

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA

ANÁLISIS DEL FLUJO EN CONVECCIÓN MIXTA EN CANALES RECTANGULARES

Patricio G. Canciani
Maestrando

Dr. William I. Machaca Abregu
Director

Dr. Federico Teruel
Co-director

Miembros del Jurado

Dr. Christian P. Marcel (IB-UNCuyo – CNEA)
Dr. Pablo Garcia Martinez (IB-UNCuyo – CNEA)
Dr. César Venier (FCEIA-UNR – SIMEC)

13 de Septiembre de 2025

Departamento de Mecánica Computacional
(Centro Atómico Bariloche)

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A todos mis seres queridos

Índice de símbolos

ρ : densidad del fluido

μ : viscosidad cinemática del fluido

ν : viscosidad dinámica del fluido

α_T : difusividad térmica del fluido

k : conductividad térmica

c_p : calor específico a presión constante

q''_w : flujo de calor en la pared

X, Y, Z : direcciones de coordenadas cartesianas

x, y, z : variables de coordenadas cartesianas

t : tiempo

d : semiancho del canal

\mathbf{u} : campo vectorial de velocidades

p : campo escalar de presiones

T : campo escalar de temperaturas

\mathbf{g} : vector aceleración de la gravedad

g : magnitud de la aceleración gravitacional

L_x, L_y, L_z : dimensiones del dominio de simulación

θ : temperatura transformada por cambio de variable ($\langle T_w \rangle - T$)

U_o : velocidad en el centro del canal

U_b : velocidad *bulk*

\mathcal{A} : constante relacionada a la temperatura en la pared (véase Apéndice B)

Re: número de Reynolds

Pr: número de Prandtl

Ri: número de Richardson

Ra: número de Rayleigh

Nu: número de Nusselt

f : factor de fricción de Darcy

α, β : número de onda en la dirección X y Z

c : velocidad de fase

ω : frecuencia angular

κ o TKE: Energía Cinética Turbulenta

τ_w : tensión de corte en la pared

$(.)_w$: magnitudes evaluadas en la pared

$\langle . \rangle$: promedio estadístico en la dirección X y Z y/o en el tiempo

$(.)_b$: magnitudes en *bulk*

$(.)'$: indica fluctuación de cierta magnitud

$(.)^*$: forma adimensional de magnitudes empleando d , U_o y $\mathcal{A}d$

$(.)^{*+}$: forma adimensional de magnitudes empleando d , U_b y $\text{RePr}\mathcal{A}d$

$(.)^+$: forma adimensional de magnitudes empleando d , u_τ y T_τ

$(.)_\tau$: indica unidades de fricción

DNS: *Direct Numerical Simulation*

PBC: *Periodic Boundary Conditions*

MBC: *Mixed Boudary Condition*

RANS: *Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations*

XC3D: abreviatura de Xcompact3D

OSMC: *Orr-Sommerfeld Mixed Convection*

RHS: *Right Hand Side*

RLS: *Left Hand Side*

RMS o rms: *Root Mean Square*

Índice de contenidos

Índice de símbolos	v
Índice de contenidos	vii
Resumen	xi
Abstract	xiii
1. Introducción	1
1.1. Motivación	4
1.2. Objetivos	5
1.3. Organización del trabajo	5
2. Modelo Matemático	7
2.1. El concepto de turbulencia	7
2.2. Descripción del sistema bajo estudio	8
2.2.1. Sumario de Ecuaciones	13
2.3. Magnitudes estadísticas de flujos turbulentos	14
2.4. Teoría de Estabilidad Lineal	15
2.4.1. Flujo Base	15
2.4.2. Análisis de Estabilidad Lineal	16
2.4.3. Mecanismos de Inestabilidad	19
3. Herramientas Numéricas	21
3.1. Xcompact3D (XC3D)	21
3.1.1. Ecuaciones de gobierno	23
3.1.2. Esquemas de diferencias finitas de alto orden	24
3.1.3. Avance temporal	24
3.1.4. <i>Solver</i> espectral de Poisson	26
3.1.5. Biblioteca <i>2D Decomp & FFT</i>	26
3.2. Orr-Sommerfeld <i>Mixed Convection</i> (OSMC)	27

4. Validación de Herramientas Numéricas	29
4.1. Primera Parte: Xcompact3D	30
4.1.1. Situación I. Canal turbulento (sólo hidrodinámica)	31
4.1.2. Situación II. Transporte de escalar pasivo en convección forzada con q''_w constante	33
4.1.3. Situación III. Canal turbulento en régimen laminar con convección mixta y q''_w constante	35
4.1.4. Situación IV. Canal turbulento en convección mixta con ΔT constante entre paredes.	36
4.2. Segunda Parte: OSMC	39
4.2.1. Autovalores	39
4.2.2. Autofunciones	40
4.3. Análisis de Estabilidad Lineal versus DNS	41
5. Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollados	45
5.1. Casos simulados	46
5.2. Magnitudes de Primer y Segundo Orden	47
5.2.1. Perfiles de velocidad y de temperatura	47
5.2.2. Valores RMS de temperatura y velocidad	49
5.2.3. Flujos turbulentos de calor	49
5.3. Comparación entre casos de distinto Prandtl	52
5.4. Número de Nusselt	54
5.5. Factor de Fricción de Darcy	57
5.6. Sumario de los principales hallazgos	59
6. Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta	61
6.1. Exploración de casos	62
6.1.1. Caso A ($Ri_b=0.04$)	64
6.1.2. Caso B ($Ri_b=1.06$)	66
6.2. Análisis detallado del caso A-C10	68
6.2.1. TKE y Varianza de la temperatura adimensional	68
6.2.2. Perfiles de velocidad y temperatura	69
6.2.3. Factor de fricción de Darcy y número de Nusselt	71
6.3. Análisis detallado del caso B-C2	74
6.3.1. TKE y varianza de la temperatura adimensional	74
6.3.2. Perfiles de velocidad y temperatura	75
6.3.3. Factor de fricción de Darcy y número de Nusselt	77
6.4. Comparación: A-C10 versus B-C2	79
6.5. Sumario de los principales hallazgos	81

7. Conclusiones	83
A. Ecuaciones Promediadas y TKE budgets	85
A.1. Ecuaciones Promediadas	85
A.2. TKE <i>budgets</i>	86
B. Cálculo de la constante \mathcal{A} (Capítulo 2)	87
C. Perfiles Completamente Desarrollados	89
D. Autofunciones y Espectros de autovalores OSMC (Capítulo 6)	93
Bibliografía	101
Agradecimientos	103

Resumen

Este es el resumen en castellano.

La tesis debe reflejar el trabajo desarrollado, mostrando la metodología utilizada, los resultados obtenidos y las conclusiones que pueden inferirse de dichos resultados.

Palabras clave: PALABRAS, CLAVE, ESPAÑOL

Abstract

This is the title in English:

The thesis must reflect the work of the student, including the chosen methodology, the results and the conclusions that those results allow us to draw.

Keywords: KEY, WORDS, ENGLISH

Capítulo 1

Introducción

Fenómeno de Convección

Desde un punto de vista general, el fenómeno de convección hace referencia al transporte de calor debido al movimiento de un fluido. En ingeniería es común utilizar el término convección para describir la transferencia de calor desde una superficie hacia un fluido en movimiento cuando ambos están a diferentes temperaturas [Cengel and Ghajar, 2015, Incropera et al., 2006].

La transferencia de calor por convección puede clasificarse según la naturaleza del flujo. Se habla de convección forzada cuando el flujo es provocado por actores externos como puede ser la acción de bombeo o un gradiente de presión; en cambio, en la convección natural, el flujo es inducido por fuerzas boyantes o de flotación, las cuales, en general, surgen debido a diferencias de densidad producidas por variaciones de temperatura en el propio fluido (Figura 1.1).



Figura 1.1: Comparación esquemática de la transferencia de calor alrededor de una tubería caliente: (izquierda) convección forzada; (derecha) convección natural.

Los primeros estudios sobre la transferencia de calor por convección trataron las ramas de la convección forzada y la convección natural de forma separada, sin considerar

la posible interacción entre ambas. Por un lado, los experimentos de Henri Bénard (1901) marcaron un hito en la comprensión de la convección natural [Bénard, 1901]. Bénard mostró que una lámina delgada de líquido con superficie libre, sometida a un gradiente térmico, desarrolla espontáneamente una circulación en celdas de simetría hexagonal (las “celdas de Bénard”) y, mediante métodos ópticos, registró y midió su geometría y escala. Más tarde, Lord Rayleigh (1916) desarrolló la base teórica de la inestabilidad térmica en capas fluidas [Rayleigh, 1916]. En paralelo, en el ámbito de la convección forzada, trabajos como el de Dittus y Boelter (1930) establecieron correlaciones empíricas para la transferencia de calor en tubos [Dittus and Boelter, 1930]. No fue sino hasta mediados del siglo XX que comenzó a reconocerse que ambos mecanismos pueden coexistir en muchas configuraciones de interés práctico. Así surgió el concepto de convección mixta, donde la convección forzada y la natural actúan simultáneamente como casos extremos de un fenómeno más general [Metais and Eckert, 1964].

Transición Laminar-Turbulenta y efectos de la convección

Cuando un fluido se desplaza a través de un conducto o sobre una superficie, su movimiento puede clasificarse en dos tipos de régimen: laminar o turbulento [White, 2011]. En el régimen laminar, el flujo es ordenado y las partículas del fluido se mueven en capas paralelas sin mezclarse entre sí. En cambio, en el régimen turbulento, el flujo es caótico, con remolinos, tiende a mezclarse, y presenta fluctuaciones en los campos de velocidad y presión [Kundu et al., 2016]. Asimismo, si un flujo se encuentra en un estado desarrollado¹ intermedio entre laminar y turbulento, se dice que el flujo está en régimen de transición. Este aspecto puede encontrarse, por ejemplo, en el diseño de intercambiadores de calor; allí, el punto de trabajo del flujo dentro de los tubos o conductos se encuentra en régimen de transición donde las magnitudes relevantes (como coeficientes de fricción y de transferencia de calor) tienen una gran variación [Ghajar, 2019].

Por otro lado, este estado de flujo (régimen de transición) no debe confundirse con la transición laminar-turbulenta del sistema, donde el flujo evoluciona de un régimen laminar a un régimen turbulento completamente desarrollado. Esta transición puede ocurrir en el tiempo (transición laminar-turbulenta temporal) o en el espacio (transición laminar-turbulenta espacial). Este fenómeno es de gran importancia para la ingeniería y la física aplicada ya que está presente en diferentes dispositivos termohidráulicos. En este sentido, el cambio de un régimen a otro puede tener un impacto significativo en los parámetros característicos del flujo. En general, el coeficiente de fricción (factor de Darcy) o el coeficiente de convección (número de Nusselt) se incrementan notablemente cuando se produce la transición [Incropera et al., 2006, White, 2011]. Por ello,

¹Esto es, sus magnitudes no varían con el tiempo o con el espacio en un sentido estadístico.

caracterizar la transición entre los regímenes laminar y turbulento es fundamental para controlar el fenómeno y anticipar su comportamiento.

La investigación teórica sobre la transición ha tenido un desarrollo histórico notable que se remonta al siglo XIX, con el célebre experimento de Osborne Reynolds [Reynolds, 1883], que marcó el inicio del estudio sistemático del fenómeno. A comienzos del siglo XX, Orr [Orr, 1907] y Sommerfeld [Sommerfeld, 1908] formalizaron las bases de la estabilidad hidrodinámica al desarrollar las ecuaciones linealizadas que llevan sus nombres, conocidas como ecuaciones de Orr-Sommerfeld. Estas describen la evolución de perturbaciones en un flujo y son fundamentales para comprender los mecanismos de transición. Un avance crucial se produjo con los trabajos de Tollmien [Tollmien, 1930] y Schlichting [Schlichting, 1933], quienes describieron de forma teórica el estado lineal de la transición; esta teoría fue confirmada experimentalmente en el estudio de la capa límite sobre una placa plana realizado por Schubauer y Skramstad [Schubauer and Skramstad, 1947]. Finalmente, la incorporación de la teoría de inestabilidad secundaria por Herbert [Herbert, 1983] permitió extender el análisis al caso tridimensional, ofreciendo así una comprensión más completa del fenómeno.

Cabe destacar que los trabajos mencionados en el párrafo anterior tienen en consideración únicamente flujos isotérmicos. En el contexto de estudios que involucran la convección natural y/o la convección forzada, los trabajos experimentales de Scheele *et al.* [Scheele et al., 1960], [Scheele and Hanratty, 1962] mostraron que el flujo en una tubería vertical calentada puede experimentar una transición a números de Reynolds (basados en el radio de la tubería) inferiores a 1800. Para estos valores, Scheele y Hanratty [Scheele and Hanratty, 1962] hallaron que, en condiciones de calentamiento con flujo ascendente, la inestabilidad aparece cuando los perfiles de velocidad desarrollan puntos de inflexión. La transición hacia un régimen no estacionario procede mediante el crecimiento paulatino de pequeñas perturbaciones; por ello, si la tubería no es lo suficientemente larga, no es posible observar la transición del flujo. En paralelo, en el plano analítico, Tao [Tao, 1960] estudió el flujo laminar totalmente desarrollado con convección mixta en un canal vertical, y explicitó las soluciones a partir de las cuales pueden desarrollarse las ecuaciones de Orr-Sommerfeld.

Décadas más tarde, Gebhart *et al.* [Gebhart et al., 1988] realizaron una discusión exhaustiva sobre los flujos inducidos por flotación y destacaron que los mecanismos de transición en convección mixta difieren de los correspondientes al flujo isotérmico. En esa línea, los análisis de estabilidad lineal de Chen y Chung para el flujo en un canal vertical con distintas condiciones de calentamiento en las paredes [Chen and Chung, 1996, Chen and Chung, 1998] mostraron que la transferencia de calor desestabiliza el sistema. En consecuencia, el flujo calentado y plenamente desarrollado resulta inestable y la transición ocurre a números de Reynolds relativamente bajos.

Desde el punto de vista numérico, mediante simulación directa (DNS), Chen y

Chung [Chen and Chung, 2002] estudiaron la transición para un flujo levemente forzado (bajo número de Reynolds, $Re = 50$) en un canal vertical calentado, y analizaron además los fenómenos de transición laminar-turbulento en convección mixta asistida por flotación [Chen and Chung, 2003].

A partir de todo lo mencionado hasta aquí, se puede inferir que la evolución de un flujo, en el tiempo y en el espacio, depende de perturbaciones externas, condiciones de borde y de la respuesta del sistema, fijada por sus propiedades físicas y el régimen de flujo. En ese sentido, existen diversos factores que pueden desencadenar la transición del flujo, como por ejemplo la rugosidad o el espesor de las paredes, entre muchos otros. En este trabajo se emplea uno de los posibles mecanismos de inestabilización: las perturbaciones que resultan de la teoría de estabilidad lineal [Schmid and Henningson, 2002].

La idea consiste en producir estados o condiciones iniciales capaces de desencadenar una transición con la intención de analizar cómo la misma impacta en la transferencia de calor. Esta teoría ofrece un marco para predecir cuándo un flujo laminar se volverá inestable mediante el estudio de la evolución de pequeñas perturbaciones: si estas crecen en el espacio o en el tiempo, el flujo pierde su estabilidad y eventualmente transiciona hacia un régimen turbulento.

1.1. Motivación

En la mayoría de aplicaciones en ingeniería, los flujos involucrados son no isotérmicos [Chen and Chung, 2003]. En ese sentido, la convección mixta en canales y conductos verticales se encuentra presente en muchos sistemas de interés; entre ellos los intercambiadores de calor, los cuales se encuentran integrados a su vez en sistemas más complejos (como centrales termoeléctricas) y son ampliamente utilizados en procesos industriales. Mejorar la eficiencia de estos equipos es vital ya que impacta directamente en el consumo energético y en los costos de producción.

Por otro lado, este tipo de sistemas pueden presentar cambios de régimen (laminar-turbulento) en su evolución [Schlatter, 2005]. Desde el punto de vista ingenieril, las características del cambio de régimen son de gran relevancia ya que, como se ha mencionado anteriormente, parámetros de interés como el número de Nusselt pueden variar considerablemente cuando se pasa de un régimen a otro. Por lo cual, el estudio de la transferencia de calor en canales verticales con flujos en transición laminar-turbulenta y en convección mixta, resulta importante para predecir cómo la fuerza boyante y el flujo forzado modifican el intercambio térmico (Nu) y las pérdidas por fricción (f) a lo largo de la transición. A partir de ello, es posible establecer criterios de diseño y una operación más eficiente y segura.

1.2. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es el estudio de la transferencia de calor en régimen de transición laminar-turbulenta en convección mixta. Para ello se emplea la herramienta numérica Xcompact3D. Se obtienen resultados numéricos para distintos números de Reynolds (Re), números de Prandtl (Pr) y números de Richardson (Ri). A partir de dichos resultados se calculan magnitudes de interés como por ejemplo el número de Nusselt y/o el factor de fricción de Darcy. Luego, por un lado, se analiza cómo estas cantidades se modifican con la variación de Re, Pr y Ri (estado estadísticamente estacionario), y por el otro, cómo se modifican en el tiempo para los casos de transición. Parte de las tareas secundarias para la realización del trabajo incluyeron:

- Entrenamiento y manejo en el uso de la herramienta numérica Xcompact3D.
- Validación de la herramienta numérica y simulación de flujos turbulentos.
- Utilización y validación de la herramienta numérica OSMC [Szuban, 2023] para inestabilizar flujos a partir de soluciones laminares mediante perturbaciones generadas por la teoría de estabilidad lineal.

1.3. Organización del trabajo

El trabajo se organiza en siete capítulos. En el Capítulo 2 se presenta un breve marco teórico, que incluye las ecuaciones de gobierno, las condiciones de borde y los conceptos necesarios para comprender el problema, así como la teoría de estabilidad lineal y las soluciones laminares utilizadas en la construcción de perturbaciones. El Capítulo 3 describe los métodos numéricos en los que se basan las herramientas de simulación empleadas. En el Capítulo 4 se lleva a cabo la validación de las herramientas numéricas utilizadas, Xcompact3D y OSMC.

El Capítulo 5 presenta los resultados principales para flujo turbulento desarrollado con convección mixta. Incluye perfiles de velocidad y temperatura y el análisis de Nu y del factor de Darcy frente a correlaciones y datos de referencia. En el Capítulo 6 se realiza una breve exploración de casos para determinar qué condiciones iniciales, generadas con OSMC, producen la inestabilización del flujo. A continuación, se analiza la evolución temporal de magnitudes relevantes para estudiar la transición del régimen laminar al turbulento.

Finalmente, en el Capítulo 7 se resumen los aportes del trabajo y se presentan las conclusiones más relevantes.

Capítulo 2

Modelo Matemático

En este capítulo se presenta el marco teórico que sustenta este trabajo. Se introduce brevemente el concepto de turbulencia. Luego, se describen las ecuaciones, junto con las condiciones de borde, empleadas para modelar el sistema físico bajo análisis: fluido confinado entre placas paralelas sometido a un flujo de calor constante en las paredes. Asimismo, se definen las magnitudes estadísticas necesarias para el tratamiento de los datos obtenidos mediante simulaciones.

Por otra parte, se incluye un breve resumen del análisis de estabilidad lineal que constituye la base teórica para el cálculo numérico de los autovalores y autofunciones empleados en la construcción de las perturbaciones utilizadas para inestabilizar flujos con convección mixta. Estas perturbaciones se aplican en el Capítulo 6, donde se analiza la transición temporal laminar–turbulenta.

2.1. El concepto de turbulencia

Como se menciona en el Capítulo 1, los flujos se clasifican, de manera general, en laminares, de transición y turbulentos. La mayoría de los flujos presentes en la naturaleza y en aplicaciones industriales son turbulentos, por lo que su estudio tiene un gran interés tanto en el ámbito científico como en el tecnológico. Algunos ejemplos de flujo turbulento se encuentran presentes en el movimiento de las nubes en el cielo, las corrientes oceánicas, el flujo sobre el ala de un avión o el flujo sobre el álabe de una turbina, entre muchos otros.

Todos estos flujos presentan un comportamiento aparentemente aleatorio y caótico, lo cual a menudo se refleja en las variaciones espaciales y temporales de las variables del flujo, tales como la velocidad y la temperatura. Las complejidades inherentes a la turbulencia dificultan su definición de forma concisa; por ello, en general, no es común dar una definición de turbulencia sino más bien presentar ciertos atributos canónicos [Smits, 2009]:

- **Tridimensionalidad.** La turbulencia es un fenómeno inherentemente tridimensional.
- **Naturaleza no estacionaria.** Los flujos turbulentos evolucionan en el tiempo y se caracterizan por variaciones en magnitudes asociadas (velocidad, presión, temperatura, etc.).
- **Carácter multiescala.** La turbulencia involucra una amplia gama de escalas en el espacio y en el tiempo.
- **Difusividad.** Se tiene una mezcla eficaz¹ de todas las propiedades del fluido (masa, velocidad, temperatura, concentración, etc.).

Por su relevancia práctica y su naturaleza aleatoria y compleja, este fenómeno ha sido objeto de un gran número de investigaciones teóricas y experimentales a lo largo de los últimos dos siglos. Incluso en la actualidad, se sigue estudiando con el objetivo de entender mejor su complejidad. En este contexto, el uso de la computación para resolver las ecuaciones que gobiernan la dinámica de fluidos ha adquirido un papel preponderante y se ha consolidado como una de las herramientas más utilizadas para el análisis de flujos turbulentos.

El rápido progreso de las computadoras de alto rendimiento permite que la simulación numérica directa (*Direct Numerical Simulation, DNS*) sea una herramienta fundamental para la investigación de la turbulencia [Moin and Mahesh, 1998]. Esta permite calcular la solución tridimensional y no estacionaria de las ecuaciones de conservación involucradas. Al resolverse sin recurrir a modelos de turbulencia, estas simulaciones requieren una precisión numérica elevada para capturar todas las escalas del flujo [Pope, 2001].

2.2. Descripción del sistema bajo estudio

Se considera el sistema representado en la Figura 2.1, donde la dinámica de un fluido viscoso e incompresible sucede entre dos paredes paralelas infinitas ubicadas en $y = \pm d$. Esto constituye un canal vertical de placas paralelas donde ambas paredes están sometidas a un flujo de calor constante q''_w .

¹El término “mezcla eficaz” se refiere a la capacidad de un flujo turbulento para mezclar y dispersar las diferentes propiedades del fluido de manera rápida y homogénea [Pope, 2001].

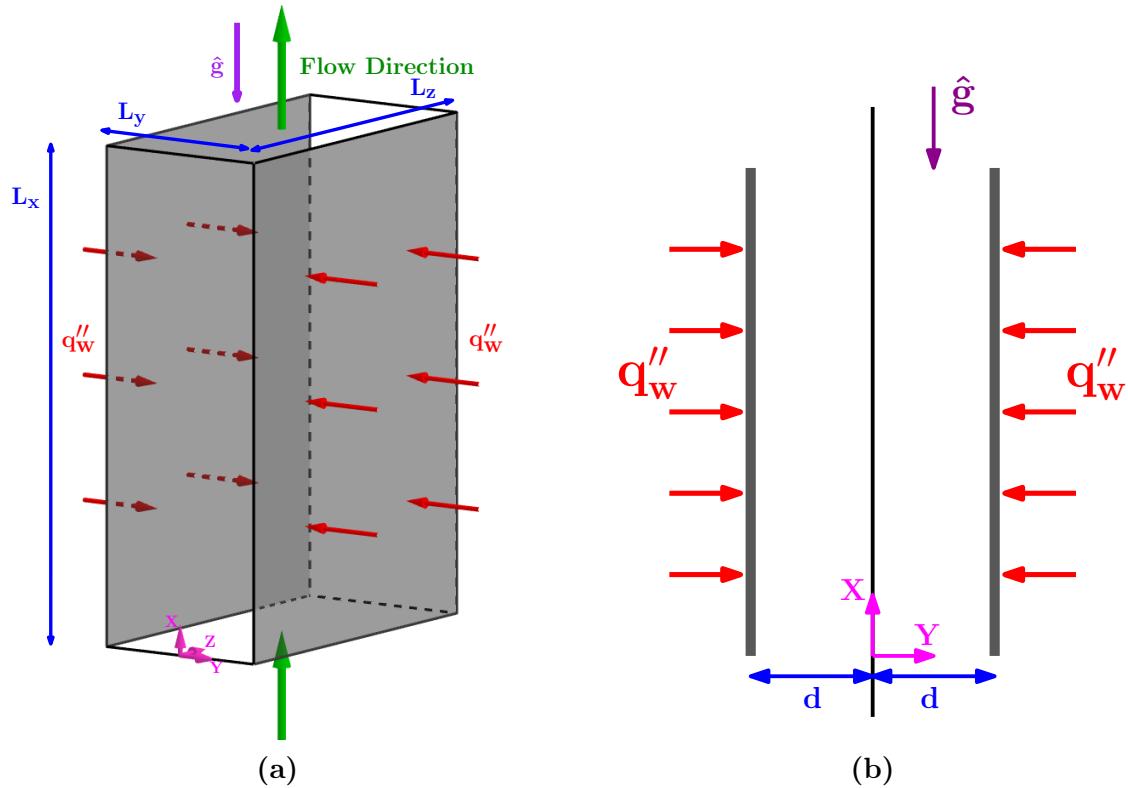


Figura 2.1: Esquema del sistema físico bajo análisis.

El flujo ocurre en la dirección paralela al eje X (*streamwise*) y su sentido es opuesto a la aceleración de la gravedad. Esta configuración se conoce como flujo ascendente o *aiding flow*. Las ecuaciones de gobierno corresponden a los principios de conservación de masa, momento y energía [Zhou et al., 2024]. Las mismas se expresan en el recuadro 2.1 donde ρ , μ y α_T son la densidad, la viscosidad dinámica y la difusividad térmica del fluido de trabajo, respectivamente. Por su parte, la variable $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ corresponde al campo de velocidades, $T(x, y, z, t)$ es el campo de temperaturas y $p(x, y, z, t)$ el campo de presiones, donde x, y, z son las coordenadas cartesianas y t es el tiempo; por último, \mathbf{g} es un vector que representa la aceleración de la gravedad.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho \mathbf{u}) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \alpha_T \nabla^2 T \end{aligned}} \quad (2.1)$$

Este sistema físico ideal admite soluciones completamente desarrolladas². No obstante, la concepción del mismo supone dimensiones infinitas en las direcciones X y Z . Debido a una limitación computacional evidente, nuestro modelo numérico no puede abarcar tales dimensiones. En ese sentido, el “dominio infinito” se reemplaza por

²Esto es, soluciones donde los perfiles de las cantidades involucradas no dependen de la coordenada *streamwise*.

un dominio acotado de dimensiones $L_x \times L_y \times L_z$ (Figura 2.1a). Luego, se adoptan condiciones de borde periódicas (PBC) en la direcciones X y Z a fin de obtener dichas soluciones desarrolladas³. Estas condiciones de borde, definidas en las ecuaciones 2.2 y 2.3 (donde ξ es un campo escalar arbitrario), pueden interpretarse como una prolongación del dominio finito que “emula” un dominio infinito mediante su repetición. Por su parte, la condición de flujo de calor constante en las paredes se impone como condiciones de Neumann (ecuación 2.4).

$$\xi(x = 0, y, z, t) = \xi(x = L_x, y, z, t) \quad (2.2)$$

$$\xi(x, y, z = 0, t) = \xi(x, y, z = L_z, t) \quad (2.3)$$

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\mp d} = \pm q_w'' \quad (2.4)$$

Un análisis físico del problema bajo estudio muestra que no es posible imponer las condiciones 2.2 y 2.3 a las ecuaciones 2.1. Es decir, si se impone un flujo de calor constante en las paredes es esperable que la temperatura del fluido crezca en la dirección de la corriente. Análogamente, se entiende que no es posible imponer las condiciones de periodicidad al campo de presiones. Por lo cual, es necesario redefinir nuestras variables a fin de imponer condiciones de borde periódicas.

Primero se discute la variable de temperatura (T). Dado que se busca soluciones desarrolladas, se requiere que los perfiles de temperatura no modifiquen su forma con la coordenada *streamwise*, sino que sencillamente se rescalen con el incremento de energía recibido a través de las paredes. Esto equivale a suponer que la temperatura en la pared, promediada en el tiempo y en la dirección Z (denotado por $\langle(\cdot)\rangle$), crece linealmente con la coordenada x , y por lo tanto:

$$\langle T_w \rangle = \mathcal{A}x ,$$

siendo \mathcal{A} una constante. Mediante un balance energético en el volumen de control $L_x \times L_y \times L_z$ (véase Apéndice B), es posible demostrar que

$$\mathcal{A} = \frac{q_w''}{\rho_o c_p U_b d}$$

donde d es el semiancho del canal y U_b la velocidad *bulk* [Pope, 2001].

Se realiza entonces el cambio de variable $T(x, y, z, t) = \langle T_w \rangle - \theta(x, y, z, t)$ para que $\theta(x, y, z, t)$ satisfaga las condiciones periódicas dadas por las relaciones 2.2 y 2.3. Dicha

³Obsérvese, que al tratarse de flujos turbulentos (véase Sección 2.3), el concepto de solución desarrollada se aplica sobre perfiles promediados. En ese sentido, los perfiles completamente desarrollados son a su vez estadísticamente estacionarios.

modificación introduce un término fuente en la ecuación de conservación de energía:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \alpha_T \nabla^2 \theta + \mathcal{A} u_x \quad (2.5)$$

Antes de discutir la periodicidad del campo de presiones es necesario introducir la aproximación que se utiliza para las variaciones de densidad en nuestro problema. Se emplea entonces la aproximación de Boussinesq que supone que los cambios de densidad en el fluido pueden despreciarse, excepto donde la densidad está multiplicada por la aceleración de la gravedad \mathbf{g} [Kundu et al., 2016]. El término $\rho \mathbf{g}$ de la ecuación de momento se reescribe considerando $\rho \equiv \rho(T)$ según la expresión 2.6, donde $\rho_o \equiv \rho(T_R)$ es la densidad del fluido a una temperatura de referencia fija, T_R , y $\langle \rho_w \rangle \equiv \rho(\langle T_w \rangle)$ es la densidad del fluido en la pared [Incropera et al., 2006]. Luego, la ecuación de momento queda reescrita como se expresa en la ecuación 2.7 siendo $\hat{\mathbf{e}}_g = (-1, 0, 0)$ y C una constante que no depende de x .

$$\begin{aligned} \rho(T) \mathbf{g} &= \rho_o [1 - \beta(T - T_R)] \mathbf{g} \\ &= \rho_o [1 - \beta((\langle T_w \rangle - \theta) - T_R)] \mathbf{g} \\ &= \rho_o \beta \theta \mathbf{g} + \rho_w \mathbf{g} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{\rho_o \partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_o \mathbf{u}) = -\nabla \left[p + \left(\int \langle \rho_w \rangle dx \right) g + C \right] + \mu_o \nabla^2 \mathbf{u} + g \rho_o \beta \theta \hat{\mathbf{e}}_g, \quad (2.7)$$

Ahora bien, si se define $p^* = [p + (\int \langle \rho_w \rangle dx) g + C] / \rho_o (U_o)^2$, y se observa con atención la ecuación 2.7, teniendo en cuenta que se buscan soluciones desarrolladas que, en el sentido estadístico $\langle \cdot \rangle$, el término que contiene el gradiente de p debe depender de la coordenada *streamwise*, mientras que los restantes dependen de la coordenada normal a la pared (*normalwise*). Por tanto, el gradiente de p^* debe ser constante⁴, o equivalentemente, $\langle p^* \rangle$ debe variar linealmente con la coordenada x . Además, dado que el fluido de trabajo es impulsado por un caudal másico constante, para que p^* sea periódica se debe imponer una fuerza volumétrica. Estas dos últimas cuestiones se representan por un solo término fuente en la ecuación de momento, $f \hat{\mathbf{e}}_x$, donde f debe ser una constante en el espacio y variar con el tiempo de manera de mantener constante el caudal total.

Por otro lado, empleando la velocidad en el centro del canal U_o , el semiancho d y la temperatura $T_o = Ad$, el sistema de ecuaciones dimensional 2.1 queda escrito en su forma adimensional como se muestra en el cuadro 2.8. Los números adimensionales

⁴Observación: al buscar soluciones desarrolladas, los campos de velocidad y de temperatura θ varían a lo largo de la dirección Y ; por otro lado, el campo de presiones varía a lo largo de la dirección X . Entonces, es posible reacomodar la ecuación de momento de forma que $LHS(y) = RHS(x) = \text{cte}$ donde RHS (LHS) se refiere a *Right Hand Side* (*Left Hand Side*).

asociados a estas ecuaciones, se expresan en las relaciones 2.9. De izquierda a derecha, se tiene: el número de Reynolds, el número de Prandtl, el parámetro que acompaña al término boyante y al número de Richardson basado en el flujo de calor. Obsérvese que este último está expresado, a su vez, en términos de Richardson *bulk* (Ri_b) que se define en base a la velocidad *bulk* (U_b) y el ancho completo del canal ($2d$); este será utilizado a lo largo de los Capítulos 5 y 6.

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \Pi \theta^* \hat{\mathbf{e}_g} + f \hat{\mathbf{e}_x} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{Re_o Pr} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^* \end{aligned}} \quad (2.8)$$

$$Re_o = \frac{\mu_o}{\rho_o U_o d} \quad ; \quad Pr = \frac{\mu_o}{\rho_o \alpha_T} \quad ; \quad \Pi = \frac{Ri_o}{Re_o Pr} \quad ; \quad Ri_o = \frac{g \beta q_w'' d^2}{k U_o^2} = \frac{2}{9} Ri_b \quad (2.9)$$

Nótese que en algunas de las referencias consideradas [Guo and Prasser, 2022], [Zhou et al., 2024], [Tao, 1960], al igual que en este trabajo, el sistema se modela mediante las relaciones 2.8; no obstante, ninguna de las referencias define de forma precisa la variable p^* .

Las condiciones de flujo de calor constante en las paredes se expresan, en su forma adimensional, en la ecuación 2.10. Sin embargo, estas condiciones pueden ser aproximadas como condiciones de Dirichlet ya que al suponer que la temperatura de las paredes es constante⁵ en el tiempo y crece linealmente con la coordenada *streamwise* de manera conocida se obtiene:

$$T(x, y = -d, z, t) = T(x, y = +d, z, t) \simeq \langle T_w \rangle .$$

Este tipo de aproximación se conoce en la literatura como *Mixed Boundary Condition* (MBC) [Straub et al., 2019] y su forma adimensional se expresa en la ecuación 2.11. En este trabajo se utiliza la aproximación MBC para imponer la condición de borde térmica dado que ha sido ampliamente evaluada y utilizada en el grupo de trabajo [Abregu et al., 2023], [Szuban, 2023], [Machaca Abregu, 2024], y en diversas publicaciones científicas [Kawamura et al., 2000, Kasagi et al., 1992]. Por último, para las componentes de la velocidad y del campo de presión, se adoptan condiciones de no deslizamiento y condiciones de Neumann homogéneas [Bartholomew et al., 2020], respectivamente, en las paredes.

⁵En este contexto, algunos autores [Kasagi et al., 1992, Tao, 1960] asumen que las fluctuaciones del flujo de calor y de la temperatura sobre la pared son pequeñas a fin de considerar que la temperatura en la misma es localmente isotérmica.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=-1} &= +\frac{2}{3} \text{Re}_o \text{Pr} \\ \left.\frac{\partial \theta^*}{\partial y^*}\right|_{y^*=+1} &= -\frac{2}{3} \text{Re}_o \text{Pr}\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = 0, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = 2, z^*, t^*) = 0 \quad (2.11)$$

2.2.1. Sumario de Ecuaciones

Ecuaciones de Gobierno:

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{\text{Ri}_o}{\text{Re}_o \text{Pr}} \theta^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{e}}_x \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}_o} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^*\end{aligned}\quad (2.12)$$

Condiciones de borde. Considérese $\xi = u_x^*, u_y^*, u_z^*, p^*, \theta^*$; entonces:

$$\xi(x^* = 0, y^*, z^*, t^*) = \xi(x^* = L_x/d, y^*, z^*, t^*) \quad (2.13)$$

$$\xi(x^*, y^*, z^* = 0, t^*) = \xi(x^*, y^*, z^* = L_z/d, t^*) \quad (2.14)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.15)$$

$$\mathbf{u}^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \mathbf{u}^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.16)$$

$$\partial_y p^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \partial_y p^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.17)$$

A lo largo de este trabajo, particularmente para el análisis de estabilidad lineal (Sección 2.4), se utiliza también la forma adimensional de las ecuaciones del trabajo de Chen [Chen and Chung, 1996] que se obtienen empleando el semiancho del canal d , la velocidad *bulk* U_b y la temperatura $T_c = \text{Re} \text{Pr} \mathcal{A} d$. Dichas ecuaciones se expresan en 2.18 donde se emplea el superíndice “ \star ” para indicar esta variante adimensional. Las condiciones de borde son exactamente análogas a su forma adimensional de más arriba. Adicionalmente, aparece otro número adimensional conocido: el número de Rayleigh (Ra) basado en el flujo de calor y definido en la ecuación 2.19.

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}_b} \nabla^{*2} \mathbf{v}^* + \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \varphi^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \varphi^* &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}_b} [\nabla^{*2} \varphi^* - v_x^*]\end{aligned}\quad (2.18)$$

$$\varphi^* = -\frac{\theta^*}{\text{Re}_o \text{Pr}} \quad ; \quad \mathbf{v}^* = \frac{2}{3} \mathbf{u}^* \quad ; \quad \text{Re}_b = \frac{2}{3} \text{Re}_o$$

$$\text{Ra} = \frac{g \beta q_w'' d^3}{c_p \alpha_T \mu_o U_b} = \frac{\text{Ri}_b \text{Re}_b}{2} \quad (2.19)$$

2.3. Magnitudes estadísticas de flujos turbulentos

En flujos turbulentos, los campos como la velocidad son variables aleatorias [Pope, 2001]. Supóngase que ξ es un campo arbitrario asociado al sistema. Para una posición e instante determinados en un experimento (o simulación) repetible bajo las mismas condiciones, y sin dependencia entre repeticiones, el conjunto $\{\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots\}$ puede considerarse de variables i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas). Entonces, el promedio en ensamble sobre N repeticiones se define como

$$\langle \xi \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi^{(n)}$$

siendo N muy grande. Si el sistema es estadísticamente estacionario, sus propiedades estadísticas no cambian con el tiempo; si es estadísticamente homogéneo, no varían con la posición; y si es ergódico [Moser, 2003], el promedio en ensamble puede reemplazarse por el promedio en el tiempo y/o en el espacio (direcciones homogéneas).

En problemas de turbulencia, los promedios y las fluctuaciones de las variables de interés son importantes, por lo que la descomposición de Reynolds [Pope, 2001, Kundu et al., 2016] de la variable instantánea arbitraria ξ puede representarse como un valor promedio $\langle \xi \rangle$ y una fluctuación ξ' :

$$\xi = \langle \xi \rangle + \xi'$$

donde $\langle \cdot \rangle$ denota el promedio estadístico y \cdot' denota la parte fluctuante.

Supongase entonces que η es otra magnitud instantánea del flujo. El promedio de la multiplicación de las fluctuaciones de ξ y η son cantidades de interés para la construcción de modelos de turbulencia [Pope, 2001]. Dichas cantidades nos indican qué tan correlacionadas están ξ y η entre sí. Estas se obtienen a partir del promedio de las magnitudes totales, ecuación 2.20, donde se usa el hecho de que el promedio de una fluctuación es nulo y el promedio de otro promedio sigue siendo él mismo [Pope, 2001]. De esta manera, el promedio del producto de fluctuaciones $\langle \xi' \eta' \rangle$ queda expresado en la ecuación 2.21.

$$\begin{aligned} \langle \xi \eta \rangle &= \langle (\langle \xi \rangle + \xi')(\langle \eta \rangle + \eta') \rangle \\ &= \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle + \langle \xi' \eta' \rangle \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\langle \xi' \eta' \rangle = \langle \xi \eta \rangle - \langle \xi \rangle \langle \eta \rangle \tag{2.21}$$

Algunas cantidades importantes que aparecen en las ecuaciones promediadas de conservación (ecuaciones RANS [Kundu et al., 2016]) son:

- $\langle u'_i u'_j \rangle$: componentes del tensor de Reynolds con $i, j = x, y, z$;

- $\langle \theta' u'_i \rangle$: flujos turbulentos de calor en la dirección i , con $i = x, y, z$;
- $\langle \theta' \theta' \rangle$: varianza de la temperatura;
- otra magnitud utilizada ampliamente a lo largo de este trabajo es la energía cinética turbulenta κ (o TKE) definida como la mitad de la traza del tensor de Reynolds, esto es,

$$\kappa = \frac{1}{2} [\langle u'_x u'_x \rangle + \langle u'_y u'_y \rangle + \langle u'_z u'_z \rangle]. \quad (2.22)$$

2.4. Teoría de Estabilidad Lineal

La evolución de un flujo laminar a uno turbulento (transición laminar-turbulenta) es crucial en ingeniería ya que las características del mismo varían notablemente entre estos regímenes. Por ejemplo, como se mencionó, los coeficientes de fricción y de convección aumentan considerablemente al pasar de un régimen laminar a uno turbulento [Machaca Abregu, 2024]. Las ecuaciones de Navier–Stokes admiten ambas soluciones bajo ciertos requisitos, lo que implica que el tipo de flujo y su evolución dependen de las perturbaciones y las condiciones impuestas sobre el sistema.

Para analizar la estabilidad lineal y predecir cómo cambiará el flujo al ser perturbado, es indispensable conocer el flujo base. Sobre ese estado se introducen las perturbaciones que desencadenan inestabilidades y conducen a la transición. En este trabajo se adopta como flujo base al flujo laminar completamente desarrollado.

2.4.1. Flujo Base

Si el flujo está completamente desarrollado, tanto térmica como hidrodinámicamente, y es laminar, entonces es posible redefinir los campos de interés para que dependan solamente de la variable y^* . El sistema de ecuaciones 2.18 puede reducirse a la ecuación de momento en la dirección X y a la ecuación de energía [Chen and Chung, 1996], las cuales quedan expresadas de la forma

$$\frac{dp^*}{dx^*} = \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \Phi^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 V_x^*}{dy^{*2}}, \quad (2.23)$$

$$\frac{d^2 \Phi^*}{dy^{*2}} = V_x^*. \quad (2.24)$$

El perfil de velocidad y de temperatura admiten las condiciones de borde $V_x^*(y^* = \pm 1) = \Phi^*(y^* = \pm 1) = 0$. Las soluciones para un flujo asistido por fuerzas

boyantes ($\text{Ra} > 0$) están dadas por las expresiones 2.25 y 2.26, mientras que para un flujo donde las fuerzas boyantes son opuestas ($\text{Ra} < 0$), las soluciones quedan definidas por las ecuaciones 2.27 y 2.28 [Chen and Chung, 1996]. Obsérvese que el único parámetro relevante aquí es el número de Rayleigh.

$$V_x^* = \frac{-E}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\sinh(\kappa(1+y^*)) \sin(\kappa(1-y^*)) + \sinh(\kappa(1-y^*)) \sin(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \quad (2.25)$$

$$\Phi^* = \frac{E}{\text{Ra}} \left[1 - \frac{\cosh(\kappa(1+y^*)) \cos(\kappa(1-y^*)) + \cosh(\kappa(1-y^*)) \cos(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \right] \quad (2.26)$$

$$V_x^* = \frac{F}{2m^2} \left(\frac{\cosh(my^*)}{\cosh(m)} - \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} \right) \quad (2.27)$$

$$\Phi^* = \frac{F}{2m^4} \left(\frac{\cosh(my^*)}{\cos(m)} + \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} - 2 \right) \quad (2.28)$$

$$\kappa = \frac{\text{Ra}^{-1/4}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad m = (-\text{Ra})^{1/4} \quad ; \quad F = \frac{2m^3}{\tanh(m) - \tan(m)} \quad ;$$

$$E = -2\kappa \text{ Ra}^{1/2} \frac{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)}{\sinh(2\kappa) - \sin(2\kappa)}$$

Cabe mencionar que estas soluciones se utilizan para validar la herramienta numérica Xcompact3D. Si el lector lo desea, puede apreciar las gráficas de dichas soluciones en la Sección 4.1.3.

2.4.2. Análisis de Estabilidad Lineal

Dos motivaciones principales para estudiar la estabilidad de los fluidos son: comprender el proceso de transición de un flujo laminar a uno turbulento, y predecir el inicio de dicha transición. El análisis de estabilidad lineal permite evaluar cómo se comporta un flujo ante perturbaciones, identificando los mecanismos que pueden inducir transiciones. En ese sentido, condiciones como un número de Reynolds inferior a un valor crítico garantizan la estabilidad de un flujo laminar suave [Drazin and Reid, 2004]. Sin embargo, en ocasiones, las perturbaciones crecen hasta alcanzar amplitudes finitas y establecer nuevos equilibrios estacionarios, que pueden volverse inestables a su vez y evolucionar hacia un régimen turbulento.

El enfoque parte de las ecuaciones de gabinete 2.18 donde se han omitido los superíndices “ $*$ ” para simplificar la notación. La idea consiste en suponer que los campos solución (\mathbf{v} , p , φ) pueden descomponerse como un flujo base más una perturbación:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.29)$$

$$p = P + \tilde{p} \quad (2.30)$$

$$\varphi = \Phi + \tilde{\varphi} \quad (2.31)$$

donde las letras mayúsculas hacen referencia al flujo base laminar y aquellas letras con $\tilde{(\cdot)}$ a las perturbaciones.

Despreciando términos de segundo orden, esto es, productos de perturbaciones, y asumiendo que los flujos base son los flujos laminares desarrollados $\mathbf{V} = (V_x(y), 0, 0)$ y $\Phi \equiv \Phi(y)$, es posible expresar las ecuaciones que describen la dinámica de $\tilde{\mathbf{v}}$, \tilde{p} y $\tilde{\varphi}$ de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.32)$$

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + V_x \partial_x \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{v}_y \partial_y V_x \hat{\mathbf{e}}_x = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{Re_b} \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} + \frac{Ra}{Re_b} \tilde{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.33)$$

$$\partial_t \tilde{\varphi} + V_x \partial_x \tilde{\varphi} + \tilde{v}_y \partial_y \Phi = \frac{1}{Re_b Pr} [\nabla^2 \tilde{\varphi} - \tilde{v}_x] \quad (2.34)$$

Luego, aplicando el operador divergencia a la ecuación 2.33 es posible encontrar una expresión para el Laplaciano de la presión:

$$-\nabla^2 \tilde{p} = 2 \partial_x \tilde{v}_y \partial_y V_x - \frac{Ra}{Re_b} \partial_x \tilde{\varphi}. \quad (2.35)$$

A continuación, aplicando el operador Laplaciano a la componente y de la ecuación 2.33 es posible eliminar el término que involucra la presión, resultando en la siguiente expresión:

$$\left\{ [\partial_t + V_x \partial_x] \nabla^2 - D^2(V_x) \partial_x - \frac{1}{Re_b} \nabla^4 \right\} \tilde{v}_y = -\frac{Ra}{Re_b} \partial_{xy} \tilde{\varphi}, \quad (2.36)$$

donde $D^j \equiv \partial_y^j$.

Para la descripción completa de las perturbaciones se utiliza la componente y de la vorticidad, $\tilde{\eta} \equiv \partial_z \tilde{v}_x - \partial_x \tilde{v}_z$, cuya dinámica está dada por la ecuación 2.37.

$$\left[\partial_t + V_x \partial_x - \frac{1}{Re_b} \nabla^2 \right] \tilde{\eta} + D(V_x) \partial_z \tilde{v}_y = \frac{Ra}{Re_b} \partial_z \tilde{\varphi} \quad (2.37)$$

Así, las ecuaciones 2.34, 2.36 y 2.37 constituyen un sistema de EDP⁶ de tres ecuaciones con tres campos incógnitas. A partir de los campos escalares $\tilde{\eta}$ y \tilde{v}_y , utilizando la ecuación 2.32 y la definición de $\tilde{\eta}$ es posible hallar los campos \tilde{v}_x y \tilde{v}_z . Asimismo, empleando la ecuación 2.35 y los campos \tilde{v}_y y $\tilde{\varphi}$ es posible hallar el campo de presión \tilde{p} .

Las soluciones a dicho problema se proponen como ondas planas tridimensionales. Si $\tilde{\xi}$ es una perturbación cualquiera, entonces, se escribe de la siguiente forma arbitraria

⁶Ecuaciones en Derivadas Parciales.

$$\tilde{\xi} = \hat{\xi}(y) e^{i[\alpha x + \beta z - \alpha c t]} , \quad (2.38)$$

donde c es la velocidad de fase, y α y β son los números de onda en la dirección X y Z , respectivamente; por otro lado, $\omega \equiv \alpha c$ es la frecuencia angular.

Si el crecimiento de la perturbación ocurre en el tiempo, se denomina transición temporal [Machaca Abregu, 2024]. Aquí, c es la velocidad de fase compleja ($c \equiv c_r + i c_i$) y la frecuencia ω es también una cantidad compleja ($\omega \equiv \omega_r + i \omega_i$). En ese sentido: α , β , c_r , c_i , ω_r y ω_i son números reales. Además, la perturbación crece o decae en el tiempo de acuerdo al término $e^{\alpha c_i t}$ dependiendo del signo de c_i :

- ◆ Si $\alpha c_i > 0$ entonces las perturbaciones crecen en el tiempo. El flujo se vuelve inestable.
- ◆ Si $\alpha c_i < 0$ entonces las perturbaciones decaen exponencialmente en el tiempo y la perturbación se atenúa. El flujo se vuelve estable.

Por otro lado, si el crecimiento de las perturbaciones ocurre en el espacio, por ejemplo a lo largo de la dirección X , entonces se denomina transición espacial [Machaca Abregu, 2024]. Aquí c , ω y β son números reales, mientras que α es un número complejo ($\alpha = \alpha_r + i \alpha_i$). En este sentido:

- ◆ Si $\alpha_i c < 0$ entonces las perturbaciones crecen en el espacio, en la dirección de la corriente. El flujo se vuelve inestable.
- ◆ Si $\alpha_i c > 0$ entonces las perturbaciones decaen exponencialmente en el espacio y la perturbación se atenúa. El flujo se vuelve estable.

En este trabajo se considera únicamente la transición temporal. En este contexto, al reemplazar las soluciones tipo 2.38 en el sistema de ecuaciones, se obtiene un problema de autovalores generalizado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} , \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2]^2 - i\alpha (V_x [D^2 - k^2] + D^2(V_x)) ; \quad a_{12} = - \left[i\alpha \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} D \right] \\ a_{21} &= \frac{i\alpha}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} D + D(\Phi) ; \quad a_{22} = \frac{-1}{\text{Re}_b \text{Pr}} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x ; \quad a_{23} = \frac{\beta}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} \\ a_{31} &= \beta D(V_x) ; \quad a_{32} = -\beta \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} ; \quad a_{33} = -\frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x \\ b_1 &= -[D^2 - k^2] ; \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

donde $\widehat{\eta} = \beta \widehat{v}_x - \alpha \widehat{v}_z$. A partir de las condiciones de borde 2.13 - 2.17, las autofunciones $\widehat{v}_y(y)$, $\widehat{\varphi}(y)$, $\widehat{\eta}(y)$ deben satisfacer las condiciones:

$$\widehat{v}_y(y) = D(\widehat{v}_y) = \widehat{\varphi}(y) = \widehat{\eta}(y) = 0 \quad \text{en } y = \pm 1 \quad (2.40)$$

La resolución de este problema de autovalores generalizado se realiza empleando una estrategia numérica la cual se detalla en el Capítulo 3.

2.4.3. Mecanismos de Inestabilidad

A continuación, la construcción de las condiciones iniciales que se consideran en esta subsección se basan en el concepto de inestabilidad secundaria que ha sido utilizado por el grupo de trabajo en el caso de convección forzada. Allí, se perturba el flujo laminar con una onda bidimensional más un par de ondas oblicuas [Machaca Abregu, 2024], [Schmid and Henningson, 2002]. Cabe destacar que esta estrategia también ha sido empleada en otros trabajos donde se estudian flujos en convección mixta [Chen and Chung, 2003].

En el caso de un flujo Poiseuille entre placas paralelas con convección forzada, se tiene, según la teoría de estabilidad lineal, que el flujo es estable para números de Reynolds menores que $Re_{crit} = 5772$ [Orszag, 1971]. Sin embargo, los experimentos reales muestran que el flujo puede inestabilizarse para $Re < Re_{crit}$, como es el caso del experimento realizado por [Kao and Park, 1970], quienes encontraron un número de Reynolds crítico $Re_{crit} = 975$.

En vista de que en los experimentos reales el flujo se inestabiliza a $Re < 5772$, muchos investigadores abordaron el problema de forma numérica. Por ejemplo, Orszag y Kells [Orszag and Kells, 1980] lograron inestabilizar el flujo para $Re \approx 1000$ mediante la introducción de perturbaciones tridimensionales de pequeña amplitud. Estas perturbaciones tridimensionales dan lugar a lo que se conoce como inestabilidad secundaria.

La teoría de inestabilidad secundaria se ocupa del análisis de estabilidad de estados estacionarios o quasi-estacionarios que resultan de la inestabilidad primaria. Esta última aborda la primera etapa del proceso de transición: el crecimiento de las ondas bidimensionales (2D) de Tollmien–Schlichting (TS) [Tollmien, 1935, Schlichting, 1933] que se propagan en la dirección de la corriente. Cuando la amplitud de la onda TS excede cierto umbral, las perturbaciones tridimensionales (3D) comienzan a amplificarse [Schmid and Henningson, 2002].

En concreto: para $Re < Re_{crit}$, la condición inicial que se impone al flujo tiene la forma de la ecuación 2.41 donde $\mathbf{V} = (V_x(y), 0, 0)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, z, t = 0) &= \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{v}} \\ \phi(x, y, z, t = 0) &= \Phi + \tilde{\varphi} \end{aligned} \quad (2.41)$$

La condición inicial considerada para el crecimiento de la perturbación en el tiempo, se construye como la suma del flujo base y la perturbación bidimensional compuesta por una onda 2D del tipo $\widehat{\xi}(y) e^{i\alpha_{2D}x}$ (inestabilidad primaria). Luego se produce una saturación no lineal de la onda 2D mediante la adición de un par de ondas tridimensionales oblicuas del tipo $\widehat{\xi}(y) e^{i\alpha_{3D}x \pm \beta z}$ (inestabilidad secundaria). Así, la forma funcional de las perturbaciones

$\tilde{\mathbf{v}}$ y $\tilde{\varphi}$ se expresa en las ecuaciones 2.42 y 2.43, respectivamente. Allí, A_{2D} corresponde a la amplitud de la perturbación bidimensional y A_{3D} corresponde a la amplitud total del par de ondas tridimensionales. Las autofunciones $\widehat{\mathbf{v}_{2D}}(y)$, $\widehat{\mathbf{v}_{3D}}(y)$, $\widehat{\varphi_{2D}}(y)$ y $\widehat{\varphi_{3D}}(y)$ son calculadas con la herramienta OSMC descrita en el Capítulo 3. Los superíndices + y - representan las autofunciones calculadas para $+\beta$ y $-\beta$, respectivamente ($\beta > 0$). Por último, $\mathbb{R}[(.)]$ denota la parte real de la función compleja considerada.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{v}}(x, y, z, t = 0) = & A_{2D}\mathbb{R}[\widehat{\mathbf{v}_{2D}}(y)e^{i\alpha_{2D}x}] + \frac{1}{2}A_{3D}\mathbb{R}\left[\widehat{\mathbf{v}_{3D}^+}(y)e^{i(\alpha_{3D}x+\beta z)}\right] \\ & + \frac{1}{2}A_{3D}\mathbb{R}\left[\widehat{\mathbf{v}_{3D}^-}(y)e^{i(\alpha_{3D}x-\beta z)}\right]\end{aligned}\quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(x, y, z, t = 0) = & A_{2D}\mathbb{R}[\widehat{\varphi_{2D}}(y)e^{i\alpha_{2D}x}] + \frac{1}{2}A_{3D}\mathbb{R}\left[\widehat{\varphi_{3D}^+}(y)e^{i(\alpha_{3D}x+\beta z)}\right] \\ & + \frac{1}{2}A_{3D}\mathbb{R}\left[\widehat{\varphi_{3D}^-}(y)e^{i(\alpha_{3D}x-\beta z)}\right]\end{aligned}\quad (2.43)$$

Finalmente, se debe mencionar que en este trabajo se evalúa la respuesta dinámica del sistema ante perturbaciones bidimensionales y tridimensionales de la teoría descripta.

Capítulo 3

Herramientas Numéricas

En este capítulo se da una breve descripción de las herramientas numéricas utilizadas: Xcompact3D y OSMC. Xcompact3D resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes junto a la ecuación de transporte de un escalar, brindando la capacidad de resolver en forma eficiente y precisa flujos turbulentos en canales rectangulares usando una grilla cartesiana simple; además, es una herramienta popular en el ámbito de la investigación básica y aplicada. Una descripción completa de la misma puede encontrarse en <https://www.incompact3d.com/>.

Por su parte, OSMC se emplea para resolver el problema de autovalores y autofunciones detallado en la sección 2.4.2. El mismo utiliza el método espectral de Colocación de la Matriz de Chebyshev transformando el problema original a un problema autovalores y autovectores. Esta herramienta fue desarrollada por Pablo Szuban [Szuban, 2023] en el grupo de Mecánica Computacional (MECOM-CAB).

3.1. Xcompact3D (XC3D)

Comprender, predecir y controlar los flujos turbulentos es crucial, y a la vez, un factor relevante en la industria, no en vano sigue siendo uno de los desafíos más complejos en investigación. Además, el diseño de numerosos sistemas de ingeniería e industriales, así como la evaluación de su impacto ambiental, depende de cuantificar con precisión el comportamiento turbulento de los flujos.

Si bien las ecuaciones de Navier-Stokes constituyen el modelo matemático de referencia para describir la dinámica de un flujo turbulento, su resolución es especialmente exigente debido al carácter caótico y multiescala de la turbulencia [Pope, 2001]. Las escalas relevantes abarcan varios órdenes de magnitud y demandan elevados recursos de cómputo y memoria. El notable incremento en las últimas dos décadas en la capacidad computacional ha impulsado el uso de simulaciones de alta fidelidad; en particular, las simulaciones DNS¹ se han consolidado como una herramienta clave para la predicción de flujos y se han convertido, junto al CFD², en un complemento esencial de la teoría y el experimento.

¹Simulaciones numéricas en las que se resuelve la gran mayoría de las escalas turbulentas.

²*Computational Fluid Dynamics*

En este trabajo se estudian el flujo de un fluido y la transferencia de calor en régimen turbulento con convección mixta, así como la transición laminar-turbulenta temporal, mediante simulaciones numéricas directas. Ello exige resolver las ecuaciones de Navier-Stokes y de transporte de un escalar, acopladas entre sí, con alta precisión numérica y eficiencia computacional. Para este fin se emplea Xcompact3D³, una herramienta numérica implementada en Fortran 90/95 orientada a arquitecturas basadas en CPU y a la Computación de Alto Desempeño (HPC). XC3D evoluciona a partir del *flow solver* Incompact3D, desarrollado originalmente en Francia a mediados de los años noventa, y posteriormente portado a sistemas HPC a comienzos de la década de 2010.

Algunas características distintivas de XC3D son:

- Implementa diversos flujos canónicos, entre ellos el flujo en dominios tipo caja con geometría cartesiana, adecuados para los objetivos de este trabajo.
- Es una herramienta de código abierto, con documentación en [Read the Docs](#) y código disponible en [GitHub](#).
- Presenta alta eficiencia y escalabilidad, con dependencia mínima de bibliotecas externas (solo requiere una biblioteca basada en MPI⁴: *2D Decomp & FFT* [[Li and Laizet, 2010](#)], [[Laizet and Li, 2011](#)]).
- Utiliza grilla o malla uniforme en dos direcciones (X y Z) y uniforme o refinada en la dirección Y (coordenada pensada para paredes).
- Ofrece una compilación ágil y sencilla mediante un único *Makefile*; los parámetros numéricos de la simulación (tamaño del dominio, número de nodos de la grilla, etc.) pueden ajustarse sin recomilar.

³Abreviado en este trabajo como XC3D

⁴*Message Passing Interface*. Más información en [MPI-Forum](#).

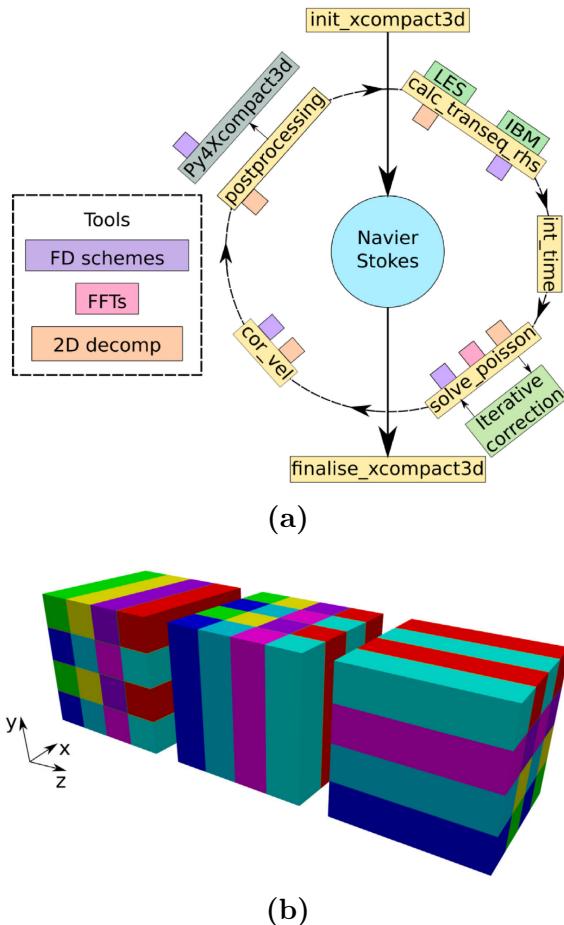


Figura 3.1: (a) Diagrama de la arquitectura de software de Xcompact3D. (b) Descomposición en lápices 2D utilizando 4×4 procesadores, representando los mismos en direcciones X, Y y Z respectivamente. Imágenes tomadas de [Bartholomew et al., 2020].

El objetivo de las próximas subsecciones es ofrecer al lector una visión general de la lógica algorítmica de la herramienta numérica; se trata de un esquema conceptual a grandes rasgos, no de una descripción formal y rigurosa.

3.1.1. Ecuaciones de gobierno

Xcompact3D resuelve numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible junto con la ecuación de transporte de temperatura, acopladas entre sí mediante el término de fuerza boyante en la ecuación de momento. Las ecuaciones se expresan en forma adimensional en 3.1 donde se omiten los superíndices “ $*$ ” a fin de simplificar la notación. Obsérvese que si bien las ecuaciones están en consonancia con lo expuesto en el Capítulo 2, no son exactamente las mismas. No obstante, estas ligeras diferencias no resultan relevantes en la explicación del método numérico.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\
 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla p - \underbrace{(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}}_{\mathbf{RHS}_1} + \mathbb{A} \theta \mathbf{e}_g + \mathbf{f} \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \underbrace{-\mathbf{u} \cdot \nabla \theta + \frac{1}{RePr} \nabla^2 \theta}_{\mathbf{RHS}_2} + \mathbb{B} u_x
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

En las ecuaciones precedentes: $p(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\theta(\mathbf{x}, t)$ son los campos de presión, velocidad y temperatura respectivamente; $\mathbf{x} = (x, y, z)$ es el vector de coordenadas y t el tiempo; Re y Pr son los números adimensionales de Reynolds y Prandtl respectivamente; \mathbb{A} y \mathbb{B} son constantes. Dependiendo de la forma adimensional considerada, \mathbb{A} y \mathbb{B} pueden ser diferentes. Por ejemplo, tomando $\mathbb{A} = Ri/(RePr)$ y $\mathbb{B} = 1$ se obtiene la forma adimensional de las ecuaciones 2.8. La fuerza volumétrica $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ es usada cuando se sumerge un cuerpo sólido dentro del dominio computacional (*Immersed Boundary Method* [Peskin, 2002]) o para otros usos según sea requerido.

3.1.2. Esquemas de diferencias finitas de alto orden

Las ventajas de los esquemas de alto orden para DNS/LES frente a los esquemas convencionales de bajo orden están plenamente reconocidas actualmente, especialmente por su capacidad de capturar con precisión un rango más amplio de escalas turbulentas para una resolución espacial dada. Por otro lado, los métodos espectrales estándar basados en representaciones de Fourier o de Chebyshev proporcionan soluciones muy precisas y eficientes de las ecuaciones de Navier-Stokes, aunque con severas restricciones en su aplicabilidad. Por su parte, los esquemas compactos de diferencias finitas de alto orden [Laizet and Lamballais, 2009] se aproximan a la precisión de los métodos espectrales y permiten mayor flexibilidad en la selección de condiciones de contorno (en XC3D es posible usar condiciones⁵ periódicas, de Dirichlet y de Neumann). Aunque los esquemas compactos son implícitos en el espacio, resultan muy competitivos en términos de eficiencia computacional. En particular, nuestras simulaciones emplean esquemas compactos de sexto orden para la discretización de los términos convectivo y difusivo.

3.1.3. Avance temporal

El campo de flujo y el campo escalar se inicializan ya sea con una condición inicial (`init_xcompact3d` en la Figura 3.1a) o cargando un archivo *restart*. Las ecuaciones de Navier-Stokes se avanzan en el tiempo mediante un método de paso fraccionado (o proyección) implementado en tres etapas lógicas: (i) evaluación del lado derecho y *predictor*, (ii) resolución de la ecuación de Poisson para la presión e imposición de incompresibilidad y (iii) corrección

⁵Recuérdese que en este trabajo se utiliza la aproximación MBC para imponer la condición de borde térmica (véase Sección 2.2), ya que ha sido ampliamente evaluada y utilizada en el grupo de trabajo.

de la velocidad y la temperatura. En la Figura 3.1a se presenta una visión general de la arquitectura modular de Xcompact3D [Bartholomew et al., 2020]. Las principales funcionalidades se separan en los módulos: `calc_transeq_rhs`, `int_time`, `solve_poisson`, `cor_vel` y `postprocessing`. Los tres primeros corresponden a la resolución de las ecuaciones de gobierno, mientras que el último corresponde a la etapa de postprocesamiento de los datos obtenidos:

I `calc_transeq_rhs` → `int_time`: predictor $\mathbf{u}^{\dagger\dagger}$

Primero, se evalúan numéricamente los términos del lado derecho (\mathbf{RHS}_1) de la ecuación de momento y se integran en el tiempo (una vez discretizados en el espacio) empleando, por ejemplo, esquemas de Runge-Kutta o Adams-Bashforth para obtener la velocidad intermedia \mathbf{u}^\dagger :

$$\frac{\mathbf{u}^\dagger - \mathbf{u}^k}{\Delta t} = \mathbf{RHS}_1^k - c_k \nabla \tilde{p}^k, \quad (3.2)$$

donde c_k es un coeficiente conocido y k el índice para los subpasos de tiempo $k = 1, \dots, n_k$; con $t_1 = t_n$ y $t_{n_k} = t_{n+1}$ ($\Delta t = t_{n+1} - t_n$). La presión se expresa como su valor promediado en el tiempo en un subpaso dado ($c_k \Delta t$) indicado con una tilde ($\tilde{(.)}$). Por conveniencia algebraica y para limpiar el lado derecho de la ecuación de Poisson de los pasos posteriores, puede definirse un campo intermedio $\mathbf{u}^{\dagger\dagger}$ que “remueve” la presión promedio usada en el predictor:

$$\frac{\mathbf{u}^{\dagger\dagger} - \mathbf{u}^\dagger}{\Delta t} = c_k \nabla \tilde{p}^k \quad (3.3)$$

Con esta reordenación, $\mathbf{u}^{\dagger\dagger}$ sólo contiene los aportes no asociados a la presión previa:

$$\frac{\mathbf{u}^{\dagger\dagger} - \mathbf{u}^k}{\Delta t} = \mathbf{RHS}_1^k. \quad (3.4)$$

II `solve_poisson`: presión de proyección \tilde{p}^{k+1}

Se impone la incompresibilidad al final del paso:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1} = 0. \quad (3.5)$$

Tomando la divergencia de la corrección (véase ecuación 3.7) y utilizando la ecuación 3.5, se obtiene la ecuación de Poisson para la presión de proyección:

$$\nabla^2 \tilde{p}^{k+1} = \frac{1}{c_k \Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^{\dagger\dagger}, \quad (3.6)$$

donde $\tilde{p}^{k+1} = \frac{1}{c_k \Delta t} \int_{t_k}^{t_{k+1}} p dt$.

Para la presión se aplican típicamente condiciones de borde de Neumann homogéneas (compatibles con la proyección). Por otro lado, las condiciones en la velocidad (por ejemplo, no deslizamiento) se aplican al predictor.

III cor_vel: corrección solenoidal \mathbf{u}^{k+1}

Finalmente, se corrige la velocidad intermedia con el gradiente de la nueva presión para obtener el campo solenoidal al final del paso de tiempo:

$$\frac{\mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^{\dagger\dagger}}{\Delta t} = -c_k \nabla \tilde{p}^{k+1}. \quad (3.7)$$

El término de la fuerza boyante no modifica la forma de la ecuación Poisson, sólo influye a través del predictor $\mathbf{u}^{\dagger\dagger}$ que genera. Adicionalmente, en el paso de tiempo actual k , se evalúa el lado derecho de la ecuación de transporte del escalar (\mathbf{RHS}_2) empleando la velocidad calculada en el mismo paso, esto es:

$$\begin{aligned} \mathbf{RHS}_2^k &= -\mathbf{u}^k \cdot \nabla \theta^k + \frac{1}{\text{RePr}} \nabla^2 \theta^k + \mathbb{B} u_x^k, \\ \frac{\theta^{k+1} - \theta^k}{\Delta t} &= \mathbf{RHS}_2^k. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para la integración temporal de \mathbf{RHS}_2 se emplea el mismo esquema utilizado en \mathbf{RHS}_1 .

IV postprocessing

Al final de cada paso de tiempo, el usuario puede decidir qué magnitudes almacenar y qué cantidades calcular (magnitudes estadísticas de primer orden, segundo orden, etc).

En particular, en este trabajo, para la integración temporal de los términos $\mathbf{RHS}_{1,2}$ se emplea el esquema Adams-Bashforth de orden 3.

3.1.4. *Solver* espectral de Poisson

Como se menciona en la Sección 3.1.3, Xcompact3D avanza las ecuaciones de gabinete mediante el método de paso fraccionario, formando una ecuación de Poisson para la presión al tomar la divergencia de la ecuación de momento. Una de las principales originalidades de Xcompact3D es que la ecuación de Poisson se resuelve en el espacio espectral usando el concepto de números de onda modificados [Lele, 1992], para los cuales las operaciones en el espacio físico son estrictamente equivalentes a las del espacio espectral. Esta estrategia directa, que evita el uso de costosas técnicas iterativas, no es nueva para condiciones de contorno periódicas y/o de deslizamiento libre del campo de velocidades [Schumann and Sweet, 1976]. La misma ha sido implementada y validada para condiciones de Dirichlet combinadas con esquemas de diferencias finitas de alto orden [Laizet and Lamballais, 2009].

3.1.5. Biblioteca *2D Decomp & FFT*

Los esquemas de diferencias finitas y el *solver* espectral de Poisson empleados por Xcompact3D se descomponen de forma natural en una serie de subproblemas unidimensionales. Por ello, resulta natural paralelizar el dominio computacional mediante una descomposición en “lápices”, como se ilustra en la Figura 3.1b. Cada descomposición (en los ejes X, Y y Z, respectivamente) permite el cálculo independiente de derivadas, interpolaciones, etc.

Las transposiciones globales para pasar de un lápiz a otro se realizan con comandos MPI. Más detalles sobre la estrategia de cómputo paralelo implementada en Xcompact3D pueden encontrarse en [Laizet and Li, 2011].

3.2. Orr-Sommerfeld *Mixed Convection* (OSMC)

En el Capítulo 2, empleando teoría de estabilidad lineal, considerando flujos laminares, y suponiendo las perturbaciones como ondas planas 3D (expresiones tipo 2.38) se arribó a un problema de autovalores y autofunciones generalizado, dado por la expresión 2.39, con las condiciones de borde de la relación 2.40. La herramienta numérica empleada para resolver este tipo de problemas es OSMC (por sus siglas, Orr-Sommerfeld *Mixed Convection*), desarrollada por Pablo Szuban como parte de su Proyecto Integrador de Ingeniería en el Instituto Balseiro [Szuban, 2023]. La herramienta numérica se implementó en lenguaje *Python* utilizando las librerías *NumPy* y *SciPy*. La misma se encuentra disponible en GitHub: [OSMC-Repository](#).

A continuación se dan los lineamientos detrás de la estrategia numérica utilizada. OSMC emplea el método numérico espectral conocido como “Método de Colocación de la Matriz de Chebyshev” [Moin, 2010]. Esta estrategia busca transformar el problema de autovalores y autofunciones en uno de autovalores y autovectores. Los vectores solución son las amplitudes \hat{v}_y , $\hat{\varphi}$ y $\hat{\eta}$ correspondientes a la frecuencia angular ω (autovalor asociado). Dado el sistema 2.39, el flujo base laminar (Sección 2.4.1) y las condiciones de borde asociadas, se discretiza la variable y en el intervalo $[-1, 1]$ en $N + 1$ puntos de Chebyshev dados por la relación 3.9. Lo siguiente es evaluar las funciones involucradas en dichos puntos, por ejemplo, para una función arbitraria ξ se tienen los puntos $\xi_j = \xi(y_j)$; luego, se construye un polinomio interpolante de Lagrange \mathcal{L} para ξ , de grado $\leq N$, tal que $\mathcal{L}(y_j) = \xi_j$.

$$y_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N \quad (3.9)$$

De esta manera, los valores de la derivada de ξ en los puntos y_j son equivalentes a aquellos valores de la derivada del polinomio interpolante en los mismos puntos. Si ξ se transforma a un vector⁶ $\vec{\xi}$, entonces, se puede demostrar [Moin, 2010], que la derivada de la función evaluada en los puntos de Chebyshev es $\vec{\xi}' = \mathbb{D}\vec{\xi}$ donde \mathbb{D} es la Matriz de Colocación de Chebyshev de tamaño $(N + 1) \times (N + 1)$ [Trefethen, 2000].

Si se tiene en cuenta que se necesita resolver un problema con condiciones de borde nulas (relaciones 2.40), es posible mostrar [Szuban, 2023] que las primeras y últimas filas y columnas de la matriz \mathbb{D} se pueden eliminar de modo que resulta una matriz de $(N - 1) \times (N - 1)$. Siguiendo este concepto, es posible obtener los operadores de derivada primera, segunda y cuarta, necesarios para la resolución del problema. Finalmente, al considerar todo lo explicitado, se obtiene un problema de autovalores y autovectores (generalizado) de matrices de tamaño $3(N - 1) \times 3(N - 1)$ como se muestra en la expresión 3.10.

⁶Es decir, los elementos ξ_j del vector $\vec{\xi}$ son tales que $\xi_j = \xi(y_j)$.

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \mathbb{O} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_y \\ \vec{\varphi} \\ \vec{\eta} \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} B_1 & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} & 0 \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_y \\ \vec{\varphi} \\ \vec{\eta} \end{bmatrix}; \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{\text{Re}_b} [\mathbb{D}^2 - k^2 \mathbb{I}]^2 - i\alpha (\text{diag}(\vec{V}_x)(\mathbb{D}^2 - k^2 \mathbb{I}) + \text{diag}(\mathbb{D}^2 \vec{V}_x)) ; \quad A_{12} = - \left[i\alpha \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \mathbb{D} \right] \\ A_{21} &= \frac{i\alpha}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} \mathbb{D} + \text{diag}(\mathbb{D} \vec{\Phi}) ; \quad A_{22} = \frac{-1}{\text{Re}_b \text{Pr}} [\mathbb{D}^2 - k^2 \mathbb{I}] + i\alpha \text{diag}(\vec{V}_x) ; \quad A_{23} = \frac{\beta}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} \mathbb{I} \\ A_{31} &= \beta \text{diag}(\mathbb{D} \vec{V}_x) ; \quad A_{32} = -\beta \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \mathbb{I} ; \quad A_{33} = -\frac{1}{\text{Re}_b} [\mathbb{D}^2 - k^2 \mathbb{I}] + i\alpha \text{diag}(\vec{V}_x) \\ B_1 &= - [\mathbb{D}^2 - k^2 \mathbb{I}] ; \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

Como puede observarse, las submatrices A_{11} , A_{21} , A_{22} , A_{31} y A_{33} tienen incorporado en su definición al operador **diag**. El mismo transforma un vector $\vec{\xi}$, de tamaño $n \times 1$ (siendo n un número natural arbitrario), en una matriz diagonal $n \times n$ cuyos elementos diagonales son los elementos de $\vec{\xi}$. Asimismo, \mathbb{I} es la matriz identidad de tamaño $(N - 1) \times (N - 1)$ y \mathbb{O} es la matriz nula de igual tamaño.

Capítulo 4

Validación de Herramientas Numéricas

En este capítulo se pretende validar y asegurar el correcto funcionamiento de las herramientas numéricas utilizadas. El mismo se divide en dos partes. Una primera parte que se centra en validar la herramienta de simulaciones DNS, Xcompact3D. Para tal fin se emplean diferentes mallas (o resoluciones) espaciales y pasos temporales según se requiera. En la segunda parte de este capítulo se valida la herramienta generadora de autovalores y autofunciones, OSMC.

Se emplean tres situaciones diferentes para validar XC3D: (i) un canal de placas paralelas en régimen turbulento con flujo de calor constante en las paredes, donde se analizan aspectos hidrodinámicos y térmicos para convección forzada [Moser et al., 1999, Kawamura et al., 2000]; (ii) mismo sistema físico que el caso anterior pero en régimen laminar, teniendo en cuenta el acople de las ecuaciones de conservación debido al término de fuerza boyante [Chen and Chung, 1996]; (iii) canal vertical de placas paralelas isotérmicas a distinta temperatura entre sí, en régimen turbulento con convección mixta [Guo and Prasser, 2022]. En los casos turbulentos se analiza la convergencia en malla y la opción computacionalmente más económica que satisface una precisión aceptable.

La corroboración de la herramienta numérica OSMC se realiza en dos etapas: (i) se ratifica que OSMC genere los autovalores correctos, para eso se considera la variación de la parte imaginaria del autovalor más inestable en función del número de onda [Chen and Chung, 1996]; (ii) se corrobora que las autofunciones entregadas por el código sean correctas y para ello se utiliza como referencia autofunciones asociadas a ondas 2D y 3D [Chen and Chung, 2003].

Adicionalmente, las predicciones producidas por la teoría de estabilidad lineal, sobre la evolución temporal de ciertas magnitudes de interés, se comparan con aquellos resultados obtenidos vía simulaciones DNS. En general, se observa que las herramientas empleadas responden adecuadamente y son consistentes con los datos de referencia.

4.1. Primera Parte: Xcompact3D

En esta sección se presentan los resultados obtenidos con la herramienta numérica Xcompact3D (XC3D) para un canal de placas paralelas en flujo completamente desarrollado. Para la validación de XC3D se consideran las siguientes situaciones de flujo:

- **Situación I:** flujo turbulento hidrodinámico y completamente desarrollado,
- **Situación II:** flujo turbulento hidrodinámica y térmicamente desarrollado con flujo de calor constante en las paredes, considerando únicamente convección forzada.
- **Situación III:** flujo en régimen laminar hidrodinámica y térmicamente desarrollado con flujo de calor constante en las paredes donde se considera el efecto de la fuerza boyante, es decir, en régimen de convección mixta;
- **Situación IV:** por último, se considera un canal turbulento completamente desarrollado (hidrodinámica y térmicamente) con convección mixta cuyas paredes están sometidas a una diferencia de temperatura constante.

En cada una de las situaciones expuestas, los resultados se comparan con datos de referencia.

A lo largo de la etapa de validación, para las distintas simulaciones DNS realizadas, se emplearon distintas resoluciones espaciales y pasos temporales, las cuales se especifican en la Tabla 4.1. Asimismo, en dicha tabla se expresan la cantidad de nodos utilizados en las direcciones X , Y y Z (N_x , N_y y N_z , respectivamente). Nótese, además, que la discretización empleada en la dirección Y es no uniforme. El dominio utilizado en todas las simulaciones corresponde a $L_x \times L_y \times L_z = 8 \times 2 \times 4$.

Por otro lado, en cada simulación (según se requiera) se imponen los parámetros Re_o , Pr y/o Rib . Posteriormente, se deja evolucionar el sistema hasta que los campos asociados alcancen el estado estadísticamente estacionario. Una vez en dicho estado, se colecta estadística por al menos 500 unidades temporales. Para acelerar la obtención del estado turbulento, XC3D cuenta con la capacidad de introducir ruido aleatorio, y/o también rotación¹ en el propio flujo.

Las simulaciones se realizan en el *cluster* “mecclust” del grupo MECOM (CAB-CNEA). Dependiendo de la disponibilidad y de la exigencia demandada, cada simulación se puede correr en un nodo individual de los veinte disponibles, los cuales emplean 2 procesadores *Xeon E5 2660 V3 @2.6 GHz* con 10 *cores* cada uno; o también, si se requiere, es posible utilizar cuatro nodos con conexión *InfiniBand* que da un total de 80 *cores*. Para aquellas simulaciones más demandantes, el número mínimo de pasos temporales por hora es aproximadamente 800, y el almacenamiento requerido puede alcanzar los 100 GB. Para dar una idea general del *wall-clock* requerido, empleando 20 *cores*, una simulación de 500 unidades temporales con la malla M0 (véase Tabla 4.1) puede tardar del orden de 35 minutos mientras que una simulación idéntica con la malla M4 puede requerir del orden de 670 horas.

¹La rotación se logra agregando un término asociado a la fuerza de Coriolis en la ecuación de momento [Lamballais, 2014], que viene implementada en el propio código.

Nomenclatura	$N_x \times N_y \times N_z$	$(\Delta x^*, \Delta y_{\max}^*, \Delta z^*)$	Δt^*
M0	$64 \times 65 \times 64$	$(0.125, 0.087, 0.062)$	0.005
M1	$128 \times 65 \times 64$	$(0.062, 0.087, 0.062)$	0.005
M2	$128 \times 129 \times 128$	$(0.062, 0.044, 0.031)$	0.002
M3	$160 \times 161 \times 160$	$(0.05, 0.035, 0.025)$	0.001
M4	$256 \times 257 \times 256$	$(0.031, 0.022, 0.015)$	0.001

Tabla 4.1: Distintas resoluciones espaciales y temporales utilizadas en las simulaciones de validación. Debido a que la discretización en la dirección Y es no uniforme, se reporta el máximo Δy asociado.

Algunos resultados, presentes en esta primera parte, se encuentran adimensionalizados en unidades de pared (indicadas con el superíndice “+”) basadas en el semiancho del canal d , la velocidad de fricción u_τ y la temperatura de fricción T_τ :

- Esfuerzo de Corte: $\tau_w = \mu_o \partial u_x / \partial y$ (evaluada en $y = \pm d$)
- $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$; $T_\tau = \frac{q''_w}{\rho c_p u_\tau}$
- $\mathbf{u}^+ = \mathbf{u} / u_\tau$; $\theta^+ = \theta / T_\tau$; $y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu_o}$

Por otro lado, los perfiles de las magnitudes seleccionadas se encuentran promediadas en la dirección X y Z, y en el tiempo.

4.1.1. Situación I. Canal turbulento (sólo hidrodinámica)

En esta subsección se exponen los resultados del canal turbulento considerando los aspectos hidrodinámicos únicamente. En este caso se impone $Re_o=4200$ y se realizan simulaciones para las mallas M0, M1, M2 y M3.

En las Figuras 4.1a - 4.1d se presentan (respectivamente) algunas magnitudes de interés para este sistema: el perfil de velocidad *streamwise* $\langle u_x^+ \rangle$ y los perfiles de las componentes del tensor de Reynolds² $\sqrt{\langle u_x^{+'} u_x^{+'} \rangle}$, $\sqrt{\langle u_y^{+'} u_y^{+'} \rangle}$ y $\langle u_x^{+'} u_y^{+'} \rangle$. En estas gráficas se comparan las distintas mallas empleadas con el trabajo de Moser *et al.* [Moser et al., 1999]. Al refinar la malla (M0→M3), las cantidades de interés se estabilizan; entre M2 y M3 las diferencias son prácticamente despreciables. Por lo tanto, se considera alcanzada la independencia de malla. Con esa resolución, los resultados DNS de XC3D muestran buen acuerdo con los datos de referencia.

²Sea $R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$ el tensor de Reynolds, entonces: la raíz cuadrada de la componente diagonal R_{ii} coincide con el valor rms de la fluctuación de velocidad en la dirección i -ésima. Esto es, $(u_i)_{rms} = \sqrt{R_{ii}}$.

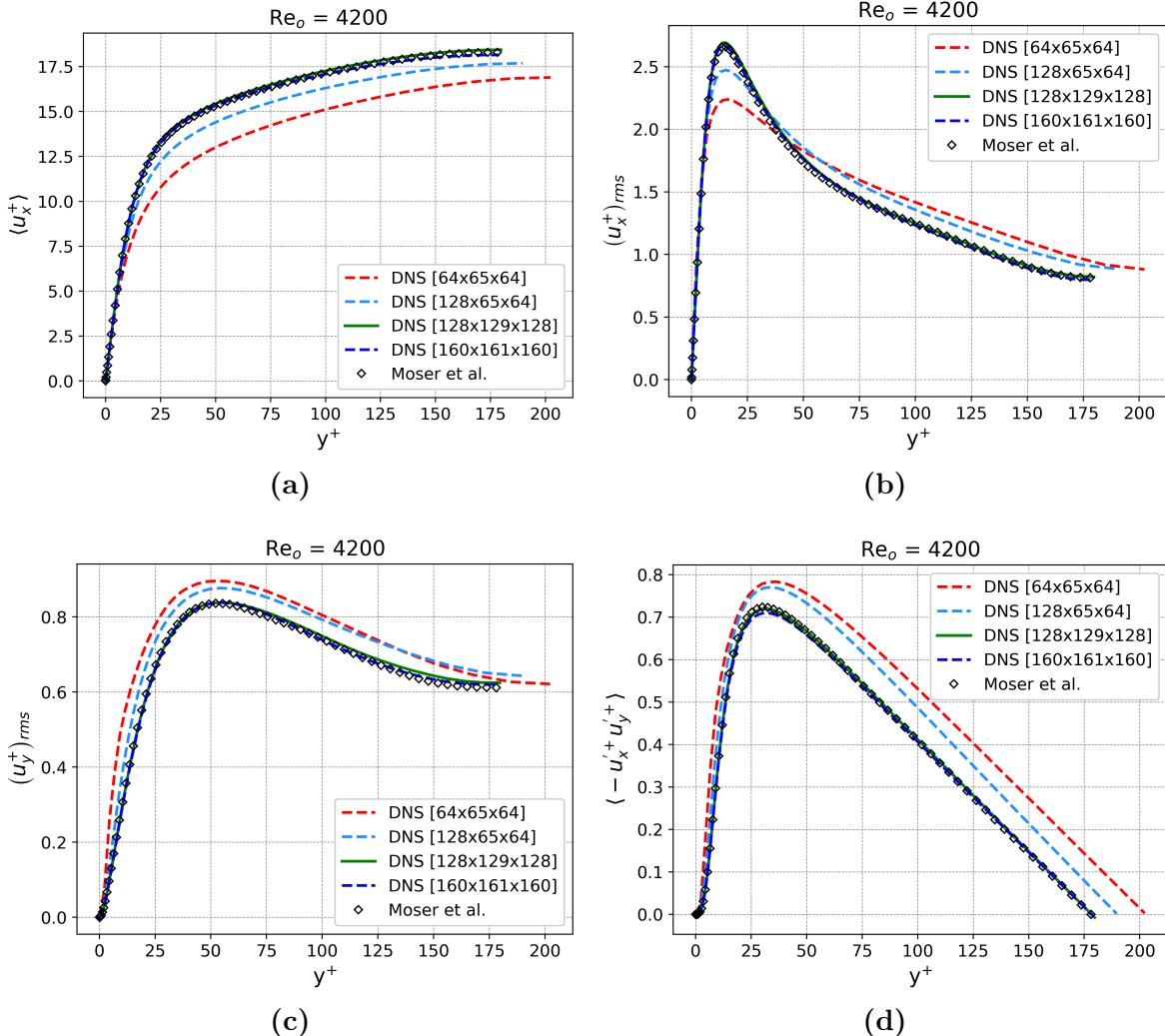


Figura 4.1: Perfiles de (a) velocidad media *streamwise*, (b) fluctuaciones RMS de la velocidad en $\langle u_x^+ \rangle$, (c) fluctuaciones RMS de la velocidad $\langle u_y^+ \rangle$ y (d) componente *xy* del tensor de Reynolds.

Nomenclatura	$L_x \times L_y \times L_z$	$N_x \times N_y \times N_z$	$(\Delta x^*, \Delta z^*)$	Δy_{\max}^*
A	$6.4d \times 2 \times 3.2d$	$128 \times 66 \times 128$	$(0.05, 0.025)$	0.064
C	$12.8d \times 2 \times 6.4d$	$256 \times 128 \times 256$	$(0.05, 0.025)$	0.033
D	$6.4d \times 2 \times 3.2d$	$1024 \times 480 \times 512$	$(0.006, 0.006)$	0.0054

Tabla 4.2: Resoluciones espaciales empleadas por Kawamura *et al.* [Kawamura et al., 2000].

4.1.2. Situación II. Transporte de escalar pasivo en convección forzada con q''_w constante

En este caso se considera sólo el régimen de convección forzada, lo que equivale a suponer $\Pi = 0$ en la ecuación de momento. De esta forma, las ecuaciones de continuidad y momento quedan desacopladas de la ecuación de energía (ecuaciones 2.8). En este sentido, los campos solución de la velocidad son exactamente los mismos que en la **Situación I** y el campo de temperatura es un campo escalar que no interviene en el desarrollo hidrodinámico del sistema, sino únicamente en el aspecto térmico del flujo. Por ello, sólo se presentan magnitudes asociadas a la temperatura adimensional. Para las simulaciones asociadas a esta subsección, se considera el número de Reynolds $Re_o = 4278$.

Convergencia en Malla. En primer lugar, se analiza la respuesta del campo escalar solución frente a diferentes mallas, en concreto, se emplean aquellas mismas utilizadas en la **Situación I**. Las Figuras 4.2a - 4.2d presentan los perfiles de la temperatura adimensional, sus fluctuaciones y los flujos de calor turbulento en las direcciones X e Y, respectivamente. Las simulaciones propias se comparan con aquellas obtenidas en la referencia [Kawamura et al., 2000] para $Pr=0.71$. Además, en dichas gráficas se exponen los distintos resultados obtenidos por Kawamura *et al.* para diferentes mallas empleadas en su trabajo (véase Tabla 4.2).

De forma análoga al caso anterior, se observa claramente la convergencia con el refinamiento de malla: a medida que aumenta la resolución, los resultados se mantienen en buen acuerdo con las referencias. En particular, las curvas correspondientes a M2 y M3 no muestran diferencias apreciables a la escala de las figuras; en otras palabras, el paso de M2 a M3 no introduce mejoras perceptibles. En este sentido, se observa que la malla M2 (un compromiso adecuado entre precisión y costo computacional) reproduce con buen acuerdo los resultados de Moser *et al.* [Moser et al., 1999] y Kawamura *et al.* [Kawamura et al., 2000].

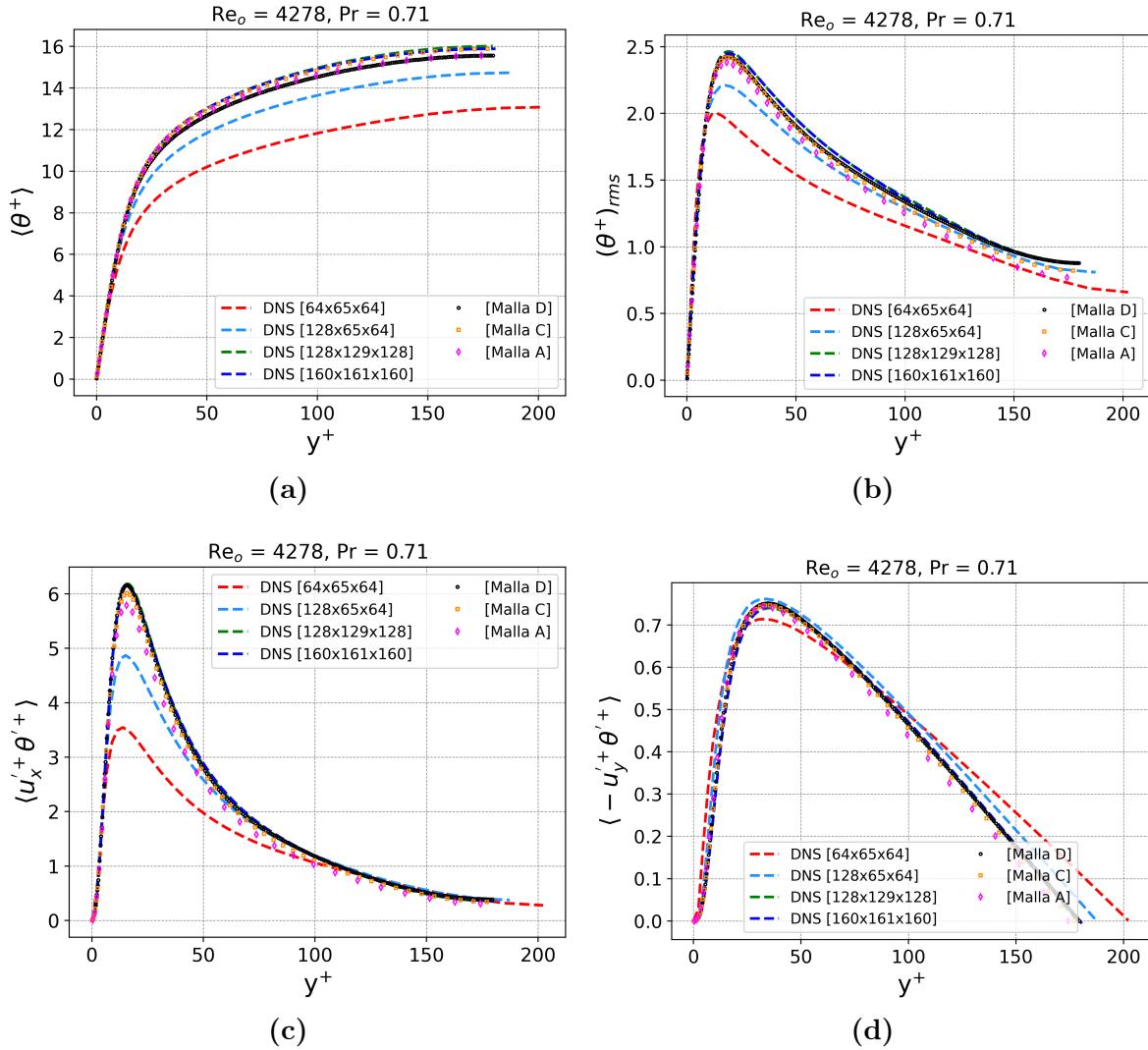


Figura 4.2: Perfiles de (a) temperatura adimensional media, (b) fluctuaciones RMS de la temperatura adimensional, (c) flujo de calor turbulento en la dirección X, $\langle u_x^+ \theta^+ \rangle$, y (d) flujo de calor turbulento en la dirección Y, $\langle -u_y^+ \theta^+ \rangle$.

Variación del número de Prandtl. La segunda parte consiste en emplear la malla M2 para distintos números de Prandtl, en particular, aquellos empleados en el trabajo de Kawamura *et al.*: $Pr = 0.025, 0.71, 1$ y 7 . De igual forma que para la convergencia en malla, en las Figuras 4.3a - 4.3d se muestran los perfiles de las magnitudes $\langle \theta^+ \rangle$, $(\theta^+)_rms$, $\langle u_x^+ \theta^+ \rangle$ y $\langle -u_y^+ \theta^+ \rangle$, respectivamente. Debe aclararse, además, que el tiempo necesario para alcanzar el régimen estadísticamente estacionario crece con el número de Prandtl.

Nuevamente, se observa que la malla M2 resulta en un compromiso adecuado entre precisión y costo computacional para replicar con suficiente fidelidad³ las simulaciones de Kawamura *et al.*

³Por ejemplo, para $Pr = 7$, se observa gráficamente que el perfil $(\theta^+)_rms$ presenta en $y^+ \approx 62.5$ una discrepancia entre la simulación propia y la de referencia; sin embargo, su error relativo es inferior al 5%.

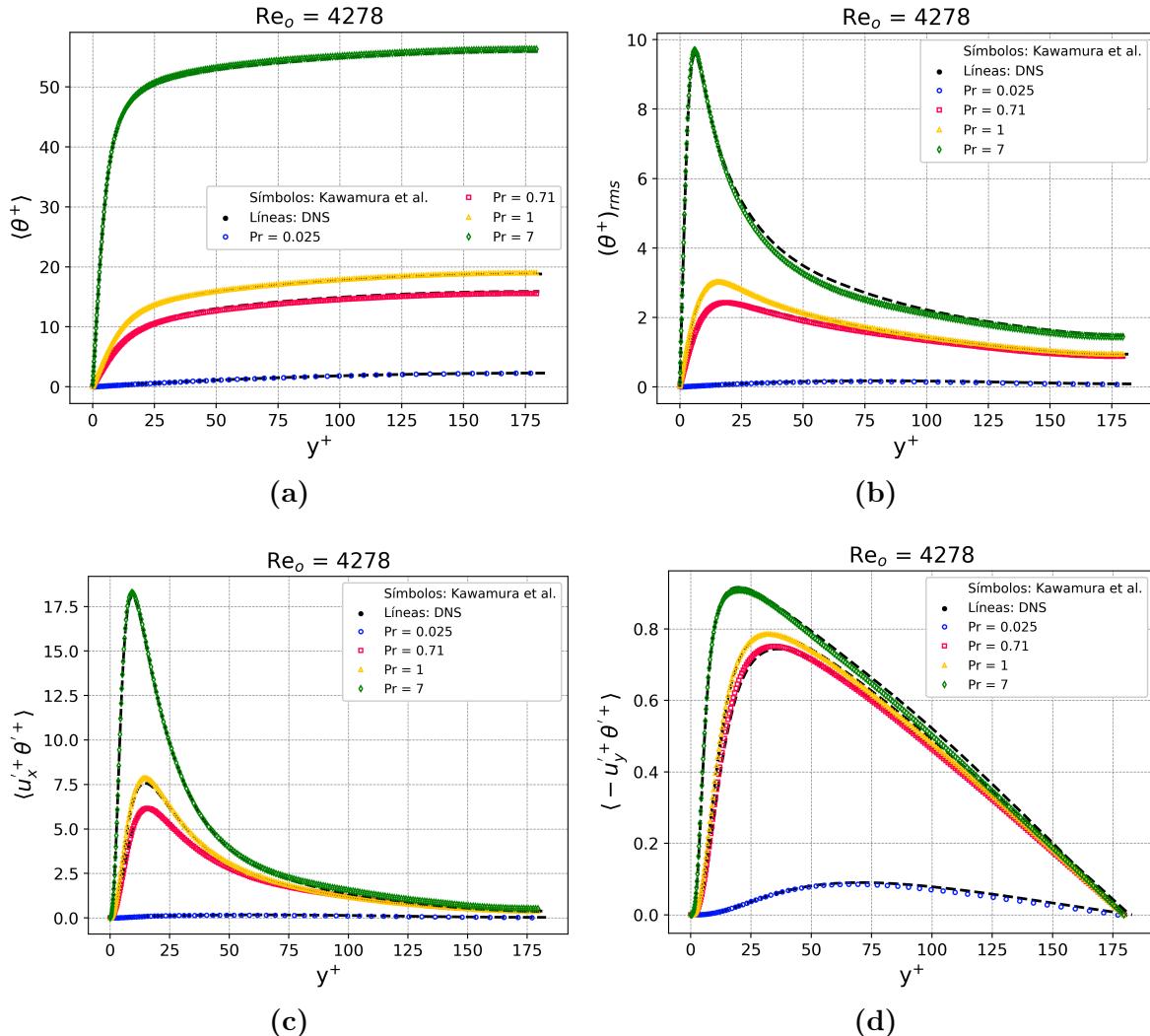


Figura 4.3: Para diferentes números de Pr se tienen los perfiles de (a) temperatura adimensional media, (b) fluctuaciones RMS de la temperatura adimensional, (c) flujo de calor turbulento en la dirección X, $\langle u_x^+ \theta^+ \rangle$, y (d) flujo de calor turbulento en la dirección Y, $\langle -u_y' \theta^+ \rangle$.

4.1.3. Situación III. Canal turbulento en régimen laminar con convección mixta y q_w'' constante

Hasta aquí, la herramienta numérica XC3D se ha validado en aspectos hidrodinámicos y térmicos bajo convección forzada. Como punto de partida hacia el régimen de convección mixta, se realizan simulaciones considerando un régimen laminar con $Re_o=100$, $Pr=1$ y distintos números de Rayleigh ($Ra = -25, -100, 75, 150, 250$) a fin de evaluar el desempeño de XC3D frente a la influencia de la fuerza boyante. En todas las simulaciones se utiliza la malla M0. A diferencia de los apartados anteriores, en estas simulaciones no se impone ninguna condición adicional en el flujo con la intención de acelerar el paso al régimen turbulento, ya que estamos tratando con soluciones laminares.

Se comparan los perfiles de velocidad *streamwise* y de temperatura adimensional con las soluciones analíticas de Chen y Chung [Chen and Chung, 1996], dadas por las ecuaciones 2.25

- 2.28. Los mismos se encuentran en la forma adimensional descrita en el Capítulo 2. En las Figuras 4.4a y 4.4b, las soluciones analíticas se muestran con anillos negros; asimismo, se incluye el caso con $\text{Ra} = 0$ ($\Pi = 0$) como referencia (línea azul a trazos). Se aprecia una excelente concordancia entre las soluciones analíticas y las simulaciones DNS, tanto para flujo descendente ($\text{Ra} < 0$) como para flujo ascendente ($\text{Ra} > 0$). En consecuencia, la malla M0 (la opción computacionalmente más económica) reproduce con alta fidelidad las soluciones laminares de Chen y Chung.

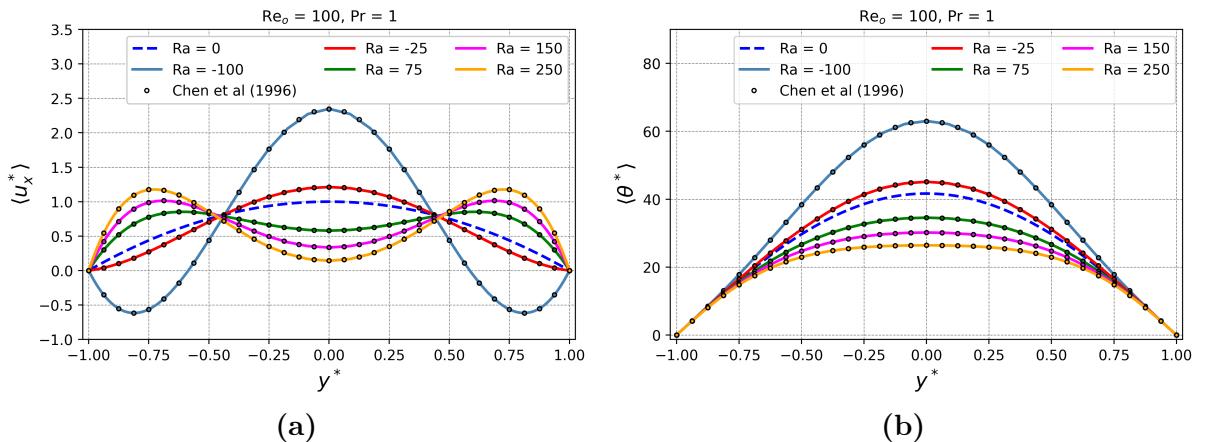


Figura 4.4: Perfiles de: (a) velocidad y (b) temperatura, considerando distintos casos en régimen laminar con convección mixta.

4.1.4. Situación IV. Canal turbulento en convección mixta con ΔT constante entre paredes.

Observación inicial: al momento de realizar las simulaciones para validar la implementación del término de fuerza boyante en XC3D, no se encontraban disponibles en la literatura datos de referencia. En particular, faltaban datos para canales rectangulares con flujo turbulento en régimen de convección mixta, ascendente o descendente, y con flujo de calor impuesto en las paredes. La alternativa disponible utilizada fue el trabajo de Guo et al. [Guo and Prasser, 2022] basado en un sistema físico conceptualmente diferente⁴ (paredes isotérmicas a distinta temperatura). Más recientemente, tomamos conocimiento del trabajo de Zhou et al. [Zhou et al., 2024] que presenta datos DNS con las mismas condiciones de borde empleadas en este trabajo.

⁴En ese sentido, las ecuaciones de gobierno empleadas en el trabajo de Guo et al. son ligeramente diferentes a nuestras ecuaciones de gobierno 2.8. Por ejemplo, una diferencia que destaca es que, al considerar paredes isotérmicas a distinta temperatura, el término fuente en la ecuación de energía es nulo.

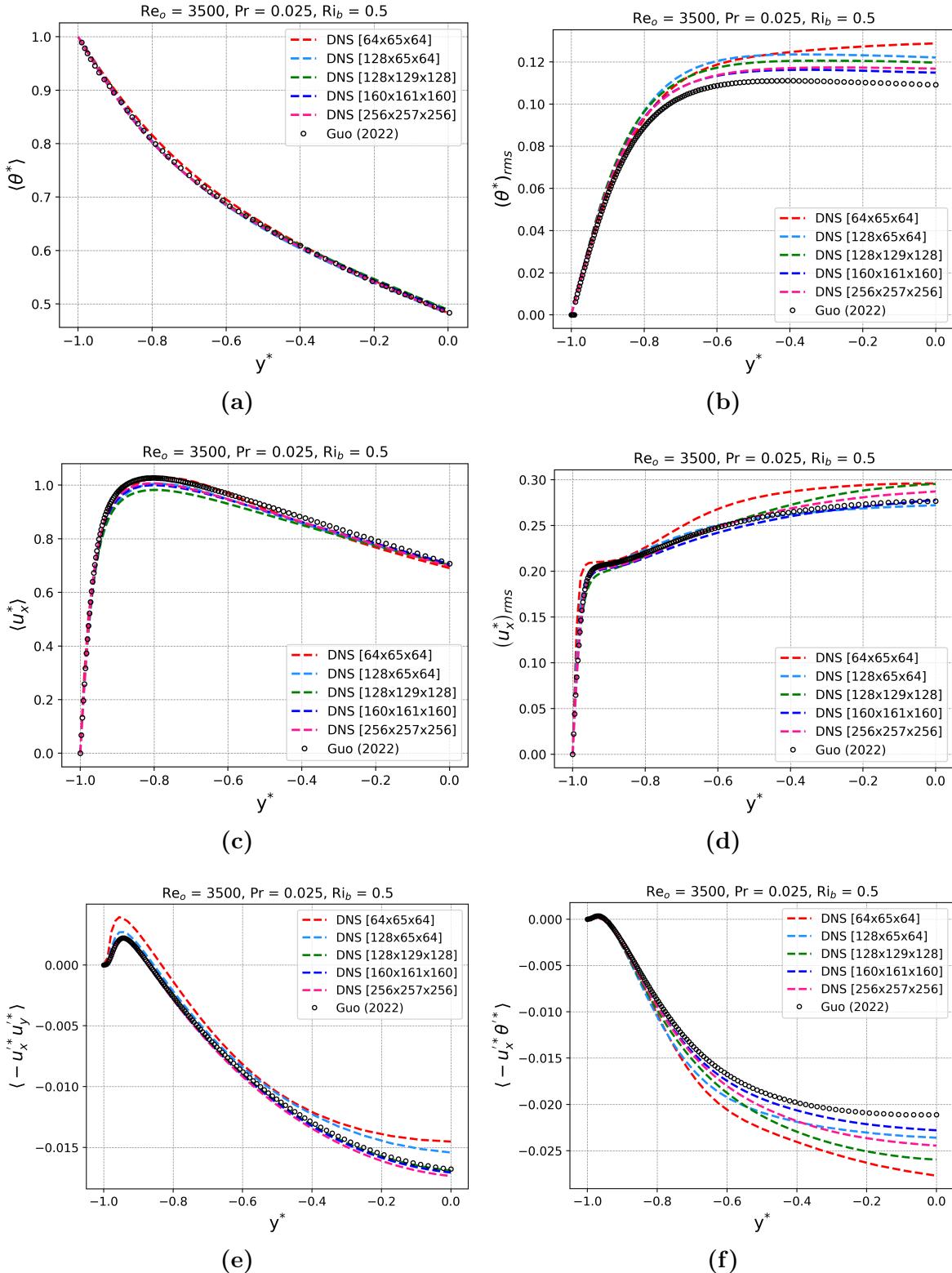


Figura 4.5: Perfiles de (a) temperatura adimensional media, (b) fluctuaciones RMS de la temperatura adimensional, (c) velocidad media *streamwise*, (d) fluctuaciones RMS de la velocidad *streamwise*, (e) componente *xy* del tensor de Reynolds, $\langle -u_x^+ u_y^+ \rangle$, y (f) flujo de calor turbulento en la dirección X, $\langle -u_x^+ \theta^+ \rangle$.

Cuando se tiene en cuenta la fuerza boyante, es decir $\Pi \neq 0$, el término asociado a ella en la ecuación de momento produce un acople entre las ecuaciones de conservación de momento

y energía (ecuaciones 2.8) y por lo tanto, la parte hidrodinámica del flujo influye en la parte térmica del mismo y viceversa.

Se realizan simulaciones empleando las mallas M0 - M4 para analizar su convergencia en malla. En este sentido, se consideran los números adimensionales $Re_o=3500$, $Pr=0.025$ y $Rib=0.5$ para tal fin. Las Figuras 4.5a - 4.5f exponen, respectivamente, los perfiles de las siguientes magnitudes⁵: temperatura adimensional, fluctuaciones de temperatura, velocidad *streamwise*, fluctuaciones de velocidad, componente *xy* del tensor de Reynolds y flujo de calor turbulento en la dirección *X*. Los datos de magnitudes propias se comparan con aquellos datos obtenidos por Guo *et al.* [Guo and Prasser, 2022]. Las mismas se encuentran expresadas en la forma adimensional: $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}/U_b$ y $\theta^* = \theta/\Delta T_{hc}$, siendo U_b la velocidad *bulk* y ΔT_{hc} la diferencia de temperatura entre las paredes.

Se observa que las Figuras 4.5a y 4.5c verifican una buena convergencia en malla de las magnitudes de primer orden, es decir, perfiles de velocidad media y temperatura media. Sin embargo, se puede identificar por simple observación, que las diferencias entre nuestras mallas M3 y M4 son, en algunas posiciones del canal, menores a las diferencias entre los datos de referencia y nuestros datos para M4. Esto sugiere que posteriores refinamientos no producirán soluciones más próximas a la referencia.

Adicionalmente, al comparar magnitudes de segundo orden asociadas a la temperatura adimensional, como la fluctuación de temperatura (Figura 4.5b) o el flujo de calor turbulento (Figura 4.5f), se puede destacar una clara diferencia cuantitativa entre nuestros datos para M4 y la referencia en algunas posiciones del semiancho, como por ejemplo en el centro del canal. Por otro lado, en las magnitudes de segundo orden asociadas a la velocidad como las fluctuaciones (Figura 4.5d) o la componente *xy* de la tensión de Reynolds (Figura 4.5e), la discrepancia cuantitativa entre los datos obtenidos con M4 y aquellos de referencia sigue siendo apreciable en el centro del canal; sin embargo, es menor que la registrada para la temperatura.

Se especula que los aspectos más relevantes para explicar las diferencias encontradas en los perfiles de las magnitudes de segundo orden, están asociados al tamaño del dominio simulado. Guo *et al.* utilizan un dominio ampliamente mayor ($L_x \times L_y \times L_z = 31.42 \times 2 \times 12.57$) que el empleado en este trabajo. Debido a la periodicidad en *x*, los puntos del plano medio $x = L_x/2$ están parcialmente influidos por los puntos en los planos $x = 0$ y $x = L_x$. Dicho de otra manera, estos puntos “fronterizos” podrían no encontrarse descorrelacionados. Este hecho no permite capturar con presición todas las escalas que presenta la solución del problema o hace que la solución numérica aún sea dependiente del tamaño del dominio simulado. Otra cuestión adicional que puede influir, es que Guo *et al.* emplean menor resolución (espaciado mayor) en las direcciones *X* y *Z*, e idéntico en la dirección *Y*: $(\Delta x^*, \Delta y_{\max}^*, \Delta z^*) = (0.061, 0.022, 0.024)$. Por lo tanto, luego de esta discusión y del análisis de los resultados presentados en las Figuras 4.5a - 4.5f se considera que las mallas propuestas, M2-M4, producen resultados con una precisión razonable para los objetivos buscados y permiten llevar adelante el trabajo con la capacidad de cálculo existente.

⁵Nótese que solo se representa un semiancho del canal, esto es, $-1 \leq y^* \leq 0$.

Elección de malla para simulaciones posteriores. En síntesis, los resultados de esta sección muestran que refinar de M2 a M3/M4 no aporta mejoras apreciables a la escala de las figuras. Dado que las magnitudes de interés⁶ se obtienen a partir de cantidades estadísticas de primer orden, y además, estas mantienen un buen acuerdo con las referencias, **se adopta la malla M2** para las simulaciones del Capítulo 5 por representar el mejor compromiso entre precisión y costo computacional.

4.2. Segunda Parte: OSMC

En esta segunda parte se exponen los resultados obtenidos con la herramienta OSMC, la cual genera autovalores y autofunciones basados en teoría de estabilidad lineal presentada en el Capítulo 2. La validación de la herramienta se realiza en dos etapas:

- 1. se valida la fiabilidad de los autovalores calculados;
- 2. se comparan autofunciones obtenidas con casos de referencia;

4.2.1. Autovalores

Basados en el proyecto integrador de Pablo Szuban [Szuban, 2023], se emplea la variación de la parte imaginaria del autovalor más inestable⁷, c_i , en función del número de onda en la dirección X , α , para validar los autovalores obtenidos con OSMC. La Figura 4.6 muestra $c_i(\alpha)$ para $Re_o = 322$ y $Re_o = 750$, con $\beta = 0$ y $Pr = 0.7$. Los valores de Ra se seleccionan de modo que $c_i = 0$ para algún α dentro del intervalo considerado: Ra = 32.65 para $Re_o = 322$ y Ra = 37.6 para $Re_o = 750$. Los resultados se comparan con los de Chen y Chung [Chen and Chung, 1996], observándose un muy buen acuerdo.

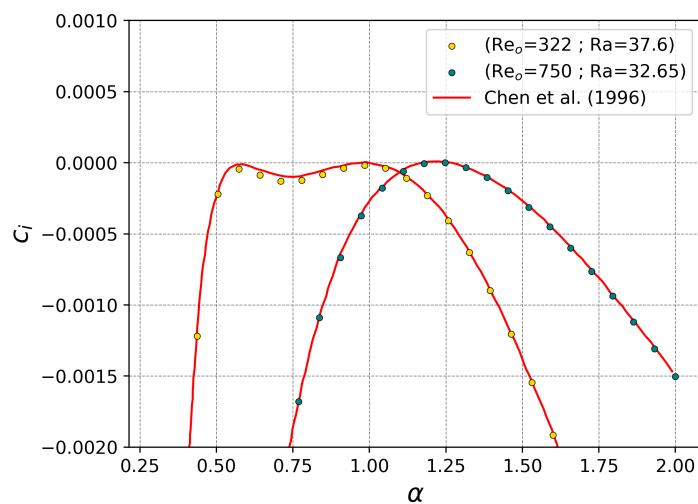


Figura 4.6: Variación de c_i con α para diferentes valores de Re_o con sus valores de Ra.

⁶Por ejemplo, el número de Nusselt y/o el factor de fricción de Darcy.

⁷Esto es: la parte imaginaria de la cota superior del espectro de autovalores calculado con OSMC para un determinado conjunto de parámetros $\{\alpha, \beta, Re_o, Pr, Ra\}$.

4.2.2. Autofunciones

Normalización. Sea $\{y_j\}_{j=1}^N$ la malla discreta en la dirección Y , las autofunciones discretas $\{\widehat{v}_x(y_j), \widehat{v}_y(y_j), \widehat{v}_z(y_j), \widehat{\theta}(y_j)\}_{j=1}^N$ se normalizan localizando el índice donde el módulo de \widehat{v}_x alcanza su valor máximo. Dicho índice se expresa de la siguiente forma:

$$j_\star = \arg \max_{1 \leq j \leq N} |\widehat{v}_x(y_j)|, \quad \max_{1 \leq j \leq N} |\widehat{v}_x(y_j)| = |\widehat{v}_x(y_{j_\star})|.$$

Luego, sea $u_\star = \widehat{v}_x(y_{j_\star}) \neq 0$, se define un factor de normalización $c \in \mathbb{C}$ de forma tal que $\operatorname{Re}[c \widehat{v}_x(y_{j_\star})] = 1$ y $\operatorname{Im}[c \widehat{v}_x(y_{j_\star})] = 0$. A partir de estas dos condiciones se llega a que c debe tener la forma:

$$c := \frac{\overline{u_\star}}{|u_\star|^2} = \frac{1}{u_\star}$$

donde (\cdot) indica complejo conjugado. Con el mismo c se escalan todas las autofunciones, para todo j , se tiene:

$$\widehat{\mathbf{v}}_{\text{norm}}(y_j) = c \widehat{\mathbf{v}}(y_j), \quad \widehat{\theta}_{\text{norm}}(y_j) = c \widehat{\theta}(y_j).$$

Nótese que si $u_\star = 0$, la normalización anterior no aplica. Esta normalización es la empleada por Zang y Krist en su trabajo [Zang and Krist, 1989] y es la que se utiliza por convención en la mayoría de la bibliografía.

En la Figura 4.7 se presentan las autofunciones correspondientes al autovalor más inestable asociado a los parámetros $\operatorname{Re}_o = 1125$, $\operatorname{Ra} = 2500$ y $\operatorname{Pr} = 0.7$. La Figura 4.7a expone la autofunción de la velocidad *streamwise* y de la temperatura para el caso de una onda 2D al considerar $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Por su parte, la Figura 4.7b presenta las autofunciones de las mismas magnitudes para una onda 3D ahora considerando $\alpha = 1$ y $\beta = 1$. Ambos casos se comparan con las autofunciones calculadas por Chen y Chung [Chen and Chung, 2003]. Debe aclararse que los autores emplean una normalización distinta a la definida más arriba: cada una de las autofunciones $\{\widehat{v}_x(y), \widehat{v}_y(y), \widehat{v}_z(y), \widehat{\theta}(y)\}$ se normalizan por separado⁸ de modo que el máximo de la parte real sea igual a uno y su parte imaginaria sea nula. Al considerar esto y comparar las autofunciones obtenidas a partir de OSMC, con aquellos obtenidos por Chen y Chung, es posible apreciar un excelente acuerdo.

⁸Es decir, para cada autofunción considerada, se calcula una constante compleja c diferente.

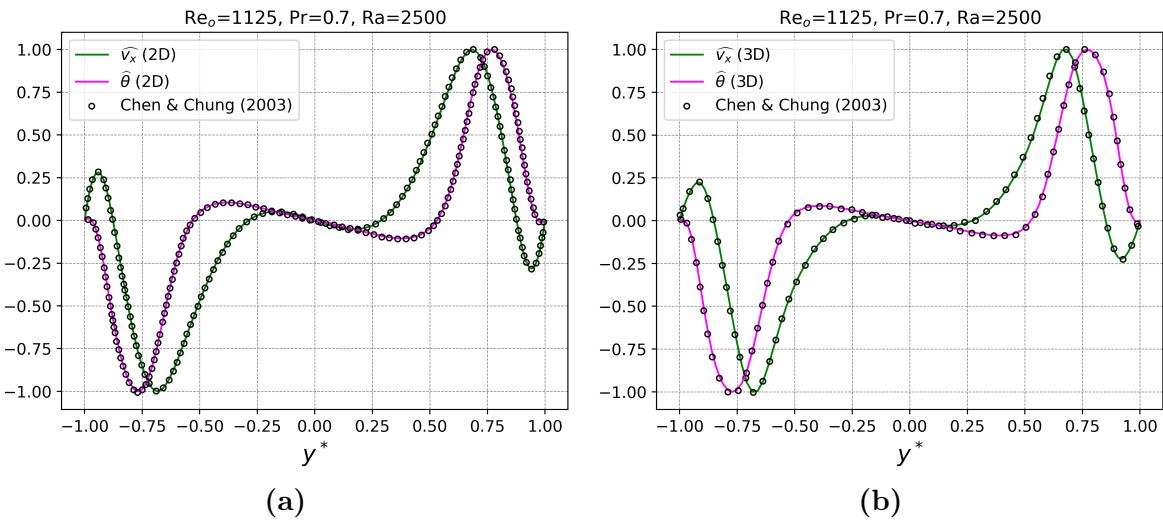


Figura 4.7: Parte real de las autofunciones asociadas al modo más inestable para $\text{Re}_o = 1125$, $\text{Ra} = 2500$ y $\text{Pr} = 0.7$; (a) Onda 2D con $(\alpha, \beta) = (1,0)$ y (b) Onda 3D con $(\alpha, \beta) = (1,1)$.

4.3. Análisis de Estabilidad Lineal versus DNS

Como se menciona en la Sección 2.4, el análisis de estabilidad lineal predice a través de un modelo matemático la evolución temporal de pequeñas perturbaciones que son impuestas al flujo base. En esta sección, se realizan simulaciones DNS para un canal de placas paralelas, con flujo de calor constante en las paredes, cuya condición inicial se construye utilizando el autovalor más inestable y su autofunción asociada. En ese sentido, se pretende comparar las predicciones teóricas con los resultados arrojados por simulaciones realizadas con XC3D. Esto se realiza en escalas de tiempo donde las perturbaciones se mantienen relativamente acotadas (lo que hace válida a la aproximación del modelo lineal). Las condiciones iniciales de la simulación se construyen como la suma del flujo laminar, ecuaciones 2.25 - 2.28, y las perturbaciones 2.41 - 2.43.

Se comparan dos casos, denominados⁹ Rama Izquierda (RI) y Rama Derecha (RD), que corresponden a casos físicos donde se incrementa y se disminuye la amplitud de la perturbación inicial, respectivamente. Esto, matemáticamente, equivale a una parte imaginaria negativa (RI) y positiva (RD). Los números adimensionales empleados corresponden a $\text{Re}_o = 750$, $\text{Pr} = 0.7$ y $\text{Ra} = 65$. Los parámetros de simulación de ambos casos se exponen en la Tabla 4.3. Obsérvese que se utilizan perturbaciones compuestas únicamente de ondas bidimensionales. Las Figuras 4.8a (RD) y 4.8b (RI) muestran, de izquierda a derecha: (i) el espectro de autovalores (puntos celestes) con el autovalor seleccionado (punto rojo); (ii) las autofunciones de las componentes de la velocidad; y (iii) la autofunción de la temperatura. Las simulaciones DNS realizadas se corren un total de 20 unidades temporales.

⁹Nótese que Rama Izquierda y Rama Derecha hacen referencia a las “ramas” o “brazos” del espectro de autovalores considerado (véase Figura 4.8a y/o 4.8b).

Caso	$L_x \times L_y \times L_z$	$N_x \times N_y \times N_z$	Δt^*	α	β	A_{2D}	A_{3D}	c_{2D}
RI	$2\pi/\alpha \times 2 \times 2\pi$	$160 \times 161 \times 160$	0.001	1.22	0	0.2%	0%	$0.656 - 0.0237 j$
RD	$2\pi/\alpha \times 2 \times 2\pi$	$160 \times 161 \times 160$	0.001	1.22	0	0.2%	0%	$1.239 + 0.042 j$

Tabla 4.3: Parámetros de simulación de los dos casos elegidos.

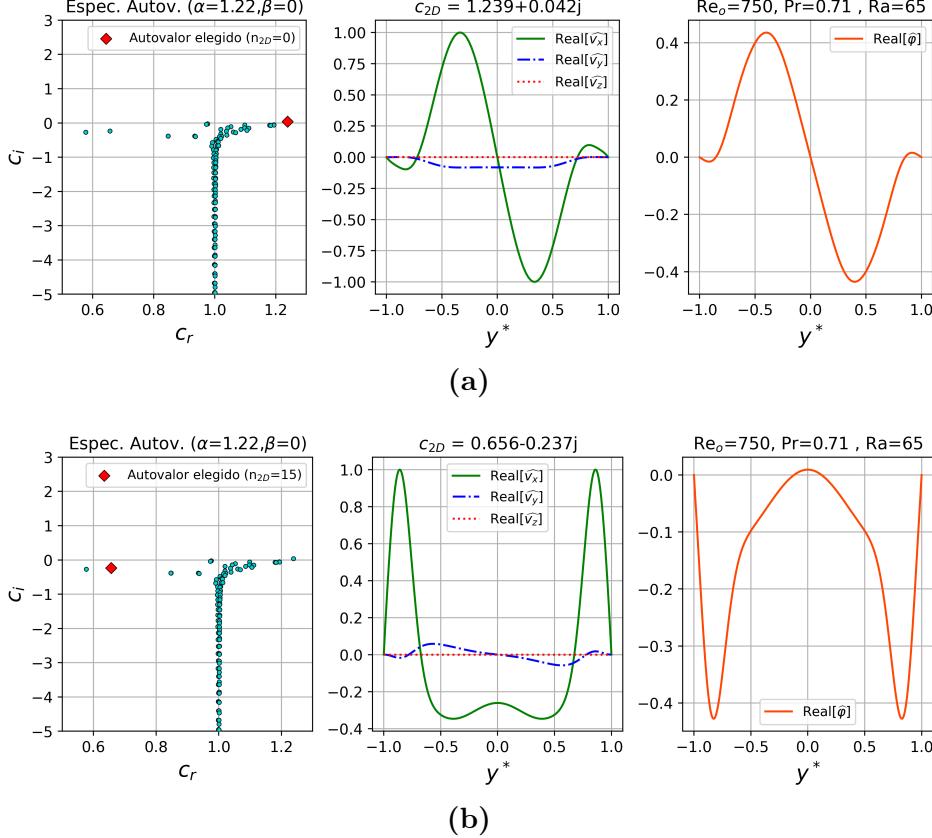


Figura 4.8: De izquierda a derecha: (i) espectro de autovalores (puntos celestes) con el autovalor seleccionado (punto rojo); (ii) autofunciones de las componentes de la velocidad; (iii) autofunción asociada a la temperatura. (a) Caso RD y (b) Caso RI.

Para comprobar la predicción de la teoría de estabilidad lineal con aquella producida por las herramientas numéricas, se emplea la evolución temporal de la energía cinética turbulenta (TKE) y de la varianza de la temperatura. En XC3D, dichas magnitudes corresponden al promedio integral en y^* de las correlaciones $(\langle u_x^{*'} u_x^{*'} \rangle + \langle u_y^{*'} u_y^{*'} \rangle + \langle u_z^{*'} u_z^{*'} \rangle)/2$ y $\langle \theta^{*'} \theta^{*'} \rangle$. En teoría de estabilidad lineal dichas cantidades se aproximan utilizando las autofunciones $\{\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z, \hat{\theta}\}$ y las expresiones tipo 2.38 para obtener:

$$\text{TKE} \simeq \frac{1}{2} (A_{2D})^2 e^{2\alpha c_i t^*} \int [(\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z) \cdot (\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z)] dy^* , \quad (4.1)$$

$$\int \langle \theta^{*'} \theta^{*'} \rangle dy^* \simeq \frac{1}{2} (A_{2D})^2 e^{2\alpha c_i t^*} \int (\hat{\theta})^2 dy^* . \quad (4.2)$$

En estas expresiones, si $c_i < 0$, las cantidades decaen y el flujo es estable. Pero por el contrario,

si $c_i > 0$, las mismas crecen y el flujo base evoluciona en el tiempo, dando posiblemente, origen a la transición. Las afirmaciones anteriores son ciertas siempre que α sea positivo.

Las Figuras 4.9a y 4.9b muestran la evolución temporal de la TKE y de la varianza de la temperatura para el caso RD. Se observa un muy buen acuerdo entre la predicción teórica y los resultados obtenidos a partir de simulaciones DNS con las herramientas numéricas utilizadas. En este caso se aprecia que la perturbación introducida logra inestabilizar el flujo (pues $c_i > 0$) y que si bien en una etapa temprana el acuerdo entre ambas metodologías coincide, si el flujo transiciona a un régimen turbulento, la consistencia entre ambos debería tender a desaparecer.

De forma completamente análoga, las Figuras 4.10a y 4.10b muestran la evolución temporal de la TKE y de la varianza de la temperatura para el caso RI. En este caso, dado que $c_i < 0$, el análisis de estabilidad lineal predice que la perturbación impuesta tenderá a decaer y el flujo no se inestabilizará. Esta predicción está en completa consistencia con la simulación DNS realizada. Esto nos permite confirmar que la implementación de la condición inicial perturbada en XC3D es correcta.

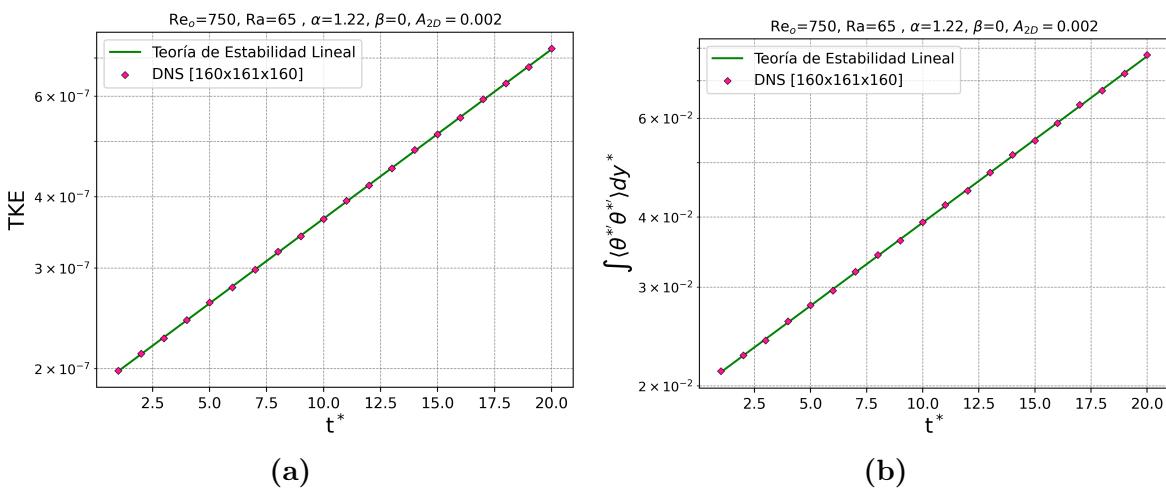


Figura 4.9: Evolución temporal de la TKE y de la varianza de la temperatura del caso RD.

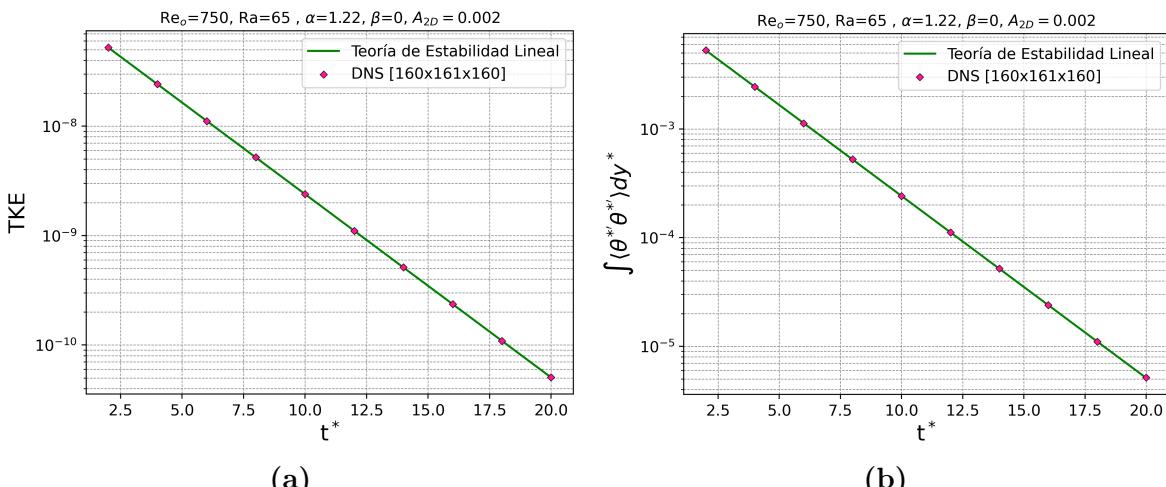


Figura 4.10: Evolución temporal de la TKE y de la varianza de la temperatura del caso RI.

Finalmente, se puede aseverar que la herramienta OSMC desarrollada por Szuban [Szuban, 2023] es adecuada para imponer perturbaciones basadas en la teoría de estabilidad lineal. Por su parte, la herramienta numérica Xcompact3D produce resultados que se encuentran en consistencia con aquellos predichos por la teoría antes mencionada. Esto permite realizar el estudio de la transición temporal laminar-turbulenta que se lleva a cabo en el Capítulo 6.

Capítulo 5

Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollados

El propósito de este capítulo es analizar, vía simulaciones numéricas, el flujo turbulento completamente desarrollado y asistido por fuerzas boyantes, en un canal vertical de placas paralelas. Para esto se utilizaron simulaciones DNS que cubren un extenso espectro de números de Reynolds, Richardson y Prandtl, lo que permite examinar la evolución desde convección forzada hasta convección natural. Tras describir los casos y las variables adimensionales de referencia, se presentan (i) magnitudes estadísticas de primer y segundo orden, (ii) la influencia del número de Prandtl sobre las subcapas viscosa y térmica, (iii) el número de Nusselt y (iv) el factor de fricción de Darcy.

En primer lugar, se analizan cantidades de primer y segundo orden, entre ellas los perfiles de velocidad y temperatura. Se observa que la fuerza boyante transforma los perfiles de velocidad hacia una morfología tipo “M” y desplaza el máximo de $\langle u_x^* \rangle$ hacia la pared. Luego, para flujos con $0 < \text{Ri}_b < 1$, los perfiles de temperatura adimensional se ubican por encima del caso puramente forzado y para $\text{Ri}_b > 1$, la mezcla inducida por la flotación “aplana” el perfil medio adimensional de temperatura. En cuanto al número de Prandtl, su efecto se refleja en la ley de pared de temperatura: con $\text{Pr} = 0.071$ se verifica $\langle \theta^* \rangle \simeq \text{Pr}$ y^+ hasta $y^+ \approx 30$, mientras que con $\text{Pr} = 0.71$ concluye en $y^+ \approx 7$, lo que evidencia la influencia de Pr en la capa conductiva.

En segundo lugar, se abordan magnitudes de interés en ingeniería: el número de Nusselt y el factor de fricción de Darcy. Existe un intervalo $10^{-6} \lesssim \text{Bo} \lesssim 3 \times 10^{-5}$ (donde Bo es el número de boyancia [Jackson et al., 1989]) en el que Nu se reduce respecto al caso puramente forzado; fuera de éste, la transferencia térmica se recupera y supera a la correspondiente de la convección forzada. Esta caída coincide con una disminución en la producción de turbulencia cerca de la pared. Por último, debido a la asistencia de la boyancia, el gradiente de velocidad en la pared aumenta y eleva el factor de fricción de Darcy. Además, se propone una correlación del mismo en función del número de boyancia (Bo) y se observa que reproduce con buena fidelidad tanto los datos simulados como los de referencia.

5.1. Casos simulados

Los resultados de las simulaciones realizadas en este capítulo corresponden a un flujo completamente desarrollado tanto térmica como hidrodinámicamente. Se emplearon $Re_o=2100, 3150, 4278, 5000$; $Pr=0.071, 0.71$; y valores de Richardson en el rango $0.04 \lesssim Ri_b \lesssim 106$. Para una simple conceptualización física, la variación de estos números adimensionales puede interpretarse de la siguiente manera: un aumento del número de Reynolds corresponde a un aumento del caudal; un incremento del número de Prandtl señala una reducción de la conductividad térmica; mientras que un mayor número de Richardson denota un crecimiento en el flujo de calor.

A modo de visualizar el tipo de simulaciones realizadas en este trabajo, en la Figura 5.1 se expone un “mapa” del régimen de flujo en función del número de Reynolds *bulk*¹ y el número de Richardson *bulk*². Esta figura, que también muestra las simulaciones realizadas en este trabajo, supone que la convección natural no afecta la turbulencia del flujo y por tanto es indicativa, a priori, del tipo de flujos que caracterizarán nuestras simulaciones. Aceptando provisionalmente que la fuerza boyante no afecta la turbulencia del flujo, y tomando como referencia el diagrama de Moody [White, 2011], se presenta lo siguiente:

- para valores de $Re_b^D < 2000$ el régimen es laminar,
- si $2000 \lesssim Re_b^D \lesssim 4000$ el régimen es de transición,
- y si $Re_b^D > 4000$ el régimen es turbulento.

Por otra parte, el fenómeno de convección es [Incropera et al., 2006, Cengel and Ghajar, 2015]:

- forzado si $Ri_b < 0.1$,
- mixto si $0.1 < Ri_b < 10$,
- y natural si $Ri_b > 10$.

Las simulaciones consideradas operan en régimen turbulento, con énfasis en convección mixta, incorporando casos donde predomina la convección forzada y otras donde predomina la convección natural. Este rango de parámetros constituye el marco para el análisis y la discusión del problema en las secciones siguientes.

¹Número de Reynolds basado en la velocidad *bulk* y el diámetro hidráulico: $Re_b^D = 8/3 Re_o$

²Número de Richardson basado en la velocidad *bulk* y el ancho del canal: $Ri_b = 9/2 Ri_o$

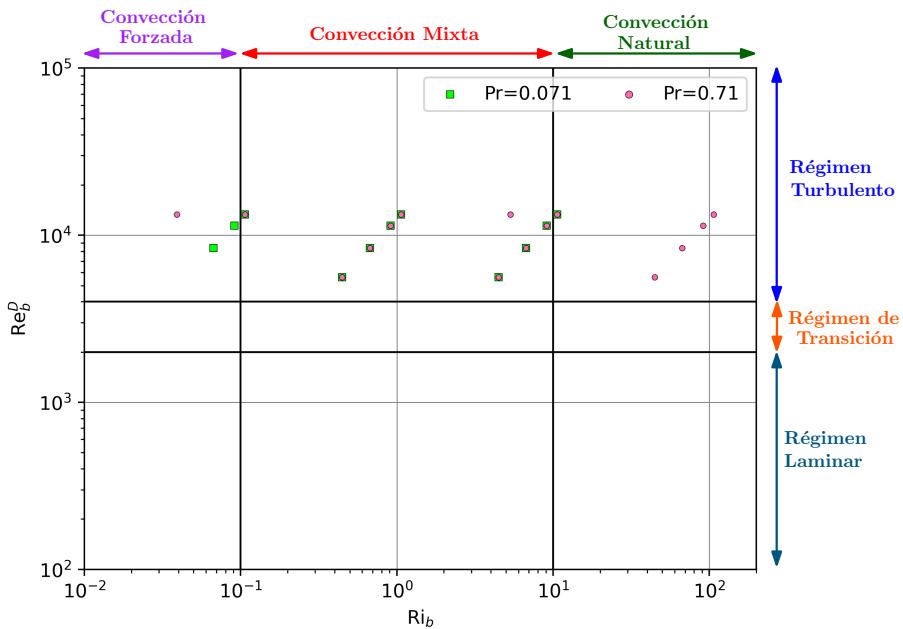


Figura 5.1: Mapa de regímenes en el plano $Re_b^D - Ri_b$. Se señalan las zonas laminar, de transición y turbulenta, así como los dominios de convección forzada, mixta y natural.

5.2. Magnitudes de Primer y Segundo Orden

En esta sección se analiza la influencia de la fuerza boyante en las magnitudes estadísticas de primer y segundo orden. Para tal fin y por simplicidad, se considera únicamente el caso $Re_o=5000$ y $Pr=0.71$. Si el lector lo requiere, puede ver el Apéndice C, donde se encuentran disponibles los perfiles de dichas cantidades para el resto de números adimensionales considerados.

Como se menciona anteriormente, un aumento de Ri_b (o un aumento de la fuerza boyante) denota un crecimiento en el flujo de calor. Esto puede interpretarse como un incremento de la energía térmica que se le entrega al sistema a través de las paredes cuando el flujo es ascendente³.

5.2.1. Perfiles de velocidad y de temperatura

En la Figura 5.2a se presentan los perfiles medios de velocidad *streamwise*⁴ para distintos números de Richardson. En dichos perfiles pueden distinguirse con claridad los tres regímenes de convección. Conforme se intensifica la fuerza boyante, las curvas adoptan una forma en “M”, en concordancia con lo reportado por otros autores [You et al., 2003, Zhou et al., 2024]. A diferencia de la convección puramente forzada, el máximo de velocidad deja de ubicarse en la línea central del canal. Al aumentar Ri_b , ese máximo migra hacia la pared y el perfil desarrolla dos picos locales, en lugar del único pico característico del régimen forzado [Carr et al., 1973,

³También es equivalente a quitarle energía térmica (enfriar las paredes) cuando la dirección del flujo es descendente.

⁴Es decir, en la dirección de la corriente.

Steiner, 1971, Zhou et al., 2024]. Este comportamiento puede interpretarse cualitativamente del siguiente modo: en las proximidades de la pared el fluido se encuentra a mayor temperatura lo que implica menor densidad; en consecuencia, la fuerza boyante acelera el flujo en esa región y, por conservación de masa, el fluido ubicado en la zona central experimenta una desaceleración.

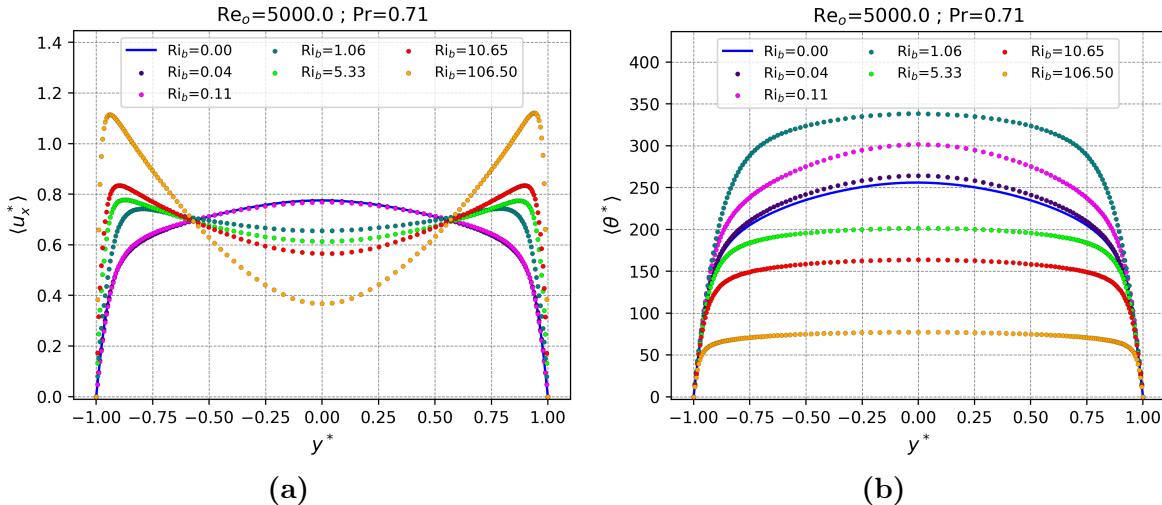


Figura 5.2: Perfiles medios adimensionales de (a) velocidad y (b) temperatura, para varios Ri_b .

Por otra parte, la Figura 5.2b presenta los perfiles medios de temperatura adimensional. A diferencia de los perfiles de velocidad, estos no exhiben la configuración en “M” pero sí un comportamiento no monótono con el incremento del Ri_b [You et al., 2003, Steiner, 1971]. Los casos pueden clasificarse, en primera instancia, en dos conjuntos:

- (I) valores de Ri_b comprendidos entre 0.04 y 1.06;
- (II) valores de Ri_b entre 5.33 y 106.5.

Los mismos exhiben comportamientos físicos claramente diferenciados. Esta distinción se analizará en detalle a lo largo de la presente sección.

En el primer conjunto se aprecia un aumento del perfil adimensional respecto al caso de convección forzada, lo que equivale a decir que aunque se aumente el flujo de calor, la diferencia de temperaturas entre el centro del canal y la pared se incrementa, sugiriendo una disminución de la eficiencia en la transferencia de calor. Cuando la fuerza boyante se intensifica aún más (conjunto II) este efecto se revierte y la temperatura adimensional disminuye, lo que indica que un aumento del Ri_b produce una menor diferencia entre la temperatura en el centro del canal y la temperatura en la pared. Asimismo, en este segundo conjunto, los perfiles presentan una forma más “achatada” en el seno del canal respecto al primer conjunto. Esto puede interpretarse cualitativamente a partir de los perfiles de velocidad: una mayor diferencia de velocidades entre la región próxima a la pared y el centro del canal favorece la mezcla del fluido y, por consiguiente, conduce a una distribución térmica más homogénea [Aicher and Martin, 1997].

5.2.2. Valores RMS de temperatura y velocidad

Las Figuras 5.3a y 5.3b muestran los perfiles de las fluctuaciones de velocidad *streamwise* y temperatura adimensional, respectivamente. Partiendo del caso puramente forzado, el incremento de la fuerza boyante provoca evoluciones distintas en los conjuntos I y II considerados anteriormente. En el primero, se observa una disminución (incremento) de las fluctuaciones de velocidad (temperatura) seguida de una ligera recuperación (leve descenso). En el segundo, las fluctuaciones de velocidad crecen de manera sostenida a medida que la fuerza boyante se intensifica, mientras que las de temperatura tienden a reducirse. Tendencias análogas han sido descritas por otros autores [You et al., 2003, Carr et al., 1973].

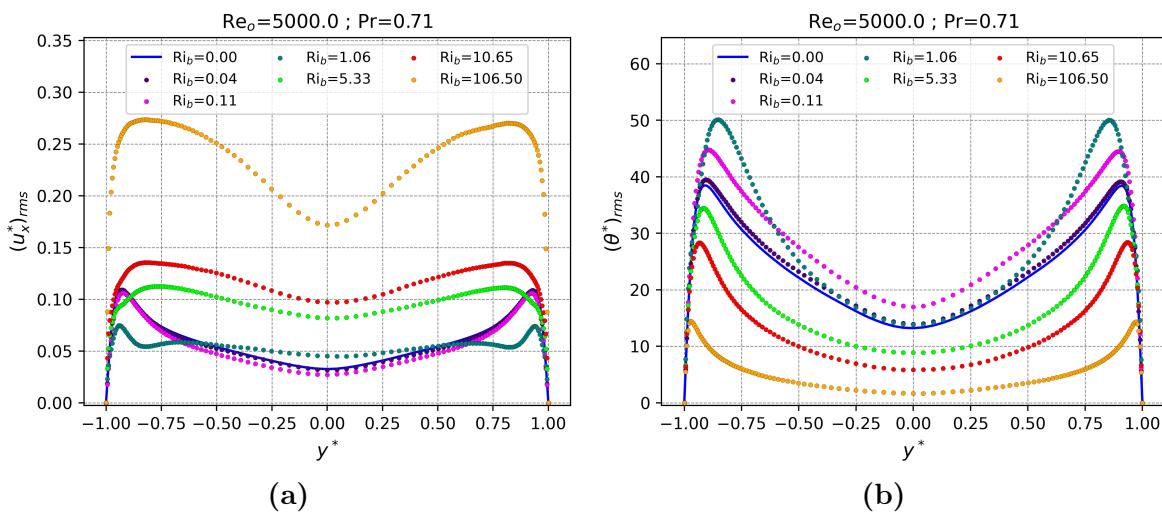


Figura 5.3: Fluctuaciones RMS: (a) velocidad en la dirección de la corriente y (b) temperatura adimensional.

Como se aprecia en la Figura 5.3a, la aparición de la fuerza boyante de baja intensidad relativa, por ejemplo, en el caso con $Ri_b = 1.06$, produce primero una leve estabilización del flujo, evidenciada por una disminución de aproximadamente un 40 % en los máximos de $(u_x^*)_{rms}$ próximos a las paredes. En contraste, las fluctuaciones de temperatura adimensional aumentan y sus máximos se desplazan hacia el centro del canal debido al incremento del flujo de calor. Para $Ri_b = 5.33$ la fuerza boyante adquiere mayor preponderancia y las fluctuaciones de velocidad crecen en todo el ancho del canal; por ejemplo, en el caso de $Ri_b = 10.65$ el valor en el centro es aproximadamente un 70 % mayor respecto al caso con $Ri_b = 1.06$. Este incremento de la agitación dinámica redistribuye las fluctuaciones de temperatura, que disminuyen en magnitud respecto al caso de convección forzada (Figura 5.3b).

5.2.3. Flujos turbulentos de calor

En la Figura 5.4a se expone el perfil de la correlación $\langle u_x' \theta' \rangle$. Esta cantidad corresponde al flujo de calor turbulento *streamwise* que surge a raíz del desarrollo de la ecuación de conservación de energía promediada (véase Apéndice A), y puede interpretarse como el calor transportado por las estructuras producidas por el flujo turbulento.

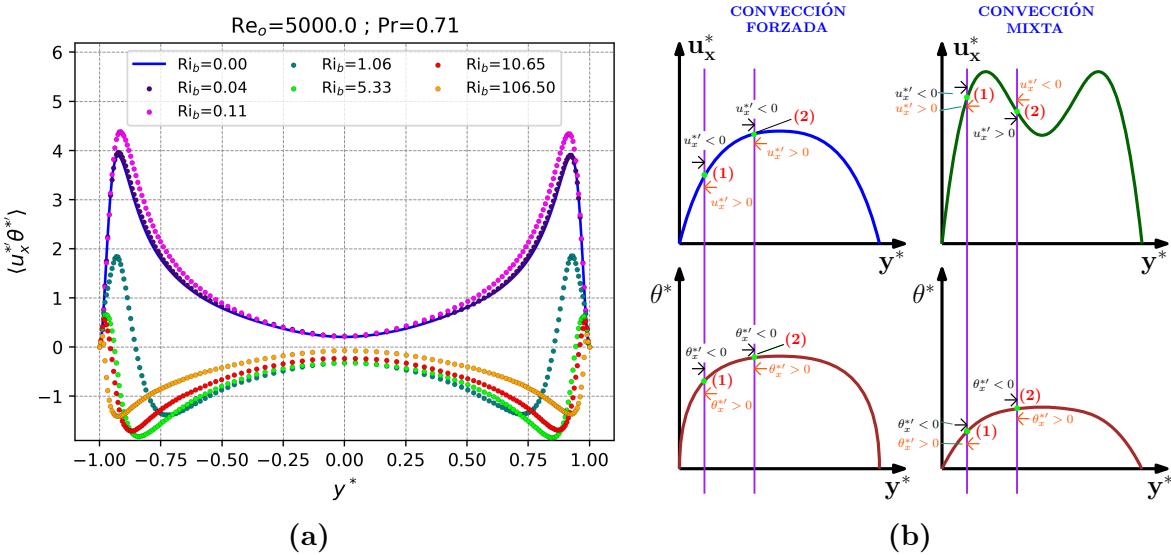


Figura 5.4: (a) Flujo de calor turbulento en la dirección de la corriente. (b) Esquema de perfiles de temperatura y velocidad para convección forzada y mixta. Aquí los desplazamientos dy^* hacia la izquierda (derecha) están representados con flechas anaranjadas (negras).

En el seno del canal se aprecia una diferencia marcada (signo del flujo de calor turbulento) entre el caso forzado y aquellos con fuerza boyante relativamente débil ($Ri_b=0.04, 0.11$; signo positivo), respecto al resto de casos (signo negativo). Esta disparidad se puede entender cualitativamente a través de los perfiles de u_x^* y θ^* . Para ello, en la Figura 5.4b se muestran los perfiles esquemáticos de ambas magnitudes para los régimenes de convección forzada y mixta:

- **Cerca de la pared.** Analizando el caso forzado, supóngase que una partícula de fluido próxima a la pared se desplaza un diferencial dy^* a la derecha debido a una fluctuación ($u_y^{*'} > 0$) y arriba al **Punto (1)**. Entonces, en dicho punto, se produce una fluctuación negativa en la velocidad *streamwise* ($u_x^{*'} < 0$) y la partícula se traslada de una zona más fría a una más caliente, y por lo tanto, experimenta una fluctuación negativa en su temperatura adimensional ($\theta_x^{*'} < 0$). Esto se traduce en una correlación positiva $\langle u_x^{*'} \theta_x^{*'} \rangle > 0$.

Por otro lado, si la partícula de fluido llega al **Punto (1)** al desplazarse un diferencial dy^* a la izquierda ($u_y^{*'} < 0$), se genera una fluctuación positiva en la velocidad *streamwise* ($u_x^{*'} > 0$) y la misma se desplaza de una región caliente a una más fría. En consecuencia, $\theta_x^{*'} < 0$ es positiva y se produce nuevamente una correlación positiva.

La situación es completamente análoga para el caso de convección mixta.

- **Cerca del centro del canal.** En el caso de convección forzada la situación es idéntica a la encontrada cerca de la pared. Por lo cual, en el caso forzado se tiene una correlación positiva global que es consistente con lo que se observa en la Figura 5.4a.

Sin embargo, si uno realiza el mismo análisis para el caso de convección mixta, ocurre lo contrario. En otras palabras, debido a una fluctuación $u_y^{*'} > 0$ ($u_y^{*'} < 0$) ocurre un

desplazamiento dy^* a la derecha (izquierda), la partícula arriba al **Punto (2)**. Entonces, se produce una fluctuación positiva (negativa) de la velocidad *streamwise* y la partícula se traslada de una región más fría (caliente) a una más caliente (fría). Esto da como resultado una fluctuación negativa de la temperatura adimensional en ambas situaciones y por lo tanto, en el seno del canal, la correlación $\langle u_x^{*'} \theta^{*'} \rangle$ es negativa en consonancia con lo observado en los perfiles.

Del análisis anterior, puede afirmarse que la disparidad entre los conjuntos **I** y **II** en la magnitud analizada se debe al cambio de concavidad del perfil de velocidad en el seno del canal. Esto último es inducido por el aumento de la fuerza boyante.

Adicionalmente, es importante mencionar que esta cantidad, el flujo de calor turbulento *streamwise*, actúa como un término de producción en la ecuación de la energía cinética turbulenta y contribuye a su aumento cuando es negativo (véase Apéndice A).

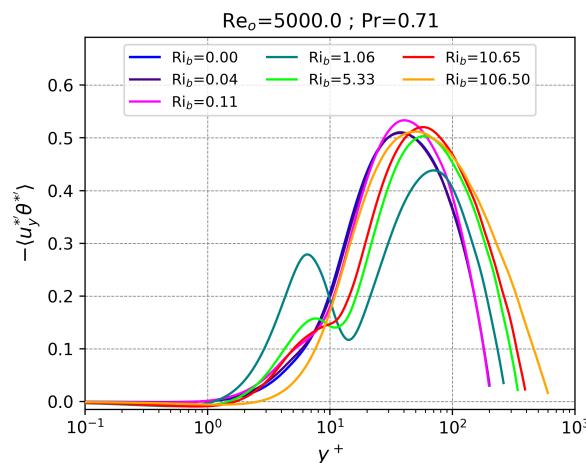


Figura 5.5: Perfil del flujo de calor turbulento en la dirección normal a la pared donde la abscisa se encuentra expresada en unidades de pared (*wall units*).

Por último, en la Figura 5.5 se expone el perfil del flujo de calor turbulento en la dirección normal a la pared: $-\langle u_y^{*'} \theta^{*'} \rangle$. Nótese que la abscisa de este gráfico se encuentra en unidades de pared para visualizar claramente el comportamiento cercano a la misma. Considerando nuevamente el conjunto **I** ($Ri_b=0.04, 0.11, 1.06$), se observa que los máximos tienden a desplazarse levemente hacia el seno del canal. Un comportamiento similar se observa en [You et al., 2003]. Por otro lado, en el conjunto **II**, los máximos tienden a desplazarse hacia la pared. Asimismo, muy próximo a la pared, para los casos con $Ri_b=0, 0.04, 0.11, 10.65, 106.5$ el perfil se comporta de forma monótona creciente, mientras que en el resto de casos ($Ri_b=1.06, 5.33$) se observa un máximo y mínimo local. Se especula que estos máximos y mínimos locales, que están dentro y cerca del límite de la capa conductiva, están asociados a la distancia a la cual ocurren los picos de $\langle u_y^{*'} u_y^{*'} \rangle$ y $\langle \theta^{*'} \theta^{*'} \rangle$, es decir, a las intensidades de las fluctuaciones de las dos variables involucradas.

5.3. Comparación entre casos de distinto Prandtl

En esta sección se comparan los casos con los siguientes parámetros: $\text{Re}_o=5000$; $\text{Pr}=0.071, 0.71$; $\text{Ri}_b=0.11, 1.06, 10.65$. La Figura 5.6 muestra los perfiles de velocidad media expresados en unidades de pared (*wall units*). Según Pope [Pope, 2001], en la subcapa viscosa ($y^+ < 5$), la velocidad puede aproximarse por

$$\langle u_x^+ \rangle \simeq y^+ + \mathcal{O}[(y^+)^2].$$

Esta ley, conocida como ley de pared (*Wall-Law*), se indica en la Figura 5.6a con la línea negra de referencia. En dicha región las tensiones de Reynolds son despreciables frente a las tensiones viscosas, de modo que el perfil depende casi exclusivamente de la distancia normalizada a la pared. Como puede verse, todos los casos, independientemente del número de Prandtl y de la fuerza boyante, siguen de cerca esta aproximación lineal, lo que confirma la validez de la ley en la subcapa viscosa.

Por otra parte, en la región logarítmica (*log-law region*), en condiciones de convección forzada, la velocidad media en la dirección de la corriente se alinea perfectamente con la ley logarítmica clásica [Kawamura et al., 2000] como se observa en la Figura 5.6b. Nótese, además, que el caso con $\text{Pr}=0.71$ y $\text{Ri}_b=0.11$ (fuerza boyante de baja intensidad relativa), se encuentra también en buen acuerdo con la ley logarítmica. Sin embargo, esta ley deja de ser aplicable cuando la flotabilidad es significativa [Zhou et al., 2024].

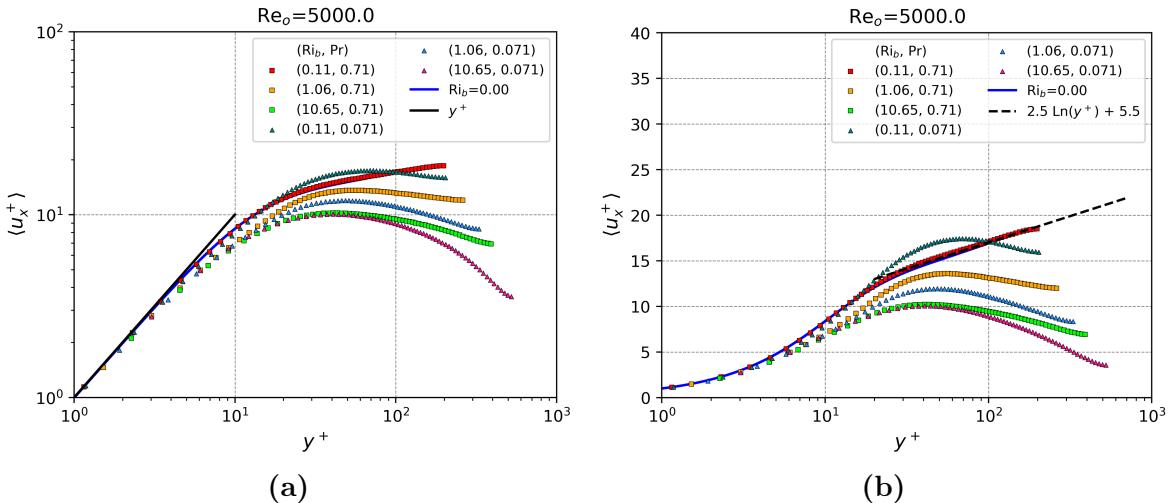


Figura 5.6: Perfiles medios de velocidad en unidades de pared para $\text{Re}_o=5000$ y $\text{Pr}=0.071, 0.71$, y distintos valores de Ri_b . (a) *Wall-Law*. (b) *Log-Law*.

La Figura 5.7 muestra los perfiles de temperatura adimensional media en unidades de pared. Cerca de la pared, la variación de la temperatura puede aproximarse por la relación lineal [Kawamura et al., 1998]

$$\langle \theta^* \rangle \simeq \text{Pr} y^+,$$

representada en la Figura 5.7a con líneas negras. Los resultados confirman esta ley para ambos

números de Prandtl, aunque con distintos alcances: para el caso de $\text{Pr}=0.071$ la validez se extiende hasta $y^+ \approx 30$, en concordancia con el trabajo de Zhou et al. [Zhou et al., 2024]. Sin embargo, para $\text{Pr}=0.71$ se reduce a $y^+ \approx 7$. La diferencia recae en que, en fluidos con mayor difusividad térmica (Prandtl más bajo), el transporte de calor por conducción domina durante una mayor distancia normalizada desde la pared, retrasando la aparición del régimen convectivo predominante [Abregu et al., 2023].

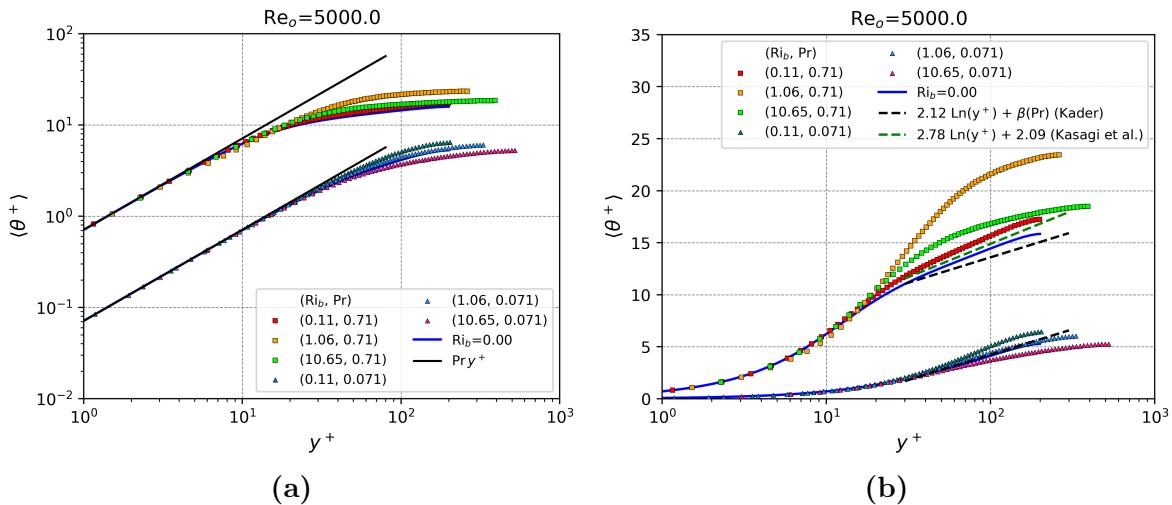


Figura 5.7: Perfiles medios de temperatura en unidades de pared para $\text{Re}_o=5000$ y $\text{Pr}=0.071$, 0.71, y distintos valores de Ri_b . (a) Wall-Law. (b) Log-Law.

En la región logarítmica, la ley de pared para la temperatura propuesta por Kader [Kader, 1981] puede escribirse, de manera genérica, como

$$\langle\theta^*\rangle \simeq A \ln(y^+) + \beta(\text{Pr}),$$

donde A es la pendiente ($A \simeq 2.12$) y β es una constante aditiva (dependiente de Pr). En la Figura 5.7b (línea a trazos negra) se observa que, para $\text{Pr} = 0.071$ ($\beta = -5.52$), hay un buen acuerdo tanto para el caso de convección forzada como para el correspondiente a $\text{Ri}_b = 1.06$, con validez en el rango $30 < y^+ < 200$. En cambio, para $\text{Pr} = 0.71$, la formulación de Kader ($\beta = 3.83$) presenta discrepancias tanto en convección forzada como en los casos de convección mixta.

Adicionalmente, se incluye la ley logarítmica de Kasagi et al. [Kasagi et al., 1992] (línea a trazos verde en la Figura 5.7b), que reproduce con mayor fidelidad el comportamiento del caso de convección forzada. En términos generales, puede apreciarse visualmente que, para cierto intervalo $a_{\min} < y^+ < a_{\max}$ con $y^+ > 30$ y $a_{\min}, a_{\max} \in [30, 300]$, cada caso (considerado de manera individual) admite una descripción de tipo logarítmico en ese subrango, con pendiente y ordenada al origen determinadas mediante ajuste de los datos. Este aspecto se documenta aquí como observación y se considera materia de trabajo futuro.

5.4. Número de Nusselt

Desde una perspectiva ingenieril, el número de Nusselt (Nu) es un indicador clave de la eficiencia de la transferencia de calor. Su definición se presenta en la ecuación 5.1, donde $\langle \theta_b \rangle$ es la temperatura *bulk* (ecuación 5.2).

$$\text{Nu} = \frac{hL}{k} = \frac{2d}{k} \frac{q''_w}{\langle \theta_b \rangle} = \frac{4}{3} \frac{\text{Re}_o \text{Pr}}{\langle \theta_b^* \rangle} \quad (5.1)$$

$$\langle \theta_b \rangle = \frac{\int_{-d}^{+d} \langle u_x \theta \rangle dy}{\int_{-d}^{+d} \langle u_x \rangle dy} = \frac{\int_{-d}^{+d} \langle u_x \theta \rangle}{2d U_b} \quad (5.2)$$

La Figura 5.8a muestra los valores de Nu obtenidos en función del número de boyancia Bo (ecuación 5.3), que cuantifica la relación entre las fuerzas boyantes y la fuerza impulsora de la convección forzada. Estos resultados se comparan con la correlación de Jackson et al. [Jackson et al., 1989] (ecuación 5.4). Los valores de Nu se normalizan con el valor correspondiente a convección forzada pura, Nu_{fc} , evaluado mediante la correlación de Dittus-Boelter [Incropera et al., 2006]. También se añaden datos provenientes de simulaciones DNS [You et al., 2003] que se alinean con la misma tendencia.

En la Figura 5.8b se presenta un gráfico de paridad entre $\text{Nu}_{DNS}/\text{Nu}_{fc}$ (eje x) y $\text{Nu}_{corr}/\text{Nu}_{fc}$ (eje y). La línea negra indica el acuerdo perfecto ($y = x$) y las líneas azules punteadas delimitan la banda de $\pm 2\sigma$ (con $\sigma=0.158$). La concentración de puntos dentro de esta banda confirma que la correlación de Jackson reproduce con buena precisión los valores simulados.

A partir de la Figura 5.8a se distinguen tres regiones:

- $Bo \lesssim 10^{-6}$: Nu se mantiene muy próximo al valor de Nu_{fc} ; el efecto de la fuerza boyante es despreciable y domina la convección forzada [Li et al., 2021].
- $10^{-6} \lesssim Bo \lesssim 3 \times 10^{-5}$: Nu desciende y luego se recupera, indicando una zona donde la transferencia de calor empeora respecto al caso puramente forzado.
- $Bo \gtrsim 3 \times 10^{-5}$: Nu crece de forma marcada, impulsado por una mayor relevancia de la convección natural.

$$Bo = \frac{Gr^*}{\text{Re}_D^{3.425} \text{Pr}^{0.8}} \quad (5.3)$$

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_{fc}} = \left| 1 - 8 \times 10^4 Bo \left(\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_{fc}} \right)^{-2} \right|^{0.46} \quad (5.4)$$

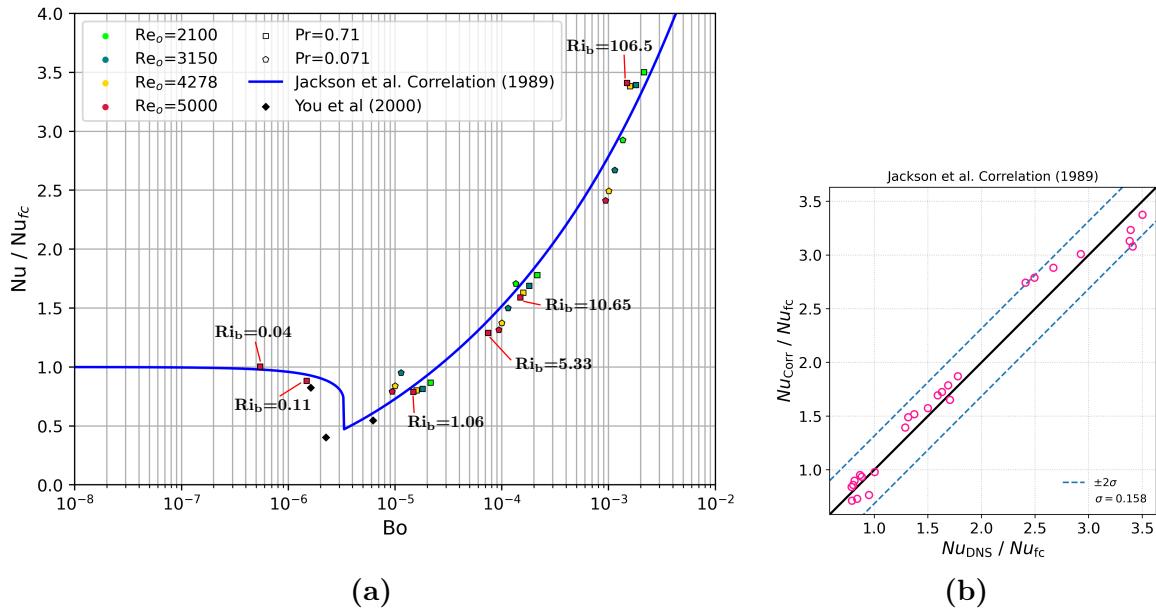


Figura 5.8: (a) Número de Nusselt normalizado vs Bo ; (b) paridad con la correlación de Jackson et al. [Jackson et al., 1989].

En la definición de Nu , se puede apreciar su dependencia con el número de Reynolds y el número de Prandtl, y además, también es posible inferir su dependencia con la fuerza boyante. Para entender esto último, se retoman los conjuntos definidos en la sección 5.2.1. En el primer conjunto la transferencia de calor por convección se deteriora, mientras que en el segundo conjunto dicha transferencia se recupera e incluso mejora respecto al caso de convección forzada pura (véanse los puntos representados con cuadrados rojos en la Figura 5.8a). Estas observaciones, que no resultan intuitivas a primera vista, se esclarecen al examinar la Figura 5.9, donde se representa el perfil medio $\langle u_x^* \theta^* \rangle$. El número de Nusselt es inversamente proporcional a $\langle \theta_b^* \rangle$ (ecuación 5.1), magnitud que depende del comportamiento de $\langle u_x^* \theta^* \rangle$. En consecuencia, con el aumento de la boyanca, la magnitud $\langle u_x^* \theta^* \rangle$ tiende primero a aumentar (conjunto I) y luego a disminuir (conjunto II), lo que conduce a una reducción y posterior aumento de Nu , respectivamente.

Se puede continuar la discusión sobre la variación de Nu con la fuerza boyante, agregando otros elementos de nuestras simulaciones. De acuerdo con el modelo de Prandtl [Prandtl, 1942], la transferencia de calor en flujos turbulentos se divide en dos mecanismos principales que actúan en serie: (i) conducción en la subcapa viscosa y (ii) el transporte de energía desde el borde de la capa viscosa al seno del fluido por el efecto difusivo de la turbulencia, siendo este último el efecto predominante [Aicher and Martin, 1997, Hall and Jackson, 1969]. Aicher y Martin [Aicher and Martin, 1997] sugieren que el transporte de energía es proporcional a la producción de turbulencia, que puede modelarse, a su vez, como proporcional al gradiente de velocidad *streamwise* entre el seno del fluido y el borde de la capa viscosa. En base a nuestros resultados podemos cuantificar cantidades relacionadas para evaluar el efecto de la turbulencia en la distribución de la energía térmica.

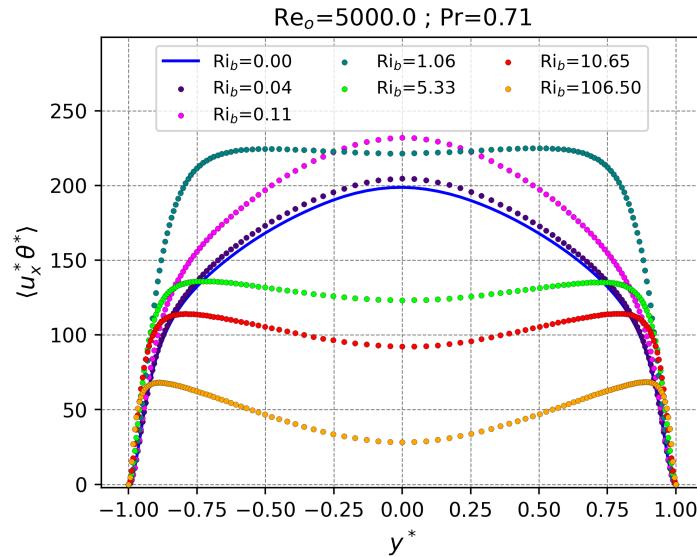


Figura 5.9: Perfil de la magnitud media $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

En este contexto, la Figura 5.10a muestra el perfil de la energía cinética turbulenta para los casos simulados ($Re_o = 5000$ y $Pr = 0.71$) contemplando solo el semiancho del canal, esto es: $-1 \leq y^* \leq 0$. Si se considera el conjunto I de la Sección 5.2.1 ($0.04 \leq Ri_b \leq 1.06$), se observa que esta cantidad tiende a disminuir con el crecimiento de la boyancia; asimismo, el máximo tiende a desplazarse hacia la pared. Al contemplar el conjunto II ($Ri_b \geq 5.33$), el valor de TKE tiende a aumentar con la boyanca respecto al primer conjunto, y además, el máximo de las curvas tiende a desplazarse al centro del canal.

Por otro lado, la Figura 5.10b representa la producción total de la TKE, esto es, la suma de la producción por cizalla \mathcal{P} (*Shear-Production*) y la producción por boyanca \mathcal{B} (*Buoyancy-Production*). Los términos \mathcal{P} y \mathcal{B} provienen del balance de energía cinética turbulenta k (véase Apéndice A). En dicha figura, también se aprecia una disminución en la producción total con el aumento de la fuerza boyante para el conjunto I, mientras que los máximos de esta cantidad se trasladan hacia la pared. Por otro lado, los casos del conjunto II tienden a crecer con el aumento de la boyanca. Para todos los valores de Ri_b de este conjunto, las cantidades experimentan dos máximos “conectados” por un valle. El primer máximo se mantiene muy próximo a la pared, prácticamente inmóvil con el aumento de la boyanca, y solo crece en amplitud. El segundo máximo, de menor amplitud que el primero, tiende a desplazarse hacia la pared mientras crece en amplitud con el aumento de la fuerza boyante.

Entonces, en virtud de lo discutido en los dos párrafos anteriores, es posible apreciar un rango de Ri_b , correspondiente al intervalo $10^{-6} \lesssim Bo \lesssim 3 \times 10^{-5}$ en la Figura 5.8a, donde disminuye la producción total de turbulencia, y por lo tanto, el número de Nusselt. Asimismo, al examinar los perfiles de velocidad (Figura 5.2a), su comportamiento resulta coherente con la hipótesis de Aicher [Aicher and Martin, 1997]. Esta, recuérdese, sugiere que la producción de turbulencia es proporcional a la diferencia de velocidades⁵ entre aquella en el borde de la capa viscosa (muy próxima a la pared) y aquella en el centro del canal. En el rango de Bo

⁵Dicha diferencia puede interpretarse como proporcional a un gradiente de velocidades.

considerado, dicha diferencia (o gradiente) es nula o, en todo caso, muy pequeña.

Por lo tanto, si bien queda como trabajo futuro un análisis más exhaustivo de los efectos de la fuerza boyante en el Nu, se encuentra una adecuada correspondencia entre los valores de TKE fuera de la capa viscosa, el comportamiento de los perfiles de velocidad y los valores del coeficiente de transferencia de calor.

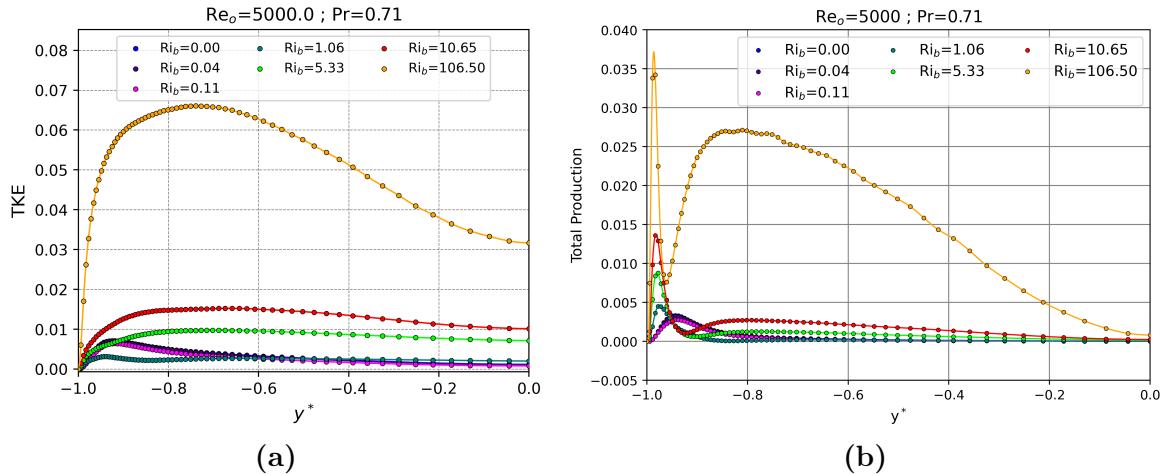


Figura 5.10: (a) Perfil de la TKE; (b) producción total de turbulencia ($\mathcal{P} + \mathcal{B}$).

5.5. Factor de Fricción de Darcy

En esta sección se analizan los resultados del coeficiente de fricción de Darcy. El mismo se define por la relación

$$f = 8 \frac{\overline{\tau_w}}{\rho U_b^2} = \frac{18}{Re_o} \left. \frac{d\langle u_x^* \rangle}{dy} \right|_{wall}. \quad (5.5)$$

La Figura 5.11a recoge los valores de f obtenidos en nuestras simulaciones DNS para una amplia gama de números de boyanca (ecuación 5.3). Se incluyen, además, datos experimentales de Parlatan et al. [Parlantan et al., 1996] y de DNS de You et al. [You et al., 2003]. Se observa una buena correspondencia entre los patrones de los tres conjuntos de datos. Por otro lado, la literatura ofrece pocas correlaciones para f (o para el factor de Fanning) en flujo turbulento completamente desarrollado bajo régimen de convección mixta. Partiendo del planteo de Easby [Easby, 1978], se propone una nueva forma funcional, dada por la ecuación 5.6, cuyos parámetros se ajustan con nuestros resultados (véase línea azul de la Figura 5.11a).

$$f_{corr} = C_1 + C_2 Bo^n \quad (5.6)$$

$$C_1 = 0.031 \quad ; \quad C_2 = 10.031 \quad ; \quad n = 0.561$$

La Figura 5.11b muestra el gráfico de paridad f_{DNS} frente a f_{corr} . La desviación estándar es $\sigma = 0.018$ y el total de nuestros puntos se sitúa dentro de la banda de error, lo que confirma la fiabilidad de la correlación incluso al compararla con los datos de referencia externos.

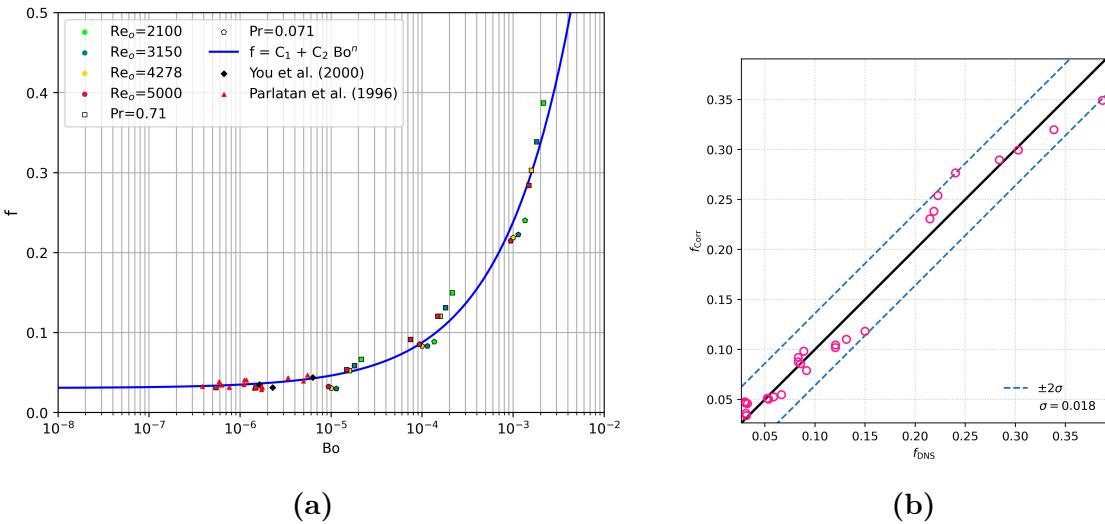


Figura 5.11: (a) Coeficiente de fricción de Darcy vs Bo y (b) correlación propuesta; el ajuste reproduce los datos DNS con $\sigma = 0.018$.

El incremento de f con la boyancia parece, a priori, contraintuitivo: al actuar la fuerza boyante en la misma dirección del flujo cabría esperar menores pérdidas de carga. Sin embargo, los perfiles de velocidad mostrados en la sección 5.2.1 evidencian que la boyancia acelera el fluido en las zonas próximas a la pared, lo que incrementa la pendiente $d\langle u_x^* \rangle / dx^*$ y, por ende, la tensión cortante media $\bar{\tau}_w$. Esta pérdida de carga por fricción se equilibra con la fuerza volumétrica producida por el cambio de densidad, y con la fuerza externa necesaria para mantener un caudal constante.

5.6. Sumario de los principales hallazgos

- **Perfiles de velocidad:** la fuerza boyante genera perfiles tipo “M” y su incremento desplaza los máximos de $\langle u_x \rangle$ hacia la pared.
- **Perfiles de temperatura:** Para flujos con $0 < \text{Ri}_b < 1$ los perfiles de temperatura adimensional se ubican por encima del caso puramente forzado. Para $\text{Ri}_b > 1$ la mezcla inducida por la flotación tiende a “aplanar” el perfil de la temperatura media adimensional.
- **Efecto del Prandtl:** para $\text{Pr}=0.071$ la ley de pared de temperatura, $\langle \theta^* \rangle \simeq \text{Pr } y^+$, se mantiene hasta $y^+ \approx 30$, mientras que para $\text{Pr}=0.71$ termina a $y^+ \approx 7$ mostrando la influencia de Pr en la capa conductiva.
- **Degradación y mejora de Nu:** existe un intervalo $10^{-6} \lesssim \text{Bo} \lesssim 3 \times 10^{-5}$ donde Nu se reduce respecto al caso puramente forzado, y fuera de él, la transferencia se recupera y lo supera.
- **Mecanismo energético:** la caída de Nu coincide con una disminución en la producción total de turbulencia que ocurre, principalmente, cerca de la pared.
- **Factor de Darcy creciente:** pese a la asistencia de la boyancia, el gradiente de velocidad en la pared aumenta y eleva el factor de Darcy; la correlación $f_{\text{corr}} = C_1 + C_2 \text{Bo}^n$ reproduce los datos simulados propios, y los datos de referencia, con buena fidelidad.

Capítulo 6

Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta

En el presente capítulo se examina la transición laminar-turbulenta en convección mixta en un canal de placas paralelas mediante simulaciones DNS. El mismo se organiza en tres partes: (i) la exploración de distintas condiciones iniciales mediante la evolución temporal de magnitudes de interés (TKE y Re_τ) contemplando dos valores del número de Richardson Ri_b (casos A y B); (ii) un análisis detallado del caso correspondiente al Ri_b más bajo simulado (ensayo A-C10); (iii) un análisis detallado del caso correspondiente al Ri_b más alto simulado (ensayo B-C2).

En los ensayos A-C10 y B-C2 se consideran las siguientes magnitudes de interés: la energía cinética turbulenta (TKE) y la varianza de la temperatura adimensional; perfiles de velocidad y de temperatura adimensional en instantes representativos; el factor de fricción de Darcy y número de Nusselt. Este conjunto de métricas permite vincular la dinámica de la transición con su impacto termo-hidrodinámico y con el acercamiento a los estados de referencia completamente desarrollados.

En los ensayos con Ri_b más bajo ($Ri_b = 0.04$) se requirió emplear una combinación de perturbaciones bidimensionales y tridimensionales para desencadenar la transición. Por su parte, aquellos ensayos con Ri_b más alto ($Ri_b = 1.06$), si bien también se consideraron condiciones iniciales construidas con combinaciones de ondas 2D/3D, fue posible inestabilizar el flujo empleando únicamente ondas 2D.

En el ensayo A-C10, en una etapa inicial ($t^* \lesssim 400$), la evolución temporal de las cantidades se caracteriza por experimentar mínimos y/o máximos locales y absolutos, salvo en el número de Nusselt que en esta etapa se mantiene prácticamente constante. Luego, estas magnitudes tienden hacia el estado turbulento desarrollado. En particular, las cantidades asociadas al campo hidrodinámico del sistema evolucionan a mayor ritmo respecto de aquellas cantidades asociadas al campo térmico. Al inspeccionar los perfiles de velocidad y temperatura es posible apreciar una pérdida de simetría. Mediante un análisis cualitativo de las estructuras de vórtices, es posible visualizar que las mismas se aglomeran de manera no uniforme cerca de las paredes dando cierto entendimiento a esta última cuestión.

Por otro lado, en el ensayo B-C2, las magnitudes de interés experimentan un breve período laminar y luego tienen un crecimiento brusco, salvo el número de Nusselt que decrece. Esta cuestión ocurre en los instantes de tiempo tales que $t^* \lesssim 50$. El decrecimiento de Nu está ligado a un aumento de la energía cinética turbulenta producto del crecimiento de la turbulencia en el flujo. Para tiempos posteriores, luego de experimentar esa subida, las cantidades decrescen y tienden hacia el estado turbulento desarrollado con la excepción de Nu que tiende a recuperarse de su mínimo. Si bien Nu alcanza y supera el valor del estado inicial, en la ventana de tiempo simulada, la magnitud no alcanza el valor de referencia del estado desarrollado.

Por último, se comparan similitudes y diferencias entre los ensayos A-C10 y B-C2. En particular, se compara la evolución temporal del Reynolds de fricción (Re_τ). En el ensayo A-C10 el estado final queda por encima del valor inicial mientras que en B-C2 queda por debajo. Esta diferencia entre ambos puede explicarse como un efecto del aumento de la turbulencia en el flujo (medida en términos de la energía cinética turbulenta) que influye sobre los perfiles de velocidad.

6.1. Exploración de casos

Como se menciona en los Capítulos 1 y 2, la convección mixta en canales ha sido investigada exhaustivamente debido a sus múltiples aplicaciones de interés. Sin embargo, la transición laminar-turbulenta en convección mixta es un fenómeno que no ha sido estudiado en profundidad. En la bibliografía reciente existen escasos trabajos, uno de ellos es el de Chen y Chung [Chen and Chung, 2003], donde se analiza el fenómeno de transición temporal.

Por esta razón, se realiza primero una exploración numérica que permita identificar combinaciones de perturbaciones capaces de inducir la inestabilidad del flujo. Se seleccionan dos números de Richardson *bulk* que corresponden a soluciones desarrolladas con diferentes características: una levemente afectada por la fuerza boyante y la otra con perfiles de velocidad y temperatura claramente influídos por la flotación. Estos corresponden a los casos A y B de la Tabla 6.1, respectivamente, y en ambos se considera $Re_o=5000$ y $Pr=0.71$.

El mecanismo de inestabilización se construye a partir de condiciones iniciales de acuerdo con las ecuaciones 2.41 - 2.43 seleccionando distintos números de onda y amplitudes (véase Sección 2.4.3). Los autovalores y sus autofunciones asociadas se obtuvieron mediante el análisis de estabilidad lineal descrito en el Capítulo 2, utilizando la herramienta OSMC descrita en el Capítulo 3. El espectro de autovalores y las autofunciones utilizadas en este trabajo pueden consultarse en el Apéndice D.

Por otro lado, para decidir si una perturbación arbitraria es capaz de inestabilizar el flujo se estudia la evolución temporal de las siguientes magnitudes:

- la energía cinética turbulenta, TKE o κ , definida en el Capítulo 2,

$$TKE = \frac{1}{2} [\langle u_x^{*'} u_x^{*'} \rangle + \langle u_y^{*'} u_y^{*'} \rangle + \langle u_z^{*'} u_z^{*'} \rangle];$$

- y el número de Reynolds de fricción

$$\text{Re}_\tau = \frac{u_\tau d}{\nu}, \quad u_\tau = U_o \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_o} \left. \frac{d\langle u_x^* \rangle}{dy^*} \right|_w}$$

donde u_τ es la velocidad de fricción [Pope, 2001].

Caso	Ri _b	Ra
A	0.04	65
B	1.06	1775

Tabla 6.1: Parámetros adimensionales de los dos casos elegidos.

Aclaración Importante. En las siguientes secciones, el lector hallará gráficas con la evolución temporal de las magnitudes Re_τ , TKE, varianza de la temperatura, número de Nusselt (Nu) y factor de fricción de Darcy (f). En ellas, aparecen representados valores constantes mediante líneas a trazos cuyas etiquetas contienen los subíndices “Init” y “Dev”. El primer subíndice corresponde al cálculo de las magnitudes antes mencionadas empleando los perfiles de las condiciones iniciales ($t^* = 0$); el segundo corresponde al cálculo de las magnitudes empleando los perfiles del flujo turbulento completamente desarrollado, presentados en el Capítulo 5. Para el cálculo de Nu y f se emplean las ecuaciones 5.1 y 5.5, respectivamente.

Los perfiles de velocidad y temperatura en $t^* = 0$ son muy similares a los perfiles del flujo base laminar. Por lo cual, los valores de Re_τ , Nu y f calculados con la condición inicial son equivalentes a los calculados en el régimen laminar. Asimismo, los valores de TKE y la varianza de la temperatura se aproximan utilizando las autofunciones $\{\hat{v}_x, \hat{v}_y, \hat{v}_z, \hat{\theta}\}$ que aparecen en las expresiones de las perturbaciones. Esto surge de considerar lo siguiente:

$$\xi'(x^*, y^*, z^*, t^* = 0) \equiv \tilde{\xi}(x^*, y^*, z^*, t^* = 0) = \hat{\xi}(y^*) e^{i(\alpha x^* + \beta z^*)},$$

donde $\tilde{\xi}$ representa una perturbación arbitraria y $\hat{\xi}$ su amplitud asociada. De esta manera, en $t^* = 0$, los valores de TKE y $\langle \theta'^* \theta'^* \rangle$ se estiman mediante las relaciones 6.1 y 6.2 donde $\tilde{\mathbf{v}}$ y $\tilde{\varphi}$ están dadas por las ecuaciones 2.42 y 2.43, respectivamente.

$$\text{TKE}_{\text{Init}} \equiv \frac{1}{2} \int [\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}] dx^* dy^* dz^* \quad (6.1)$$

$$\langle \theta'^* \theta'^* \rangle_{\text{Init}} \equiv \int [\tilde{\varphi}]^2 dx^* dy^* dz^* \quad (6.2)$$

6.1.1. Caso A ($Ri_b=0.04$)

En la Figura 6.1 se expone la evolución en el tiempo de TKE y Re_τ para las distintas condiciones iniciales consideradas. Los parámetros asociados a las perturbaciones de dichas condiciones se resumen en la Tabla 6.2. Adicionalmente, se añaden los valores asociados al caso turbulento completamente desarrollado (línea a trazos roja).

Las condiciones iniciales de los cuatro primeros ensayos, de A-C1 a A-C4, se construyen empleando únicamente una onda bidimensional y un mismo conjunto de autofunciones cuya parte imaginaria del autovalor ($c_{2D}=1.212 + 0.037 j$) es la cota superior¹ de todo el espectro de autovalores asociado. En estos ensayos sólo se varía la amplitud de las perturbaciones 2D de 1% a 6% (Tabla 6.2). Se observa que, en el tiempo simulado, no se logra inducir la transición del flujo. En su lugar, el efecto que se logra es la traslación (adelanto) del máximo en la TKE desde $t^* \approx 140$ hasta $t^* \approx 80$. En todos los casos, luego de crecer y alcanzar un valor máximo, la TKE retorna a niveles próximos a cero. Por su parte, los valores de Re_τ permanecen prácticamente constantes hasta $t^* \approx 100$ donde comienza un descenso de la magnitud (un total de aprox 8%) y posteriormente tiende a recuperarse y evolucionar, aparentemente, hacia su estado inicial, más allá del intervalo temporal simulado. Como lo que se busca es una transición temprana del flujo, y además, como no se observa una estabilización nula en la TKE, se opta por finalizar las simulaciones de estos ensayos.

Por otro lado, se trata de inducir la inestabilidad empleando otras autofunciones. Se conserva la amplitud (6%) y se utilizan autofunciones de modos menos inestables (véase Tabla 6.2 y Apéndice D). Estos casos corresponden a los ensayos A-C7 y A-C8. En ambos, la TKE crece hasta un máximo absoluto, que continúa con un segundo máximo local de menor intensidad y finaliza con una pequeña réplica de aún menor intensidad (aproximadamente un orden de magnitud menor) para luego retornar a valores próximos al estado inicial. El comportamiento descrito es similar en ambos casos, con la diferencia que en el ensayo A-C7 la dinámica se retrasa respecto a la de A-C8. Esta cuestión coincide con el hecho de que la parte imaginaria del autovalor correspondiente a A-C7 es mayor que la de A-C8. El retraso en la dinámica se aprecia al comparar ambos máximos absolutos: para A-C7 el máximo se encuentra en $t^* \approx 340$, mientras que para A-C8 está ubicado en $t^* \approx 180$. Por su parte, el descenso de Re_τ se retrasa en ambos casos, siendo más extenso en el ensayo A-C7. Luego, en los dos ensayos, el sistema adquiere una nueva condición de flujo que, al menos hasta el tiempo simulado, es distinta del estado inicial. No obstante, no se han encontrado indicios de que una transición temporal temprana vaya a ocurrir.

El uso exclusivo de ondas bidimensionales resulta, aparentemente, insuficiente para desencadenar la transición del flujo. Por ello, resulta necesario buscar otra estrategia o herramienta que nos permita inestabilizar al mismo. Se procede entonces a emplear una combinación de ondas bidimensionales y tridimensionales para construir una perturbación que pueda reproducir la inestabilidad secundaria (Sección 2.4.3). En este sentido, las condiciones iniciales de los ensayos A-C9 y A-C10 se construyen empleando la combinación de una onda 2D ($A_{2D} = 6\%$ y mismas autofunciones de los casos A-C7 y A-C8, respectivamente) con dos

¹Esto se conoce como modo más inestable [Schmid and Henningson, 2002].

ondas 3D oblicuas ($A_{3D} = 1\%$).

En una primera etapa, tanto la energía cinética turbulenta como el Re_τ reproducen el mismo comportamiento que experimentan los ensayos A-C7 y A-C8. Posteriormente, para $t^* \gtrsim 395$ (A-C9) y $t^* \gtrsim 240$ (A-C10), los casos se despegan y experimentan un crecimiento brusco seguido de un pico y un ligero descenso. Luego, las magnitudes se sostienen en el tiempo en torno al valor del caso completamente desarrollado; es decir, no decaen como en los casos anteriores. Esto indica que la combinación de ondas 2D y 3D resulta exitosa para inestabilizar el flujo desde un régimen laminar hacia uno turbulento. Es destacable la utilidad del concepto de inestabilidad secundaria en estos ensayos. Este puede interpretarse de la siguiente forma: la perturbación 2D evoluciona a un nuevo estado pseudo-estacionario que persiste durante una ventana temporal y puede, posteriormente, interactuar constructivamente con la perturbación 3D y desencadenar la transición a la turbulencia.

Caso representativo. El ensayo **A-C10** se elige como referencia para la discusión detallada (Sección 6.2) ya que se logra una transición temprana del flujo ($t^* \approx 240$) que fue claramente inducida y además que se sostiene en el tiempo ($t^* > 400$).

Tabla 6.2: Parámetros de las condiciones iniciales para el caso A ($Re_o = 5000$, $Pr = 0.71$, $Rib = 0.04$).

Nomenclatura	α	β	A_{2D} [%]	A_{3D} [%]	c_{2D}	c_{3D}
A-C1	1.12	0	1	0	$1.212 + 0.037 j$	-
A-C2	1.12	0	2	0	$1.212 + 0.037 j$	-
A-C3	1.12	0	4	0	$1.212 + 0.037 j$	-
A-C4	1.12	0	6	0	$1.212 + 0.037 j$	-
A-C7	1.12	0	6	0	$0.472 - 0.104 j$	-
A-C8	1.12	0	6	0	$0.385 - 0.124 j$	-
A-C9	1.12	2.1	6	1	$0.472 - 0.104 j$	$0.575 - 0.095 j$
A-C10	1.12	2.1	6	1	$0.385 - 0.124 j$	$0.563 - 0.095 j$

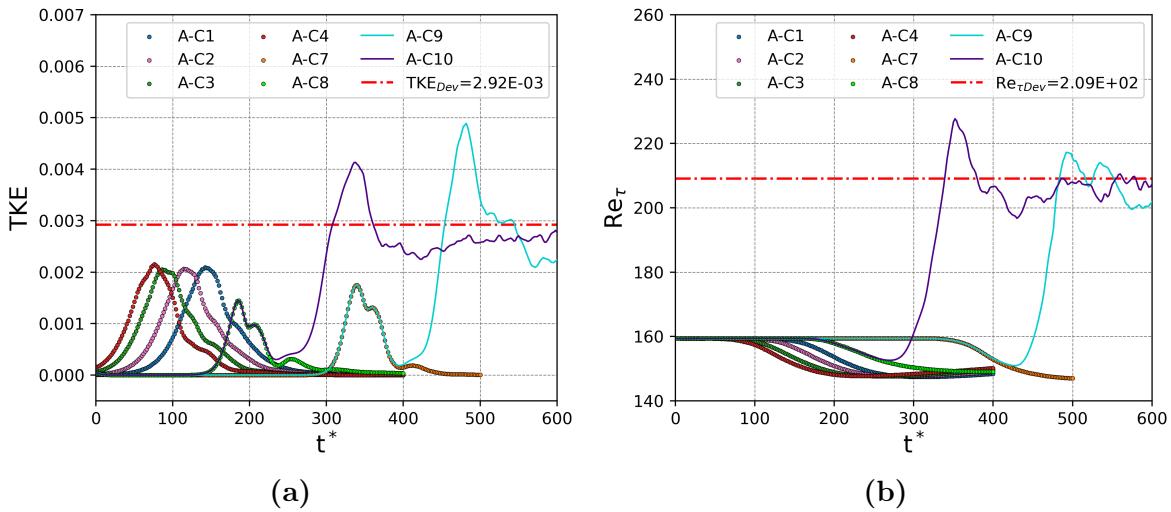


Figura 6.1: Evolución temporal de (a) TKE y (b) Re_τ para las distintas condiciones iniciales del caso A.

6.1.2. Caso B ($Ri_b=1.06$)

Los parámetros de las perturbaciones utilizadas para la construcción de las condiciones iniciales se resumen en la Tabla 6.3. Los ensayos B-C2 y B-C3 utilizan únicamente una onda bidimensional ($A_{2D} = 2\%$) con diferente autovalor y autofunción, mientras que B-C4 y B-C5 añaden una combinación de ondas oblicuas 3D de pequeña amplitud ($A_{3D} = 0.4\%$). En la Figura 6.2 se expone la evolución en el tiempo de TKE y Re_τ para las distintas condiciones iniciales consideradas.

En los cuatro ensayos, todas las perturbaciones mencionadas inducen la transición del flujo. Tanto la energía cinética turbulenta como el Re_τ experimentan un crecimiento abrupto en una etapa muy temprana de la transición ($t^* \lesssim 30$). En el caso de Re_τ , los máximos se alcanzan para $t^* \lesssim 60$. En particular, en el ensayo B-C4, el pico se produce casi en la mitad del tiempo ($t^* \approx 25$) que en el resto de los ensayos. Esta cuestión coincide con el hecho de que la parte imaginaria de su autovalor 2D es positiva en comparación al resto de casos que resulta negativa; es decir, se tiene un modo que es más inestable. Luego, para $t^* \gtrsim 150$, el Re_τ se estabiliza en torno a un valor próximo a 270, lo que indica que se ha alcanzado un nuevo estado de flujo. De acuerdo a la línea a trazos (negra) graficada, correspondiente al flujo turbulento del caso completamente desarrollado, se puede afirmar que el flujo transicionó hacia un régimen turbulento.

Por su parte, la evolución de la TKE comparte ciertos rasgos a los descritos para Re_τ . En el ensayo B-C4, el pico se alcanza casi en la mitad del tiempo que en el resto de casos ($t^* \approx 50$); para $t^* \gtrsim 100$, la energía cinética turbulenta se reduce y permanece en torno a un valor constante, $\kappa \approx 0.002$, que corresponde al caso completamente desarrollado, corroborando también que efectivamente el sistema ha alcanzado un estado de flujo turbulento. Un detalle a destacar es que, mientras en la TKE el máximo alcanzado en el ensayo B-C4 supera al de los demás casos, en el Re_τ ocurre lo contrario: el pico correspondiente al caso B-C4 resulta menor

que los picos de los demás ensayos. Se presume que el aumento de la tensión de corte en B-C4 no resulta tan efectivo como en los casos B-C2, B-C3 y B-C5 debido a la gran producción de turbulencia que actúa difundiendo el momento. Por último, para los tiempos adimensionales tales que $t^* > 100$, todas las curvas colapsan, indicando que la dinámica final del sistema, en el estado estadísticamente estacionario, no depende de la perturbación inicial impuesta.

Caso representativo. En todos los ensayos del Caso B se logra que el sistema transicione al régimen turbulento. En cada uno se observa un crecimiento, un pico y un decaimiento que tiende al estado turbulento. Se elige el ensayo B-C2 ya que su transición se alcanza con una perturbación bidimensional únicamente, a diferencia de lo ocurrido con el caso A.

Tabla 6.3: Parámetros de las condiciones iniciales para el caso B ($Re_o = 5000$, $Pr = 0.71$, $Ri_b = 1.06$).

Nomenclatura	α	β	A_{2D} [%]	A_{3D} [%]	c_{2D}	c_{3D}
B-C2	1.12	0	2	0	0.800 - 0.495 j	-
B-C3	1.12	0	2	0	2.853 - 0.107 j	-
B-C4	1.12	2.1	2	0.4	2.315 + 0.424 j	1.721 + 0.235 j
B-C5	1.12	2.1	2	0.4	2.853 - 0.107 j	1.550 + 0.023 j

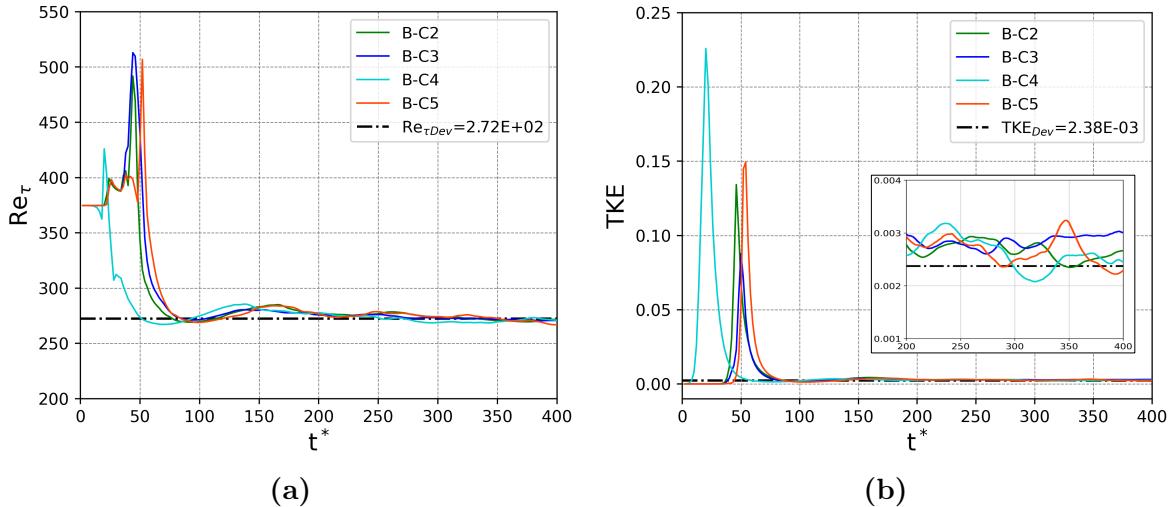


Figura 6.2: Evolución temporal de (a) Re_τ y (b) TKE para las distintas condiciones iniciales del caso B.

6.2. Análisis detallado del caso A-C10

6.2.1. TKE y Varianza de la temperatura adimensional

En las Figuras 6.3a y 6.3b la evolución temporal de las magnitudes consideradas (curva roja) se separa en cuatro zonas diferenciadas. A modo de referencia se añaden los valores constantes asociados a la condición inicial y al flujo turbulento completamente desarrollado.

- **Zona I ($0 \lesssim t^* \lesssim 150$).** Ambas magnitudes experimentan un leve descenso al inicio, luego permanecen prácticamente constantes, sin incrementos ni descensos, y posteriormente aumentan hasta recuperar sus valores iniciales. En este tramo, ambas magnitudes permanecen por debajo de los valores completamente desarrollados del caso turbulento correspondiente. En este intervalo las perturbaciones iniciales no modifican significativamente el flujo base.
- **Zona II ($150 \lesssim t^* \lesssim 234$).** La energía cinética turbulenta presenta dos máximos locales bien definidos en torno a $t^* \approx 186$ y $t^* \approx 206$, separados por un valle intermedio. Por su parte, la varianza de la temperatura experimenta una evolución similar en el mismo intervalo temporal: crece tres órdenes de magnitud, presenta un máximo local, desciende hasta un valle y crece hasta un segundo máximo de menor intensidad. Luego, ambas magnitudes descienden parcialmente antes de volver a crecer.
- **Zona III ($234 \lesssim t^* \lesssim 338$).** Tanto la TKE, como $\langle \theta^{*'} \theta^{*'} \rangle$ crecen de forma sostenida, con un cambio de pendiente que ocurre alrededor de $t^* \approx 276$. Luego, la TKE alcanza un máximo absoluto en torno a $t^* \approx 338$ ($\kappa_{max} \approx 4.1 \times 10^{-3}$) y la varianza alcanza su máximo absoluto cerca de $t^* \approx 320$ con un valor alrededor de $\langle \theta^{*'} \theta^{*'} \rangle_{max} \approx 2 \times 10^4$. En este intervalo se observa la influencia de la perturbación 3D, que produce un nuevo crecimiento descripto conceptualmente por la inestabilidad secundaria.
- **Zona IV ($t^* \gtrsim 338$).** En una primera etapa, la energía cinética turbulenta desciende desde su valor máximo hasta quedar por debajo del valor constante del caso turbulento completamente desarrollado; posteriormente, aumenta y fluctúa en torno a dicho valor, dentro del rango $[2.5, 3.5] \times 10^{-3}$. Por su parte, la varianza de la temperatura desciende de manera gradual, acercándose al valor de referencia del caso turbulento desarrollado.

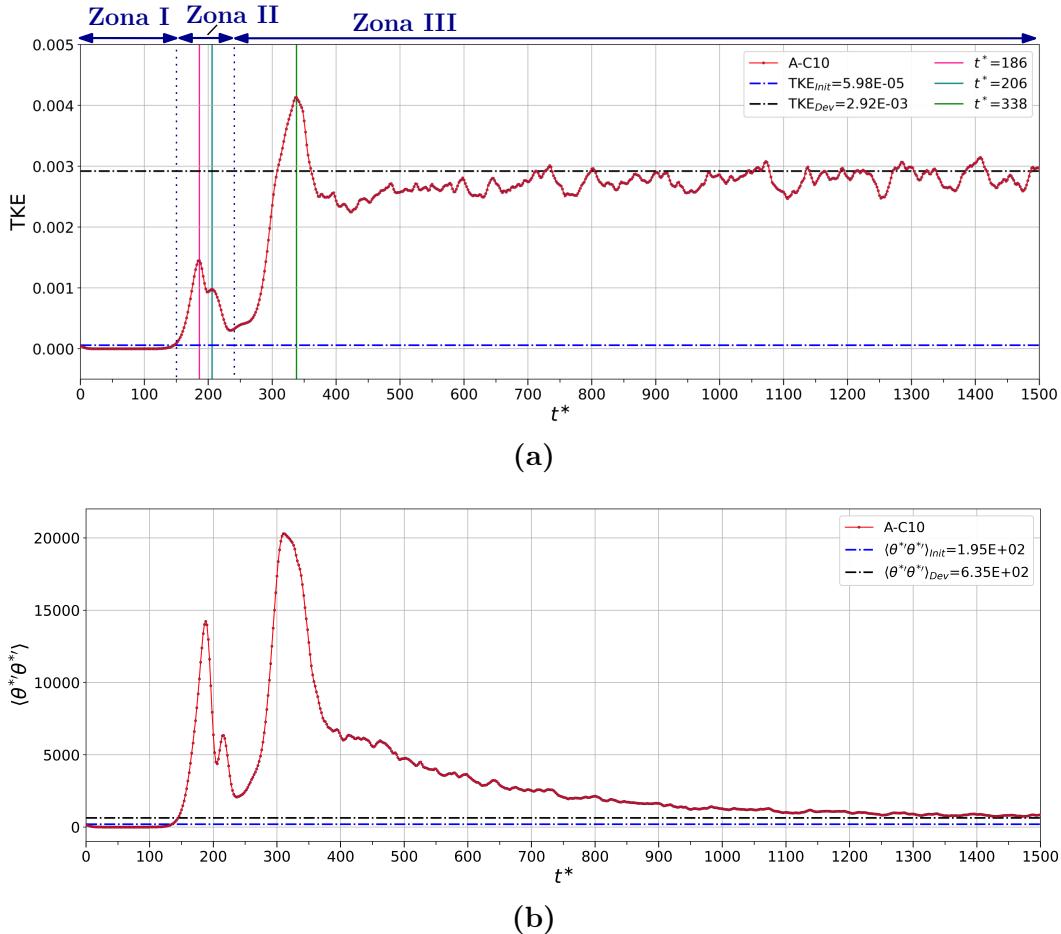


Figura 6.3: Evolución temporal de (a) la energía cinética turbulenta y (b) la varianza de la temperatura, para el caso A-C10.

6.2.2. Perfiles de velocidad y temperatura

En las Figuras 6.4a y 6.4b se muestran, respectivamente, los perfiles de velocidad y temperatura adimensional para $t^* = 2, 186, 206, 338, 750, 1500$ (de izquierda a derecha). A modo de referencia, se incluye el perfil correspondiente al flujo turbulento completamente desarrollado. Los instantes elegidos abarcan la etapa laminar inicial ($t^* = 2$), los máximos locales ($t^* \approx 186$ y $t^* \approx 206$), el máximo absoluto de la TKE y dos tiempos en los que el flujo ya es turbulento.

La perturbación impuesta modifica el perfil de velocidad que en un inicio tiene forma de “M” (véase Sección 4.1.3). A medida que el flujo evoluciona se observa que en $t^* \approx 186$ y $t^* \approx 206$, los perfiles conservan la simetría pero no mantienen su forma característica inicial. Esta forma relativamente más plana en los perfiles es consecuencia de un aumento de la difusión de momento dada por el incremento de turbulencia (véase Figura 6.3a). Asimismo, próximo a $t^* \approx 338$, se aprecia una aparente “pérdida” en la simetría del perfil. En una etapa ya turbulenta, los perfiles de velocidad se aproximan a aquel correspondiente al flujo completamente desarrollado. Los perfiles de temperatura adimensional siguen una evolución análoga: se deforman manteniendo su simetría, luego la misma se desvanece momentáneamente

en $t^* \approx 338$ (el perfil se vuelve asimétrico), y posteriormente tienden hacia el perfil del caso turbulento desarrollado. El efecto de la turbulencia aplana los perfiles de temperatura y aproxima la temperatura en el centro del canal al valor de aquella impuesta en la pared. Por otro lado, al inspeccionar los perfiles de velocidad y temperatura en conjunto, se observa que el desarrollo de la parte hidrodinámica se encuentra ligeramente acelerado respecto al desarrollo térmico. Este hecho depende del número de Prandtl (Pr) y de cuán relevante es la boyancia en la ecuación de momento (Ri_b).

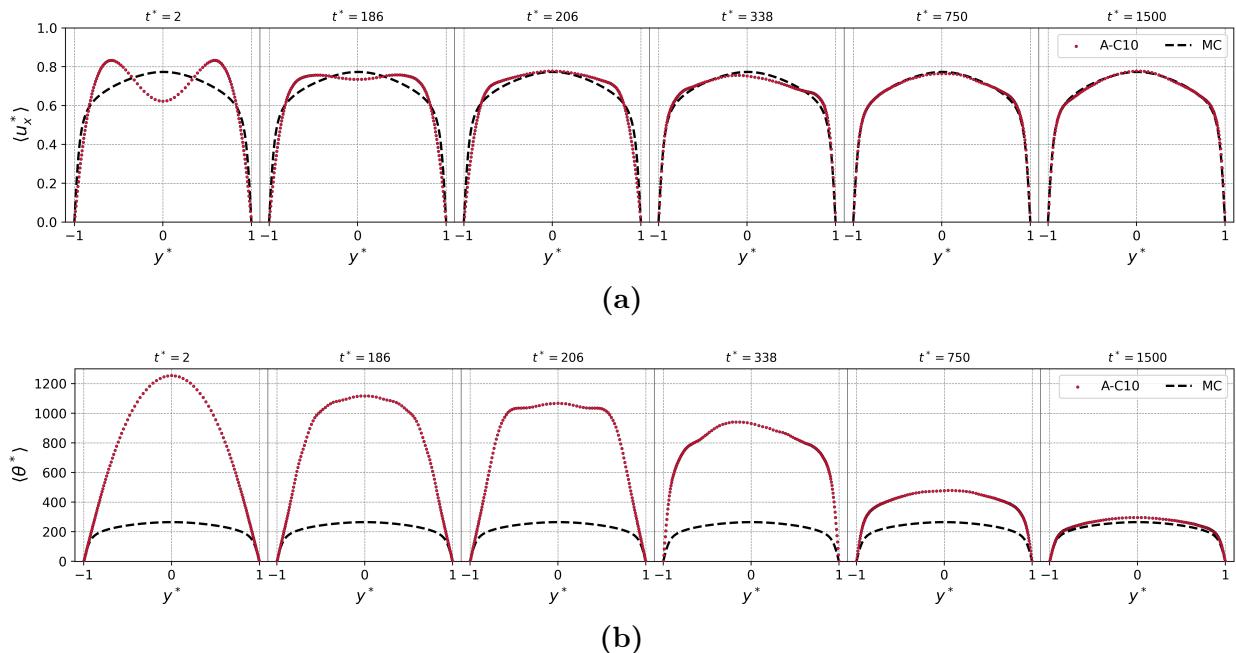


Figura 6.4: Perfiles de (a) velocidad y (b) temperatura adimensional para distintos instantes t^* correspondientes al caso A-C10.

Respecto a la pérdida momentánea de simetría mostrada en los perfiles de la Figura 6.4 se especula que se debe a un efecto de dominio. Un dominio que abarque más de una longitud de onda de las perturbaciones iniciales, en las direcciones X y Z , podría compensar este efecto.

Con el fin de profundizar en el entendimiento de la aparente pérdida de simetría observada en los perfiles para el instante $t^* = 338$, resulta ilustrativo examinar las estructuras de vórtices del flujo. Dichas estructuras se obtienen mediante el “Criterio Q” [Hunt et al., 1988]. El análisis que se realiza a continuación se hace con un enfoque cualitativo. En la Figura 6.5 se exponen capturas de las “isosuperficies de Q” para tres tiempos distintos: $t^* = 186$ (Figuras 6.5a y 6.5b), $t^* = 338$ (Figuras 6.5c y 6.5d) y $t^* = 1500$ (Figuras 6.5e y 6.5f); las capturas ubicadas a la derecha corresponden a la vista del dominio desde un punto de vista normal a los planos ZY, mientras que las ubicadas a la izquierda muestran la vista normal a los planos XY.

En el instante $t^* = 186$, se observa una estructura coherente y ordenada, asociada a las ondas TS; esto es consistente con el hecho de que los perfiles en la condición inicial tengan una simetría respecto a la dirección Y (antes de que ocurra el máximo absoluto de la TKE).

En el segundo instante considerado (Figuras 6.5c y 6.5d), las capturas revelan una mayor presencia de estructuras de vórtices en la pared superior ($y = 2$) respecto a la inferior ($y = 0$); esto último se puede corroborar mirando capturas adicionales en las Figuras 6.6a y 6.6b que muestran el dominio desde otros puntos de vista. Este “desbalance” de estructuras da sustento a la idea supuesta de “pérdida en la simetría” de los perfiles de velocidad y temperatura antes mencionada. Nótese (Figura 6.5d), que si bien las estructuras ya no son simétricas respecto al plano ZX^2 en $y^* = 0$ (representado por la línea azul) se puede apreciar cierta simetría respecto al plano XY^3 en $z^* = 1.5$ (señalado por la línea roja). En este sentido, todavía se puede considerar que, en $t^* = 338$, el flujo conserva cierto grado de orden y coherencia.

En el último instante, donde el flujo ya se ha desarrollado y se encuentra en estado estadísticamente estacionario, las estructuras han dejado de ser coherentes y tienden a organizarse cerca de las paredes, en consistencia con los perfiles simétricos característicos de los flujos turbulentos completamente desarrollados [Machaca Abregu, 2024].

6.2.3. Factor de fricción de Darcy y número de Nusselt

En la Figura 6.7a se presenta la evolución temporal del factor de fricción de Darcy. En la **Zona I** ($0 < t^* < 150$), f permanece prácticamente constante y coincide con el valor inicial/laminar⁴ (línea a trazos azul). En las **Zonas II** y **III**, y parte de la **Zona IV** ($150 \lesssim t^* \lesssim 352$), se observa primero una disminución suave hasta un mínimo de $f = 0.0167$ en $t^* \approx 270$, seguida de un incremento pronunciado que alcanza su máximo en $t^* \approx 352$ ($f \approx 0.037$). A partir de ese pico, y en el resto de la **Zona IV** ($t^* \gtrsim 352$), f desciende y se estabiliza entre los valores 0.0275 y 0.033, en torno al valor de referencia del caso completamente desarrollado (línea a trazos negra). De esta forma, es posible distinguir con claridad la etapa transitoria y el posterior establecimiento de un régimen turbulento que persiste en el tiempo.

Por último, la Figura 6.7b presenta la evolución temporal del número de Nusselt. El valor se mantiene prácticamente constante y coincidente con la solución laminar hasta $t^* \approx 300$. A partir de allí, crece de manera monótona hasta el final de la simulación. La magnitud tiende al valor correspondiente al régimen turbulento desarrollado (convección mixta); sin embargo, el tiempo físico simulado no resulta suficiente para garantizar la convergencia. Esta misma situación puede observarse en la varianza de la temperatura y en el perfil de temperatura para $t^* = 1500$ aunque no de manera tan marcada como en el caso de Nu. Esto sugiere que se requiere extender la simulación para que las magnitudes térmicas alcancen su estado estadísticamente estacionario.

²En esta captura, la posición de este plano se encuentra en Y=1.

³En esta captura, la posición de este plano se encuentra en Z=1.5.

⁴Recuérdese que los valores de f y Nu obtenidos a partir de la solución laminar y de la condición inicial resultan equivalentes.

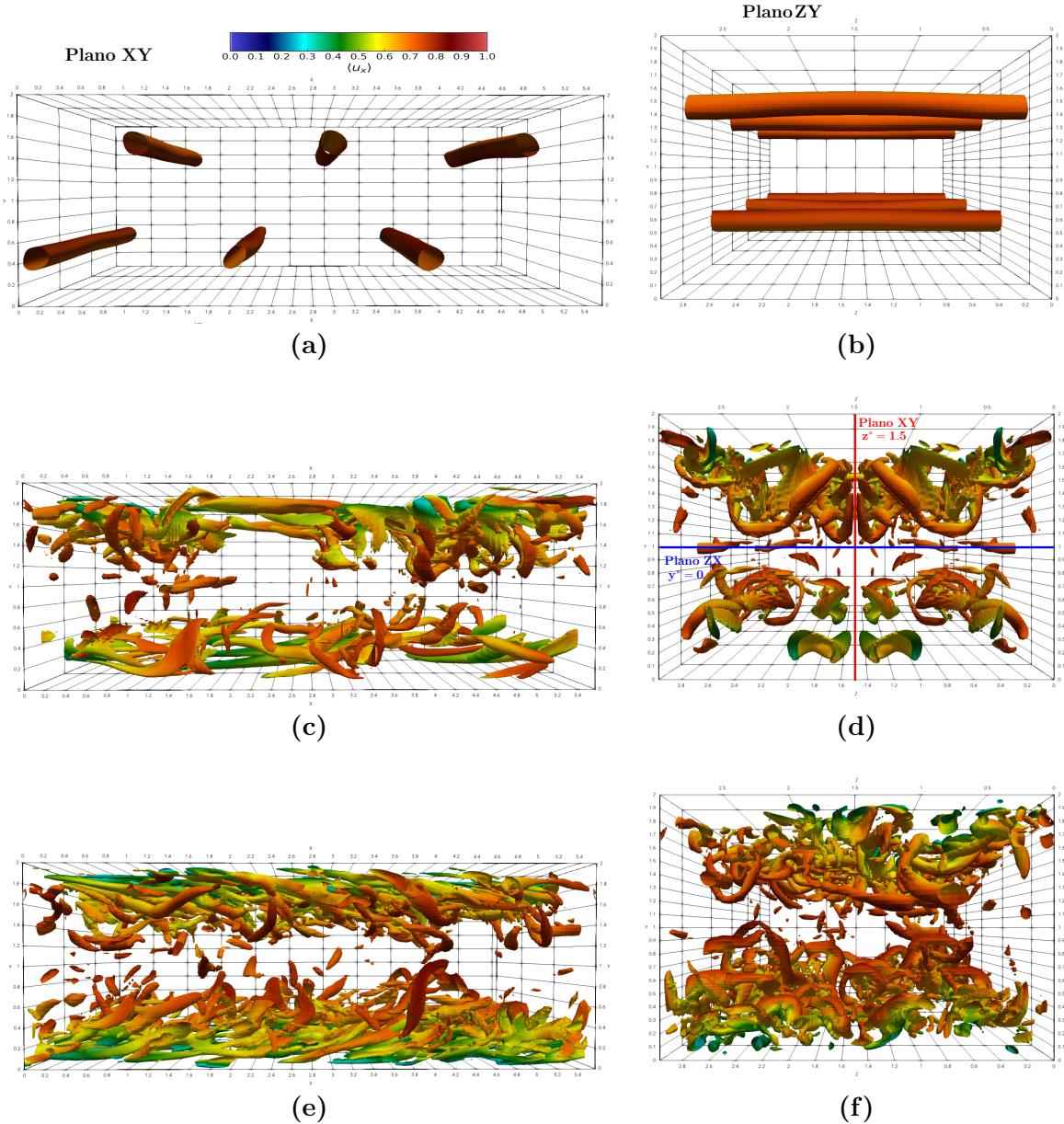


Figura 6.5: Ensayo A-C10. Capturas de las estructuras de vórtices para tres instantes de tiempo: $t^* = 186$ con $Q = 0.1$ ((a) y (b)), $t^* = 338$ con $Q = 0.5$ ((c) y (d)) y $t^* = 1500$ con $Q = 0.5$ ((e) y (f)). Aquí Q hace referencia al parámetro del Criterio Q. *Observación: la escala de colores de la captura en (a) se aplica al resto de figuras.*

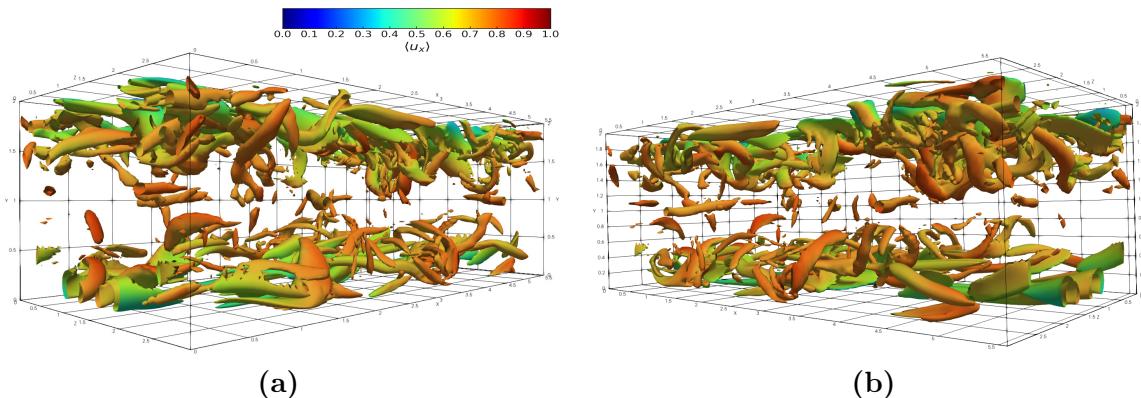


Figura 6.6: Capturas adicionales de las estructuras de vórtices para $t^* = 338$ desde otros puntos de vista ($Q = 0.5$).

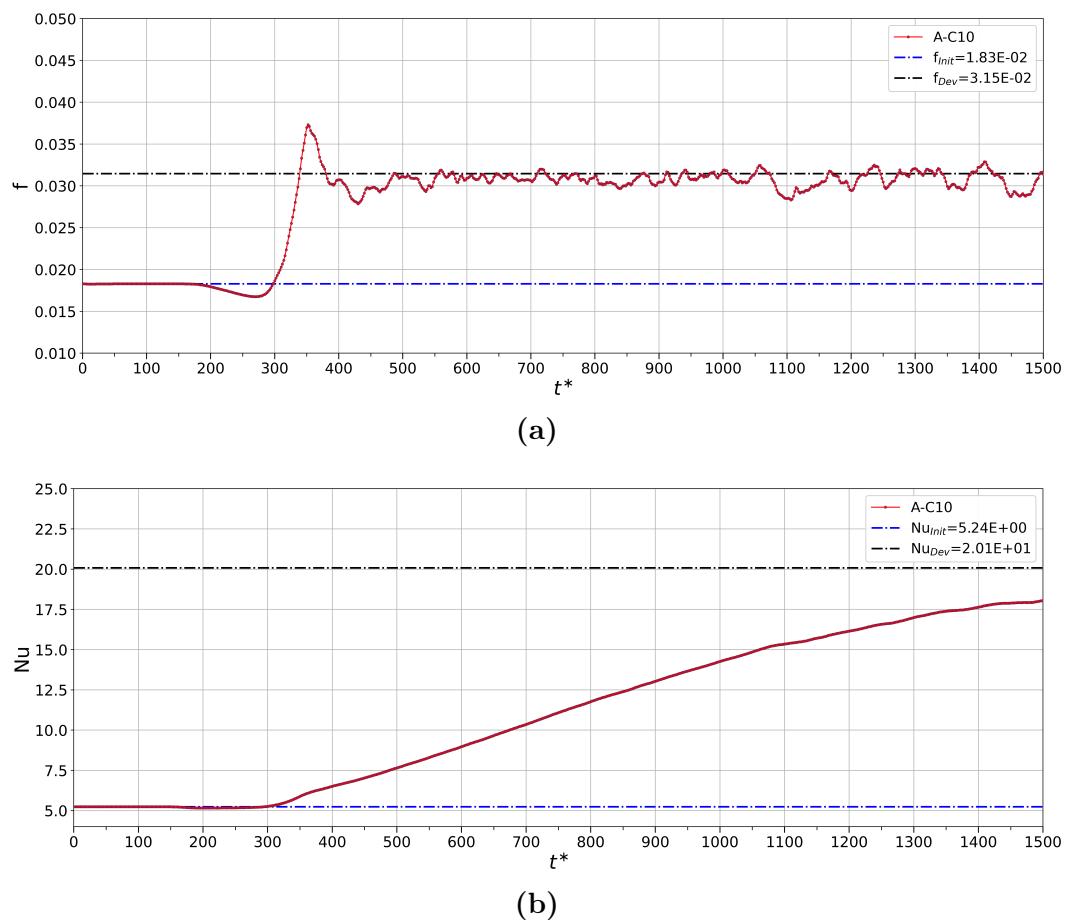


Figura 6.7: Evolución temporal de (a) factor de fricción de Darcy y (b) número de Nusselt, para el caso A-C10.

6.3. Análisis detallado del caso B-C2

6.3.1. TKE y varianza de la temperatura adimensional

En las Figuras 6.8 y 6.9 se expone, respectivamente, la evolución temporal de la energía cinética turbulenta (TKE) y la varianza de la temperatura; dicha evolución se separa en tres regiones. Se añaden valores constantes de referencia asociados al cálculo de dichas cantidades empleando la condición inicial y el flujo turbulento en estado estadísticamente estacionario.

- **Zona I** ($0 \lesssim t^* \lesssim 32$). Ambas cantidades se mantienen prácticamente constantes y coinciden con su valor de referencia asociado a la condición inicial. El sistema no transiciona.
- **Zona II** ($32 \lesssim t^* \lesssim 100$). Aquí, la TKE crece y alcanza un máximo absoluto en $t^* \approx 46$ ($\kappa_{\max} \approx 0.134$). De forma similar, la varianza de la temperatura crece hasta que alcanza un máximo absoluto en el mismo instante de tiempo que la TKE, con un valor $\langle \theta^{*'} \theta^{*'} \rangle_{\max} \approx 8700$. A partir de $t^* \approx 46$, ambas magnitudes decrecen sin retornar a los valores iniciales, y tienden hacia el estado estadísticamente estacionario del flujo turbulento correspondiente.
- **Zona III** ($t^* \gtrsim 100$). En esta etapa, ambas magnitudes experimentan un segundo máximo local, de mucha menor intensidad, en $t^* \approx 160$. Luego, para $t^* > 200$, ambas cantidades fluctúan en torno a las magnitudes constantes de referencia: la TKE se mantiene acotada entre 0.002 y 0.003, mientras que la varianza de la temperatura se encuentra entre 700 y 1300. Para $t^* > 200$, el sistema tiende hacia un nuevo estado de flujo, es decir, uno turbulento.

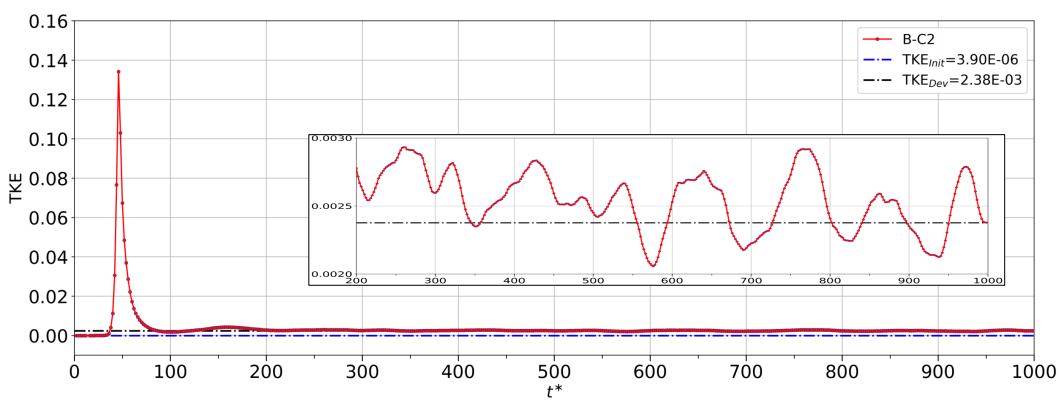


Figura 6.8: Evolución temporal de la energía cinética turbulenta para el caso B-C2.

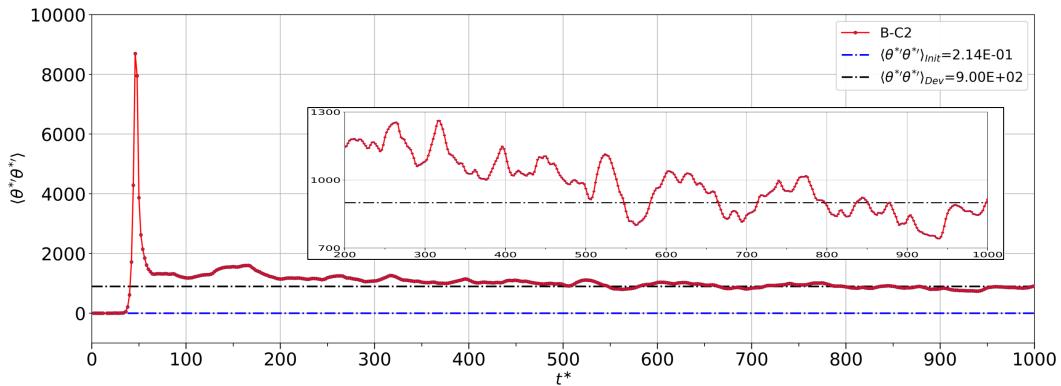


Figura 6.9: Evolución temporal de la varianza de la temperatura para el caso B-C2.

6.3.2. Perfiles de velocidad y temperatura

En las Figuras 6.10a y 6.10b se presentan, respectivamente, los perfiles de velocidad y de temperatura adimensional para $t^* = 2, 46, 160, 500, 1000$ (de izquierda a derecha). Como referencia, se incluye el perfil correspondiente al flujo completamente desarrollado en convección mixta. La selección de tiempos abarca el régimen laminar inicial ($t^* = 2$), el máximo absoluto en $t^* \simeq 46$, el máximo local subsiguiente de mucha menor intensidad, en $t^* \simeq 160$, y dos instantes posteriores en los que el flujo ya se encuentra en régimen turbulento.

En la etapa inicial, el perfil exhibe la simetría característica de la solución laminar en forma de “M”. En torno al máximo absoluto de la TKE, los perfiles se ensanchan levemente y muestran, nuevamente, una aparente pérdida de simetría. A medida que aumenta el tiempo adimensional, los perfiles de ambas magnitudes convergen hacia las soluciones de referencia del flujo completamente desarrollado. Al compararse con el ensayo A-C10 (Figura 6.4b), se observa que el aumento de la fuerza boyante tiene por efecto acelerar la evolución del campo de temperaturas, favoreciendo una convergencia más rápida hacia el flujo completamente desarrollado.

Nuevamente, se analizan las estructuras de vórtices mediante un enfoque cualitativo, con la intención de entender la aparente pérdida de simetría en los perfiles que ocurre a $t^* = 46$. En la Figura 6.11 se exponen capturas de las isosuperficies de Q asociadas a tres tiempos distintos: $t^* = 2$ (Figuras 6.11a y 6.11b), $t^* = 46$ (Figuras 6.11c y 6.11d) y $t^* = 500$ (Figuras 6.11e y 6.11f). Obsérvese que las capturas ubicadas a la derecha corresponden a la vista del dominio desde un punto de vista normal a los planos ZY , mientras que las ubicadas a la izquierda muestran la vista normal a los planos XY .

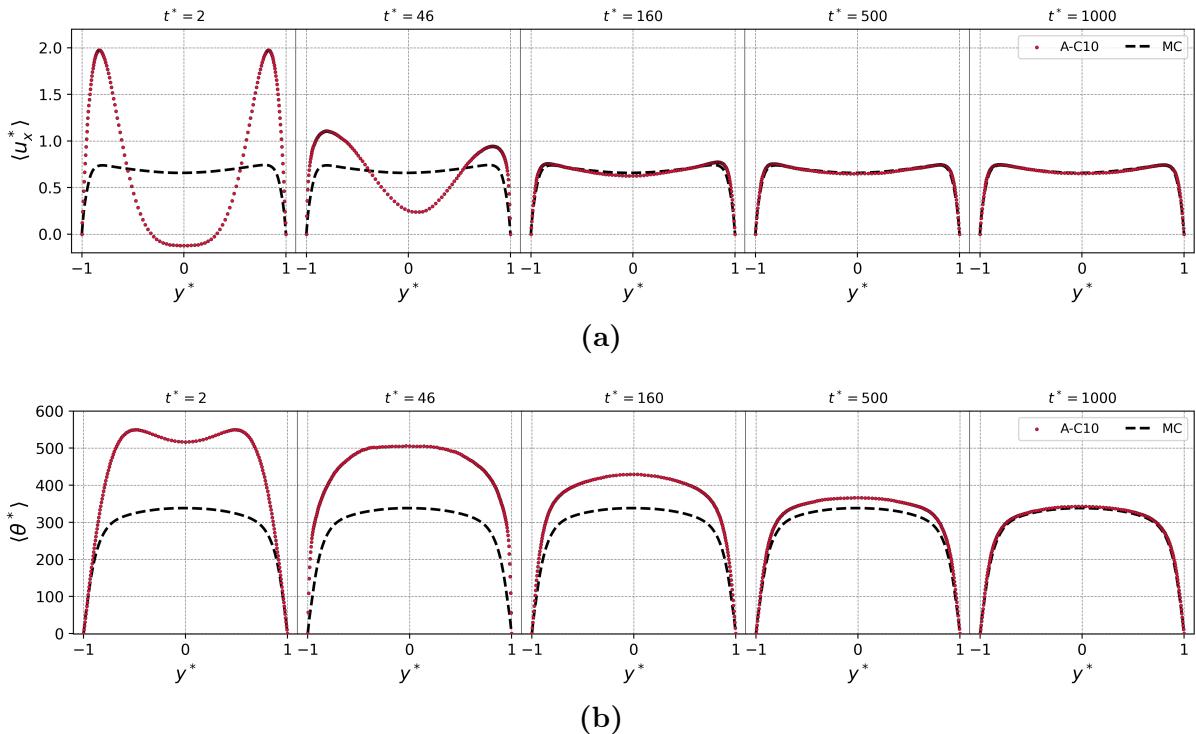


Figura 6.10: Perfiles de (a) velocidad y (b) temperatura adimensional para distintos instantes t^* correspondiente al caso B-C2.

En el instante $t^* = 2$, se observa una estructura coherente y ordenada, asociada a las ondas TS. Esto es consistente con la simetría de los que perfiles en la condición inicial; asimismo, dichas estructuras se posicionan muy cerca de las paredes al igual que ocurre con los máximos del perfil de velocidad.

En el segundo instante de tiempo considerado, se observa que las estructuras no se aglomeran de forma simétrica respecto a las paredes ($y^* = \pm 1$). Una visualización más clara, se aprecia en las Figuras 6.12a-6.12d donde se muestran cortes de planos ZY para $x^* = 1, 2, 4, 5$, respectivamente. A partir de estos cortes se observa que, a lo largo de la dirección X , las estructuras se distribuyen de manera no uniforme cerca de las paredes. Este “desequilibrio” de pequeñas estructuras produce una mezcla no homogénea de las cantidades, lo que podría dar cierto entendimiento, al menos conceptual, del hecho que los máximo del perfil de velocidad cerca las paredes sea levemente distinto en el dominio simulado.

Por su parte, en el último instante de tiempo considerado (estado estadísticamente estacionario), se aprecia que las estructuras tienden a aglomerarse cerca de las paredes y también carecen de coherencia y orden (véase Figuras 6.11e y 6.11f). Entonces, dado que la dinámica en ambas paredes es la misma en términos estadísticos, las cantidades de interés resultan, en promedio, simétricas respecto a la dirección Y . Esto es consistente con lo observado en el perfil de velocidad *streamwise* (Figura 6.10a a $t^* = 500$).

Resulta evidente que el efecto de la fuerza boyante impacta considerablemente en cómo el fluido evoluciona en el tiempo. Uno de los efectos más notables, como se menciona anteriormente, es la aceleración de la dinámica del sistema.

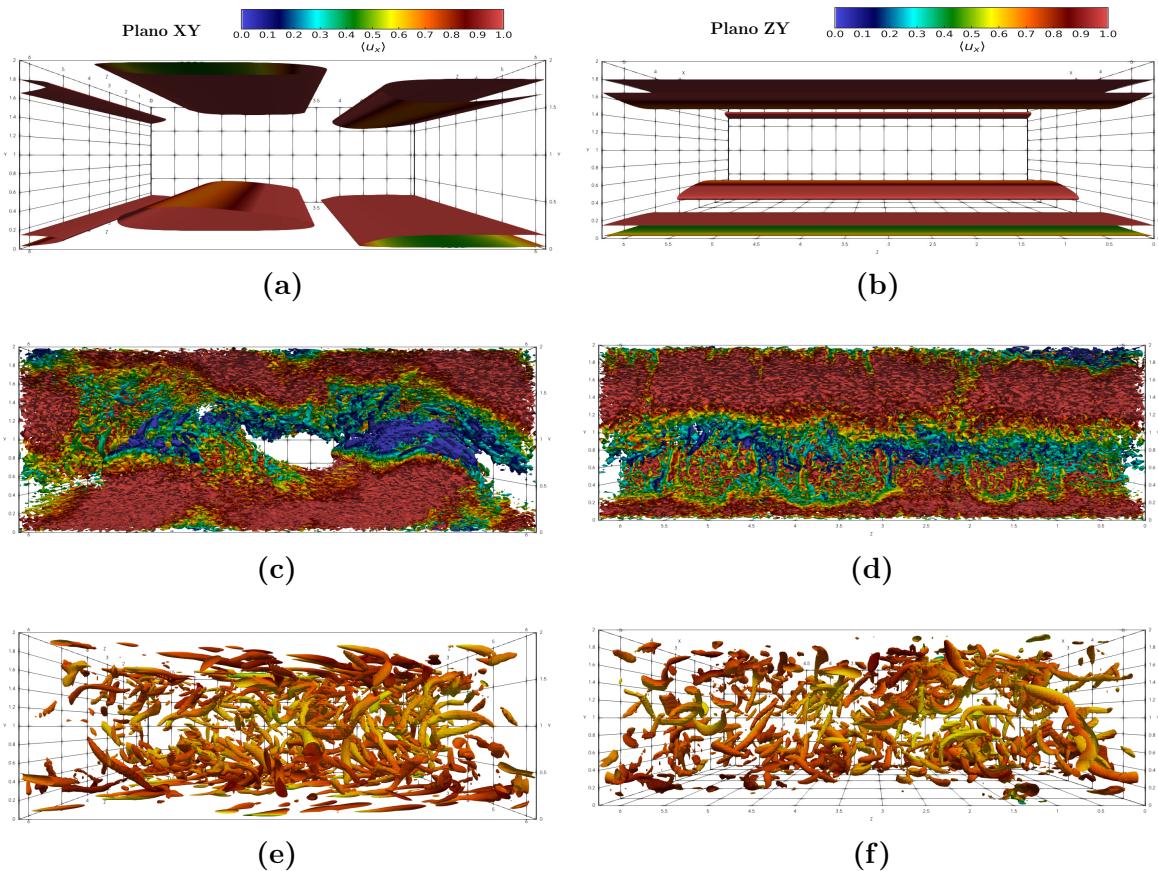


Figura 6.11: Ensayo B-C2. Capturas de las estructuras de vórtices para tres instantes de tiempo: $t^* = 2$ con $Q = 0.0005$ ((a) y (b)), $t^* = 46$ con $Q = 10$ ((c) y (d)) y $t^* = 500$ con $Q = 0.4$ ((e) y (f)). Aquí Q también hace referencia al parámetro del Criterio Q.

6.3.3. Factor de fricción de Darcy y número de Nusselt

La Figura 6.13 muestra la evolución temporal del factor de fricción de Darcy. En las **Zonas I y II** ($0 \lesssim t^* \lesssim 100$), desde el inicio hasta $t^* \approx 20$, f se mantiene próximo al valor laminar (línea a trazos azul). Entre $t^* \approx 20$ y $t^* \approx 46$ el factor de fricción experimenta dos picos sucesivos antes de culminar en un máximo absoluto de mucho mayor amplitud ($f_{\max} \approx 0.174$). A partir de ese punto, f decrece de manera pronunciada por debajo del valor laminar inicial. En la **Zona III** ($t^* \gtrsim 100$), la curva permanece en torno al valor de la referencia del flujo completamente desarrollado hasta $t^* \approx 400$; luego, la magnitud adquiere valores levemente por debajo del valor de referencia antes mencionado. Esto último es debido a que el sistema necesita más tiempo para desarrollarse. Este efecto se ve más claramente en la siguiente discusión.

La Figura 6.14 muestra la evolución temporal de Nu. Se observa que el número de Nusselt se mantiene cercano a la solución laminar inicial hasta $t^* \approx 34$, luego comienza a decrecer rápidamente hasta un valor mínimo en $t^* \approx 48$ ($\text{Nu}_{\min} \simeq 10.6$). A partir de allí, Nu comienza un período de crecimiento de manera monótona y sostenida, superando el valor inicial de referencia, tendiendo a la referencia del estado turbulento estadísticamente estacionario.

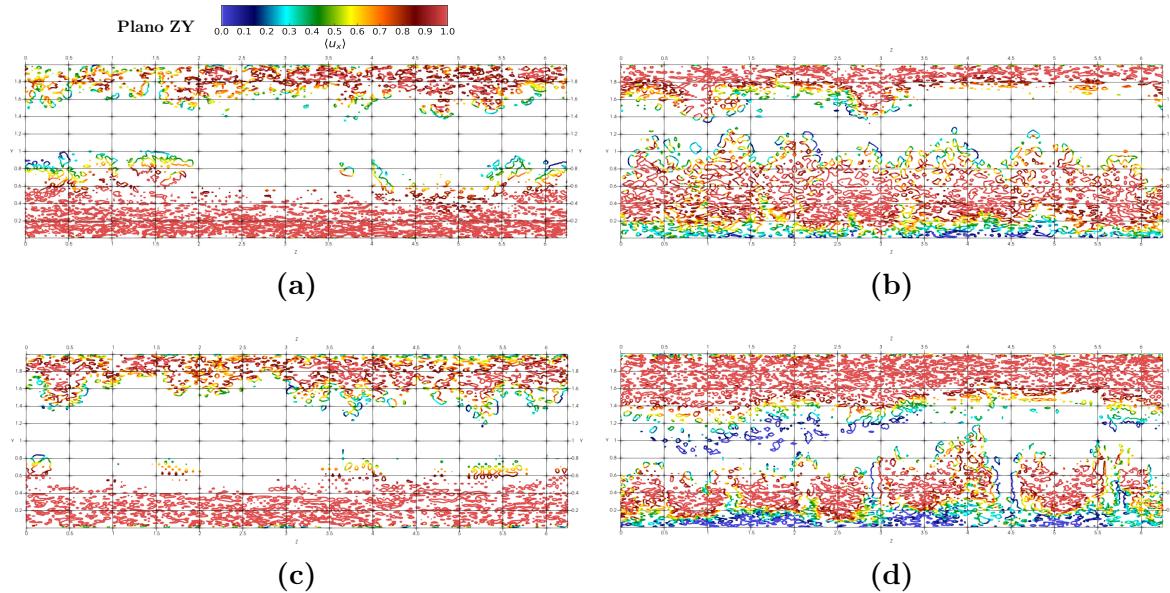


Figura 6.12: Ensayo B-C2. Cortes de las isosuperficies correspondientes al instante $t^* = 46$. Planos ZY para: (a) $x^* = 1$, (b) $x^* = 2$, (c) $x^* = 4$ y (d) $x^* = 5$.

El valor mínimo que alcanza Nu, coincide aproximadamente con el instante donde TKE es máximo y donde se aprecia, en la Figura 6.10, a $t^* = 46$, una gran variación en el perfil de velocidad respecto al correspondiente a $t^* = 2$. La TKE ha sido efectiva achatando el perfil de velocidad. Por otro lado, entre estos dos instantes de tiempo, el perfil de temperatura no ha cambiado significativamente, evidenciando un retardo en la evolución del campo de temperaturas respecto al observado en la velocidad *streamwise*. Matemáticamente, se aprecia que la temperatura *bulk* (ecuación 5.2) aumenta entre $t^* = 2$ y $t^* = 46$ ya que el perfil de velocidad deja de tener peso en los bordes, donde la temperatura es baja, y toma más relevancia en el centro del canal, donde la temperatura es mayor. El incremento en $\langle \theta_b^* \rangle$ corresponde a un decrecimiento del Nu. Físicamente, se puede recurrir nuevamente a la analogía de Prandtl [Aicher and Martin, 1997]. La difusión de energía por efectos de la turbulencia es, a primer orden, proporcional al gradiente de velocidades entre la capa viscosa y el centro del canal; esta cantidad disminuye notablemente desde la condición inicial hasta $t^* = 46$. Para tiempos mayores, el perfil de temperatura se reduce en forma monótona dando lugar a la reducción de la $\langle \theta_b^* \rangle$ o al incremento de Nu.

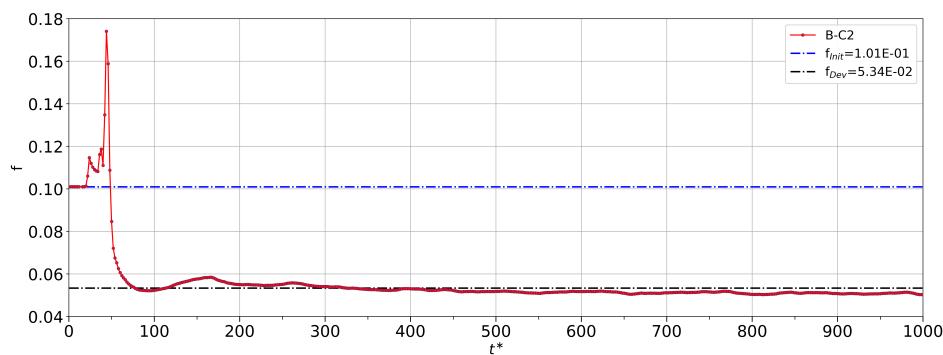


Figura 6.13: Evolución temporal del factor de fricción de Darcy para el caso B-C2.

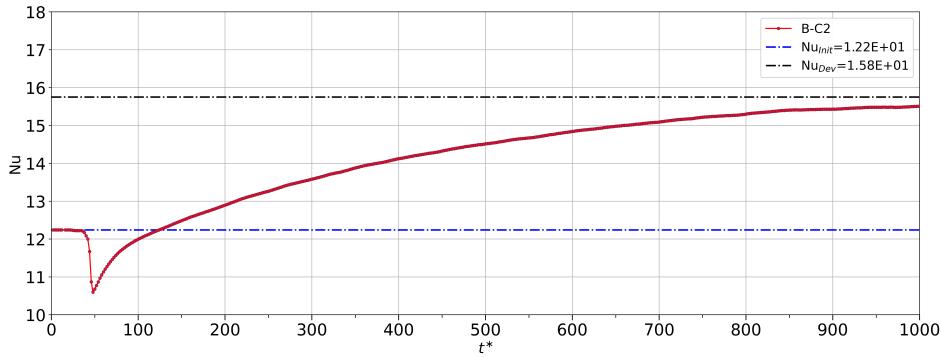


Figura 6.14: Evolución temporal de (a) factor de fricción de Darcy y (b) número de Nusselt, para el caso B-C2.

6.4. Comparación: A-C10 versus B-C2

A continuación se realiza una breve comparación entre los dos casos analizados para marcar similitudes y diferencias. En primer lugar, para el ensayo A-C10 ($Ri_b = 0.04$) fue requerido emplear una combinación de ondas bidimensionales y tridimensionales para inducir la inestabilidad del flujo y lograr que transicione. Lo contrario ocurre en el ensayo B-C2 ($Ri_b = 1.06$) donde bastó con utilizar únicamente una onda bidimensional.

El aumento de la fuerza boyante acelera el desarrollo hidrodinámico y en particular, el desarrollo térmico. Esto queda claro al inspeccionar los perfiles de velocidad y temperatura de ambos ensayos (Figuras 6.4 y 6.10). En el ensayo B-C2, dada la mayor relevancia relativa de la fuerza boyante respecto al ensayo A-C10, se observa que el campo de velocidad es cualitativamente estacionario en un tercio del tiempo de simulación (en A-C10 a $t^* = 1500$, en B-C2 a $t^* = 500$). En cuanto al Nu , el error relativo ε_r^5 es igual a un 10 % en A-C10 (a $t^* = 1500$) y un 2 % en B-C2 (a $t^* = 1000$).

Al inpeccionar la energía cinética turbulenta y la varianza de la temperatura, se distingue que en el ensayo A-C10 primero se produce un aumento y descenso de estas magnitudes (dos picos de menor intensidad) antes del crecimiento que da paso al establecimiento del nuevo estado de flujo; sin embargo, en B-C2 no existen aumentos y/o descensos intermedios de las magnitudes sino un crecimiento brusco que ocurre en un instante de tiempo temprano en comparación al ensayo A-C10. Es claro que en el ensayo B-C2, el sistema es mucho más sensible a las perturbaciones impuestas mientras que en el ensayo A-C10 necesita de la inestabilidad secundaria para desencadenar la transición.

En estos ensayos, f y Nu presentan estados transitorios no monótonos con máximos y mínimos que exceden los valores de la condición inicial laminar y del estado turbulento desarrollado. En particular, en A-C10 el coeficiente de fricción muestra un valle y luego un valor máximo antes de estabilizarse. En el ensayo B-C2, en cambio, parte de un valor inicial más alto y desciende rápidamente sin atravesar ningún valle. Para Nu , B-C2 exhibe una caída inicial pronunciada (ausente en A-C10), y tras ese transitorio, ambos casos crecen de

⁵Esto es, $\varepsilon_r = |\text{Nu}_{\text{Dev}} - \text{Nu}_{t_{\text{final}}} / \text{Nu}_{\text{Dev}}|$.

forma monótona sin alcanzar, en la ventana de tiempo simulada, el valor del estado turbulento desarrollado.

Por último, se realiza una comparación de la evolución temporal del Re_τ entre ambos ensayos. Dicha comparación se muestra en la Figura 6.15. Obsérvese que, en el ensayo A-C10 (representado por la curva azul), Re_τ parte de un valor laminar inicial, alcanza un valor máximo y luego se estabiliza en torno a un valor superior al del estado inicial. En cambio, en el ensayo B-C2 (representado por la curva verde), Re_τ también parte de un estado laminar inicial, crece hasta un máximo y posteriormente desciende de manera considerable hasta situarse por debajo del valor inicial. Esta diferencia se puede interpretar a partir de la definición de Re_τ (Sección 6.1), en la que aparece la velocidad de fricción, u_τ , que depende del gradiente de $\langle u_x^* \rangle$ en la pared ($d\langle u_x^* \rangle/dy$ evaluada en $y^* = -1$). En A-C10, el perfil de velocidad en $t^* = 2$ (Figura 6.4) muestra cualitativamente que la pendiente del perfil inicial es menor que la del caso turbulento desarrollado cerca de las paredes. Antes de estabilizarse, el sistema sufre un incremento brusco de turbulencia, evidenciado por un gran crecimiento de la TKE, que difunde el momento y aplana los perfiles (véase, por ejemplo, el perfil a $t^* = 750$ en la Figura 6.4). Como consecuencia, el gradiente de la velocidad *streamwise* cerca de la pared aumenta. Una explicación análoga se da para el ensayo B-C2. Aquí ocurre lo contrario, en $t^* = 2$ (Figura 6.10), la pendiente del perfil inicial cerca de la pared es mayor que la del caso turbulento desarrollado. Luego, antes de que el sistema se estabilice en un valor de Re_τ menor al inicial, el mismo presenta un crecimiento violento en su TKE, en $t^* = 46$, que coincide con un marcado achatamiento de los perfiles de velocidad (producida por la difusión de momento), y por ende, con un gradiente de velocidad *streamwise* menor que en el estado laminar inicial.

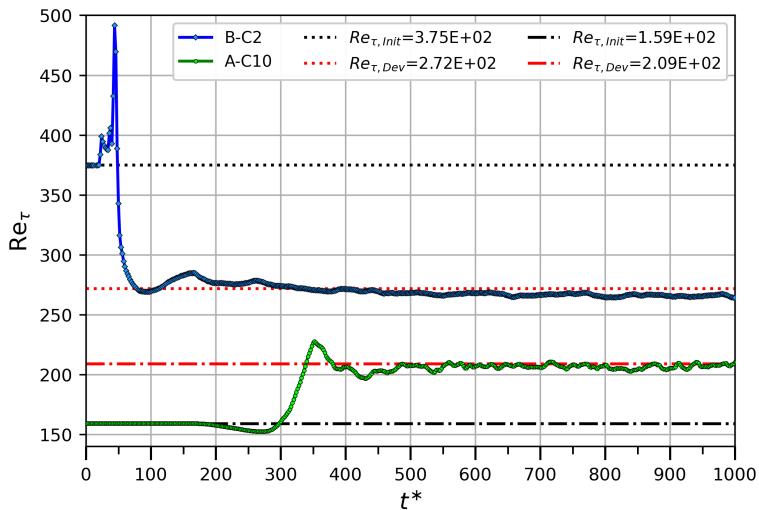


Figura 6.15: Comparación de la evolución temporal de Re_τ de los ensayos A-C10 y B-C2.

6.5. Sumario de los principales hallazgos

- **Efecto de la boyancia.** El aumento de la fuerza boyante hace que el sistema sea más inestable. Esto da lugar a que cierto tipo de perturbaciones induzcan la transición del flujo antes que otras. El caso con Ri_b más alto (ensayo B-C2) requirió únicamente una onda 2D mientras que para el caso con Ri_b más bajo (ensayo A-C10) fue necesario emplear una combinación de ondas 2D y 3D (inestabilidad secundaria). El desarrollo térmico se ve especialmente acelerado frente al aumento de la boyanca. En el ensayo A-C10, el campo hidrodinámico se estabiliza antes que el térmico mientras que en el ensayo B-C2 ese retraso se reduce de forma apreciable.
- **Estructuras y simetría.** Durante la evolución temporal, los perfiles de velocidad y temperatura experimentan, momentáneamente, una pérdida de simetría. Estas pueden vincularse a una distribución no homogénea de vórtices cerca de las paredes. En el régimen turbulento estas cantidades recuperan su simetría. El tamaño del dominio podría ser una causa del fenómeno observado.
- **Evolución temporal de cantidades de interés.** En la evolución temporal de las cantidades TKE, $\langle \theta^* \theta^* \rangle$, coeficiente de fricción f , y número de Nusselt Nu se observan estados transitorios no monótonos con máximos y/o mínimos que exceden los valores de la condición inicial laminar y del estado turbulento desarrollado.
- **Número de Nusselt.** En A-C10, Nu permanece cercano al valor laminar y luego crece monótonamente. En cambio, en el ensayo B-C2, el sistema presenta una caída brusca en el Nu, que coincide con el aumento máximo de la TKE y el achatamiento del perfil de velocidad en el mismo instante considerado. Esto se debe a la difusión de momento por el efecto de la turbulencia. Al considerar ambas condiciones iniciales, el sistema tiende al estado turbulento desarrollado pero sin alcanzarlo (al menos en la ventana de tiempo simulada).
- **Contraste en Re_τ .** En el ensayo A-C10 el estado final queda por encima del valor inicial mientras que en B-C2 queda por debajo. La diferencia se explica por el cambio del gradiente de $\langle u_x \rangle$ en la pared, asociado al aplanamiento de los perfiles, evidenciado por el aumento significativo en la TKE, debido al crecimiento brusco de la turbulencia.

Capítulo 7

Conclusiones

Acá se concluyen cosas

Apéndice A

Ecuaciones Promediadas y TKE budgets

A.1. Ecuaciones Promediadas

El primer paso para obtener las ecuaciones promediadas de conservación del sistema, consiste en descomponer los campos solución en una parte media, denotado por $\langle(\cdot)\rangle^1$, más una parte fluctuante, denotado por $(\cdot)'$. Esta separación entre la componente media y fluctuante se denomina *Descomposición de Reynolds* [Kundu et al., 2016, Pope, 2001]. Las mismas se representan en las relaciones A.1 siendo $i = x, y, z$.

$$u_i = \langle u_i \rangle + u'_i \quad , \quad p = \langle p \rangle + p' \quad , \quad \theta = \langle \theta \rangle + \theta' \quad (\text{A.1})$$

Las ecuaciones de conservación que satisfacen el flujo medio se obtienen sustituyendo las descomposiciones de Reynolds de arriba en las ecuaciones de gabinete 2.8, y luego tomando el promedio de las ecuaciones. Al realizar dichas acciones, reordenar los términos, y tener en cuenta que el promedio de un promedio sigue siendo él mismo, y que el promedio de una fluctuación es nulo [Pope, 2001], se encuentran las siguientes ecuaciones [Kundu et al., 2016]:

$$\begin{aligned} \partial_j \langle u_j \rangle &= \partial_j u'_j = 0 \quad , \\ \partial_t \langle u_i \rangle + \langle u_j \rangle \partial_j \langle u_i \rangle &= -\partial_i \langle p \rangle + \frac{1}{Re_o} \partial_j^2 \langle u_i \rangle - \partial_j \langle u'_j u'_i \rangle + Ri_o \hat{g}_i \langle \theta \rangle \quad , \\ \partial_t \langle \theta \rangle + \langle u_j \rangle \partial_j \langle \theta \rangle &= \frac{1}{Re_o Pr} \partial_j^2 \langle \theta \rangle + \langle u_x \rangle - \partial_j \langle u'_j \theta' \rangle \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Por simplicidad de notación, se han omitido los superíndices “*”. En las ecuaciones precedentes: $i, j = x, y, z$; $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \alpha}$ siendo $\alpha = x, y, z, t$; \hat{g}_i son las componentes del vector $\widehat{\mathbf{e}_g}$; $\langle u'_j u'_i \rangle$ son las componentes del **Tensor de Reynolds**; y $\langle u'_j \theta' \rangle$ es el **Flujo de Calor Turbulento** en la dirección j -ésima. El proceso para obtener estas ecuaciones se denomina *Reynolds averaging* y el sistema de ecuaciones A.2 se conoce como ecuaciones RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes*).

¹Esta cantidad es calculada de acuerdo a lo considerado en la Sección 2.3.

A.2. TKE budgets

A partir de las ecuaciones de gabinete adimensionales (relaciones 2.1), las ecuaciones RANS descritas en la sección anterior (ecuaciones A.2) y la descomposición de Reynold (relaciones A.1) es posible obtener² las ecuaciones que describen la dinámica de los budgets o balances de cantidades de segundo orden. Ejemplos de ello son: las componentes $\langle u'_i u'_j \rangle$ del tensor de Reynold, la energía cinética turbulenta κ (o TKE), los flujos de calor turbulento $\langle u'_j \theta' \rangle$ y la varianza de la temperatura $\langle \theta' \theta' \rangle$. En particular, en este trabajo se utiliza los budgets de la energía cinética turbulenta (Capítulo 5), los cuales se expresan en la ecuación A.3 donde $\kappa = \langle u'_i u'_i \rangle / 2$.

$$\partial_t \kappa + \langle u_n \rangle \partial_n \kappa = \mathcal{P} + \mathcal{T} + \Pi + \mathcal{D} + \mathcal{B} - \varepsilon \quad (\text{A.3})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T} = -\frac{1}{2} \partial_n \langle u'_i u'_n u'_i \rangle$

Producción: $\mathcal{P} = -\langle u'_i u'_n \rangle \partial_n \langle u_i \rangle$

Disipación: $\mathcal{D} = -\frac{1}{\text{Re}_o} \langle \partial_n u'_i \partial_n u'_i \rangle$ (A.4)

Correlación Vel - Grad Presión: $\Pi = -\langle \partial_i (u'_i p') \rangle$

Prod-Boyante: $\mathcal{B} = \text{Ri}_o \hat{g}_i \langle u'_i \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon = \frac{1}{\text{Re}_o} \partial_n^2 \kappa$

Dado que \mathcal{B} y \mathcal{P} son cantidades que aparecen en la Sección 5.4, se dejan expresadas en su forma explícita:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= -\langle u'_i u'_n \rangle \partial_n \langle u_i \rangle \\ &= -\sum_i \sum_n \langle u'_i u'_n \rangle \partial_n \langle u_i \rangle \\ &= -[\langle u'_x u'_x \rangle \partial_x \langle u_x \rangle + \langle u'_y u'_y \rangle \partial_y \langle u_y \rangle + \langle u'_z u'_z \rangle \partial_z \langle u_z \rangle \\ &\quad + \langle u'_x u'_y \rangle (\partial_y \langle u_x \rangle + \partial_x \langle u_y \rangle) \\ &\quad + \langle u'_x u'_z \rangle (\partial_z \langle u_x \rangle + \partial_x \langle u_z \rangle) \\ &\quad + \langle u'_z u'_y \rangle (\partial_y \langle u_z \rangle + \partial_z \langle u_y \rangle)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \text{Ri}_o \hat{g}_i \langle u'_i \theta' \rangle \\ &= -\text{Ri}_o \langle u'_x \theta' \rangle \end{aligned}$$

²Véase las referencias [Pope, 2001, Kundu et al., 2016, Durbin and Reif, 2011].

Apéndice B

Cálculo de la constante \mathcal{A} (Capítulo 2)

Como se menciona en el Capítulo 2 la temperatura en la pared, promediada en el tiempo y en la dirección Z , crece linealmente con la coordenada x , esto es, $\langle T_w \rangle = \mathcal{A}x$. Se procede entonces con el cálculo de la constante \mathcal{A} . Esto se realiza mediante un balance de energía en el dominio de simulación, es decir, $L_x \times L_y \times L_z$ (véase Figura B.1).

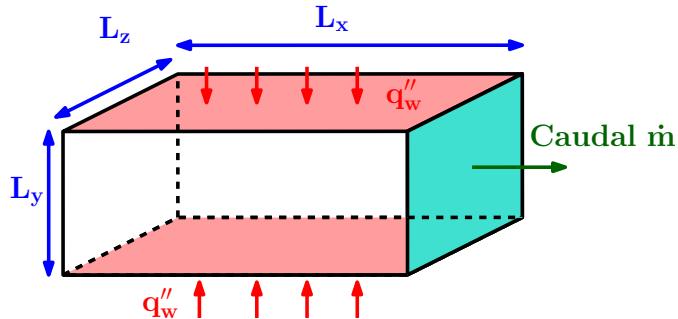


Figura B.1: Esquema del balance de energía.

De acuerdo a [Cengel and Ghajar, 2015], dicho balance puede expresarse de la forma:

$$q''S = c_p\dot{m}(T_{out} - T_{in})$$

donde q'' es el flujo externo de calor, S es el área de sección transversal, c_p es el calor específico a presión constante, \dot{m} es el flujo másico, T_{out} la temperatura del fluido a la salida ($x = L_x$) y T_{in} la temperatura del fluido a la entrada ($x = 0$). Considérese, por un lado, el cambio de variable realizado en la temperatura para satisfacer las condiciones de contorno periódicas (relaciones 2.2 y 2.3), esto es, $T(x, y, z, t) = \langle T_w \rangle - \theta(x, y, z, t)$; y por el otro, que $T_{out} = T(x = L_x, y, z, t)$ y $T_{in} = T(x = 0, y, z, t)$. Entonces, la diferencia de temperatura entre la entrada y la salida se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
(T_{out} - T_{in}) &= T(x = L_x, y, z, t) - T(x = 0, y, z, t) \\
&= \left[\mathcal{A} L_x - \underbrace{\theta(x = L_x, y, z, t)}_{=0} \right] - \underbrace{[\mathcal{A} 0 - \theta(x = 0, y, z, t)]}_{=0} \\
&= \mathcal{A} L_x
\end{aligned}$$

Luego, si se tiene en cuenta que $q'' = 2q''_w$, $S = L_x L_z$ y se toma el flujo másico como la aproximación $\dot{m} \simeq \rho_o U_b L_y L_z$ (donde U_b es la velocidad *bulk* [Pope, 2001]), al juntar todo lo anterior se encuentra que

$$2q''_w = c_p \rho_o U_b \mathcal{A} L_y .$$

Finalmente, recordando que $L_y = 2d$, donde d es el semiancho del canal, se obtiene la expresión buscada:

$$\mathcal{A} = \frac{q''_w}{\rho_o c_p U_b d} . \quad (\text{B.1})$$

Apéndice C

Perfiles Completamente Desarrollados

En este apéndice se exponen los perfiles de cantidades de primer y segundo orden (completamente desarrollados), obtenidos vía simulaciones, para los números adimensionales: $\text{Re}_o = 2100, 3150, 4278$ y $\text{Pr} = 0.071, 0.71$.

$\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0.71$

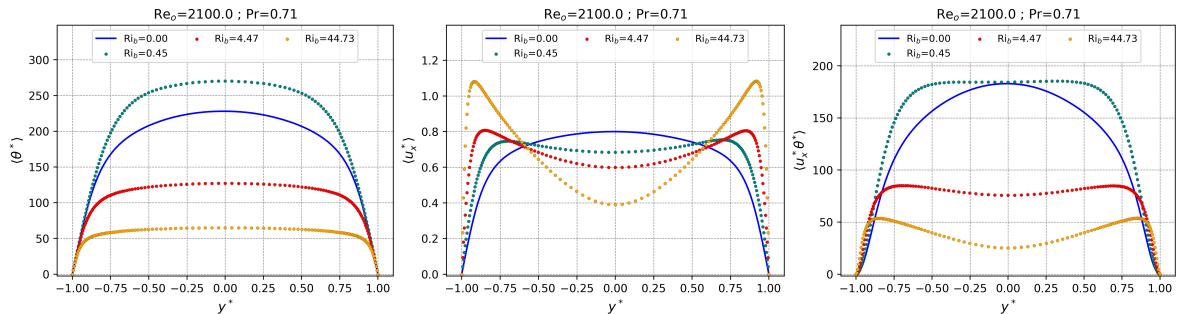


Figura C.1: Perfiles de $\langle \theta^* \rangle$, $\langle u_x^* \rangle$ y $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

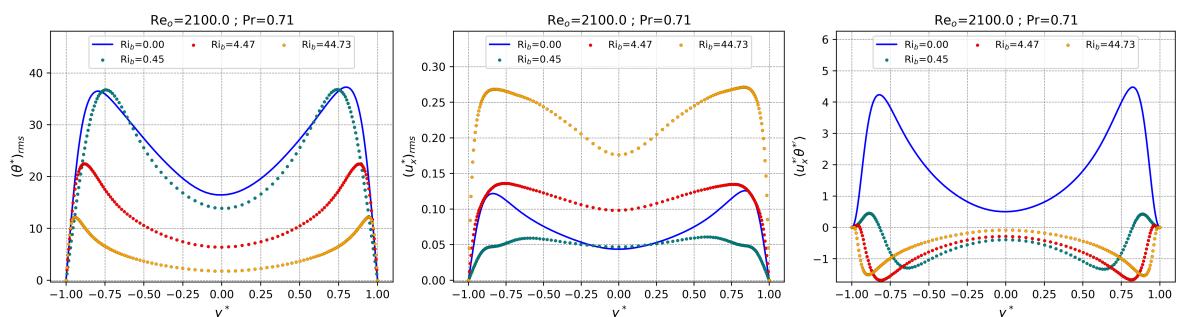


Figura C.2: Perfiles de $(\theta^*)_{\text{rms}}$, $(u_x^*)_{\text{rms}}$ y $\langle u_x^{*\prime} \theta^{*\prime} \rangle$.

$\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0.071$

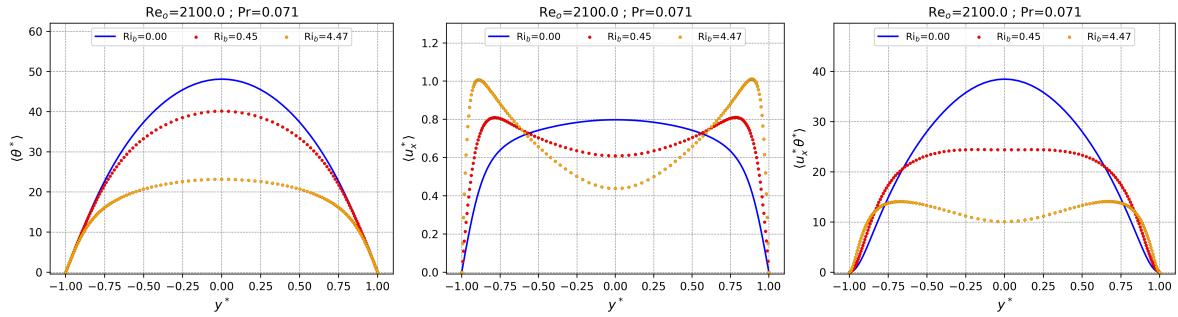


Figura C.3: Perfiles de $\langle \theta^* \rangle$, $\langle u_x^* \rangle$ y $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

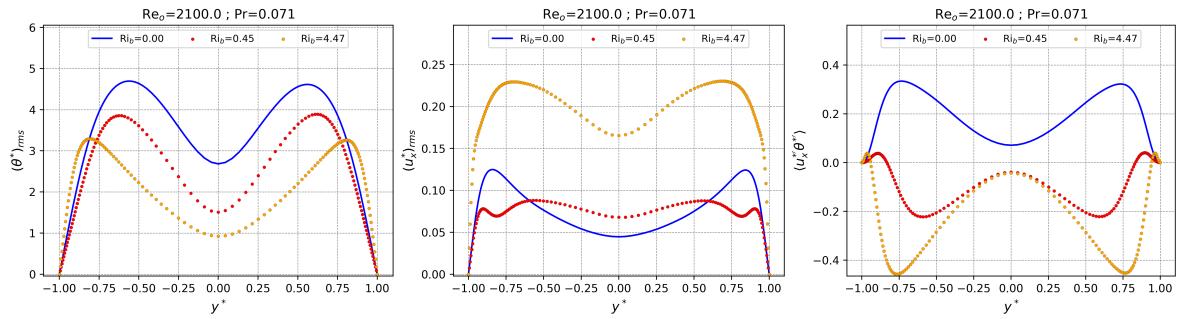


Figura C.4: Perfiles de $(\theta^*)_{\text{rms}}$, $(u_x^*)_{\text{rms}}$ y $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

$\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0.71$

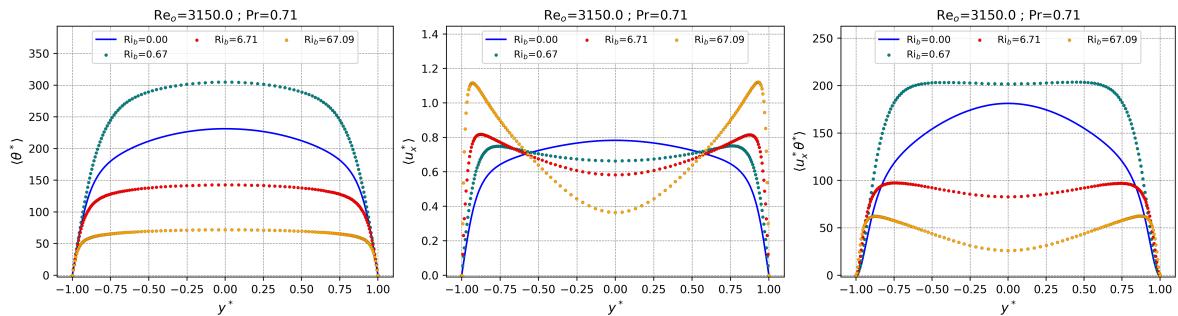


Figura C.5: Perfiles de $\langle \theta^* \rangle$, $\langle u_x^* \rangle$ y $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

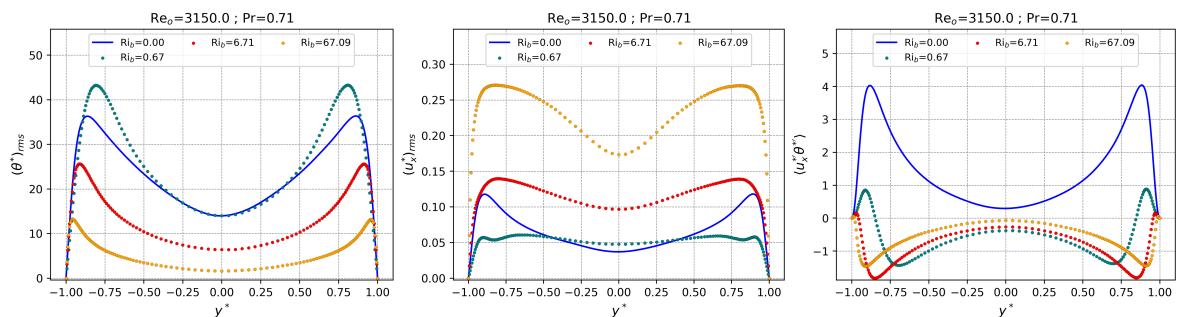


Figura C.6: Perfiles de $(\theta^*)_{\text{rms}}$, $(u_x^*)_{\text{rms}}$ y $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

$\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0.071$

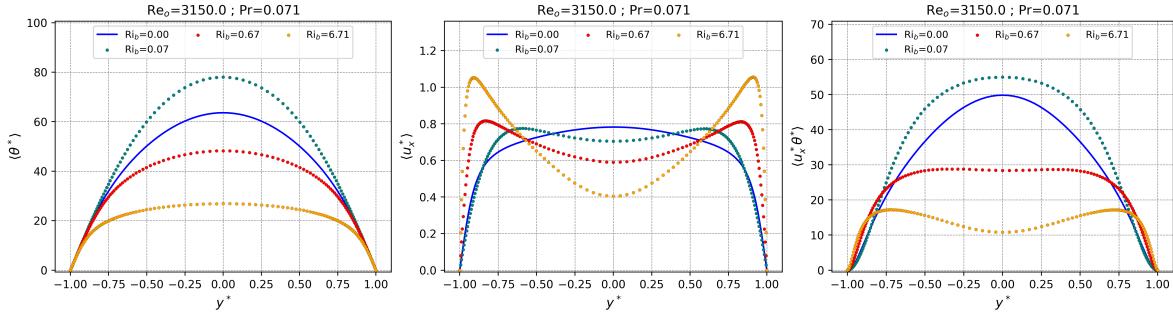


Figura C.7: Perfiles de $\langle \theta^* \rangle$, $\langle u_x^* \rangle$ y $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

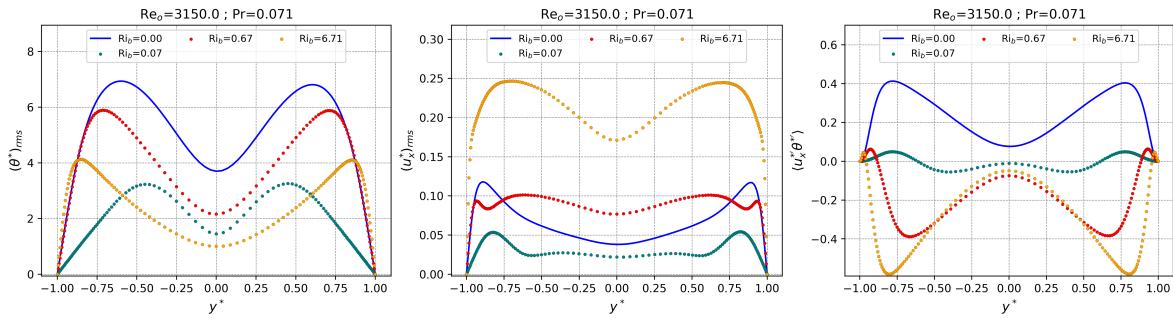


Figura C.8: Perfiles de $(\theta^*)_{\text{rms}}$, $(u_x^*)_{\text{rms}}$ y $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

$\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0.71$

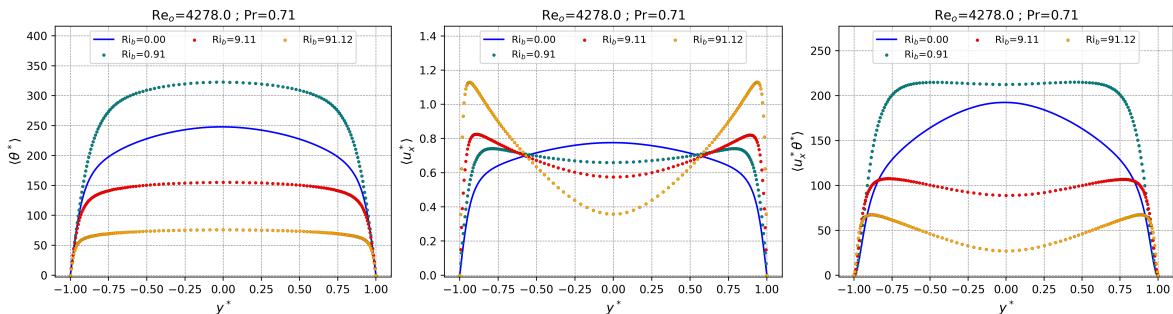


Figura C.9: Perfiles de $\langle \theta^* \rangle$, $\langle u_x^* \rangle$ y $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

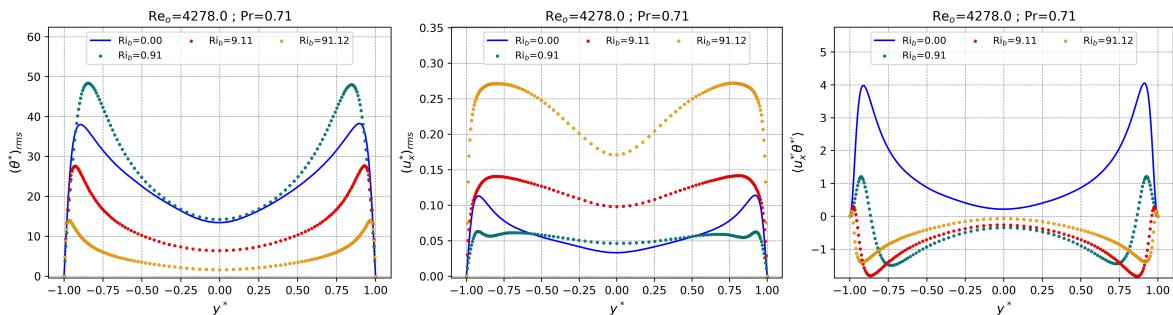


Figura C.10: Perfiles de $(\theta^*)_{\text{rms}}$, $(u_x^*)_{\text{rms}}$ y $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

$\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0.071$

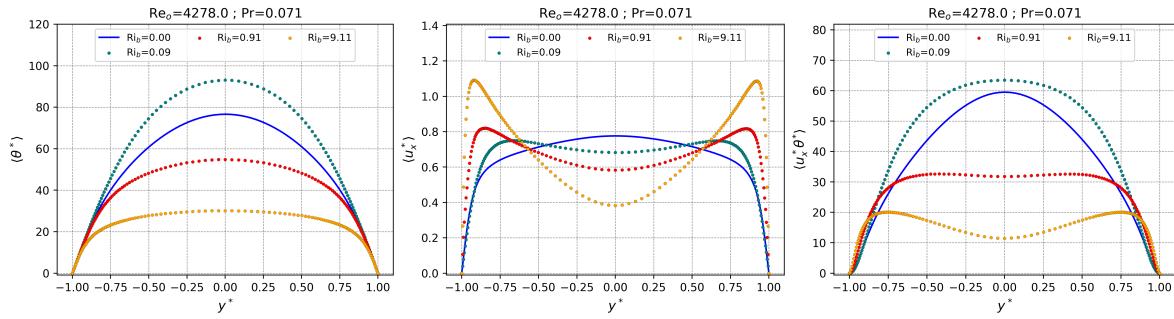


Figura C.11: Perfiles de $\langle \theta^* \rangle$, $\langle u_x^* \rangle$ y $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

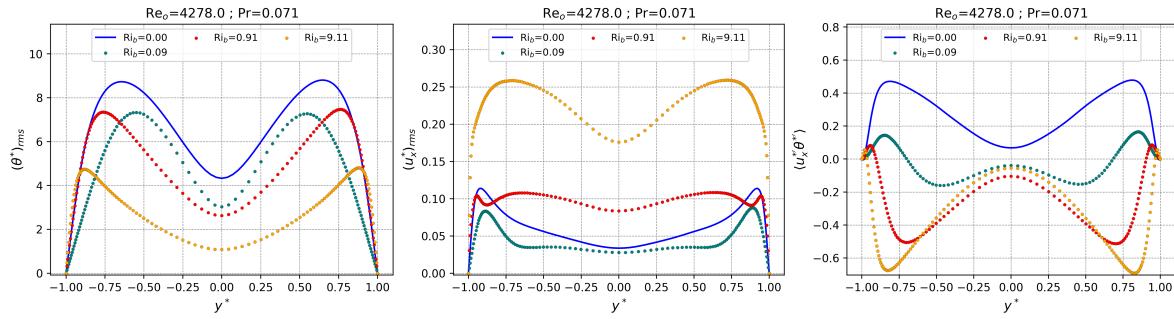


Figura C.12: Perfiles de $\langle (\theta^*)_{rms} \rangle$, $\langle (u_x^*)_{rms} \rangle$ y $\langle u_x^* \theta^* \rangle$.

Apéndice D

Autofunciones y Espectros de autovalores OSMC (Capítulo 6)

Caso A ($\text{Ri}_b = 0.04$)

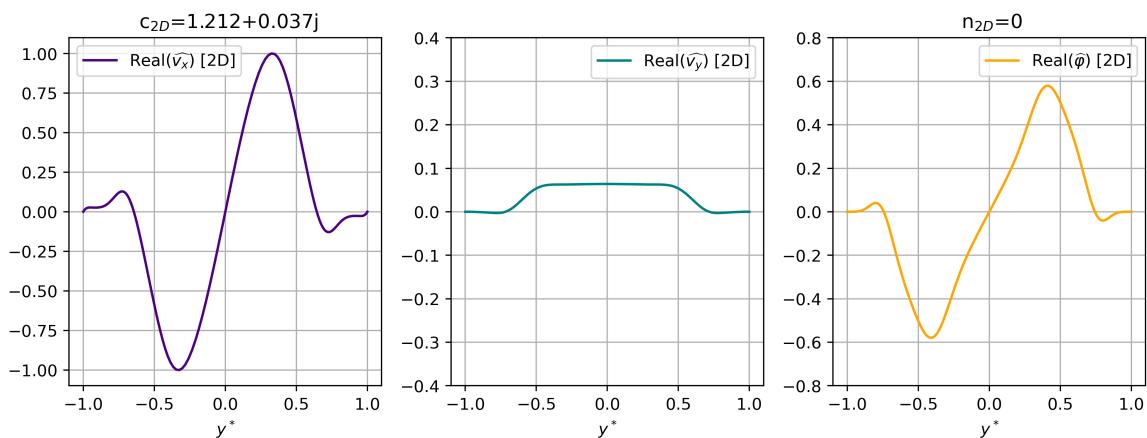


Figura D.1: Autofunciones 2D de los ensayos A-C1, A-C2, A-C3 y A-C4.

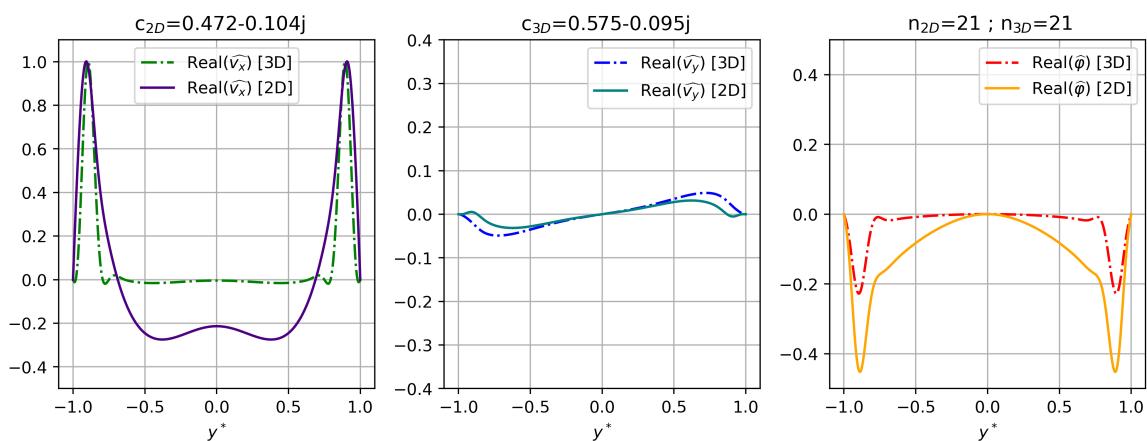


Figura D.2: Autofunciones 2D y 3D de los ensayos A-C7 y A-C9.

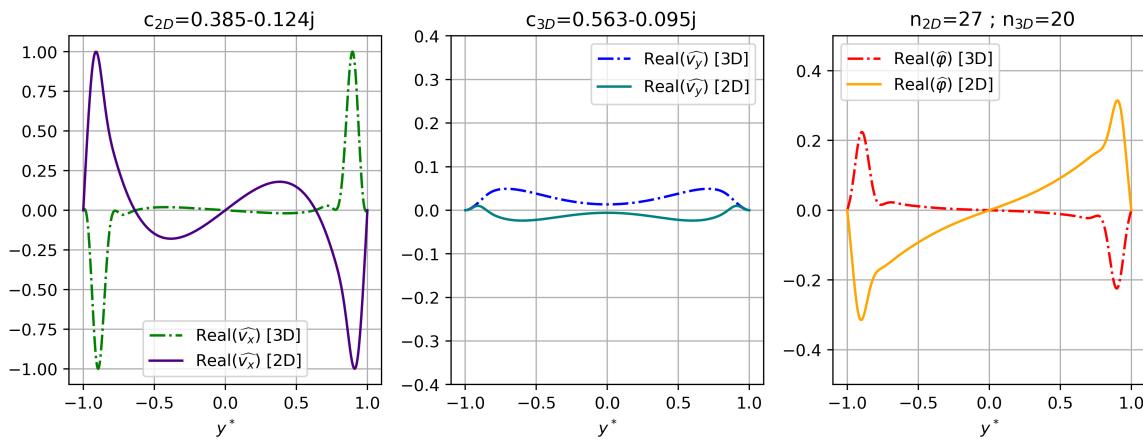


Figura D.3: Autofunciones 2D y 3D de los ensayos A-C8 y A-C10.

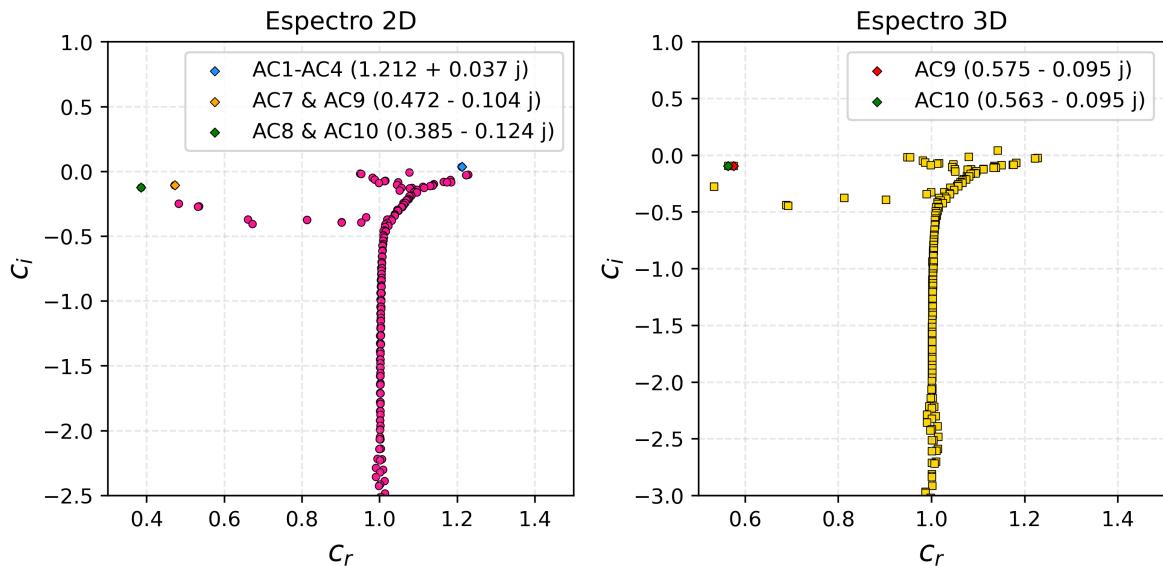


Figura D.4: Espectros de autovalores 2D y 3D ($\text{Ra} = 65$).

Caso B ($\text{Ri}_b = 1.06$)

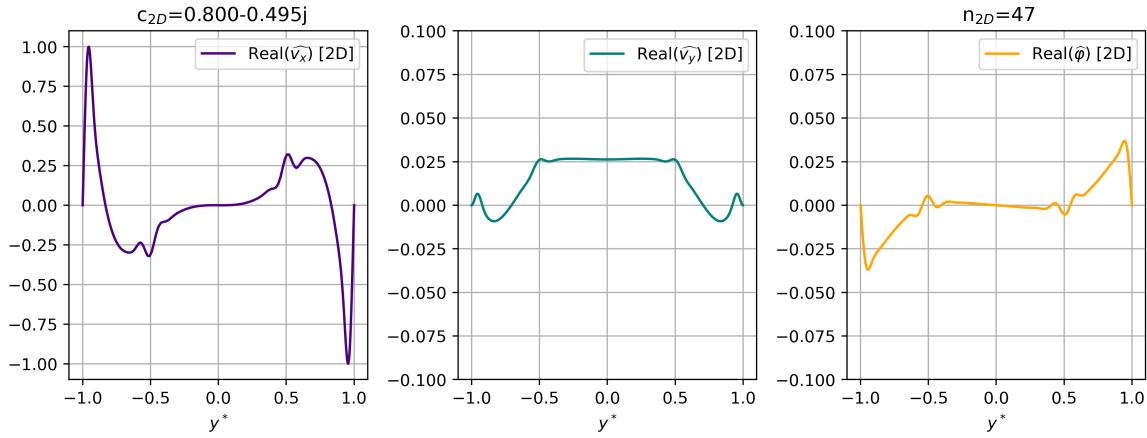


Figura D.5: Autofunciones 2D del ensayo B-C2.

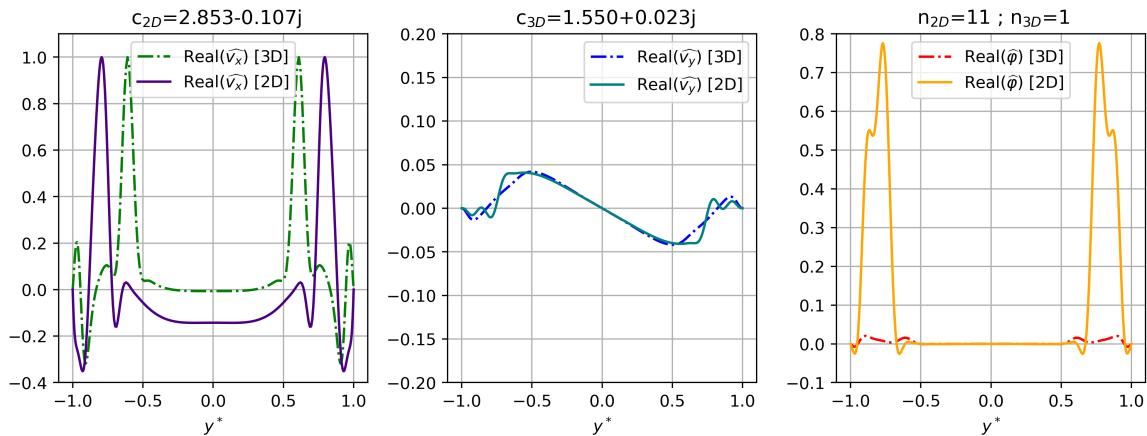


Figura D.6: Autofunciones 2D y 3D de los ensayos B-C3 y B-C5.

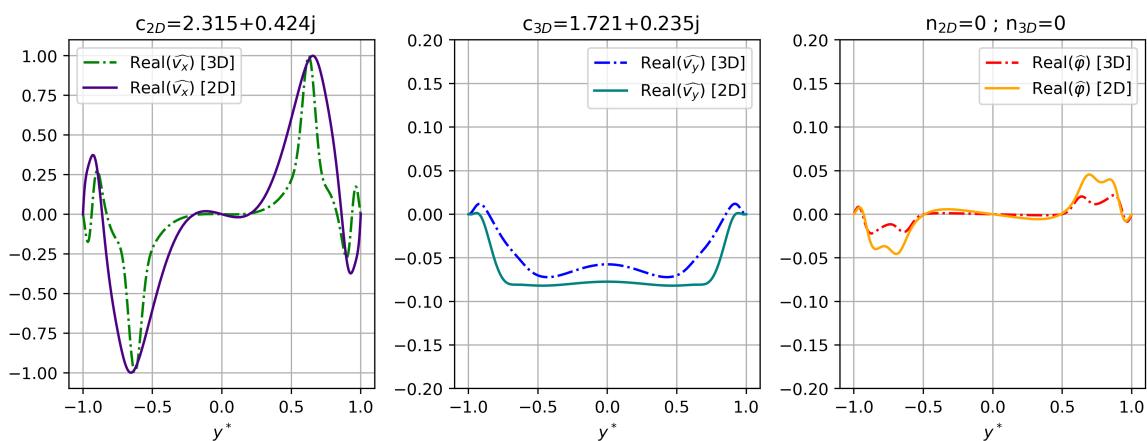


Figura D.7: Autofunciones 2D y 3D del ensayo B-C4.

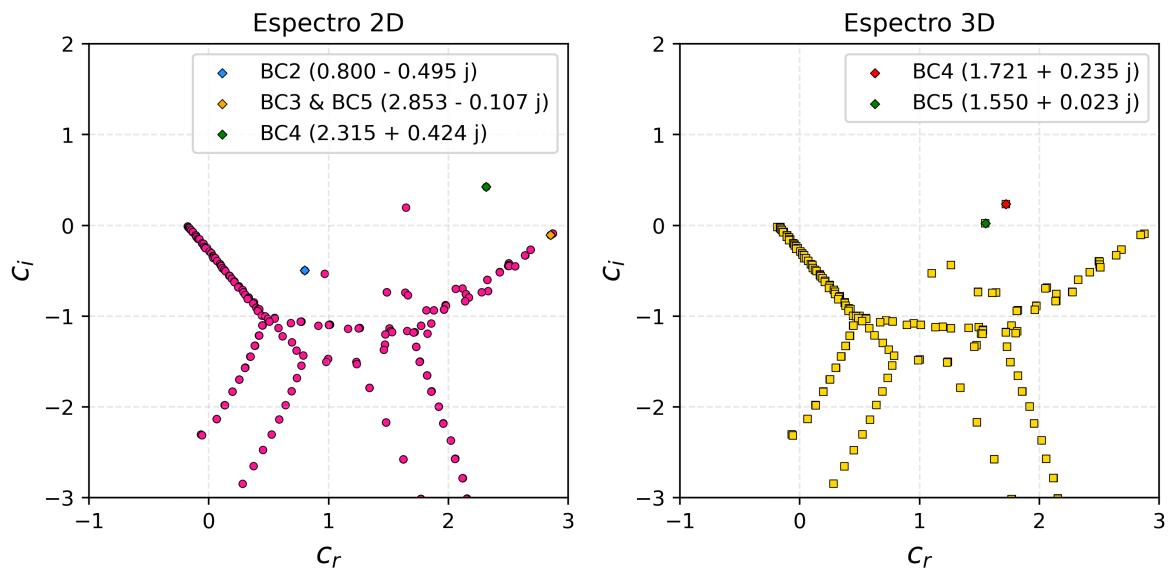


Figura D.8: Espectros de autovalores 2D y 3D ($\text{Ra} = 1775$).

Bibliografía

- [Abregu et al., 2023] Abregu, W. I. M., Dari, E. A., and Teruel, F. E. (2023). Dns of heat transfer in a plane channel flow with spatial transition. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [Aicher and Martin, 1997] Aicher, T. and Martin, H. (1997). New correlations for mixed turbulent natural and forced convection heat transfer in vertical tubes. *International journal of heat and mass transfer*.
- [Bartholomew et al., 2020] Bartholomew, P., Deskos, G., Frantz, R. A., Schuch, F. N., Lamballais, E., and Laizet, S. (2020). Xcompact3d: An open-source framework for solving turbulence problems on a cartesian mesh. *SoftwareX*.
- [Bénard, 1901] Bénard, H. (1901). Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*.
- [Carr et al., 1973] Carr, A., Connor, M., and Buhr, H. (1973). Velocity, temperature, and turbulence measurements in air for pipe flow with combined free and forced convection.
- [Cengel and Ghajar, 2015] Cengel, Y. A. and Ghajar, A. J. (2015). *Heat and Mass Transfer:Fundamentals and Applications*. McGraw-Hill Education.
- [Chen and Chung, 1996] Chen, Y.-C. and Chung, J. (1996). The linear stability of mixed convection in a vertical channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*.
- [Chen and Chung, 1998] Chen, Y.-C. and Chung, J. (1998). Stability of mixed convection in a differentially heated vertical channel.
- [Chen and Chung, 2002] Chen, Y.-C. and Chung, J. (2002). A direct numerical simulation of k-and h-type flow transition in a heated vertical channel. *Physics of Fluids*.
- [Chen and Chung, 2003] Chen, Y.-C. and Chung, J. (2003). A direct numerical simulation of transition phenomena in a mixed convection channel flow. *Computers and Fluids*.
- [Dittus and Boelter, 1930] Dittus, F. W. and Boelter, L. M. K. (1930). Heat transfer in automobile radiators of the tubular type. *University of California Publications in Engineering*.
- [Drazin and Reid, 2004] Drazin, P. G. and Reid, W. H. (2004). *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.

- [Durbin and Reif, 2011] Durbin, P. A. and Reif, B. P. (2011). *Statistical theory and modeling for turbulent flows*. John Wiley & Sons.
- [Easby, 1978] Easby, J. (1978). The effect of buoyancy on flow and heat transfer for a gas passing down a vertical pipe at low turbulent reynolds numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [Gebhart et al., 1988] Gebhart, B., Jaluria, Y., and Mahajan, R. L. (1988). *Buoyancy-Induced Flows and Transport*. Springer.
- [Ghajar, 2019] Ghajar, A. J. (2019). Heat transfer and pressure drop in the transition region of smooth horizontal circular tubes with different inlet configurations. In *Advances in heat transfer*. Elsevier.
- [Guo and Prasser, 2022] Guo, W. and Prasser, H.-M. (2022). Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in liquid metals in buoyancy-affected vertical channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [Hall and Jackson, 1969] Hall, W. and Jackson, J. (1969). Laminarization of a turbulent pipe flow by buoyancy forces. asme paper. Technical report.
- [Herbert, 1983] Herbert, T. (1983). Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances. *Physics of Fluids*.
- [Hunt et al., 1988] Hunt, J. C., Wray, A. A., and Moin, P. (1988). Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. *Studying turbulence using numerical simulation databases, 2. Proceedings of the 1988 summer program*.
- [Incropera et al., 2006] Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., Lavine, A. S., et al. (2006). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley and Sons.
- [Jackson et al., 1989] Jackson, J., Cotton, M., and Axcell, B. (1989). Studies of mixed convection in vertical tubes. *International journal of heat and fluid flow*.
- [Kader, 1981] Kader, B. (1981). Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *International journal of heat and mass transfer*.
- [Kao and Park, 1970] Kao, T. W. and Park, C. (1970). Experimental investigations of the stability of channel flows. part 1. flow of a single liquid in a rectangular channel. *Journal of Fluid Mechanics*.
- [Kasagi et al., 1992] Kasagi, N., Tomita, Y., and Kuroda, A. (1992). Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow.
- [Kawamura et al., 2000] Kawamura, H., Abe, H., and Shingai, K. (2000). Dns of turbulence and heat transport in a channel flow with different reynolds and prandtl numbers and boundary conditions. *Turbulence, Heat and Mass Transfer*.

- [Kawamura et al., 1998] Kawamura, H., Ohsaka, K., Abe, H., and Yamamoto, K. (1998). Dns of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high prandtl number fluid. *International Journal of Heat and Fluid Flow*.
- [Kundu et al., 2016] Kundu, P. K., Cohen, I. M., Dowling, D. R., and Capecelatro, J. (2016). *Fluid Mechanics*. Elsevier.
- [Laizet and Lamballais, 2009] Laizet, S. and Lamballais, E. (2009). High-order compact schemes for incompressible flows: A simple and efficient method with quasi-spectral accuracy. *Journal of Computational Physics*.
- [Laizet and Li, 2011] Laizet, S. and Li, N. (2011). Incompact3d: A powerful tool to tackle turbulence problems with up to $o(10^5)$ computational cores. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*.
- [Lamballais, 2014] Lamballais, E. (2014). Direct numerical simulation of a turbulent flow in a rotating channel with a sudden expansion. *Journal of fluid mechanics*.
- [Lele, 1992] Lele, S. K. (1992). Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of computational physics*.
- [Li et al., 2021] Li, J., Xiao, Y., Gu, H., Liu, D., and Zhang, Q. (2021). Development of a correlation for mixed convection heat transfer in rod bundles. *Annals of Nuclear Energy*.
- [Li and Laizet, 2010] Li, N. and Laizet, S. (2010). 2decomp&fft- a highly scalable 2d decomposition library and fft interface. In *Cray user group 2010 conference*.
- [Machaca Abregu, 2024] Machaca Abregu, W. I. (2024). *Estudio Numérico del Proceso de Transición Laminar-Turbulento en Canales Angostos*. PhD thesis, Instituto Balseiro.
- [Metais and Eckert, 1964] Metais, B. and Eckert, E. R. G. (1964). Forced, mixed and free convection regimes. *Journal of Heat Transfer*.
- [Moin, 2010] Moin, P. (2010). *Fundamentals of engineering numerical analysis*. Cambridge University Press.
- [Moin and Mahesh, 1998] Moin, P. and Mahesh, K. (1998). Direct numerical simulation: a tool in turbulence research. *Annual review of fluid mechanics*.
- [Moser, 2003] Moser, R. D. (2003). *Turbulence Lectures Notes*. Illini Union Bookstore, University of Illinois.
- [Moser et al., 1999] Moser, R. D., Kim, J., and Mansour, N. N. (1999). Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$. *Physics of fluids*.
- [Orr, 1907] Orr, W. M. (1907). The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. part i: A perfect liquid. part ii: A viscous liquid.

- [Orszag, 1971] Orszag, S. A. (1971). Accurate solution of the orr–sommerfeld stability equation. *Journal of Fluid Mechanics*.
- [Orszag and Kells, 1980] Orszag, S. A. and Kells, L. C. (1980). Transition to turbulence in plane poiseuille and plane couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*.
- [Parlatan et al., 1996] Parlatan, Y., Todreas, N., and Driscoll, M. (1996). Buoyancy and property variation effects in turbulent mixed convection of water in vertical tubes.
- [Peskin, 2002] Peskin, C. S. (2002). The immersed boundary method. *Acta numerica*.
- [Pope, 2001] Pope, S. B. (2001). *Turbulent flows*. Cambridge University Press.
- [Prandtl, 1942] Prandtl, L. (1942). *Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg, 3 edition.
- [Rayleigh, 1916] Rayleigh, L. (1916). On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Philosophical Magazine*.
- [Reynolds, 1883] Reynolds, O. (1883). Iii. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the royal society of London*.
- [Scheele and Hanratty, 1962] Scheele, G. F. and Hanratty, T. J. (1962). Effect of natural convection on stability of flow in a vertical pipe. *Journal of Fluid Mechanics*.
- [Scheele et al., 1960] Scheele, G. F., Rosen, E. M., and Hanratty, T. J. (1960). Effect of natural convection on transition to turbulence in vertical pipes. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*.
- [Schlatter, 2005] Schlatter, P. C. (2005). *Large-eddy simulation of transition and turbulence in wall-bounded shear flow*. PhD thesis, ETH Zurich.
- [Schlichting, 1933] Schlichting, H. (1933). Berechnung der anfachung kleiner störungen bei der plattenströmung. *ZAMM*.
- [Schmid and Henningson, 2002] Schmid, P. J. and Henningson, D. S. (2002). *Stability and Transition in Shear Flows*. Springer.
- [Schubauer and Skramstad, 1947] Schubauer, G. B. and Skramstad, H. K. (1947). Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*.
- [Schumann and Sweet, 1976] Schumann, U. and Sweet, R. A. (1976). A direct method for the solution of poisson's equation with neumann boundary conditions on a staggered grid of arbitrary size. *Journal of computational Physics*.
- [Smits, 2009] Smits, A. J. (2009). *Lectures in fluid mechanics: Viscous flows and turbulence*. Princeton University.

- [Sommerfeld, 1908] Sommerfeld, A. (1908). Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen. *Atti Congr. Int. Math. 4th.*
- [Steiner, 1971] Steiner, A. (1971). On the reverse transition of a turbulent flow under the action of buoyancy forces. *Journal of Fluid Mechanics.*
- [Straub et al., 2019] Straub, S., Forooghi, P., Marocco, L., Wetzel, T., Vinuesa, R., Schlatter, P., and Frohnapfel, B. (2019). The influence of thermal boundary conditions on turbulent forced convection pipe flow at two Prandtl numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer.*
- [Szuban, 2023] Szuban, P. (2023). *Desarrollo de una herramienta numérica para el análisis de estabilidad lineal de flujo en convección mixta.* Instituto Balseiro.
- [Tao, 1960] Tao, S. C. (1960). Combined forced and free convection in channels. *Journal of Heat Transfer.*
- [Tollmien, 1930] Tollmien, W. (1930). Über die Entstehung der Turbulenz. *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete: Aachen 1929.*
- [Tollmien, 1935] Tollmien, W. (1935). Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen. *Nachr. Wiss. Fachgruppe, Göttingen, Math. Phys.*
- [Trefethen, 2000] Trefethen, L. N. (2000). *Spectral methods in MATLAB.* SIAM.
- [White, 2011] White, F. M. (2011). *Fluid mechanics.* McGraw-Hill New York.
- [You et al., 2003] You, J., Yoo, J. Y., and Choi, H. (2003). Direct numerical simulation of heated vertical air flows in fully developed turbulent mixed convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer.*
- [Zang and Krist, 1989] Zang, T. A. and Krist, S. E. (1989). Numerical experiments on stability and transition in plane channel flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics.*
- [Zhou et al., 2024] Zhou, L., Zhang, D., Liu, Y., Liang, Y., Wang, B., Tian, W., Qiu, S., and Su, G. (2024). Direct numerical simulation of sodium in vertical channel flow: From forced convection to natural convection at friction Reynolds number 180. *Physics of Fluids.*

Agradecimientos

A todos los que se lo merecen ...

