

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA

ANÁLISIS DEL FLUJO EN CONVECCIÓN MIXTA EN CANALES RECTANGULARES

Patricio G. Canciani
Maestrando

Dr. William I. Machaca Abregu
Director

Dr. Federico Teruel
Co-director

Miembros del Jurado

Dr. Christian P. Marcel (Instituto Balseiro – CNEA)
Dr. Pablo Garcia Martinez (Instituto Balseiro – CNEA)
Dr. César Venier (FCEIA – SIMEC)

13 de Junio de 2025

Departamento de Mecánica Computacional
(Centro Atómico Bariloche)

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A todos mis seres queridos

Índice de símbolos

Índice de contenidos

Índice de símbolos	v
Índice de contenidos	vii
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
1. Introducción	1
1.1. Introducción	2
1.2. Motivación	2
1.3. Objetivos	2
1.4. Organización del trabajo	2
2. Modelo Matemático	3
2.1. Conceptos Elementales de Turbulencia	4
2.2. Descripción del sistema bajo estudio. Ecuaciones de Gobierno y Condiciones de Borde	4
2.3. Sumario de Ecuaciones	7
2.4. Teoría de Estabilidad Lineal. Perturbaciones	8
2.5. Flujo Base	8
2.6. Análisis de Estabilidad Lineal	9
2.7. Ondas TS e Inestabilidad Secundaria	11
3. Fundamentos de Herramientas Numéricas	13
3.1. Simulaciones Numéricas Directas	14
3.2. Xcompac3D	14
3.2.1. Métodos Numéricos	14
3.2.2. Validación	14

3.3. Orr-Somerfeld - <i>Mixed Convection</i> (OSMC)	14
3.3.1. Métodos Numéricos	14
4. Validación de Herramientas Numéricas	15
4.1. Primera Parte: Xcompac3D	16
4.2. Segunda Parte: Orr-Somerfeld - <i>Mixed Convection</i>	16
5. Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollado	17
5.1. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,71$	18
5.2. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,071$	19
5.3. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,71$	20
5.4. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,071$	21
5.5. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,71$	22
5.6. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,071$	23
5.7. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,71$	24
5.8. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,071$	25
6. Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta	27
6.1. Casos $\text{Re} = 750$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$	28
6.1.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	28
6.1.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	29
6.2. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$	30
6.2.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	30
6.2.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	32
6.3. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-4}$	34
6.3.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	34
6.3.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	36
6.4. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-3}$	37
6.4.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	37
7. Conclusiones	39
A. Budgets Dynamics Equations	41
Bibliografía	44
Agradecimientos	45

Índice de figuras

2.1.	4
5.1.	18
5.2.	18
5.3.	19
5.4.	19
5.5.	20
5.6.	20
5.7.	21
5.8.	21
5.9.	22
5.10.	22
5.11.	23
5.12.	23
5.13.	24
5.14.	24
5.15.	25
5.16.	25
6.1.	28
6.2.	28
6.3.	29
6.4.	29
6.5.	30
6.6.	31
6.7.	31
6.8.	31
6.9.	32
6.10.	32
6.11.	33
6.12. Casos C9,C10,C11	33

6.13. Casos C9,C10,C11	33
6.14.	34
6.15.	34
6.16.	35
6.17.	35
6.18.	36
6.19.	36
6.20.	37
6.21.	37

Índice de tablas

6.1.	28
6.2.	30
6.3.	34
6.4.	37

Resumen

Este es el resumen en castellano.

La tesis debe reflejar el trabajo desarrollado, mostrando la metodología utilizada, los resultados obtenidos y las conclusiones que pueden inferirse de dichos resultados.

Palabras clave: FLUJO TURBULENTO, CONVECCIÓN MIXTA

Abstract

This is the title in English:

The thesis must reflect the work of the student, including the chosen methodology, the results and the conclusions that those results allow us to draw.

Keywords: TURBULENT FLOW, MIXED CONVECTION

Capítulo 1

Introducción

Capítulo introductorio de la tesis

1.1. Introducción**1.2. Motivación****1.3. Objetivos****1.4. Organización del trabajo**

Capítulo 2

Modelo Matemático

Resumen del capítulo 2. Marco teórico (acotado) del contenido mínimo necesario para el entendimiento de los capítulos posteriores.

2.1. Conceptos Elementales de Turbulencia

Definiciones y conceptos básicos de turbulencia.

2.2. Descripción del sistema bajo estudio. Ecuaciones de Gobierno y Condiciones de Borde

Se considera el sistema representado en la Figura 2.1 donde la dinámica de un fluido viscoso e incompresible sucede entre dos paredes paralelas e infinitas ubicadas en $y = -d$ e $y = +d$. Esto constituye un canal de placas paralelas donde ambas paredes están sometidas a un flujo de calor constante q''_w .

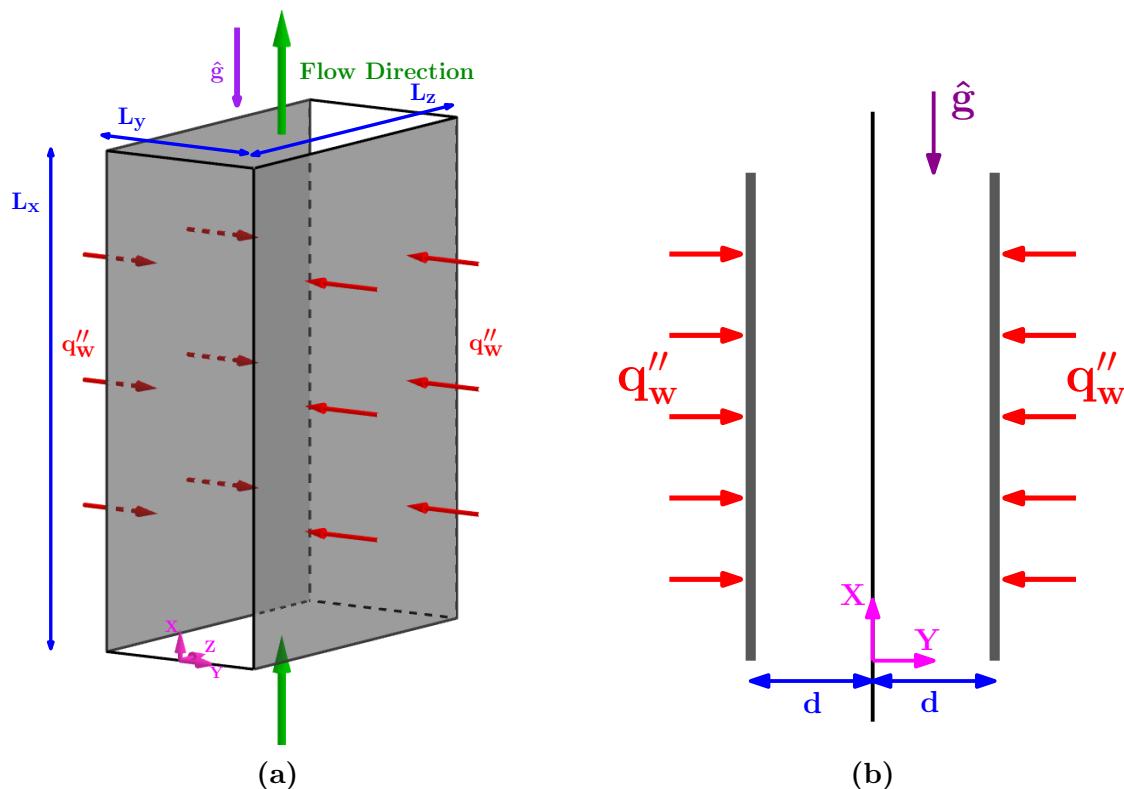


Figura 2.1

La dirección del flujo se encuentra en la dirección de la corriente (*streamwise*) paralelo al eje X y su sentido es opuesto a la aceleración de la gravedad. Las ecuaciones de gobierno corresponden a los principios de conservación de masa, momento y energía que se expresan en el cuadro 2.1.

$\nabla \cdot (\rho_o \mathbf{u}) = 0$ $\frac{\partial(\rho_o \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_o \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho(T) \mathbf{g}$ $\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T$	(2.1)
--	-------

Un sistema físico cuyas dimensiones “son muy grandes” (o infinitas) constituye un sistema ideal. En él, es posible ubicar el origen de nuestro sistema de referencia lejos de los extremos a fin de evitar efectos de bordes. Allí, el flujo se encuentra completamente desarrollado y ha alcanzado un estado estadísticamente estacionario, es decir, sus valores estadísticos, como el promedio, no varían en el tiempo. En este contexto, la condición de flujo de calor constante en las paredes se imponen como condiciones de Neumann:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\mp d} = \pm q_w'' \quad (2.2)$$

Sin embargo, debido a la limitación computacional evidente, nuestro modelo computacional no puede abarcar dicha extensión. En ese sentido, el “dominio infinito” se reemplaza con un dominio acotado de dimensiones $L_x \times L_y \times L_z$ (Figura 2.1a) adoptando condiciones de borde periódicas (PBC) en la direcciones X y Z :

$$\xi(x = 0, y, z, t) = \xi(x = L_x, y, z, t) \quad (2.3)$$

$$\xi(x, y, z = 0, t) = \xi(x, y, z = L_z, t) \quad (2.4)$$

siendo ξ un campo escalar de interés. Esto se puede interpretar como si las PBC crearan “la ilusión” de un dominio infinito, mediante la repetición de este dominio finito en el espacio.

Por otra parte, en un flujo turbulento, dado que este no es estacionario, aparecen fluctuaciones del flujo de calor y de la temperatura sobre la superficie de la pared. En este contexto, Kasagi et al. [Kasagi et al., 1992] asumen que las fluctuaciones de temperatura son pequeñas a fin de considerar que la temperatura en la pared es localmente isotérmica y que además, el flujo de calor no varía en la dirección de la corriente. Esto es equivalente a suponer que la temperatura en la pared, promediada en el tiempo y en la dirección Z , crece linealmente con x , y por lo tanto:

$$\langle T_w \rangle = \mathcal{A}x.$$

Debido al crecimiento lineal de $\langle T_w \rangle$, es requerido realizar el cambio de variable $T(x, y, z, t) = \langle T_w \rangle - \theta(x, y, z, t)$ para que siga siendo válido las condiciones de borde periódicas, esto es, $\theta(x = 0, y, z, t) = \theta(x = L_x, y, z, t)$. Ésta aproximación se encuentra en la literatura científica como *Mixed Boundary Conditions* [Straub et al., 2019]. Dicha modificación introduce un término fuente en la ecuación de conservación de energía:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \alpha \nabla^2 \theta + \mathcal{A} u_x \quad (2.5)$$

Por su parte, el término $\rho(T)\mathbf{g}$ en la ecuación de momento se reescribe empleando la aproximación de Boussinesq [Incropora et al., 2006], $\rho(T) = \rho_o [1 - \beta(T - T_R)]$:

$$\frac{\rho_o \partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_o \mathbf{u}) = -\nabla (p + \rho_o g x) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + g \rho_o \beta \theta \hat{\mathbf{g}} \quad (2.6)$$

donde se ha considerado $T_R = \langle T_w \rangle$, siendo $\hat{\mathbf{g}} = (-1, 0, 0)$.

Mediante el balance de energía en el volumen de control $L_x \times L_y \times L_z$, es posible deducir que $\mathcal{A} = \frac{q''_w}{\rho_o d \langle u_x \rangle c_p}$ siendo d el semiancho del canal. Así, empleando la velocidad en el centro del canal U_o , el semiancho d y la temperatura $T_o = \mathcal{A}d$, el sistema de ecuaciones 2.1 en su forma adimensional queda escrito como se muestra en el cuadro 2.7.

Otro detalle importante es el hecho de que el fluido de trabajo es impulsado por un caudal máscico constante. Esta cuestión se encuentra representada por el término fuente $f\hat{\mathbf{x}}$, en la ecuación de momento, donde f es una constante en el espacio y varía con el tiempo de manera que mantiene constante el caudal total.

$$\begin{aligned} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \text{Ri}_o \theta^* \hat{\mathbf{g}} + f\hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}_o} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^* \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\text{Re}_o = \frac{\mu}{\rho_o U_o d} \quad ; \quad \text{Pr} = \frac{\nu_o}{\alpha} \quad ; \quad \text{Ri}_o = \frac{g \beta \Delta T d}{U_o^2} = \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_o^2 \text{Pr}}$$

Asimismo, las condiciones de flujo de calor constante están expresadas en la ecuación 2.8. Sin embargo, estas condiciones pueden ser aproximadas como condiciones de Dirichlet ya que al suponer que la temperatura de las paredes es constante (fluctuaciones de temperatura iguales a cero) se obtiene: $T(x, y = 0, z, t) = T(x, y = 2d, z, t) = \langle T_w \rangle$. Su forma adimensional se expresa en la ecuación 2.9. Por otra parte, para el resto de variables (campo de presión y componentes de velocidad) se adoptan condiciones de no deslizamiento en las paredes.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=-1} &= +\frac{2}{3} \text{Re}_o \text{Pr} \\ \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=+1} &= -\frac{2}{3} \text{Re}_o \text{Pr} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = 0, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = 2, z^*, t^*) = 0 \quad (2.9)$$

2.3. Sumario de Ecuaciones

Ecuaciones de Gobierno:

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + Ri_o \theta^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^*\end{aligned}\quad (2.10)$$

Condiciones de borde: considerando $\xi = u_x^*, u_y^*, u_z^*, p^*, \theta^*$, entonces

$$\xi(x = 0, y, z, t) = \xi(x = L_x, y, z, t) \quad (2.11)$$

$$\xi(x, y, z = 0, t) = \xi(x, y, z = L_z, t) \quad (2.12)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u}^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \mathbf{u}^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.14)$$

$$\partial_y p^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \partial_y p^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

A lo largo de este trabajo también se utiliza, particularmente para el análisis de estabilidad lineal, la forma adimensional de las ecuaciones del trabajo de Chen [Chen and Chung, 1996] que se obtienen empleando el semiancho del canal d , la velocidad media laminar $\langle u_x \rangle$ y la temperatura $T_c = Re Pr \mathcal{A} d$. Dichas ecuaciones se expresan en 2.17. Las condiciones de borde son exactamente análogas que su forma adimensional de más arriba.

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_b} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{Ra}{Re_b} \varphi^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \varphi^* &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_b} [\nabla^{*2} \varphi^* - v_x^*] \\ \varphi^* &= -\frac{\theta^*}{Re_o Pr} \quad ; \quad \mathbf{v}^* = \frac{2}{3} \mathbf{u}^* \quad ; \quad Re_b = \frac{2}{3} Re_o\end{aligned}\quad (2.17)$$

2.4. Teoría de Estabilidad Lineal. Perturbaciones

Para analizar la estabilidad lineal y prever de forma matemática cómo cambiará un flujo una vez perturbado, resulta indispensable aceptar que las perturbaciones actúan sobre un flujo base. Aquí se adopta como referencia el flujo laminar completamente desarrollado. En consecuencia, la evolución de las perturbaciones también queda condicionada por dicho estado inicial.

2.5. Flujo Base

Si el flujo está completamente desarrollado, tanto térmica como hidrodinámicamente, entonces el mismo sólo dependerá de la variable y^* . El sistema de ecuaciones 2.17 se reduce a la ecuación de momento en la dirección X y a la ecuación de transporte del escalar pasivo, las cuales quedan expresadas como

$$\frac{dp^*}{dx^*} = \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \Phi^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 V_x^*}{dy^{*2}} \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2 \Phi^*}{dy^{*2}} = V_x^* \quad (2.19)$$

El perfil de velocidad y de temperatura admiten las condiciones de borde $V_x^*(y^* = \pm 1) = \Phi^*(y^* = \pm 1) = 0$. Las soluciones para un flujo asistido por fuerzas boyantes están dadas por las expresiones 2.20 y 2.21, mientras que para un flujo donde las fuerzas boyantes son opuestas, las soluciones quedan definidas por las ecuaciones 2.22 y 2.23 [Chen and Chung, 1996].

$$V_x^* = \frac{-E}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\sinh(\kappa(1+y^*)) \sin(\kappa(1-y^*)) + \sinh(\kappa(1-y^*)) \sin(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \quad (2.20)$$

$$\Phi^* = \frac{E}{\text{Ra}} \left[1 - \frac{\cosh(\kappa(1+y^*)) \cos(\kappa(1-y^*)) + \cosh(\kappa(1-y^*)) \cos(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \right] \quad (2.21)$$

$$V_x = \frac{F}{2m^2} \left(\frac{\cosh(my^*)}{\cosh(m)} - \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} \right) \quad (2.22)$$

$$\Phi^* = \frac{F}{2m^4} \left(\frac{\cosh(my^*)}{\cos(m)} + \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} - 2 \right) \quad (2.23)$$

$$\kappa = \frac{\text{Ra}^{-1/4}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad m = (-\text{Ra})^{1/4} \quad ; \quad F = \frac{2m^3}{\tanh(m) - \tan(m)} \quad ;$$

$$E = -2\kappa \text{Ra}^{1/2} \frac{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)}{\sinh(2\kappa) - \sin(2\kappa)}$$

Obsérvese que el único parámetro aquí es el número de Rayleigh. En el Capítulo 3, se utilizarán estas ecuaciones para la validación de la herramienta numérica en estas condiciones.

2.6. Análisis de Estabilidad Lineal

La transición laminar-turbulenta, es decir, la evolución de un flujo laminar a uno turbulento, es crucial en ingeniería, ya que las características del flujo varían notablemente entre estos regímenes. Por ejemplo, los coeficientes de fricción y de convección aumentan considerablemente al pasar de un régimen laminar a uno turbulento. La ecuación de Navier-Stokes admite ambas soluciones bajo ciertos parámetros, lo que implica que el tipo de flujo y su evolución dependen de las perturbaciones y las condiciones impuestas en el sistema. Muchos fenómenos que cumplen exactamente las leyes de conservación resultan inobservables porque se inestabilizan ante las pequeñas perturbaciones inevitables en cualquier sistema real [Kundu et al., 2016].

El análisis de estabilidad lineal permite evaluar cómo se comporta un flujo ante perturbaciones, identificando los mecanismos que pueden inducir transiciones o estados de intermitencia. En el caso de flujos de fluidos, condiciones como un número de Reynolds inferior a un valor crítico garantizan la estabilidad de un flujo laminar suave. Sin embargo, en ocasiones las perturbaciones crecen hasta alcanzar amplitudes finitas y establecer nuevos equilibrios estacionarios, que pueden volverse inestables a su vez y evolucionar hacia estados de fluctuaciones caóticas, comúnmente descritos como turbulencia. Dos motivaciones principales para estudiar la estabilidad de los fluidos son comprender el proceso de transición de un flujo laminar a uno turbulento y predecir el inicio de dicha transición.

El enfoque parte de las ecuaciones de gabinete 2.17 donde se han omitido los superíndices “*”. La idea consiste en suponer que los campos solución (\mathbf{v}, p, φ) pueden descomponerse como un flujo base más una perturbación:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.24)$$

$$p = P + \tilde{p} \quad (2.25)$$

$$\varphi = \Phi + \tilde{\varphi} \quad (2.26)$$

donde las letras mayúsculas hacen referencia al flujo base laminar y aquellas letras con $(\tilde{})$ a las perturbaciones.

Despreciando términos de segundo orden, esto es, productos de perturbaciones, y asumiendo que los flujos bases son los flujos laminares desarrollados $\mathbf{V} = (V_x(y), 0, 0)$ y $\Phi \equiv \Phi(y)$ es posible expresar las ecuaciones que describen la dinámica de $\tilde{\mathbf{v}}$, \tilde{p} y $\tilde{\varphi}$ de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.27)$$

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + V_x \partial_x \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{v}_y \partial_y V_x \hat{\mathbf{e}}_x = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re_b} \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} + \frac{Ra}{Re_b} \tilde{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.28)$$

$$\partial_t \tilde{\varphi} + V_x \partial_x \tilde{\varphi} + \tilde{v}_y \partial_y \Phi = \frac{1}{Re_b Pr} [\nabla^2 \tilde{\varphi} - \tilde{v}_x] \quad (2.29)$$

Luego, aplicando el operador divergencia a la ecuación 2.28 es posible encontrar una expresión para el laplaciano de la presión:

$$-\nabla \tilde{p} = 2 \partial_x \tilde{v}_y \partial_y V_x - \frac{Ra}{Re_b} \partial_x \tilde{\varphi} \quad (2.30)$$

Aplicando el operador laplaciano a la componente Y de la ecuación 2.28 es posible eliminar el término que involucra la presión, resultando en la siguiente expresión:

$$\left\{ [\partial_t + V_x \partial_x] \nabla^2 - D^2(V_x) \partial_x - \frac{1}{Re_b} \nabla^4 \right\} \tilde{v}_y = -\frac{Ra}{Re_b} \partial_{xy} \tilde{\varphi} \quad (2.31)$$

donde $D^j \equiv \partial_y^j$.

Para la descripción completa de las perturbaciones se utiliza la componente y de la voracidad $\tilde{\eta} \equiv \partial_z \tilde{v}_x - \partial_x \tilde{v}_z$ cuya dinámica se detalla está dada por la ecuación 2.32.

$$\left[\partial_t + V_x \partial_x - \frac{1}{Re_b} \nabla^2 \right] \tilde{\eta} + D(V_x) \partial_z \tilde{v}_y = \frac{Ra}{Re_b} \partial_z \tilde{\varphi} \quad (2.32)$$

Así, las ecuaciones 2.29, 2.31 y 2.32 constituyen un sistema de EDP de 3 ecuaciones con 3 campos incógnitas. A partir de los campos escalares $\tilde{\eta}$ y \tilde{v}_y , utilizando las ecuación 2.27 y la definición de $\tilde{\eta}$ es posible hallar los campos \tilde{v}_x y \tilde{v}_z . Asimismo, empleando la ecuación 2.30 y los campos \tilde{v}_y y $\tilde{\varphi}$ es posible hallar el campo de presión \tilde{p} .

Las soluciones a dicho sistema se proponen como ondas planas tridimensionales. Si $\tilde{\xi}$ es una perturbación cualquiera, entonces, se escribe de la siguiente forma arbitraria:

$$\tilde{\xi} = \hat{\xi}(y) e^{i[\alpha x + \beta z - \omega t]} \quad (2.33)$$

donde $c \equiv c_r + i c_i$ es la velocidad de fase y $\omega \equiv \alpha c$ es la frecuencia angular. Además:

$$\alpha, \beta, c_r, c_i, \epsilon \in \mathbb{R}$$

En este sentido, se distinguen dos casos:

- ◆ Si $\alpha c_i > 0$ entonces las perturbaciones crecen en el tiempo. El flujo se vuelve inestable.
- ◆ Si $\alpha c_i < 0$ entonces las perturbaciones decaen exponencialmente en el tiempo y la perturbación se atenua. El flujo se vuelve estable.

Al reemplazar las soluciones tipo 2.33 en el sistema de ecuaciones se obtiene un problema de autovalores generalizado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2]^2 - i\alpha (V_x [D^2 - k^2] + D^2(V_x)) ; \quad a_{12} = - \left[i\alpha \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} D \right] \\ a_{21} &= \frac{i\alpha}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} D + D(\Phi) ; \quad a_{22} = \frac{-1}{\text{Re}_b \text{Pr}} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x ; \quad a_{23} = \frac{\beta}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} \\ a_{31} &= \beta D(V_x) ; \quad a_{32} = -\beta \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} ; \quad a_{33} = -\frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x \\ b_1 &= -[D^2 - k^2] ; \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

A partir de las condiciones de borde 2.11 - 2.15, las autofunciones $\hat{v}_y(y)$, $\hat{\varphi}(y)$, $\hat{\eta}(y)$ deben satisfacer las condiciones:

$$\hat{v}_y(y) = D(\hat{v}_y) = \hat{\varphi}(y) = \hat{\eta}(y) = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm 1 \quad (2.35)$$

La resolución de este problema de autovalores generalizado se realiza empleando una estrategia numérica la cuál se detalla en el capítulo 3.

2.7. Ondas TS e Inestabilidad Secundaria

Falta completar

Capítulo 3

Fundamentos de Herramientas Numéricas

Nociones Elementales de que consiste hacer simulaciones numéricas directas (DNS).
Descripción de las herramientas numéricas empleadas.

3.1. Simulaciones Numéricas Directas

Falta escribir

3.2. Xcompac3D

3.2.1. Métodos Numéricos

Falta escribir

3.2.2. Validación

Falta escribir

...

“A efectos prácticos las aproximación de flujo de calor cte (condición de Neuman) como una condición de Dirichlet igual a 0 resulta mejor desde el punto de vista numérico ya que la fluctuación de los campos es mayor y se requiere más tiempo de corrida para conseguir una buena estadística ...”

3.3. Orr-Sommerfeld - *Mixed Convection* (OSMC)

Falta escribir

3.3.1. Métodos Numéricos

Falta escribir

Falta escribir

Capítulo 4

Validación de Herramientas Numéricas

Validación de las herramientas numéricas empleadas.

4.1. Primera Parte: Xcompac3D

...

“A efectos prácticos las aproximación de flujo de calor cte (condición de Neuman) como una condición de Dirichlet igual a 0 resulta mejor desde el punto de vista numérico ya que la fluctuación de los campos es mayor y se requiere más tiempo de corrida para conseguir una buena estadística ...”

4.2. Segunda Parte: Orr-Sommerfeld - *Mixed Convection*

Falta escribir

Capítulo 5

Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollado

La finalidad de este capítulo es que el lector/jurado comprenda la forma de abordar el problema estudiado. Así como las magnitudes y parámetros relevantes del problema.

A continuación van todos los casos de flujos completamente desarrollados de los cuales tengo seguridad.

5.1. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,71$

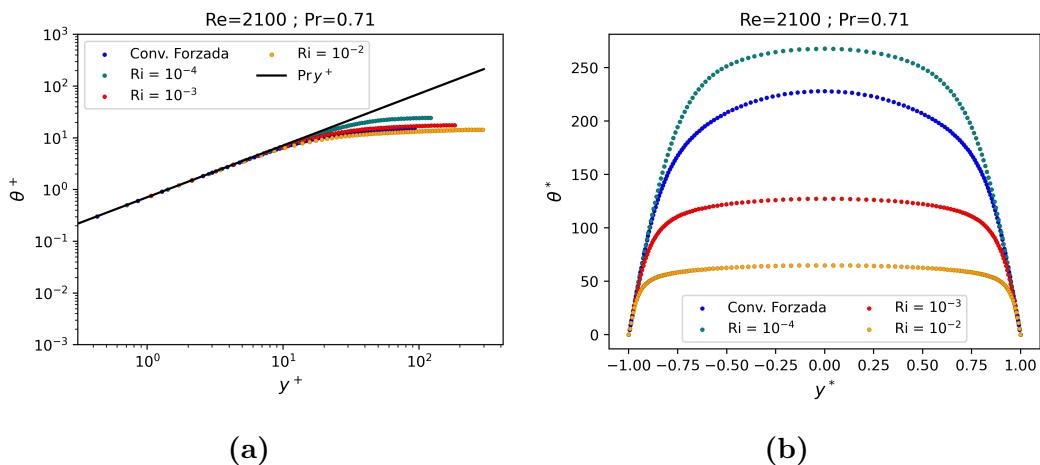


Figura 5.1

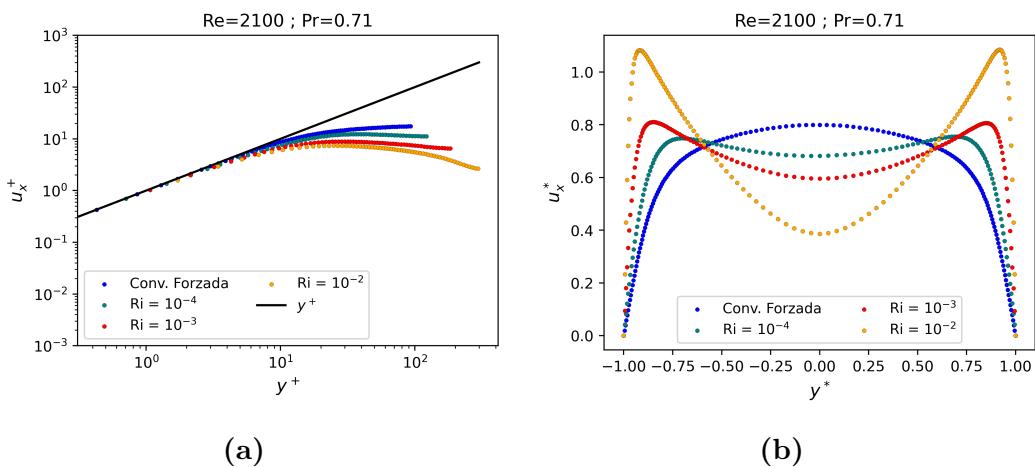


Figura 5.2

5.2. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,071$

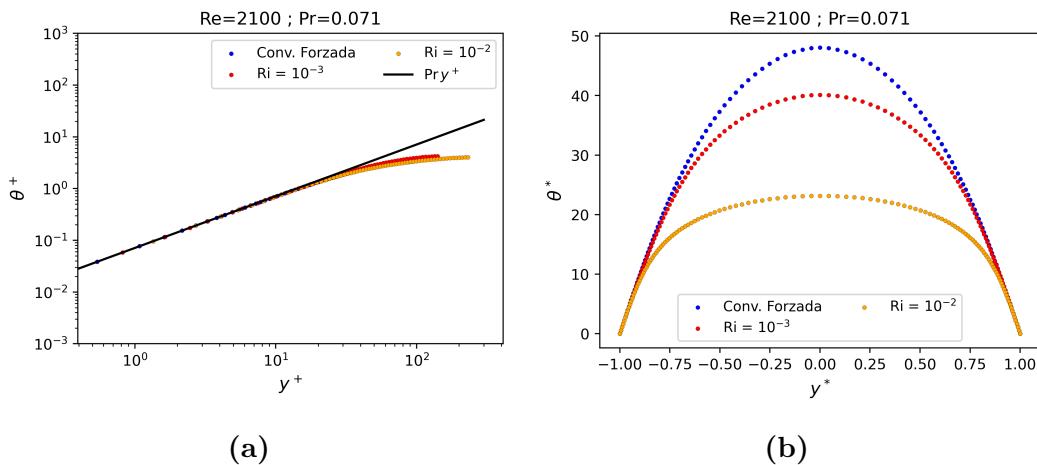


Figura 5.3

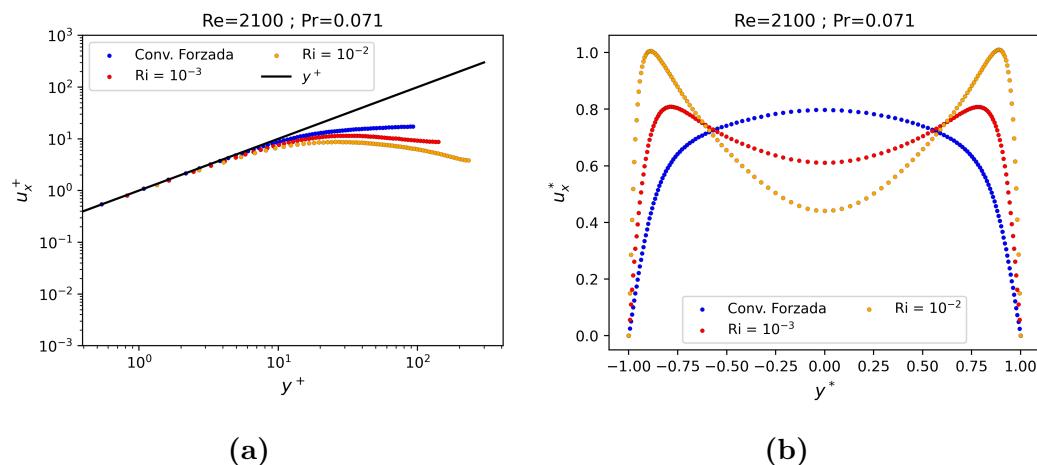


Figura 5.4

5.3. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,71$

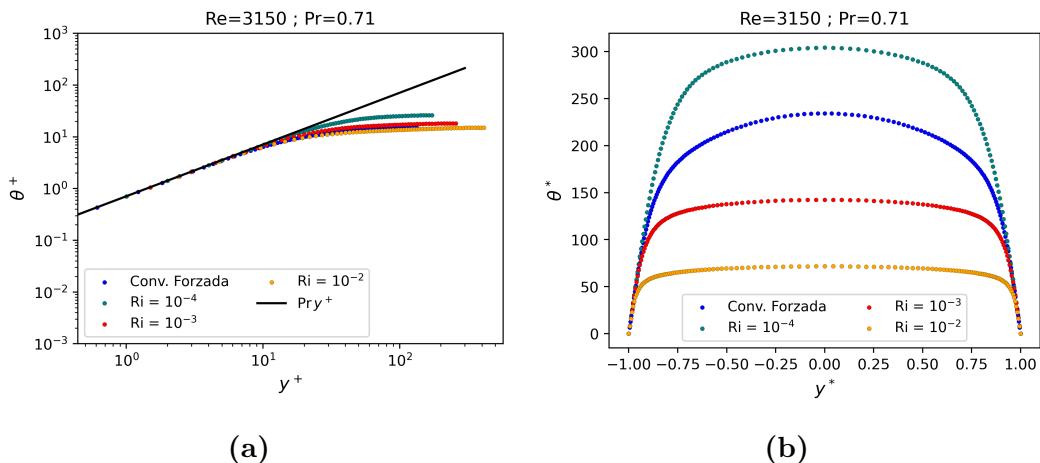


Figura 5.5

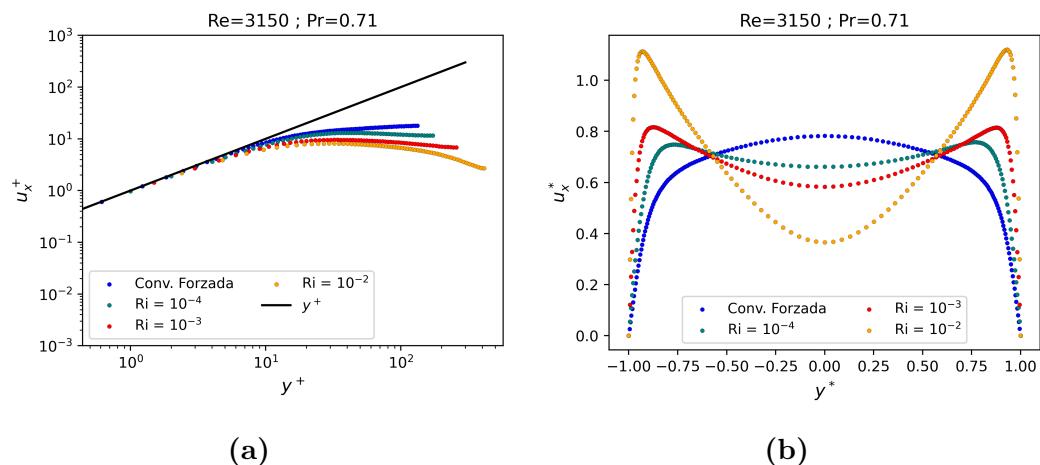


Figura 5.6

5.4. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,071$

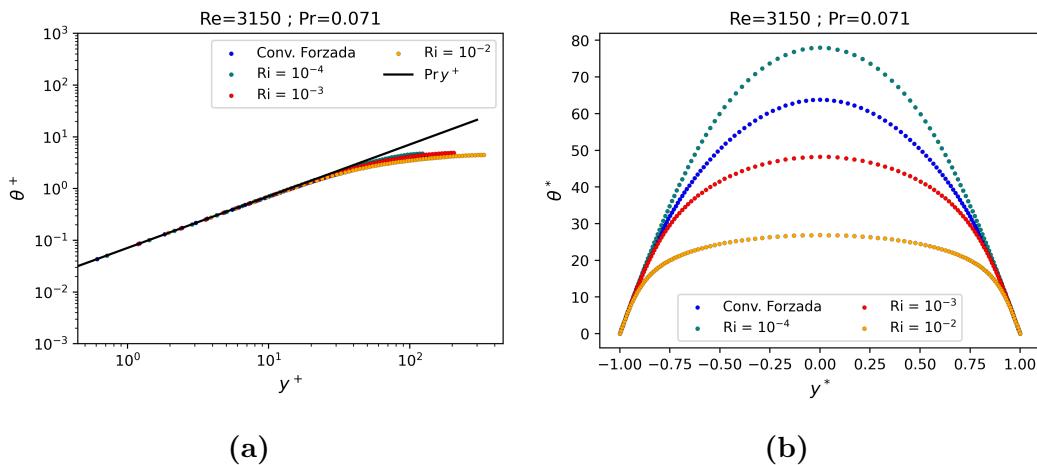


Figura 5.7

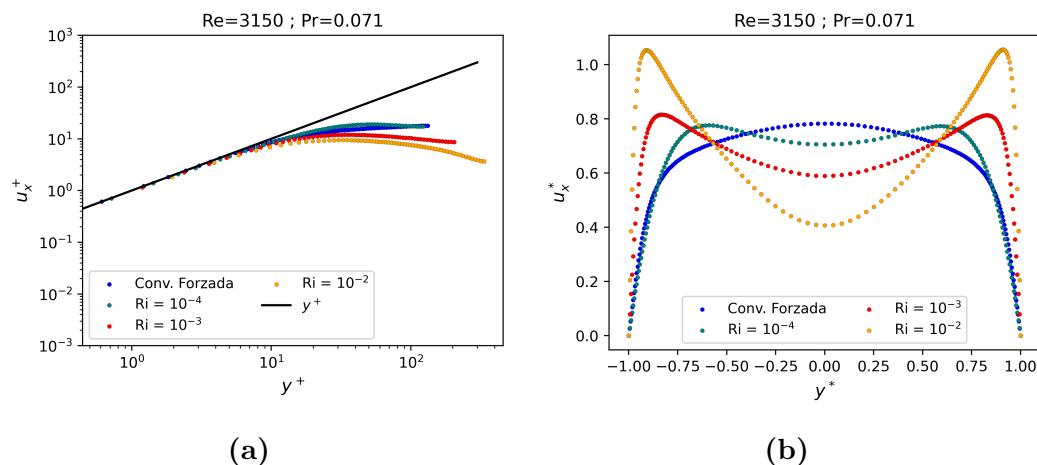


Figura 5.8

5.5. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,71$

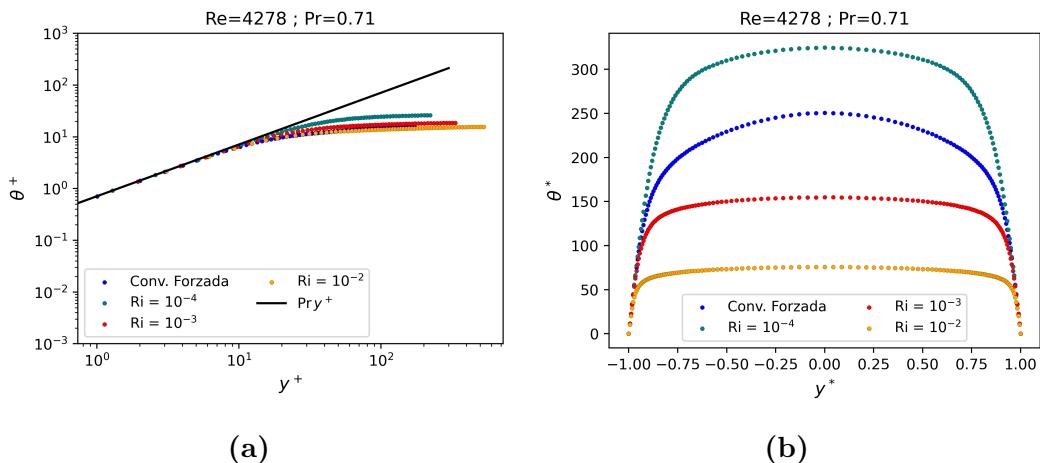


Figura 5.9

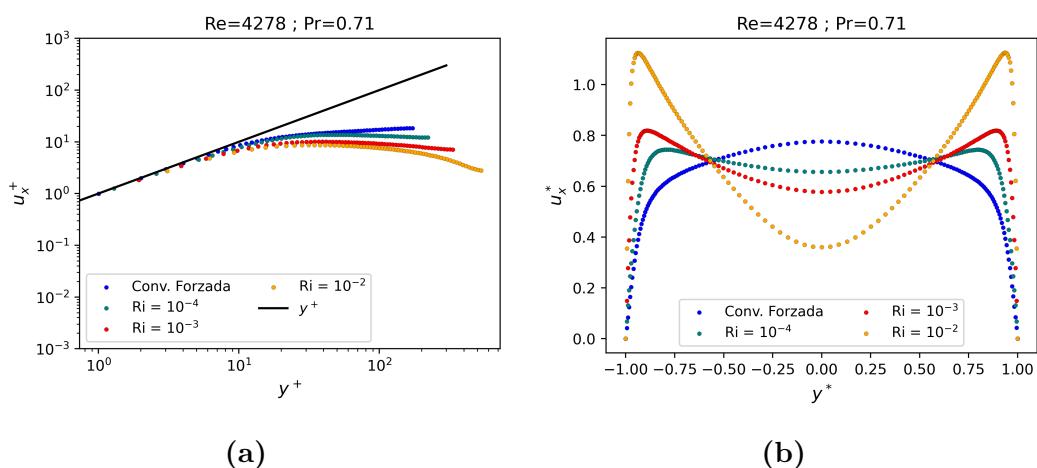


Figura 5.10

5.6. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,071$

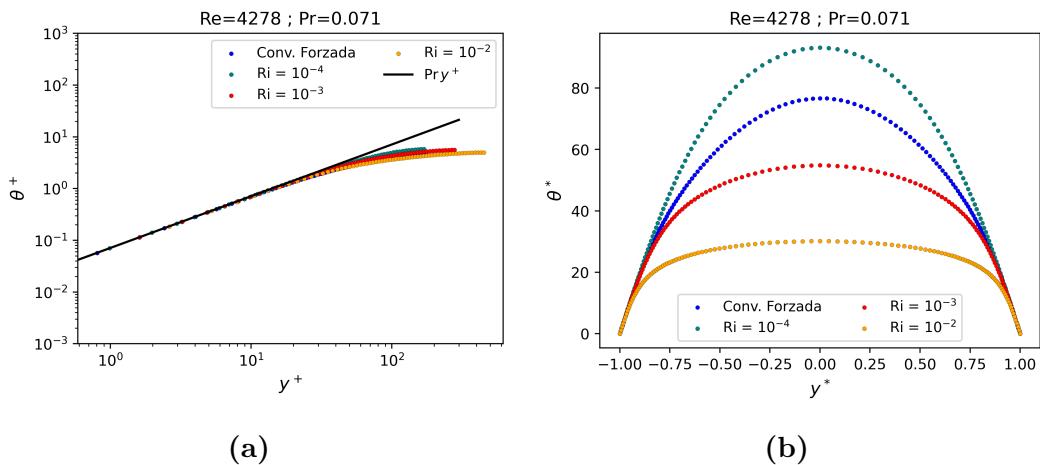


Figura 5.11

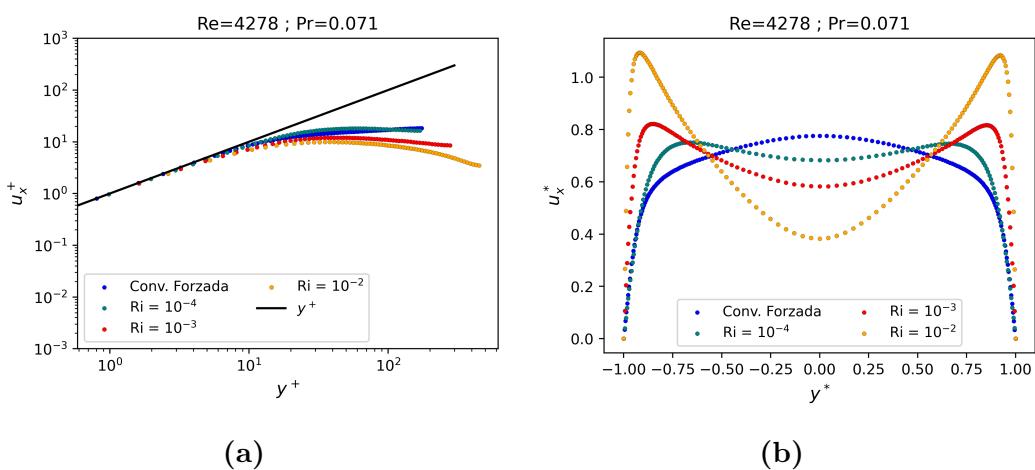


Figura 5.12

5.7. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,71$

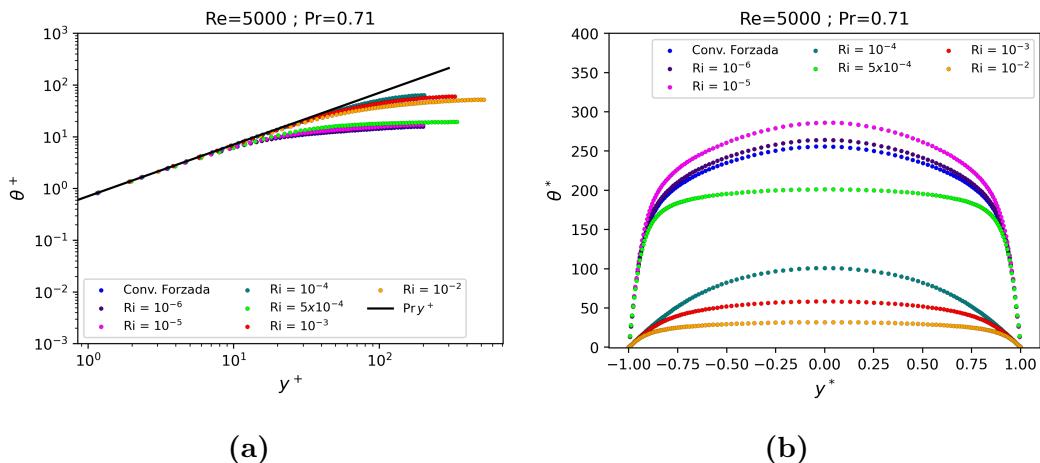


Figura 5.13

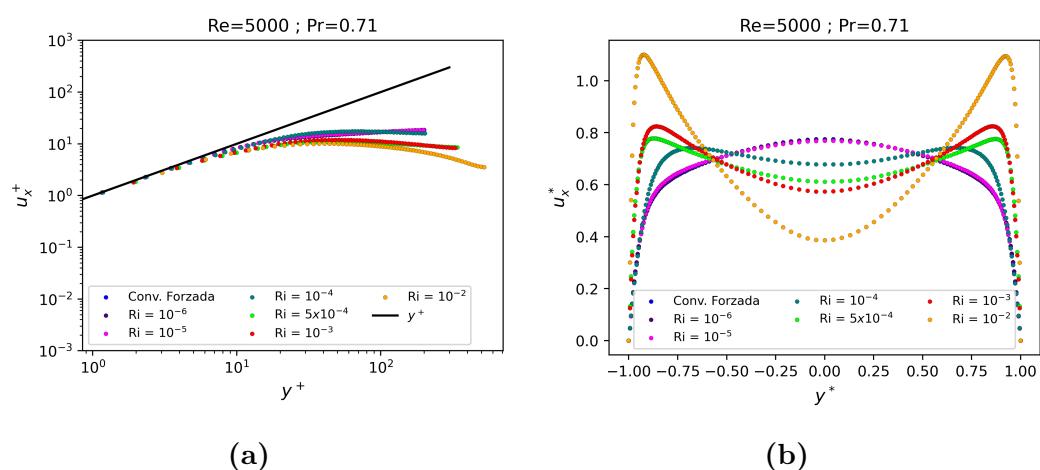


Figura 5.14

5.8. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,071$

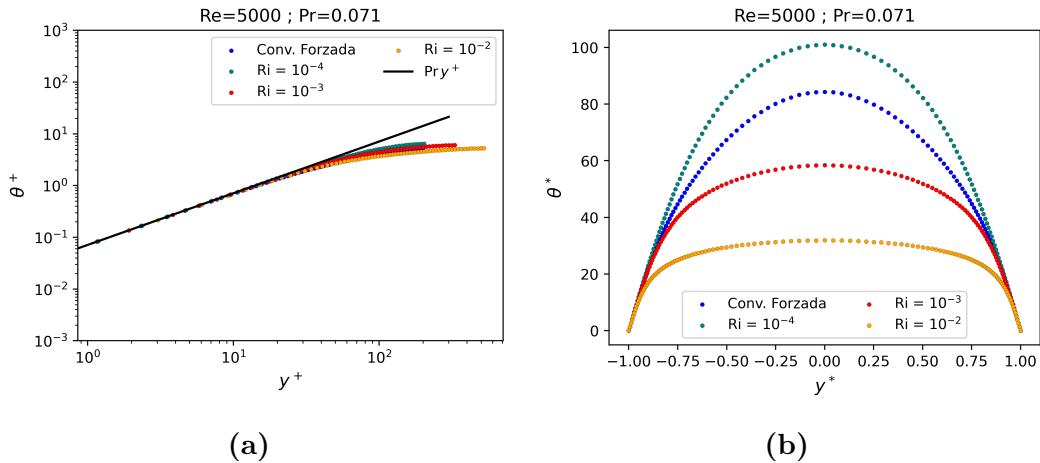


Figura 5.15

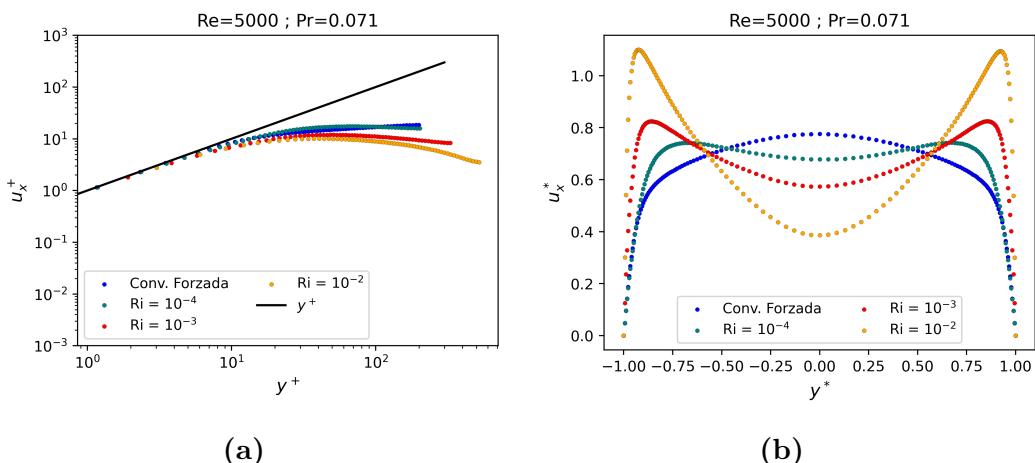


Figura 5.16

Faltan graficas de correlaciones (Nu , Re_τ) vs Re y (Nu , Re_τ) vs Ri .

Adicionalmente tengo simulaciones con $\text{Re}=2100$; $\text{Pr}=1,0,1$; $\text{Ri}=10^{-2},10^{-3},10^{-4}$ que no recuerdo porque las hice pero quizás podrian servir para la correlacion/análisis (Nu , Re_τ) vs Ri del caso $\text{Re}=2100$.

Capítulo 6

Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta

Resultados principales y “novedosos”

6.1. Casos $\text{Re} = 750$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re750-Pr071-Ri1Em4-C1	750	0.71	1.63E-4	1.12	0	1 %	0 %	$1.249 + 0.044 j$	-

Tabla 6.1

6.1.1. Autofunciones y Espectros de autovalores

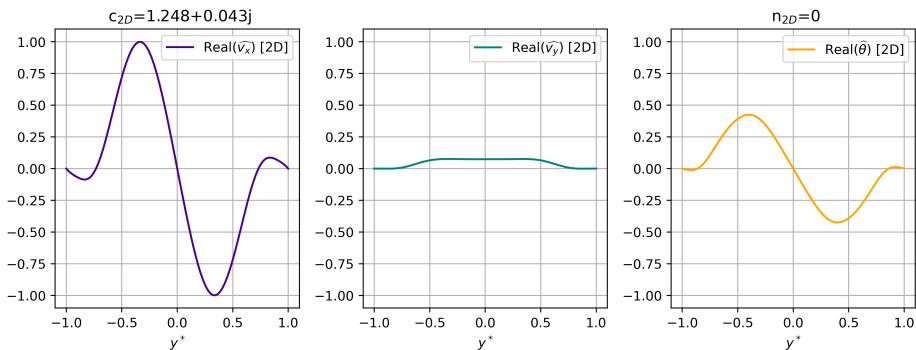


Figura 6.1

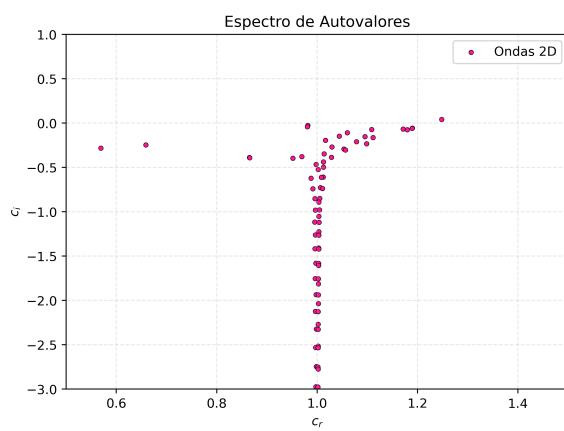


Figura 6.2

6.1.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

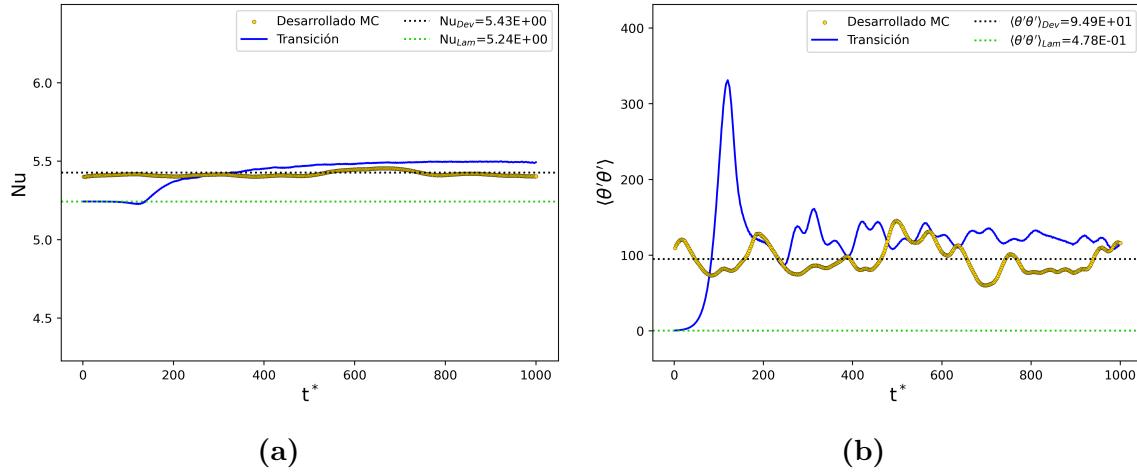


Figura 6.3

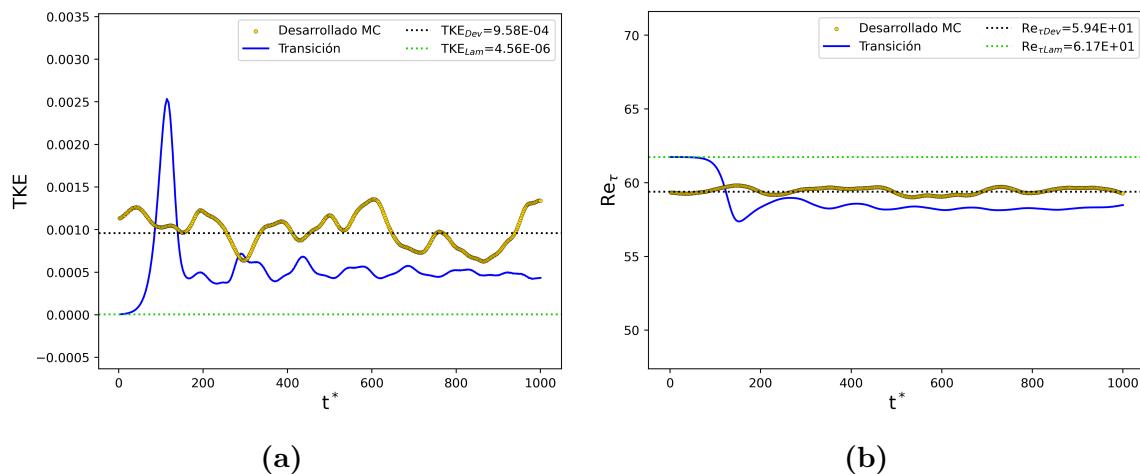


Figura 6.4

6.2. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C1	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	1 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C2	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	2 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C3	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	4 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C4	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C5	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	4 %	0.2 %	1.212 + 0.037 j	0.482 - 0.250 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C6	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	0.2 %	1.212 + 0.037 j	0.482 - 0.250 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C7	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	0.472 - 0.104 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C8	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	0.385 - 0.124 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C9	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.472 - 0.104 j	0.575 - 0.095 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C10	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.385 - 0.124 j	0.563 - 0.095 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C11	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.660 - 0.371 j	0.688 - 0.440 j

Tabla 6.2

6.2.1. Autofunciones y Espectros de autovalores

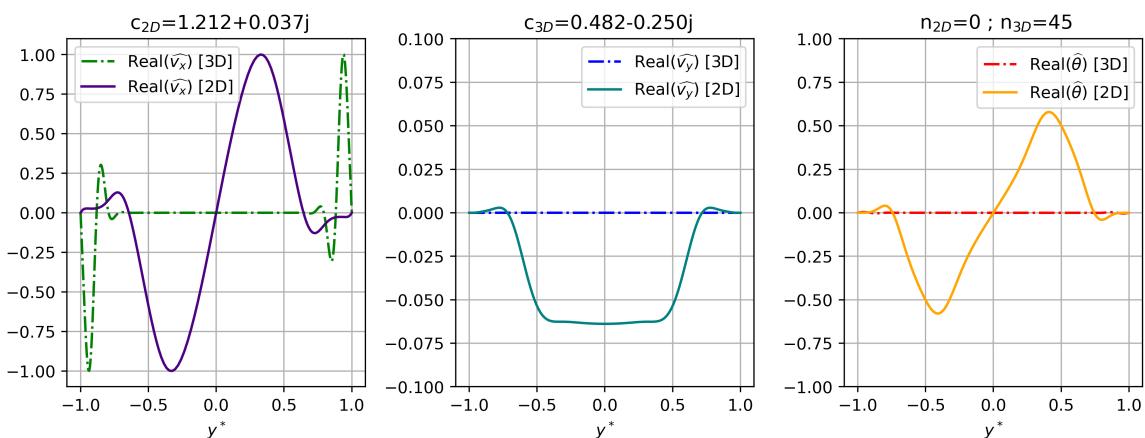


Figura 6.5

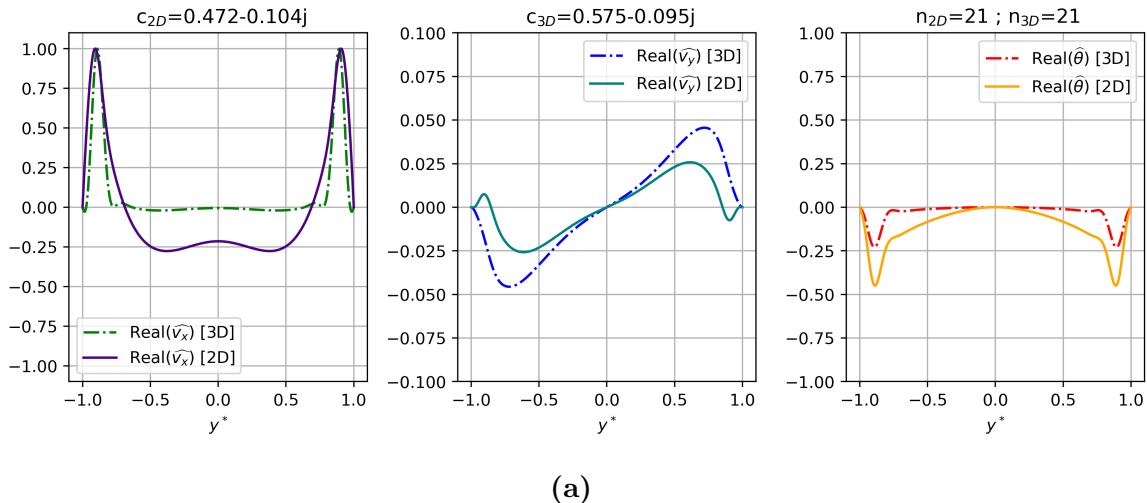


Figura 6.6

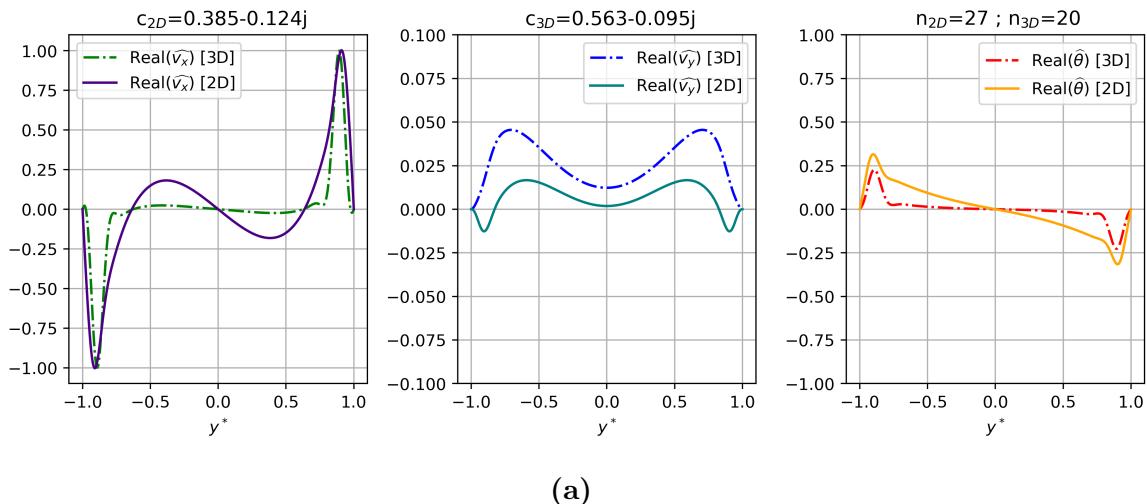


Figura 6.7

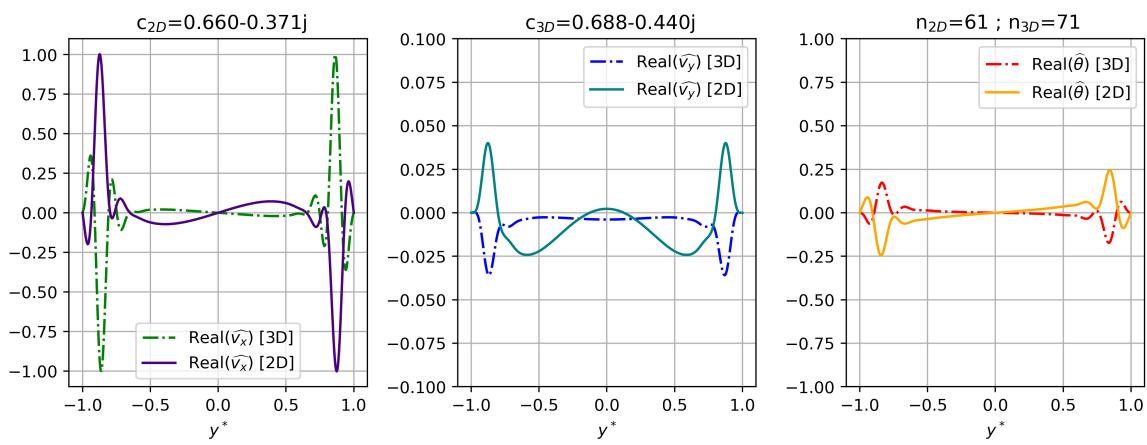


Figura 6.8

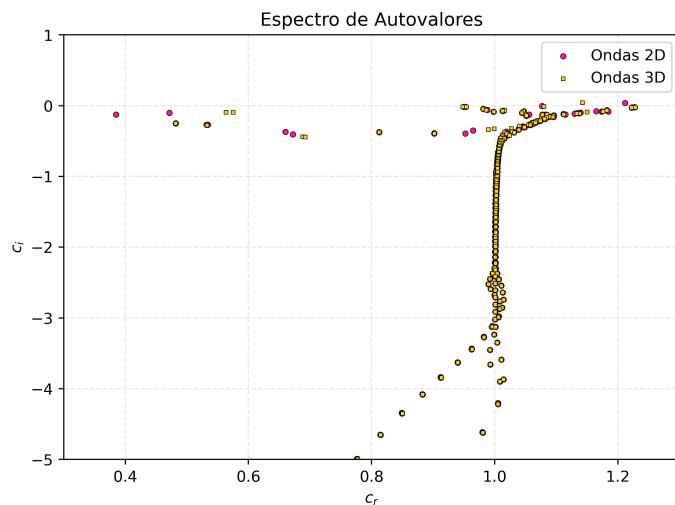


Figura 6.9

6.2.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

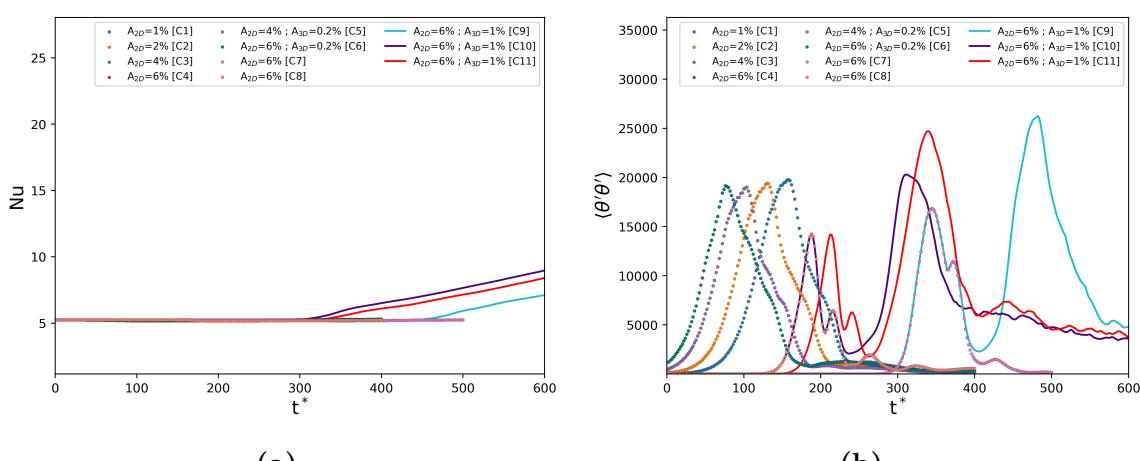


Figura 6.10

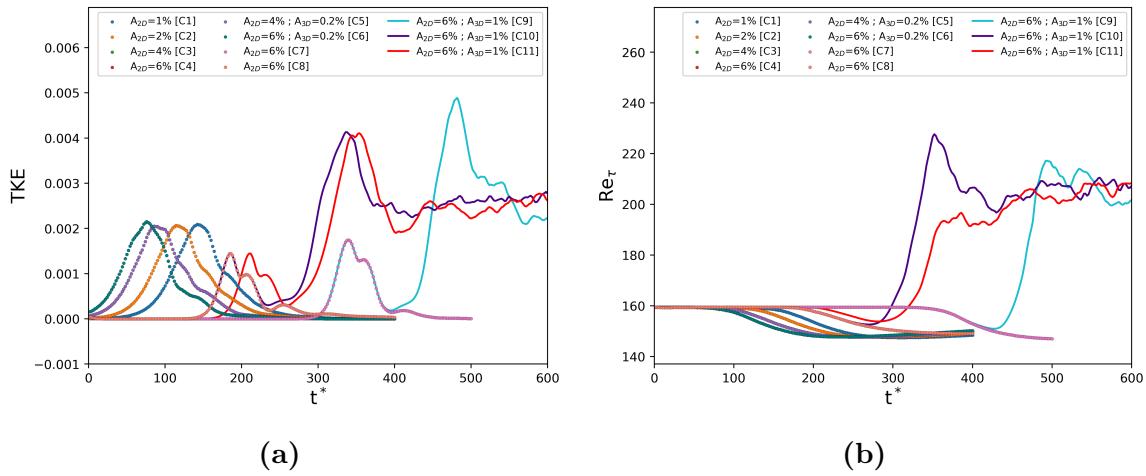


Figura 6.11

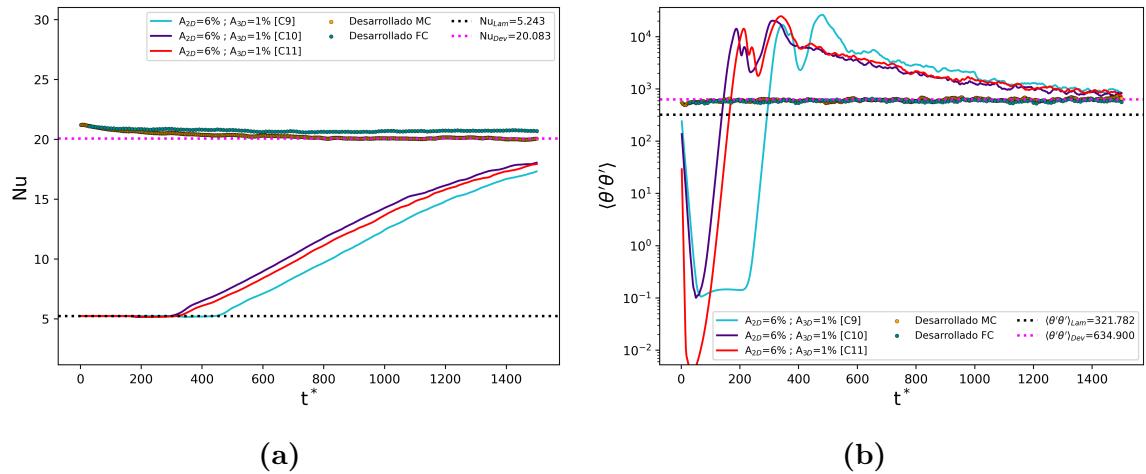


Figura 6.12: Casos C9,C10,C11

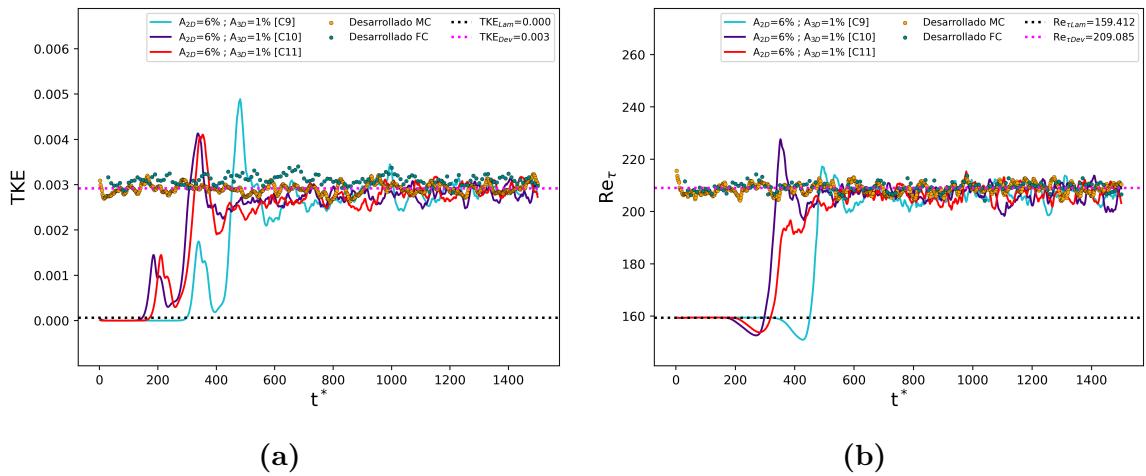


Figura 6.13: Casos C9,C10,C11

6.3. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-4}$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C1	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$2,315 + 0,424 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C2	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$0,800 - 0,495 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em5-C3	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$2,853 - 0,107 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em5-C4	5000	0.71	1E-4	1.12	2.1	2 %	0.4 %	$2,315 + 0,424 j$	$1,721 + 0,235 j$
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C5	5000	0.71	1E-4	1.12	2.1	2 %	0.4 %	$2,853 - 0,107 j$	$1.550 + 0.023 j$

Tabla 6.3

6.3.1. Autofunciones y Espectros de autovalores

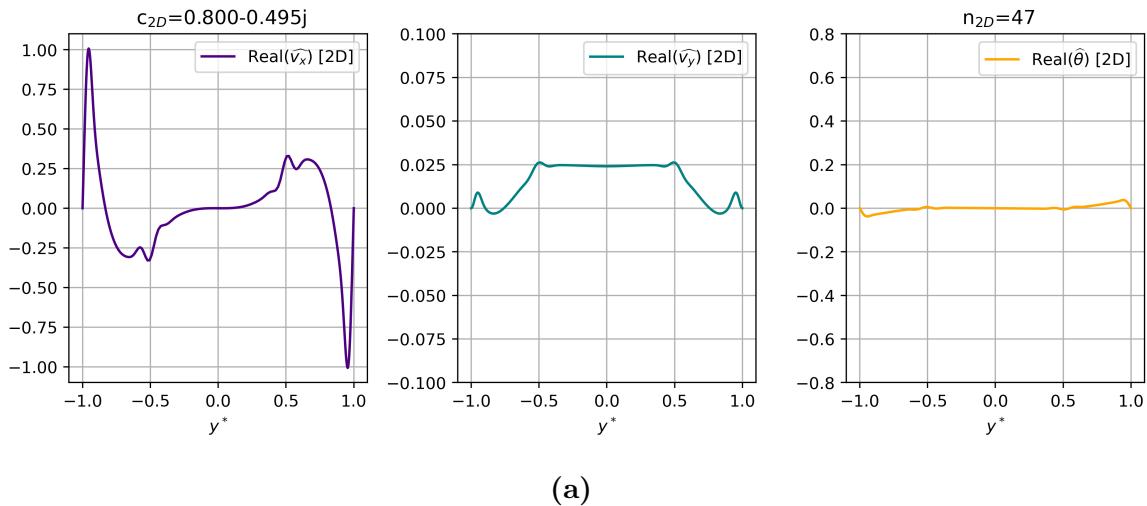


Figura 6.14

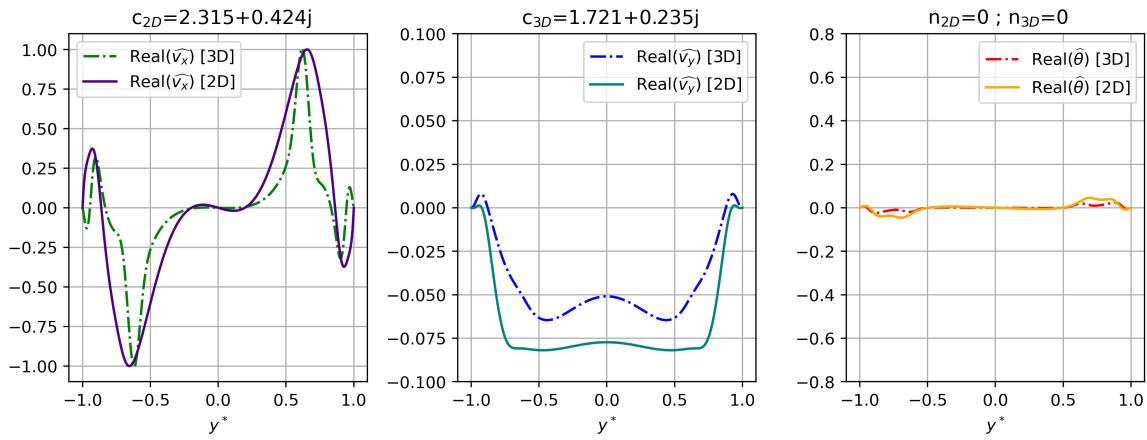
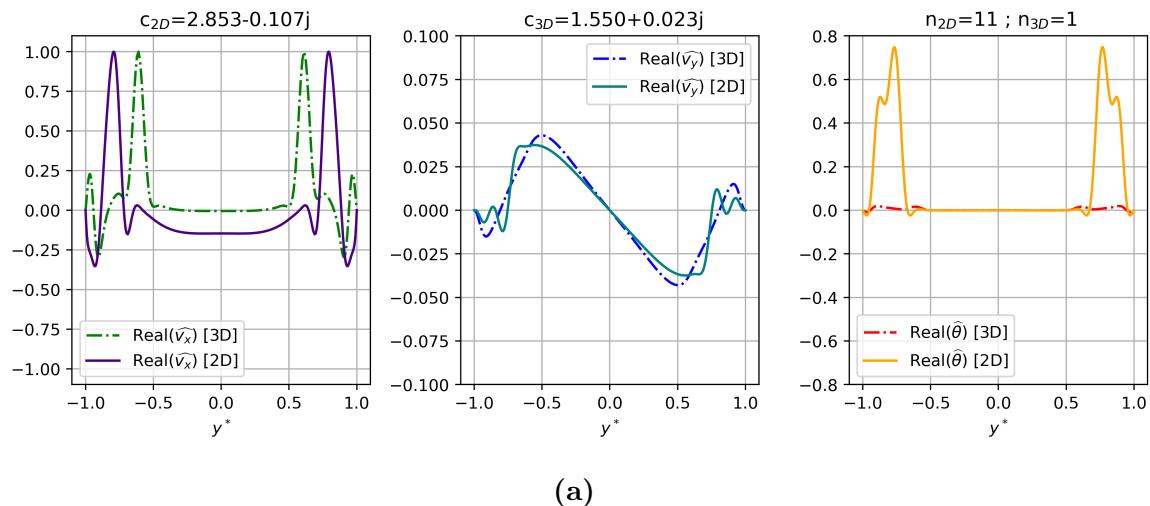


Figura 6.15



(a)

Figura 6.16

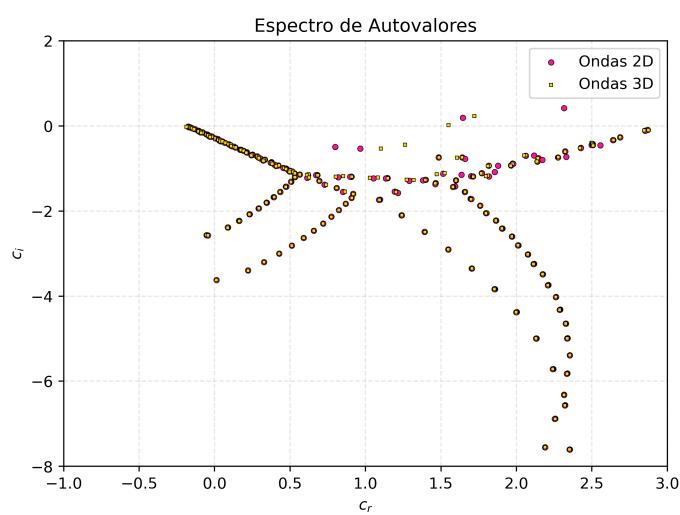


Figura 6.17

6.3.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

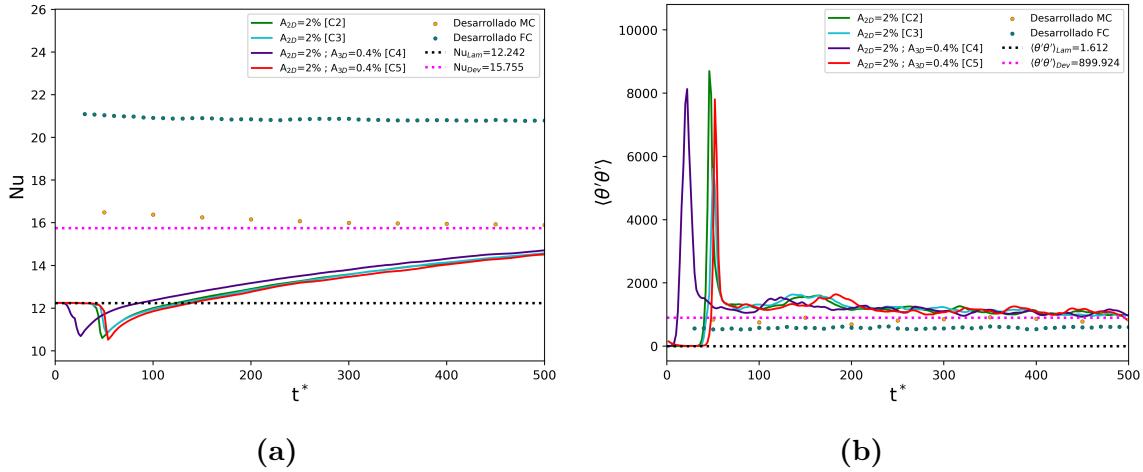


Figura 6.18

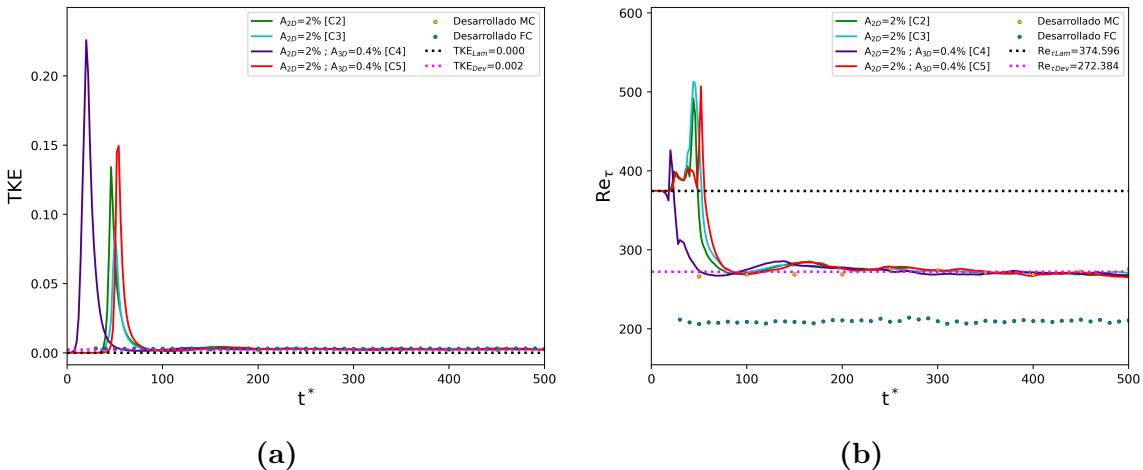


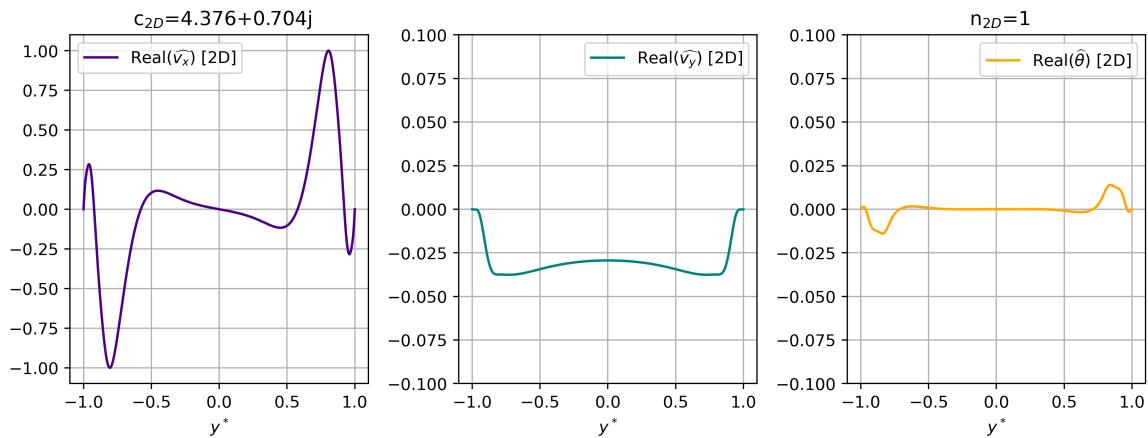
Figura 6.19

6.4. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-3}$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C1	5000	0.71	1E-3	1.12	0	2 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C2	5000	0.71	1E-3	1.12	0	1 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C3	5000	0.71	1E-3	1.12	0	0.5 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C4	5000	0.71	1E-3	1.12	0	0.25 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-

Tabla 6.4

6.4.1. Autofunciones y Espectros de autovalores



(a)

Figura 6.20

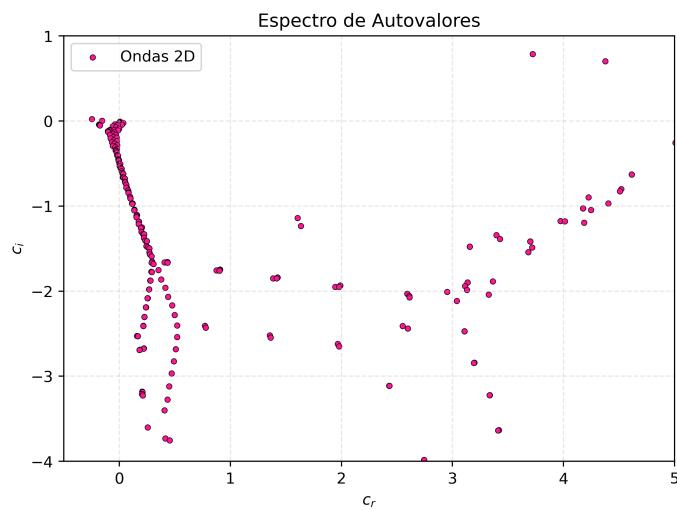


Figura 6.21

6.4.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

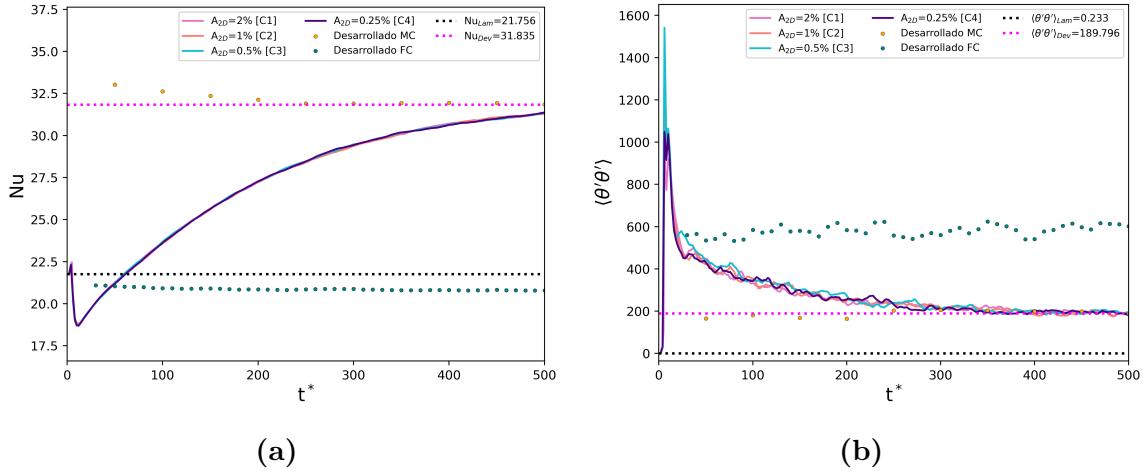


Figura 6.22

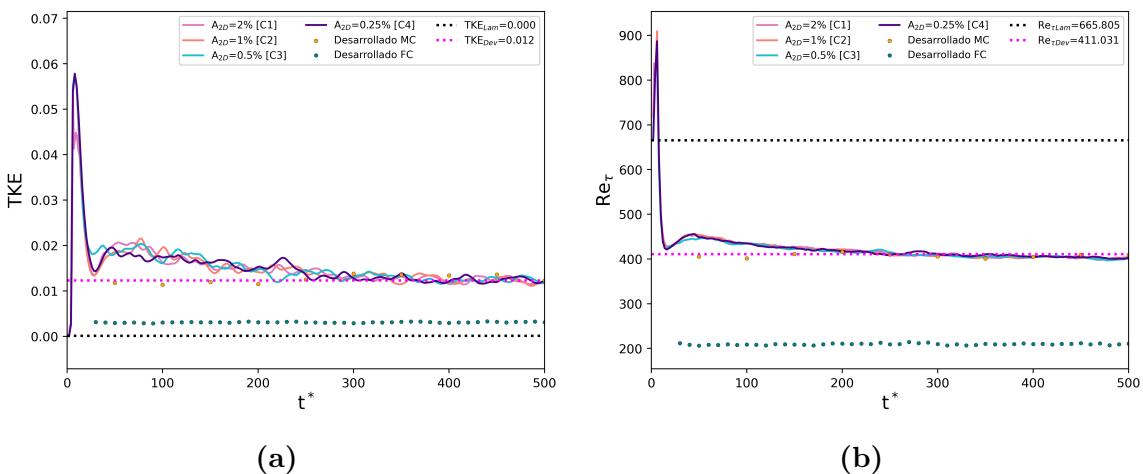


Figura 6.23

Capítulo 7

Conclusiones

Acá se concluyen cosas

Apéndice A

Budgets Dynamics Equations

A partir de la descomposición de Reynolds de los campos de interés (componentes de la velocidad, presión, temperatura) aplicadas a las ecuaciones de gabinete 2.1 se puede obtener, mediante mucho álgebra, ecuaciones que describen la dinámica de los budget de las cantidades de segundo orden como $\langle v'_x v'_y \rangle$, la energía cinética turbulenta κ , los flujos de calor turbulento $\langle v'_i \theta' \rangle$ y la varianza de la temperatura $\langle \theta' \theta' \rangle$. Se han omitido los superíndices “*”.

$$\partial_t \langle v'_i \theta' \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle v'_i \theta' \rangle = \mathcal{P}_{i\theta} + \mathcal{T}_{i\theta} + \Pi_{i\theta} + \mathcal{D}_{i\theta} + \mathcal{B}_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad (\text{A.1})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_{i\theta} = -\partial_k \langle v'_i v'_k \theta' \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_{i\theta} = -[\langle \theta' v'_k \rangle \partial_k \langle v_i \rangle + \langle v'_i v'_k \rangle \partial_k \langle \theta \rangle] + \langle v'_i v'_x \rangle$

Disipación: $\mathcal{D}_{i\theta} = -\frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) \langle \partial_k \theta' \partial_k v'_i \rangle$ (A.2)

Correlación Temp - Grad Presión: $\Pi_{i\theta} = -\langle \theta' \partial_i p' \rangle$

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_{i\theta} = \text{Ri } g_i \langle \theta' \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_{i\theta} = \frac{1}{\text{Re}} \partial_k \left[\langle \theta' \partial_k v'_i \rangle + \frac{1}{\text{Pr}} \langle v'_i \partial_k \theta' \rangle \right]$

$$\partial_t \langle v'_x v'_y \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle v'_x v'_y \rangle = \mathcal{P}_{xy} + \mathcal{T}_{xy} + \Pi_{xy} + \mathcal{D}_{xy} + \mathcal{B}_{xy} - \varepsilon_{xy} \quad (\text{A.3})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_{xy} = -\partial_k \langle v'_x v'_k v'_y \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_{xy} = -[\langle v_y v'_k \rangle \partial_k \langle v_x \rangle + \langle v'_x v'_k \rangle \partial_k \langle v_y \rangle]$

Disipación: $\mathcal{D}_{xy} = -\frac{2}{\text{Re}} \langle \partial_k v'_x \partial_k v'_y \rangle$

(A.4)

Correlacion Vel - Grad Presión: $\Pi_{xy} = -[\langle v'_y \partial_x p' \rangle + \langle v'_x \partial_y p' \rangle]$

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_{xy} = -\text{Ri} \langle v'_y \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{\text{Re}} \partial_k^2 \langle v'_x v'_y \rangle$

Siendo $\kappa = \langle v_i v'_i \rangle / 2$, la Energía Cinética Turbulenta, entonces:

$$\partial_t \kappa + \langle v_n \rangle \partial_n \kappa = \mathcal{P}_i + \mathcal{T}_i + \Pi_i + \mathcal{D}_i + \mathcal{B}_i - \varepsilon_i \quad (\text{A.5})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_i = -\frac{1}{2} \partial_n \langle v'_i v'_n v'_i \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_i = -\langle v_i v'_n \rangle \partial_n \langle v_i \rangle$

Disipación: $\mathcal{D}_i = -\frac{1}{\text{Re}} \langle \partial_n v'_i \partial_n v'_i \rangle$

(A.6)

Correlacion Vel - Grad Presión: $\Pi_i = -\langle \partial_i (v'_i p') \rangle$

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_i = -\text{Ri} g_i \langle v'_i \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_i = \frac{1}{\text{Re}} \partial_n^2 \kappa$

$$\partial_t \langle \theta' \theta' \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle \theta' \theta' \rangle = \mathcal{P}_\theta + \mathcal{T}_\theta + \mathcal{D}_\theta - \varepsilon_\theta \quad (\text{A.7})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_\theta = -\partial_k \langle \theta' \theta' v'_k \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_\theta = 2 [\langle \theta' v'_k \rangle \partial_k \langle \theta' \theta' \rangle + \langle v'_x \theta' \rangle]$

Disipación: $\mathcal{D}_\theta = -\frac{2}{\text{RePr}} (\langle \partial_k \theta' \rangle)^2$ (A.8)

Difusión Viscosa: $\varepsilon_\theta = \frac{1}{\text{RePr}} \partial_k^2 \langle \theta' \theta' \rangle$

Bibliografía

- [Chen and Chung, 1996] Chen, Y.-C. and Chung, J. (1996). The linear stability of mixed convection in a vertical channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*.
- [Churchill, 1977] Churchill, S. W. (1977). Comprehensive correlating equations for heat, mass and momentum transfer in fully developed flow in smooth tubes. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*.
- [Gnielinski, 1976] Gnielinski, V. (1976). New equations for heat and mass transfer in turbulent pipe and channel flow. *International Chemical Engineering Journal*.
- [Hausen, 1959] Hausen, H. (1959). New equations for heat transfer in free or force flow. *Allg Warmetchn.*
- [Incropera et al., 2006] Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., Lavine, A. S., et al. (2006). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley and Sons.
- [Kamdem Kamdem and Zhu, 2020] Kamdem Kamdem, C. A. and Zhu, X. (2020). Numerical study on the flow and heat transfer coupled in a rectangular mini-channel by finite element method for industrial micro-cooling technologies. *Journal Of Fluids*.
- [Kasagi et al., 1992] Kasagi, N., Tomita, Y., and Kuroda, A. (1992). Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow.
- [Kawamura et al., 2000] Kawamura, H., Abe, H., and Shingai, K. (2000). Dns of turbulence and heat transport in a channel flow with different reynolds and prandtl numbers and boundary conditions. *Turbulence, Heat and Mass Transfer*.
- [Kim and Moin, 1989] Kim, J. and Moin, P. (1989). Transport of passive scalars in a turbulent channel flow.
- [Kundu et al., 2016] Kundu, P. K., Cohen, I. M., Dowling, D. R., and Capecelatro, J. (2016). *Fluid Mechanics*. Elsevier.
- [Pope, 2001] Pope, S. B. (2001). *Turbulent flows*. Cambridge University Press.
- [Schmid and Hnningson, 2002] Schmid, P. J. and Hnningson, D. S. (2002). *Stability and Transition in Shear Flows*. Springer.

- [Sikorska et al., 2024] Sikorska, D., Brzozowska, J., Pawełkiewicz, A., Psykała, M., Błasiak, P., and Kolasiński, P. (2024). Convective heat transfer in pwr, bwr, candu, smr, and msr nuclear reactors—a review. *Energies*.
- [Sleicher and Rouse, 1975] Sleicher, C. and Rouse, M. (1975). A convenient correlation for heat transfer to constant and variable property fluids in turbulent pipe flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [Squire, 1933] Squire, H. B. (1933). On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls.
- [Straub et al., 2019] Straub, S., Forooghi, P., Marocco, L., Wetzel, T., Vinuesa, R., Schlatter, P., and Frohnappel, B. (2019). The influence of thermal boundary conditions on turbulent forced convection pipe flow at two prandtl numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [Tam and Ghajar, 2006] Tam, L. M. and Ghajar, A. J. (2006). Transitional heat transfer in plain horizontal tubes. *Heat Transfer Engineering*.
- [White, 2011] White, F. M. (2011). *Fluid mechanics*. McGraw-Hill New York.

Agradecimientos

A todos los que se lo merecen ...

