

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA

ANÁLISIS DEL FLUJO EN CONVECCIÓN MIXTA EN CANALES RECTANGULARES

Patricio G. Canciani
Maestrando

Dr. William I. Machaca Abregu
Director

Dr. Federico Teruel
Co-director

Miembros del Jurado

Dr. Christian P. Marcel (Instituto Balseiro – CNEA)
Dr. Pablo Garcia Martinez (Instituto Balseiro – CNEA)
Dr. César Venier (FCEIA – SIMEC)

27 de Junio de 2025

Departamento de Mecánica Computacional
(Centro Atómico Bariloche)

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A todos mis seres queridos

Índice de símbolos

Índice de contenidos

Índice de símbolos	v
Índice de contenidos	vii
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
1. Introducción	1
1.1. Introducción	2
1.2. Motivación	3
1.3. Objetivos	4
1.4. Organización del trabajo	4
2. Modelo Matemático	5
2.1. Conceptos Elementales de Turbulencia	6
2.2. Descripción del sistema bajo estudio. Ecuaciones de Gobierno y Condiciones de Borde	6
2.3. Sumario de Ecuaciones	9
2.4. Teoría de Estabilidad Lineal. Perturbaciones	10
2.5. Flujo Base	10
2.6. Análisis de Estabilidad Lineal	11
2.7. Ondas TS e Inestabilidad Secundaria	13
3. Fundamentos de Herramientas Numéricas	15
3.1. Simulaciones Numéricas Directas	16
3.2. Xcompac3D	16
3.2.1. Métodos Numéricos	16
3.2.2. Validación	16

3.3. Orr-Somerfeld - <i>Mixed Convection</i> (OSMC)	16
3.3.1. Métodos Numéricos	16
4. Validación de Herramientas Numéricas	17
4.1. Primera Parte: Xcompac3D	18
4.2. Segunda Parte: Orr-Somerfeld - <i>Mixed Convection</i>	18
5. Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollado	19
5.1. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,71$	20
5.2. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,071$	21
5.3. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,71$	22
5.4. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,071$	23
5.5. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,71$	24
5.6. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,071$	25
5.7. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,71$	26
5.8. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,071$	27
5.9. Correlation de Nusselt	28
6. Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta	29
6.1. Casos $\text{Re} = 750$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$	30
6.1.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	30
6.1.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	31
6.2. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$	32
6.2.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	32
6.2.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	34
6.3. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-4}$	36
6.3.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	36
6.3.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	38
6.4. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-3}$	39
6.4.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	39
6.4.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	40
7. Conclusiones	41
A. Budgets Dynamics Equations	43
Bibliografía	46
Agradecimientos	47

Índice de figuras

1.1.	Comparación esquemática de la transferencia de calor alrededor de una tubería caliente: (izquierda) convección forzada; (derecha) convección natural.	2
2.1.	6
5.1.	20
5.2.	20
5.3.	21
5.4.	21
5.5.	22
5.6.	22
5.7.	23
5.8.	23
5.9.	24
5.10.	24
5.11.	25
5.12.	25
5.13.	26
5.14.	26
5.15.	27
5.16.	27
5.17.	Aquí $Bo = Gr/(Re^{3,425} Pr^{0,8})$	28
6.1.	30
6.2.	30
6.3.	31
6.4.	31
6.5.	32
6.6.	33
6.7.	33

6.8.	33
6.9.	34
6.10.	34
6.11.	35
6.12. Casos C9,C10,C11	35
6.13. Casos C9,C10,C11	35
6.14.	36
6.15.	36
6.16.	37
6.17.	37
6.18.	38
6.19.	38
6.20.	39
6.21.	39
6.22.	40
6.23.	40

Índice de tablas

6.1.	30
6.2.	32
6.3.	36
6.4.	39

Resumen

Este es el resumen en castellano.

La tesis debe reflejar el trabajo desarrollado, mostrando la metodología utilizada, los resultados obtenidos y las conclusiones que pueden inferirse de dichos resultados.

Palabras clave: FLUJO TURBULENTO, CONVECCIÓN MIXTA

Abstract

This is the title in English:

The thesis must reflect the work of the student, including the chosen methodology, the results and the conclusions that those results allow us to draw.

Keywords: TURBULENT FLOW, MIXED CONVECTION

Capítulo 1

Introducción

Capítulo introductorio de la tesis

Algunas preguntas clave que deberían responderse en este capítulo:

¿Cuál es el campo general de estudio de tu tesis?

¿Qué fenómeno, problema o sistema estás investigando?

¿Por qué este tema es relevante científica o tecnológicamente?

¿Qué problema específico intenta resolver tu tesis?

¿Cuáles son los objetivos (generales y/o específicos)?

¿Qué enfoque metodológico utilizás? ¿Experimental, teórico, computacional?

¿Cómo está organizada la tesis?

1.1. Introducción

Un fluido, en virtud de su masa y velocidad, puede transportar momento. Además, en virtud de su temperatura, puede transportar calor. Estrictamente hablando, la convección es el transporte de energía debido al movimiento global de un medio. Sin embargo, en ingeniería es común utilizar el término convección de forma más amplia para describir la transferencia de calor desde una superficie hacia un fluido en movimiento cuando ambos están a diferentes temperaturas [Cengel and Ghajar, 2015, Incropera et al., 2006].

La transferencia de calor por convección puede clasificarse según la naturaleza del flujo. Hablamos de convección forzada cuando el flujo es provocado por actores externos como puede ser la acción de bombeo o un gradiente de presión; en cambio, en la convección natural, el flujo es inducido por fuerzas boyantes o de flotación, las cuales se deben a diferencias de densidad producidas por variaciones de temperatura en el propio fluido (Figura 1.1).



Figura 1.1: Comparación esquemática de la transferencia de calor alrededor de una tubería caliente: (izquierda) convección forzada; (derecha) convección natural.

Los primeros estudios sobre la transferencia de calor por convección trataron las ramas de la convección forzada y la convección natural de forma separada, sin considerar la posible interacción entre ambas. Por un lado, los experimentos de Henri Bénard (1901) marcaron un hito en la comprensión de la convección natural [Bénard, 1901]. Más tarde, Lord Rayleigh (1916) desarrolló la base teórica de la inestabilidad térmica en capas fluidas [Rayleigh, 1916]. En paralelo, en el ámbito de la convección forzada, trabajos como el de Dittus y Boelter (1930) establecieron correlaciones empíricas para la transferencia de calor en tubos [Dittus and Boelter, 1930]. No fue sino hasta mediados del siglo XX que comenzó a reconocerse que ambos mecanismos pueden coexistir en muchas configuraciones de interés práctico. Así surgió el concepto de convección mixta, donde la convección forzada y la natural actúan simultáneamente como casos

extremos de un fenómeno más general [Tao, 1960, Metais and Eckert, 1964].

Por otra parte, cuando un fluido se desplaza a través de un conducto o sobre una superficie, su movimiento puede clasificarse en dos tipos de régimen: laminar o turbulento. En el régimen laminar, el flujo es ordenado y las partículas del fluido se mueven en capas paralelas sin mezclarse entre sí. En cambio, en el régimen turbulento, el flujo es caótico, con remolinos, mezclas intensas y fluctuaciones en velocidad y presión. Un flujo se encuentra en un estado de transición desarrollado (esto es, no varía con el tiempo o con el espacio en un sentido de promedio estadístico), se dice que el flujo está en régimen de transición. Por otro lado, la evolución del flujo laminar a un flujo turbulento completamente desarrollado es llamada transición laminar-turbulenta. Esta transición puede ocurrir en el tiempo (transición laminar-turbulenta temporal) o en el espacio (transición laminar-turbulenta espacial).

La transición laminar-turbulenta es un fenómeno de gran importancia para la ingeniería y la física aplicada ya que puede ocurrir en diferentes dispositivos termohidráulicos. El cambio de un régimen a otro puede tener un impacto significativo en la transferencia de calor, especialmente en aplicaciones de convección mixta. El coeficiente de fricción (factor de Darcy) o el coeficiente de convección (número de Nusselt) se incrementan notablemente cuando se produce la transición [Incropora et al., 2006, White, 2011]. Por ejemplo, un problema importante se da en el diseño de intercambiadores de calor cuando el punto de trabajo del flujo dentro de los tubos se encuentra en régimen de transición, que es, en general, un estado intermitente en el cual parámetros tales como el coeficiente de fricción y el coeficiente de transferencia de calor tienen una gran variación [Ghajar, 2019].

Hay que poner un poco de revisión bibliográfica de análisis de estabilidad lineal, capaz ... y también de revisión numérico

1.2. Motivación

En la actualidad, muchos problemas de ingeniería presentan flujos en régimen de transición. Por citar algunos ejemplos tenemos los álabes de una turbina o los intercambiadores de calor. La mayoría de los flujos en estas condiciones son no isotérmicos [Chen and Chung, 2003].

Desde el punto de vista ingenieril, si bien éste es un régimen de trabajo no deseado por ser un estado intermitente, las características del mismo son de gran relevancia

El estudio de la transferencia de calor en la transición laminar-turbulenta es importante en diversas aplicaciones ingenieriles, como en los elementos combustibles de reactores nucleares de investigación, en intercambiadores de calor y en equipos electrónicos, entre otros. Si bien el régimen de transición no es deseado desde el punto de vista ingenieril ya que es intermitente (es decir, el flujo puede fluctuar entre los

regímenes laminar y turbulento), el estudio de la transición es relevante para poder controlar el fenómeno o anticipar, y por tanto aprovechar, su comportamiento.

La convección forzada y la convección natural son dos modos distintos de convección, que suelen combinarse y manifestarse conjuntamente en flujos ambientales y aplicaciones de ingeniería. El fenómeno de convección mixta ocurre en procesos de fabricación de silicio, refrigeración de equipos electrónicos, paneles solares térmicos, álabes de turbinas, intercambiadores de calor de diverso tipo, reactores nucleares, entre otros [Kasagi and Nishimura, 1997].

Entre las aplicaciones técnicas de mayor relevancia de la convección mixta se destaca el transporte de energía térmica. En este sentido, las necesidades energéticas actuales propician el diseño y mejora constante de los reactores nucleares utilizados para la provisión de energía eléctrica. Dentro de la nueva generación de reactores nucleares GEN-IV (<https://www.gen-4.org/>), de los seis conceptos especificados, uno corresponde a reactores tipo GFR (*Gas-cooled Fast Reactor*) que utiliza como refrigerante gas helio cuyo numero de Prandtl es $\text{Pr} \simeq 0,7$ similar al aire.

En las últimas décadas se han realizado muchos esfuerzos para desarrollar técnicas tendientes a mejorar la transferencia de calor y el desempeño global de los intercambiadores de calor. El interés en estas técnicas radica en el ahorro de la energía. Con este objetivo, se realizaron experimentos tanto en tubos como en canales, para determinar experimentalmente las correlaciones de transferencia de calor.

Por otro lado, el estudio de la transferencia de calor en canales rectangulares ha ganado interés en los últimos años, motivado por su aplicación en combustibles de núcleos de reactores de investigación, en el área de sistemas electrónicos avanzados por el sistema de refrigeración

1.3. Objetivos

1.4. Organización del trabajo

Capítulo 2

Modelo Matemático

Resumen del capítulo 2. Marco teórico (acotado) del contenido mínimo necesario para el entendimiento de los capítulos posteriores.

2.1. Conceptos Elementales de Turbulencia

Definiciones y conceptos básicos de turbulencia.

2.2. Descripción del sistema bajo estudio. Ecuaciones de Gobierno y Condiciones de Borde

Se considera el sistema representado en la Figura 2.1 donde la dinámica de un fluido viscoso e incompresible sucede entre dos paredes paralelas e infinitas ubicadas en $y = -d$ e $y = +d$. Esto constituye un canal de placas paralelas donde ambas paredes están sometidas a un flujo de calor constante q''_w .

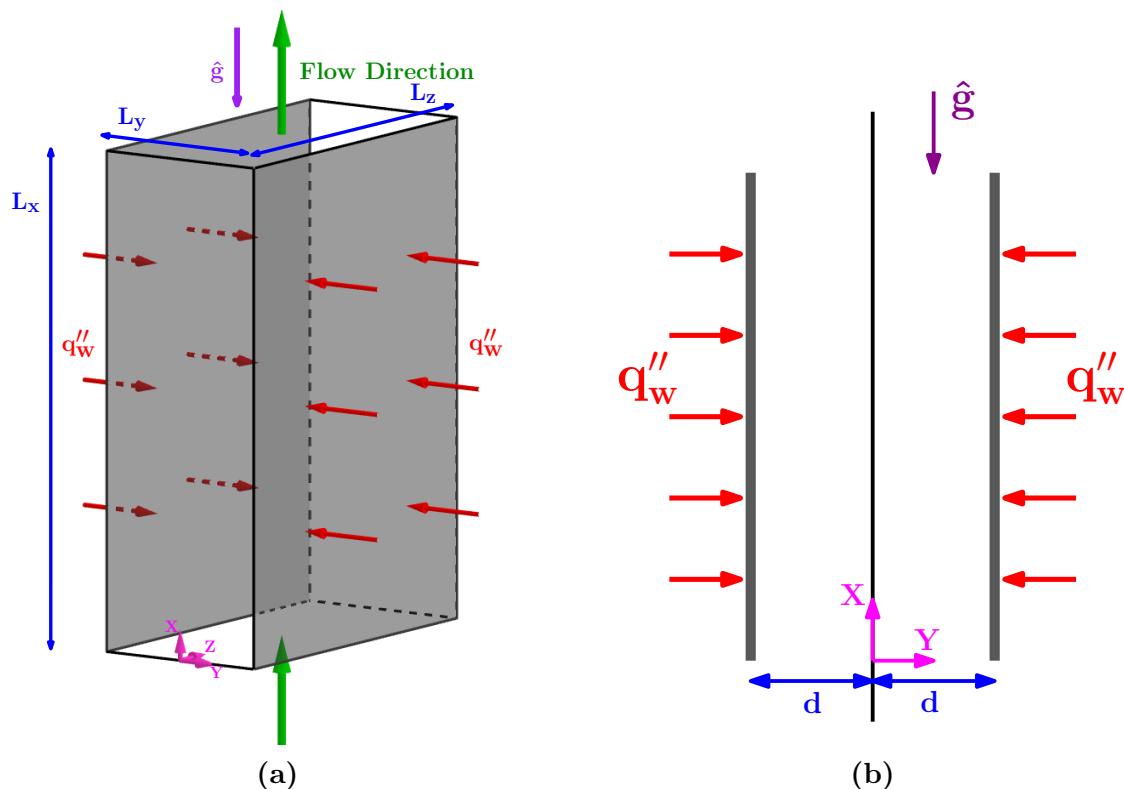


Figura 2.1

La dirección del flujo se encuentra en la dirección de la corriente (*streamwise*) paralelo al eje X y su sentido es opuesto a la aceleración de la gravedad. Las ecuaciones de gobierno corresponden a los principios de conservación de masa, momento y energía que se expresan en el cuadro 2.1.

$\nabla \cdot (\rho_o \mathbf{u}) = 0$ $\frac{\partial(\rho_o \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_o \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho(T) \mathbf{g}$ $\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T$	(2.1)
--	-------

Un sistema físico cuyas dimensiones “son muy grandes” (o infinitas) constituye un sistema ideal. En él, es posible ubicar el origen de nuestro sistema de referencia lejos de los extremos a fin de evitar efectos de bordes. Allí, el flujo se encuentra completamente desarrollado y ha alcanzado un estado estadísticamente estacionario, es decir, sus valores estadísticos, como el promedio, no varían en el tiempo. En este contexto, la condición de flujo de calor constante en las paredes se imponen como condiciones de Neumann:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\mp d} = \pm q_w'' \quad (2.2)$$

Sin embargo, debido a la limitación computacional evidente, nuestro modelo computacional no puede abarcar dicha extensión. En ese sentido, el “dominio infinito” se reemplaza con un dominio acotado de dimensiones $L_x \times L_y \times L_z$ (Figura 2.1a) adoptando condiciones de borde periódicas (PBC) en la direcciones X y Z :

$$\xi(x = 0, y, z, t) = \xi(x = L_x, y, z, t) \quad (2.3)$$

$$\xi(x, y, z = 0, t) = \xi(x, y, z = L_z, t) \quad (2.4)$$

siendo ξ un campo escalar de interés. Esto se puede interpretar como si las PBC crearan “la ilusión” de un dominio infinito, mediante la repetición de este dominio finito en el espacio.

Por otra parte, en un flujo turbulento, dado que este no es estacionario, aparecen fluctuaciones del flujo de calor y de la temperatura sobre la superficie de la pared. En este contexto, Kasagi et al. [Kasagi et al., 1992] asumen que las fluctuaciones de temperatura son pequeñas a fin de considerar que la temperatura en la pared es localmente isotérmica y que además, el flujo de calor no varía en la dirección de la corriente. Esto es equivalente a suponer que la temperatura en la pared, promediada en el tiempo y en la dirección Z , crece linealmente con x , y por lo tanto:

$$\langle T_w \rangle = \mathcal{A}x.$$

Debido al crecimiento lineal de $\langle T_w \rangle$, es requerido realizar el cambio de variable $T(x, y, z, t) = \langle T_w \rangle - \theta(x, y, z, t)$ para que siga siendo válido las condiciones de borde periódicas, esto es, $\theta(x = 0, y, z, t) = \theta(x = L_x, y, z, t)$. Ésta aproximación se encuentra en la literatura científica como *Mixed Boundary Conditions* [Straub et al., 2019]. Dicha modificación introduce un término fuente en la ecuación de conservación de energía:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \alpha \nabla^2 \theta + \mathcal{A} u_x \quad (2.5)$$

Por su parte, el término $\rho(T)\mathbf{g}$ en la ecuación de momento se reescribe empleando la aproximación de Boussinesq [Incropora et al., 2006], $\rho(T) = \rho_o [1 - \beta(T - T_R)]$:

$$\frac{\rho_o \partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_o \mathbf{u}) = -\nabla (p + \rho_o g x) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + g \rho_o \beta \theta \hat{\mathbf{g}} \quad (2.6)$$

donde se ha considerado $T_R = \langle T_w \rangle$, siendo $\hat{\mathbf{g}} = (-1, 0, 0)$.

Mediante el balance de energía en el volumen de control $L_x \times L_y \times L_z$, es posible deducir que $\mathcal{A} = \frac{q''_w}{\rho_o d \langle u_x \rangle c_p}$ siendo d el semiancho del canal. Así, empleando la velocidad en el centro del canal U_o , el semiancho d y la temperatura $T_o = \mathcal{A}d$, el sistema de ecuaciones 2.1 en su forma adimensional queda escrito como se muestra en el cuadro 2.7.

Otro detalle importante es el hecho de que el fluido de trabajo es impulsado por un caudal máscico constante. Esta cuestión se encuentra representada por el término fuente $f\hat{\mathbf{x}}$, en la ecuación de momento, donde f es una constante en el espacio y varía con el tiempo de manera que mantiene constante el caudal total.

$$\begin{aligned} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + Ri_o \theta^* \hat{\mathbf{g}} + f\hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^* \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$Re_o = \frac{\mu}{\rho_o U_o d} \quad ; \quad Pr = \frac{\nu_o}{\alpha} \quad ; \quad Ri_o = \frac{g \beta \Delta T d}{U_o^2} = \frac{Ra}{Re_o^2 Pr}$$

Asimismo, las condiciones de flujo de calor constante están expresadas en la ecuación 2.8. Sin embargo, estas condiciones pueden ser aproximadas como condiciones de Dirichlet ya que al suponer que la temperatura de las paredes es constante (fluctuaciones de temperatura iguales a cero) se obtiene: $T(x, y = 0, z, t) = T(x, y = 2d, z, t) = \langle T_w \rangle$. Su forma adimensional se expresa en la ecuación 2.9. Por otra parte, para el resto de variables (campo de presión y componentes de velocidad) se adoptan condiciones de no deslizamiento en las paredes.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=-1} &= +\frac{2}{3} Re_o Pr \\ \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=+1} &= -\frac{2}{3} Re_o Pr \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = 0, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = 2, z^*, t^*) = 0 \quad (2.9)$$

2.3. Sumario de Ecuaciones

Ecuaciones de Gobierno:

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + Ri_o \theta^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^*\end{aligned}\quad (2.10)$$

Condiciones de borde: considerando $\xi = u_x^*, u_y^*, u_z^*, p^*, \theta^*$, entonces

$$\xi(x = 0, y, z, t) = \xi(x = L_x, y, z, t) \quad (2.11)$$

$$\xi(x, y, z = 0, t) = \xi(x, y, z = L_z, t) \quad (2.12)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u}^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \mathbf{u}^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.14)$$

$$\partial_y p^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \partial_y p^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

A lo largo de este trabajo también se utiliza, particularmente para el análisis de estabilidad lineal, la forma adimensional de las ecuaciones del trabajo de Chen [Chen and Chung, 1996] que se obtienen empleando el semiancho del canal d , la velocidad media laminar $\langle u_x \rangle$ y la temperatura $T_c = Re Pr \mathcal{A} d$. Dichas ecuaciones se expresan en 2.17. Las condiciones de borde son exactamente análogas que su forma adimensional de más arriba.

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_b} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{Ra}{Re_b} \varphi^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \varphi^* &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_b} [\nabla^{*2} \varphi^* - v_x^*] \\ \varphi^* &= -\frac{\theta^*}{Re_o Pr} \quad ; \quad \mathbf{v}^* = \frac{2}{3} \mathbf{u}^* \quad ; \quad Re_b = \frac{2}{3} Re_o\end{aligned}\quad (2.17)$$

2.4. Teoría de Estabilidad Lineal. Perturbaciones

Para analizar la estabilidad lineal y prever de forma matemática cómo cambiará un flujo una vez perturbado, resulta indispensable aceptar que las perturbaciones actúan sobre un flujo base. Aquí se adopta como referencia el flujo laminar completamente desarrollado. En consecuencia, la evolución de las perturbaciones también queda condicionada por dicho estado inicial.

2.5. Flujo Base

Si el flujo está completamente desarrollado, tanto térmica como hidrodinámicamente, entonces el mismo sólo dependerá de la variable y^* . El sistema de ecuaciones 2.17 se reduce a la ecuación de momento en la dirección X y a la ecuación de transporte del escalar pasivo, las cuales quedan expresadas como

$$\frac{dp^*}{dx^*} = \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \Phi^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 V_x^*}{dy^{*2}} \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2 \Phi^*}{dy^{*2}} = V_x^* \quad (2.19)$$

El perfil de velocidad y de temperatura admiten las condiciones de borde $V_x^*(y^* = \pm 1) = \Phi^*(y^* = \pm 1) = 0$. Las soluciones para un flujo asistido por fuerzas boyantes están dadas por las expresiones 2.20 y 2.21, mientras que para un flujo donde las fuerzas boyantes son opuestas, las soluciones quedan definidas por las ecuaciones 2.22 y 2.23 [Chen and Chung, 1996].

$$V_x^* = \frac{-E}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\sinh(\kappa(1+y^*)) \sin(\kappa(1-y^*)) + \sinh(\kappa(1-y^*)) \sin(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \quad (2.20)$$

$$\Phi^* = \frac{E}{\text{Ra}} \left[1 - \frac{\cosh(\kappa(1+y^*)) \cos(\kappa(1-y^*)) + \cosh(\kappa(1-y^*)) \cos(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \right] \quad (2.21)$$

$$V_x = \frac{F}{2m^2} \left(\frac{\cosh(my^*)}{\cosh(m)} - \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} \right) \quad (2.22)$$

$$\Phi^* = \frac{F}{2m^4} \left(\frac{\cosh(my^*)}{\cos(m)} + \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} - 2 \right) \quad (2.23)$$

$$\kappa = \frac{\text{Ra}^{-1/4}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad m = (-\text{Ra})^{1/4} \quad ; \quad F = \frac{2m^3}{\tanh(m) - \tan(m)} \quad ;$$

$$E = -2\kappa \text{Ra}^{1/2} \frac{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)}{\sinh(2\kappa) - \sin(2\kappa)}$$

Obsérvese que el único parámetro aquí es el número de Rayleigh. En el Capítulo 3, se utilizarán estas ecuaciones para la validación de la herramienta numérica en estas condiciones.

2.6. Análisis de Estabilidad Lineal

La transición laminar-turbulenta, es decir, la evolución de un flujo laminar a uno turbulento, es crucial en ingeniería, ya que las características del flujo varían notablemente entre estos regímenes. Por ejemplo, los coeficientes de fricción y de convección aumentan considerablemente al pasar de un régimen laminar a uno turbulento. La ecuación de Navier-Stokes admite ambas soluciones bajo ciertos parámetros, lo que implica que el tipo de flujo y su evolución dependen de las perturbaciones y las condiciones impuestas en el sistema. Muchos fenómenos que cumplen exactamente las leyes de conservación resultan inobservables porque se inestabilizan ante las pequeñas perturbaciones inevitables en cualquier sistema real [Kundu et al., 2016].

El análisis de estabilidad lineal permite evaluar cómo se comporta un flujo ante perturbaciones, identificando los mecanismos que pueden inducir transiciones o estados de intermitencia. En el caso de flujos de fluidos, condiciones como un número de Reynolds inferior a un valor crítico garantizan la estabilidad de un flujo laminar suave. Sin embargo, en ocasiones las perturbaciones crecen hasta alcanzar amplitudes finitas y establecer nuevos equilibrios estacionarios, que pueden volverse inestables a su vez y evolucionar hacia estados de fluctuaciones caóticas, comúnmente descritos como turbulencia. Dos motivaciones principales para estudiar la estabilidad de los fluidos son comprender el proceso de transición de un flujo laminar a uno turbulento y predecir el inicio de dicha transición.

El enfoque parte de las ecuaciones de gabinete 2.17 donde se han omitido los superíndices “*”. La idea consiste en suponer que los campos solución (\mathbf{v}, p, φ) pueden descomponerse como un flujo base más una perturbación:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.24)$$

$$p = P + \tilde{p} \quad (2.25)$$

$$\varphi = \Phi + \tilde{\varphi} \quad (2.26)$$

donde las letras mayúsculas hacen referencia al flujo base laminar y aquellas letras con $(\tilde{})$ a las perturbaciones.

Despreciando términos de segundo orden, esto es, productos de perturbaciones, y asumiendo que los flujos bases son los flujos laminares desarrollados $\mathbf{V} = (V_x(y), 0, 0)$ y $\Phi \equiv \Phi(y)$ es posible expresar las ecuaciones que describen la dinámica de $\tilde{\mathbf{v}}$, \tilde{p} y $\tilde{\varphi}$ de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.27)$$

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + V_x \partial_x \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{v}_y \partial_y V_x \hat{\mathbf{e}}_x = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re_b} \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} + \frac{Ra}{Re_b} \tilde{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.28)$$

$$\partial_t \tilde{\varphi} + V_x \partial_x \tilde{\varphi} + \tilde{v}_y \partial_y \Phi = \frac{1}{Re_b Pr} [\nabla^2 \tilde{\varphi} - \tilde{v}_x] \quad (2.29)$$

Luego, aplicando el operador divergencia a la ecuación 2.28 es posible encontrar una expresión para el laplaciano de la presión:

$$-\nabla \tilde{p} = 2 \partial_x \tilde{v}_y \partial_y V_x - \frac{Ra}{Re_b} \partial_x \tilde{\varphi} \quad (2.30)$$

Aplicando el operador laplaciano a la componente Y de la ecuación 2.28 es posible eliminar el término que involucra la presión, resultando en la siguiente expresión:

$$\left\{ [\partial_t + V_x \partial_x] \nabla^2 - D^2(V_x) \partial_x - \frac{1}{Re_b} \nabla^4 \right\} \tilde{v}_y = -\frac{Ra}{Re_b} \partial_{xy} \tilde{\varphi} \quad (2.31)$$

donde $D^j \equiv \partial_y^j$.

Para la descripción completa de las perturbaciones se utiliza la componente y de la voracidad $\tilde{\eta} \equiv \partial_z \tilde{v}_x - \partial_x \tilde{v}_z$ cuya dinámica se detalla está dada por la ecuación 2.32.

$$\left[\partial_t + V_x \partial_x - \frac{1}{Re_b} \nabla^2 \right] \tilde{\eta} + D(V_x) \partial_z \tilde{v}_y = \frac{Ra}{Re_b} \partial_z \tilde{\varphi} \quad (2.32)$$

Así, las ecuaciones 2.29, 2.31 y 2.32 constituyen un sistema de EDP de 3 ecuaciones con 3 campos incógnitas. A partir de los campos escalares $\tilde{\eta}$ y \tilde{v}_y , utilizando las ecuación 2.27 y la definición de $\tilde{\eta}$ es posible hallar los campos \tilde{v}_x y \tilde{v}_z . Asimismo, empleando la ecuación 2.30 y los campos \tilde{v}_y y $\tilde{\varphi}$ es posible hallar el campo de presión \tilde{p} .

Las soluciones a dicho sistema se proponen como ondas planas tridimensionales. Si $\tilde{\xi}$ es una perturbación cualquiera, entonces, se escribe de la siguiente forma arbitraria:

$$\tilde{\xi} = \hat{\xi}(y) e^{i[\alpha x + \beta z - \omega t]} \quad (2.33)$$

donde $c \equiv c_r + i c_i$ es la velocidad de fase y $\omega \equiv \alpha c$ es la frecuencia angular. Además:

$$\alpha, \beta, c_r, c_i, \epsilon \in \mathbb{R}$$

En este sentido, se distinguen dos casos:

- ◆ Si $\alpha c_i > 0$ entonces las perturbaciones crecen en el tiempo. El flujo se vuelve inestable.
- ◆ Si $\alpha c_i < 0$ entonces las perturbaciones decaen exponencialmente en el tiempo y la perturbación se atenua. El flujo se vuelve estable.

Al reemplazar las soluciones tipo 2.33 en el sistema de ecuaciones se obtiene un problema de autovalores generalizado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2]^2 - i\alpha (V_x [D^2 - k^2] + D^2(V_x)) ; \quad a_{12} = - \left[i\alpha \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} D \right] \\ a_{21} &= \frac{i\alpha}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} D + D(\Phi) ; \quad a_{22} = \frac{-1}{\text{Re}_b \text{Pr}} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x ; \quad a_{23} = \frac{\beta}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} \\ a_{31} &= \beta D(V_x) ; \quad a_{32} = -\beta \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} ; \quad a_{33} = -\frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x \\ b_1 &= -[D^2 - k^2] ; \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

A partir de las condiciones de borde 2.11 - 2.15, las autofunciones $\hat{v}_y(y)$, $\hat{\varphi}(y)$, $\hat{\eta}(y)$ deben satisfacer las condiciones:

$$\hat{v}_y(y) = D(\hat{v}_y) = \hat{\varphi}(y) = \hat{\eta}(y) = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm 1 \quad (2.35)$$

La resolución de este problema de autovalores generalizado se realiza empleando una estrategia numérica la cuál se detalla en el capítulo 3.

2.7. Ondas TS e Inestabilidad Secundaria

Falta completar

Capítulo 3

Fundamentos de Herramientas Numéricas

Nociones Elementales de que consiste hacer simulaciones numéricas directas (DNS).
Descripción de las herramientas numéricas empleadas.

3.1. Simulaciones Numéricas Directas

Falta escribir

3.2. Xcompac3D

3.2.1. Métodos Numéricos

Falta escribir

3.2.2. Validación

Falta escribir

...

“A efectos prácticos las aproximación de flujo de calor cte (condición de Neuman) como una condición de Dirichlet igual a 0 resulta mejor desde el punto de vista numérico ya que la fluctuación de los campos es mayor y se requiere más tiempo de corrida para conseguir una buena estadística ...”

3.3. Orr-Sommerfeld - *Mixed Convection* (OSMC)

Falta escribir

3.3.1. Métodos Numéricos

Falta escribir

Falta escribir

Capítulo 4

Validación de Herramientas Numéricas

Validación de las herramientas numéricas empleadas.

4.1. Primera Parte: Xcompac3D

...

“A efectos prácticos las aproximación de flujo de calor cte (condición de Neuman) como una condición de Dirichlet igual a 0 resulta mejor desde el punto de vista numérico ya que la fluctuación de los campos es mayor y se requiere más tiempo de corrida para conseguir una buena estadística ...”

4.2. Segunda Parte: Orr-Sommerfeld - *Mixed Convection*

Falta escribir

Capítulo 5

Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollado

La finalidad de este capítulo es que el lector/jurado comprenda la forma de abordar el problema estudiado. Así como las magnitudes y parámetros relevantes del problema.

A continuación van todos los casos de flujos completamente desarrollados de los cuales tengo seguridad.

5.1. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,71$

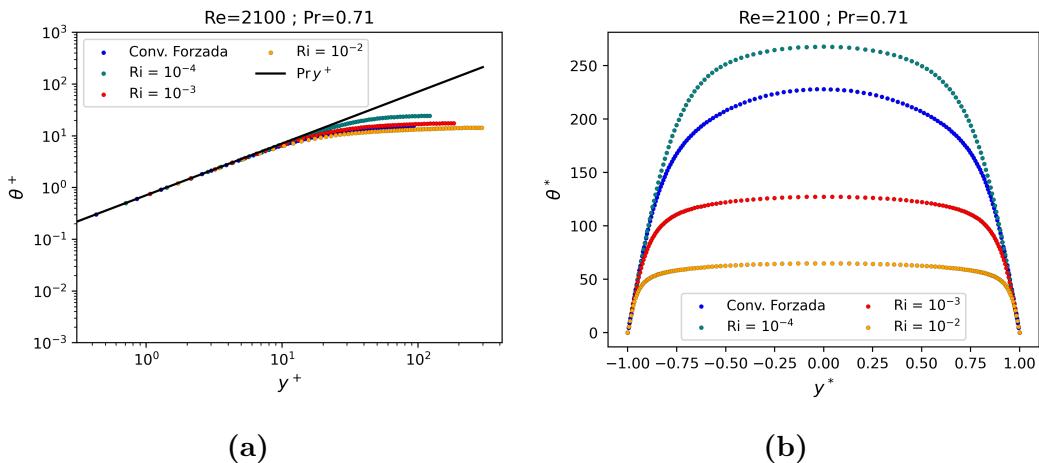


Figura 5.1

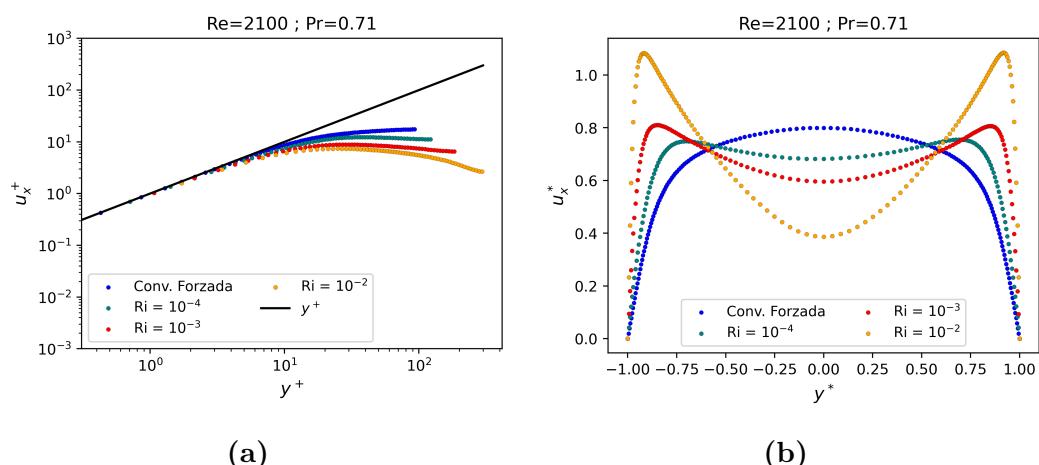


Figura 5.2

5.2. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,071$

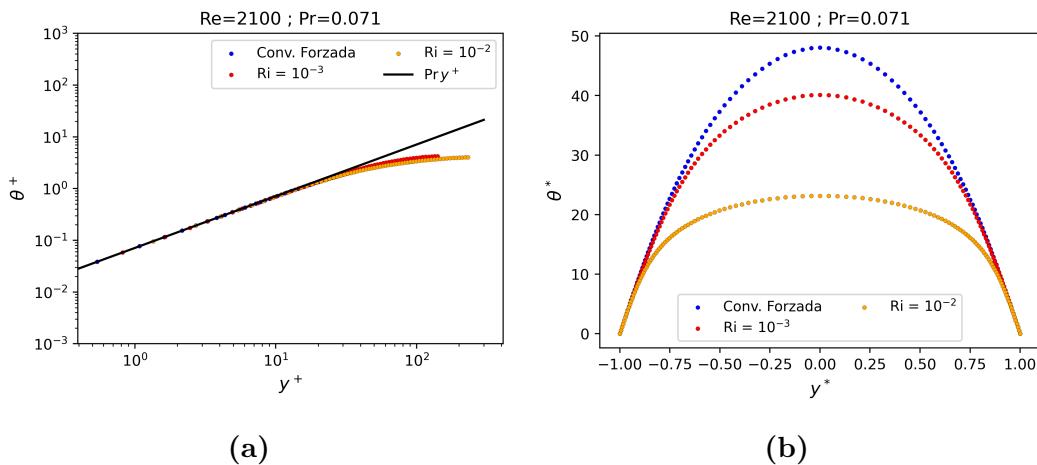


Figura 5.3

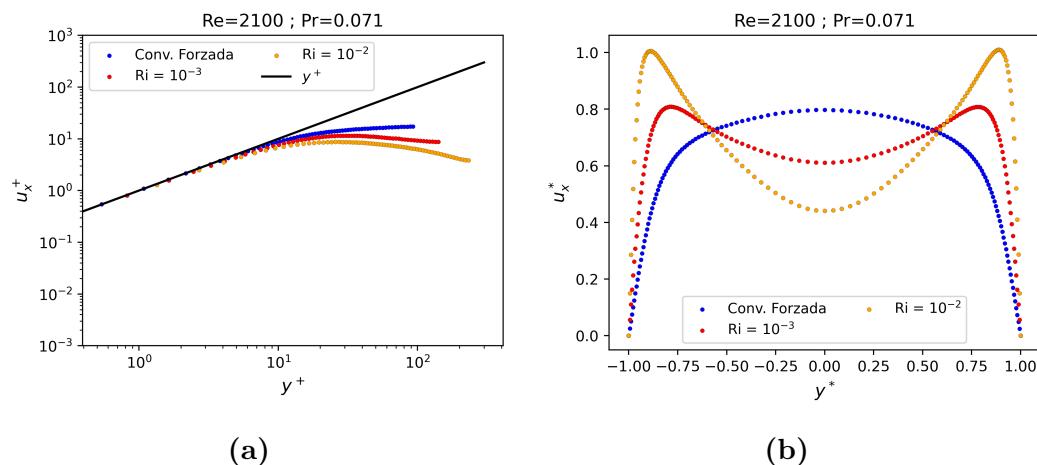


Figura 5.4

5.3. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,71$

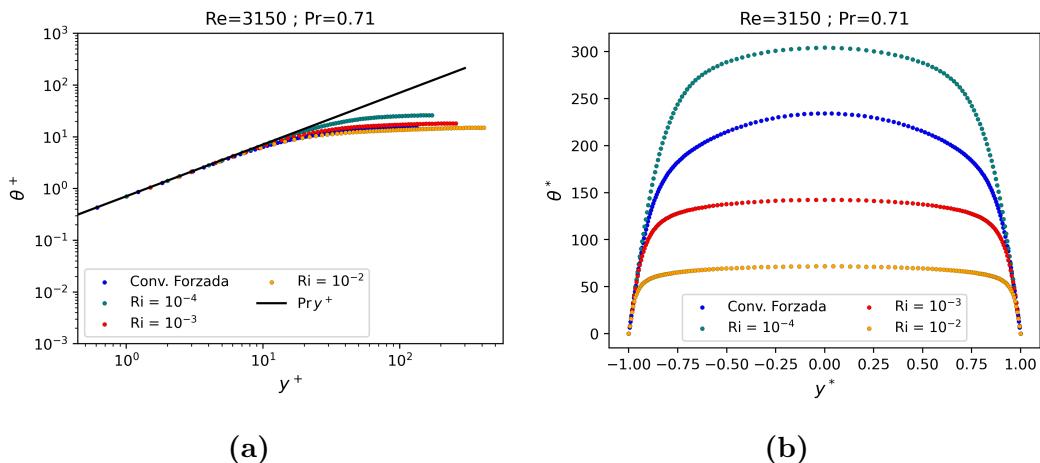


Figura 5.5

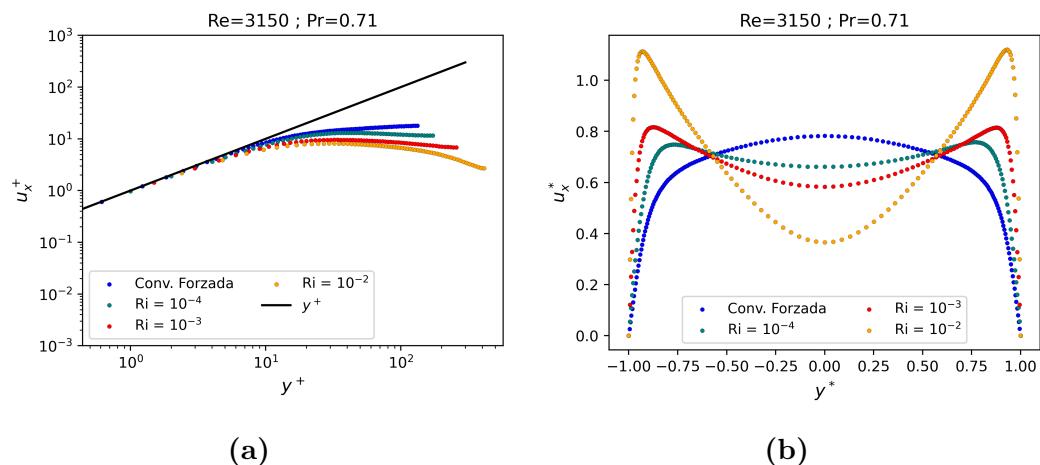


Figura 5.6

5.4. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,071$

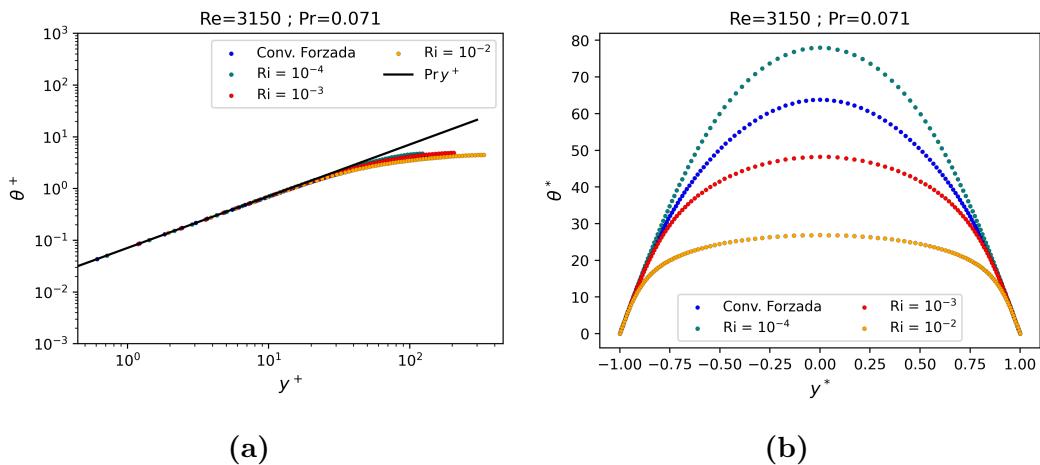


Figura 5.7

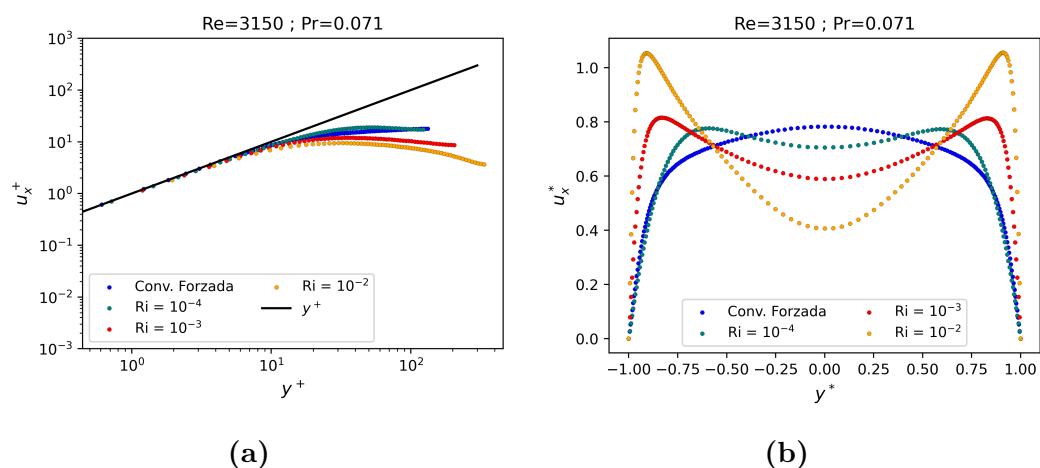


Figura 5.8

5.5. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,71$

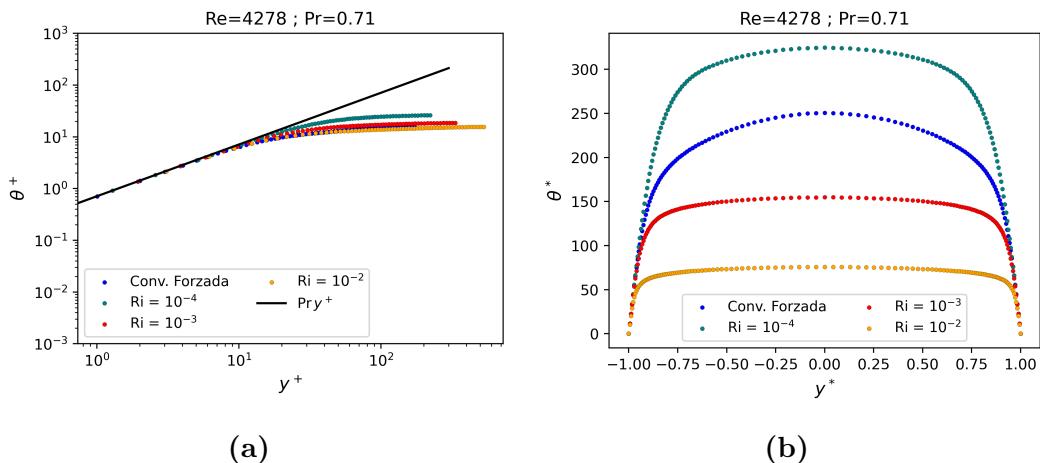


Figura 5.9

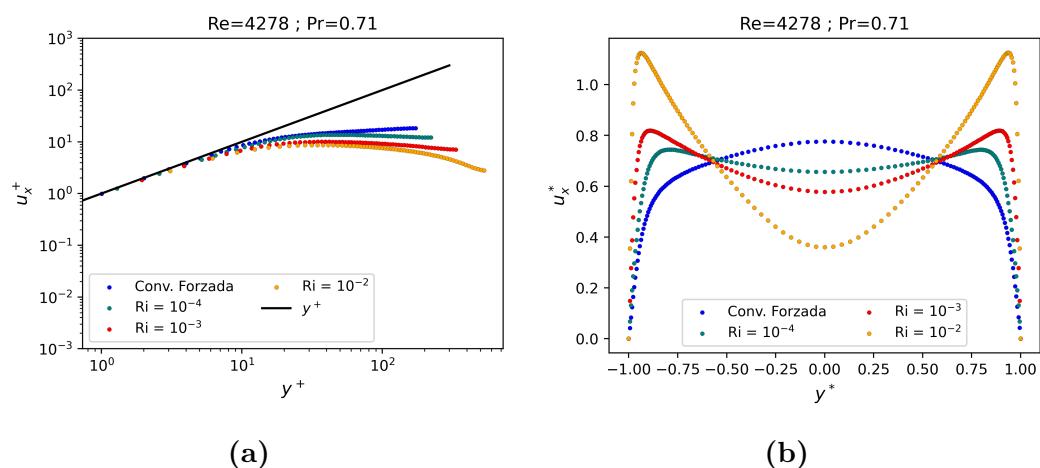


Figura 5.10

5.6. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,071$

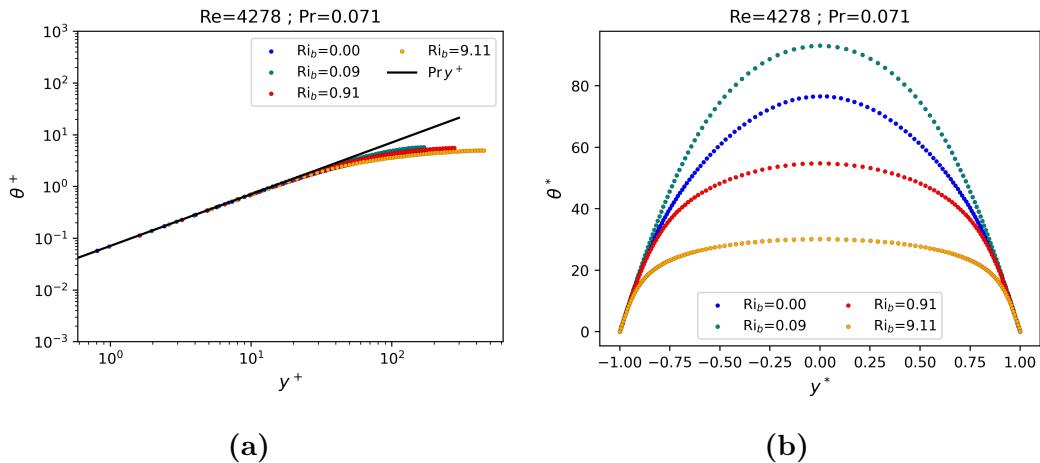


Figura 5.11

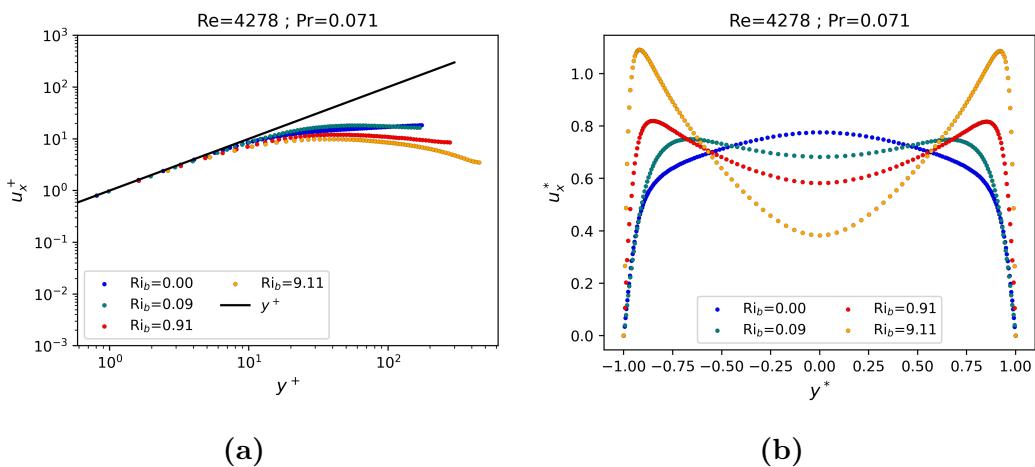


Figura 5.12

5.7. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,71$

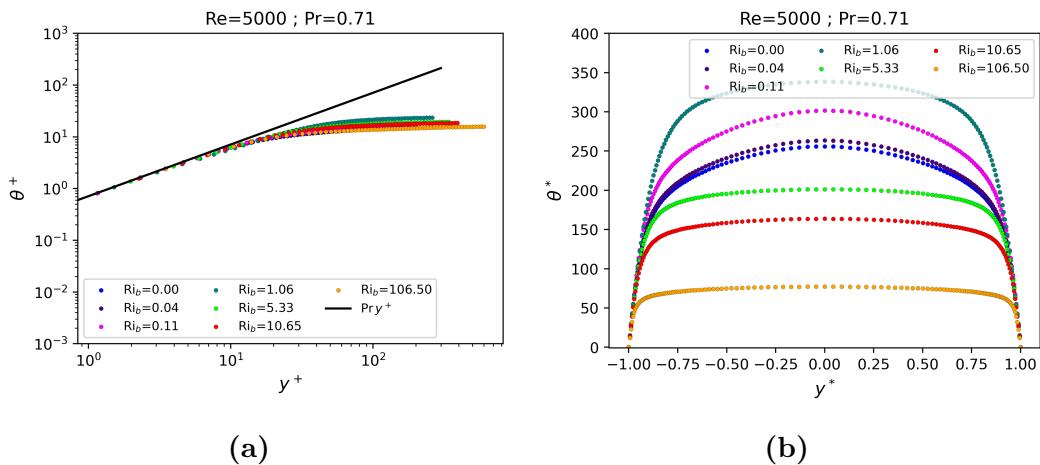


Figura 5.13

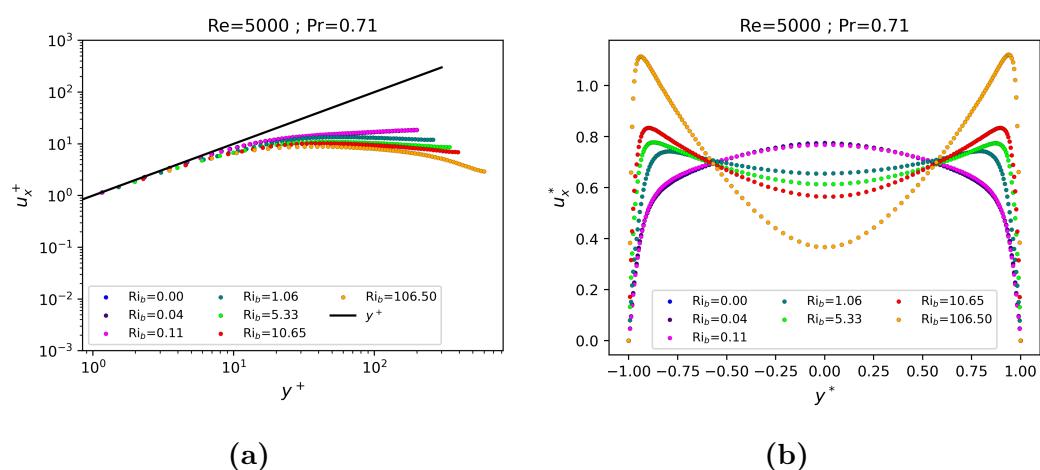
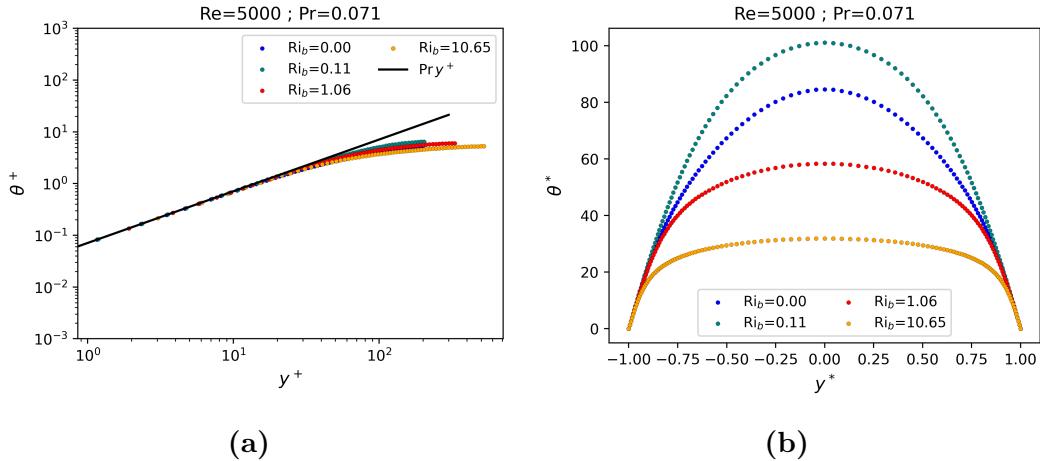
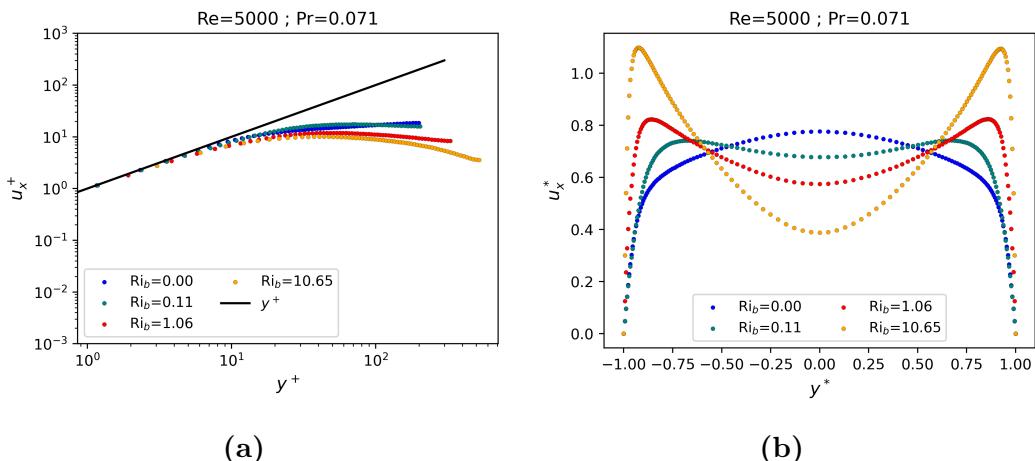


Figura 5.14

5.8. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,071$

**Figura 5.15****Figura 5.16**

5.9. Correlación de Nusselt

Comparación con correlación de Jackson et al [?]

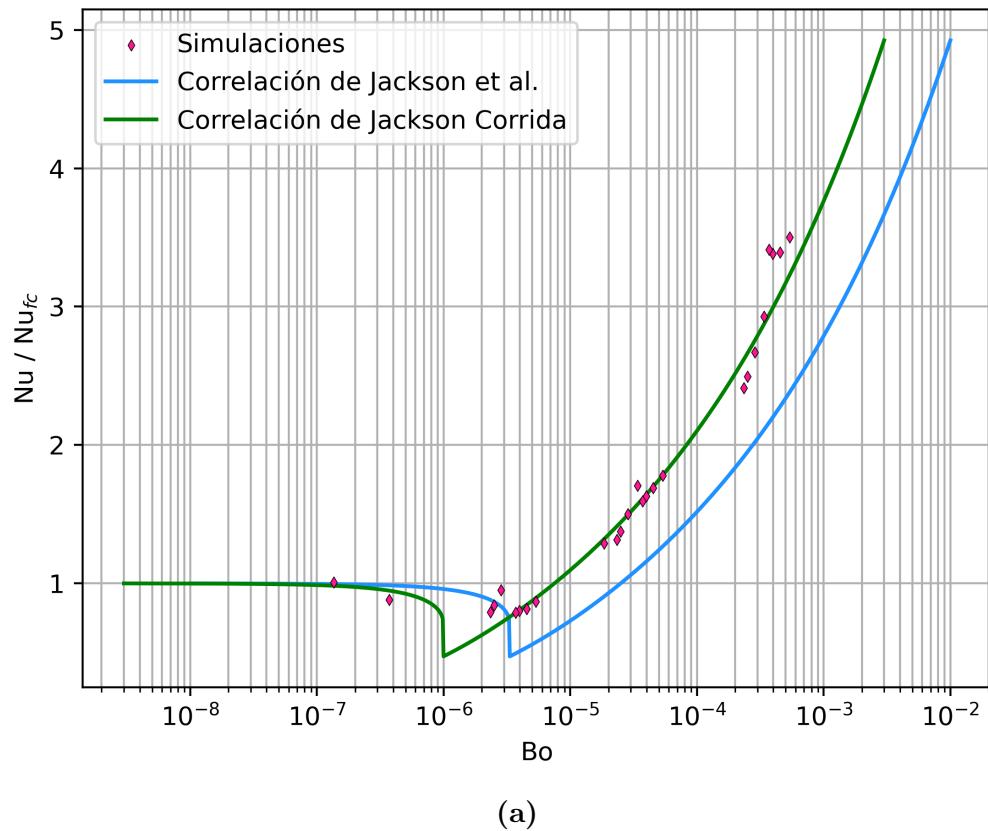


Figura 5.17: Aquí $Bo = Gr/(Re^{3,425} Pr^{0,8})$

Capítulo 6

Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta

Resultados principales y “novedosos”

6.1. Casos $\text{Re} = 750$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re750-Pr071-Ri1Em4-C1	750	0.71	1.63E-4	1.12	0	1 %	0 %	$1.249 + 0.044 j$	-

Tabla 6.1

6.1.1. Autofunciones y Espectros de autovalores

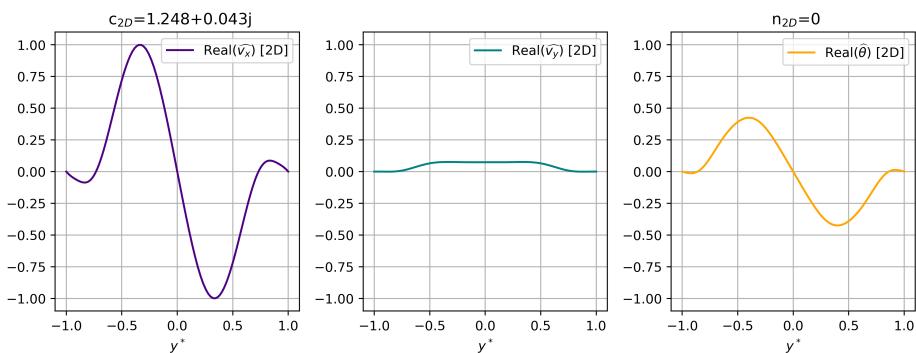


Figura 6.1

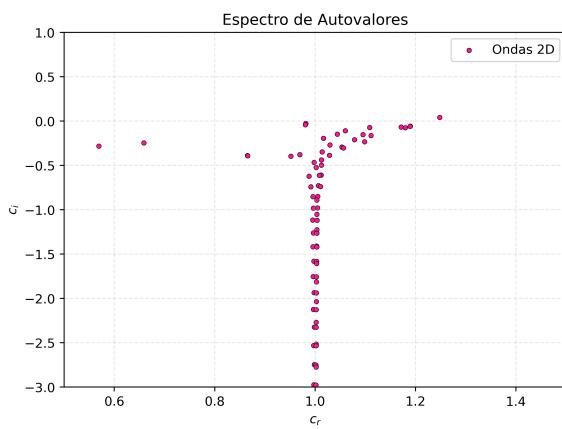


Figura 6.2

6.1.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

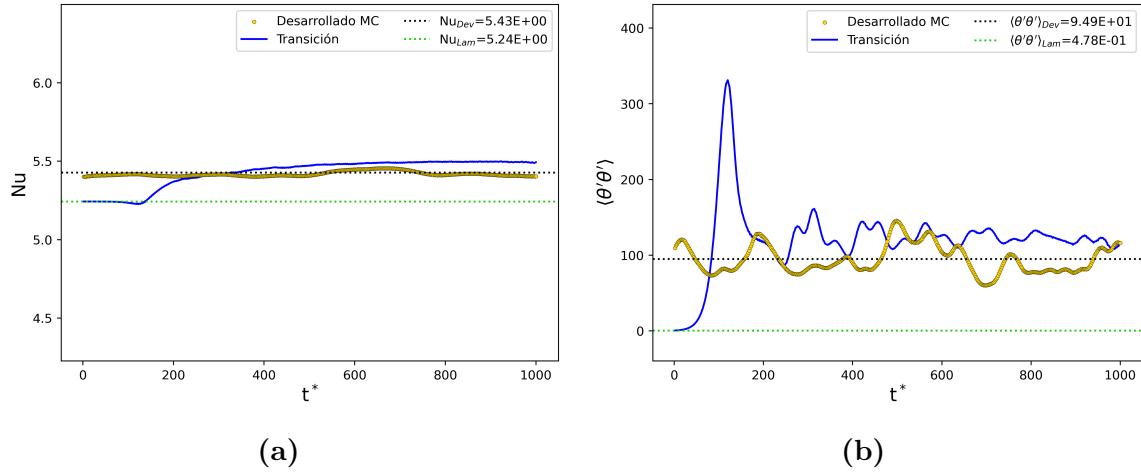


Figura 6.3

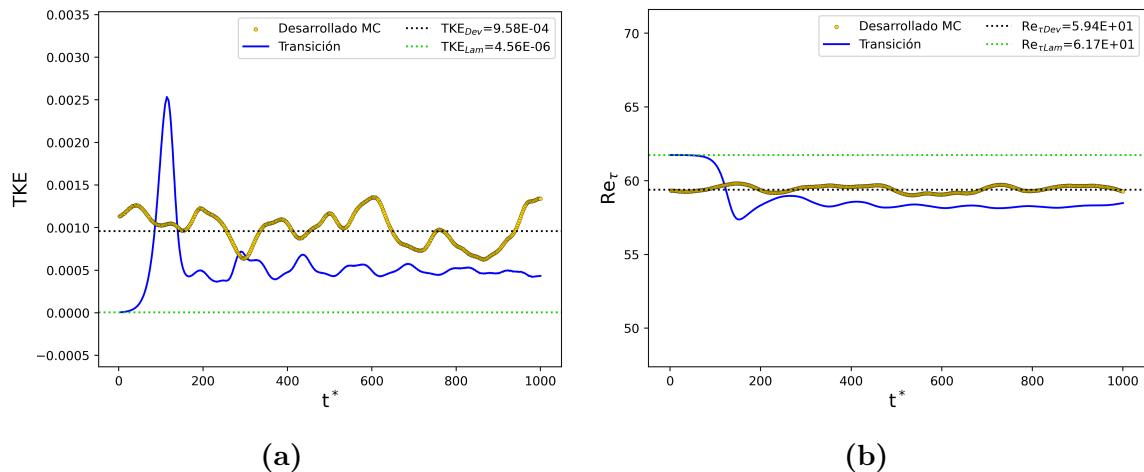


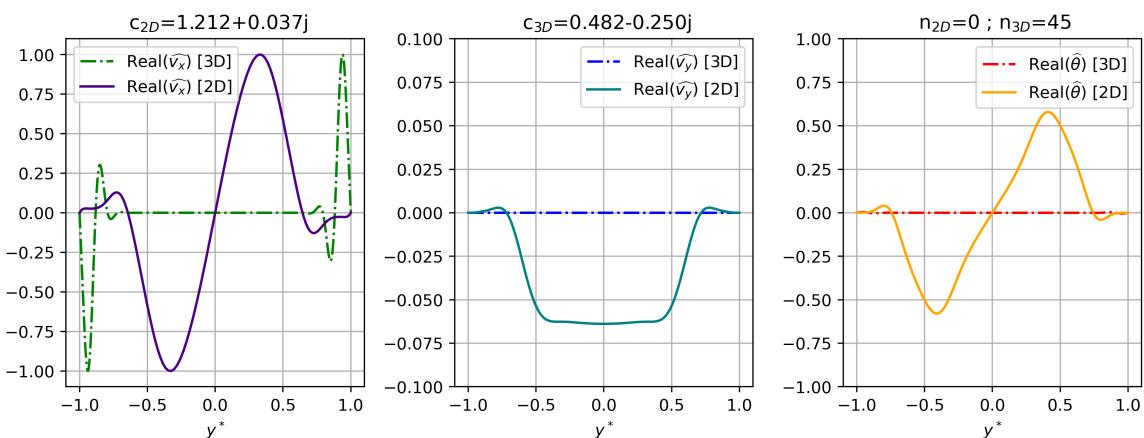
Figura 6.4

6.2. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C1	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	1 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C2	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	2 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C3	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	4 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C4	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C5	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	4 %	0.2 %	1.212 + 0.037 j	0.482 - 0.250 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C6	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	0.2 %	1.212 + 0.037 j	0.482 - 0.250 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C7	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	0.472 - 0.104 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C8	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	0.385 - 0.124 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C9	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.472 - 0.104 j	0.575 - 0.095 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C10	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.385 - 0.124 j	0.563 - 0.095 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C11	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.660 - 0.371 j	0.688 - 0.440 j

Tabla 6.2

6.2.1. Autofunciones y Espectros de autovalores



(a)

Figura 6.5

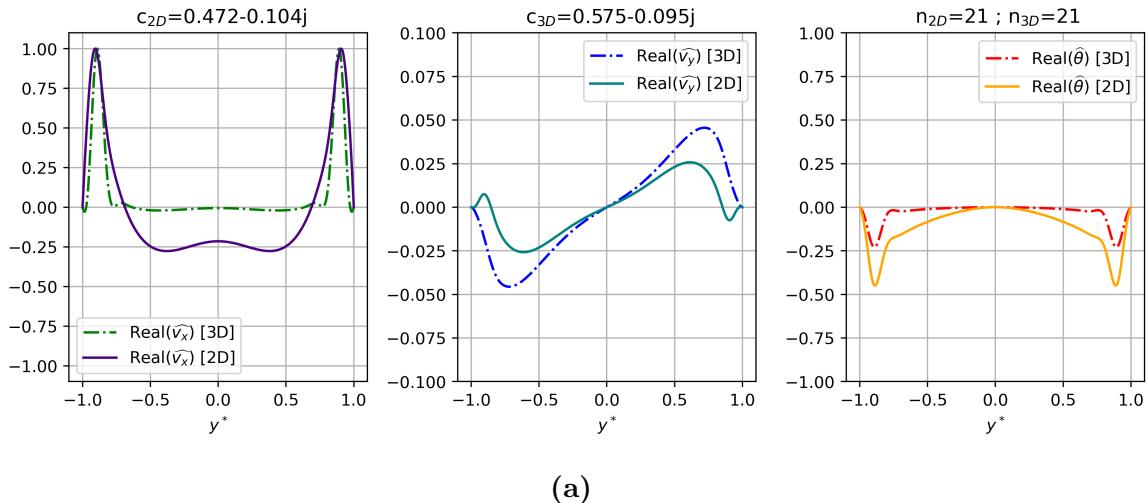


Figura 6.6

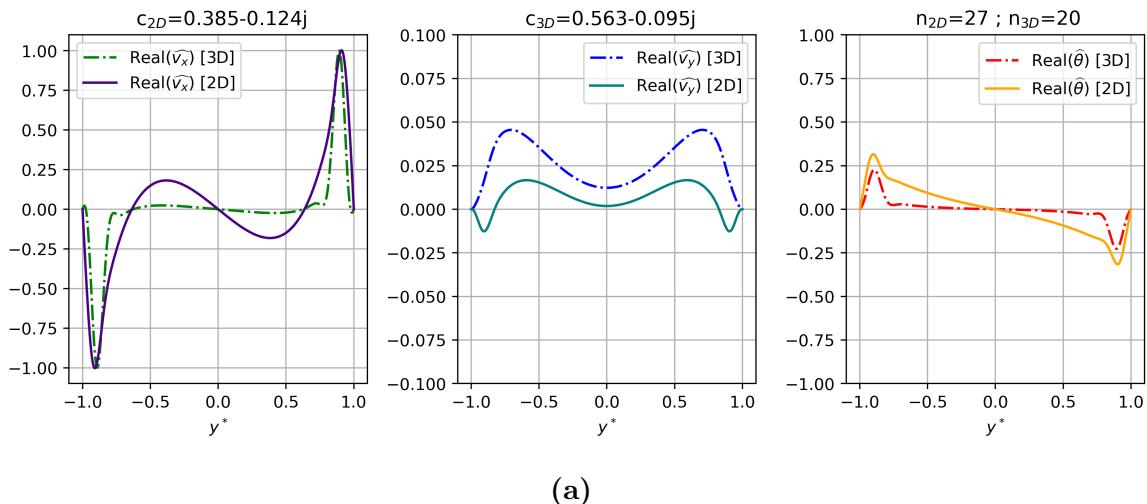


Figura 6.7

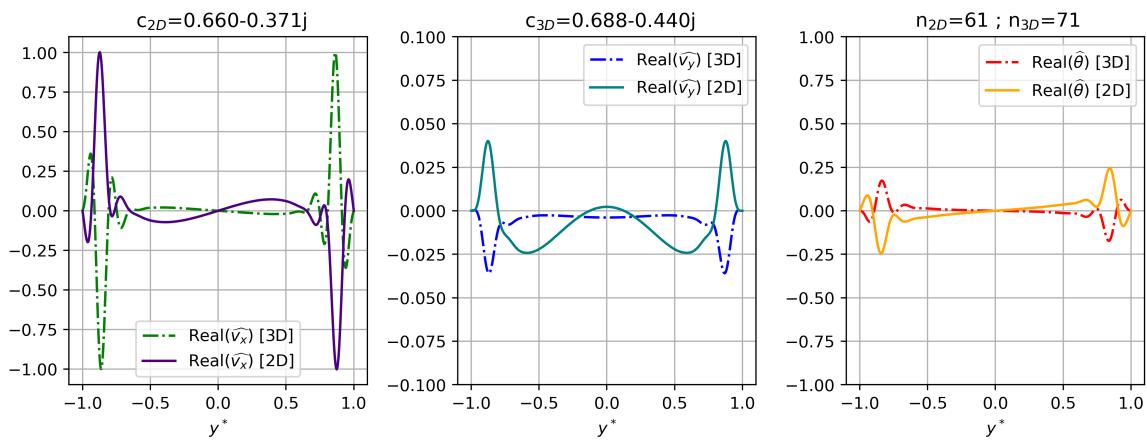


Figura 6.8

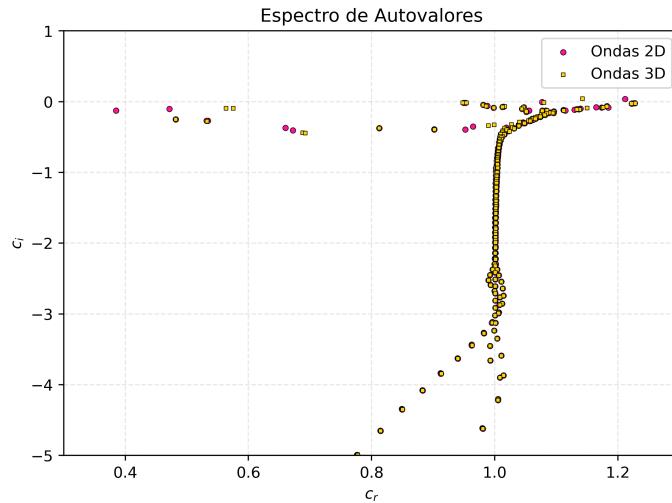


Figura 6.9

6.2.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

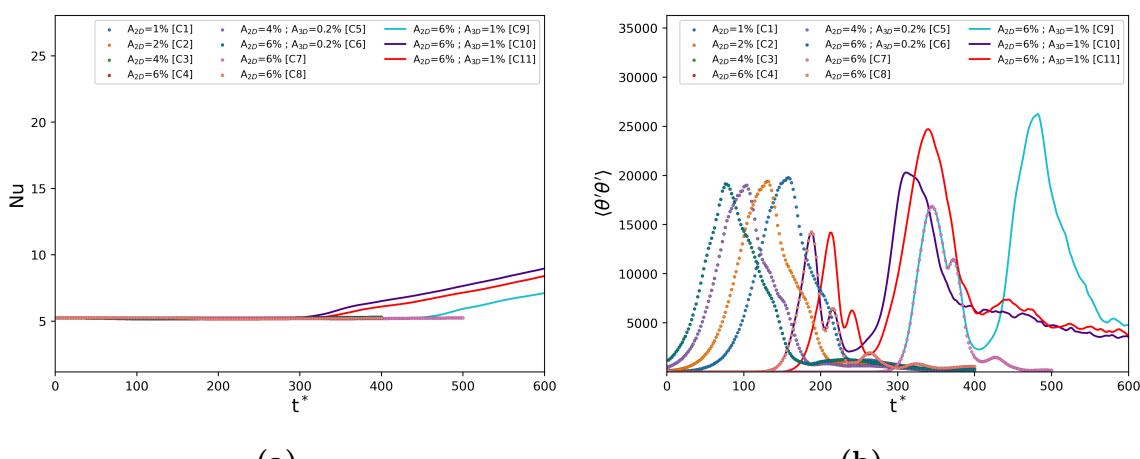


Figura 6.10

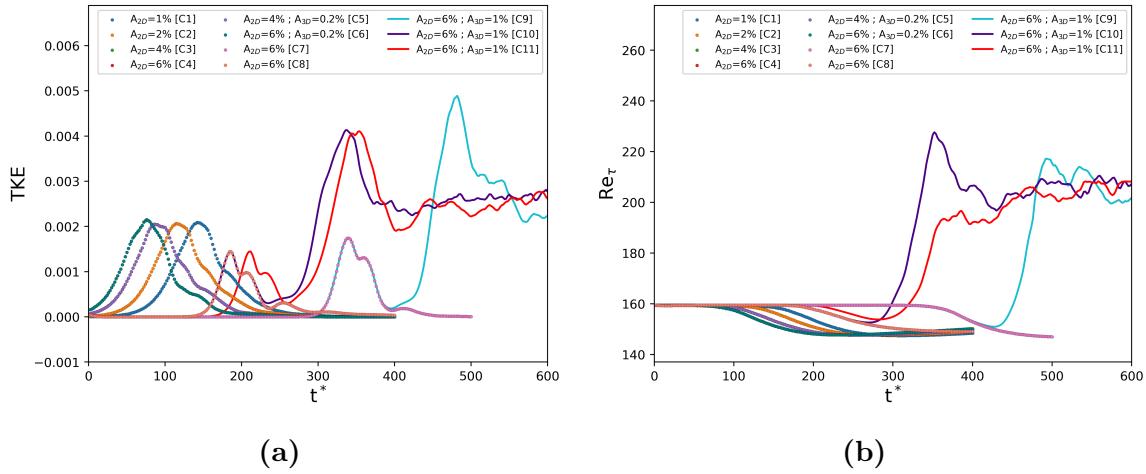


Figura 6.11

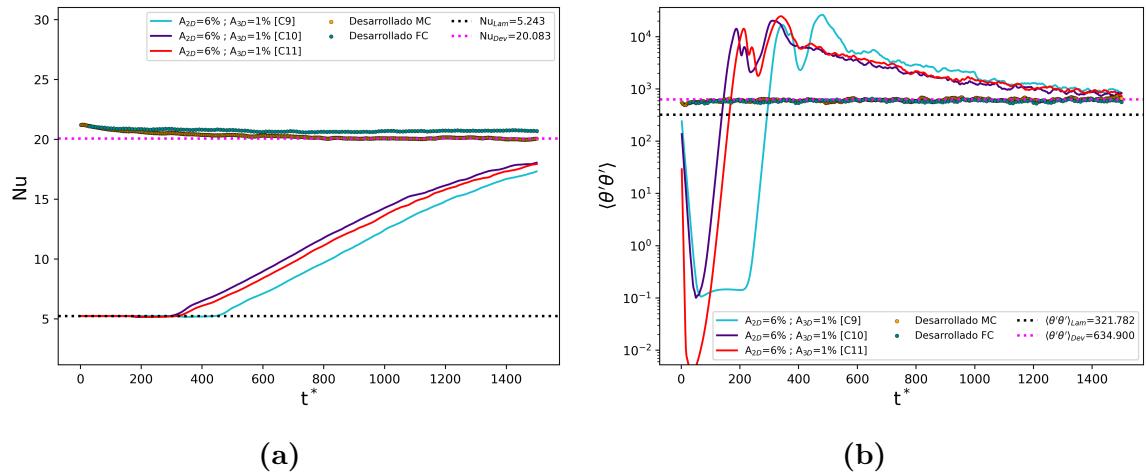


Figura 6.12: Casos C9,C10,C11

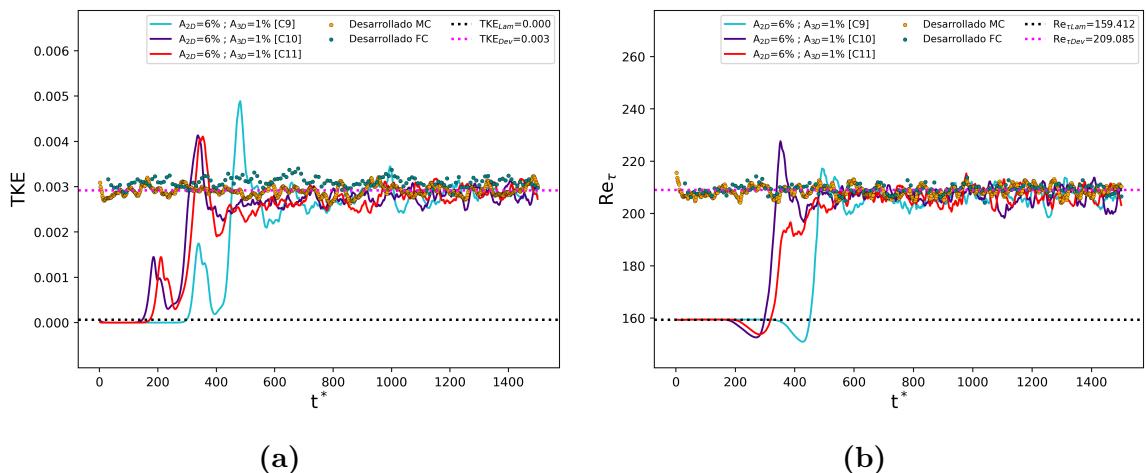


Figura 6.13: Casos C9,C10,C11

6.3. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-4}$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C1	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$2,315 + 0,424 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C2	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$0,800 - 0,495 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em5-C3	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$2,853 - 0,107 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em5-C4	5000	0.71	1E-4	1.12	2.1	2 %	0.4 %	$2,315 + 0,424 j$	$1,721 + 0,235 j$
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C5	5000	0.71	1E-4	1.12	2.1	2 %	0.4 %	$2,853 - 0,107 j$	$1.550 + 0.023 j$

Tabla 6.3

6.3.1. Autofunciones y Espectros de autovalores

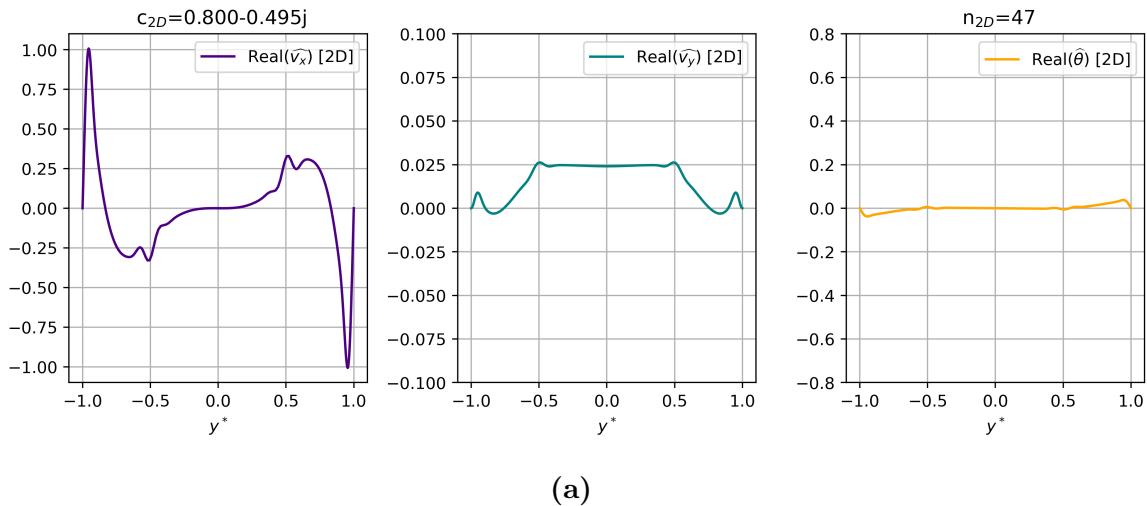


Figura 6.14

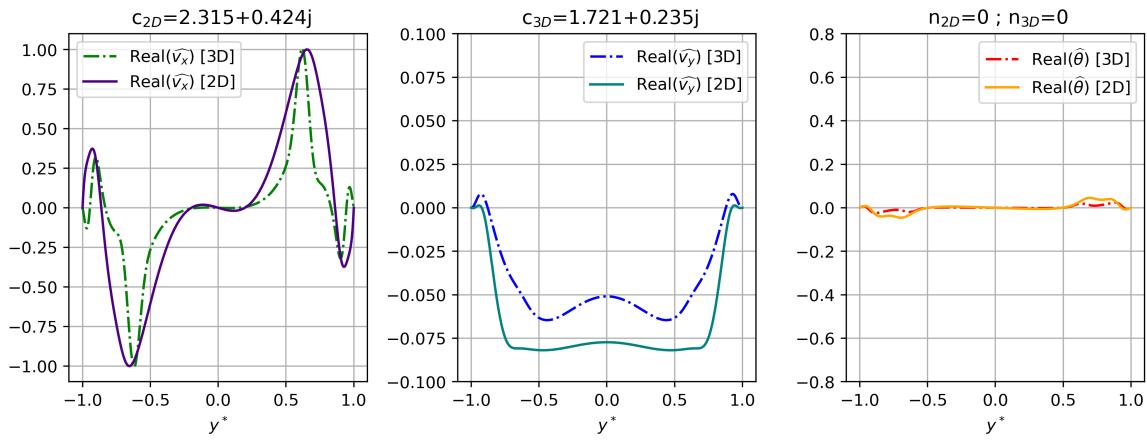
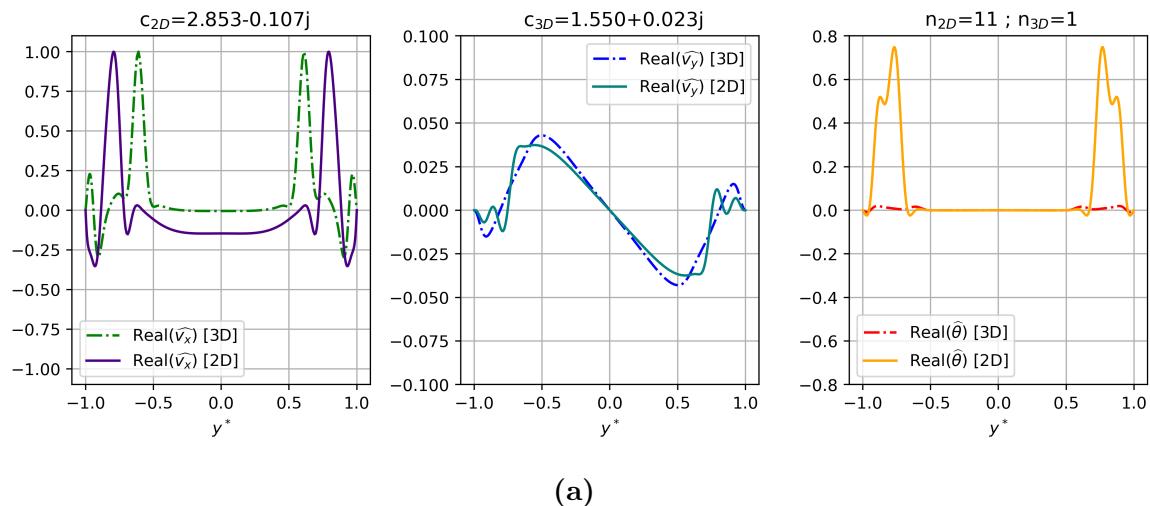


Figura 6.15



(a)

Figura 6.16

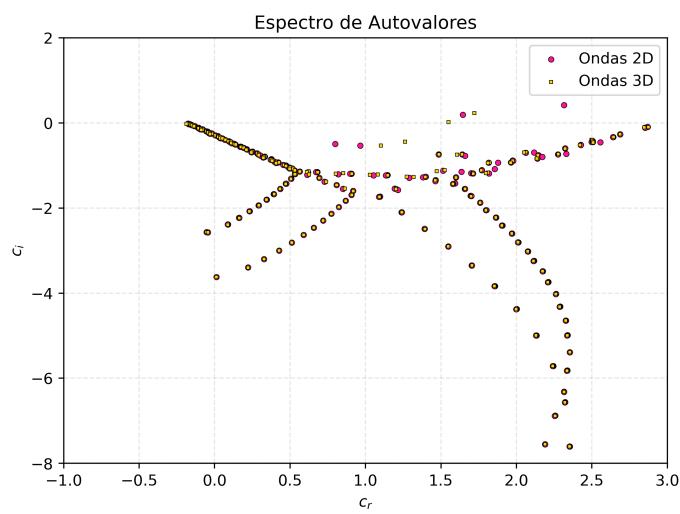


Figura 6.17

6.3.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

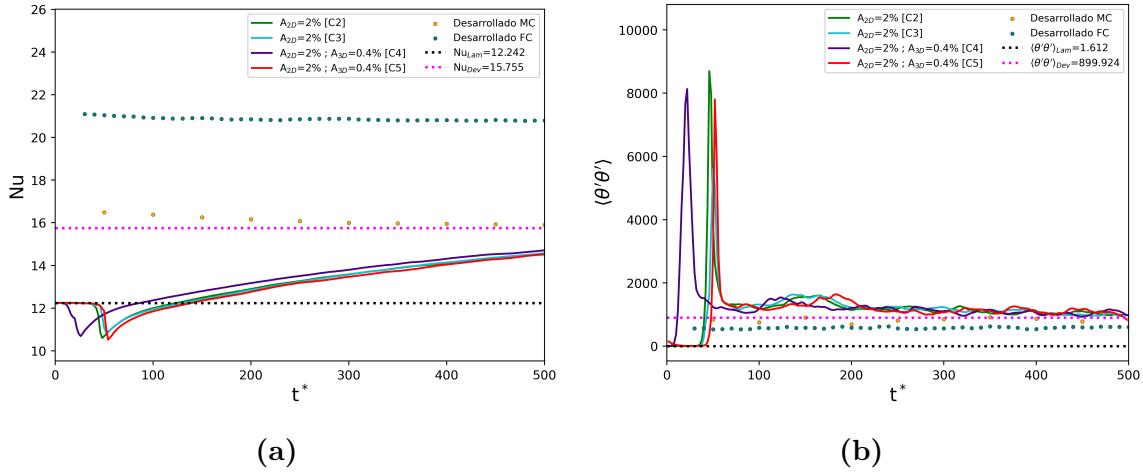


Figura 6.18

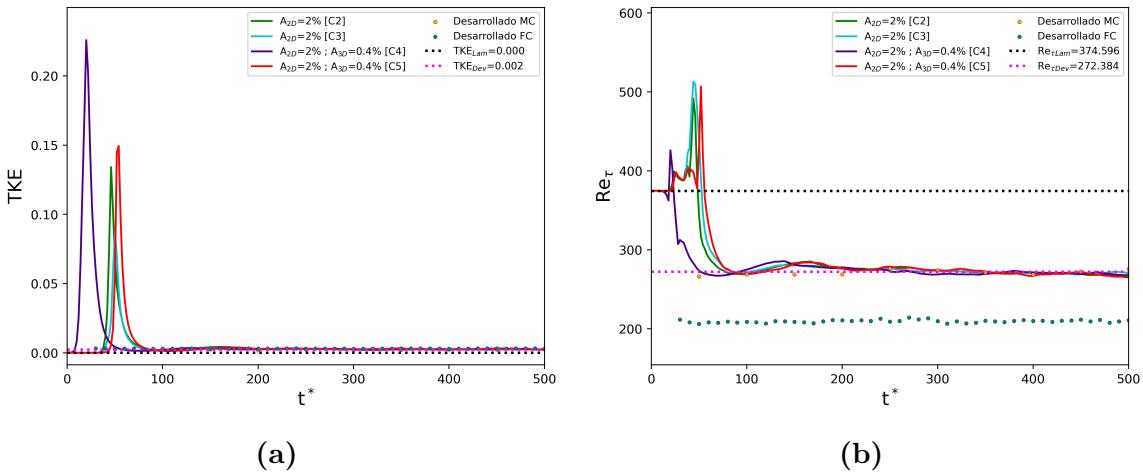


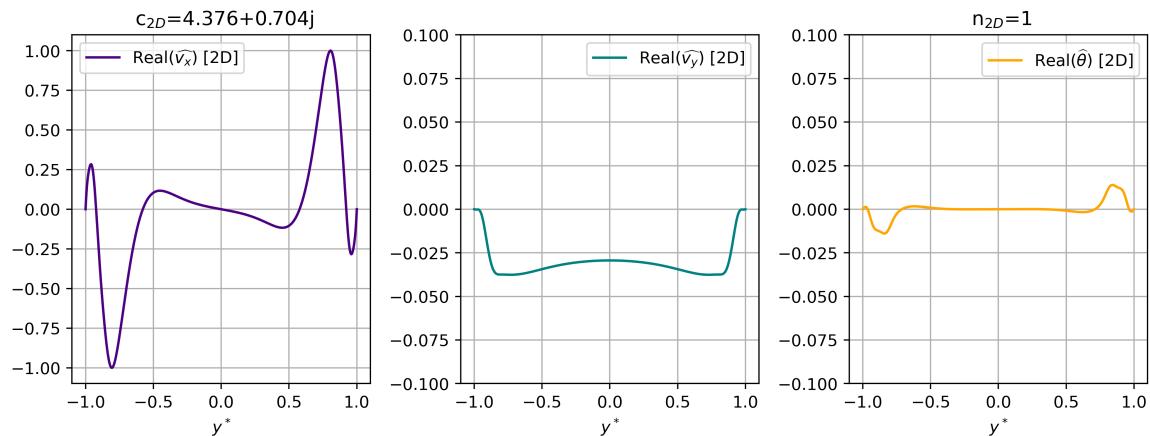
Figura 6.19

6.4. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-3}$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C1	5000	0.71	1E-3	1.12	0	2 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C2	5000	0.71	1E-3	1.12	0	1 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C3	5000	0.71	1E-3	1.12	0	0.5 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C4	5000	0.71	1E-3	1.12	0	0.25 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-

Tabla 6.4

6.4.1. Autofunciones y Espectros de autovalores



(a)

Figura 6.20

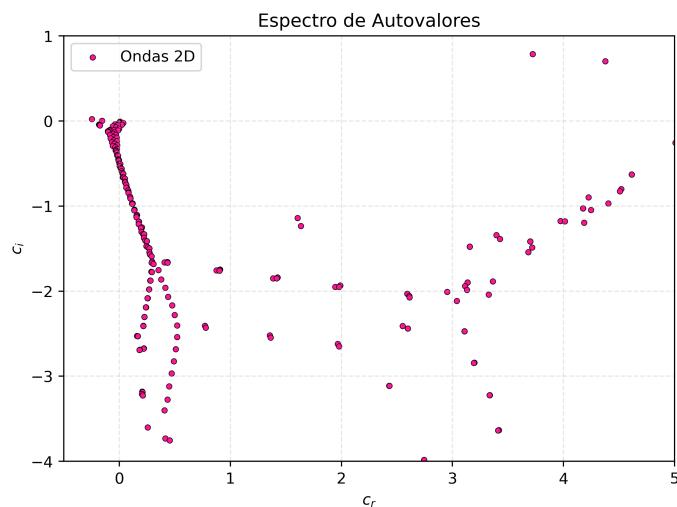


Figura 6.21

6.4.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

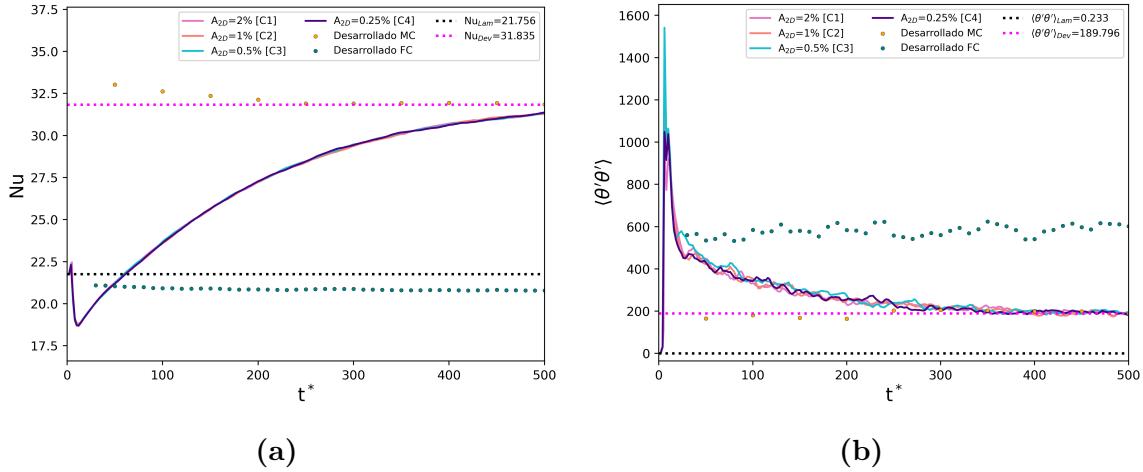


Figura 6.22

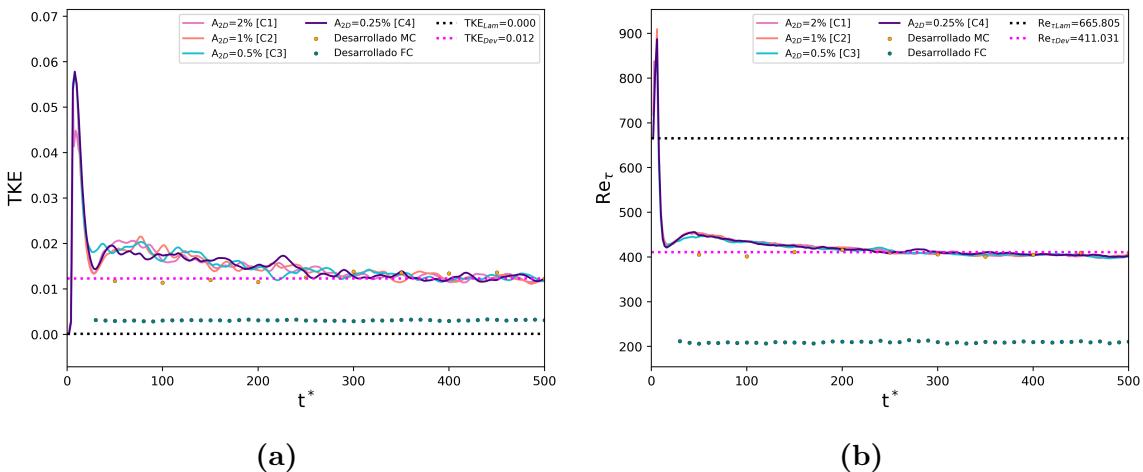


Figura 6.23

Capítulo 7

Conclusiones

Acá se concluyen cosas

Apéndice A

Budgets Dynamics Equations

A partir de la descomposición de Reynolds de los campos de interés (componentes de la velocidad, presión, temperatura) aplicadas a las ecuaciones de gabinete 2.1 se puede obtener, mediante mucho álgebra, ecuaciones que describen la dinámica de los budget de las cantidades de segundo orden como $\langle v'_x v'_y \rangle$, la energía cinética turbulenta κ , los flujos de calor turbulento $\langle v'_i \theta' \rangle$ y la varianza de la temperatura $\langle \theta' \theta' \rangle$. Se han omitido los superíndices “*”.

$$\partial_t \langle v'_i \theta' \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle v'_i \theta' \rangle = \mathcal{P}_{i\theta} + \mathcal{T}_{i\theta} + \Pi_{i\theta} + \mathcal{D}_{i\theta} + \mathcal{B}_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad (\text{A.1})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_{i\theta} = -\partial_k \langle v'_i v'_k \theta' \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_{i\theta} = -[\langle \theta' v'_k \rangle \partial_k \langle v_i \rangle + \langle v'_i v'_k \rangle \partial_k \langle \theta \rangle] + \langle v'_i v'_x \rangle$

Disipación: $\mathcal{D}_{i\theta} = -\frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) \langle \partial_k \theta' \partial_k v'_i \rangle \quad (\text{A.2})$

Correlación Temp - Grad Presión: $\Pi_{i\theta} = -\langle \theta' \partial_i p' \rangle$

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_{i\theta} = \text{Ri } g_i \langle \theta' \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_{i\theta} = \frac{1}{\text{Re}} \partial_k \left[\langle \theta' \partial_k v'_i \rangle + \frac{1}{\text{Pr}} \langle v'_i \partial_k \theta' \rangle \right]$

$$\partial_t \langle v'_x v'_y \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle v'_x v'_y \rangle = \mathcal{P}_{xy} + \mathcal{T}_{xy} + \Pi_{xy} + \mathcal{D}_{xy} + \mathcal{B}_{xy} - \varepsilon_{xy} \quad (\text{A.3})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_{xy} = -\partial_k \langle v'_x v'_k v'_y \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_{xy} = -[\langle v_y v'_k \rangle \partial_k \langle v_x \rangle + \langle v'_x v'_k \rangle \partial_k \langle v_y \rangle]$

Disipación: $\mathcal{D}_{xy} = -\frac{2}{\text{Re}} \langle \partial_k v'_x \partial_k v'_y \rangle$

(A.4)

Correlacion Vel - Grad Presión: $\Pi_{xy} = -[\langle v'_y \partial_x p' \rangle + \langle v'_x \partial_y p' \rangle]$

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_{xy} = -\text{Ri} \langle v'_y \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{\text{Re}} \partial_k^2 \langle v'_x v'_y \rangle$

Siendo $\kappa = \langle v_i v'_i \rangle / 2$, la Energía Cinética Turbulenta, entonces:

$$\partial_t \kappa + \langle v_n \rangle \partial_n \kappa = \mathcal{P}_i + \mathcal{T}_i + \Pi_i + \mathcal{D}_i + \mathcal{B}_i - \varepsilon_i \quad (\text{A.5})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_i = -\frac{1}{2} \partial_n \langle v'_i v'_n v'_i \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_i = -\langle v_i v'_n \rangle \partial_n \langle v_i \rangle$

Disipación: $\mathcal{D}_i = -\frac{1}{\text{Re}} \langle \partial_n v'_i \partial_n v'_i \rangle$

(A.6)

Correlacion Vel - Grad Presión: $\Pi_i = -\langle \partial_i (v'_i p') \rangle$

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_i = -\text{Ri} g_i \langle v'_i \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_i = \frac{1}{\text{Re}} \partial_n^2 \kappa$

$$\partial_t \langle \theta' \theta' \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle \theta' \theta' \rangle = \mathcal{P}_\theta + \mathcal{T}_\theta + \mathcal{D}_\theta - \varepsilon_\theta \quad (\text{A.7})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_\theta = -\partial_k \langle \theta' \theta' v'_k \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_\theta = 2 [\langle \theta' v'_k \rangle \partial_k \langle \theta' \rangle + \langle v'_x \theta' \rangle]$

Disipación: $\mathcal{D}_\theta = -\frac{2}{\text{RePr}} (\langle \partial_k \theta' \rangle)^2$ (A.8)

Difusión Viscosa: $\varepsilon_\theta = \frac{1}{\text{RePr}} \partial_k^2 \langle \theta' \theta' \rangle$

Bibliografía

- [Bénard, 1901] Bénard, H. (1901). Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*.
- [Cengel and Ghajar, 2015] Cengel, Y. A. and Ghajar, A. J. (2015). *Heat and Mass Transfer: Fundamentals & Applications*. McGraw-Hill Education.
- [Chen and Chung, 1996] Chen, Y.-C. and Chung, J. (1996). The linear stability of mixed convection in a vertical channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*.
- [Chen and Chung, 2003] Chen, Y.-C. and Chung, J. (2003). A direct numerical simulation of transition phenomena in a mixed convection channel flow. *Computers & fluids*.
- [Dittus and Boelter, 1930] Dittus, F. W. and Boelter, L. M. K. (1930). Heat transfer in automobile radiators of the tubular type. *University of California Publications in Engineering*.
- [Ghajar, 2019] Ghajar, A. J. (2019). Heat transfer and pressure drop in the transition region of smooth horizontal circular tubes with different inlet configurations. In *Advances in heat transfer*. Elsevier.
- [Incropera et al., 2006] Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., Lavine, A. S., et al. (2006). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley and Sons.
- [Kasagi and Nishimura, 1997] Kasagi, N. and Nishimura, M. (1997). Direct numerical simulation of combined forced and natural turbulent convection in a vertical plane channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow*.
- [Kasagi et al., 1992] Kasagi, N., Tomita, Y., and Kuroda, A. (1992). Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow.
- [Kundu et al., 2016] Kundu, P. K., Cohen, I. M., Dowling, D. R., and Capecelatro, J. (2016). *Fluid Mechanics*. Elsevier.
- [Metais and Eckert, 1964] Metais, B. and Eckert, E. R. G. (1964). Forced, mixed and free convection regimes. *Journal of Heat Transfer*.
- [Rayleigh, 1916] Rayleigh, L. (1916). On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Philosophical Magazine*.

- [Straub et al., 2019] Straub, S., Forooghi, P., Marocco, L., Wetzel, T., Vinuesa, R., Schlatter, P., and Frohnapfel, B. (2019). The influence of thermal boundary conditions on turbulent forced convection pipe flow at two prandtl numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer.*
- [Tao, 1960] Tao, S. C. (1960). Combined forced and free convection in a vertical channel. *Journal of Heat Transfer.*
- [White, 2011] White, F. M. (2011). *Fluid mechanics*. McGraw-Hill New York.

Agradecimientos

A todos los que se lo merecen ...

