Aula 18: Resolução de exercícios

Eduardo Fernandes Montesuma

Universidade Federal do Ceará

edumontesuma@gmail.com

13 de maio de 2018

Outline

Introdução

Na aula de hoje nós iremos,

- Resolver exercícios para a prova,
- Tirar dúvidas sobre os conceitos ensinados em aula,
- Tirar dúvidas sobre Matlab/LaTeX

Processos com zeros na função de transferência

Zeros e Polos

Dada uma função de transferência arbitrária,

$$G(s) = \frac{(s - z_1)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)\cdots(s - p_n)}$$

Os números $p_i \in \mathbb{R}$ e $z_j \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, os polos e zeros de G.

Atraso

Se $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$, então $G(s)e^{-\theta s} = \mathcal{L}[g(t - \theta)]$. Portanto, dizemos que o termo $e^{-\theta s}$ é um termo de atraso numa função de transferência qualquer.

Aproximações

Note que,

- Segundo Taylor,

$$\begin{aligned} e^{-\theta s} &= 1 - \theta s + \frac{\theta^2 s^2}{2!} - \frac{\theta^3 s^3}{3!} + \frac{\theta^4 s^4}{4!} - \frac{\theta^5 s^5}{5!} + \ldots \\ &\approx 1 - \theta s \\ &\approx \frac{1}{1 + \theta s} \end{aligned}$$

- Segundo Padé,

$$\begin{aligned} e^{-\theta s} &= \frac{1 - (\theta/2)s + \frac{(\theta/2)^2 s^2}{2!} - \frac{(\theta/2)^3 s^3}{3!} + \frac{(\theta/2)^4 s^4}{4!} - \frac{(\theta/2)^5 s^5}{5!} + \ldots}{1 + (\theta/2)s - \frac{(\theta/2)^2 s^2}{2!} + \frac{(\theta/2)^3 s^3}{3!} - \frac{(\theta/2)^4 s^4}{4!} + \frac{(\theta/2)^5 s^5}{5!} + \ldots} \\ &\approx \frac{1 - \frac{\theta}{2} s}{1 + \frac{\theta}{2} s} \end{aligned}$$

Aproximações

Existe, portanto, uma ligação entre a presença de zeros, e o atraso: podemos aproximar zeros e polos de menor relevância à fim de obter funções de transferência aproximadas.
Sendo assim, considere

$$G(s) = \frac{K(-0.1s + 1)}{(5s + 1)(3s + 1)(0.5s + 1)}$$

Queremos comparar o sistema original, com o aproximado utilisando Taylor.

Aproximações

Utilisando as regras já discutidas,

$$-0.1s + 1 \approx e^{-0.1s} \qquad (3s+1)^{-1} \approx e^{-3s} \qquad (0.5s+1)^{-1} \approx e^{-0.5s}$$

Sendo assim, nossa função de transferência se torna,

$$G(s) = \frac{Ke^{-3.6s}}{5s+1}$$

Aproximações

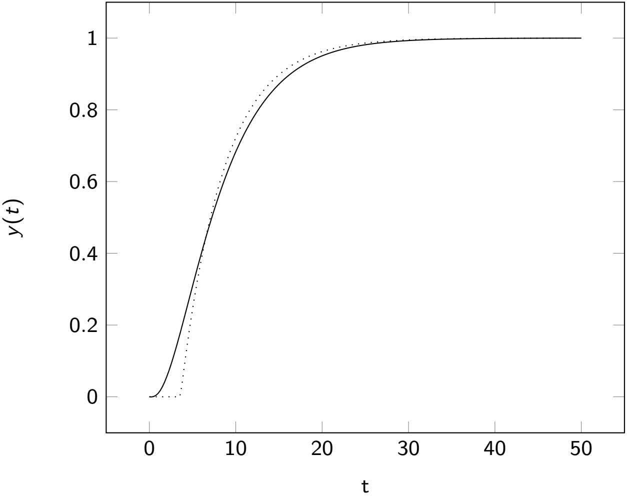


Figura: Comparação entre a função de transferência original e aproximada

Exercício 3

Encontre a função de transferência e os polos do sistema representado em Espaço de Estados abaixo,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

Exercício 3

Os polos do sistema são dados pelos autovalores da matriz de estados, **A**, que são calculados através do polinômio característico:

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) = det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda & -1 \\ -4 & -7 & \lambda + 5 \end{vmatrix} \\
&= \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 5) + 16 + 28 - 8\lambda - 7(\lambda - 3) - 8(\lambda + 5) \\
&= (\lambda^2 - 3\lambda)(\lambda + 5) + 44 - 8\lambda - 7\lambda + 21 - 8\lambda - 40 \\
&= \lambda^3 + 2\lambda^2 - 15\lambda + 25 - 23\lambda \\
&= \lambda^3 + 2\lambda^2 - 38\lambda + 25 = (\lambda + 7.5062)(\lambda - 4.8144)(\lambda - 0.6918)
\end{aligned}
$$

Portanto, o sistema possui três polos reais, dois positivos (4.8144 e 0.6918), e um negativo (-7.5062).

Exercício 3

Para encontrar a função de transferência do sistema, precisamos computar a matriz:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

- Começamos por calcular $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$,

$$
\begin{aligned}
(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{s^3 + 2s^2 - 38s + 25}
\begin{bmatrix}
+\begin{vmatrix} s & -1 \\ -7 & s+5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -7 & s+5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ s & -1 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & s+5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} s-3 & -2 \\ -4 & s+5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} s-3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\
+\begin{vmatrix} 2 & \lambda \\ -4 & -7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} s-3 & 4 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} s-3 & 4 \\ 2 & s \end{vmatrix}
\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{s^3 + 2s^2 - 38s + 25}
\begin{bmatrix}
s^2 + 5s - 7 & -(4s+6) & 2s - 4 \\
-(2s+6) & s^2 + 2s - 23 & s - 7 \\
4s - 7 & 7s - 37 & s^2 - 3s - 8
\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Por motivos de conveniência, iremos omitir a divisão pelo polinômio característico por enquanto.

Exercício 3

Para encontrar a função de transferência do sistema, precisamos computar a matriz:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

- Então, multiplicamos à direita por **B**,

$$\begin{aligned}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} s^2+5s-7 & -(4s+6) & 2s-4 \\ -(2s+6) & s^2+2s-23 & s-7 \\ 4s-7 & 7s-37 & s^2-3s-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -s^2+9s+7 \\ -2s^2+s+31 \\ 3s^2-27s+57 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Exercício 3

Para encontrar a função de transferência do sistema, precisamos computar a matriz:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

- E, finalmente, multiplicamos à esquerda por C,

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s^2 + 9s + 7 \\ -2s^2 + s + 31 \\ 3s^2 - 27s + 57 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{-12s^2 - 11s + 288}{s^3 + 2s^2 - 38s + 25}$$

Exercício 4

Encontre a função de transferência de um processo de segunda ordem com 15% de Overshoot e um tempo de acomodação de $0.7s$.
Supondo ganho unitário,

$$T(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Exercício 4

Encontre a função de transferência de um processo de segunda ordem com 15% de Overshoot e um tempo de acomodação de $0.7s$.
Supondo ganho unitário,

$$T(s) = \frac{122.20}{s^2 + 11.428s + 122.20}$$

pois,

1. $\%OS = 15\%$, então,

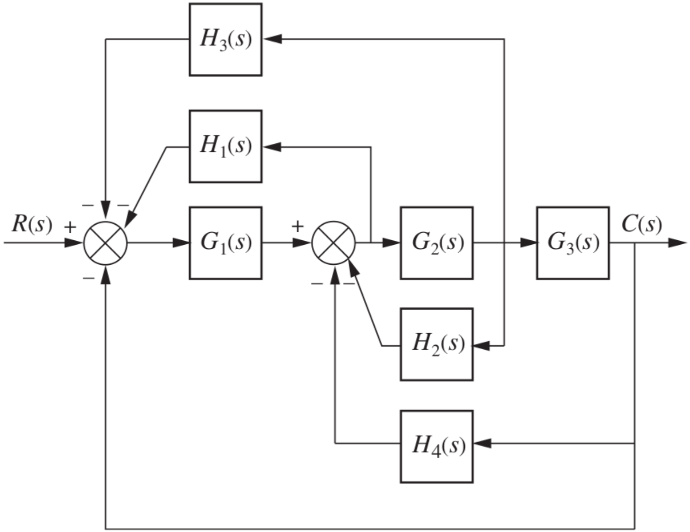
$$\zeta = \frac{-ln(\%OS/100)}{\sqrt{\pi^2 + ln(\%OS/100)^2}} = 0.517$$

2. $T_s = 0.7$, então,

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta T_s} = 11.054$$

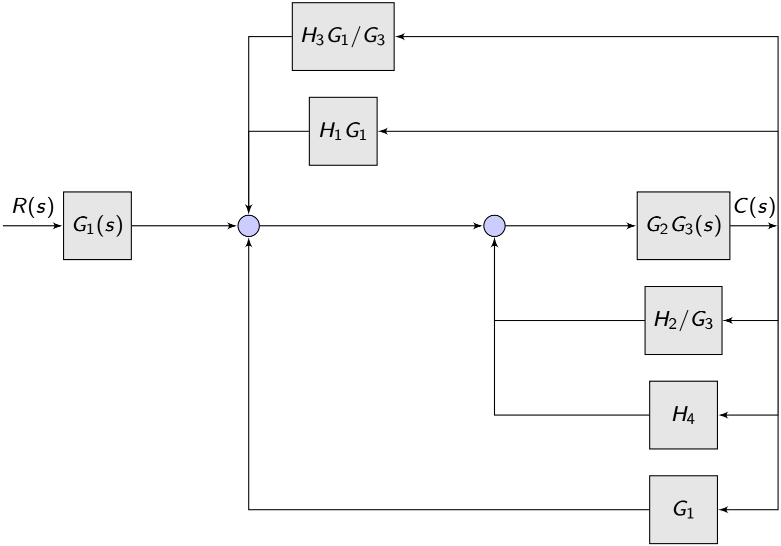
Exercício 5

Reduza o diagrama de blocos abaixo para um único bloco representando $T(s) = \dfrac{C(s)}{R(s)}$,



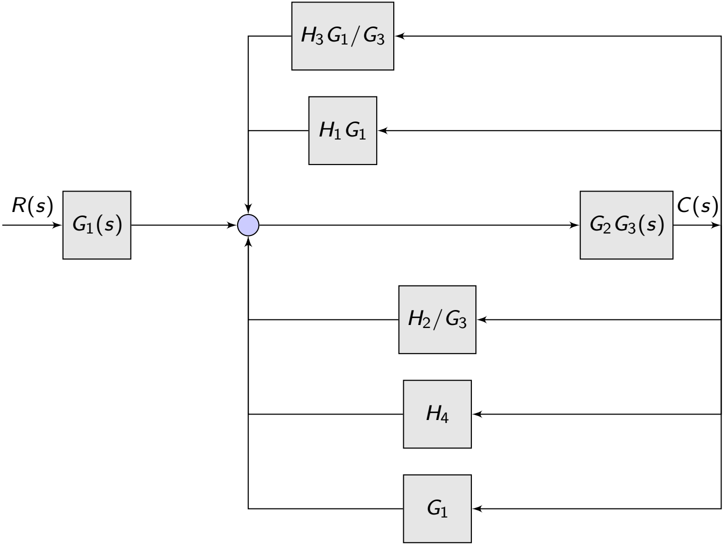
Exercício 5

Puxando-se G_3 para a esquerda, e G_1 também,



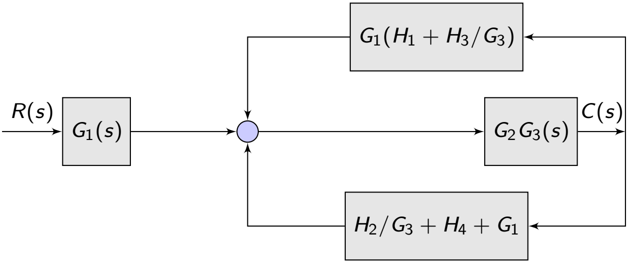
Exercício 5

Juntando-se as duas somas:



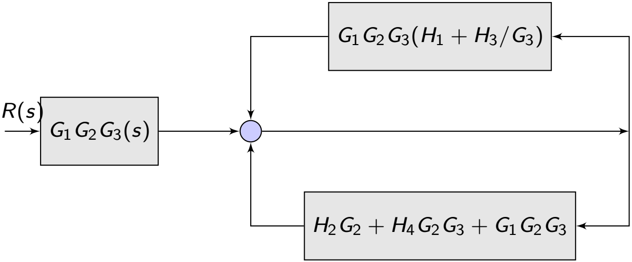
Exercício 5

Somando os blocos paralelos,



Exercício 5

Passando $G_2 G_3$ para a esquerda,



Portanto,

$$\frac{C(s)}{R(s)} \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 + H_1 G_1 G_2 G_3 + H_3 G_1 G_3 + H_4 G_1 G_2 + H_2 G_2}$$

Exercício 6

Para o sistema com realimentação unitária abaixo, encontre a faixa de valores de K para os quais o sistema resultante tenha apenas dois polos no lado direito do plano s.

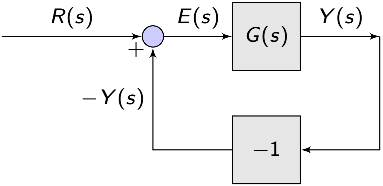


Figura: Diagrama de feedback.

Em que $G(s) = \dfrac{K(s+2)}{(s^2+1)(s+4)(s-1)}$.

Exercício 6

Sabemos que,

1. $E(s) = R(s) - Y(s)$
2. $Y(s) = G(s)E(s)$

Portanto, $Y(s) = G(s)R(s) - G(s)Y(s)$, de onde,

$$\begin{aligned}
\frac{Y(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)} \\
&= \frac{K(s+2)}{(s^2+1)(s+4)(s-1)} \frac{1}{1 + \dfrac{K(s+2)}{(s^2+1)(s+4)(s-1)}} \\
&= \frac{K(s+2)}{K(s+2) + (s^2+1)(s+4)(s-1)} \\
&= \frac{K(s+2)}{s^4 + 3s^3 - 3s^2 + (3+K)s + 2K - 4}
\end{aligned}$$

Ou seja, podemos utilizar K para manipular o polinômio do denominador (e portanto, a posição dos polos).

Exercício 6

Obtendo Y/R, nós construímos a tabela de Routh,

s^4	1	-3	2K-4
s^3	3	3+K	0
s^2	$-(4+K/3)$	$(2K-4)$	0
s^1	$3(2K-4)+(3+K)(4+K/3)$	0	0
s^0	$3(2K-4)+(3+K)(4+K/3)$	0	0

Então, aplicamos o critério de Routh-Hurwitz: "O número de raízes do polinômio característico de Y/R, no lado direito do plano complexo é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna."

- Sendo assim, a primeira mudança de sinal se dá se $-(4+K/3)<0 \rightarrow K>-12$.

Exercício 6

Obtendo Y/R, nós construímos a tabela de Routh,

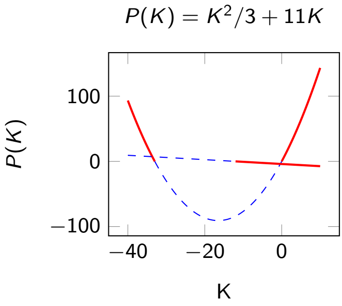
s^4	1	-3	2K-4
s^3	3	3+K	0
s^2	$-(4+K/3)$	$(2K-4)$	0
s^1	$3(2K-4)+(3+K)(4+K/3)$	0	0
s^0	$3(2K-4)+(3+K)(4+K/3)$	0	0

Então, aplicamos o critério de Routh-Hurwitz: "O número de raízes do polinômio característico de Y/R, no lado direito do plano complexo é igual ao número de mudanças de sinal na primeira coluna."

- A segunda mudança de sinal se dá quando $3(2K-4)+(3+K)(4+K/3) = K^2/3+11K > 0$.

Exercício 6

O polinômio $P(K) = K^2/3 + 11K$ possui concavidade positiva, e duas raízes,

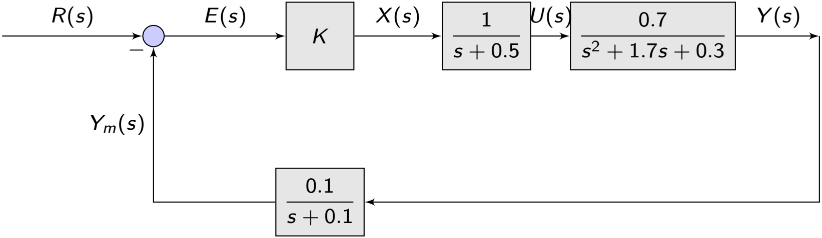


- $K_1 = -33, K_2 = 0$

Portanto, $P(K) > 0$ se e só se $K < -33$, ou $K > 0$. Note que para $K > 0$, temos duas trocas de sinal.

Exercício 7

Uma aplicação comum de sistemas de contorle é a regulação da temperatura de um processo químico:



Encontre a faixa de valores de K para os quais esse sistema é estável.

Exercício 7

Primeiro, encontramos a função de transferência do sistema:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{0.7K}{(s+0.5)(s^2+1.7s+0.3)}}{1+\dfrac{0.1\times 0.7\times K}{(s+0.5)(s^2+1.7s+0.3)}} = \frac{0.7K}{s^3+2.2s^2+1.15s+0.15+0.07K}$$

Que possui como tabela de Routh,

s^3	1	1.15	0
s^2	2.2	0.15+0.07K	0
s^1	$(2.38-0.07K)/2.2$	0	0
s^0	$0.15+0.07K$	0	0

Então, para que o sistema seja estável, duas condições precisam ser satisfeitas,

- $0.15+0.07K > 0 \rightarrow K > -2.14$
- $(2.38-0.07K)/2.2 > 0 \rightarrow K < 34$

Exercício 7

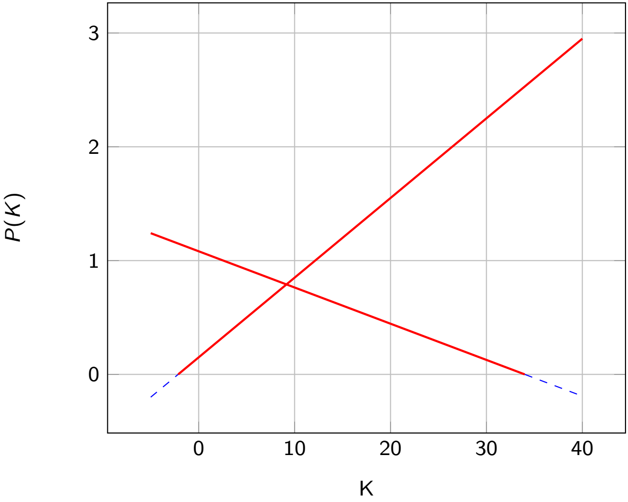
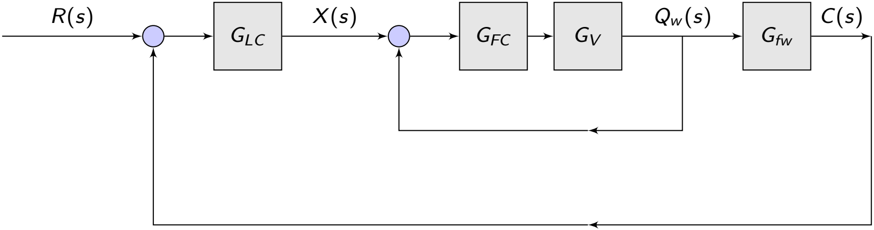


Figura: Em vermelho, região onde as funções são positivas, em azul, região onde são negativas

Exercício 8

A planta abaixo exibe um diagrama de blocos de um sistema de controle em cascata, usado para controlar o nível de água em um gerador de vapor numa usina nuclear,



- Nesse sistema, G_{LC} é chamado de controlador mestre, enquanto G_{FC} é chamado de controlador escravo.
- O processo G_{fw} é modelado utilisando um modelo First Order Plus Time Delay(FOPTD),
- G_V é um processo de primeira ordem,
- G_{LC} e G_{FC} são controladores proporcionais-derivativos (PD).

Exercício 8

Utilisando as informações dadas no problema:

$$G_{fw} = \frac{K_1 e^{-\theta_1 s}}{s(\tau_1 s + 1)}$$

onde,

- K_1 é o ganho da função de transferência, no caso, igual à 2
- θ_1 é o termo de atraso, no caso, igual à 2
- τ_1 é a constante de tempo, no caso, igual à 25.

Utilisando uma aproximação de Taylor de 2ª ordem,

$$e^{-2s} \approx \frac{1}{1 + 2s + 2s^2}$$

$$G_{fw} = \frac{2e^{-2s}}{s(25s + 1)} = \frac{2}{s(25s + 1)(2s^2 + 2s + 1)}$$

Exercício 8

Além disso,

$$G_V = \frac{K_V}{(\tau_V s + 1)} = \frac{1}{3s + 1}$$

E

$$G_{FC} = K_{P_{FC}} + K_{D_{FC}} = 0.5 + 2s$$
$$G_{LC} = K_{P_{LC}} + K_{D_{LC}} = 0.5 + Ks$$

Queremos encontrar o intervalo de valores de K para os quais o sistema dado é estável.

Exercício 8

Primeiro, note que o loop interno pode ser simplificado como:

$$\frac{Q_w}{X} = \frac{G_{FC} G_V}{1 + G_{FC} G_V}$$

Aplicando o mesmo para a malha externa,

$$\begin{aligned}
\frac{C}{R} &= \frac{\dfrac{G_{LC} G_{FC} G_V G_{fw}}{1 + G_{FC} G_V}}{1 + \dfrac{G_{LC} G_{FC} G_V G_{fw}}{1 + G_{FC} G_V}} \\
&= \frac{G_{LC} G_{FC} G_V G_{fw}}{1 + G_{FC} G_V} \frac{1 + G_{FC} G_V}{1 + G_{FC} G_V + G_{LC} G_{FC} G_V G_{fw}} \\
&= \frac{G_{LC} G_{FC} G_V G_{fw}}{1 + G_{FC} G_V + G_{LC} G_{FC} G_V G_{fw}}
\end{aligned}$$

Exercício 8

Note que,

$$G_{FC}G_V = \frac{0.5 + 2s}{3s + 1}$$

E que,

$$G_{LC}G_{FC}G_V G_{fw} = \frac{0.5 + (2 + K)s + 4Ks^2}{s(3s + 1)(25s + 1)(2s^2 + 2s + 1)}$$

Portanto, $1 + G_{FC}G_V + G_{LC}G_{FC}G_V G_{fw}$ vale,

$$\frac{s(25s + 1)(2s^2 + 2s + 1)(3s + 1 + 0.5 + 2s) + 0.5 + (2 + K)s + 4Ks^2}{s(3s + 1)(25s + 1)(2s^2 + 2s + 1)}$$
$$\frac{250s^5 + 335s^4 + 213s^3 + (45.5 + 4K)s^2 + (3.5 + K)s + 0.5}{s(3s + 1)(25s + 1)(2s^2 + 2s + 1)}$$

Exercício 8

Isso implica que,

$$\frac{C}{R} = \frac{s(3s+1)(25s+1)(2s^2+2s+1)G_{LC}G_{FC}G_V G_{fw}}{250s^5+335s^4+213s^3+(45.5+4K)s^2+(3.5+K)s+0.5}$$
$$= \frac{2Ks^2+(1+K/2)s+0.25}{250s^5+335s^4+213s^3+(45.5+4K)s^2+(3.5+K)s+0.5}$$

Construindo, agora, a tabela de Routh para o denominador da função de transferência acima,

s^5	250	213	3.5+K	0
s^4	335	45.5+4K	0.5	0
s^3	a_1	a_2	0	0
s^2	b_1	b_2	0	0
s^1	c_1	0	0	0
s^0	d_1	0	0	0

Exercício 8

Calculando os elementos,

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 250 & 213 \\ 335 & 45.5+4K \end{vmatrix}}{-335} \qquad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 250 & 3.5+K \\ 335 & 0.5 \end{vmatrix}}{-335}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 335 & 45.5+4K \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{-a_1} \qquad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 335 & 0.5 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix}}{-a_1}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1} \qquad d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{-c_1}$$

De modo que,

$$a_1 = \frac{335 \times 213 - 250 \times (45.5+4K)}{335} \qquad a_2 = \frac{335 \times (3.5+K) - 125}{335}$$

$$a_1 = 179.04 - 2.985K \qquad a_2 = 3.126 + K$$

Exercício 8

Calculando os elementos,

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 250 & 213 \\ 335 & 45.5 + 4K \end{vmatrix}}{-335} \qquad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 250 & 3.5 + K \\ 335 & 0.5 \end{vmatrix}}{-335}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 335 & 45.5 + 4K \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{-a_1} \qquad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 335 & 0.5 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix}}{-a_1}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1} \qquad d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{-c_1}$$

De modo que,

$$b_1 = \frac{(45.5 + 4K)(179.04 - 2.985K) - 335(3.126 + K)}{179.04 - 2.985K} \qquad b_2 = 0.5$$

$$b_1 = \frac{-11.94(K - 36.7338)(K + 16.18)}{179.04 - 2.985K}$$

Exercício 8

Calculando os elementos,

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 250 & 213 \\ 335 & 45.5 + 4K \end{vmatrix}}{-335} \qquad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 250 & 3.5 + K \\ 335 & 0.5 \end{vmatrix}}{-335}$$

$$b_1 = \frac{\begin{vmatrix} 335 & 45.5 + 4K \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}}{-a_1} \qquad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} 335 & 0.5 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix}}{-a_1}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1} \qquad d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{-c_1}$$

De modo que,

$$c_1 = \frac{\dfrac{-11.94(K - 36.7338)(K + 16.18)(K + 3.126)}{179.04 - 2.985K} - \dfrac{(179.04 - 2.985K)^2}{2(179.04 - 2.985K)}}{\dfrac{-11.94(K - 36.7338)(K + 16.18)}{179.04 - 2.985K}}$$

$$c_1 = \frac{11.94(K - 36.7338)(K + 16.18)(K + 3.126) + (4.455K^2 - 534.434K + 16027.7)}{11.94(K - 36.7338)(K + 16.18)}$$

Exercício 8

Finalmente, expandindo c_1,

$$c_1 = \frac{11.94K^3 - 203.633K^2 - 8938.17K - 6159.19}{11.94K^2 - 245.415K - 7096.61}$$

Precisamos analisar o sinal de a_1, b_1, c_1: todos precisam ser positivos.

- $a_1 > 0 \rightarrow P_1(K) = 179.04 - 2.985K > 0 \rightarrow K < 59.97$
- $b_1 > 0 \rightarrow P_2(K) = (K - 36.734)(K + 16.18) < 0 \rightarrow -16.18 < K < 36.734$
- $c_1 > 0 \rightarrow P_3(K) = 11.94K^3 - 203.633K^2 - 8938.17K - 6159.19 < 0 \rightarrow (K < -18.835) \vee (-0.7471 < K < 36.637)$

Assumindo $K > 0$, a faixa de valores de K para os quais o sistema é estável é,

$$0 < K < 36.637$$

Exercício 9

Para o sistema abaixo, encontre,

- O tipo do sistema,
- A constante de erro estacionária,
- A forma de onda do input que implica em erro constante,
- O erro de estado estacionário para uma entrada unitária com forma de acordo com o item anterior.

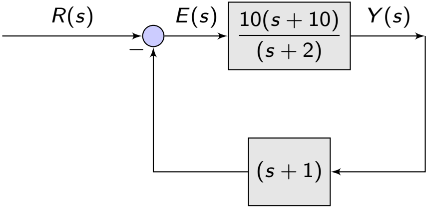


Figura: Diagrama para a questão 9.

Exercício 9

Por definição:

$$G(s) = \frac{10(s+10)}{s+2}$$

Não possui integradores, portanto, é um sistema de tipo 0. Para calcular K_p, K_v e K_a, as constantes de erro, temos,

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s) = 50$$
$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s) = 0$$
$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) = 0$$

Exercício 9

Para calcular o erro de estado estacionário, observe que,

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= G(s)E(s) \\
E(s) &= R(s) - Y(s) \\
E(s) &= R(s) - G(s)E(s) \\
E(s) &= \frac{R(s)}{1 + G(s)}
\end{aligned}
$$

E portanto,

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)}$$

Por inspeção, pode-se ver que para um degrau, $e(\infty)$ é constante, enquanto para uma rampa/parábola, o erro é infinito.

Exercício 9

Supondo, agora, um degrau unitário, $R(s) = \dfrac{1}{s}$:

$$
\begin{aligned}
e(\infty) &= \lim_{s \to 0} \frac{s(1/s)}{1 + G(s)} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G(s)} \\
&= \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)} \\
&= \frac{1}{1 + K_p} = 0.019
\end{aligned}
$$

Que é o erro de estado estacionário.

Exercício 10

Considere os seguintes sistemas representados em espaço de estados,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5 & -9 & 7 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -9 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} \end{cases}$$

Encontre o erro de estado estacionário para o degrau e rampa unitários usando o teorema do valor final, e o método de substituição de inputs.

Exercício 10 - Sistema 1

Considere uma solução de estado estacionário, $\mathbf{x}_{ss}$,

$$\mathbf{x}_{ss} = \begin{bmatrix} V_1 & \cdots & V_n \end{bmatrix}^T = \mathbf{V}$$

Como cada coordenada é constante, $\dot{\mathbf{x}}_{ss} = 0$, de modo que,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{AV} + \mathbf{B} \\ y_{ss} &= \mathbf{CV} \end{aligned}$$

Sendo $r = 1$, o degrau, temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ y_{ss} &= \mathbf{CV} = -\mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \end{aligned}$$

Exercício 10 - Sistema 1

Portanto, sendo

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1.285 & 0.1428 & -0.7142 \end{bmatrix}$$

Temos que,

$$\begin{aligned} \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1.285 & 0.1428 & -0.7142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -0.714 \end{bmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

O que implica em,

$$\begin{aligned} e(\infty) &= 1 + \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercício 10 - Sistema 1

Considere uma solução de estado estacionário, $\mathbf{x}_{ss}$,

$$\mathbf{x}_{ss} = \begin{bmatrix} V_1 t + W_1 & \cdots & V_n t + W_n \end{bmatrix}^T = \mathbf{V}t + \mathbf{W}$$

Como cada coordenada é função de t, $\dot{\mathbf{x}}_{ss} = \mathbf{V}$, de modo que,

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{A}(\mathbf{V}t + \mathbf{W}) + \mathbf{B}t \\ y_{ss} &= \mathbf{C}(\mathbf{V}t + \mathbf{W}) \end{aligned}$$

Sendo $r = t$, o degrau, temos que:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{AV} + \mathbf{B}) + \mathbf{AW}$$

de onde $\mathbf{V} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ e $\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1}V$

Exercício 10 - Sistema 1

Assim,

$$
\begin{aligned}
y_{ss} &= \mathbf{C}[-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}t + \mathbf{A}^{-1}(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})] \\
&= -\mathbf{C}[\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}t + (\mathbf{A}^{-1})^2\mathbf{B}]
\end{aligned}
$$

Calculando,

$$
\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1.285 & 0.1428 & -0.7142 \end{bmatrix} \quad (\mathbf{A}^{-1})^2 = \begin{bmatrix} -1.285 & -0.143 & 0.714 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.775 & -0.102 & -0.775 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}t = \begin{bmatrix} -1t \\ 0 \\ -0.714t \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}^{-1})^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0.714 \\ -1 \\ -0.775 \end{bmatrix}
$$

Exercício 10 - Sistema 1

Concluímos que,

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t\to\infty} t - y_{ss} \\ &= \lim_{t\to\infty} [(1 + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})t + \mathbf{C}(\mathbf{A}^{-1})^2\mathbf{B}] \end{aligned}$$

Sendo,

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1t \\ 0 \\ -0.714t \end{bmatrix} = -t \quad \mathbf{C}(\mathbf{A}^{-1})^2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.714 \\ -1 \\ -0.775 \end{bmatrix} = 0.714$$

Temos que,

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{t\to\infty} [(1-1)t + 0.714] \\ &= 0.714 \end{aligned}$$

Exercício 10 - Sistema 2

Repetindo o mesmo procedimento para o segundo sistema,

- $r = 1$

Começamos calculando a inversa de **A**

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.235 & 1.353 & -0.588 \\ -0.647 & -2.470 & 1.117 \\ 0.117 & 0.176 & -0.294 \end{bmatrix}$$

Depois, calculando **V**,

$$\mathbf{V} = -\begin{bmatrix} 0.235 & 1.353 & -0.588 \\ -0.647 & -2.470 & 1.117 \\ 0.117 & 0.176 & -0.294 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.588 \\ 3.117 \\ 0.705 \end{bmatrix}$$

Exercício 10 - Sistema 2

Repetindo o mesmo procedimento para o segundo sistema,

- r = 1

Então, calculamos y_{ss},

$$
\begin{aligned}
y_{ss} &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.235 & 1.353 & -0.588 \\ -0.647 & -2.470 & 1.117 \\ 0.117 & 0.176 & -0.294 \end{bmatrix} \\
&= 5
\end{aligned}
$$

Finalmente,

$$e(\infty) = 1 - y_{ss} = 1 - 5 = -4$$

Exercício 10 - Sistema 2

Repetindo o mesmo procedimento para o segundo sistema,

- r = t

Note que já calculamos **V**. Agora,

$$\mathbf{W} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.235 & 1.353 & -0.588 \\ -0.647 & -2.470 & 1.117 \\ 0.117 & 0.176 & -0.294 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.588 \\ 3.117 \\ 0.705 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.429 \\ 5.885 \\ -0.155 \end{bmatrix}$$

De modo que,

$$\begin{aligned} y_{ss} &= \mathbf{C}(\mathbf{V}t + \mathbf{W}) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1.588 \\ -3.117 \\ -0.705 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -3.429 \\ 5.885 \\ -0.115 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.588t - 3.429 \\ -3.117t + 5.885 \\ -0.705t - 0.115 \end{bmatrix} \\ &= 1.588t - 3.429 + 6.234t - 11.77 - 2.82t - 0.46 = 5t - 14.74 \end{aligned}$$

Exercício 10 - Sistema 2

Repetindo o mesmo procedimento para o segundo sistema,

- r = t

Podemos expressar o erro de estado estacionário como,

$$e(\infty) = \lim_{t \to \infty} t - (5t - 14.74) = -\infty$$