

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA

ANÁLISIS DEL FLUJO EN CONVECCIÓN MIXTA EN CANALES RECTANGULARES

Patricio G. Canciani
Maestrando

Dr. William I. Machaca Abregu
Director

Dr. Federico Teruel
Co-director

Miembros del Jurado

Dr. Christian P. Marcel (Instituto Balseiro – CNEA)
Dr. Pablo Garcia Martinez (Instituto Balseiro – CNEA)
Dr. César Venier (FCEIA – SIMEC)

30 de Julio de 2025

Departamento de Mecánica Computacional
(Centro Atómico Bariloche)

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A todos mis seres queridos

Índice de símbolos

Índice de contenidos

Índice de símbolos	v
Índice de contenidos	vii
Índice de figuras	xi
Índice de tablas	xv
Resumen	xvii
Abstract	xix
1. Introducción	1
1.1. Introducción	2
1.2. Motivación	4
1.3. Objetivos	5
1.4. Organización del trabajo	5
2. Modelo Matemático	7
2.1. Conceptos Elementales de Turbulencia	8
2.2. Descripción del sistema bajo estudio. Ecuaciones de Gobierno	8
2.2.1. Sumario de Ecuaciones	11
2.3. Teoría de Estabilidad Lineal. Perturbaciones	13
2.4. Flujo Base	13
2.5. Análisis de Estabilidad Lineal	14
2.6. Mecanismos de Inestabilidad. Ondas TS e Inestabilidad Secundaria . .	16
3. Fundamentos de Herramientas Numéricas	19
3.1. Simulaciones Numéricas Directas	20
3.2. Xcompac3D	20
3.2.1. Métodos Numéricos	20
3.2.2. Validación	20
3.3. Orr-Sommerfeld - <i>Mixed Convection</i> (OSMC)	20

3.3.1. Métodos Numéricos	20
4. Validación de Herramientas Numéricas	21
4.1. Primera Parte: Xcompac3D	22
4.2. Segunda Parte: Orr-Sommerfeld - <i>Mixed Convection</i>	22
5. Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollado	23
5.1. Casos simulados	24
5.2. Magnitudes de Primer y Segundo Orden	25
5.2.1. Perfiles de velocidad y de temperatura	25
5.2.2. Valores RMS de temperatura y velocidad	27
5.2.3. Flujos turbulentos de calor	27
5.3. Comparación entre casos de distinto Prandtl	29
5.4. Número de Nusselt	32
5.5. Factor de Fricción de Darcy	36
5.6. Sumario de los principales hallazgos	37
6. Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta	39
6.1. Exploración de casos	40
6.1.1. Caso A ($Ri_b=0.04$)	40
6.1.2. Caso B ($Ri_b=1.06$)	41
6.2. Análisis detallado del caso A-C10	43
6.3. Análisis detallado del caso B-C2	46
6.4. Sumario de los principales hallazgos	48
7. Conclusiones	51
A. Budgets Dynamics Equations	53
B. Perfiles de Desarrollados	55
B.1. $Re = 2100$ y $Pr = 0,71$	55
B.2. $Re = 2100$ y $Pr = 0,071$	56
B.3. $Re = 3150$ y $Pr = 0,71$	57
B.4. $Re = 3150$ y $Pr = 0,071$	58
B.5. $Re = 4278$ y $Pr = 0,71$	59
B.6. $Re = 4278$ y $Pr = 0,071$	60
C. Transición. Cosas	61
C.0.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	61
C.1. Casos $Re = 5000$; $Pr = 0,71$; $\Pi = 10^{-4}$	63
C.1.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	63

C.2. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\Pi = 10^{-3}$	65
C.2.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	65
C.2.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	66
Bibliografía	69
Agradecimientos	71

Índice de figuras

1.1. Comparación esquemática de la transferencia de calor alrededor de una tubería caliente: (izquierda) convección forzada; (derecha) convección natural.	2
2.1.	8
5.1. Mapa de regímenes en el plano $Re_b^D - Ri_b$. Se señalan las zonas laminar, de transición y turbulenta, así como los dominios de convección forzada, mixta y natural.	25
5.2. Perfiles medios adimensionales de (a) velocidad y (b) temperatura, para varios Ri_b .	26
5.3. Fluctuaciones RMS: (a) velocidad en la dirección de la corriente y (b) temperatura adimensional.	27
5.4. (a) Flujo de calor turbulento en la dirección de la corriente. (b) Esquema de perfiles de temperatura y velocidad para convección forzada y mixta. Aquí los desplazamientos dy^* hacia la izquierda (derecha) están representados con flechas anaranjadas (negras).	28
5.5. Flujo de calor turbulento en la dirección normal a la pared.	29
5.6. Perfiles medios de velocidad en unidades de pared para $Re_o=5000$ y $Pr=0.071, 0.71$, y distintos valores de Ri_b . (a) Wall-Law. (b) Log-Law.	30
5.7. Perfiles medios de temperatura adimensional en unidades de pared para $Re_o=5000$ y $Pr=0.071, 0.71$, y distintos valores de Ri_b . (a) Wall-Law. (b) Log-Law.	31
5.8. (a) Número de Nusselt normalizado vs Bo; (b) paridad con la correlación de Jackson <i>et al.</i>	33
5.9. Producción de energía cinética turbulenta: (a) componente por cizalla \mathcal{P} y (b) contribución de la fuerza boyante \mathcal{B} .	34
5.10. Perfil de la magnitud media $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.	35
5.11. Coeficiente de fricción de Darcy vs Bo y correlación propuesta; el ajuste reproduce los datos DNS/experimentales con $\sigma = 0.018$.	36

6.1. Evolución temporal de (a) Re_τ y (b) TKE para las distintas condiciones iniciales del caso A	41
6.2. Evolución temporal de (a) Re_τ y (b) TKE para las distintas condiciones iniciales del caso B	42
6.3. Evolución temporal de (a) la energía cinética turbulenta y (b) la vari- anza de la temperatura, para el caso A-C10.	43
6.4. Perfiles de (a) velocidad y (b) temperatura adimensional para distintos instantes t^* correspondiente al caso A-C10.	44
6.5. Evolución temporal de (a) factor de fricción de Darcy y (b) número de Nusselt, para el caso A-C10.	45
6.6. Evolución temporal de (a) la energía cinética turbulenta y (b) la vari- anza de la temperatura, para el caso B-C2.	46
6.7. Evolución temporal de (a) factor de fricción de Darcy y (b) número de Nusselt, para el caso B-C2.	47
6.8. Perfiles de (a) velocidad y (b) temperatura adimensional para distintos instantes t^* correspondiente al caso B-C2.	48
B.1.	55
B.2.	55
B.3.	56
B.4.	56
B.5.	57
B.6.	57
B.7.	58
B.8.	58
B.9.	59
B.10.	59
B.11.	60
B.12.	60
C.1.	61
C.2.	61
C.3.	62
C.4.	62
C.5.	62
C.6.	63
C.7.	63
C.8.	64
C.9.	64
C.10.	65

C.11.	65
C.12.	66
C.13.	66

Índice de tablas

6.1.	Parámetros adimensionales de los dos casos elegidos.	40
6.2.	Parámetros de las condiciones iniciales para el caso A ($\text{Re}_o = 5000$, $\text{Pr} = 0.71$, $\text{Ri}_b = 0.04$).	41
6.3.	Parámetros de las condiciones iniciales para el caso B ($\text{Re}_o = 5000$, $\text{Pr} = 0.71$, $\text{Ri}_b = 1.06$).	42
C.1.	65

Resumen

Este es el resumen en castellano.

La tesis debe reflejar el trabajo desarrollado, mostrando la metodología utilizada, los resultados obtenidos y las conclusiones que pueden inferirse de dichos resultados.

Palabras clave: FLUJO TURBULENTO, CONVECCIÓN MIXTA

Abstract

This is the title in English:

The thesis must reflect the work of the student, including the chosen methodology, the results and the conclusions that those results allow us to draw.

Keywords: TURBULENT FLOW, MIXED CONVECTION

Capítulo 1

Introducción

Capítulo introductorio de la tesis

Algunas preguntas clave que deberían responderse en este capítulo:

¿Cuál es el campo general de estudio de tu tesis?

¿Qué fenómeno, problema o sistema estás investigando?

¿Por qué este tema es relevante científica o tecnológicamente?

¿Qué problema específico intenta resolver tu tesis?

¿Cuáles son los objetivos (generales y/o específicos)?

¿Qué enfoque metodológico utilizás? ¿Experimental, teórico, computacional?

¿Cómo está organizada la tesis?

1.1. Introducción

Convección Mixta

Un fluido, en virtud de su masa y velocidad, puede transportar momento. Además, en virtud de su temperatura, puede transportar calor. Estrictamente hablando, la convección es el transporte de energía debido al movimiento global de un medio. Sin embargo, en ingeniería es común utilizar el término convección de forma más amplia para describir la transferencia de calor desde una superficie hacia un fluido en movimiento cuando ambos están a diferentes temperaturas [Cengel and Ghajar, 2015, Incropera et al., 2006].

La transferencia de calor por convección puede clasificarse según la naturaleza del flujo. Hablamos de convección forzada cuando el flujo es provocado por actores externos como puede ser la acción de bombeo o un gradiente de presión; en cambio, en la convección natural, el flujo es inducido por fuerzas boyantes o de flotación, las cuales se deben a diferencias de densidad producidas por variaciones de temperatura en el propio fluido (Figura 1.1).



Figura 1.1: Comparación esquemática de la transferencia de calor alrededor de una tubería caliente: (izquierda) convección forzada; (derecha) convección natural.

Los primeros estudios sobre la transferencia de calor por convección trataron las ramas de la convección forzada y la convección natural de forma separada, sin considerar la posible interacción entre ambas. Por un lado, los experimentos de Henri Bénard (1901) marcaron un hito en la comprensión de la convección natural [Bénard, 1901]. Más tarde, Lord Rayleigh (1916) desarrolló la base teórica de la inestabilidad térmica en capas fluidas [Rayleigh, 1916]. En paralelo, en el ámbito de la convección forzada, trabajos como el de Dittus y Boelter (1930) establecieron correlaciones empíricas para la transferencia de calor en tubos [Dittus and Boelter, 1930]. No fue sino hasta mediados del siglo XX que comenzó a reconocerse que ambos mecanismos pueden coexistir

en muchas configuraciones de interés práctico. Así surgió el concepto de convección mixta, donde la convección forzada y la natural actúan simultáneamente como casos extremos de un fenómeno más general [Tao, 1960, Metais and Eckert, 1964].

Régimen de Transición y Transición Laminar-Turbulenta

Cuando un fluido se desplaza a través de un conducto o sobre una superficie, su movimiento puede clasificarse en dos tipos de régimen: laminar o turbulento. En el régimen laminar, el flujo es ordenado y las partículas del fluido se mueven en capas paralelas sin mezclarse entre sí. En cambio, en el régimen turbulento, el flujo es caótico, con remolinos, tiende a mezclarse, y presenta fluctuaciones en los campos de velocidad y presión. En ese sentido, un flujo que se encuentra en un estado desarrollado¹ intermedio, de transición , se dice que el flujo está en régimen de transición. Este estado de flujo no debe confundirse con la transición laminar-turbulenta del sistema, donde el flujo evoluciona de un régimen laminar a un régimen turbulento completamente desarrollado. Esta transición puede ocurrir en el tiempo (transición laminar-turbulenta temporal) o en el espacio (transición laminar-turbulenta espacial).

Por otro lado, la transición laminar-turbulenta es un fenómeno de gran importancia para la ingeniería y la física aplicada ya que está presente en diferentes dispositivos termohidráulicos. El cambio de un régimen a otro puede tener un impacto significativo en la transferencia de calor, especialmente en aplicaciones de convección mixta. El coeficiente de fricción (factor de Darcy) o el coeficiente de convección (número de Nusselt) se incrementan notablemente cuando se produce la transición [Incropera et al., 2006, White, 2011]. En ese sentido, este estado no es deseado desde el punto de vista ingenieril ya que es intermitente (es decir, el flujo puede fluctuar entre los regímenes laminar y turbulento), sin embargo, el estudio de la transición es relevante para poder controlar el fenómeno o anticipar, y por tanto aprovechar, su comportamiento. Por ejemplo, un problema importante se da en el diseño de intercambiadores de calor cuando el punto de trabajo del flujo dentro de los tubos o conductos se encuentra en régimen de transición donde las magnitudes relevantes (como coeficientes de fricción y de transferencia de calor) tienen una gran variación [Ghajar, 2019].

La evolución de un flujo, tanto en el tiempo como en el espacio, depende de las perturbaciones externas que reciba (por ejemplo, cambios de presión o de temperatura), de las condiciones de borde a las que esté sometido (como puede ser la rugosidad, flujo de calor en las paredes o gradientes de presión, entre otros) y de la respuesta del propio sistema, determinada por sus propiedades físicas y el régimen de flujo. Para modelar matemáticamente las condiciones que pueden modificar ese régimen —es decir, los estados iniciales capaces de desencadenar una transición— y analizar cómo dicha

¹Esto es, sus magnitudes no varían con el tiempo o con el espacio en un sentido estadístico.

transición impacta en la transferencia de calor, se recurre a la teoría de estabilidad hidrodinámica. Esta teoría ofrece un marco para predecir cuándo un flujo laminar se volverá inestable mediante el estudio de la evolución de pequeñas perturbaciones: si estas crecen en el espacio o en el tiempo, el flujo pierde su estabilidad y eventualmente transiciona hacia un régimen turbulento.

La investigación teórica sobre la transición ha tenido un desarrollo histórico notable que se remonta al siglo XIX, con el célebre experimento de Osborne Reynolds [Reynolds, 1883], que marcó el inicio del estudio sistemático del fenómeno. A comienzos del siglo XX, Orr [Orr, 1907] y Sommerfeld [Sommerfield, 1908] formalizaron las bases de la estabilidad hidrodinámica al desarrollar las ecuaciones linealizadas que llevan sus nombres, conocidas como ecuaciones de Orr-Sommerfeld. Estas describen la evolución de perturbaciones en un flujo y son fundamentales para comprender los mecanismos de transición. Un avance crucial se produjo con los trabajos de Tollmien [Tollmien, 1930] y Schlichting [Schlichting, 1933], quienes describieron de forma teórica el estado lineal de la transición; esta teoría fue confirmada experimentalmente en el estudio de la capa límite sobre una placa plana realizado por Schubauer y Skramstad [Schubauer and Skramstad, 1947]. Finalmente, la incorporación de la teoría de inestabilidad secundaria por Herbert [Herbert, 1983] permitió extender el análisis al caso tridimensional, ofreciendo así una comprensión más completa del fenómeno.

1.2. Motivación

En la actualidad, muchos problemas de ingeniería presentan flujos en régimen de transición. La mayoría de los flujos en estas condiciones son no isotérmicos [Chen and Chung, 2003]. El estudio de la transferencia de calor en la transición laminar-turbulenta es importante en diversas aplicaciones ingenieriles, como en los elementos combustibles de reactores nucleares, en intercambiadores de calor, en los álabes de una turbina, equipos electrónicos, entre otros.

Por otro lado, el fenómeno de convección mixta puede manifestarse conjuntamente en flujos atmosféricos [Pirozzoli et al., 2017] como también en aplicaciones de ingeniería presentes en el proceso de fabricación de silicio, la refrigeración de equipos electrónicos, paneles solares térmicos, álabes de turbinas, intercambiadores de calor de diverso tipo, reactores nucleares, entre otros [Kasagi and Nishimura, 1997].

Entre las aplicaciones técnicas de mayor relevancia de la convección mixta se destaca el transporte de energía térmica. En las últimas décadas se han realizado muchos esfuerzos para desarrollar técnicas tendientes a mejorar la transferencia de calor y el desempeño global de los intercambiadores de calor. El interés en estas técnicas radica en el ahorro de la energía. En este sentido, las necesidades energéticas actuales propician el diseño y la mejora constante de los reactores nucleares utilizados para la provisión de

energía eléctrica. Dentro de la nueva generación de reactores nucleares GEN-IV², de los seis conceptos especificados, uno corresponde a reactores tipo GFR (*Gas-cooled Fast Reactor*) que utiliza como refrigerante gas helio cuyo número de Prandtl es $\text{Pr} \approx 0,7$ similar al aire.

1.3. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es el estudio de la transferencia de calor en régimen de transición laminar-turbulenta en convección mixta. Para ello se emplea la herramienta numérica Incompact3D. Se obtienen resultados numéricos para números de Reynolds entre 2000 y 5000, números de Prandtl igual a 0,071 y 0,71 y números de Richardson entre 0,04 y 106.

Parte de las tareas secundarias para la realización de trabajo incluyeron:

- Entrenamiento y manejo en el uso de la herramienta numérica Incompact3D.
- Validación de la herramienta numérica y simulación de flujos turbulentos.
- Validación de 1 de métodos para inestabilizar soluciones laminares en la herramienta numérica.

No se como escribir esta parte. Como escribir el uso y validación de la herramienta de Szuban y todo lo demas que queda referido a los objetivos.

1.4. Organización del trabajo

²<https://www.gen-4.org/>

Capítulo 2

Modelo Matemático

Resumen del capítulo 2. Marco teórico (acotado) del contenido mínimo necesario para el entendimiento de los capítulos posteriores.

2.1. Conceptos Elementales de Turbulencia

Definiciones y conceptos básicos de turbulencia.

2.2. Descripción del sistema bajo estudio. Ecuaciones de Gobierno

Se considera el sistema representado en la Figura 2.1 donde la dinámica de un fluido viscoso e incompresible sucede entre dos paredes paralelas e infinitas ubicadas en $y = \pm d$. Esto constituye un canal de placas paralelas donde ambas paredes están sometidas a un flujo de calor constante q''_w .

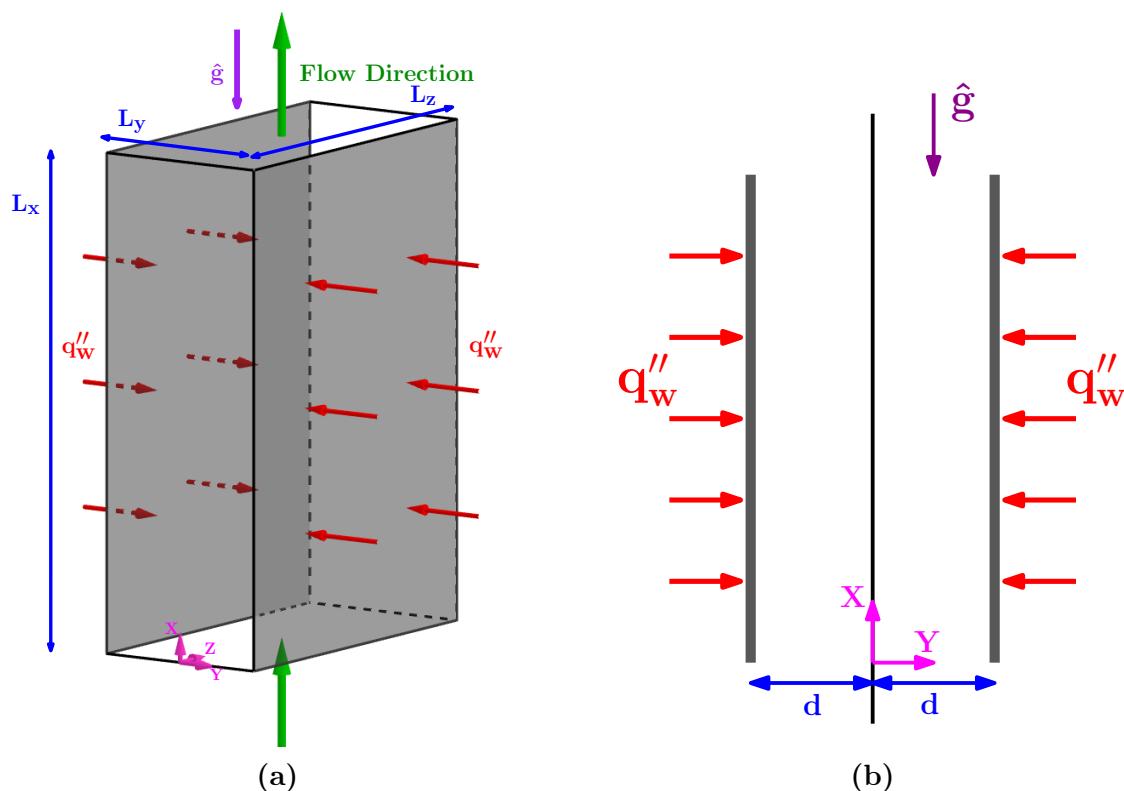


Figura 2.1

El flujo ocurre en la dirección de la corriente (*streamwise*) paralelo al eje X y su sentido es opuesto a la aceleración de la gravedad. Esta configuración se conoce como flujo ascendente o *aiding flow*. Las ecuaciones de gobierno corresponden a los principios de conservación de masa, momento y energía que se expresan en el cuadro 2.1.

$\nabla \cdot (\rho_o \mathbf{u}) = 0$ $\frac{\partial(\rho_o \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_o \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu_o \nabla^2 \mathbf{u} + \rho(T) \mathbf{g}$ $\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T$	(2.1)
--	-------

Un sistema físico cuyas dimensiones “son muy grandes” (o infinitas) constituye un sistema ideal. En él, es posible ubicar el origen de nuestro sistema de referencia lejos de los extremos a fin de evitar efectos de bordes. Allí, el flujo se encuentra completamente desarrollado y ha alcanzado un estado estadísticamente estacionario, es decir, sus valores estadísticos, como el promedio, no varían en el tiempo. En este contexto, la condición de flujo de calor constante en las paredes se imponen como condiciones de Neumann:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\mp d} = \pm q_w'' \quad (2.2)$$

Sin embargo, debido a la limitación computacional evidente, nuestro modelo computacional no puede abarcar dicha extensión. En ese sentido, el “dominio infinito” se reemplaza con un dominio acotado de dimensiones $L_x \times L_y \times L_z$ (Figura 2.1a) adoptando condiciones de borde periódicas (PBC) en la direcciones X y Z :

$$\xi(x = 0, y, z, t) = \xi(x = L_x, y, z, t) \quad (2.3)$$

$$\xi(x, y, z = 0, t) = \xi(x, y, z = L_z, t) \quad (2.4)$$

siendo ξ un campo escalar de interés. Esto se puede interpretar como si las PBC crearan “la ilusión” de un dominio infinito, mediante la repetición de este dominio finito en el espacio.

Por otra parte, en un flujo turbulento, dado que este no es estacionario, aparecen fluctuaciones del flujo de calor y de la temperatura sobre la superficie de la pared. En este contexto, algunos autores [Kasagi et al., 1992, Tao, 1960] asumen que las fluctuaciones de temperatura son pequeñas a fin de considerar que la temperatura en la pared es localmente isotérmica y que además, el flujo de calor no varía en la dirección de la corriente. Eso equivale a suponer que la temperatura en la pared, promediada en el tiempo y en la dirección Z , crece linealmente con la coordenada x , y por lo tanto:

$$\langle T_w \rangle = \mathcal{A}x.$$

Debido al crecimiento lineal de $\langle T_w \rangle$, es requerido realizar el cambio de variable $T(x, y, z, t) = \langle T_w \rangle - \theta(x, y, z, t)$ para que siga siendo válido las condiciones de borde periódicas, esto es, $\theta(x = 0, y, z, t) = \theta(x = L_x, y, z, t)$. Dicha modificación introduce un término fuente en la ecuación de conservación de energía:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \alpha \nabla^2 \theta + \mathcal{A} u_x \quad (2.5)$$

Por su parte, el término $\rho(T)\mathbf{g}$ de la ecuación de momento se reescribe empleando la aproximación de Boussinesq [Incropera et al., 2006], donde $\rho_o \equiv \rho(T_R)$:

$$\rho(T)\mathbf{g} \simeq \rho_o [1 - \beta(T - T_R)] \mathbf{g} \quad (2.6)$$

$$\simeq \rho_o [1 - \beta((\langle T_w \rangle - \theta) - T_R)] \mathbf{g} \quad (2.7)$$

$$\simeq \rho_o \beta \theta \mathbf{g} + \rho_w \mathbf{g} \quad (2.8)$$

siendo $\rho_w \equiv \rho(T = \langle T_w \rangle)$. Utilizando estas definiciones, la ecuación de momento se reescribe como se expresa en la ecuación 2.9 siendo $\hat{\mathbf{e}}_g = (-1, 0, 0)$.

$$\frac{\rho_o \partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_o \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu_o \nabla^2 \mathbf{u} + g \rho_o \beta \theta \hat{\mathbf{e}}_g + \rho_w g \hat{\mathbf{e}}_g \quad (2.9)$$

Mediante el balance de energía en el volumen de control $L_x \times L_y \times L_z$, es posible demostrar que $\mathcal{A} = \frac{q''_w}{\rho_o c_p U_b d}$ siendo d el semiancho del canal. Así, empleando la velocidad en el centro del canal U_o , el semiancho d y la temperatura $T_o = \mathcal{A}d$, el sistema de ecuaciones 2.1 dimensional queda escrito en su forma adimensional como se muestra en el cuadro 2.10. Los números adimensionales asociados a estas ecuaciones se expresan en las relaciones 2.11: de izquierda a derecha, se tiene el número de Reynolds, el número de Prandtl, el parámetro que acompaña al término boyante y al número de Richardson basado en el flujo de calor.

Otro detalle importante es el hecho de que el fluido de trabajo es impulsado por un caudal másico constante. Esta cuestión se encuentra representada por el término fuente $f \hat{\mathbf{e}}_x$, en la ecuación de momento, donde f es una constante en el espacio y varía con el tiempo de manera que mantiene constante el caudal total.

$$\begin{aligned} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \Pi \theta^* \hat{\mathbf{e}}_g + f \hat{\mathbf{e}}_x + \rho_w g \hat{\mathbf{e}}_g \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{Re_o Pr} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^* \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$Re_o = \frac{\mu_o}{\rho_o U_o d} \quad ; \quad Pr = \frac{\mu_o}{\rho_o \alpha} \quad ; \quad \Pi = \frac{Ri_o}{Re_o Pr} \quad ; \quad Ri_o = \frac{g \beta q''_w d^2}{k U_o^2} \quad (2.11)$$

Asimismo, las condiciones de flujo de calor constante están expresadas en la ecuación 2.12. Sin embargo, estas condiciones pueden ser aproximadas como condiciones de Dirichlet ya que al suponer que la temperatura de las paredes es constante (fluctua-

ciones de temperatura despreciables) se obtiene:

$$T(x, y = 0, z, t) = T(x, y = 2d, z, t) = \langle T_w \rangle$$

Éste tipo aproximaciones se conoce en la literatura científica como *Mixed Boundary Conditions* [Straub et al., 2019] y su forma adimensional se expresa en la ecuación 2.13. Por último, para las componentes de velocidad y el campo de presión, se adoptan condiciones de no deslizamiento y condiciones de Neumann homogéneas, respectivamente, en las paredes.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=-1} &= +\frac{2}{3} \text{Re}_o \text{Pr} \\ \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=+1} &= -\frac{2}{3} \text{Re}_o \text{Pr} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = 0, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = 2, z^*, t^*) = 0 \quad (2.13)$$

2.2.1. Sumario de Ecuaciones

Ecuaciones de Gobierno:

$$\begin{aligned} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\text{Ri}_o}{\text{Re}_o \text{Pr}} \theta^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{e}}_x + \rho_w g \hat{\mathbf{e}}_g \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}_o} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^* \end{aligned} \quad (2.14)$$

Condiciones de borde: considerando $\xi = u_x^*, u_y^*, u_z^*, p^*, \theta^*$, entonces

$$\xi(x^* = 0, y^*, z^*, t^*) = \xi(x^* = L_x/d, y^*, z^*, t^*) \quad (2.15)$$

$$\xi(x^*, y^*, z^* = 0, t^*) = \xi(x^*, y^*, z^* = L_z/d, t^*) \quad (2.16)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.17)$$

$$\mathbf{u}^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \mathbf{u}^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.18)$$

$$\partial_y p^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \partial_y p^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.19)$$

A lo largo de este trabajo también se utiliza, particularmente para el análisis de estabilidad lineal, la forma adimensional de las ecuaciones del trabajo de Chen [Chen and Chung, 1996] que se obtienen empleando el semiancho del canal d , la velocidad media laminar $\langle u_x \rangle$ y la temperatura $T_c = \text{Re} \text{Pr} \mathcal{A} d$. Dichas ecuaciones se expresan en 2.20. Las condiciones de borde son exactamente análogas que su forma adimensional de más arriba.

$$\begin{aligned}
 \nabla^* \cdot \mathbf{v}^* &= 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}_b} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \varphi^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{x}} \quad (2.20) \\
 \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \varphi^* &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}_b} [\nabla^{*2} \varphi^* - v_x^*] \\
 \varphi^* &= -\frac{\theta^*}{\text{Re}_o \text{Pr}} \quad ; \quad \mathbf{v}^* = \frac{2}{3} \mathbf{u}^* \quad ; \quad \text{Re}_b = \frac{2}{3} \text{Re}_o
 \end{aligned}$$

2.3. Teoría de Estabilidad Lineal. Perturbaciones

Para analizar la estabilidad lineal y prever de forma matemática cómo cambiará un flujo una vez perturbado, resulta indispensable aceptar que las perturbaciones actúan sobre un flujo base. Aquí se adopta como referencia el flujo laminar completamente desarrollado. En consecuencia, la evolución de las perturbaciones también queda condicionada por dicho estado inicial.

2.4. Flujo Base

Si el flujo está completamente desarrollado, tanto térmica como hidrodinámicamente, entonces el mismo sólo dependerá de la variable y^* . El sistema de ecuaciones 2.20 se reduce a la ecuación de momento en la dirección X y a la ecuación de transporte del escalar pasivo, las cuales quedan expresadas como

$$\frac{dp^*}{dx^*} = \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \Phi^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 V_x^*}{dy^{*2}} \quad (2.21)$$

$$\frac{d^2 \Phi^*}{dy^{*2}} = V_x^* \quad (2.22)$$

El perfil de velocidad y de temperatura admiten las condiciones de borde $V_x^*(y^* = \pm 1) = \Phi^*(y^* = \pm 1) = 0$. Las soluciones para un flujo asistido por fuerzas boyantes están dadas por las expresiones 2.23 y 2.24, mientras que para un flujo donde las fuerzas boyantes son opuestas, las soluciones quedan definidas por las ecuaciones 2.25 y 2.26 [Chen and Chung, 1996].

$$V_x^* = \frac{-E}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\sinh(\kappa(1+y^*)) \sin(\kappa(1-y^*)) + \sinh(\kappa(1-y^*)) \sin(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \quad (2.23)$$

$$\Phi^* = \frac{E}{\text{Ra}} \left[1 - \frac{\cosh(\kappa(1+y^*)) \cos(\kappa(1-y^*)) + \cosh(\kappa(1-y^*)) \cos(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \right] \quad (2.24)$$

$$V_x = \frac{F}{2m^2} \left(\frac{\cosh(my^*)}{\cosh(m)} - \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} \right) \quad (2.25)$$

$$\Phi^* = \frac{F}{2m^4} \left(\frac{\cosh(my^*)}{\cos(m)} + \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} - 2 \right) \quad (2.26)$$

$$\kappa = \frac{\text{Ra}^{-1/4}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad m = (-\text{Ra})^{1/4} \quad ; \quad F = \frac{2m^3}{\tanh(m) - \tan(m)} \quad ;$$

$$E = -2\kappa \text{Ra}^{1/2} \frac{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)}{\sinh(2\kappa) - \sin(2\kappa)}$$

Obsérvese que el único parámetro aquí es el número de Rayleigh. En el Capítulo 3, se utilizarán estas ecuaciones para la validación de la herramienta numérica en estas condiciones.

2.5. Análisis de Estabilidad Lineal

La transición laminar-turbulenta, es decir, la evolución de un flujo laminar a uno turbulento, es crucial en ingeniería, ya que las características del flujo varían notablemente entre estos regímenes. Por ejemplo, los coeficientes de fricción y de convección aumentan considerablemente al pasar de un régimen laminar a uno turbulento. La ecuación de Navier–Stokes admite ambas soluciones bajo ciertos parámetros, lo que implica que el tipo de flujo y su evolución dependen de las perturbaciones y las condiciones impuestas en el sistema. Muchos fenómenos que cumplen exactamente las leyes de conservación resultan inobservables porque se inestabilizan ante las pequeñas perturbaciones inevitables en cualquier sistema real [Kundu et al., 2016].

El análisis de estabilidad lineal permite evaluar cómo se comporta un flujo ante perturbaciones, identificando los mecanismos que pueden inducir transiciones o estados de intermitencia. En el caso de flujos de fluidos, condiciones como un número de Reynolds inferior a un valor crítico garantizan la estabilidad de un flujo laminar suave. Sin embargo, en ocasiones las perturbaciones crecen hasta alcanzar amplitudes finitas y establecer nuevos equilibrios estacionarios, que pueden volverse inestables a su vez y evolucionar hacia estados de fluctuaciones caóticas, comúnmente descritos como turbulencia. Dos motivaciones principales para estudiar la estabilidad de los fluidos son comprender el proceso de transición de un flujo laminar a uno turbulento y predecir el inicio de dicha transición.

El enfoque parte de las ecuaciones de gobierno 2.20 donde se han omitido los superíndices “*”. La idea consiste en suponer que los campos solución (\mathbf{v}, p, φ) pueden descomponerse como un flujo base más una perturbación:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.27)$$

$$p = P + \tilde{p} \quad (2.28)$$

$$\varphi = \Phi + \tilde{\varphi} \quad (2.29)$$

donde las letras mayúsculas hacen referencia al flujo base laminar y aquellas letras con $\tilde{()}$ a las perturbaciones.

Despreciando términos de segundo orden, esto es, productos de perturbaciones, y asumiendo que los flujos bases son los flujos laminares desarrollados $\mathbf{V} = (V_x(y), 0, 0)$ y $\Phi \equiv \Phi(y)$ es posible expresar las ecuaciones que describen la dinámica de $\tilde{\mathbf{v}}$, \tilde{p} y $\tilde{\varphi}$ de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.30)$$

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + V_x \partial_x \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{v}_y \partial_y V_x \hat{\mathbf{e}}_x = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re_b} \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} + \frac{Ra}{Re_b} \tilde{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.31)$$

$$\partial_t \tilde{\varphi} + V_x \partial_x \tilde{\varphi} + \tilde{v}_y \partial_y \Phi = \frac{1}{Re_b Pr} [\nabla^2 \tilde{\varphi} - \tilde{v}_x] \quad (2.32)$$

Luego, aplicando el operador divergencia a la ecuación 2.31 es posible encontrar una expresión para el laplaciano de la presión:

$$-\nabla \tilde{p} = 2 \partial_x \tilde{v}_y \partial_y V_x - \frac{Ra}{Re_b} \partial_x \tilde{\varphi} \quad (2.33)$$

Aplicando el operador laplaciano a la componente Y de la ecuación 2.31 es posible eliminar el término que involucra la presión, resultando en la siguiente expresión:

$$\left\{ [\partial_t + V_x \partial_x] \nabla^2 - D^2(V_x) \partial_x - \frac{1}{Re_b} \nabla^4 \right\} \tilde{v}_y = -\frac{Ra}{Re_b} \partial_{xy} \tilde{\varphi} \quad (2.34)$$

donde $D^j \equiv \partial_y^j$.

Para la descripción completa de las perturbaciones se utiliza la componente y de la vorticidad $\tilde{\eta} \equiv \partial_z \tilde{v}_x - \partial_x \tilde{v}_z$ cuya dinámica se detalla dada por la ecuación 2.35.

$$\left[\partial_t + V_x \partial_x - \frac{1}{Re_b} \nabla^2 \right] \tilde{\eta} + D(V_x) \partial_z \tilde{v}_y = \frac{Ra}{Re_b} \partial_z \tilde{\varphi} \quad (2.35)$$

Así, las ecuaciones 2.32, 2.34 y 2.35 constituyen un sistema de EDP de 3 ecuaciones con 3 campos incognitas. A partir de los campos escalares $\tilde{\eta}$ y \tilde{v}_y , utilizando las ecuación 2.30 y la definición de $\tilde{\eta}$ es posible hallar los campos \tilde{v}_x y \tilde{v}_z . Asimismo, empleando la ecuación 2.33 y los campos \tilde{v}_y y $\tilde{\varphi}$ es posible hallar el campo de presión \tilde{p} .

Las soluciones a dicho sistema se proponen como ondas planas tridimensionales. Si $\tilde{\xi}$ es una perturbación cualquiera, entonces, se escribe de la siguiente forma arbitraria:

$$\tilde{\xi} = \hat{\xi}(y) e^{i[\alpha x + \beta z - \omega t]} \quad (2.36)$$

donde $c \equiv c_r + i c_i$ es la velocidad de fase y $\omega \equiv \omega c$ es la frecuencia angular. Además:

$$\alpha, \beta, c_r, c_i, \epsilon \in \mathbb{R}$$

En este sentido, se distinguen dos casos:

- ◆ Si $\alpha c_i > 0$ entonces las perturbaciones crecen en el tiempo. El flujo se vuelve inestable.
- ◆ Si $\alpha c_i < 0$ entonces las perturbaciones decaen exponencialmente en el tiempo y la perturbación se atenúa. El flujo se vuelve estable.

Al reemplazar las soluciones tipo 2.36 en el sistema de ecuaciones se obtiene un problema de autovalores generalizado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{v}_y \\ \widehat{\varphi} \\ \widehat{\eta} \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{v}_y \\ \widehat{\varphi} \\ \widehat{\eta} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2]^2 - i\alpha (V_x [D^2 - k^2] + D^2(V_x)) ; \quad a_{12} = - \left[i\alpha \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} D \right] \\ a_{21} &= \frac{i\alpha}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} D + D(\Phi) ; \quad a_{22} = \frac{-1}{\text{Re}_b \text{Pr}} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x ; \quad a_{23} = \frac{\beta}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} \\ a_{31} &= \beta D(V_x) ; \quad a_{32} = -\beta \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} ; \quad a_{33} = -\frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x \\ b_1 &= -[D^2 - k^2] ; \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

A partir de las condiciones de borde 2.15 - 2.19, las autofunciones $\widehat{v}_y(y)$, $\widehat{\varphi}(y)$, $\widehat{\eta}(y)$ deben satisfacer las condiciones:

$$\widehat{v}_y(y) = D(\widehat{v}_y) = \widehat{\varphi}(y) = \widehat{\eta}(y) = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm 1 \quad (2.38)$$

La resolución de este problema de autovalores generalizado se realiza empleando una estrategia numérica la cuál se detalla en el capítulo 3.

2.6. Mecanismos de Inestabilidad. Ondas TS e Inestabilidad Secundaria

FALTA COMPLETAR. Esto es solo para poder citar las formulas en el capítulo 6 de resultados.

Para el estudio de la transición temporal es necesario introducir una condición inicial en el flujo de interés. En el presente trabajo, la perturbación impuesta en la condición inicial, siguiendo la metodología de Zang y Krist [1989], se calcula con las autofunciones asociadas a un autovalor elegido. La condición inicial adoptada tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z, t = 0) &= \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{v}} \\ \phi(x, y, z, t = 0) &= \Phi + \tilde{\varphi} \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde $\mathbf{V} = (V_x(y), 0, 0)$ y también se tiene que:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}(x, y, z, t = 0) &= A_{2D} \mathbb{R} [\widehat{\mathbf{v}_{2D}}(y) e^{i\alpha_{2D}x}] + \frac{1}{2} A_{3D} \mathbb{R} [\widehat{\mathbf{v}_{3D}^+}(y) e^{i(\alpha x + \beta z)}] \\ &\quad + \frac{1}{2} A_{3D} \mathbb{R} [\widehat{\mathbf{v}_{3D}^-}(y) e^{i(\alpha x - \beta z)}] \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x, y, z, t = 0) = & A_{2D} \Re \left[\widehat{\varphi_{2D}}(y) e^{i\alpha_{2D}x} \right] + \frac{1}{2} A_{3D} \Re \left[\widehat{\varphi_{3D}^+}(y) e^{i(\alpha x + \beta z)} \right] \\ & + \frac{1}{2} A_{3D} \Re \left[\widehat{\varphi_{3D}^-}(y) e^{i(\alpha x - \beta z)} \right]\end{aligned}\quad (2.41)$$

Capítulo 3

Fundamentos de Herramientas Numéricas

Nociones Elementales de que consiste hacer simulaciones numéricas directas (DNS).
Descripción de las herramientas numéricas empleadas.

3.1. Simulaciones Numéricas Directas

Falta escribir

3.2. Xcompac3D

3.2.1. Métodos Numéricos

Falta escribir

3.2.2. Validación

Falta escribir

...

“A efectos prácticos las aproximación de flujo de calor cte (condición de Neuman) como una condición de Dirichlet igual a 0 resulta mejor desde el punto de vista numérico ya que la fluctuación de los campos es mayor y se requiere más tiempo de corrida para conseguir una buena estadística ...”

3.3. Orr-Sommerfeld - *Mixed Convection* (OSMC)

Falta escribir

3.3.1. Métodos Numéricos

Falta escribir

Falta escribir

Capítulo 4

Validación de Herramientas Numéricas

Validación de las herramientas numéricas empleadas.

4.1. Primera Parte: Xcompac3D

...

“A efectos prácticos las aproximación de flujo de calor cte (condición de Neuman) como una condición de Dirichlet igual a 0 resulta mejor desde el punto de vista numérico ya que la fluctuación de los campos es mayor y se requiere más tiempo de corrida para conseguir una buena estadística ...”

4.2. Segunda Parte: Orr-Sommerfeld - *Mixed Convection*

Falta escribir

Capítulo 5

Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollado

El propósito de este capítulo es mostrar, vía simulaciones numéricas, cómo la flotabilidad o boyancia modifica un flujo turbulento plenamente desarrollado en un canal de placas paralelas. Se utiliza para esto simulaciones DNS que cubren un extenso espectro de números de Reynolds, Richardson y Prandtl, lo que permite examinar la evolución desde convección forzada hasta convección natural. Tras describir los casos y las variables adimensionales de referencia, se presentan (i) magnitudes estadísticas de primer y segundo orden, (ii) la influencia del número de Prandtl sobre las subcapas viscosa y térmica, (iii) el número de Nusselt y (iv) el factor de fricción de Darcy.

La fuerza boyante convierte los perfiles de velocidad en forma de “M” y desplaza el máximo de $\langle u_x^* \rangle$ hacia la pared. Para $Rib > 1$, la mezcla inducida aplana el perfil de temperatura adimensional y atenúa sus fluctuaciones en el núcleo. El efecto del Prandtl es claro: con $Pr=0.071$ la ley de pared $\langle \theta^* \rangle \simeq Pr y^+$ se mantiene hasta $y^+ \approx 30$, mientras que con $Pr=0.71$ concluye en $y^+ \approx 7$, reflejando la influencia de Pr en la capa conductiva.

Existe un intervalo $10^{-6} \lesssim Bo \lesssim 3 \times 10^{-5}$ donde Nu se degrada, fuera de él, la transferencia se recupera y supera el caso forzado. Esta caída de Nu coincide con una menor producción de turbulencia cerca de la pared.

Por último, la boyancia incrementa el gradiente de velocidad en la pared y eleva el factor de Darcy. La correlación propuesta reproduce con buena fidelidad los datos simulados y de referencia.

5.1. Casos simulados

Los resultados de las simulaciones realizadas en este capítulo corresponden a un flujo completamente desarrollado tanto térmica como hidrodinámicamente. Se emplearon $Re_o=2100$, 3150, 4278, 5000, $Pr=0.071$, 0.71 y valores de Richardson en el rango $0.04 \lesssim Ri_b \lesssim 106$. Desde una perspectiva física, la interpretación de estos números adimensionales puede resumirse así: un aumento del número de Reynolds implica una menor viscosidad cinemática y, por tanto, una difusión más rápida del momento dentro del fluido; un incremento del número de Prandtl señala una reducción de la conductividad térmica; mientras que un mayor número de Richardson denota un crecimiento en el flujo de calor.

En la Figura 5.1 se expone un “mapa” del régimen de flujo donde se gráfica el número de Reynolds *bulk*¹ versus el número de Richardson *bulk* y se muestran las simulaciones realizadas en este trabajo. Es oportuno precisar que, como hipótesis inicial, se supone que ambos fenómenos actúan de forma independiente; no obstante, tal independencia no está necesariamente garantizada. Cabe destacar, además, que en este trabajo se analiza la transición de un régimen a otro, en el cual el flujo se vuelve inestable y puede manifestar intermitencia y/o turbulencia [Chen and Chung, 2003]. Aceptando provisionalmente que la interacción entre los fenómenos es despreciable y tomando como referencia el diagrama de Moody [White, 2011], se presenta lo siguiente:

- para valores de $Re_b^D < 2000$ el régimen es laminar,
- si $2000 \lesssim Re_b^D \lesssim 4000$ el régimen es de transición,
- y si $Re_b^D > 4000$ el régimen es turbulento.

Por otra parte, el fenómeno de convección es [Incropera et al., 2006, Cengel and Ghajar, 2015]:

- forzado si $Ri_b < 0.1$,
- mixto si $0.1 < Ri_b < 10$,
- y natural si $Ri_b > 10$.

¹Número de Reynolds basado en la velocidad *bulk* y el diámetro hidráulico: $Re_b^D = 8/3 Re_o$

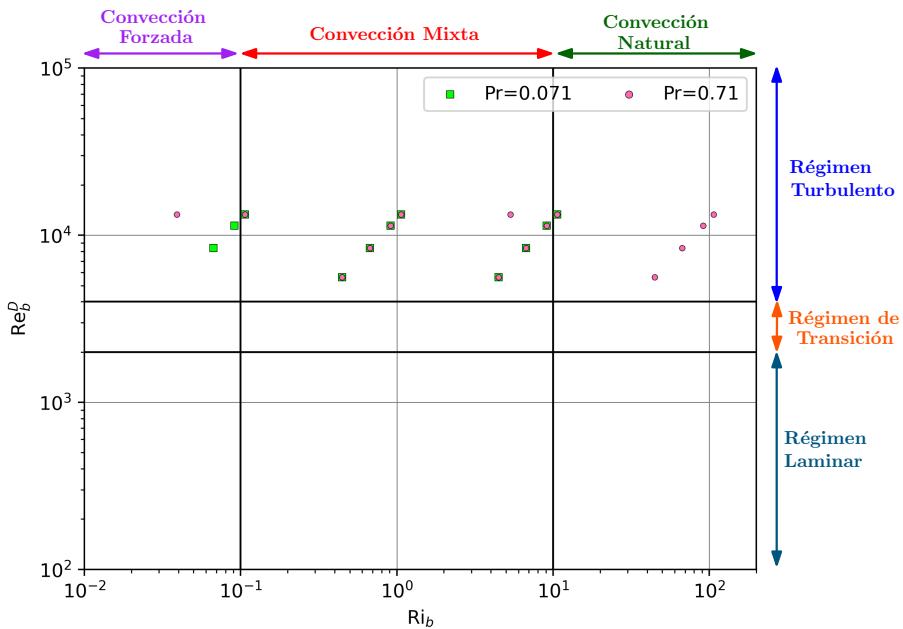


Figura 5.1: Mapa de regímenes en el plano $Re_b^D - Ri_b$. Se señalan las zonas laminar, de transición y turbulenta, así como los dominios de convección forzada, mixta y natural.

De esta manera, basados en el diagrama de Moody, la totalidad de casos se encuentra en un régimen de flujo turbulento. En su mayoría, los casos se encuentran en flujo de convección mixta, sin embargo, se cuenta con casos donde predomina la convección forzada, y otros donde domina la convección natural. Esto brinda un espectro amplio para el análisis del problema.

5.2. Magnitudes de Primer y Segundo Orden

En esta sección se analiza la influencia de la fuerza boyante en las magnitudes estadísticas de primer y segundo orden. Para tal fin, se consideran, únicamente, los casos $Re_o=5000$ y $Pr=0.71$. El aumento de la fuerza boyante, o el número de Ri_b , equivale a aumentar el flujo de calor. En otras palabras, el aumento de la boyancia en el sistema físico puede interpretarse como aumentar la energía térmica que se le entrega a través de las paredes cuando el fluido es ascendente².

5.2.1. Perfiles de velocidad y de temperatura

En la Figura 5.2a se presentan los perfiles medios de velocidad *streamwise*³ para distintos números de Richardson. En dichos perfiles pueden distinguirse con claridad los tres regímenes de convección. Conforme se intensifica la fuerza boyante, las curvas adoptan una configuración en “M”, en concordancia con lo reportado por otros autores [You et al., 2003, Zhou et al., 2024]. A diferencia del caso de convección exclusivamente forzada, el máximo de

²También es equivalente a quitarle energía térmica (enfriar las paredes) cuando la dirección del flujo es descendente.

³Es decir, en la dirección de la corriente.

velocidad deja de situarse en la línea central del canal y se desplaza progresivamente hacia la pared a medida que aumenta Ri_b , [Carr et al., 1973, Steiner, 1971, Zhou et al., 2024], originando dos máximos locales en lugar del único pico característico del flujo puramente forzado. Este comportamiento puede interpretarse cualitativamente del siguiente modo: en las proximidades de la pared el fluido se encuentra a mayor temperatura lo que implica menor densidad; en consecuencia, la fuerza boyante acelera el flujo en esa región y, por conservación de masa, el fluido ubicado en la zona central experimenta una desaceleración.

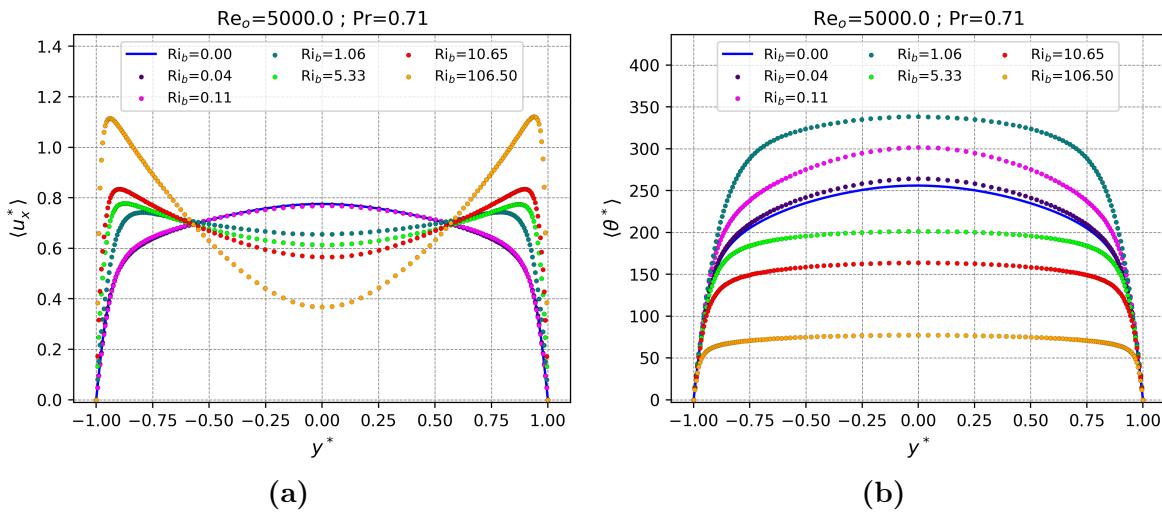


Figura 5.2: Perfiles medios adimensionales de (a) velocidad y (b) temperatura, para varios Ri_b .

Por otra parte, la Figura 5.2b presenta los perfiles medios de temperatura adimensional. A diferencia de los perfiles de velocidad, estos no exhiben la configuración en ‘M’ al igual que reportan otros autores [You et al., 2003, Steiner, 1971]. Los casos pueden clasificarse, en primera instancia, en dos conjuntos:

- (I) valores de Ri_b comprendidos entre 0.04 y 1.06,
- (II) valores de Ri_b entre 5.33 y 106.5.

Además, ambos conjuntos exhiben comportamientos físicos claramente diferenciados. Esta distinción se analizará en detalle a lo largo de la presente sección.

En el primer conjunto se aprecia un aumento del perfil adimensional respecto al caso de convección forzada, lo que equivale a un descenso de la temperatura dimensional. Cuando la fuerza boyante se intensifica (conjunto II) la temperatura adimensional disminuye, lo que indica un aumento en la temperatura dimensional del fluido. Asimismo, en este segundo conjunto, los perfiles presentan una forma ‘achatada’ en el seno del canal que puede interpretarse cualitativamente a partir de sus perfiles de velocidad: la diferencia de velocidades entre la región próxima a la pared y el centro del canal favorece la mezcla del fluido y, por consiguiente, conduce a una distribución térmica más homogénea.

5.2.2. Valores RMS de temperatura y velocidad

Las Figuras 5.3a y 5.3b muestran los perfiles de las fluctuaciones de temperatura adimensional y de velocidad *streamwise*, respectivamente. Partiendo del caso puramente forzado, el incremento de la fuerza boyante provoca evoluciones distintas en los conjuntos I y II considerados anteriormente. En el primero, se observa una disminución (incremento) de las fluctuaciones de velocidad (temperatura) seguida de una ligera recuperación (leve descenso). En el segundo, las fluctuaciones de velocidad crecen de manera sostenida a medida que la fuerza boyante se intensifica, mientras que las de temperatura tienden a reducirse. Tendencias análogas han sido descritas por otros autores [You et al., 2003, Carr et al., 1973].

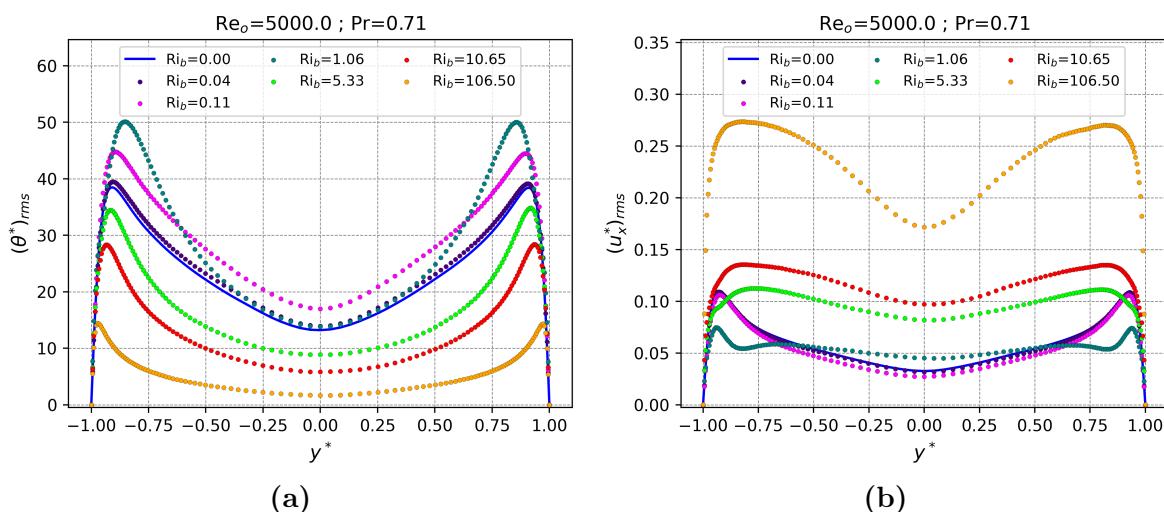


Figura 5.3: Fluctuaciones RMS: (a) velocidad en la dirección de la corriente y (b) temperatura adimensional.

Como se aprecia en la Figura 5.3b, la aparición de la fuerza boyante de baja intensidad realtiva produce primero una leve estabilización del flujo, evidenciada por una disminución de aproximadamente un 40 % en los máximos de $(u_x^*)_{rms}$ próximos a las paredes. En contraste, las fluctuaciones de temperatura T aumentan debido al incremento del flujo de calor impuesto y sus máximos se desplazan hacia el centro del canal, favorecidos por una relativa y débil redistribución causada por la turbulencia. Para $Ri_b=5.33$ la fuerza boyante adquiere mayor preponderancia y las fluctuaciones de velocidad crecen en todo el ancho del canal; por ejemplo, en el caso de $Ri_b=10.65$ el valor en el centro es un 100 % mayor respecto al caso con $Ri_b=1.06$. Este incremento de la agitación dinámica redistribuye las fluctuaciones de temperatura, que disminuyen la magnitud adimensional respecto al caso de convección forzada (Figura 5.3a).

5.2.3. Flujos turbulentos de calor

En la Figura 5.4a se expone el perfil de la correlación $\langle u_x'^* \theta'^* \rangle$. Esta cantidad corresponde al flujo de calor turbulento *streamwise* que surge a raíz del desarrollo de la ecuación de conservación de energía promediada [Kundu et al., 2016, Pope, 2001], y puede interpretarse como el calor transportado por las estructuras producidas por el flujo turbulento.

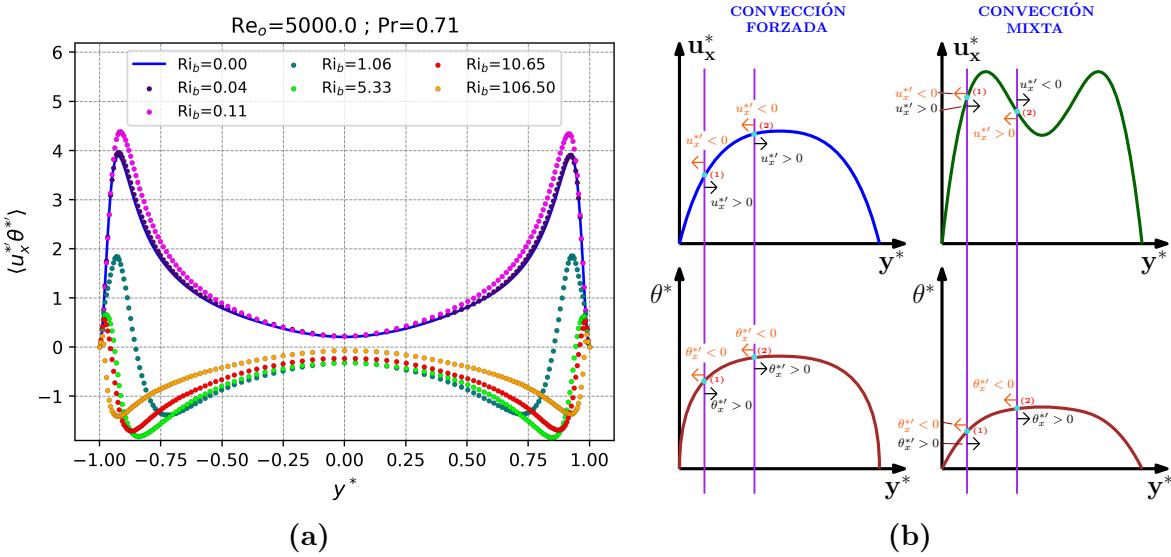


Figura 5.4: (a) Flujo de calor turbulento en la dirección de la corriente. (b) Esquemá de perfiles de temperatura y velocidad para convección forzada y mixta. Aquí los desplazamientos dy^* hacia la izquierda (derecha) están representados con flechas anaranjadas (negras).

En el seno del canal se aprecia una diferencia marcada entre el caso forzado y aquellos muy próximos a este ($Ri_b=0.04, 0.11$), y el resto de casos. Esta disparidad se puede entender cualitativamente a través de los perfiles de u_x^* y θ^* . Para ello, en la Figura 5.4b se muestran los perfiles esquemáticos de ambas magnitudes para los regímenes de convección forzada y mixta:

- **Cerca la pared:** analizando el caso forzado, si una partícula de fluido próxima a la pared (punto (1)) se desplaza un diferencial dy^* a la izquierda, se produce una fluctuación negativa en la velocidad ($u_x^{*'} < 0$), y esto ocasiona que la misma se traslade de una zona más fría a una más caliente, y por lo tanto, experimenta una fluctuación negativa en su temperatura adimensional ($\theta_x^{*'} < 0$) que se traduce en una correlación positiva $\langle u_x^{*'} \theta_x^{*'} \rangle > 0$.

Por otro lado, si la partícula de fluido se desplaza un diferencial dy^* a la derecha, se genera una fluctuación positiva en la velocidad ($u_x^{*'} > 0$) y la misma se desplaza de una región caliente a una más fría, y en consecuencia $\theta_x^{*'} > 0$ es positiva y se produce nuevamente una correlación positiva.

La situación es completamente análoga para el caso de convección mixta.

- **Cerca del centro del canal:** En el caso de convección forzada la situación es idéntica: un desplazamiento dy^* a la izquierda (derecha) desde una región cercana al centro (punto (2)) da lugar a una fluctuación negativa (positiva) de la velocidad y la partícula se traslada de una región más fría (caliente) a una más caliente (fría) y nuevamente la correlación resulta positiva.

Por cuál, en el caso forzado se tiene una correlación positiva global que es consistente con lo que se observa en la Figura 5.4a.

Sin embargo, si uno realiza el mismo análisis para el caso de convección mixta, ocurre lo contrario, en otras palabras, un desplazamiento dy^* a la izquierda (derecha) produce una fluctuación positiva (negativa) de la velocidad y la partícula se traslada de una región más fría (caliente) a una más caliente (fría) que da como resultado una fluctuación negativa de la temperatura adimensional en ambas situaciones y por lo tanto, en el seno del canal, la correlación $\langle u_x^{*'} \theta^{*'} \rangle$ es negativa en consonancia con los observado en los perfiles.

A partir del análisis anterior, se puede afirmar, que la disparidad del comportamiento entre ambos regímenes de convección es consecuencia del cambio de la concavidad del perfil de velocidad en el seno del canal, debido al aumento de la fuerza boyante.

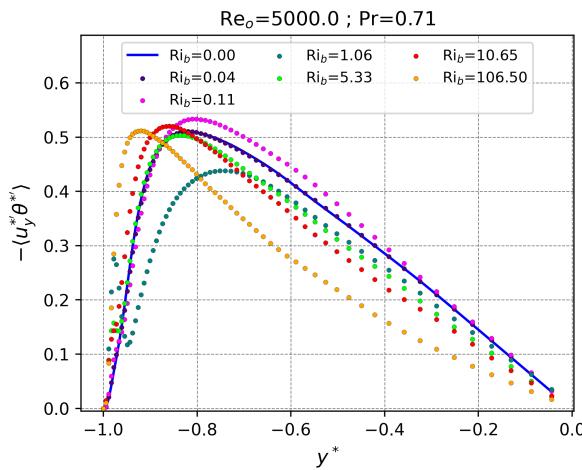


Figura 5.5: Flujo de calor turbulento en la dirección normal a la pared.

Por último, en la Figura 5.5 se expone el perfil del flujo de calor turbulento en la dirección normal a la pared: $-\langle u_y^{*'} \theta^{*'} \rangle$. Considerando nuevamente el conjunto (I), se observa como los máximos cercanos a la pared tienden a desplazarse hacia el seno del canal. Un comportamiento similar se observa en otro trabajo [You et al., 2003]. Por otro lado, en el conjunto (II), los máximos tienden a desplazarse hacia la pared. Asimismo, muy próximo a la pared, para los casos con $Ri_b=0, 0.04, 0.11, 10.65, 106.5$ el perfil se comporta de forma monótona creciente, mientras que en el resto de casos ($Ri_b=1.06, 5.33$) se observa un máximo y un mínimo local.

5.3. Comparación entre casos de distinto Prandtl

En esta sección se comparan los casos con $Re_o=5000$ y $Pr=0.071, 0.71$. La Figura 5.6 muestra los perfiles de velocidad media expresados en unidades de pared (*wall units*). En la subcapa viscosa ($y^+ < 5$) la velocidad puede aproximarse por

$$\langle u_x^+ \rangle \simeq y^+ + \mathcal{O}[(y^+)^2],$$

según Pope [Pope, 2001]. Esta ley, conocida como ley de pared (*Wall-Law*), se indica en la Figura 5.6a con la línea negra de referencia. En dicha región las tensiones de Reynolds son

despreciables frente a las tensiones viscosas, de modo que el perfil depende casi exclusivamente de la distancia normalizada a la pared. Como puede verse, todos los casos, independientemente del número de Prandtl y de la fuerza boyante, siguen de cerca esta aproximación lineal, lo que confirma la validez de la ley en la subcapa viscosa.

Por otra parte, en la región logarítmica (*log-law region*), en condiciones de convección forzada, la velocidad media en la dirección de la corriente se alinea perfectamente con la ley logarítmica clásica [Kawamura et al., 2000] como se observa en la Figura 5.6b. Sin embargo, esta ley ya no es válida al considerar la flotabilidad tal como señalan otros autores [Zhou et al., 2024].

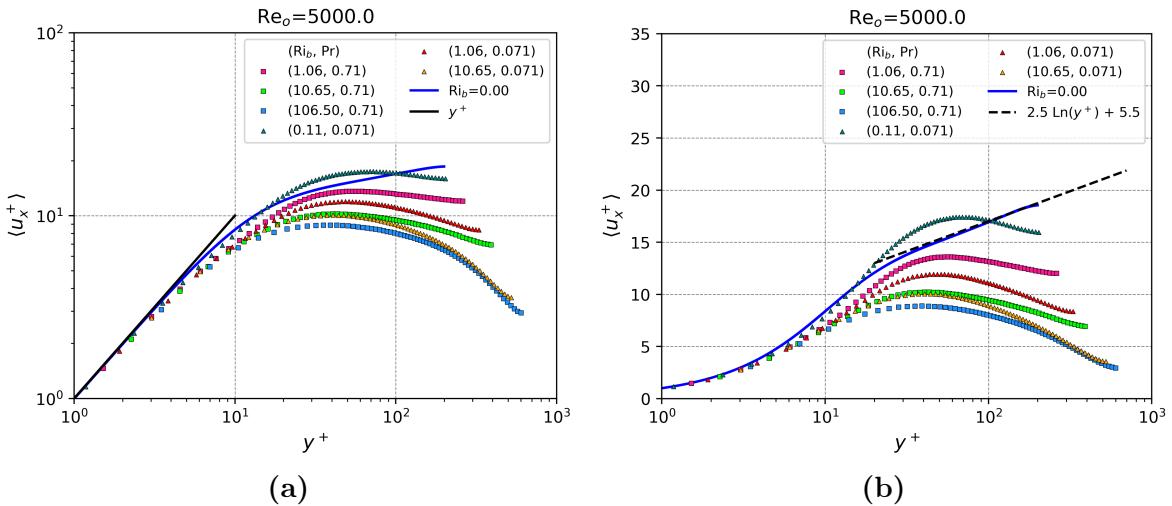


Figura 5.6: Perfiles medios de velocidad en unidades de pared para $Re_o=5000$ y $Pr=0.071$, 0.71 , y distintos valores de Ri_b . (a) *Wall-Law*. (b) *Log-Law*.

La Figura 5.7 muestra los perfiles de temperatura adimensional media en unidades de pared. Cerca de la pared, la variación de la temperatura puede aproximarse por la relación lineal [Kawamura et al., 1998]

$$\langle \theta^* \rangle \simeq Pr y^+,$$

representada en la Figura 5.7a con líneas negras. Los resultados confirman esta ley para ambos números de Prandtl, aunque con distintos alcances: para el caso de $Pr=0.071$ la validez se extiende hasta $y^+ \approx 30$, en concordancia con el trabajo de Zhou et al. [Zhou et al., 2024]. Sin embargo, para $Pr=0.71$ se reduce a $y^+ \approx 7$. La diferencia recae en que, en fluidos con menor difusividad térmica (Prandtl más bajo), el transporte de calor por conducción domina durante una mayor distancia normalizada desde la pared, retrasando la aparición del régimen convectivo predominante [Abregu et al., 2023].

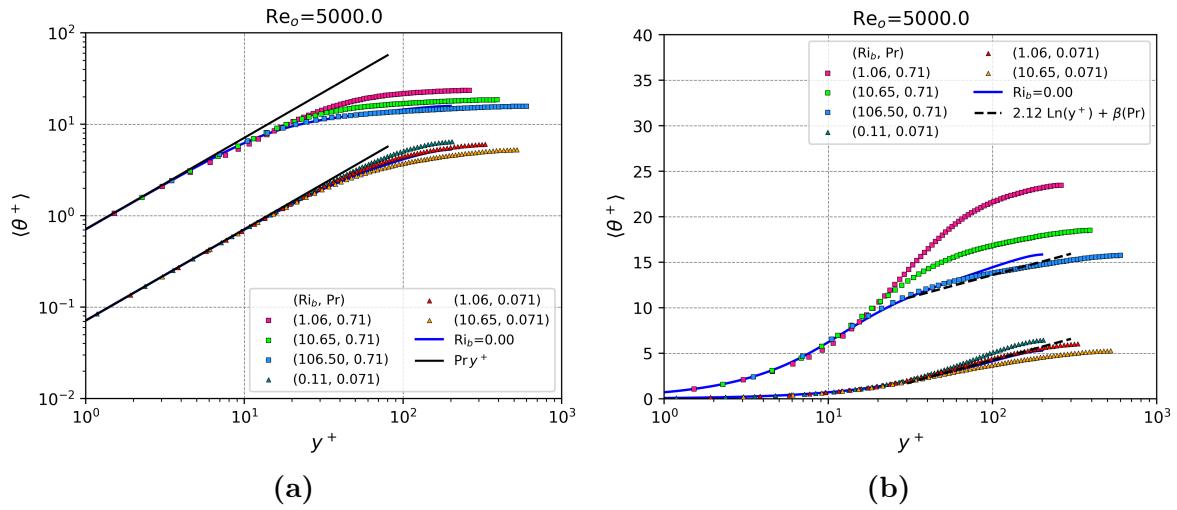


Figura 5.7: Perfiles medios de temperatura adimensional en unidades de pared para $Re_o=5000$ y $Pr=0.071, 0.71$, y distintos valores de Ri_b . **(a)** *Wall-Law*. **(b)** *Log-Law*.

En la región logarítmica, la ley logarítmica dada por la formulación de Kader [Kader, 1981] se muestra en la Figura 5.7b. Para $Pr=0.71$ la ley discrepa tanto para convección forzada como para aquellos casos de convección mixta, sin embargo, para $Pr=0.071$ se aprecia un buen acuerdo para el caso de convección forzada y el caso correspondiente a $Ri_b=1.06$ cuya validez está entorno a $30 < y^+ < 200$.

5.4. Número de Nusselt

Desde una perspectiva ingenieril, el número de Nusselt (Nu) es un indicador clave de la eficiencia de la transferencia de calor. Su definición se presenta en la ecuación 5.1, donde $\langle \theta_b \rangle$ es la temperatura *bulk* (ecuación 5.2).

$$\text{Nu} = \frac{hL}{k} = \frac{2d}{k} \frac{q_w''}{\langle \theta_b \rangle} = \frac{4}{3} \frac{\text{Re}_o \text{Pr}}{\langle \theta_b^* \rangle} \quad (5.1)$$

$$\langle \theta_b \rangle = \frac{\int_{-d}^{+d} \langle u_x \theta \rangle dy}{\int_{-d}^{+d} \langle u_x \rangle dy} = \frac{\int_{-d}^{+d} \langle u_x \theta \rangle}{2d U_b} \quad (5.2)$$

La Figura 5.8a muestra los valores de Nu obtenidos en función del número de boyancia Bo (ecuación 5.3), que cuantifica la relación entre las fuerzas boyantes y la fuerza impulsora de la convección forzada. Estos resultados se comparan con la correlación de Jackson et al. [Jackson et al., 1989] (ecuación 5.4). Los valores de Nu se normalizan con el valor correspondiente a convección forzada pura, Nu_{fc} , evaluado mediante la correlación de Dittus-Boelter [Incropera et al., 2006]. También se añaden datos provenientes de simulaciones DNS [You et al., 2003] que se alinean con la misma tendencia.

En la Figura 5.8b se presenta un gráfico de paridad entre $\text{Nu}_{\text{DNS}}/\text{Nu}_{\text{DB}}$ (eje x) y $\text{Nu}_{\text{corr}}/\text{Nu}_{\text{DB}}$ (eje y). La línea negra indica el acuerdo perfecto ($y = x$) y las líneas azules punteadas delimitan la banda de $\pm 2\sigma$ (con $\sigma=0.158$). La concentración de puntos dentro de esta banda confirma que la correlación de Jackson reproduce con buena precisión los valores simulados.

A partir de la Figura 5.8a se distinguen tres regiones:

- $\text{Bo} \lesssim 3,5 \times 10^{-6}$: Nu se mantiene muy próximo al valor de Nu_{fc} ; el efecto de la fuerza boyante es despreciable y domina la convección forzada [Li et al., 2021].
- $10^{-6} \lesssim \text{Bo} \lesssim 3 \times 10^{-5}$: Nu desciende y luego se recupera, indicando una zona donde la transferencia de calor empeora respecto al caso puramente forzado.
- $\text{Bo} \gtrsim 3 \times 10^{-5}$: Nu crece de forma marcada, impulsado por la mayor relevancia de la convección natural.

$$\text{Bo} = \frac{Gr^*}{\text{Re}_D^{3,425} \text{Pr}^{0,8}} \quad (5.3)$$

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_{fc}} = \left| 1 - 8 \times 10^4 \text{Bo} \left(\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_{fc}} \right)^{-2} \right|^{0,46} \quad (5.4)$$

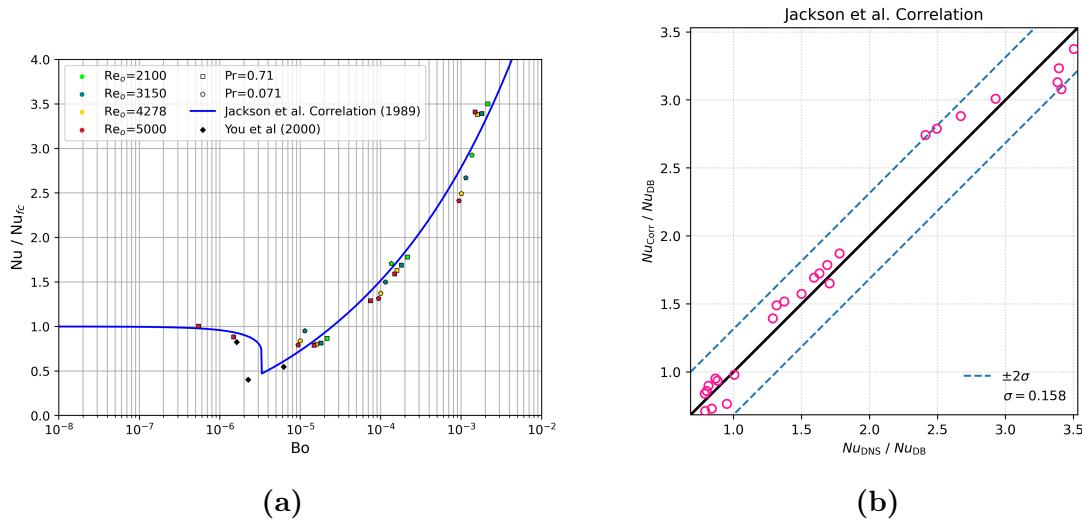


Figura 5.8: (a) Número de Nusselt normalizado vs Bo; (b) paridad con la correlación de Jackson *et al.*

La disminución de Nu al aumentar la fuerza boyante puede entenderse a partir del perfil de velocidad en la dirección del flujo. Como se menciona en la sección 5.2.1, cuando la convección natural y forzada actúan en la misma dirección, el fluido se acelera junto a las paredes y, por conservación de masa, se desacelera en la región central. En virtud de esta premisa, es posible acercarse a un entendimiento cualitativo. De acuerdo al modelo de Prandtl [Prandtl, 1942], la transferencia de calor se divide en dos mecanismos principales: (i) conducción en la subcapa viscosa y (ii) flujo de calor turbulento normal a la pared, $q_y'' = \langle u_y^* \theta^* \rangle$. Algunos autores [Aicher and Martin, 1997, Hall and Jackson, 1969] sugieren que en el borde de la subcapa viscosa, q_y'' es proporcional a la producción de turbulencia, cuya principal contribución recae en la producción por cizalla \mathcal{P} (*Shear-Production*). Sin embargo, también debe considerarse (aunque en menor medida) la contribución de la producción por boyanca \mathcal{B} (*Buoyancy-Production*). Los términos \mathcal{P} y \mathcal{B} provienen del balance de energía cinética turbulenta k (véase el Apéndice A). El primero puede relacionarse con la diferencia de velocidades entre el centro del canal y la zona próxima a la pared, es decir, a un gradiente de velocidades.

Así, es posible apreciar un rango de Ri_b , correspondiente al intervalo $10^{-6} \lesssim Bo \lesssim 3 \times 10^{-5}$ en la Figura 5.8a, para los cuales la aceleración inducida por la boyanca produce que esta diferencia de velocidades, o bien sea cero, o bien sea muy pequeña (Figura 5.2a). Como consecuencia, disminuyen la producción turbulenta, el flujo de calor turbulento y, por lo tanto, Nu. Cuando la fuerza boyante continúa creciendo más allá de este intervalo, el gradiente de velocidad vuelve a incrementarse, la producción de turbulencia se intensifica y tanto q_y'' (Figura 5.5) como Nu aumentan nuevamente.

Esta última cuestión puede confirmarse al observar las Figuras 5.9a y 5.9b donde se exponen los perfiles medios de \mathcal{P} y \mathcal{B} , respectivamente, de los casos con $Re_0=5000$ y $Pr=0.71$. Se aprecia que para valores moderados bajos de Ri_b los perfiles tienden a decaer cerca de la pared, reduciendo la producción de turbulencia. Además, en general, se observa que la magnitud \mathcal{B} es al menos un orden de magnitud menor que la producción \mathcal{P} y porque su rol no es

tan relevante en la producción total de turbulencia.

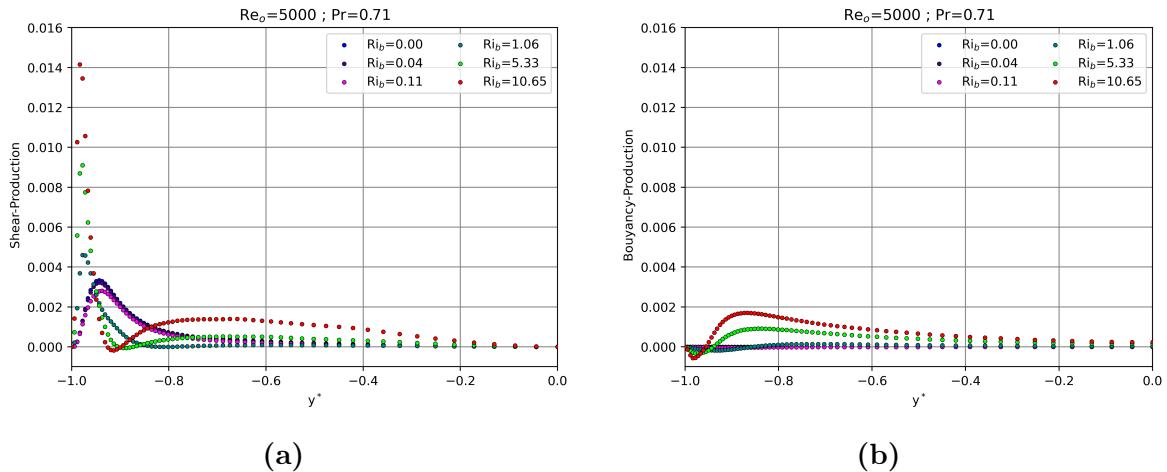


Figura 5.9: Producción de energía cinética turbulenta: (a) componente por cizalla \mathcal{P} y (b) contribución de la fuerza boyante \mathcal{B} .

En la definición de Nu, se puede apreciar su dependencia con el número de Reynolds y el número de Prandtl, y además, también es posible inferir su dependencia con la fuerza boyante. Para entender esto último, se retoma con los conjuntos definidos en la sección 5.2.1. En el primer conjunto la transferencia de calor por convección se deteriora, mientras que en el segundo conjunto dicha transferencia se recupera e incluso mejora respecto al caso de convección forzada pura (véase los puntos representados con cuadrados rojos en la Figura 5.8a). Estas observaciones, que no resultan intuitivas a primera vista, se esclarecen al examinar la Figura 5.10, donde se representa el perfil medio $\langle u_x^* \theta^* \rangle$. El número de Nusselt es inversamente proporcional a $\langle \theta_b^* \rangle$ (ecuación 5.1), magnitud que depende del comportamiento de $\langle u_x^* \theta^* \rangle$. En consecuencia, con el aumento de la boyancia, la magnitud $\langle u_x^* \theta^* \rangle$ tiende primero a aumentar (conjunto (I)) y luego a disminuir (conjunto (II)), lo que conduce a una reducción y posterior aumento de Nu, respectivamente.

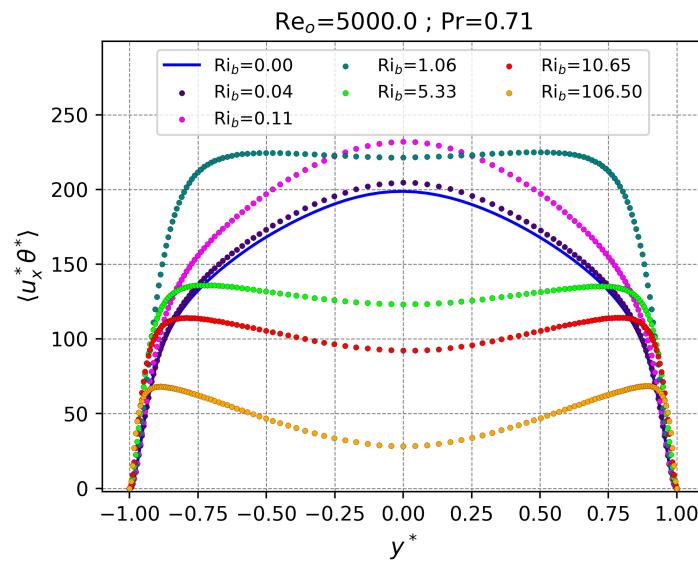


Figura 5.10: Perfil de la magnitud media $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

5.5. Factor de Fricción de Darcy

En esta sección se analizan los resultados del coeficiente de fricción de Darcy. El mismo se define por la relación

$$f = 8 \frac{\overline{\tau_w}}{\rho U_b^2} = \frac{18}{\text{Re}_o} \left. \frac{d\langle u_x^* \rangle}{dy} \right|_{wall}. \quad (5.5)$$

La Figura 5.11a recoge los valores de f obtenidos en nuestras simulaciones DNS para una amplia gama de números de Boyanca (ecuación 5.3). Se incluyen, además, datos experimentales de Parlatan et al. [Parlatan et al., 1996] y de DNS de You et al. [You et al., 2003]. La coincidencia de tendencias entre los tres conjuntos de datos es favorable. Por otro lado, la literatura ofrece pocas correlaciones para f (o para el factor de Fanning) en flujo turbulento completamente desarrollado bajo régimen de convección mixta. Partiendo del planteo de Easby *et al.* [Easby, 1978], se propone una nueva forma funcional, dada por la ecuación 5.6, cuyos parámetros se ajustan con nuestros resultados.

$$f_{corr} = C_1 + C_2 \text{Bo}^n \quad (5.6)$$

$$C_1 = 0,03071701 \quad ; \quad C_2 = 10,03126205 \quad ; \quad n = 0,56152207$$

La Figura 5.11b muestra el gráfico de paridad f_{DNS} frente a f_{corr} . La desviación estándar es $\sigma=0.018$ y el total de nuestros puntos se sitúa dentro de la banda de error, lo que confirma la fiabilidad de la correlación incluso al compararla con los datos de referencia externos.

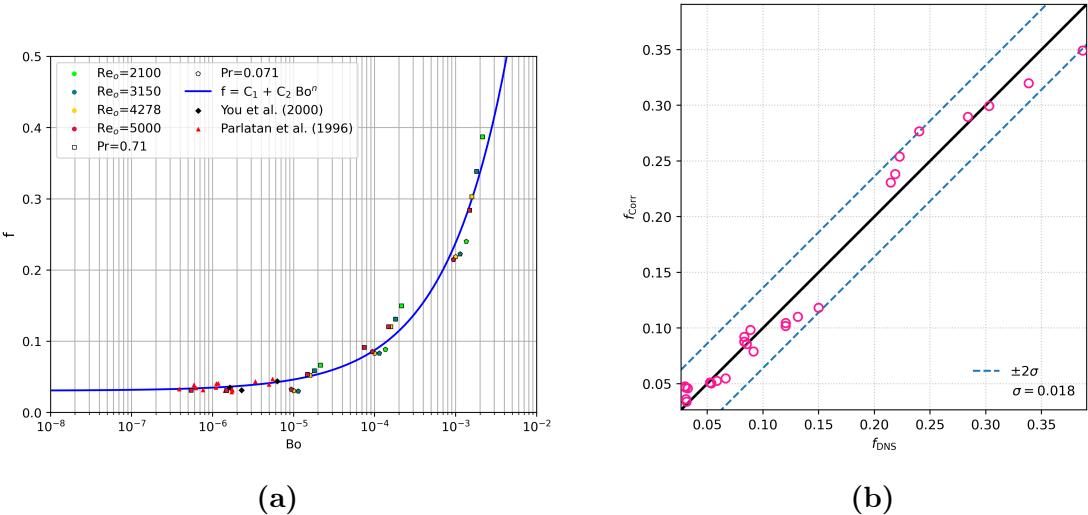


Figura 5.11: Coeficiente de fricción de Darcy vs Bo y correlación propuesta; el ajuste reproduce los datos DNS/experimentales con $\sigma = 0.018$.

El incremento de f con la boyanca parece, a priori, contraintuitivo: al actuar la fuerza boyante en la misma dirección del flujo cabría esperar menores pérdidas de carga. Sin embargo, los perfiles de velocidad mostrados en la sección 5.2.1 evidencian que la boyanca acelera el fluido en las zonas próximas a la pared, lo que incrementa la pendiente $d\langle u_x^* \rangle / dx^*$ y, por

ende, la tensión cortante media $\overline{\tau_w}$. Esta pérdida de carga por fricción se equilibra con la fuerza volumétrica producida por el cambio de densidad, y con la fuerza externa necesaria para mantener un caudal constante.

5.6. Sumario de los principales hallazgos

- **Perfiles de velocidad:** la fuerza boyante genera perfiles tipo “M” y desplaza el máximo de $\langle u_x \rangle$ hacia la pared.
- **Perfiles de temperatura:** Para flujos con $Rib > 1$ la mezcla inducida por la flotación tiende a “aplanar” el perfil de la temperatura media adimensional y reduce su fluctuaciones en el núcleo del canal.
- **Efecto del Prandtl:** para $Pr=0.071$ la ley de pared de temperatura, $\langle \theta^* \rangle \simeq Pr y^+$, se mantiene hasta $y^+ \approx 30$, mientras que para $Pr=0.71$ termina a $y^+ \approx 7$ mostrando la influencia de Pr en la capa conductiva.
- **Degradación y mejora de Nu:** existe un intervalo $10^{-6} \lesssim Bo \lesssim 3 \times 10^{-5}$ donde Nu se reduce, y fuera de él, la transferencia se recupera y supera al caso puramente forzado.
- **Mecanismo energético:** la caída de Nu coincide con una disminución en la producción de turbulencia cerca de la pared.
- **Factor de Darcy creciente:** pese a la asistencia de la boyancia, el gradiente de velocidad en la pared aumenta y eleva el factor de Darcy; la correlación $f_{corr} = C_1 + C_2 Bo^n$ reproduce los datos simulados propios, y los datos de referencia, con buena fidelidad.

Capítulo 6

Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta

El presente capítulo examina la transición laminar-turbulenta en convección mixta en un canal de placas paralelas mediante simulaciones numéricas directas (DNS). El mismo se organiza en tres partes: (i) una exploración de condiciones iniciales para dos valores del número de Richardson *bulk* (casos A y B), (ii) un análisis detallado del caso A-C10 y (iii) un análisis detallado del caso B-C2. Este ordenamiento permite evaluar la sensibilidad del proceso transitorio a la naturaleza de la perturbación inicial y contrastar la dinámica de transición bajo diferentes intensidades de fuerza boyante.

En ambos ensayos, se consideran magnitudes globales y campos instantáneos: la energía cinética turbulenta (TKE) y la varianza de la temperatura adimensional; perfiles de velocidad y de temperatura adimensional en instantes representativos; y el factor de fricción de Darcy y número de Nusselt. Este conjunto de métricas permite vincular la cinemática de la transición con su impacto termo-hidrodinámico y con el acercamiento a los estados de referencia de convección forzada y mixta completamente desarrollados.

En el caso A-C10 ($Ri_b=0.04$), la inestabilización requirió combinar perturbaciones bidimensionales y tridimensionales. Su evolución temporal se caracteriza por múltiples máximos locales de TKE separados por valles intermedios, junto con una convergencia térmica más lenta: Nu permanece cercano al valor laminar durante una ventana temporal amplia, tras lo cual crece de manera monótona sin evidenciar, dentro del horizonte simulado, una convergencia plena a la referencia de convección mixta.

En contraste, para el conjunto B con $Ri_b=1.06$, las configuraciones consideradas exhiben un crecimiento pronunciado seguido de un régimen asintótico común, con colapso de las curvas de TKE y Re_τ . Con este criterio, B-C2 se selecciona como caso representativo: una onda puramente bidimensional resulta suficiente para capturar la dinámica esencial del proceso transitorio y permite la comparación directa con A-C10.

6.1. Exploración de casos

La transición temporal laminar-turbulenta en convección mixta ha sido poco estudiada. Por ello, se realiza primero una exploración numérica que permita identificar combinaciones de perturbaciones capaces de inducir la inestabilidad. Se seleccionan dos valores del número de Richardson *bulk* (casos A y B de la Tabla 6.1) manteniendo constantes Re_o y Pr .

El mecanismo de inestabilización se construye a partir de condiciones iniciales de acuerdo a las ecuaciones 2.39 - 2.41 con distintos números de onda y amplitudes. Las autofunciones y sus autovalores se obtuvieron mediante el método de estabilidad lineal descrito en el Capítulo [REFERENCIA]. Asimismo, dichas autofunciones y su espectro de autovalores se encuentran disponible en el Apéndice C. Para decidir si una perturbación arbitraria es capaz de inestabilizar el flujo considerado se utiliza la evolución temporal de las siguientes magnitudes:

- la energía cinética turbulenta, TKE^1 , $k = \langle u_i^{*'} u_i^{*'} \rangle / 2$,
- el número de Reynolds de fricción

$$\text{Re}_\tau = \frac{u_\tau d}{\nu},$$

donde u_τ es la velocidad de fricción [Pope, 2001].

Tabla 6.1: Parámetros adimensionales de los dos casos elegidos.

6.1.1. Caso A ($\text{Ri}_b=0.04$)

Los parámetros de las perturbaciones se resumen en la Tabla 6.2. Por otro lado, en la Figura 6.1 se expone la evolución en el tiempo de TKE y Re_τ para las distintas condiciones.

Los cuatro primeros ensayos (de A-C1 a A-C4) utilizan únicamente una onda bidimensional y un mismo conjunto de autofunciones cuya parte imaginaria del autovalor es positiva (modo más inestable). Se observa que aumentar A_{2D} del 1 % al 6 % no genera transición, solo adelanta el máximo en la TKE (de $t^* \approx 140$ a ≈ 80); sin embargo, el flujo se relaminariza: la evolución temporal de TKE experimenta un descenso pronunciado y Re_τ cae hasta ≈ 145 sin recuperar su valor inicial.

En los casos A-C7 y A-C8 se conserva la amplitud (6 %) pero se emplean autofunciones asociadas a modos menos inestables. Se observa que el máximo en la TKE se retrasa hasta los tiempos adimensionales $t^* \approx 340$ y $t^* \approx 180$, respectivamente. Por otro lado, el descenso de Re_τ se retrasa. El condición de flujo vuelve a ser una situación estable.

Finalmente, en los ensayos A-C9 y A-C10 se realiza una combinación de una onda 2D ($A_{2D} = 6\%$) con dos ondas 3D oblicuas débiles ($A_{3D} = 1\%$). En ambas simulaciones se observa que, tras una primera fase laminar ($t^* \lesssim 300$), se produce un crecimiento brusco de TKE y un incremento de Re_τ que luego se sostiene en el tiempo, es decir, estas magnitudes no

¹ *Turbulent Kinetic Energy*

decaen como en los casos anteriores. Esto indica el comienzo de la transición hacia un régimen turbulento y confirma que la combinación de ondas 2D y 3D es necesaria para ocasionar la inestabilidad del flujo.

Caso representativo. El ensayo **A-C10** se elige como referencia para la discusión detallada (Sección 6.2) ya que se logra una transición temprana ($t^* \approx 300$) que fue claramente inducida y además que se sostiene en el tiempo ($t^* > 400$).

Tabla 6.2: Parámetros de las condiciones iniciales para el caso A ($Re_o = 5000$, $Pr = 0.71$, $Ri_b = 0.04$).

Nomenclatura	α	β	A_{2D} [%]	A_{3D} [%]	λ_{2D}	λ_{3D}
A-C1	1.12	0	1	0	$1.212 + 0.037 j$	-
A-C2	1.12	0	2	0	$1.212 + 0.037 j$	-
A-C3	1.12	0	4	0	$1.212 + 0.037 j$	-
A-C4	1.12	0	6	0	$1.212 + 0.037 j$	-
A-C7	1.12	0	6	0	$0.472 - 0.104 j$	-
A-C8	1.12	0	6	0	$0.385 - 0.124 j$	-
A-C9	1.12	2.1	6	1	$0.472 - 0.104 j$	$0.575 - 0.095 j$
A-C10	1.12	2.1	6	1	$0.385 - 0.124 j$	$0.563 - 0.095 j$

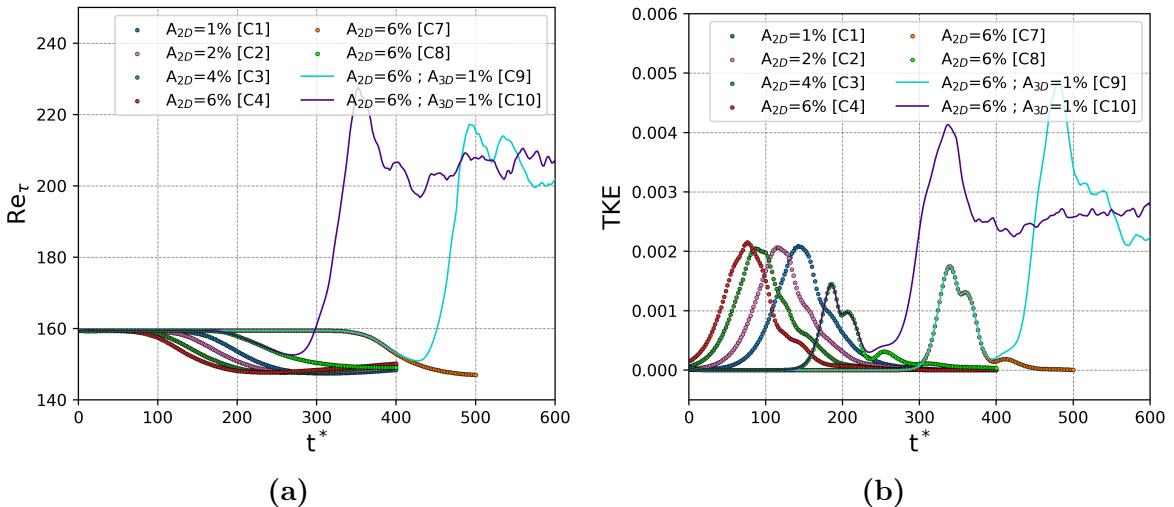


Figura 6.1: Evolución temporal de (a) Re_τ y (b) TKE para las distintas condiciones iniciales del caso A.

6.1.2. Caso B ($Ri_b=1.06$)

Los parámetros de las perturbaciones se resumen en la Tabla 6.3. Los ensayos B-C2 y B-C3 utilizan únicamente la onda bidimensional con diferente autovalor, mientras que B-C4 y B-C5 añaden una componente tridimensional de pequeña amplitud (0.4%). En la Figura 6.2 se expone la evolución en el tiempo de TKE y Re_τ para las distintas condiciones.

Todas las perturbaciones provocan un crecimiento abrupto: Re_τ alcanza valores entre 400 y 520 en $t^* \lesssim 60$. En el ensayo B-C4 (combinación de ondas 2D/3D) el crecimiento se dispara antes (pico a $t^* \approx 25$) y el máximo en la TKE es mayor (≈ 0.22) que los casos puramente 2D.

En todos los casos, para $t^* \gtrsim 150$ la TKE decae dos órdenes de magnitud y se observa que tiende a un valor disntinto de cero ($k \approx 0.002$) y que, por lo tanto, se encuentra en un nuevo estado de flujo, presuntamente, un régimen turbulento. Una situación completamente análoga ocurre con Re_τ , para $t^* \gtrsim 150$, su valor permanece próximo a 270. Para el tiempo adimensional indicado todas las curvas colapsan: la dinámica final depende poco del modo inicial, a diferencia del Caso A donde la combinación de ondas 2D/3D mantenía un estado turbulento sostenido.

Caso representativo. El ensayo B-C2 se elige como referencia para el análisis detallado posterior porque para su transición alcanzó con una onda 2D y eso nos permite comparar con el caso A-C10 (donde si fue necesario la combinación de ondas). Ademas, debido a que su estado asintótico coincide con los demás casos, las conclusiones son generalizables.

Tabla 6.3: Parámetros de las condiciones iniciales para el caso B ($Re_o = 5000$, $Pr = 0.71$, $Rib = 1.06$).

Nomenclatura	α	β	A_{2D} [%]	A_{3D} [%]	λ_{2D}	λ_{3D}
B-C2	1.12	0	2	0	0.800 - 0.495 j	-
B-C3	1.12	0	2	0	2.853 - 0.107 j	-
B-C4	1.12	2.1	2	0.4	2.315 + 0.424 j	1.721 + 0.235 j
B-C5	1.12	2.1	2	0.4	2.853 - 0.107 j	1.550 + 0.023 j

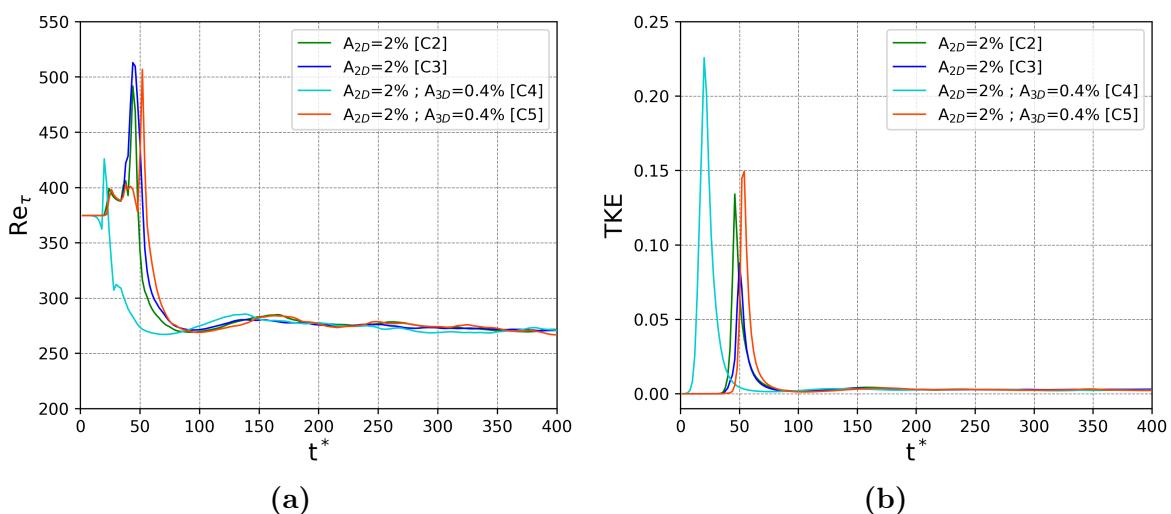


Figura 6.2: Evolución temporal de (a) Re_τ y (b) TKE para las distintas condiciones iniciales del caso B.

6.2. Análisis detallado del caso A-C10

TKE y Varianza de la temperatura adimensional. En las Figuras 6.3a y 6.3b se observan cuatro zonas bien diferenciadas en la evolución temporal conjunta de ambas magnitudes (curva roja), que se comparan con los valores de referencia indicados en las leyendas. Los valores $TKE_{Lam}=6.52\times 10^{-5}$ y $\langle\theta'^*\theta'^*\rangle_{Lam}=3.22\times 10^2$ se calculan a partir de la perturbación $\tilde{\mathbf{v}}$ (ecuación 2.40) y $\tilde{\varphi}$ (ecuación 2.41), respectivamente.

- **Zona I ($0 \lesssim t^* \lesssim 150$).** La magnitud TKE se mantiene cercana al valor laminar, prácticamente constante, sin incrementos ni descensos. En cambio, $\langle\theta'^*\theta'^*\rangle$ desciende de manera continua desde valores iniciales altos hasta un mínimo de orden 10^{-1} alrededor de $t^* \approx 50$, tras lo cual comienza a recuperarse. En este tramo, ambas magnitudes permanecen por debajo de los valores completamente desarrollados.
- **Zona II ($150 \lesssim t^* \lesssim 234$).** La energía cinética turbulenta presenta dos máximos locales bien definidos en torno a $t^* \approx 186$ y $t^* \approx 206$, separados por un valle intermedio. Por su parte, la varianza crece varios órdenes de magnitud y exhibe un máximo marcado dentro del mismo intervalo temporal; posteriormente desciende parcialmente.
- **Zona III ($234 \lesssim t^* \lesssim 338$).** El valor de TKE crece de forma sostenida, con un cambio de pendiente alrededor de $t^* \approx 276$, y alcanza un máximo global en $t^* \approx 338$ ($TKE_{max} \approx 4.1\times 10^{-3}$). Asimismo, la magnitud $\langle\theta'^*\theta'^*\rangle$ se mantiene en valores elevados dentro del rango representado y muestra una oscilación con picos y valles, siempre muy por encima del valor laminar.
- **Zona IV ($t^* \gtrsim 338$).** TKE desciende desde el máximo y oscila alrededor de los valores completamente desarrollados (“CM” y “CF”) acotado en el rango $(2.5-3.5)\times 10^{-3}$. La varianza muestra una disminución gradual aproximándose a los valores de referencia desarrollados; la pendiente con la que decae es más pronunciada en $400 \lesssim t^* \lesssim 900$ y menor para $t^* \gtrsim 900$.

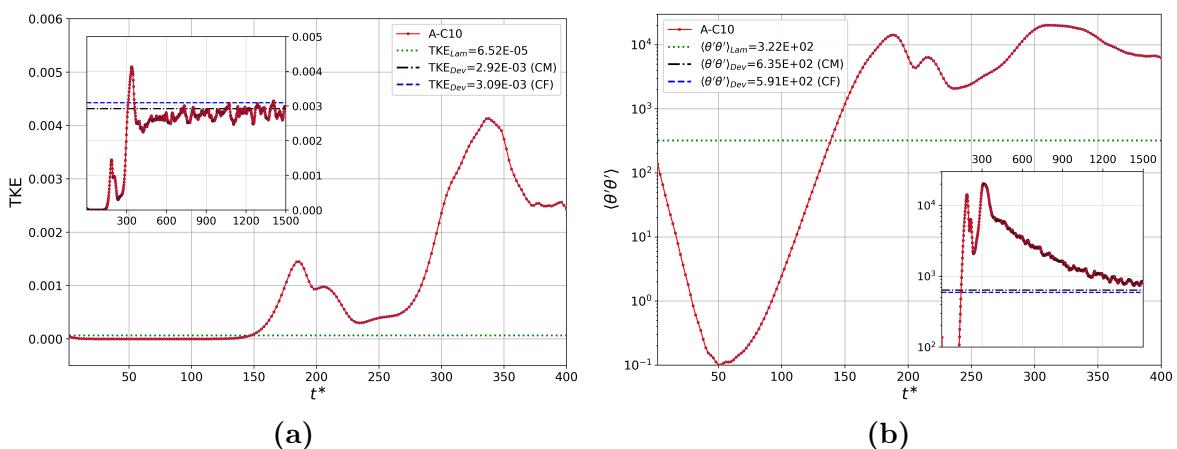


Figura 6.3: Evolución temporal de (a) la energía cinética turbulenta y (b) la varianza de la temperatura, para el caso A-C10.

Perfiles de velocidad y temperatura. En las Figuras 6.4a y 6.4b se muestran, respectivamente, los perfiles de velocidad y de temperatura adimensional para $t^* = 2, 186, 206, 338, 750, 1500$ (de izquierda a derecha). Como referencia, se incluyen los perfiles de los flujos completamente desarrollados de convección forzada y mixta (“FC” y “MC”) correspondientes. Los instantes elegidos abarcan la etapa laminar inicial ($t^* = 2$), los máximos locales ($t^* \approx 186$ y $t^* \approx 206$), el máximo global y dos tiempos en los que el flujo ya es turbulento.

La perturbación impuesta modifica inicialmente los perfiles de velocidad en forma de “M”². A medida que evoluciona el flujo, en $t^* \approx 186$ y $t^* \approx 206$ los perfiles conservan la simetría aunque su forma característica inicial. En torno a $t^* \approx 338$, dicha simetría se pierde y, posteriormente, en régimen turbulento, se aproximan a los perfiles completamente desarrollados. Los perfiles de temperatura adimensional siguen una evolución análoga: se deforman manteniendo su simetría, que se pierde momentáneamente en $t^* \approx 338$, para luego tender hacia los perfiles de los casos desarrollados. La pérdida de simetría en ambos perfiles en el máximo global está asociado con la producción máxima de turbulencia.

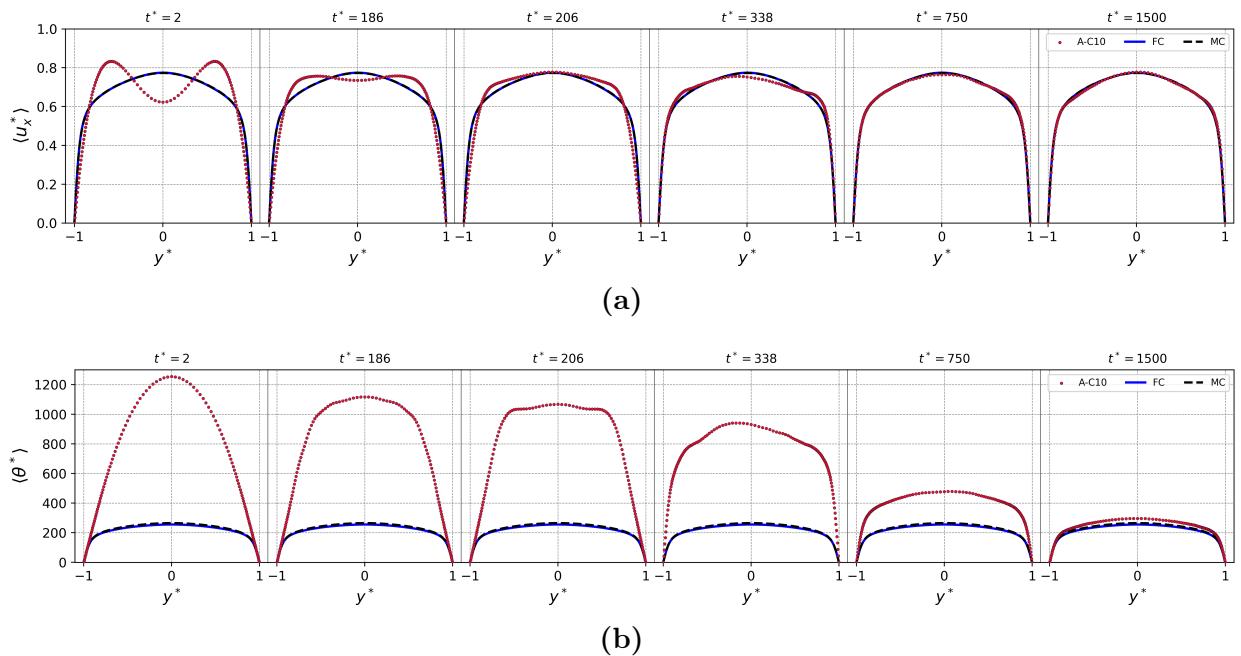


Figura 6.4: Perfiles de (a) velocidad y (b) temperatura adimensional para distintos instantes t^* correspondiente al caso A-C10.

Factor de fricción de Darcy y número de Nusselt. En la Figura 6.5a se presenta la evolución temporal del factor de fricción de Darcy. En la **Zona I** ($0 < t^* < 150$), f permanece prácticamente constante y coincide con el valor laminar (línea verde punteada). En las **Zonas II y III**, y parte de la **Zona IV** (aproximadamente los primeros 12 t^*), se observa primero una disminución suave hasta un mínimo de $f = 0,0167$ en $t^* \approx 270$, seguida de un incremento pronunciado que alcanza un máximo global de $f \approx 0.037$ en $t^* \approx 352$. A partir de ese pico, y en el resto de la **Zona IV** (es decir, para $t^* \gtrsim 352$), f desciende y se estabiliza dentro del intervalo 0.0275-0.033, próximo a los valores de referencia de los casos completamente

²Como se vio en el Capítulo [3] en las validaciones de perfiles laminares en convección mixta.

desarrollados (líneas de trazo negro y azul). Esta secuencia permite distinguir con claridad la etapa transitoria y el posterior establecimiento de un régimen turbulento persistente.

Por último, la Figura 6.5b presenta la evolución temporal del número de Nusselt. El valor se mantiene prácticamente constante y coincidente con la solución laminar hasta $t^* \approx 300$. A partir de allí, crece de manera monótona hasta el final de la simulación. Aunque la tendencia apunta al valor del caso completamente desarrollado en convección mixta, el tiempo simulado no resulta aún suficiente para garantizar la convergencia. Esta misma situación se observa en la varianza de la temperatura y en el perfil de temperatura para $t^* = 1500$, lo que sugiere que sería necesario extender la simulación para que las magnitudes térmicas alcancen su estado desarrollado.

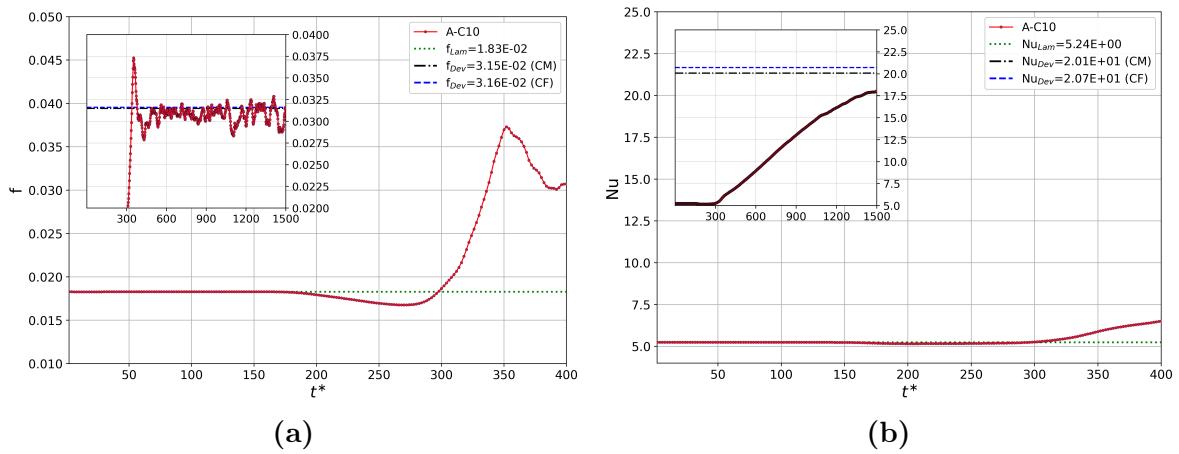


Figura 6.5: Evolución temporal de (a) factor de fricción de Darcy y (b) número de Nusselt, para el caso A-C10.

6.3. Análisis detallado del caso B-C2

TKE y varianza de la temperatura adimensional. En las Figuras 6.6a y 6.6b se muestra la evolución temporal de la energía cinética turbulenta (TKE) y de la varianza de la temperatura adimensional. En dicha evolución se distinguen tres regiones con dinámicas bien diferenciadas:

- **Zona I ($0 \lesssim t^* \lesssim 32$).** La TKE se mantiene prácticamente constante y coincide con el valor de referencia laminar, TKE_{Lam} . Por el contrario, la varianza de la temperatura adimensional exhibe una caída pronunciada seguida de una rápida recuperación (del orden de tres órdenes de magnitud). En el intervalo breve $24 \lesssim t^* \lesssim 30$ la magnitud permanece aproximadamente constante, antes de volver a incrementarse.
- **Zona II ($32 \lesssim t^* \lesssim 100$).** La TKE alcanza su máximo global en $t^* \approx 46$ ($TKE_{max} \approx 0.134$), superando en dos órdenes de magnitud al registrado en el caso A-C10. A su vez, $\langle \theta^* \theta'^* \rangle$ continúa creciendo hasta un máximo global en $t^* \approx 46$. A partir de entonces, ambas magnitudes decrecen sin retornar a los niveles previos al máximo.
- **Zona III ($t^* \gtrsim 100$).** En esta etapa, ambas magnitudes fluctúan dentro de rangos acotados: entre 10^{-4} y 5×10^{-4} para la TKE, y entre 700 y 2000 para la varianza de la temperatura. Hacia el final, se observa una tendencia a converger hacia los valores de referencia del régimen de convección mixta completamente desarrollado, lo que evidencia el establecimiento del régimen turbulento.

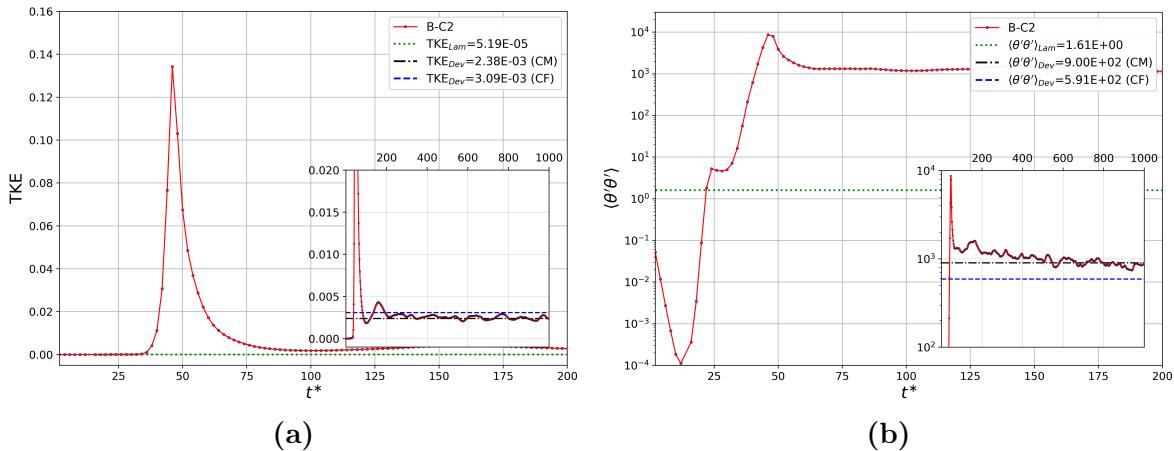


Figura 6.6: Evolución temporal de (a) la energía cinética turbulenta y (b) la varianza de la temperatura, para el caso B-C2.

Perfiles de velocidad y temperatura. En las Figuras 6.7a y 6.7b se presentan, respectivamente, los perfiles de velocidad y de temperatura adimensional para $t^* = 2, 46, 160, 500, 1000$ (de izquierda a derecha). Como referencia, se incluyen los perfiles correspondientes a los flujos completamente desarrollados de convección forzada y mixta (“FC” y “MC”). La selección de tiempos abarca el régimen laminar inicial ($t^* = 2$), el máximo global en $t^* \simeq 46$,

el máximo local subsiguiente en $t^* \simeq 160$ y dos instantes en los que el flujo ya se encuentra en régimen turbulento.

En la fase inicial de la evolución, los perfiles exhiben la simetría característica de la solución laminar con forma de “M”. En torno al máximo global de la TKE, los perfiles se ensanchan y muestran una leve pérdida de simetría; además, las pendientes se incrementan ligeramente, siendo este cambio casi imperceptible en el perfil de velocidad y más notorio en el de temperatura. A medida que avanza el tiempo, los perfiles de ambas magnitudes convergen hacia las soluciones de referencia del flujo completamente desarrollado en convección mixta. En comparación con el caso A-C10, el mayor efecto de la fuerza boyante acelera la evolución del campo de temperaturas y favorece una convergencia más rápida hacia el régimen de convección mixta.

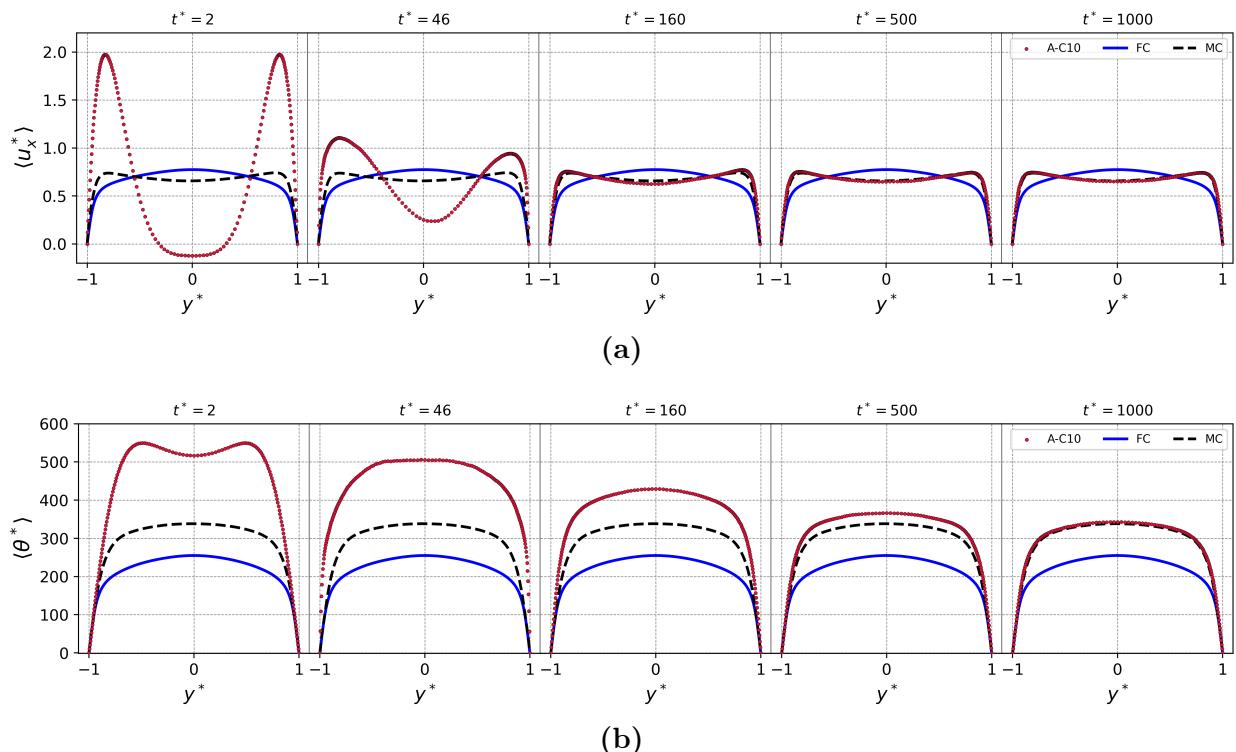


Figura 6.7: Evolución temporal de (a) factor de fricción de Darcy y (b) número de Nusselt, para el caso B-C2.

Factor de fricción de Darcy y número de Nusselt. La Figura 6.8a muestra la evolución temporal del factor de fricción de Darcy, f . En las **Zonas I y II**, desde el inicio y hasta $t^* \approx 20$, f se mantiene próximo al valor laminar (línea verde punteada). Entre $t^* \approx 20$ y $t^* \approx 45$ se observan oscilaciones con picos sucesivos que culminan en un máximo global, $f_{\max} \approx 0.174$; a partir de ese punto, f decrece de manera pronunciada y cruza transitoriamente por debajo del valor laminar. En la **Zona III**, la curva permanece por debajo de la referencia de convección mixta completamente desarrollada y converge lentamente hacia valores próximos a 5.1×10^{-2} , aún muy por encima del correspondiente al flujo forzado desarrollado.

La Figura 6.8b indica que el número de Nusselt se mantiene cercano a la solución laminar (línea verde punteada) hasta $t^* \approx 46$, donde presenta un mínimo local en torno a 10.6. A partir

de entonces, Nu crece de manera monótona y sostenida hasta aproximarse a la referencia de convección mixta completamente desarrollada, y permanece por debajo del valor asociado al flujo forzado desarrollado.

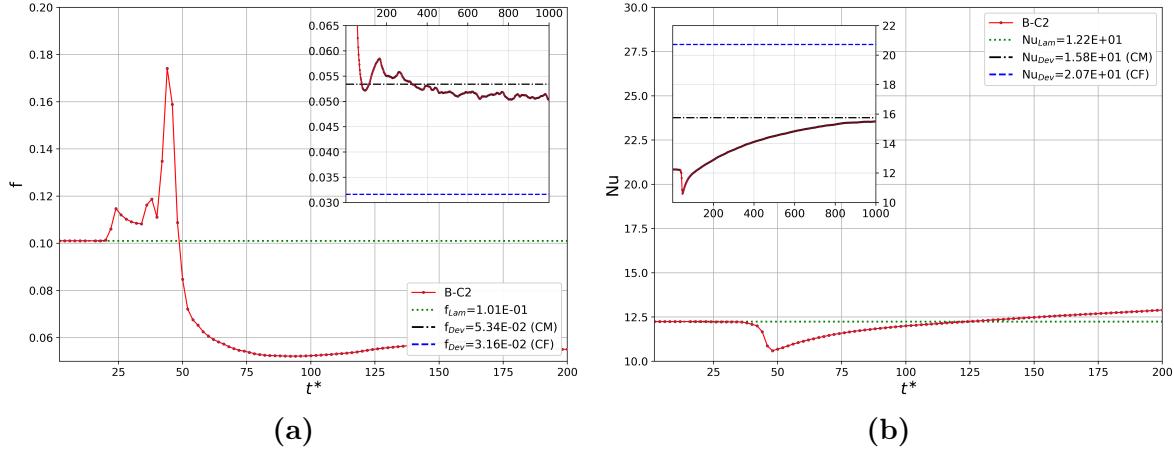


Figura 6.8: Perfiles de (a) velocidad y (b) temperatura adimensional para distintos instantes t^* correspondiente al caso B-C2.

Comparación: A-C10 vs B-C2. Cabe destacar que, en el caso A-C10 ($\text{Rib} = 0.04$), fue necesaria la combinación de ondas bidimensionales y tridimensionales para inducir la inestabilidad y conducir a la transición. En cambio, en el caso B-C2 ($\text{Rib} = 1.06$) bastó una onda puramente bidimensional para inestabilizar el flujo.

Por otra parte, los perfiles de velocidad y de temperatura del caso B-C2 muestran una convergencia más rápida que en A-C10, lo que indica que el aumento de la fuerza boyante acelera el desarrollo hidrodinámico y, en particular, el térmico. Una tendencia análoga se observa en las magnitudes globales TKE, $\langle \theta'^* \theta'^* \rangle$, el factor de fricción de Darcy f y el número de Nusselt, cuyas respuestas temporales se aproximan más rápidamente a sus valores de referencia, o al menos próximos a él, en el caso de f .

6.4. Sumario de los principales hallazgos

- **Naturaleza de la perturbación.** En A-C10 ($\text{Rib}=0.04$) se requiere una combinación de ondas 2D/3D para gatillar la transición, mientras que en B-C2 ($\text{Rib}=1.06$) una onda puramente 2D resulta suficiente.
- **Patrón temporal en B-C2.** Se reconocen tres etapas: tramo cuasi laminar; máximo global en $t^* \approx 46$ con $\text{TKE}_{\text{máx}} \approx 0.134$; y fase asintótica donde TKE y $\langle \theta'^* \theta'^* \rangle$ fluctúan en rangos acotados y convergen hacia el régimen de convección mixta completamente desarrollado.
- **Comportamiento asintótico del conjunto B.** Para $t^* \gtrsim 150$ las curvas colapsan y la dinámica final depende poco del modo inicial; se observan valores cercanos a $\text{Re}_\tau \approx 270$ y un piso de TKE del orden de 2×10^{-3} .

- **Patrón temporal en A-C10.** La TKE presenta múltiples máximos locales y la varianza de temperatura crece varios órdenes de magnitud antes de descender parcialmente; la convergencia térmica es más lenta que en B-C2.
- **Factor de Darcy y número de Nusselt.** En B-C2, f y Nu se aproximan con mayor rapidez a sus referencias de convección mixta que en A-C10; el aumento de la fuerza boyante acelera, en particular, la evolución del campo de temperaturas.

Capítulo 7

Conclusiones

Acá se concluyen cosas

Apéndice A

Budgets Dynamics Equations

A partir de la descomposición de Reynolds de los campos de interés (componentes de la velocidad, presión, temperatura) aplicadas a las ecuaciones de gabinete 2.1 se puede obtener, mediante mucho álgebra, ecuaciones que describen la dinámica de los budget de las cantidades de segundo orden como $\langle v'_x v'_y \rangle$, la energía cinética turbulenta κ , los flujos de calor turbulento $\langle v'_i \theta' \rangle$ y la varianza de la temperatura $\langle \theta' \theta' \rangle$. Se han omitido los superíndices “*”.

$$\partial_t \langle v'_i \theta' \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle v'_i \theta' \rangle = \mathcal{P}_{i\theta} + \mathcal{T}_{i\theta} + \Pi_{i\theta} + \mathcal{D}_{i\theta} + \mathcal{B}_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad (\text{A.1})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_{i\theta} = -\partial_k \langle v'_i v'_k \theta' \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_{i\theta} = -[\langle \theta' v'_k \rangle \partial_k \langle v_i \rangle + \langle v'_i v'_k \rangle \partial_k \langle \theta \rangle] + \langle v'_i v'_x \rangle$

Disipación: $\mathcal{D}_{i\theta} = -\frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) \langle \partial_k \theta' \partial_k v'_i \rangle \quad (\text{A.2})$

Correlación Temp - Grad Presión: $\Pi_{i\theta} = -\langle \theta' \partial_i p' \rangle$

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_{i\theta} = \text{Ri } g_i \langle \theta' \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_{i\theta} = \frac{1}{\text{Re}} \partial_k \left[\langle \theta' \partial_k v'_i \rangle + \frac{1}{\text{Pr}} \langle v'_i \partial_k \theta' \rangle \right]$

$$\partial_t \langle v'_x v'_y \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle v'_x v'_y \rangle = \mathcal{P}_{xy} + \mathcal{T}_{xy} + \Pi_{xy} + \mathcal{D}_{xy} + \mathcal{B}_{xy} - \varepsilon_{xy} \quad (\text{A.3})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_{xy} = -\partial_k \langle v'_x v'_k v'_y \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_{xy} = -[\langle v_y v'_k \rangle \partial_k \langle v_x \rangle + \langle v'_x v'_k \rangle \partial_k \langle v_y \rangle]$

Disipación: $\mathcal{D}_{xy} = -\frac{2}{\text{Re}} \langle \partial_k v'_x \partial_k v'_y \rangle$

Correlacion Vel - Grad Presión: $\Pi_{xy} = -[\langle v'_y \partial_x p' \rangle + \langle v'_x \partial_y p' \rangle]$ (A.4)

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_{xy} = -\text{Ri} \langle v'_y \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{\text{Re}} \partial_k^2 \langle v'_x v'_y \rangle$

Siendo $\kappa = \langle v_i v'_i \rangle / 2$, la Energía Cinética Turbulenta, entonces:

$$\partial_t \kappa + \langle v_n \rangle \partial_n \kappa = \mathcal{P}_i + \mathcal{T}_i + \Pi_i + \mathcal{D}_i + \mathcal{B}_i - \varepsilon_i \quad (\text{A.5})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_i = -\frac{1}{2} \partial_n \langle v'_i v'_n v'_i \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_i = -\langle v_i v'_n \rangle \partial_n \langle v_i \rangle$

Disipación: $\mathcal{D}_i = -\frac{1}{\text{Re}} \langle \partial_n v'_i \partial_n v'_i \rangle$ (A.6)

Correlacion Vel - Grad Presión: $\Pi_i = -\langle \partial_i (v'_i p') \rangle$

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_i = -\text{Ri} g_i \langle v'_i \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_i = \frac{1}{\text{Re}} \partial_n^2 \kappa$

$$\partial_t \langle \theta' \theta' \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle \theta' \theta' \rangle = \mathcal{P}_\theta + \mathcal{T}_\theta + \mathcal{D}_\theta - \varepsilon_\theta \quad (\text{A.7})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_\theta = -\partial_k \langle \theta' \theta' v'_k \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_\theta = 2 [\langle \theta' v'_k \rangle \partial_k \langle \theta' \rangle + \langle v'_x \theta' \rangle]$

Disipación: $\mathcal{D}_\theta = -\frac{2}{\text{RePr}} (\langle \partial_k \theta' \rangle)^2$ (A.8)

Difusión Viscosa: $\varepsilon_\theta = \frac{1}{\text{RePr}} \partial_k^2 \langle \theta' \theta' \rangle$

Apéndice B

Perfiles de Desarrollados

B.1. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,71$

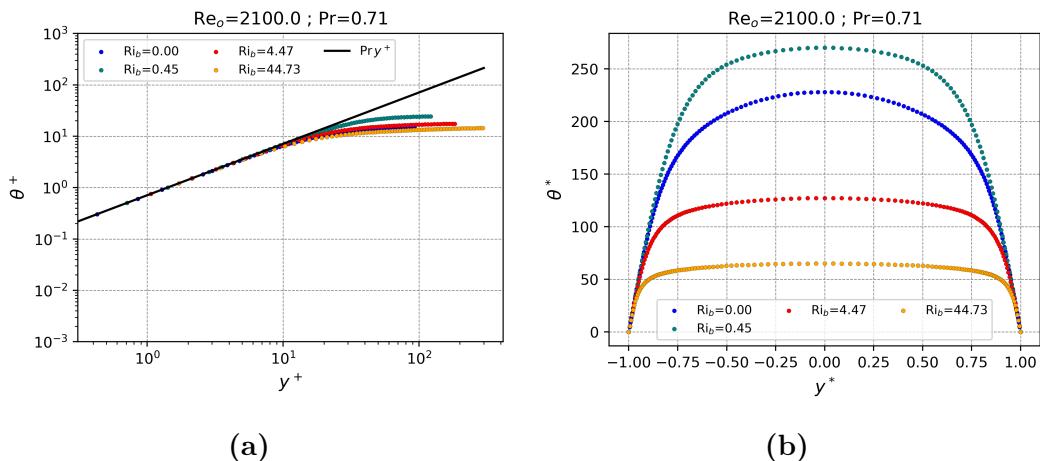


Figura B.1

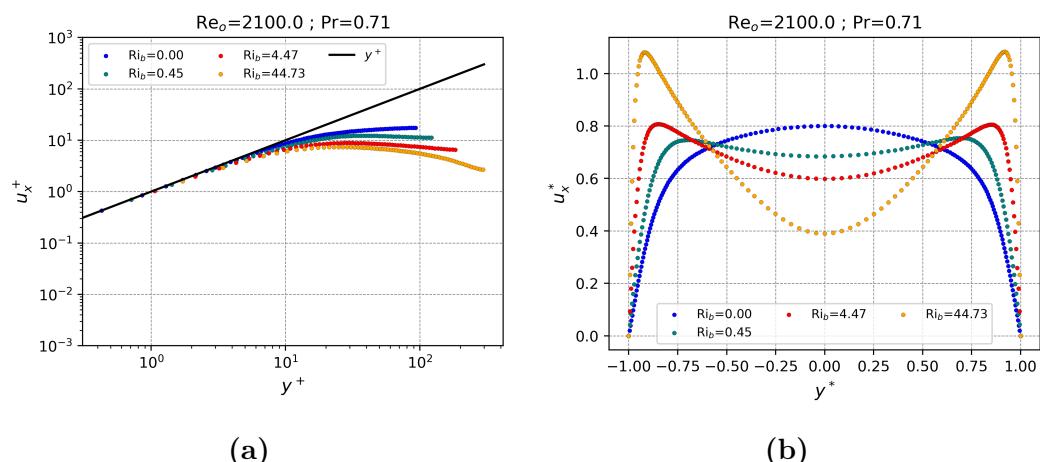


Figura B.2

B.2. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,071$

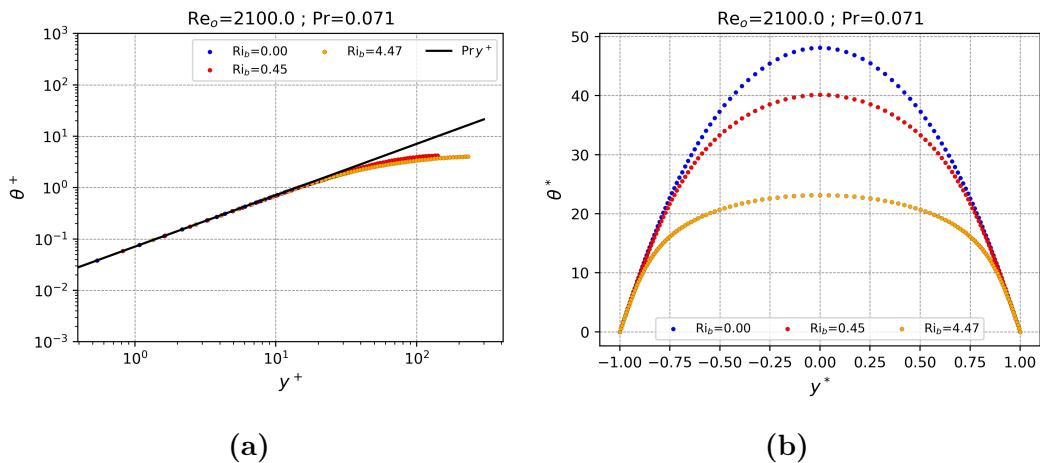


Figura B.3

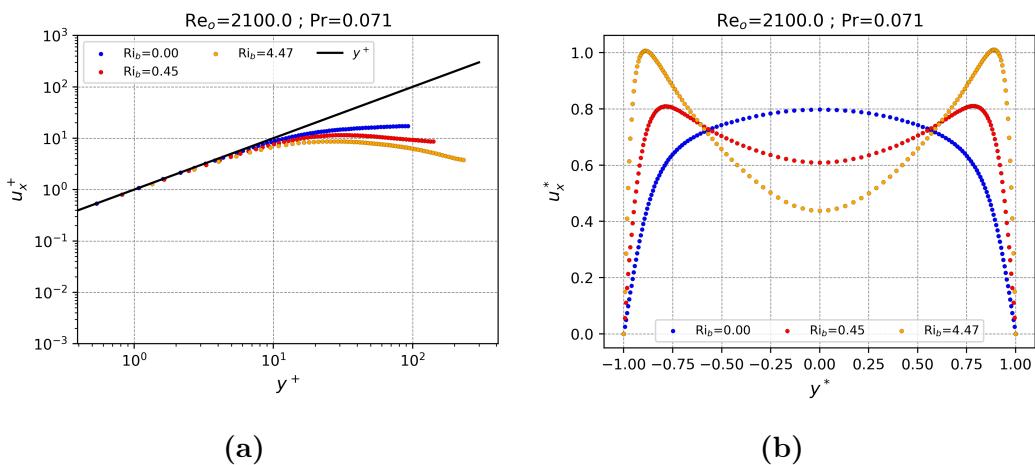


Figura B.4

B.3. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,71$

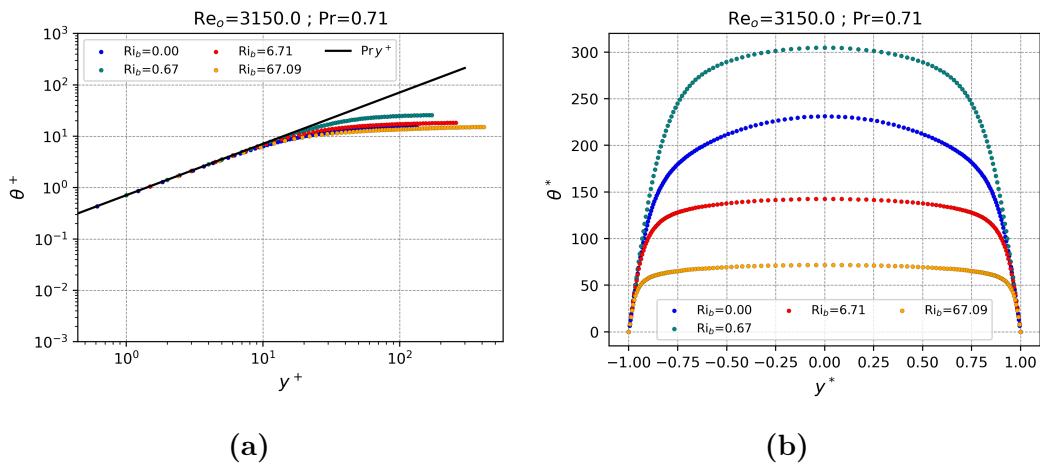


Figura B.5

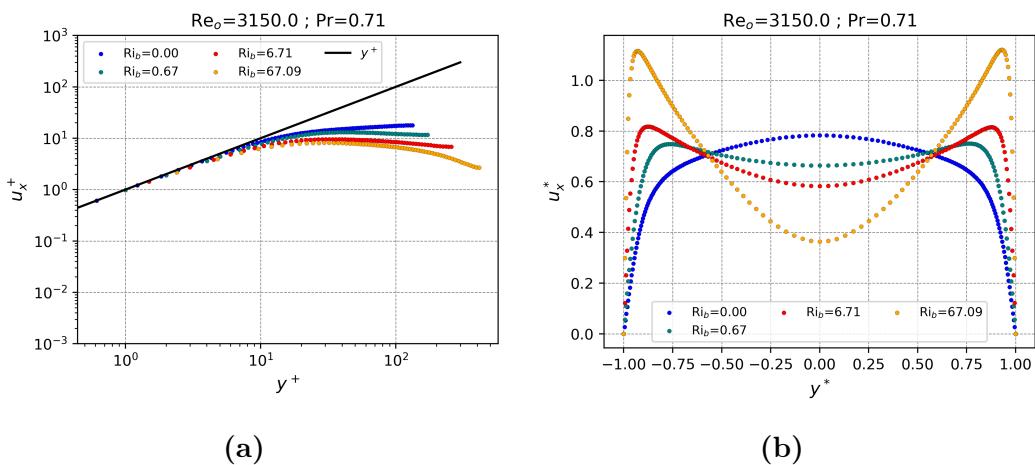


Figura B.6

B.4. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,071$

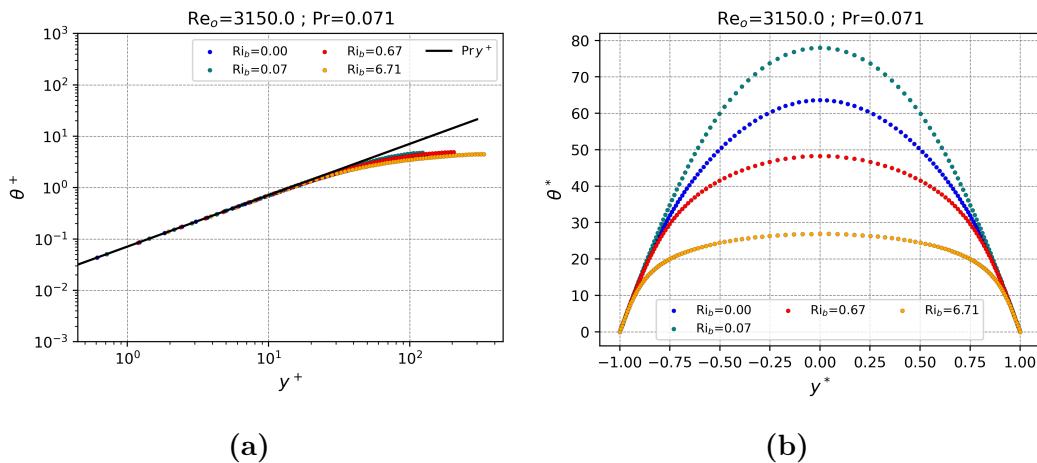


Figura B.7

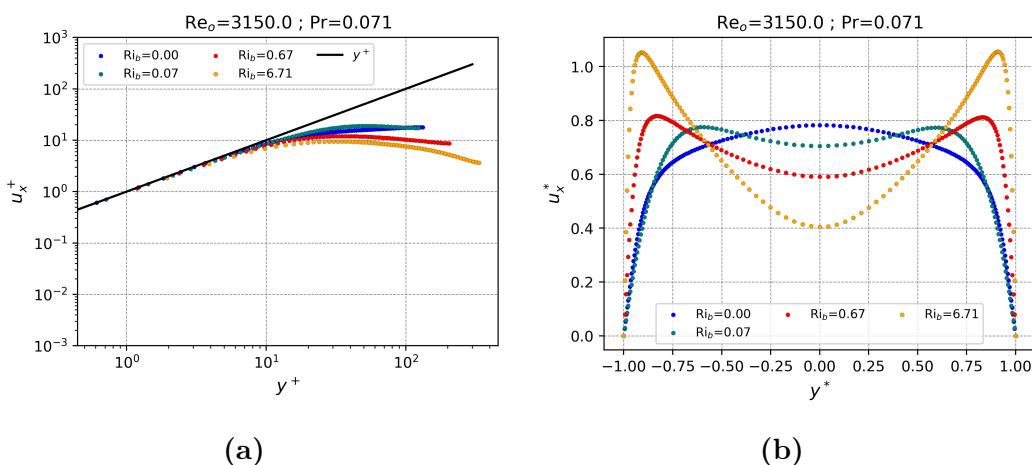


Figura B.8

B.5. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,71$

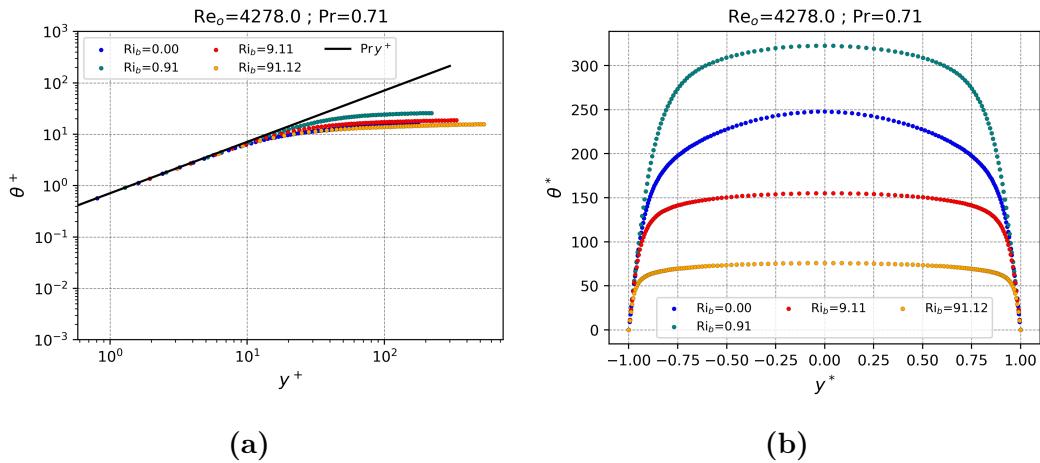


Figura B.9

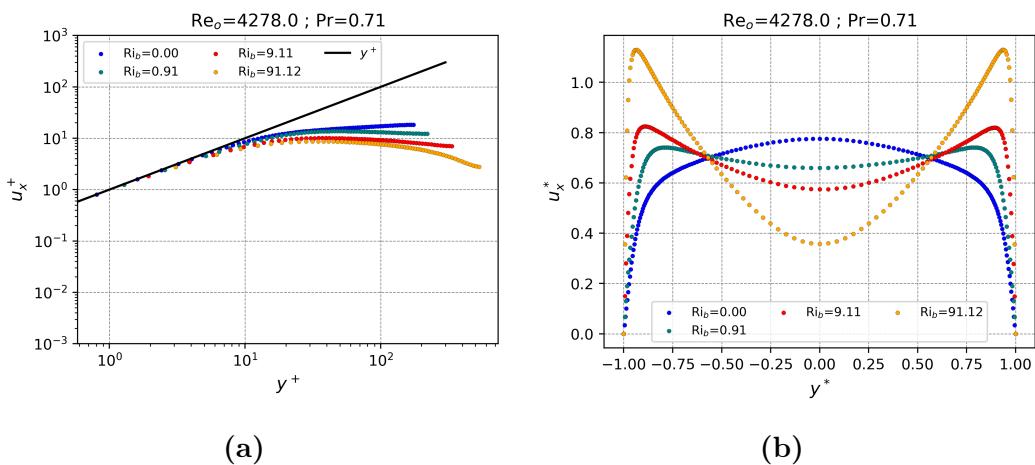


Figura B.10

B.6. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,071$

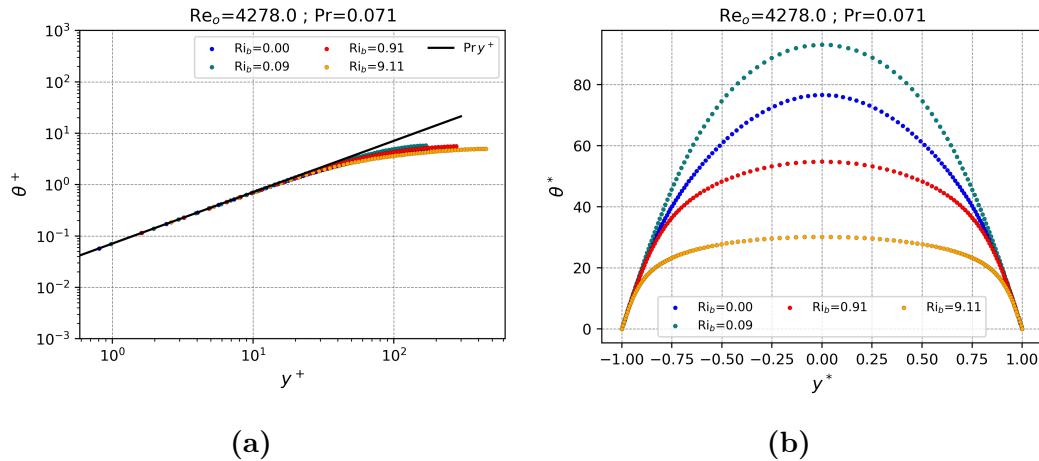


Figura B.11

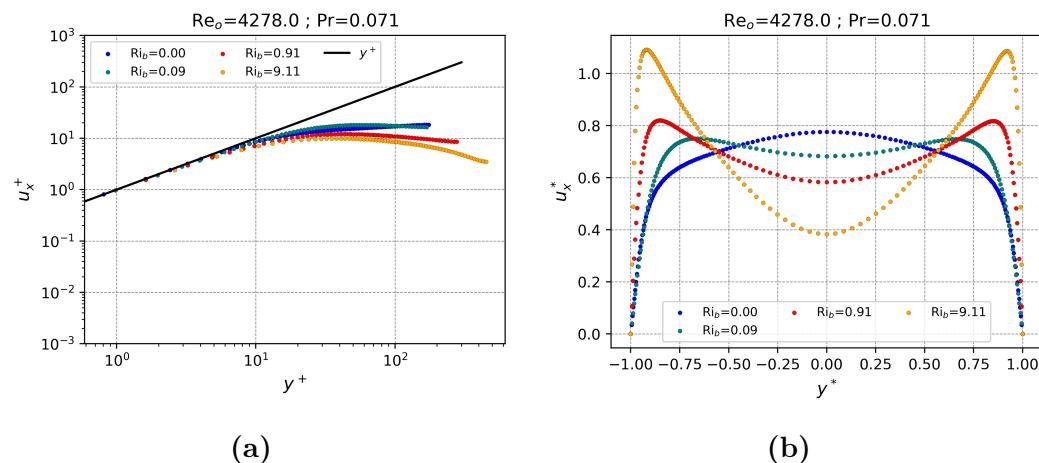


Figura B.12

Apéndice C

Transición. Cosas

C.0.1. Autofunciones y Espectros de autovalores

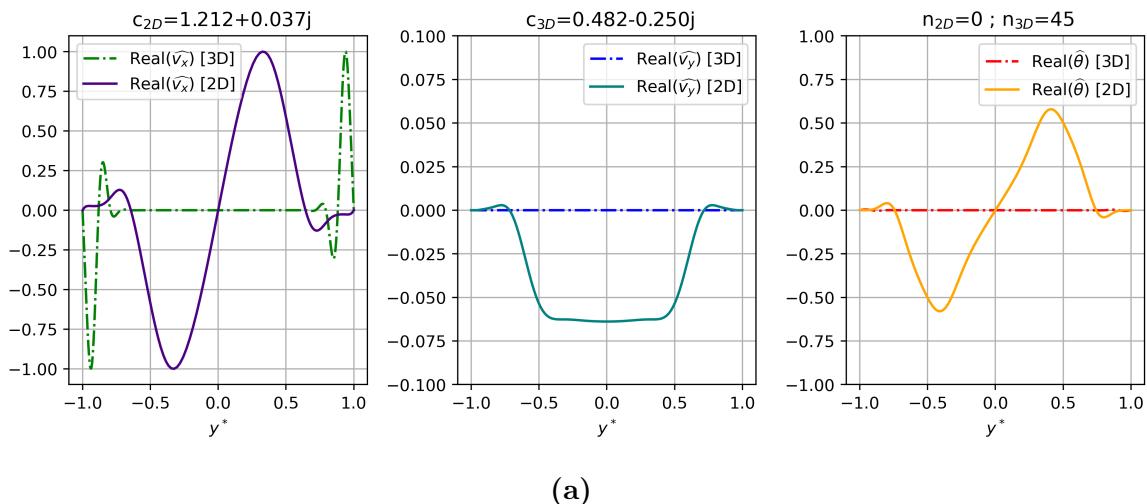


Figura C.1

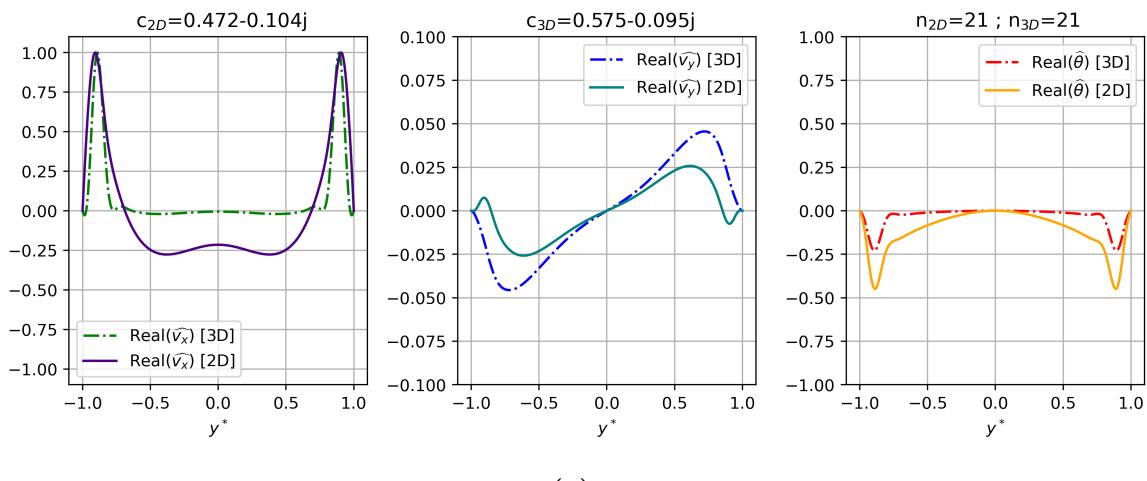
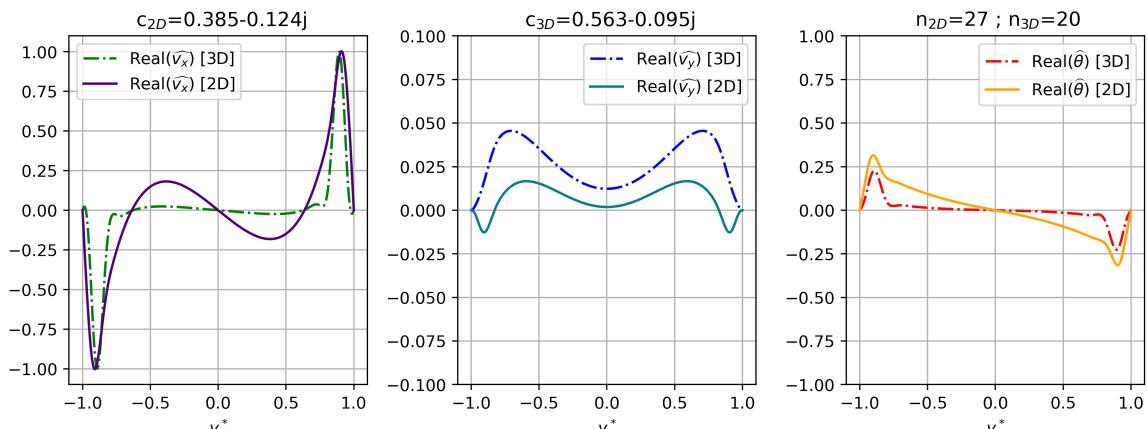
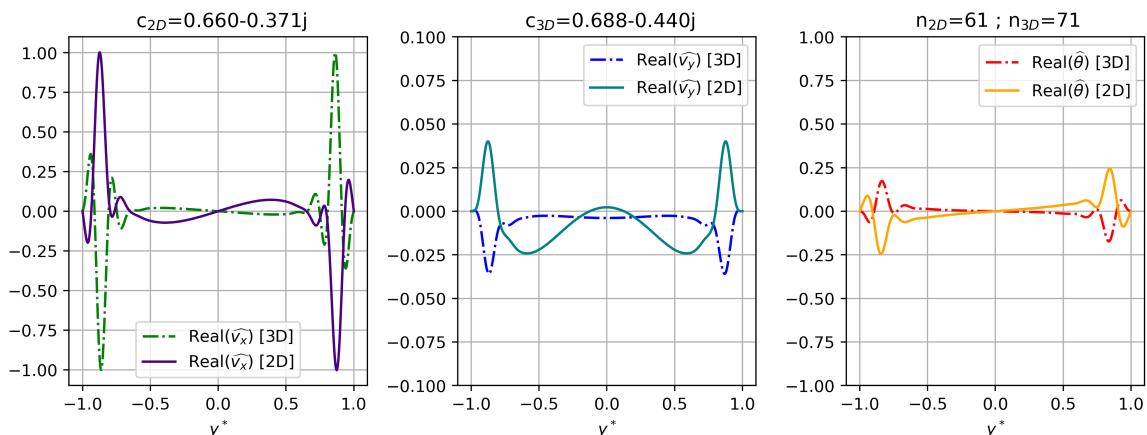


Figura C.2



(a)

Figura C.3



(a)

Figura C.4

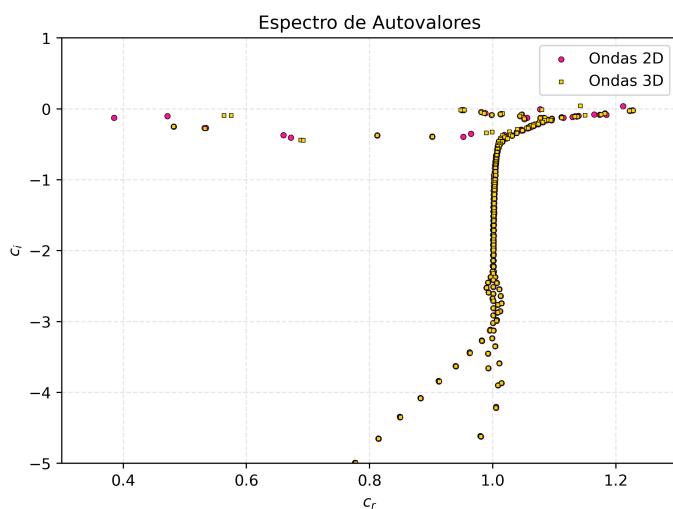


Figura C.5

C.1. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\Pi = 10^{-4}$

C.1.1. Autofunciones y Espectros de autovalores

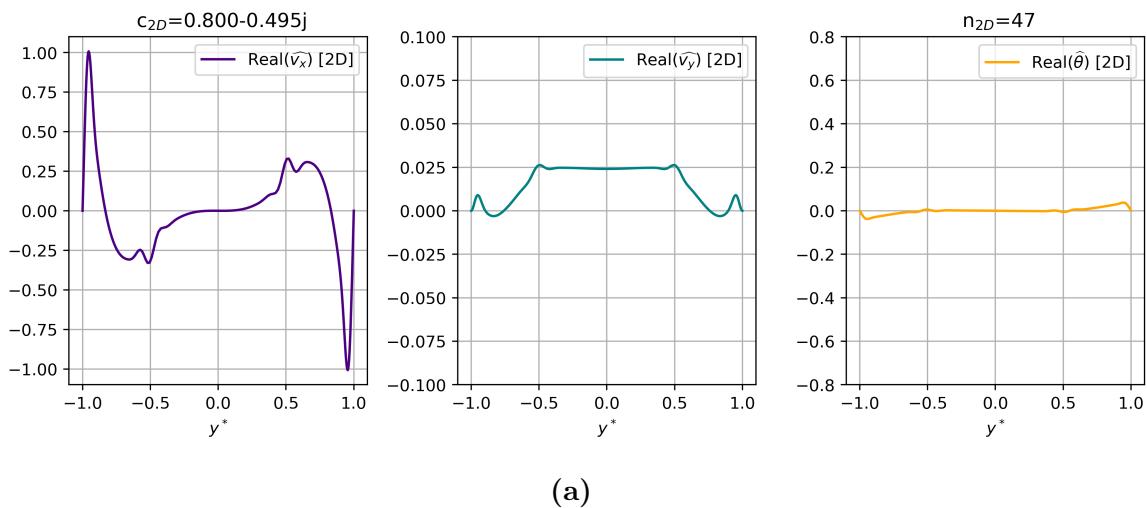


Figura C.6

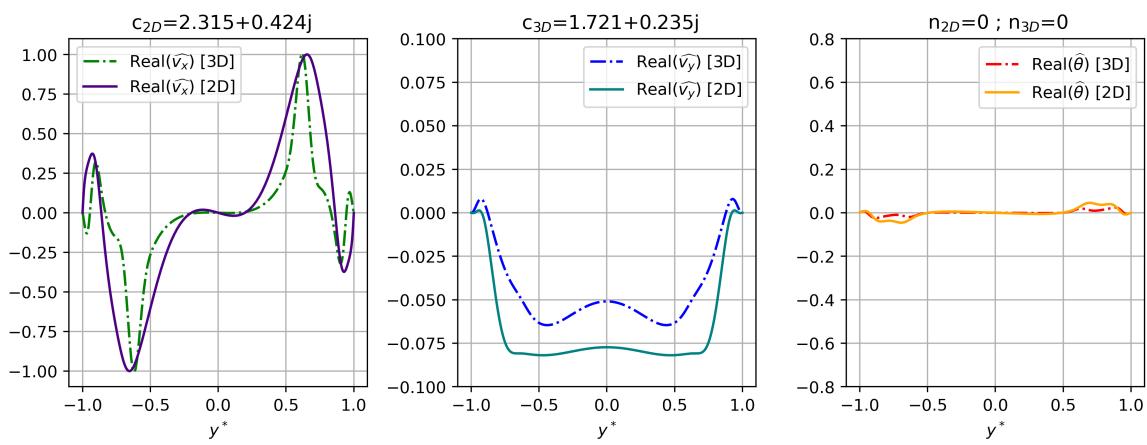
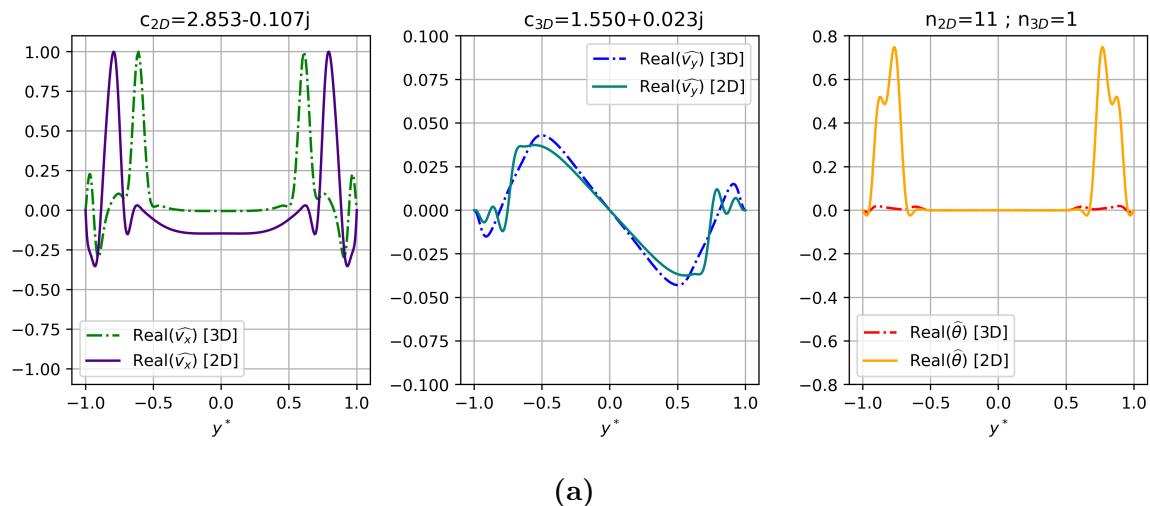


Figura C.7



(a)

Figura C.8

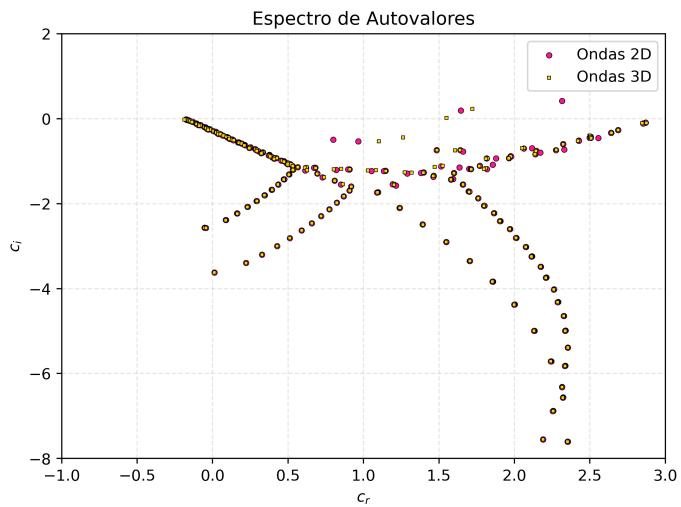


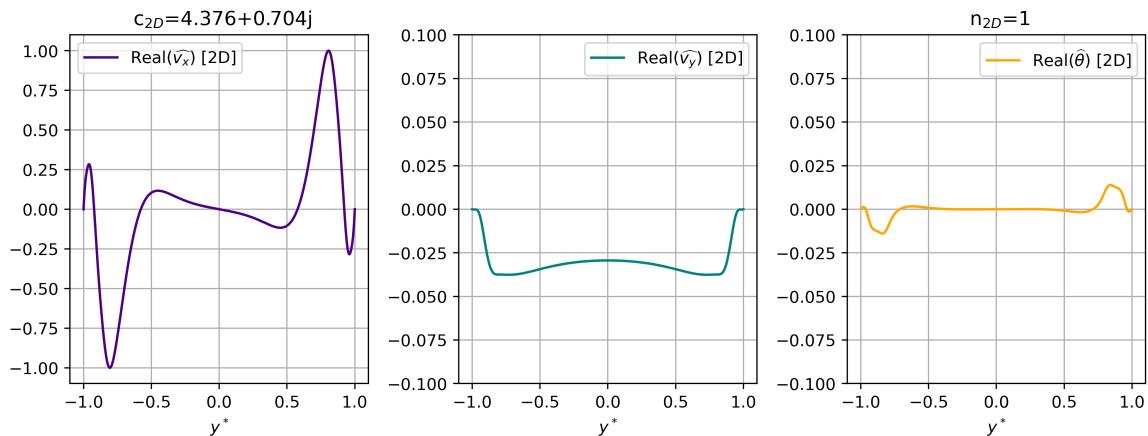
Figura C.9

C.2. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\Pi = 10^{-3}$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C1	5000	0.71	1E-3	1.12	0	2 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C2	5000	0.71	1E-3	1.12	0	1 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C3	5000	0.71	1E-3	1.12	0	0.5 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C4	5000	0.71	1E-3	1.12	0	0.25 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-

Tabla C.1

C.2.1. Autofunciones y Espectros de autovalores



(a)

Figura C.10

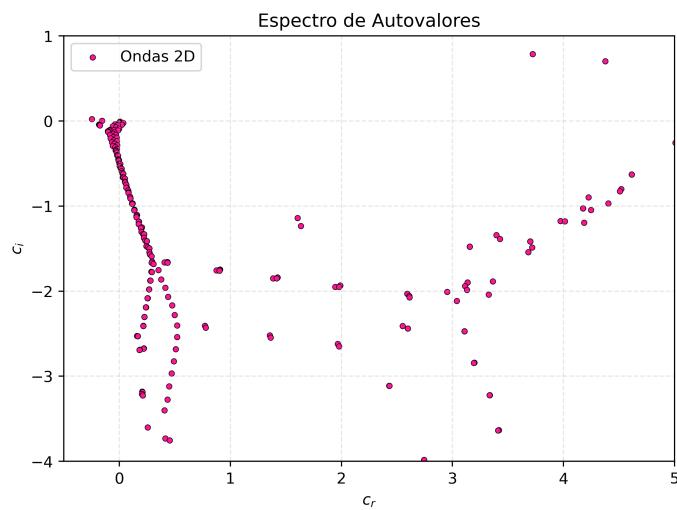


Figura C.11

C.2.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

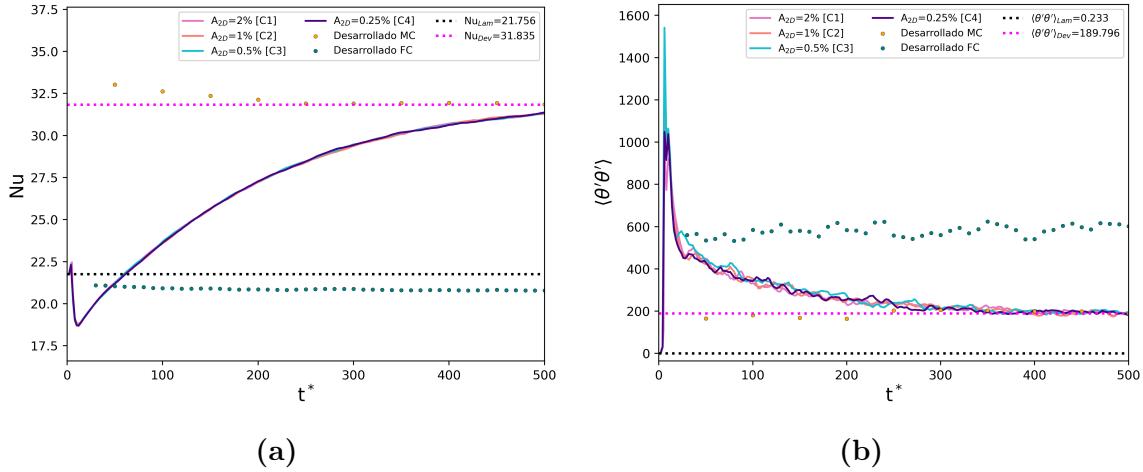


Figura C.12

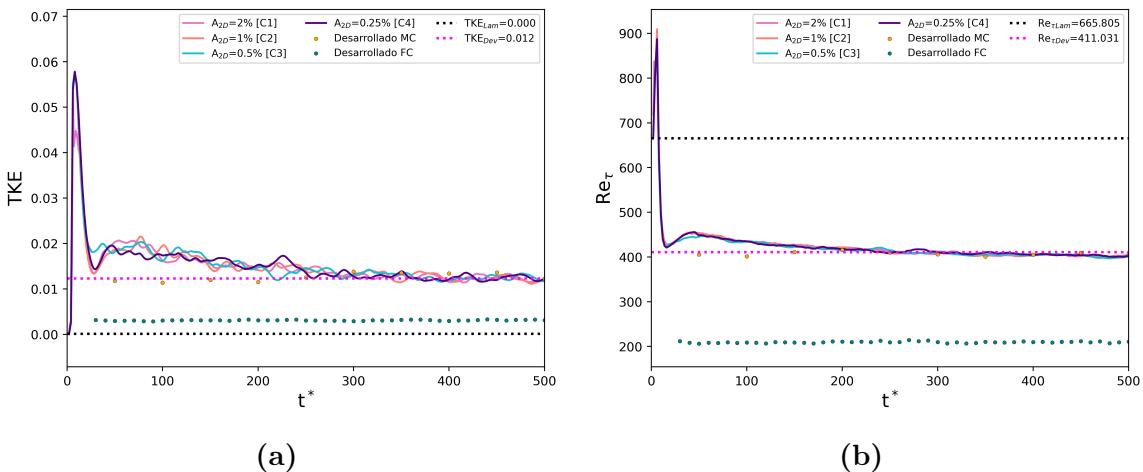


Figura C.13

Bibliografía

- [Abregu et al., 2023] Abregu, W. I. M., Dari, E. A., and Teruel, F. E. (2023). Dns of heat transfer in a plane channel flow with spatial transition. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 209:124110.
- [Aicher and Martin, 1997] Aicher, T. and Martin, H. (1997). New correlations for mixed turbulent natural and forced convection heat transfer in vertical tubes. *International journal of heat and mass transfer*.
- [Bénard, 1901] Bénard, H. (1901). Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*.
- [Carr et al., 1973] Carr, A., Connor, M., and Buhr, H. (1973). Velocity, temperature, and turbulence measurements in air for pipe flow with combined free and forced convection.
- [Cengel and Ghajar, 2015] Cengel, Y. A. and Ghajar, A. J. (2015). *Heat and Mass Transfer:Fundamentals & Applications*. McGraw-Hill Education.
- [Chen and Chung, 1996] Chen, Y.-C. and Chung, J. (1996). The linear stability of mixed convection in a vertical channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*.
- [Chen and Chung, 2003] Chen, Y.-C. and Chung, J. (2003). A direct numerical simulation of transition phenomena in a mixed convection channel flow. *Computers & fluids*.
- [Dittus and Boelter, 1930] Dittus, F. W. and Boelter, L. M. K. (1930). Heat transfer in automobile radiators of the tubular type. *University of California Publications in Engineering*.
- [Easby, 1978] Easby, J. (1978). The effect of buoyancy on flow and heat transfer for a gas passing down a vertical pipe at low turbulent reynolds numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [Ghajar, 2019] Ghajar, A. J. (2019). Heat transfer and pressure drop in the transition region of smooth horizontal circular tubes with different inlet configurations. In *Advances in heat transfer*. Elsevier.
- [Hall and Jackson, 1969] Hall, W. and Jackson, J. (1969). Laminarization of a turbulent pipe flow by buoyancy forces. asme paper. Technical report.
- [Herbert, 1983] Herbert, T. (1983). Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances. *Physics of Fluids*.

- [Incropera et al., 2006] Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., Lavine, A. S., et al. (2006). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley and Sons.
- [Jackson et al., 1989] Jackson, J., Cotton, M., and Axcell, B. (1989). Studies of mixed convection in vertical tubes. *International journal of heat and fluid flow*.
- [Kader, 1981] Kader, B. (1981). Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *International journal of heat and mass transfer*.
- [Kasagi and Nishimura, 1997] Kasagi, N. and Nishimura, M. (1997). Direct numerical simulation of combined forced and natural turbulent convection in a vertical plane channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow*.
- [Kasagi et al., 1992] Kasagi, N., Tomita, Y., and Kuroda, A. (1992). Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow.
- [Kawamura et al., 2000] Kawamura, H., Abe, H., and Shingai, K. (2000). Dns of turbulence and heat transport in a channel flow with different reynolds and prandtl numbers and boundary conditions. *Turbulence, Heat and Mass Transfer*.
- [Kawamura et al., 1998] Kawamura, H., Ohsaka, K., Abe, H., and Yamamoto, K. (1998). Dns of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high prandtl number fluid. *International Journal of Heat and Fluid Flow*.
- [Kundu et al., 2016] Kundu, P. K., Cohen, I. M., Dowling, D. R., and Capecelatro, J. (2016). *Fluid Mechanics*. Elsevier.
- [Li et al., 2021] Li, J., Xiao, Y., Gu, H., Liu, D., and Zhang, Q. (2021). Development of a correlation for mixed convection heat transfer in rod bundles. *Annals of Nuclear Energy*.
- [Metais and Eckert, 1964] Metais, B. and Eckert, E. R. G. (1964). Forced, mixed and free convection regimes. *Journal of Heat Transfer*.
- [Orr, 1907] Orr, W. M. (1907). The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. part i: A perfect liquid. part ii: A viscous liquid.
- [Parlatan et al., 1996] Parlatan, Y., Todreas, N., and Driscoll, M. (1996). Buoyancy and property variation effects in turbulent mixed convection of water in vertical tubes.
- [Pirozzoli et al., 2017] Pirozzoli, S., Bernardini, M., Verzicco, R., and Orlandi, P. (2017). Mixed convection in turbulent channels with unstable stratification. *Journal of fluid mechanics*.
- [Pope, 2001] Pope, S. B. (2001). *Turbulent flows*. Cambridge University Press.
- [Prandtl, 1942] Prandtl, L. (1942). *Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg, 3 edition.
- [Rayleigh, 1916] Rayleigh, L. (1916). On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Philosophical Magazine*.

- [Reynolds, 1883] Reynolds, O. (1883). Iii. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the royal society of London*.
- [Schlichting, 1933] Schlichting, H. (1933). Berechnung der anfachung kleiner störungen bei der plattenströmung. *ZAMM*.
- [Schubauer and Skramstad, 1947] Schubauer, G. B. and Skramstad, H. K. (1947). Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*.
- [Sommerfield, 1908] Sommerfield, A. (1908). Ein beitrag zur hydrodynamischen erklärung der turbulenten flüssigkeitsbewegungen. *Atti Congr. Int. Math. 4th.*
- [Steiner, 1971] Steiner, A. (1971). On the reverse transition of a turbulent flow under the action of buoyancy forces. *Journal of Fluid Mechanics*.
- [Straub et al., 2019] Straub, S., Forooghi, P., Marocco, L., Wetzel, T., Vinuesa, R., Schlatter, P., and Frohnäpfel, B. (2019). The influence of thermal boundary conditions on turbulent forced convection pipe flow at two prandtl numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [Tao, 1960] Tao, S. C. (1960). Combined forced and free convection in a vertical channel. *Journal of Heat Transfer*.
- [Tollmien, 1930] Tollmien, W. (1930). Über die entstehung der turbulenz. *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete: Aachen 1929*.
- [White, 2011] White, F. M. (2011). *Fluid mechanics*. McGraw-Hill New York.
- [You et al., 2003] You, J., Yoo, J. Y., and Choi, H. (2003). Direct numerical simulation of heated vertical air flows in fully developed turbulent mixed convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [Zhou et al., 2024] Zhou, L., Zhang, D., Liu, Y., Liang, Y., Wang, B., Tian, W., Qiu, S., and Su, G. (2024). Direct numerical simulation of sodium in vertical channel flow: From forced convection to natural convection at friction reynolds number 180. *Physics of Fluids*.

Agradecimientos

A todos los que se lo merecen ...

