Aula 17: Resolução de exercícios

Eduardo Fernandes Montesuma

Universidade Federal do Ceará

edumontesuma@gmail.com

13 de maio de 2018

Outline

Introdução

Na aula de hoje nós iremos,

- Resolver exercícios para a prova,
- Tirar dúvidas sobre os conceitos ensinados em aula,
- Tirar dúvidas sobre Matlab/LaTeX

Processos de 1ª Ordem

Processos de 1ª Ordem têm origem em equações diferenciais de 1ª Ordem,

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) + ay(t) &= au(t) \\
\frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{a}{s+a}
\end{aligned}
$$

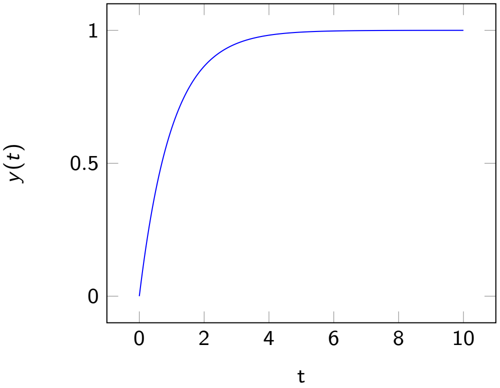
A resposta ao degrau se dá quando $U(s) = \frac{1}{s}$. Portanto,

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{a}{s(s+a)} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}
\end{aligned}
$$

Ou seja, $y(t) = 1 - e^{-at}$

Processos de 1ª Ordem

Resposta ao degrau unitário de um sistema de 1ª Ordem



Como $\lim_{t \to \infty} y(t) = 1$, dizemos que o sistema tem ganho unitário.

Caracterização de sistemas de 1ª ordem

Dada uma função de transferência qualquer,

$$T(s) = \frac{K}{s+a}$$

Definimos os seguintes parâmetros,

- $K_{gain} = \frac{K}{a}$ é chamado de ganho do sistema. Ele determina o valor de $y(\infty)$.
- $\tau = |1/a|$, é chamado de constante de tempo. Ele dá uma ideia sobre a velocidade de crescimento/decrescimento da resposta.

Caracterização de sistemas de 1ª ordem

Dada uma função de transferência qualquer,

$$T(s) = \frac{K}{s + a}$$

Definimos as seguintes informações,

- O tempo de subida, T_r, dado pelo tempo levado para a resposta ir de 0.1 até do seu valor final.
- O tempo de acomodação, T_s, dado pelo tempo levado pela resposta para ficar entre 2% do valor final.

Caracterização de sistemas de 1ª ordem

Podemos provar as seguintes relações,

- $T_r = 2.2/a$,

Para $y(t_2) = 0.9$ e $y(t_1) = 0.1$:

$$\begin{aligned} y(t_2) &= 0.9 & \qquad y(t_1) &= 0.1 \\ 1 - e^{-at} &= 0.9 & 1 - e^{-at} &= 0.1 \\ e^{-at} &= 0.9 & e^{-at} &= 0.1 \\ t &= 2.3026/a & t &= 0.1054/a \end{aligned}$$

Portanto $T_r \approx 2.2/a$.

- $T_s = 4/a$

Para $y(T_s) = 0.98$

$$e^{-at} = 0.02$$

$$t = \frac{ln(0.02)}{-a} \approx \frac{4}{a}$$

Processos de 1ª Ordem

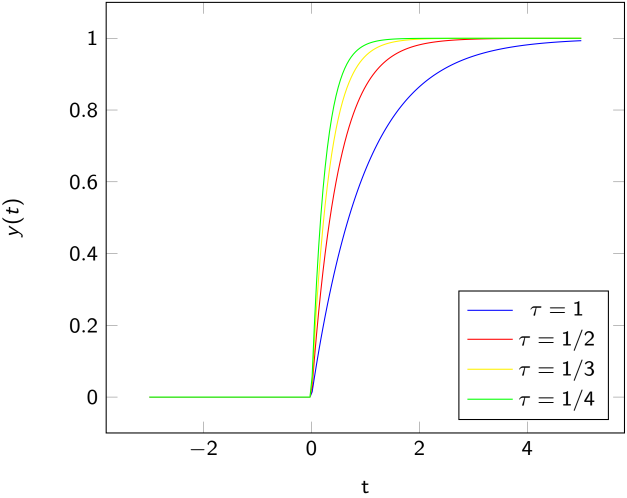


Figura: Respostas em razão da variação da constante de tempo.

Processos de 2ª Ordem

Assim como os processos de 1ª ordem, os de 2ª também têm origem em equações diferenciais,

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = bu(t)$$
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

Para entender a resposta do sistema, precisamos calcular os polos,

- $s_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$
- $s_2 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

Processos de 2ª ordem

Assim como os processos de 1ª ordem, os de 2ª também têm origem em equações diferenciais,

$$\ddot{y} + b\dot{y} + cy = bu(t)$$
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

Nós reescrevemos nossa função de transferência em função de dois parâmetros,

- A frequência natural do sistema, $\omega_n = \sqrt{b}$.
- A constante de amortecimento, $\zeta = 2a/\omega_n$.

ou seja,

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Resposta Não-amortecida

Fazendo $\zeta = 0$, nossa função de transferência se torna:

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \\ Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \end{aligned}$$

De tal forma que,

$$y(t) = 1 - cos(\omega_n t)$$

Resposta não-amortecida

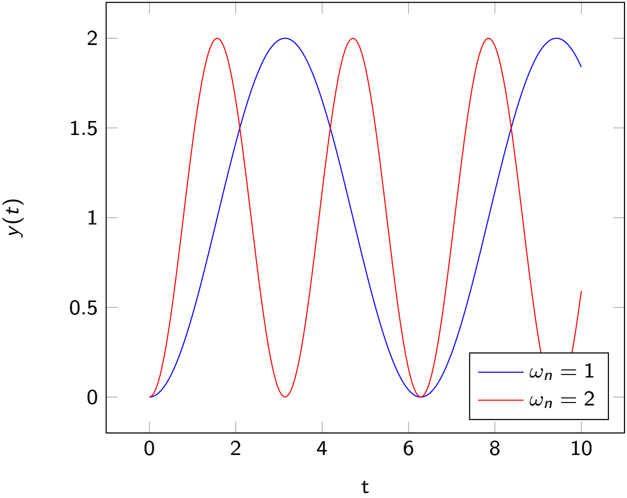


Figura: Resposta ao degrau de um sistema não-amortecido

Resposta sub-amortecida

Considerando que $0 < \zeta < 1$, o polinômio característico de $T(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ possui duas raízes complexas conjugadas, $-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ e $-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, portanto,

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{w_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + (\zeta\omega_n)^2 - \zeta^2\omega_n^2 + \omega_n^2} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \\
&= \frac{1}{s} - \left(\frac{s - (-\zeta\omega_n)}{(s - (-\zeta\omega_n))^2 + (\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2} + \frac{\zeta\omega_n}{(s - (-\zeta\omega_n))^2 + (\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2} \right) \\
&= \frac{1}{s} - \left(\frac{s - (-\zeta\omega_n)}{(s - (-\zeta\omega_n))^2 + (\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{(s - (-\zeta\omega_n))^2 + (\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n)^2} \right)
\end{aligned}
$$

Resposta sub-amortecida

Considerando que $0 < \zeta < 1$, o polinômio característico de $T(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ possui duas raízes complexas conjugadas, $-\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ e $-\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, portanto,
Usando $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$,

$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} sin(\omega_d t)\right)$$

Nesta resposta, a influência dos parâmetros ζ e ω_n fica mais clara.

Resposta sub-amortecida

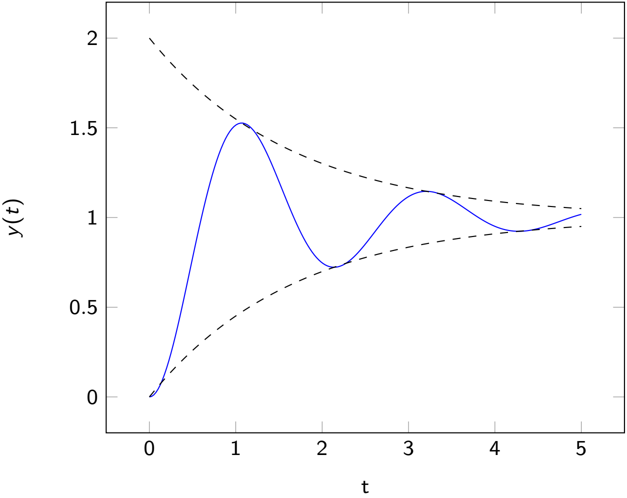


Figura: Resposta no domínio do tempo, envelopada por exponenciais.

Resposta sub-amortecida

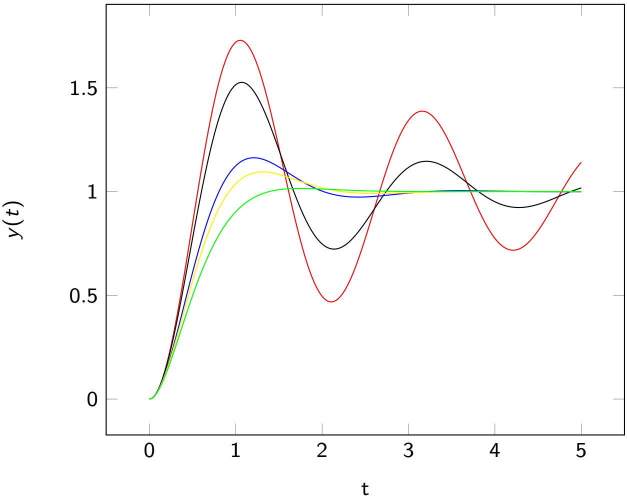


Figura: Resposta ao degrau para vários valores de ζ.

Especificações no domínio do tempo

Assim como para sistemas de 1ª ordem, os de 2ª também possuem informações úteis,

- O tempo de pico, T_p, definido como o tempo no qual $y(t)$ é máximo,
- O máximo sobressinal, $\%OS$, definido como,

$$\%OS = \frac{y(T_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$$

- O tempo de acomodação, definido como o tempo necessário para que o sistema esteja numa faixa de 2% do valor final,
- O tempo de subida, definido como o tempo necessário para o sistema ir de 10% à 90% do seu valor final.

Tempo de pico

Começamos por deduzir uma fórmula para a derivada de y,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\dot{y}] &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\
&= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} \\
\dot{y}(t) &= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t)
\end{aligned}$$

Tempo de pico

Do cálculo, sabemos que $\dot{y}(T_p) = 0$ é uma condição necessária para que T_p seja um ponto de máximo, sendo assim, $\dot{y} = 0$ implica em,

$$
\begin{aligned}
\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t &= n\pi \\
T_p &= \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}
\end{aligned}
$$

Que é a fórmula para o tempo de pico.

Máximo sobressinal

De posse de T_p, calculamos o máximo sobressinal,

$$\begin{aligned}\%OS &= \frac{1 + exp(-\frac{z\eta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}) - 1}{1} \times 100\\ &= exp(-\frac{z\eta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}})\end{aligned}$$

De modo equivalente,

$$\zeta = \frac{-ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + ln^2(\%OS/100)}}$$

Tempo de acomodação

No caso do tempo de acomodação, dizer que $y(t)$ está à 2% do seu valor final significa que a amplitude da oscilação de y é menor que 0.02, isto é,

$$\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.02$$

$$T_s = \frac{-ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2})}{\zeta\omega_n}$$

$$= \frac{4}{\zeta\omega_n}$$

Tempo de Subida

Ao contrário dos processos de 1ª ordem, não existe uma fórmula analítica para o tempo de subida.
Ao invés disso, podemos amostrar valores para uma relação entre $\omega_n t$ e ζ, e após isso, usar ajuste de curva para encontrar uma polinômio que melhor aproxime essa função.

ζ	$\omega_n T_r$
0.1	1.104
0.2	1.203
0.3	1.321
0.4	1.463
0.5	1.638
0.6	1.854
0.7	2.126
0.8	2.467
0.9	2.883

Exercício 1

Para cada função de transferência abaixo, encontre os polos e zeros, plote-os no plano s, e escreva a resposta ao degrau no domínio do tempo. Enuncie a natureza de cada resposta (sobre-amortecido, sub-amortecido, etc).

$$T(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$T(s) = \frac{5}{(s+3)(s+6)}$$

$$T(s) = \frac{10(s+7)}{(s+10)(s+20)}$$

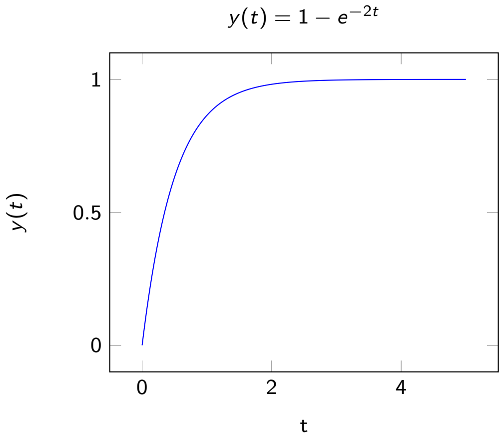
$$T(s) = \frac{20}{s^2+6s+144}$$

$$T(s) = \frac{s+5}{(s+10)^2}$$

Sistema 1

O sistema possui as seguintes características,

1. Primeira ordem,
2. Ganho unitário,
3. Constante de tempo $\tau = 1/2$



Sistema 1

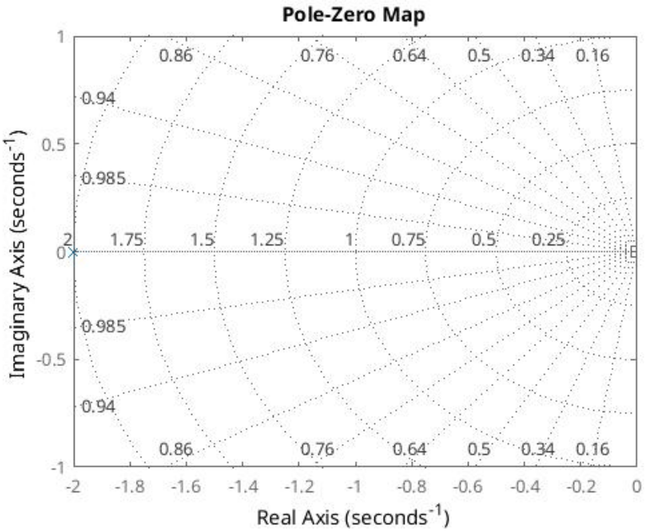


Figura: Zeros e Polos do sistema 1

Sistema 2

O sistema tem função de transferência equivalente à,

$$T(s) = \frac{5}{s^2 + 9s + 18} = \frac{5}{9}\frac{3}{s+3} - \frac{5}{18}\frac{6}{s+6}$$

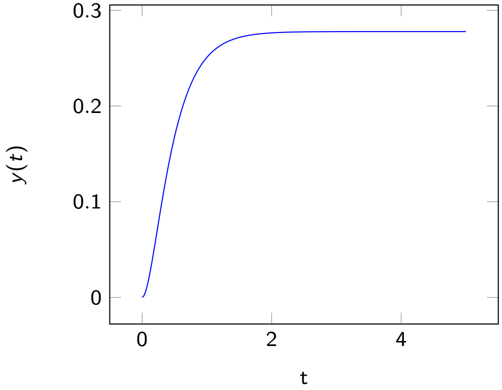
portanto,

1. Dois polos reais distintos: -3, -6.
2. $\omega_n = 3\sqrt{2} \approx 4.242$
3. $\zeta = \dfrac{9}{2\omega_n} \approx 1.06$
4. $K_{gain} = \dfrac{5}{18} \approx 0.277$

Sistema 2

Concluímos que o sistema tem resposta super amortecida ($\zeta > 1$). Por inspeção, a resposta ao degrau no domínio do tempo é,

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \frac{5}{9}\left(1 - e^{-3t}\right) - \frac{5}{18}\left(1 - e^{-6t}\right) \\
&= \frac{5}{18} - \frac{5}{9}e^{-3t} + \frac{5}{18}e^{-6t}
\end{aligned}
$$



Sistema 2

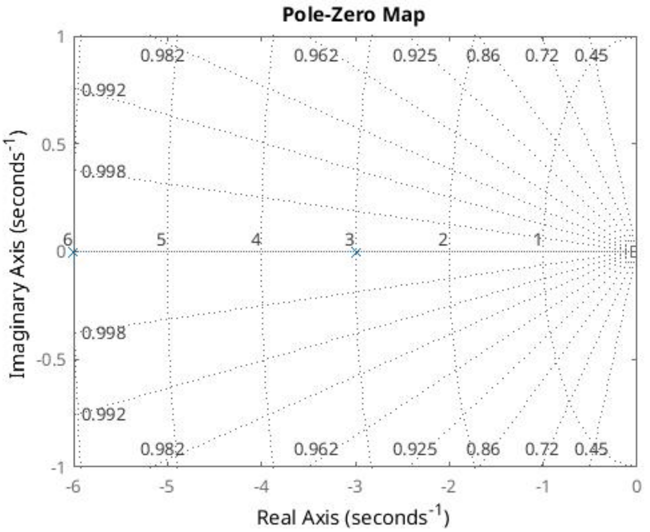


Figura: Zeros e Polos do sistema 2

Sistema 3

O sistema é equivalente à,

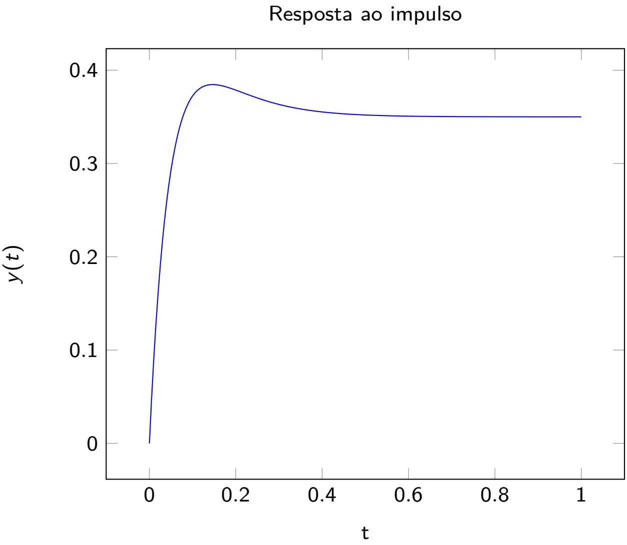
$$T(s) = \frac{10(s+7)}{s^2 + 30s + 200} = \frac{13}{s+20} - \frac{3}{s+10}$$

1. Possui dois polos reais, distintos e negativos e um zero real negativo.
2. Sistema super amortecido
3. $\omega_n = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$
4. $\zeta = \dfrac{30}{2\omega_n} = 1.06$

Portanto, a reposta ao impulso no domínio do tempo é,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{13}{20}(1 - e^{-20t}) - \frac{3}{10}(1 - e^{-10t}) \\ &= \frac{7}{20} - \frac{13}{20}e^{-20t} + \frac{3}{10}e^{-10t} \end{aligned}$$

Sistema 3



Sistema 3

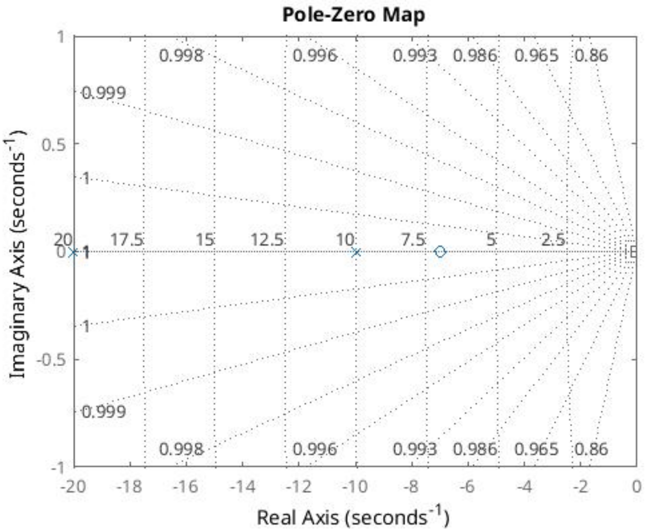


Figura: Zeros e Polos do sistema 3

Sistema 4

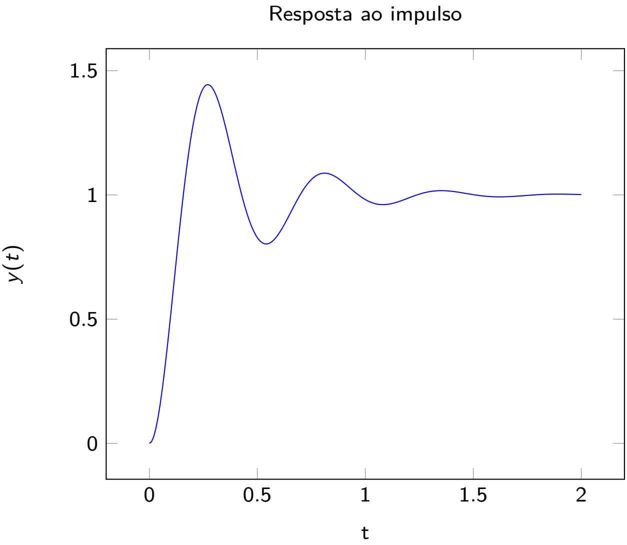
O sistema possui as seguintes características,

1. Segunda ordem,
2. Duas raízes complexas,
3. $\omega_n = 12$
4. $\zeta = 1/4$

Portanto, o sistema é sub-amortecido $(0 < \zeta < 1)$, com resposta:

$$y(t) = 1 - e^{-3t}(cos(11.62t) + 0.26sin(11.62t))$$

Sistema 4



Sistema 1

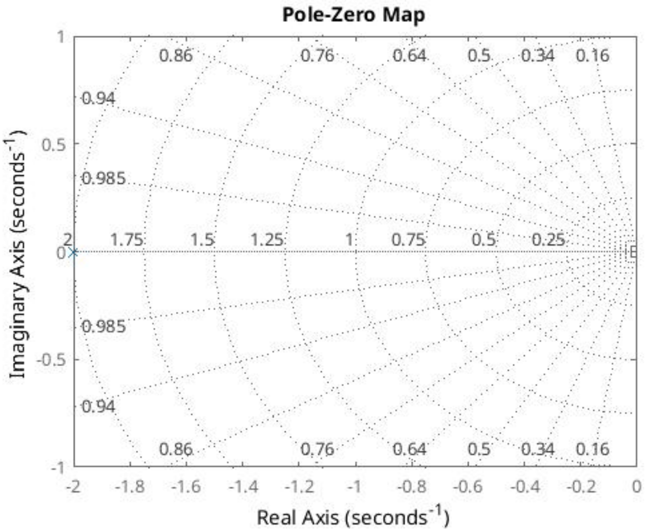


Figura: Zeros e Polos do sistema 1

Sistema 5

O sistema possui as seguintes características,

1. Segunda ordem,
2. Duas raízes reais coincidentes negativas e um zero real negativo
3. $\omega_n = 10$
4. $\zeta = 2$

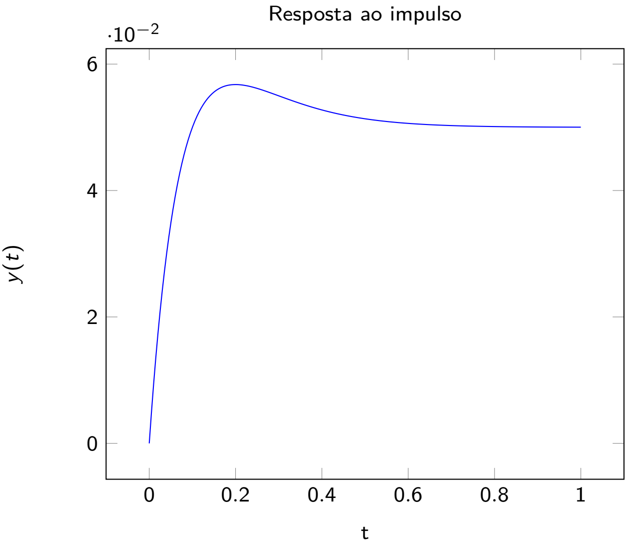
Observe que a função de transferência pode ser reescrita como,

$$T(s) = \frac{1}{10}\frac{10}{s+10} - \frac{1}{20}\frac{100}{(s+10)^2}$$

Que é um sistema composto pela soma de outros dois que conseguimos resolver via inspeção:

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-10t}\right) - \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{20}e^{-10t} - \frac{1}{2}te^{-10t}\right) \\ &= \frac{1}{20} - \frac{1}{20}e^{-10t} + \frac{1}{2}te^{-10t} \end{aligned}$$

Sistema 5



Sistema 1

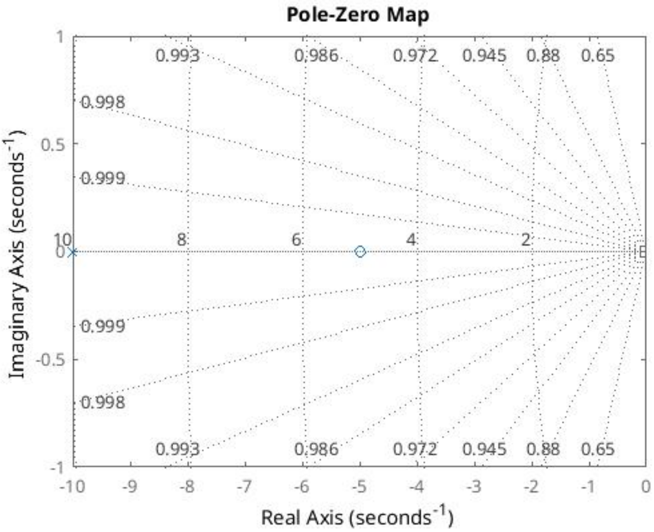


Figura: Zeros e Polos do sistema 5

Exercício 2

Para cada sistema abaixo, encontre ζ, ω_n, T_s, T_p, T_r e $\%OS$.

$$T(s) = \frac{16}{s^2 + 3s + 16}$$

$$T(s) = \frac{0.04}{s^2 + 0.02 + 0.04}$$

Sistema 1

Por inspeção,

$$\omega_n^2 = 16 \rightarrow \omega_n = 4$$
$$2\zeta\omega_n = 3 \rightarrow \zeta = \frac{3}{8}$$

Portanto, o sistema é sub-amortecido, como já esperávamos. Além disso,

$$T_p = \frac{\pi}{4\sqrt{1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2}} = 0.847s \qquad \%OS = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 = 28.06\%$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2.67s \qquad T_r = \frac{1.463}{\omega_n} = 0.366s$$

Sistema 2

Por inspeção,

$$\omega_n^2 = 0.04 \rightarrow \omega_n = 0.2$$
$$2\zeta\omega_n = 0.02 \rightarrow \zeta = 0.05$$

Portanto, o sistema é sub-amortecido, como já esperávamos. Além disso,

$$T_p = \frac{\pi}{4\sqrt{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2}} = 15.72s \qquad \%OS = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100 = 85.45\%$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 400s \qquad T_r = \frac{1.104}{\omega_n} = 5.52s$$