$

Definimos as seguintes informações,

- O tempo de subida, T_r, dado pelo tempo levado para a resposta ir de 0.1 até do seu valor final.
- O tempo de acomodação, T_s, dado pelo tempo levado pela resposta para ficar entre 2% do valor final.

Caracterização de sistemas de 1ª ordem

Podemos provar as seguintes relações,

- $T_r = 2.2/a$,

Para $y(t_2) = 0.9$ e $y(t_1) = 0.1$:

$$\begin{aligned} y(t_2) &= 0.9 & \qquad y(t_1) &= 0.1 \\ 1 - e^{-at} &= 0.9 & 1 - e^{-at} &= 0.1 \\ e^{-at} &= 0.9 & e^{-at} &= 0.1 \\ t &= 2.3026/a & t &= 0.1054/a \end{aligned}$$

Portanto $T_r \approx 2.2/a$.

- $T_s = 4/a$

Para $y(T_s) = 0.98$

$$e^{-at} = 0.02$$
$$t = \frac{ln(0.02)}{-a} \approx \frac{4}{a}$$

Processos de 1ª Ordem

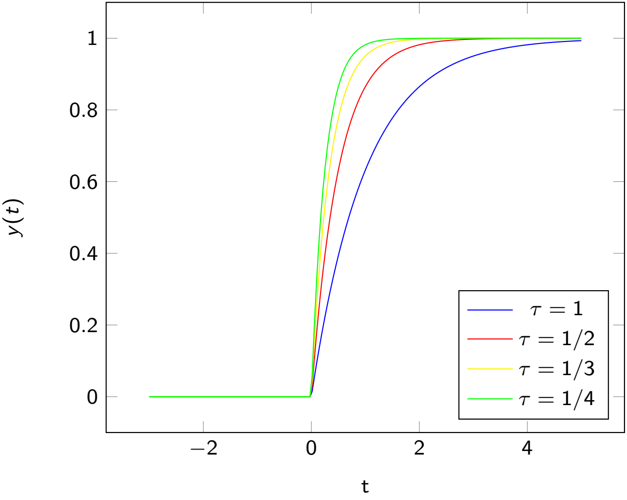


Figura: Respostas em razão da variação da constante de tempo.

Processos de 2ª Ordem

Assim como os processos de 1ª ordem, os de 2ª também têm origem em equações diferenciais,

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = bu(t)$$
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

Para entender a resposta do sistema, precisamos calcular os polos,

- $s_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$
- $s_2 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

Processos de 2ª ordem

Assim como os processos de 1ª ordem, os de 2ª também têm origem em equações diferenciais,

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = bu(t)$$
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

Nós reescrevemos nossa função de transferência em função de dois parâmetros,

- A frequência natural do sistema, $\omega_n = \sqrt{b}$.
- A constante de amortecimento, $\zeta = 2a/\omega_n$.

ou seja,

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Resposta Não-amortecida

Fazendo $\zeta = 0$, nossa função de transferência se torna:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)}$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$$

De tal forma que,

$$y(t) = 1 - cos(\omega_n t)$$

Resposta não-amortecida

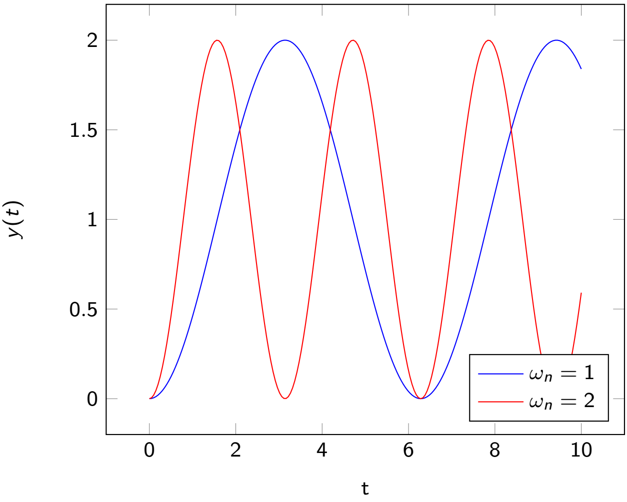


Figura: Resposta ao degrau de um sistema não-amortecido

Resposta sub-amortecida

Considerando que $0 < \zeta < 1$, o polinômio característico de $T(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ possui duas raízes complexas conjugadas, $-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ e $-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, portanto,

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{w_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + (\zeta\omega_n)^2 - \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \\
&= \frac{1}{s} - \left(\frac{s - (-\zeta\omega_n)}{(s - (-\zeta\omega_n))^2 + (\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2} + \frac{\zeta\omega_n}{(s - (-\zeta\omega_n))^2 + (\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2} \right) \\
&= \frac{1}{s} - \left(\frac{s - (-\zeta\omega_n)}{(s - (-\zeta\omega_n))^2 + (\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{(s - (-\zeta\omega_n))^2 + (\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2} \right)
\end{aligned}
$$

Resposta sub-amortecida

Considerando que $0 < \zeta < 1$, o polinômio característico de $T(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ possui duas raízes complexas conjugadas, $-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ e $-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, portanto,
Usando $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$,

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin(\omega_d t)\right)$$

Nesta resposta, a influência dos parâmetros ζ e ω_n fica mais clara.

Resposta sub-amortecida

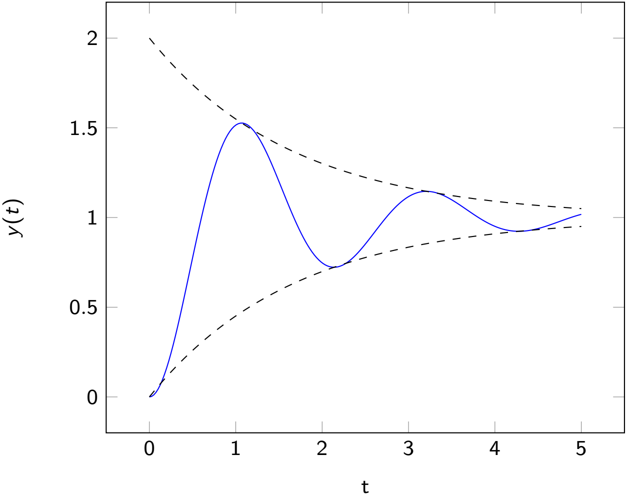


Figura: Resposta no domínio do tempo, envelopada por exponenciais.

Resposta sub-amortecida

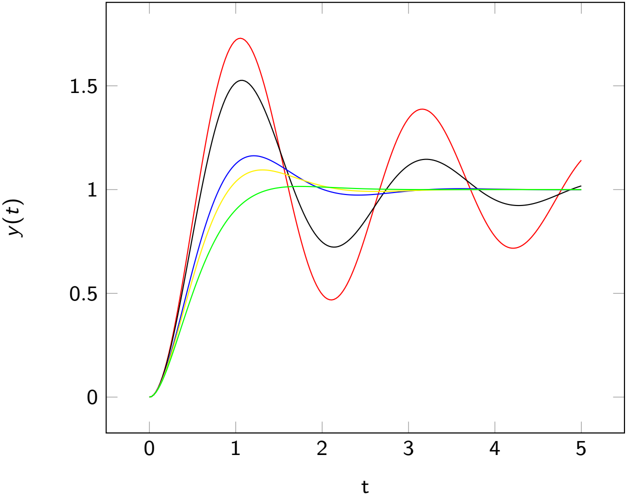


Figura: Resposta ao degrau para vários valores de ζ.

Processos com zeros na função de transferência

Zeros e Polos

Dada uma função de transferência arbitrária,

$$G(s) = \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

Os números $p_i \in \mathbb{R}$ e $z_j \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, os polos e zeros de G.

Atraso

Se $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, então $G(s)e^{-\theta s} = \mathcal{L}[g(t - \theta)]$. Portanto, dizemos que o termo $e^{-\theta s}$ é um termo de atraso numa função de transferência qualquer.

Aproximações

Note que,

- Segundo Taylor,

$$
\begin{aligned}
e^{-\theta s} &= 1 - \theta s + \frac{\theta^2 s^2}{2!} - \frac{\theta^3 s^3}{3!} + \frac{\theta^4 s^4}{4!} - \frac{\theta^5 s^5}{5!} + \dots \\
&\approx 1 - \theta s \\
&\approx \frac{1}{1 + \theta s}
\end{aligned}
$$

- Segundo Padé,

$$
\begin{aligned}
e^{-\theta s} &= \frac{1 - (\theta/2)s + \frac{(\theta/2)^2 s^2}{2!} - \frac{(\theta/2)^3 s^3}{3!} + \frac{(\theta/2)^4 s^4}{4!} - \frac{(\theta/2)^5 s^5}{5!} + \dots}{1 + (\theta/2)s - \frac{(\theta/2)^2 s^2}{2!} + \frac{(\theta/2)^3 s^3}{3!} - \frac{(\theta/2)^4 s^4}{4!} + \frac{(\theta/2)^5 s^5}{5!} + \dots} \\
&\approx \frac{1 - \frac{\theta}{2} s}{1 + \frac{\theta}{2} s}
\end{aligned}
$$

Aproximações

Existe, portanto, uma ligação entre a presença de zeros, e o atraso: podemos aproximar zeros e polos de menor relevância à fim de obter funções de transferência aproximadas.
Sendo assim, considere

$$G(s) = \frac{K(-0.1s+1)}{(5s+1)(3s+1)(0.5s+1)}$$

Queremos comparar os dois tipos de aproximação de taylor

Aproximações

Utilisando as regras já discutidas,

$$-0.1s + 1 \approx e^{-0.1s} \qquad (3s+1)^{-1} \approx e^{-3s} \qquad (0.5s+1)^{-1} \approx e^{-0.5s}$$

Sendo assim, nossa função de transferência se torna,

$$G(s) = \frac{Ke^{-3.6s}}{5s+1}$$

Aproximações

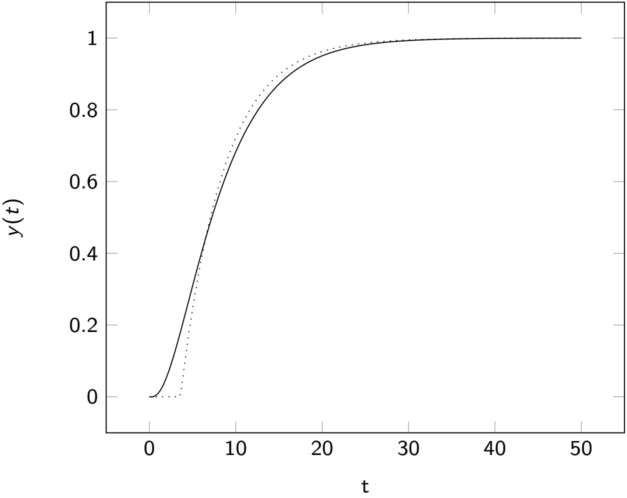


Figura: Comparação entre a função de transferência original e aproximada

Exercício 1

Para cada função de transferência abaixo, encontre os polos e zeros, plote-os no plano s, e escreva a resposta ao degrau no domínio do tempo. Enuncie a natureza de cada resposta (sobre-amortecido, sub-amortecido, etc).

$$T(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$T(s) = \frac{5}{(s+3)(s+6)}$$

$$T(s) = \frac{10(s+7)}{(s+10)(s+20)}$$

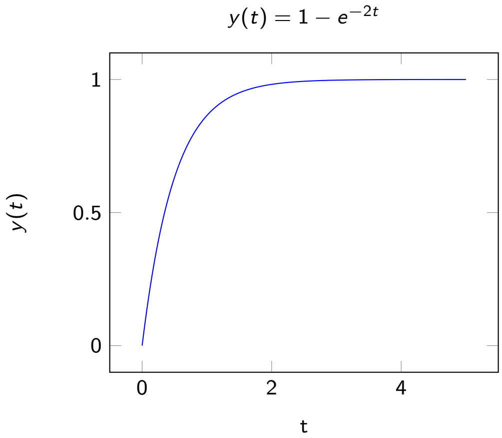
$$T(s) = \frac{20}{s^2+6s+144}$$

$$T(s) = \frac{s+5}{(s+10)^2}$$

Sistema 1

O sistema possui as seguintes características,

1. Primeira ordem,
2. Ganho unitário,
3. Constante de tempo $\tau = 1/2$



Sistema 2

O sistema tem função de transferência equivalente à,

$$T(s) = \frac{5}{s^2 + 9s + 18} = \frac{5}{9}\frac{3}{s+3} - \frac{5}{18}\frac{6}{s+6}$$

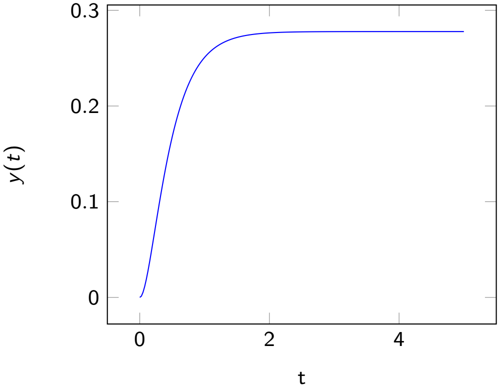
portanto,

1. Dois polos reais distintos: -3, -6.
2. $\omega_n = 3\sqrt{2} \approx 4.242$
3. $\zeta = \dfrac{9}{2\omega_n} \approx 1.06$
4. $K_{gain} = \dfrac{5}{18} \approx 0.277$

Sistema 2

Concluímos que o sistema tem resposta super amortecida ($\zeta > 1$). Por inspeção, a resposta ao degrau no domínio do tempo é,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{5}{9}\left(1 - e^{-3t}\right) - \frac{5}{18}\left(1 - e^{-6t}\right) \\
&= \frac{5}{18} - \frac{5}{9}e^{-3t} + \frac{5}{18}e^{-6t}
\end{aligned}
$$



Sistema 3

O sistema é equivalente à,

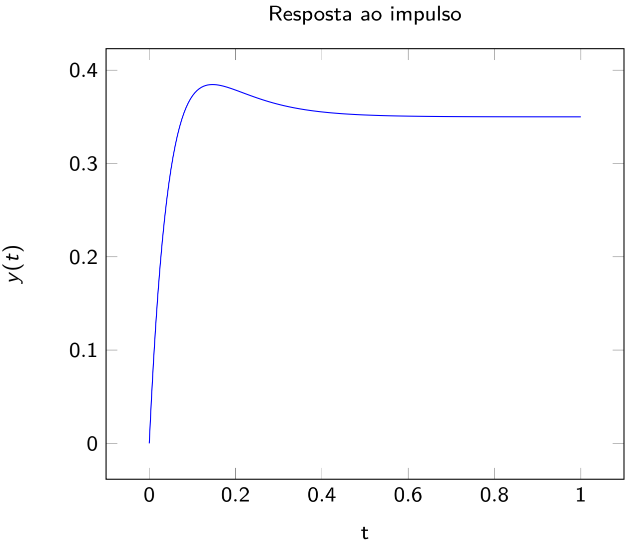
$$T(s) = \frac{10(s+7)}{s^2 + 30s + 200} = \frac{13}{s+20} - \frac{3}{s+10}$$

1. Possui dois polos reais, distintos e negativos e um zero real negativo.
2. Sistema super amortecido
3. $\omega_n = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$
4. $\zeta = \dfrac{30}{2\omega_n} = 1.06$

Portanto, a reposta ao impulso no domínio do tempo é,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{13}{20}(1 - e^{-20t}) - \frac{3}{10}(1 - e^{-10t}) \\ &= \frac{7}{20} - \frac{13}{20}e^{-20t} + \frac{3}{10}e^{-10t} \end{aligned}$$

Sistema 3



Sistema 4

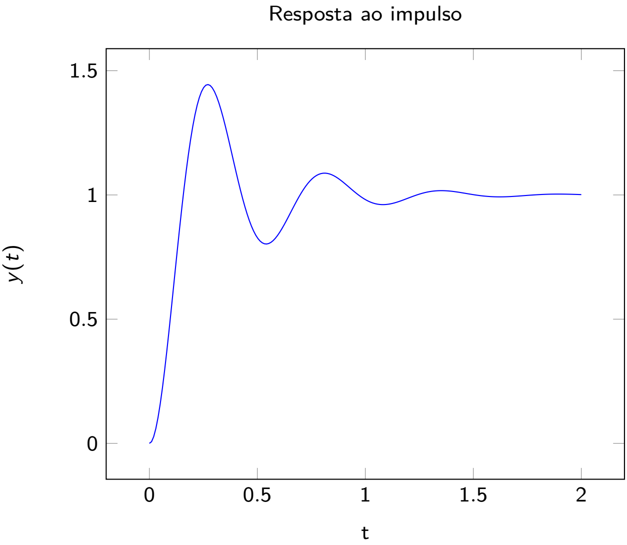
O sistema possui as seguintes características,

1. Segunda ordem,
2. Duas raízes complexas,
3. $\omega_n = 12$
4. $\zeta = 1/4$

Portanto, o sistema é sub-amortecido ($0 < \zeta < 1$), com resposta:

$$y(t) = 1 - e^{-3t}(cos(11.62t) + 0.26sin(11.62t))$$

Sistema 4



Sistema 5

O sistema possui as seguintes características,

1. Segunda ordem,
2. Duas raízes reais coincidentes negativas e um zero real negativo
3. $\omega_n = 10$
4. $\zeta = 2$

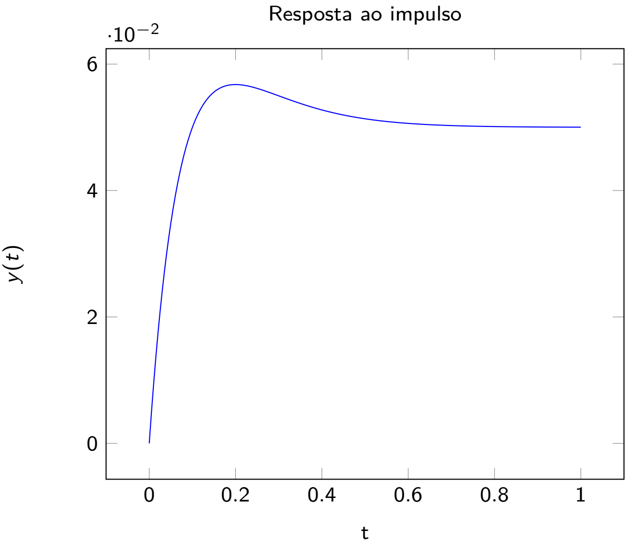
Observe que a função de transferência pode ser reescrita como,

$$T(s) = \frac{1}{10}\frac{10}{s+10} - \frac{1}{20}\frac{100}{(s+10)^2}$$

Que é um sistema composto pela soma de outros dois que conseguimos resolver via inspeção:

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-10t}\right) - \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{20}e^{-10t} - \frac{1}{2}te^{-10t}\right) \\ &= \frac{1}{20} - \frac{1}{20}e^{-10t} + \frac{1}{2}te^{-10t} \end{aligned}$$

Sistema 5



Exercício 2

Para cada sistema abaixo, encontre ζ, ω_n, T_s, T_p, T_r e $\%OS$.

$$T(s) = \frac{16}{s^2 + 3s + 16}$$

$$T(s) = \frac{0.04}{s^2 + 0.02 + 0.04}$$

Sistema 1

Por inspeção,

$$\omega_n^2 = 16 \rightarrow \omega_n = 4$$
$$2\zeta\omega_n = 3 \rightarrow \zeta = \frac{3}{8}$$

Portanto, o sistema é sub-amortecido, como já esperávamos. Além disso,

$$T_p = \frac{\pi}{4\sqrt{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2}} = 0.847s \qquad \%OS = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 = 28.06\%$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2.67s \qquad T_r = \frac{1.463}{\omega_n} = 0.366s$$

Sistema 2

Por inspeção,

$$\omega_n^2 = 0.04 \rightarrow \omega_n = 0.2$$
$$2\zeta\omega_n = 0.02 \rightarrow \zeta = 0.05$$

Portanto, o sistema é sub-amortecido, como já esperávamos. Além disso,

$$T_p = \frac{\pi}{4\sqrt{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2}} = 15.72s \qquad \%OS = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 = 85.45\%$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 400s \qquad T_r = \frac{1.104}{\omega_n} = 5.52s$$

Exercício 3

Encontre a função de transferência e os polos do sistema representado em Espaço de Estados abaixo,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Exercício 3

Os polos do sistema são dados pelos autovalores da matriz de estados, **A**, que são calculados através do polinômio característico:

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) = det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -4 & -7 & \lambda + 5 \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 5) + 16 + 28 - 8\lambda - 7(\lambda - 3) - 8(\lambda + 5) \\
&= (\lambda^2 - 3\lambda)(\lambda + 5) + 44 - 8\lambda - 7\lambda + 21 - 8\lambda - 40 \\
&= \lambda^3 + 2\lambda^2 - 15\lambda + 25 - 23\lambda \\
&= \lambda^3 + 2\lambda^2 - 38\lambda + 25 = (\lambda + 7.5062)(\lambda - 4.8144)(\lambda - 0.6918)
\end{aligned}
$$

Portanto, o sistema possui três polos reais, dois positivos (4.8144 e 0.6918), e um negativo (-7.5062).

Exercício 3

Para encontrar a função de transferência do sistema, precisamos computar a matriz:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

- Começamos por calcular $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$,

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 - 38s + 25} \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} s & -1 \\ -7 & s+5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -7 & s+5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ s & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & s+5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} s-3 & -2 \\ -4 & s+5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} s-3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ -4 & -7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} s-3 & 4 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} s-3 & 4 \\ 2 & s \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^3 + 2s^2 - 38s + 25} \begin{bmatrix} s^2 + 5s - 7 & -(4s+6) & 2s - 4 \\ -(2s+6) & s^2 + 2s - 23 & s - 7 \\ 4s - 7 & 7s - 37 & s^2 - 3s - 8 \end{bmatrix}$$

Por motivos de conveniência, iremos omitir a divisão pelo polinômio característico por enquanto.

Exercício 3

Para encontrar a função de transferência do sistema, precisamos computar a matriz:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

- Então, multiplicamos à direita por **B**,

$$\begin{aligned}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} s^2 + 5s - 7 & -(4s + 6) & 2s - 4 \\ -(2s + 6) & s^2 + 2s - 23 & s - 7 \\ 4s - 7 & 7s - 37 & s^2 - 3s - 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -s^2 + 9s + 7 \\ -2s^2 + s + 31 \\ 3s^2 - 27s + 57 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Exercício 3

Para encontrar a função de transferência do sistema, precisamos computar a matriz:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

- E, finalmente, multiplicamos à esquerda por C,

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s^2 + 9s + 7 \\ -2s^2 + s + 31 \\ 3s^2 - 27s + 57 \end{bmatrix} \\ &= \frac{-12s^2 - 11s + 288}{s^3 + 2s^2 - 38s + 25}\end{aligned}$$

Exercício 4

Encontre a função de transferência de um processo de segunda ordem com 15% de Overshoot e um tempo de acomodação de 0.7s.
Supondo ganho unitário,

$$T(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Exercício 4

Encontre a função de transferência de um processo de segunda ordem com 15% de Overshoot e um tempo de acomodação de $0.7s$.
Supondo ganho unitário,

$$T(s) = \frac{122.20}{s^2 + 11.428s + 122.20}$$

pois,

1. $\%OS = 15\%$, então,

$$\zeta = \frac{-ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + ln(\%OS/100)^2}} = 0.517$$

2. $T_s = 0.7$, então,

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta T_s} = 11.054$$

Exercício 6

Para o sistema com realimentação unitária abaixo, encontre a faixa de valores de K para os quais o sistema resultante tenha apenas dois polos no lado direito do plano s.

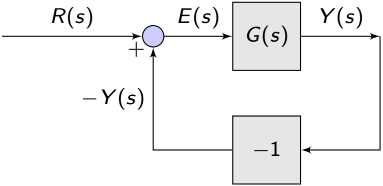


Figura: Diagrama de feedback.

Em que $G(s) = \dfrac{K(s+2)}{(s^2+1)(s+4)(s-1)}$.

Exercício 6

Sabemos que,

1. $E(s) = R(s) - Y(s)$
2. $Y(s) = G(s)E(s)$

Portanto, $Y(s) = G(s)R(s) - G(s)Y(s)$, de onde,

$$
\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1+G(s)} \\
&= \frac{K(s+2)}{(s^2+1)(s+4)(s-1)} \frac{1}{1+\dfrac{K(s+2)}{(s^2+1)(s+4)(s-1)}} \\
&= \frac{K(s+2)}{K(s+2)+(s^2+1)(s+4)(s-1)} \\
&= \frac{K(s+2)}{s^4+3s^3-3s^2+(3+K)s+2K-4}
\end{aligned}
$$

Ou seja, podemos utilizar K para manipular o polinômio do denominador (e portanto, a posição dos polos).

Exercício 6

Obtendo Y/R, nós construímos a tabela de Routh,

s^4	1	3	2K-4
s^3	3	3+K	0
s^2	$2 - K/3$	$(2K-4)$	0
s^1	$3(2K-4) - (3+K)(2-K/3)$	0	0
s^0	$3(2K-4) - (3+K)(2-K/3)$	0	0

Então, aplicamos o critério de Routh-Hurwitz: "O número de raízes do polinômio característico de Y/R, no lado direito do plano complexo é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna."

- Sendo assim, a primeira mudança de sinal se dá se $2 - K/3 < 0 \rightarrow K > 6$.

Exercício 6

Obtendo Y/R, nós construímos a tabela de Routh,

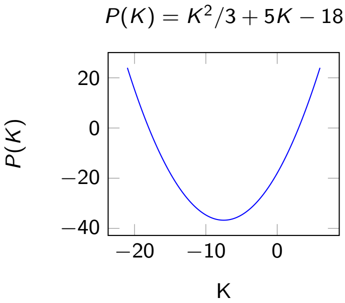
s^4	1	3	2K-4
s^3	3	3+K	0
s^2	$2 - K/3$	$(2K - 4)$	0
s^1	$3(2K - 4) - (3 + K)(2 - K/3)$	0	0
s^0	$3(2K - 4) - (3 + K)(2 - K/3)$	0	0

Então, aplicamos o critério de Routh-Hurwitz: "O número de raízes do polinômio característico de Y/R, no lado direito do plano complexo é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna."

- A segunda mudança de sinal se dá quando $3(2K - 4) - (3 + K)(2 - K/3) = K^2/3 + 5K - 18 > 0$.

Exercício 6

O polinômio $P(K) = K^2/3 + 5K - 18$ possui duas concavidade positiva, e duas raízes,



- $K_1 = -18, K_2 = 3$

Portanto, $P(K) > 0$ se e só se $K < -18$, ou $K > 3$. Note que para $K > 6$, temos duas trocas de sinal.