

TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA

ANÁLISIS DEL FLUJO EN CONVECCIÓN MIXTA EN CANALES RECTANGULARES

Patricio G. Canciani
Maestrando

Dr. William I. Machaca Abregu
Director

Dr. Federico Teruel
Co-director

Miembros del Jurado

Dr. Christian P. Marcel (Instituto Balseiro – CNEA)
Dr. Pablo Garcia Martinez (Instituto Balseiro – CNEA)
Dr. César Venier (FCEIA – SIMEC)

1 de Julio de 2025

Departamento de Mecánica Computacional
(Centro Atómico Bariloche)

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A todos mis seres queridos

Índice de símbolos

Índice de contenidos

Índice de símbolos	v
Índice de contenidos	vii
Índice de figuras	ix
Índice de tablas	xi
Resumen	xiii
Abstract	xv
1. Introducción	1
1.1. Introducción	2
1.2. Motivación	4
1.3. Objetivos	5
1.4. Organización del trabajo	5
2. Modelo Matemático	7
2.1. Conceptos Elementales de Turbulencia	8
2.2. Descripción del sistema bajo estudio. Ecuaciones de Gobierno y Condiciones de Borde	8
2.3. Sumario de Ecuaciones	11
2.4. Teoría de Estabilidad Lineal. Perturbaciones	12
2.5. Flujo Base	12
2.6. Análisis de Estabilidad Lineal	13
2.7. Ondas TS e Inestabilidad Secundaria	15
3. Fundamentos de Herramientas Numéricas	17
3.1. Simulaciones Numéricas Directas	18
3.2. Xcompac3D	18
3.2.1. Métodos Numéricos	18
3.2.2. Validación	18

3.3. Orr-Somerfeld - <i>Mixed Convection</i> (OSMC)	18
3.3.1. Métodos Numéricos	18
4. Validación de Herramientas Numéricas	19
4.1. Primera Parte: Xcompac3D	20
4.2. Segunda Parte: Orr-Somerfeld - <i>Mixed Convection</i>	20
5. Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollado	21
5.1. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,71$	22
5.2. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,071$	23
5.3. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,71$	24
5.4. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,071$	25
5.5. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,71$	26
5.6. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,071$	27
5.7. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,71$	28
5.8. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,071$	29
5.9. Correlation de Nusselt	30
6. Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta	31
6.1. Casos $\text{Re} = 750$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$	32
6.1.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	32
6.1.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	33
6.2. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$	34
6.2.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	34
6.2.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	36
6.3. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-4}$	38
6.3.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	38
6.3.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	40
6.4. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-3}$	41
6.4.1. Autofunciones y Espectros de autovalores	41
6.4.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt	42
7. Conclusiones	43
A. Budgets Dynamics Equations	45
Bibliografía	48
Agradecimientos	49

Índice de figuras

1.1. Comparación esquemática de la transferencia de calor alrededor de una tubería caliente: (izquierda) convección forzada; (derecha) convección natural.	2
2.1.	8
5.1.	22
5.2.	22
5.3.	23
5.4.	23
5.5.	24
5.6.	24
5.7.	25
5.8.	25
5.9.	26
5.10.	26
5.11.	27
5.12.	27
5.13.	28
5.14.	28
5.15.	29
5.16.	29
5.17. Aquí $Bo = Gr/(Re^{3,425} Pr^{0,8})$	30
6.1.	32
6.2.	32
6.3.	33
6.4.	33
6.5.	34
6.6.	35
6.7.	35

6.8.	35
6.9.	36
6.10.	36
6.11.	37
6.12. Casos C9,C10,C11	37
6.13. Casos C9,C10,C11	37
6.14.	38
6.15.	38
6.16.	39
6.17.	39
6.18.	40
6.19.	40
6.20.	41
6.21.	41
6.22.	42
6.23.	42

Índice de tablas

6.1.	32
6.2.	34
6.3.	38
6.4.	41

Resumen

Este es el resumen en castellano.

La tesis debe reflejar el trabajo desarrollado, mostrando la metodología utilizada, los resultados obtenidos y las conclusiones que pueden inferirse de dichos resultados.

Palabras clave: FLUJO TURBULENTO, CONVECCIÓN MIXTA

Abstract

This is the title in English:

The thesis must reflect the work of the student, including the chosen methodology, the results and the conclusions that those results allow us to draw.

Keywords: TURBULENT FLOW, MIXED CONVECTION

Capítulo 1

Introducción

Capítulo introductorio de la tesis

Algunas preguntas clave que deberían responderse en este capítulo:

¿Cuál es el campo general de estudio de tu tesis?

¿Qué fenómeno, problema o sistema estás investigando?

¿Por qué este tema es relevante científica o tecnológicamente?

¿Qué problema específico intenta resolver tu tesis?

¿Cuáles son los objetivos (generales y/o específicos)?

¿Qué enfoque metodológico utilizás? ¿Experimental, teórico, computacional?

¿Cómo está organizada la tesis?

1.1. Introducción

Convección Mixta

Un fluido, en virtud de su masa y velocidad, puede transportar momento. Además, en virtud de su temperatura, puede transportar calor. Estrictamente hablando, la convección es el transporte de energía debido al movimiento global de un medio. Sin embargo, en ingeniería es común utilizar el término convección de forma más amplia para describir la transferencia de calor desde una superficie hacia un fluido en movimiento cuando ambos están a diferentes temperaturas [Cengel and Ghajar, 2015, Incropera et al., 2006].

La transferencia de calor por convección puede clasificarse según la naturaleza del flujo. Hablamos de convección forzada cuando el flujo es provocado por actores externos como puede ser la acción de bombeo o un gradiente de presión; en cambio, en la convección natural, el flujo es inducido por fuerzas boyantes o de flotación, las cuales se deben a diferencias de densidad producidas por variaciones de temperatura en el propio fluido (Figura 1.1).



Figura 1.1: Comparación esquemática de la transferencia de calor alrededor de una tubería caliente: (izquierda) convección forzada; (derecha) convección natural.

Los primeros estudios sobre la transferencia de calor por convección trataron las ramas de la convección forzada y la convección natural de forma separada, sin considerar la posible interacción entre ambas. Por un lado, los experimentos de Henri Bénard (1901) marcaron un hito en la comprensión de la convección natural [Bénard, 1901]. Más tarde, Lord Rayleigh (1916) desarrolló la base teórica de la inestabilidad térmica en capas fluidas [Rayleigh, 1916]. En paralelo, en el ámbito de la convección forzada, trabajos como el de Dittus y Boelter (1930) establecieron correlaciones empíricas para la transferencia de calor en tubos [Dittus and Boelter, 1930]. No fue sino hasta mediados del siglo XX que comenzó a reconocerse que ambos mecanismos pueden coexistir

en muchas configuraciones de interés práctico. Así surgió el concepto de convección mixta, donde la convección forzada y la natural actúan simultáneamente como casos extremos de un fenómeno más general [Tao, 1960, Metais and Eckert, 1964].

Régimen de Transición y Transición Laminar-Turbulenta

Cuando un fluido se desplaza a través de un conducto o sobre una superficie, su movimiento puede clasificarse en dos tipos de régimen: laminar o turbulento. En el régimen laminar, el flujo es ordenado y las partículas del fluido se mueven en capas paralelas sin mezclarse entre sí. En cambio, en el régimen turbulento, el flujo es caótico, con remolinos, tiende a mezclarse, y presenta fluctuaciones en los campos de velocidad y presión. En ese sentido, un flujo que se encuentra en un estado desarrollado¹ intermedio, de transición , se dice que el flujo está en régimen de transición. Este estado de flujo no debe confundirse con la transición laminar-turbulenta del sistema, donde el flujo evoluciona de un régimen laminar a un régimen turbulento completamente desarrollado. Esta transición puede ocurrir en el tiempo (transición laminar-turbulenta temporal) o en el espacio (transición laminar-turbulenta espacial).

Por otro lado, la transición laminar-turbulenta es un fenómeno de gran importancia para la ingeniería y la física aplicada ya que está presente en diferentes dispositivos termohidráulicos. El cambio de un régimen a otro puede tener un impacto significativo en la transferencia de calor, especialmente en aplicaciones de convección mixta. El coeficiente de fricción (factor de Darcy) o el coeficiente de convección (número de Nusselt) se incrementan notablemente cuando se produce la transición [Incropera et al., 2006, White, 2011]. En ese sentido, este estado no es deseado desde el punto de vista ingenieril ya que es intermitente (es decir, el flujo puede fluctuar entre los regímenes laminar y turbulento), sin embargo, el estudio de la transición es relevante para poder controlar el fenómeno o anticipar, y por tanto aprovechar, su comportamiento. Por ejemplo, un problema importante se da en el diseño de intercambiadores de calor cuando el punto de trabajo del flujo dentro de los tubos o conductos se encuentra en régimen de transición donde las magnitudes relevantes (como coeficientes de fricción y de transferencia de calor) tienen una gran variación [Ghajar, 2019].

La evolución de un flujo, tanto en el tiempo como en el espacio, depende de las perturbaciones externas que reciba (por ejemplo, cambios de presión o de temperatura), de las condiciones de borde a las que esté sometido (como puede ser la rugosidad, flujo de calor en las paredes o gradientes de presión, entre otros) y de la respuesta del propio sistema, determinada por sus propiedades físicas y el régimen de flujo. Para modelar matemáticamente las condiciones que pueden modificar ese régimen —es decir, los estados iniciales capaces de desencadenar una transición— y analizar cómo dicha

¹Esto es, sus magnitudes no varían con el tiempo o con el espacio en un sentido estadístico.

transición impacta en la transferencia de calor, se recurre a la teoría de estabilidad hidrodinámica. Esta teoría ofrece un marco para predecir cuándo un flujo laminar se volverá inestable mediante el estudio de la evolución de pequeñas perturbaciones: si estas crecen en el espacio o en el tiempo, el flujo pierde su estabilidad y eventualmente transiciona hacia un régimen turbulento.

La investigación teórica sobre la transición ha tenido un desarrollo histórico notable que se remonta al siglo XIX, con el célebre experimento de Osborne Reynolds [Reynolds, 1883], que marcó el inicio del estudio sistemático del fenómeno. A comienzos del siglo XX, Orr [Orr, 1907] y Sommerfeld [Sommerfield, 1908] formalizaron las bases de la estabilidad hidrodinámica al desarrollar las ecuaciones linealizadas que llevan sus nombres, conocidas como ecuaciones de Orr-Sommerfeld. Estas describen la evolución de perturbaciones en un flujo y son fundamentales para comprender los mecanismos de transición. Un avance crucial se produjo con los trabajos de Tollmien [Tollmien, 1930] y Schlichting [Schlichting, 1933], quienes describieron de forma teórica el estado lineal de la transición; esta teoría fue confirmada experimentalmente en el estudio de la capa límite sobre una placa plana realizado por Schubauer y Skramstad [Schubauer and Skramstad, 1947]. Finalmente, la incorporación de la teoría de inestabilidad secundaria por Herbert [Herbert, 1983] permitió extender el análisis al caso tridimensional, ofreciendo así una comprensión más completa del fenómeno.

1.2. Motivación

En la actualidad, muchos problemas de ingeniería presentan flujos en régimen de transición. La mayoría de los flujos en estas condiciones son no isotérmicos [Chen and Chung, 2003]. El estudio de la transferencia de calor en la transición laminar-turbulenta es importante en diversas aplicaciones ingenieriles, como en los elementos combustibles de reactores nucleares, en intercambiadores de calor, en los álabes de una turbina, equipos electrónicos, entre otros.

Por otro lado, el fenómeno de convección mixta puede manifestarse conjuntamente en flujos atmosféricos [Pirozzoli et al., 2017] como también en aplicaciones de ingeniería presentes en el proceso de fabricación de silicio, la refrigeración de equipos electrónicos, paneles solares térmicos, álabes de turbinas, intercambiadores de calor de diverso tipo, reactores nucleares, entre otros [Kasagi and Nishimura, 1997].

Entre las aplicaciones técnicas de mayor relevancia de la convección mixta se destaca el transporte de energía térmica. En las últimas décadas se han realizado muchos esfuerzos para desarrollar técnicas tendientes a mejorar la transferencia de calor y el desempeño global de los intercambiadores de calor. El interés en estas técnicas radica en el ahorro de la energía. En este sentido, las necesidades energéticas actuales propician el diseño y la mejora constante de los reactores nucleares utilizados para la provisión de

energía eléctrica. Dentro de la nueva generación de reactores nucleares GEN-IV², de los seis conceptos especificados, uno corresponde a reactores tipo GFR (*Gas-cooled Fast Reactor*) que utiliza como refrigerante gas helio cuyo número de Prandtl es $\text{Pr} \approx 0,7$ similar al aire.

1.3. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es el estudio de la transferencia de calor en régimen de transición laminar-turbulenta en convección mixta. Para ello se emplea la herramienta numérica Incompact3D. Se obtienen resultados numéricos para números de Reynolds entre 2000 y 5000, números de Prandtl igual a 0,071 y 0,71 y números de Richardson entre 0,04 y 106.

Parte de las tareas secundarias para la realización de trabajo incluyeron:

- Entrenamiento y manejo en el uso de la herramienta numérica Incompact3D.
- Validación de la herramienta numérica y simulación de flujos turbulentos.
- Validación de 1 de métodos para inestabilizar soluciones laminares en la herramienta numérica.

No se como escribir esta parte. Como escribir el uso y validación de la herramienta de Szuban y todo lo demas que queda referido a los objetivos.

1.4. Organización del trabajo

²<https://www.gen-4.org/>

Capítulo 2

Modelo Matemático

Resumen del capítulo 2. Marco teórico (acotado) del contenido mínimo necesario para el entendimiento de los capítulos posteriores.

2.1. Conceptos Elementales de Turbulencia

Definiciones y conceptos básicos de turbulencia.

2.2. Descripción del sistema bajo estudio. Ecuaciones de Gobierno y Condiciones de Borde

Se considera el sistema representado en la Figura 2.1 donde la dinámica de un fluido viscoso e incompresible sucede entre dos paredes paralelas e infinitas ubicadas en $y = -d$ e $y = +d$. Esto constituye un canal de placas paralelas donde ambas paredes están sometidas a un flujo de calor constante q''_w .

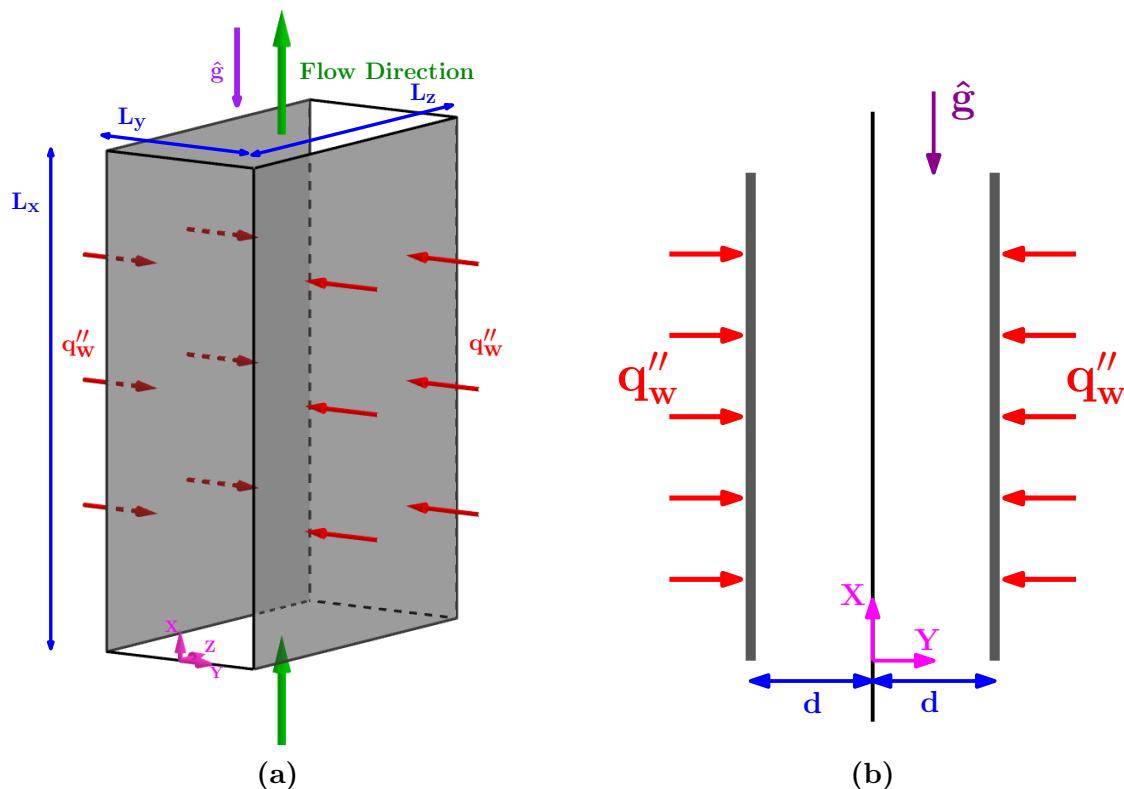


Figura 2.1

La dirección del flujo se encuentra en la dirección de la corriente (*streamwise*) paralelo al eje X y su sentido es opuesto a la aceleración de la gravedad. Las ecuaciones de gobierno corresponden a los principios de conservación de masa, momento y energía que se expresan en el cuadro 2.1.

$\nabla \cdot (\rho_o \mathbf{u}) = 0$ $\frac{\partial(\rho_o \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_o \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho(T) \mathbf{g}$ $\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T$	(2.1)
--	-------

Un sistema físico cuyas dimensiones “son muy grandes” (o infinitas) constituye un sistema ideal. En él, es posible ubicar el origen de nuestro sistema de referencia lejos de los extremos a fin de evitar efectos de bordes. Allí, el flujo se encuentra completamente desarrollado y ha alcanzado un estado estadísticamente estacionario, es decir, sus valores estadísticos, como el promedio, no varían en el tiempo. En este contexto, la condición de flujo de calor constante en las paredes se imponen como condiciones de Neumann:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\mp d} = \pm q_w'' \quad (2.2)$$

Sin embargo, debido a la limitación computacional evidente, nuestro modelo computacional no puede abarcar dicha extensión. En ese sentido, el “dominio infinito” se reemplaza con un dominio acotado de dimensiones $L_x \times L_y \times L_z$ (Figura 2.1a) adoptando condiciones de borde periódicas (PBC) en la direcciones X y Z :

$$\xi(x = 0, y, z, t) = \xi(x = L_x, y, z, t) \quad (2.3)$$

$$\xi(x, y, z = 0, t) = \xi(x, y, z = L_z, t) \quad (2.4)$$

siendo ξ un campo escalar de interés. Esto se puede interpretar como si las PBC crearan “la ilusión” de un dominio infinito, mediante la repetición de este dominio finito en el espacio.

Por otra parte, en un flujo turbulento, dado que este no es estacionario, aparecen fluctuaciones del flujo de calor y de la temperatura sobre la superficie de la pared. En este contexto, Kasagi et al. [Kasagi et al., 1992] asumen que las fluctuaciones de temperatura son pequeñas a fin de considerar que la temperatura en la pared es localmente isotérmica y que además, el flujo de calor no varía en la dirección de la corriente. Esto es equivalente a suponer que la temperatura en la pared, promediada en el tiempo y en la dirección Z , crece linealmente con x , y por lo tanto:

$$\langle T_w \rangle = \mathcal{A}x.$$

Debido al crecimiento lineal de $\langle T_w \rangle$, es requerido realizar el cambio de variable $T(x, y, z, t) = \langle T_w \rangle - \theta(x, y, z, t)$ para que siga siendo válido las condiciones de borde periódicas, esto es, $\theta(x = 0, y, z, t) = \theta(x = L_x, y, z, t)$. Ésta aproximación se encuentra en la literatura científica como *Mixed Boundary Conditions* [Straub et al., 2019]. Dicha modificación introduce un término fuente en la ecuación de conservación de energía:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \alpha \nabla^2 \theta + \mathcal{A} u_x \quad (2.5)$$

Por su parte, el término $\rho(T)\mathbf{g}$ en la ecuación de momento se reescribe empleando la aproximación de Boussinesq [Incropora et al., 2006], $\rho(T) = \rho_o [1 - \beta(T - T_R)]$:

$$\frac{\rho_o \partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_o \mathbf{u}) = -\nabla (p + \rho_o g x) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + g \rho_o \beta \theta \hat{\mathbf{g}} \quad (2.6)$$

donde se ha considerado $T_R = \langle T_w \rangle$, siendo $\hat{\mathbf{g}} = (-1, 0, 0)$.

Mediante el balance de energía en el volumen de control $L_x \times L_y \times L_z$, es posible deducir que $\mathcal{A} = \frac{q''_w}{\rho_o d \langle u_x \rangle c_p}$ siendo d el semiancho del canal. Así, empleando la velocidad en el centro del canal U_o , el semiancho d y la temperatura $T_o = \mathcal{A}d$, el sistema de ecuaciones 2.1 en su forma adimensional queda escrito como se muestra en el cuadro 2.7.

Otro detalle importante es el hecho de que el fluido de trabajo es impulsado por un caudal máscico constante. Esta cuestión se encuentra representada por el término fuente $f\hat{\mathbf{x}}$, en la ecuación de momento, donde f es una constante en el espacio y varía con el tiempo de manera que mantiene constante el caudal total.

$$\begin{aligned} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + Ri_o \theta^* \hat{\mathbf{g}} + f\hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^* \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$Re_o = \frac{\mu}{\rho_o U_o d} \quad ; \quad Pr = \frac{\nu_o}{\alpha} \quad ; \quad Ri_o = \frac{g \beta \Delta T d}{U_o^2} = \frac{Ra}{Re_o^2 Pr}$$

Asimismo, las condiciones de flujo de calor constante están expresadas en la ecuación 2.8. Sin embargo, estas condiciones pueden ser aproximadas como condiciones de Dirichlet ya que al suponer que la temperatura de las paredes es constante (fluctuaciones de temperatura iguales a cero) se obtiene: $T(x, y = 0, z, t) = T(x, y = 2d, z, t) = \langle T_w \rangle$. Su forma adimensional se expresa en la ecuación 2.9. Por otra parte, para el resto de variables (campo de presión y componentes de velocidad) se adoptan condiciones de no deslizamiento en las paredes.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=-1} &= +\frac{2}{3} Re_o Pr \\ \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=+1} &= -\frac{2}{3} Re_o Pr \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = 0, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = 2, z^*, t^*) = 0 \quad (2.9)$$

2.3. Sumario de Ecuaciones

Ecuaciones de Gobierno:

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + Ri_o \theta^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^*\end{aligned}\quad (2.10)$$

Condiciones de borde: considerando $\xi = u_x^*, u_y^*, u_z^*, p^*, \theta^*$, entonces

$$\xi(x = 0, y, z, t) = \xi(x = L_x, y, z, t) \quad (2.11)$$

$$\xi(x, y, z = 0, t) = \xi(x, y, z = L_z, t) \quad (2.12)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u}^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \mathbf{u}^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.14)$$

$$\partial_y p^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \partial_y p^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

A lo largo de este trabajo también se utiliza, particularmente para el análisis de estabilidad lineal, la forma adimensional de las ecuaciones del trabajo de Chen [Chen and Chung, 1996] que se obtienen empleando el semiancho del canal d , la velocidad media laminar $\langle u_x \rangle$ y la temperatura $T_c = Re Pr \mathcal{A} d$. Dichas ecuaciones se expresan en 2.17. Las condiciones de borde son exactamente análogas que su forma adimensional de más arriba.

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_b} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{Ra}{Re_b} \varphi^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \varphi^* &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_b} [\nabla^{*2} \varphi^* - v_x^*] \\ \varphi^* &= -\frac{\theta^*}{Re_o Pr} \quad ; \quad \mathbf{v}^* = \frac{2}{3} \mathbf{u}^* \quad ; \quad Re_b = \frac{2}{3} Re_o\end{aligned}\quad (2.17)$$

2.4. Teoría de Estabilidad Lineal. Perturbaciones

Para analizar la estabilidad lineal y prever de forma matemática cómo cambiará un flujo una vez perturbado, resulta indispensable aceptar que las perturbaciones actúan sobre un flujo base. Aquí se adopta como referencia el flujo laminar completamente desarrollado. En consecuencia, la evolución de las perturbaciones también queda condicionada por dicho estado inicial.

2.5. Flujo Base

Si el flujo está completamente desarrollado, tanto térmica como hidrodinámicamente, entonces el mismo sólo dependerá de la variable y^* . El sistema de ecuaciones 2.17 se reduce a la ecuación de momento en la dirección X y a la ecuación de transporte del escalar pasivo, las cuales quedan expresadas como

$$\frac{dp^*}{dx^*} = \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \Phi^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 V_x^*}{dy^{*2}} \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2 \Phi^*}{dy^{*2}} = V_x^* \quad (2.19)$$

El perfil de velocidad y de temperatura admiten las condiciones de borde $V_x^*(y^* = \pm 1) = \Phi^*(y^* = \pm 1) = 0$. Las soluciones para un flujo asistido por fuerzas boyantes están dadas por las expresiones 2.20 y 2.21, mientras que para un flujo donde las fuerzas boyantes son opuestas, las soluciones quedan definidas por las ecuaciones 2.22 y 2.23 [Chen and Chung, 1996].

$$V_x^* = \frac{-E}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\sinh(\kappa(1+y^*)) \sin(\kappa(1-y^*)) + \sinh(\kappa(1-y^*)) \sin(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \quad (2.20)$$

$$\Phi^* = \frac{E}{\text{Ra}} \left[1 - \frac{\cosh(\kappa(1+y^*)) \cos(\kappa(1-y^*)) + \cosh(\kappa(1-y^*)) \cos(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \right] \quad (2.21)$$

$$V_x = \frac{F}{2m^2} \left(\frac{\cosh(my^*)}{\cosh(m)} - \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} \right) \quad (2.22)$$

$$\Phi^* = \frac{F}{2m^4} \left(\frac{\cosh(my^*)}{\cos(m)} + \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} - 2 \right) \quad (2.23)$$

$$\kappa = \frac{\text{Ra}^{-1/4}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad m = (-\text{Ra})^{1/4} \quad ; \quad F = \frac{2m^3}{\tanh(m) - \tan(m)} \quad ;$$

$$E = -2\kappa \text{Ra}^{1/2} \frac{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)}{\sinh(2\kappa) - \sin(2\kappa)}$$

Obsérvese que el único parámetro aquí es el número de Rayleigh. En el Capítulo 3, se utilizarán estas ecuaciones para la validación de la herramienta numérica en estas condiciones.

2.6. Análisis de Estabilidad Lineal

La transición laminar-turbulenta, es decir, la evolución de un flujo laminar a uno turbulento, es crucial en ingeniería, ya que las características del flujo varían notablemente entre estos regímenes. Por ejemplo, los coeficientes de fricción y de convección aumentan considerablemente al pasar de un régimen laminar a uno turbulento. La ecuación de Navier-Stokes admite ambas soluciones bajo ciertos parámetros, lo que implica que el tipo de flujo y su evolución dependen de las perturbaciones y las condiciones impuestas en el sistema. Muchos fenómenos que cumplen exactamente las leyes de conservación resultan inobservables porque se inestabilizan ante las pequeñas perturbaciones inevitables en cualquier sistema real [Kundu et al., 2016].

El análisis de estabilidad lineal permite evaluar cómo se comporta un flujo ante perturbaciones, identificando los mecanismos que pueden inducir transiciones o estados de intermitencia. En el caso de flujos de fluidos, condiciones como un número de Reynolds inferior a un valor crítico garantizan la estabilidad de un flujo laminar suave. Sin embargo, en ocasiones las perturbaciones crecen hasta alcanzar amplitudes finitas y establecer nuevos equilibrios estacionarios, que pueden volverse inestables a su vez y evolucionar hacia estados de fluctuaciones caóticas, comúnmente descritos como turbulencia. Dos motivaciones principales para estudiar la estabilidad de los fluidos son comprender el proceso de transición de un flujo laminar a uno turbulento y predecir el inicio de dicha transición.

El enfoque parte de las ecuaciones de gabinete 2.17 donde se han omitido los superíndices “*”. La idea consiste en suponer que los campos solución (\mathbf{v}, p, φ) pueden descomponerse como un flujo base más una perturbación:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.24)$$

$$p = P + \tilde{p} \quad (2.25)$$

$$\varphi = \Phi + \tilde{\varphi} \quad (2.26)$$

donde las letras mayúsculas hacen referencia al flujo base laminar y aquellas letras con $(\tilde{})$ a las perturbaciones.

Despreciando términos de segundo orden, esto es, productos de perturbaciones, y asumiendo que los flujos bases son los flujos laminares desarrollados $\mathbf{V} = (V_x(y), 0, 0)$ y $\Phi \equiv \Phi(y)$ es posible expresar las ecuaciones que describen la dinámica de $\tilde{\mathbf{v}}$, \tilde{p} y $\tilde{\varphi}$ de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.27)$$

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + V_x \partial_x \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{v}_y \partial_y V_x \hat{\mathbf{e}}_x = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}_b} \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \tilde{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.28)$$

$$\partial_t \tilde{\varphi} + V_x \partial_x \tilde{\varphi} + \tilde{v}_y \partial_y \Phi = \frac{1}{\text{Re}_b \text{Pr}} [\nabla^2 \tilde{\varphi} - \tilde{v}_x] \quad (2.29)$$

Luego, aplicando el operador divergencia a la ecuación 2.28 es posible encontrar una expresión para el laplaciano de la presión:

$$-\nabla \tilde{p} = 2 \partial_x \tilde{v}_y \partial_y V_x - \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \partial_x \tilde{\varphi} \quad (2.30)$$

Aplicando el operador laplaciano a la componente Y de la ecuación 2.28 es posible eliminar el término que involucra la presión, resultando en la siguiente expresión:

$$\left\{ [\partial_t + V_x \partial_x] \nabla^2 - D^2(V_x) \partial_x - \frac{1}{\text{Re}_b} \nabla^4 \right\} \tilde{v}_y = -\frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \partial_{xy} \tilde{\varphi} \quad (2.31)$$

donde $D^j \equiv \partial_y^j$.

Para la descripción completa de las perturbaciones se utiliza la componente y de la voracidad $\tilde{\eta} \equiv \partial_z \tilde{v}_x - \partial_x \tilde{v}_z$ cuya dinámica se detalla está dada por la ecuación 2.32.

$$\left[\partial_t + V_x \partial_x - \frac{1}{\text{Re}_b} \nabla^2 \right] \tilde{\eta} + D(V_x) \partial_z \tilde{v}_y = \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \partial_z \tilde{\varphi} \quad (2.32)$$

Así, las ecuaciones 2.29, 2.31 y 2.32 constituyen un sistema de EDP de 3 ecuaciones con 3 campos incógnitas. A partir de los campos escalares $\tilde{\eta}$ y \tilde{v}_y , utilizando las ecuación 2.27 y la definición de $\tilde{\eta}$ es posible hallar los campos \tilde{v}_x y \tilde{v}_z . Asimismo, empleando la ecuación 2.30 y los campos \tilde{v}_y y $\tilde{\varphi}$ es posible hallar el campo de presión \tilde{p} .

Las soluciones a dicho sistema se proponen como ondas planas tridimensionales. Si $\tilde{\xi}$ es una perturbación cualquiera, entonces, se escribe de la siguiente forma arbitraria:

$$\tilde{\xi} = \hat{\xi}(y) e^{i[\alpha x + \beta z - \omega t]} \quad (2.33)$$

donde $c \equiv c_r + i c_i$ es la velocidad de fase y $\omega \equiv \alpha c$ es la frecuencia angular. Además:

$$\alpha, \beta, c_r, c_i, \epsilon \in \mathbb{R}$$

En este sentido, se distinguen dos casos:

- ◆ Si $\alpha c_i > 0$ entonces las perturbaciones crecen en el tiempo. El flujo se vuelve inestable.
- ◆ Si $\alpha c_i < 0$ entonces las perturbaciones decaen exponencialmente en el tiempo y la perturbación se atenúa. El flujo se vuelve estable.

Al reemplazar las soluciones tipo 2.33 en el sistema de ecuaciones se obtiene un problema de autovalores generalizado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2]^2 - i\alpha (V_x [D^2 - k^2] + D^2(V_x)) ; \quad a_{12} = - \left[i\alpha \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} D \right] \\ a_{21} &= \frac{i\alpha}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} D + D(\Phi) ; \quad a_{22} = \frac{-1}{\text{Re}_b \text{Pr}} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x ; \quad a_{23} = \frac{\beta}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} \\ a_{31} &= \beta D(V_x) ; \quad a_{32} = -\beta \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} ; \quad a_{33} = -\frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x \\ b_1 &= -[D^2 - k^2] ; \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

A partir de las condiciones de borde 2.11 - 2.15, las autofunciones $\hat{v}_y(y)$, $\hat{\varphi}(y)$, $\hat{\eta}(y)$ deben satisfacer las condiciones:

$$\hat{v}_y(y) = D(\hat{v}_y) = \hat{\varphi}(y) = \hat{\eta}(y) = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm 1 \quad (2.35)$$

La resolución de este problema de autovalores generalizado se realiza empleando una estrategia numérica la cuál se detalla en el capítulo 3.

2.7. Ondas TS e Inestabilidad Secundaria

Falta completar

Capítulo 3

Fundamentos de Herramientas Numéricas

Nociones Elementales de que consiste hacer simulaciones numéricas directas (DNS).
Descripción de las herramientas numéricas empleadas.

3.1. Simulaciones Numéricas Directas

Falta escribir

3.2. Xcompac3D

3.2.1. Métodos Numéricos

Falta escribir

3.2.2. Validación

Falta escribir

...

“A efectos prácticos las aproximación de flujo de calor cte (condición de Neuman) como una condición de Dirichlet igual a 0 resulta mejor desde el punto de vista numérico ya que la fluctuación de los campos es mayor y se requiere más tiempo de corrida para conseguir una buena estadística ...”

3.3. Orr-Sommerfeld - *Mixed Convection* (OSMC)

Falta escribir

3.3.1. Métodos Numéricos

Falta escribir

Falta escribir

Capítulo 4

Validación de Herramientas Numéricas

Validación de las herramientas numéricas empleadas.

4.1. Primera Parte: Xcompac3D

...

“A efectos prácticos las aproximación de flujo de calor cte (condición de Neuman) como una condición de Dirichlet igual a 0 resulta mejor desde el punto de vista numérico ya que la fluctuación de los campos es mayor y se requiere más tiempo de corrida para conseguir una buena estadística ...”

4.2. Segunda Parte: Orr-Sommerfeld - *Mixed Convection*

Falta escribir

Capítulo 5

Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollado

La finalidad de este capítulo es que el lector/jurado comprenda la forma de abordar el problema estudiado. Así como las magnitudes y parámetros relevantes del problema.

A continuación van todos los casos de flujos completamente desarrollados de los cuales tengo seguridad.

5.1. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,71$

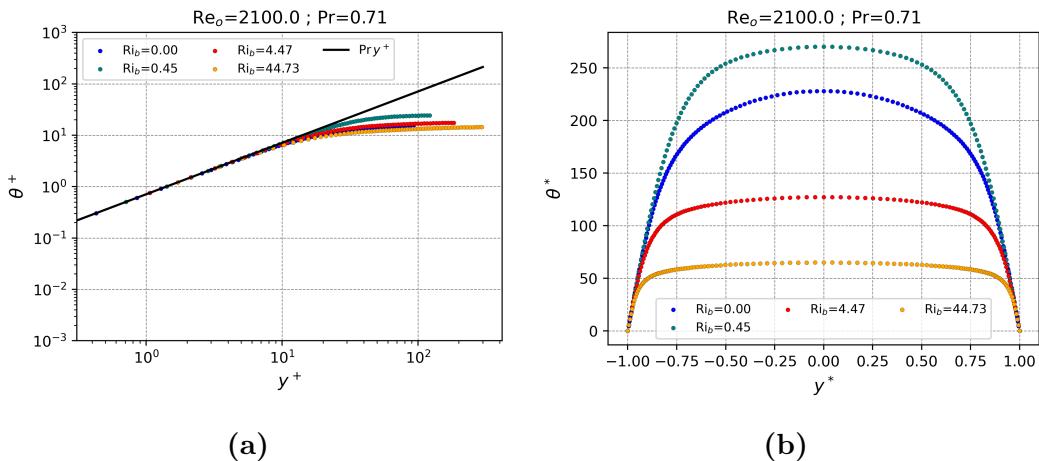


Figura 5.1

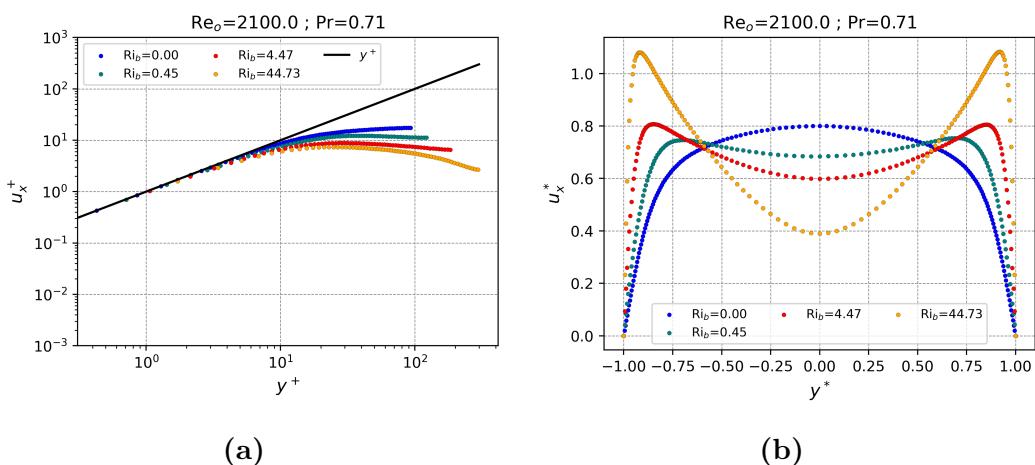


Figura 5.2

5.2. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,071$

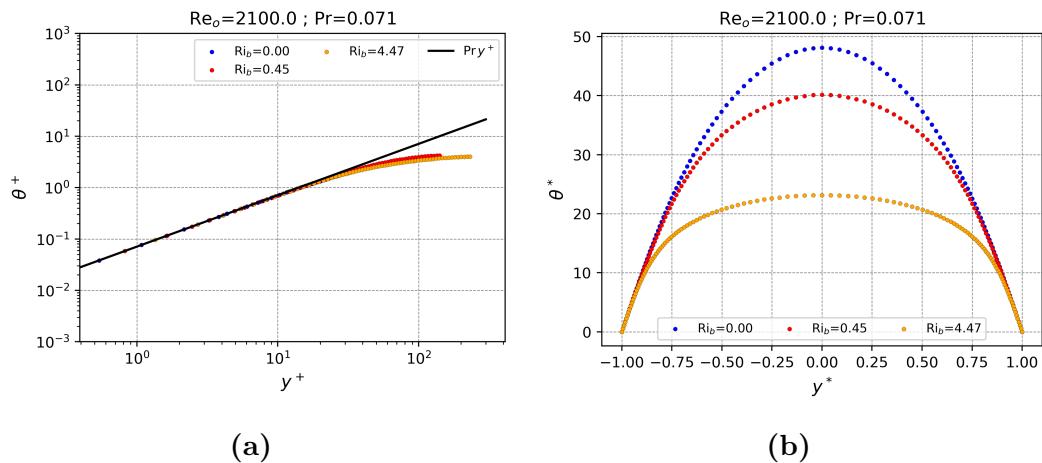


Figura 5.3

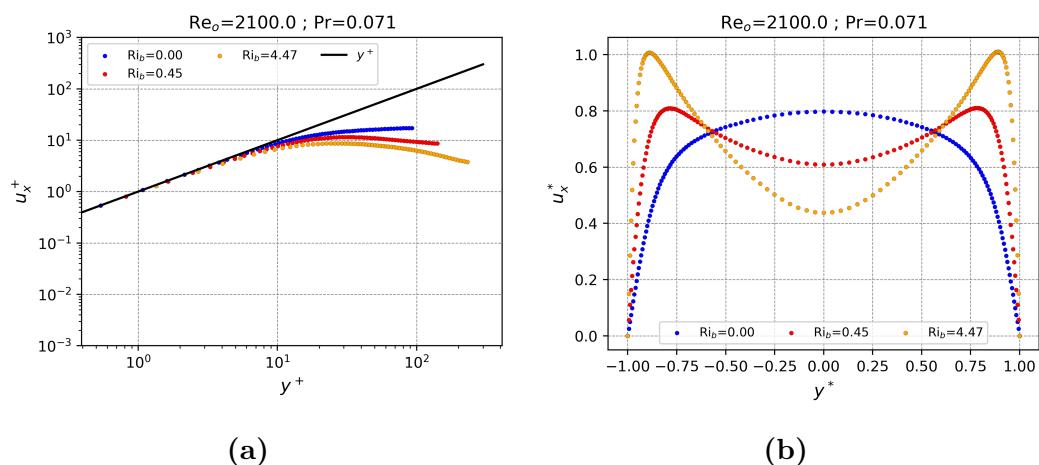


Figura 5.4

5.3. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,71$

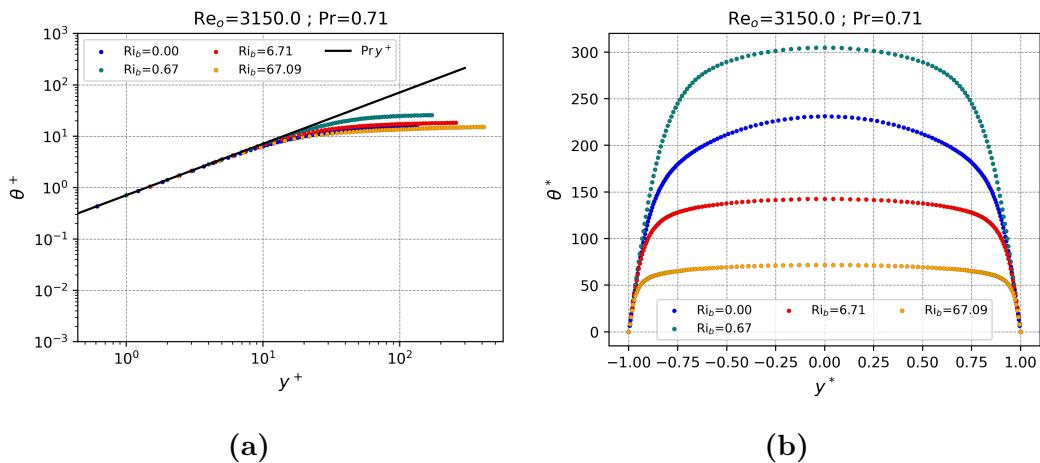


Figura 5.5

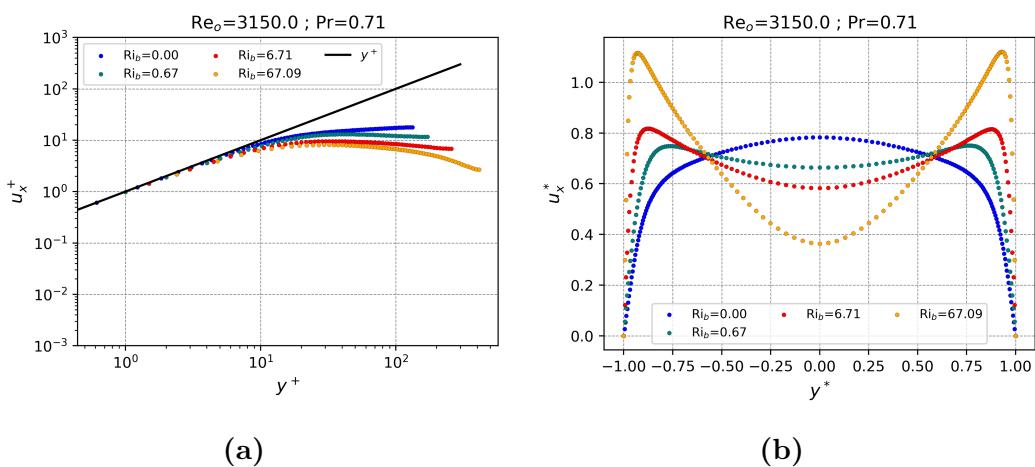


Figura 5.6

5.4. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,071$

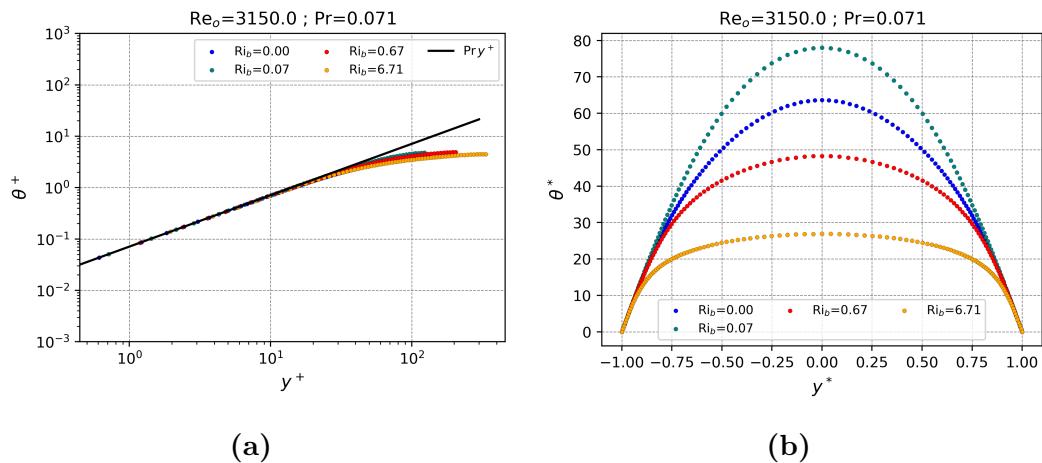


Figura 5.7

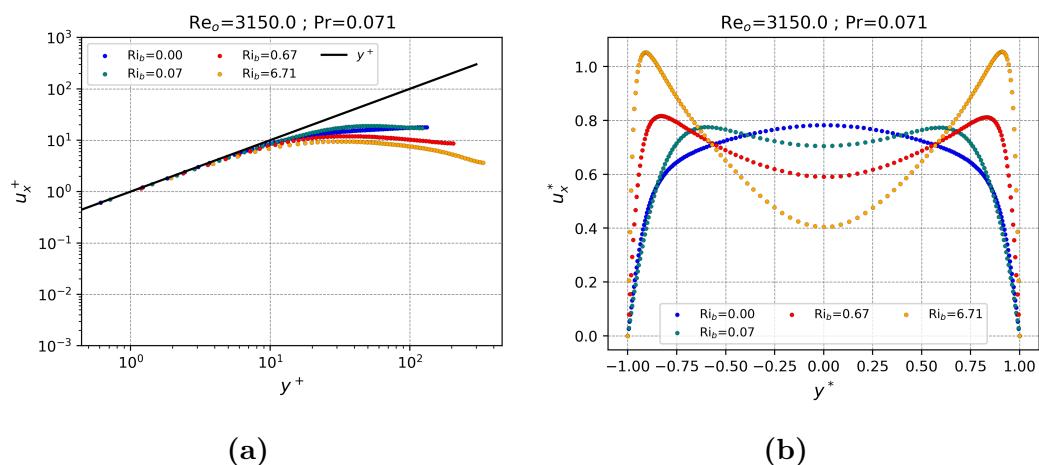


Figura 5.8

5.5. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,71$

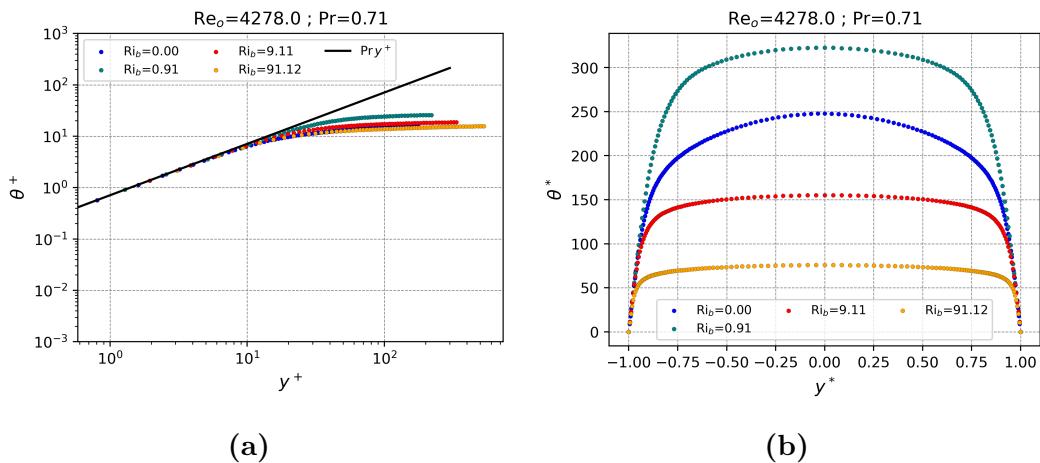


Figura 5.9

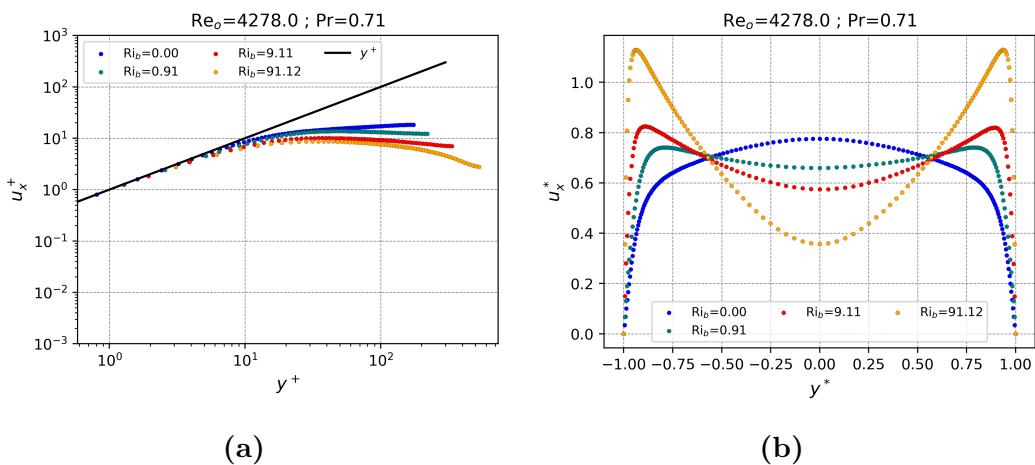


Figura 5.10

5.6. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,071$

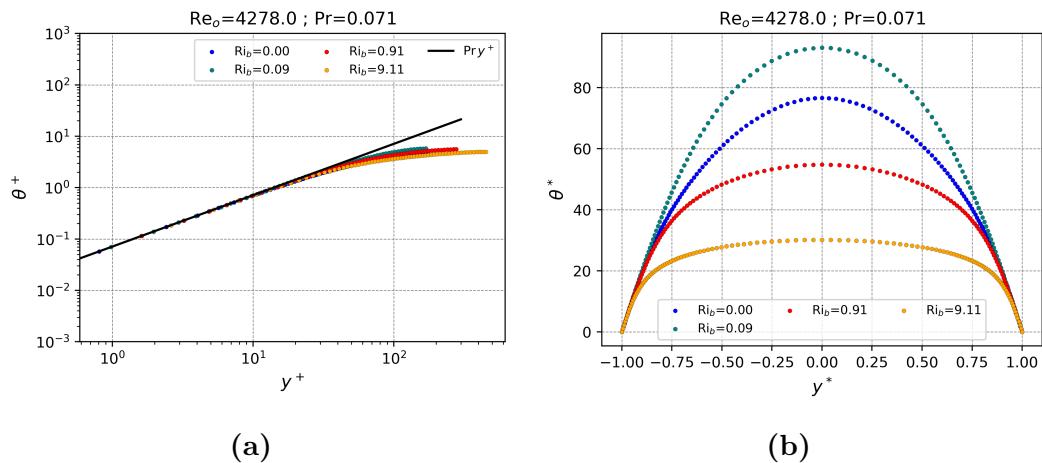


Figura 5.11

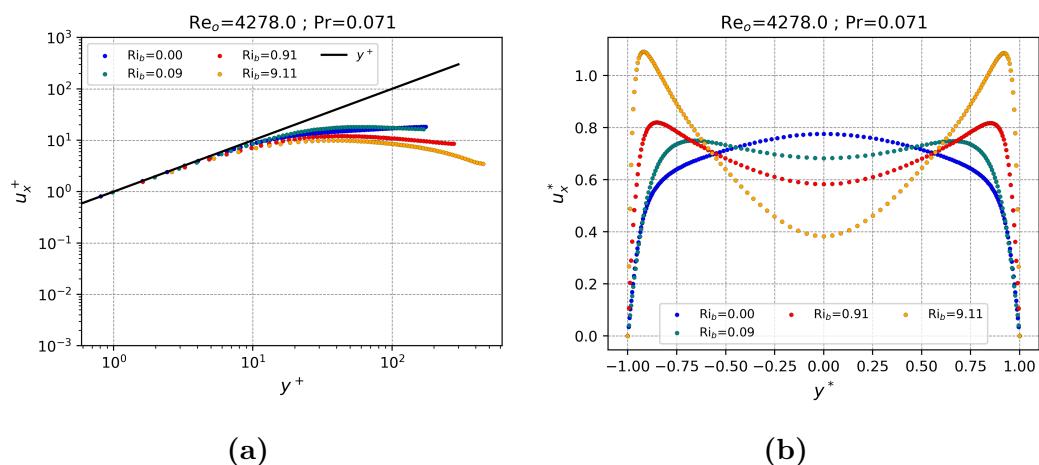


Figura 5.12

5.7. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,71$

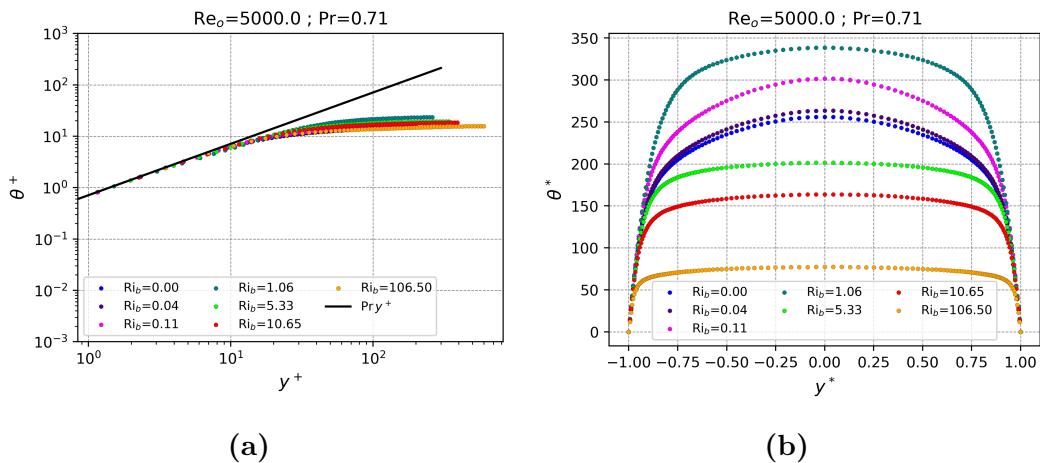


Figura 5.13

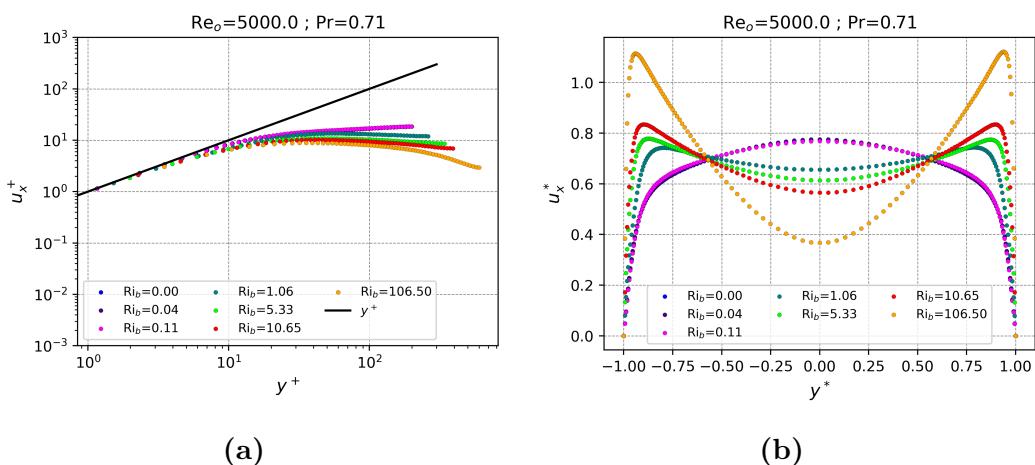


Figura 5.14

5.8. $\text{Re} = 5000$ y $\text{Pr} = 0,071$

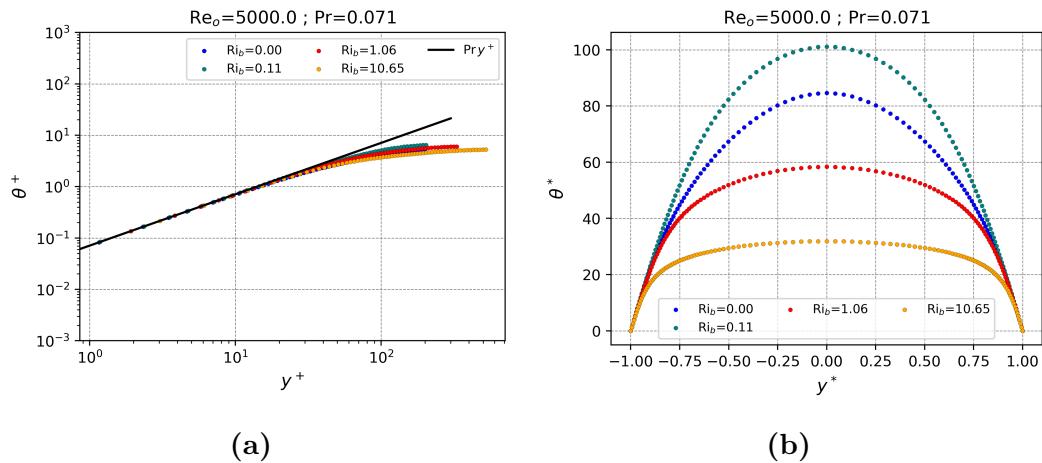


Figura 5.15

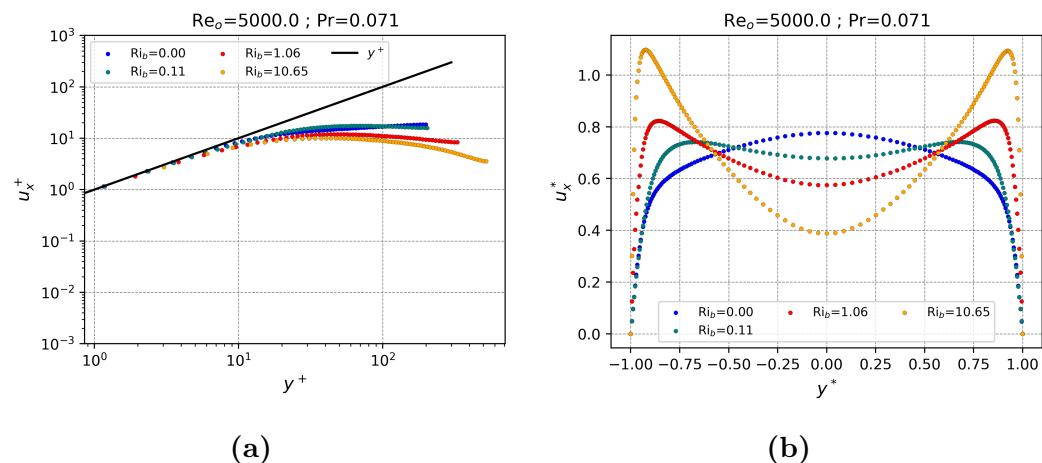


Figura 5.16

5.9. Correlación de Nusselt

Comparación con correlación de Jackson et al [Jackson et al., 1989]

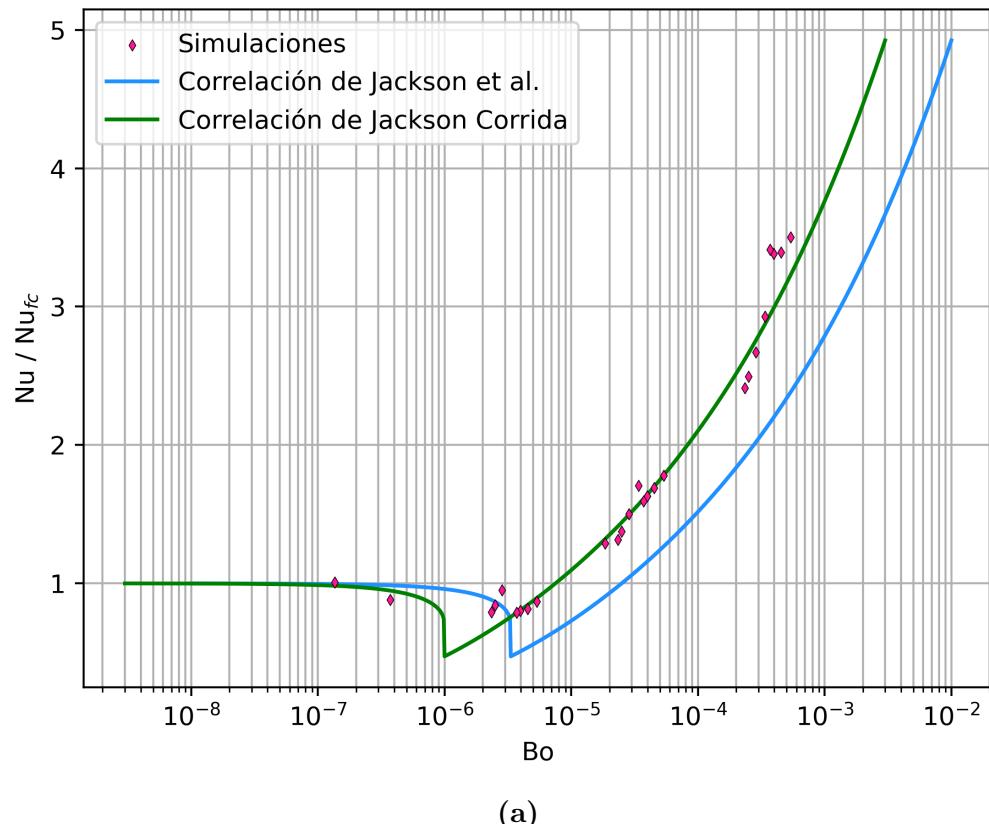


Figura 5.17: Aquí $Bo = Gr/(Re^{3,425} Pr^{0,8})$

Capítulo 6

Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta

Resultados principales y “novedosos”

6.1. Casos $\text{Re} = 750$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re750-Pr071-Ri1Em4-C1	750	0.71	1.63E-4	1.12	0	1 %	0 %	$1.249 + 0.044 j$	-

Tabla 6.1

6.1.1. Autofunciones y Espectros de autovalores

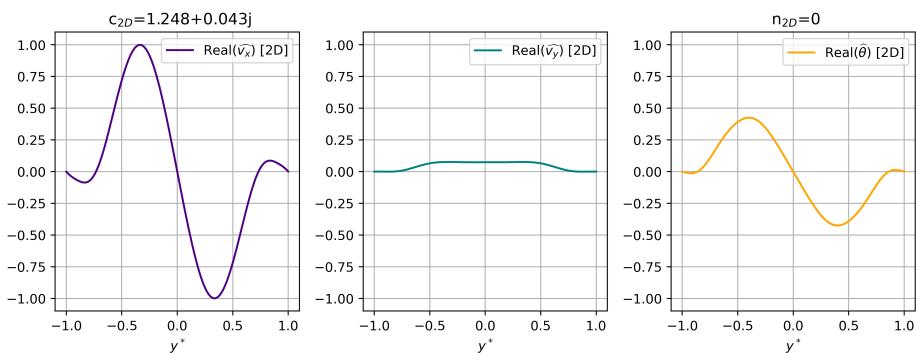


Figura 6.1

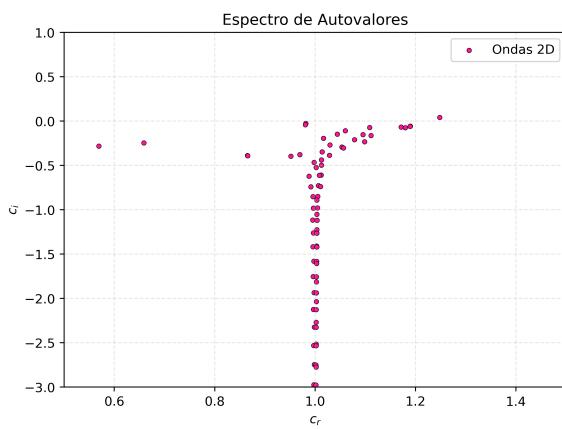


Figura 6.2

6.1.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

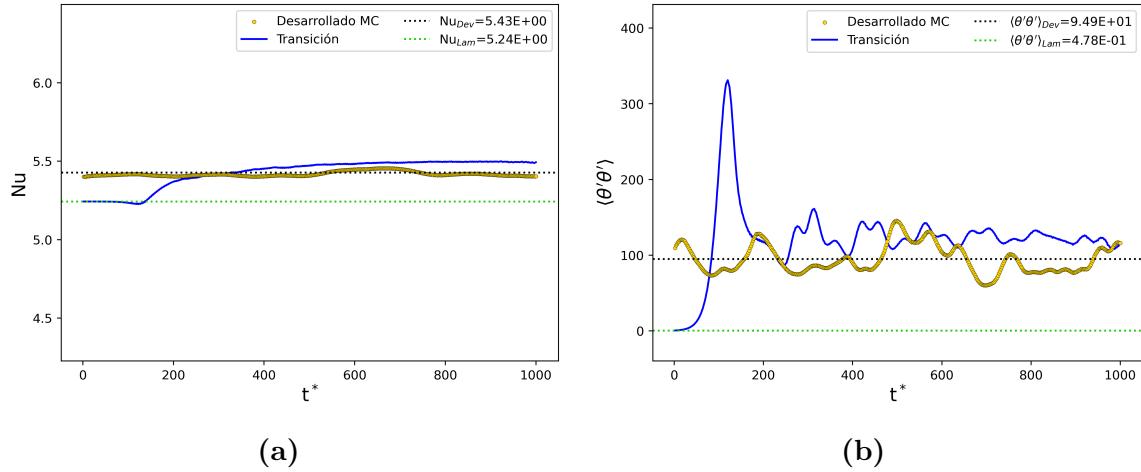


Figura 6.3

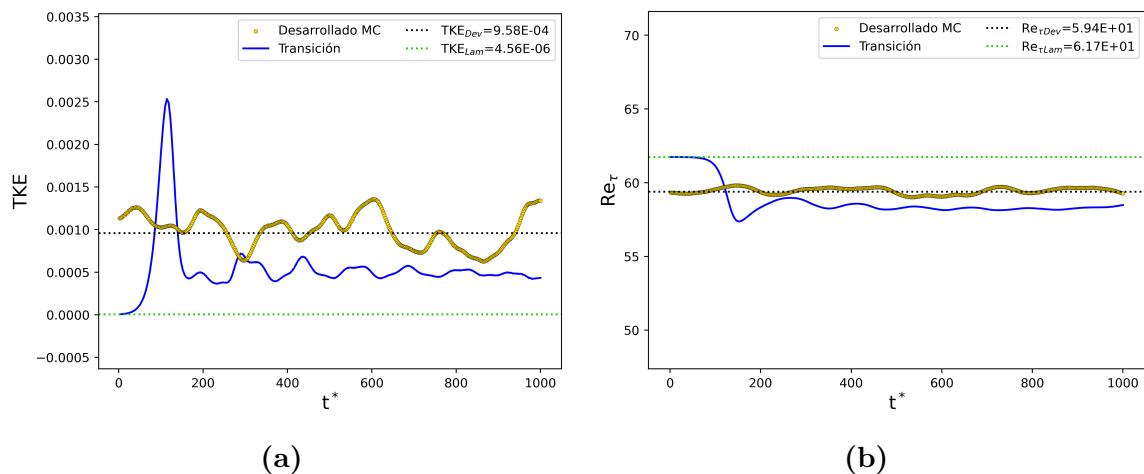


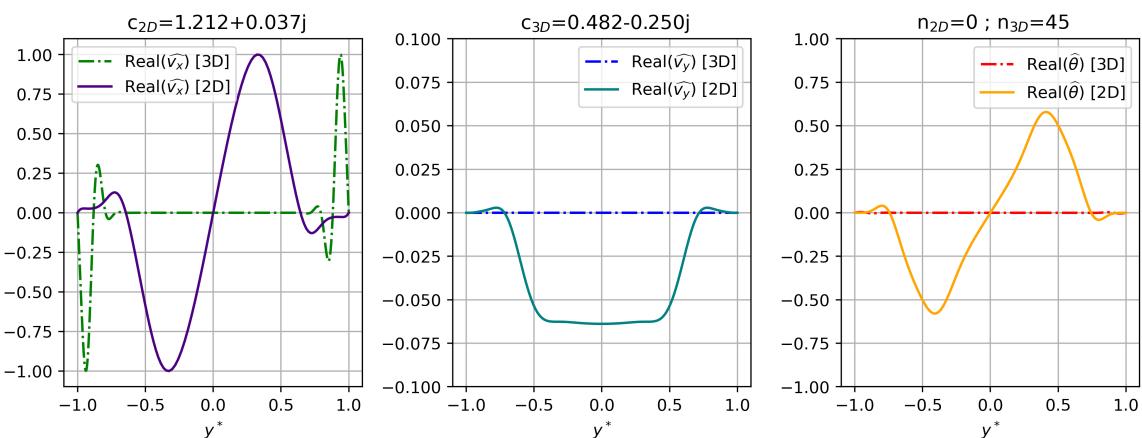
Figura 6.4

6.2. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ra} = 65$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C1	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	1 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C2	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	2 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C3	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	4 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C4	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C5	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	4 %	0.2 %	1.212 + 0.037 j	0.482 - 0.250 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C6	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	0.2 %	1.212 + 0.037 j	0.482 - 0.250 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C7	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	0.472 - 0.104 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C8	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	0.385 - 0.124 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C9	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.472 - 0.104 j	0.575 - 0.095 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C10	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.385 - 0.124 j	0.563 - 0.095 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C11	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.660 - 0.371 j	0.688 - 0.440 j

Tabla 6.2

6.2.1. Autofunciones y Espectros de autovalores



(a)

Figura 6.5

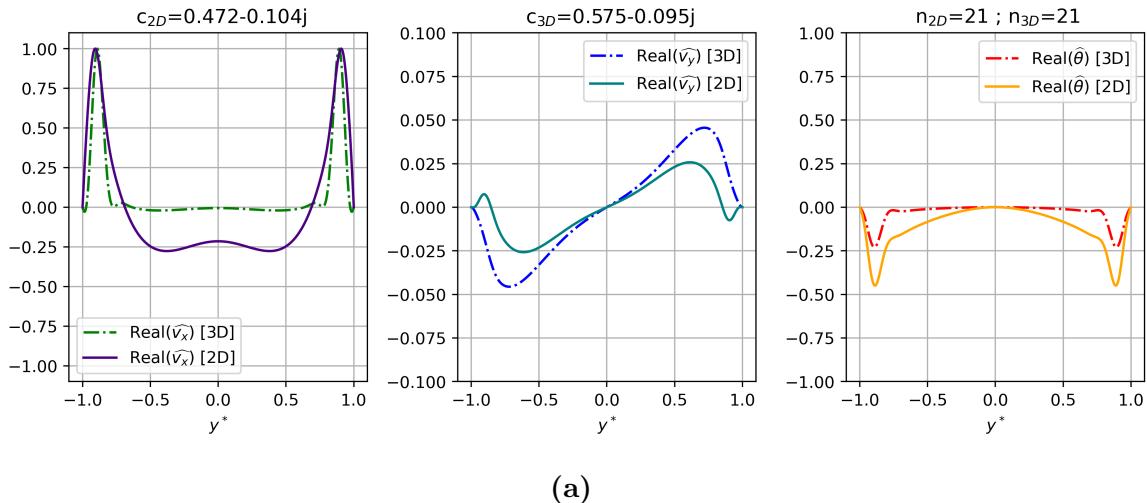


Figura 6.6

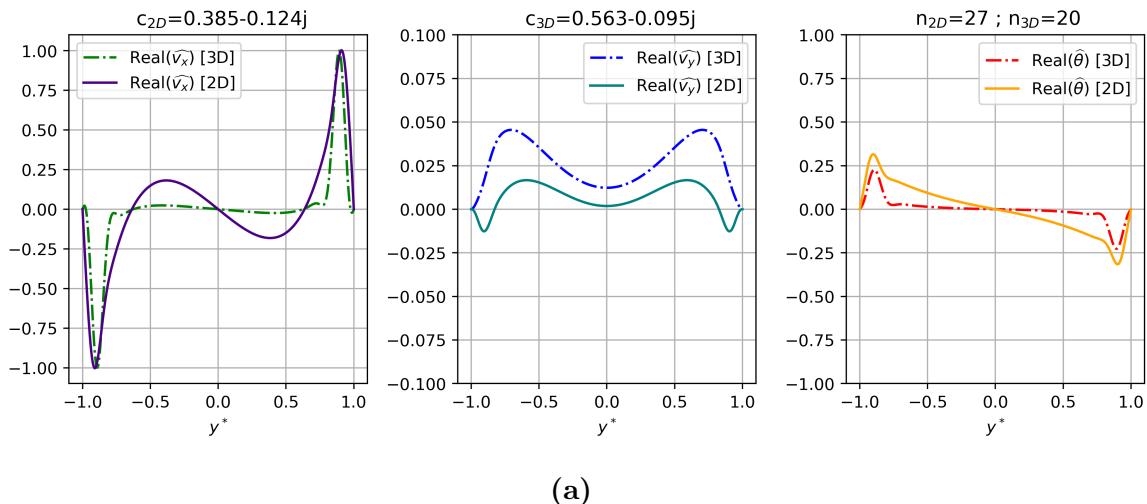


Figura 6.7

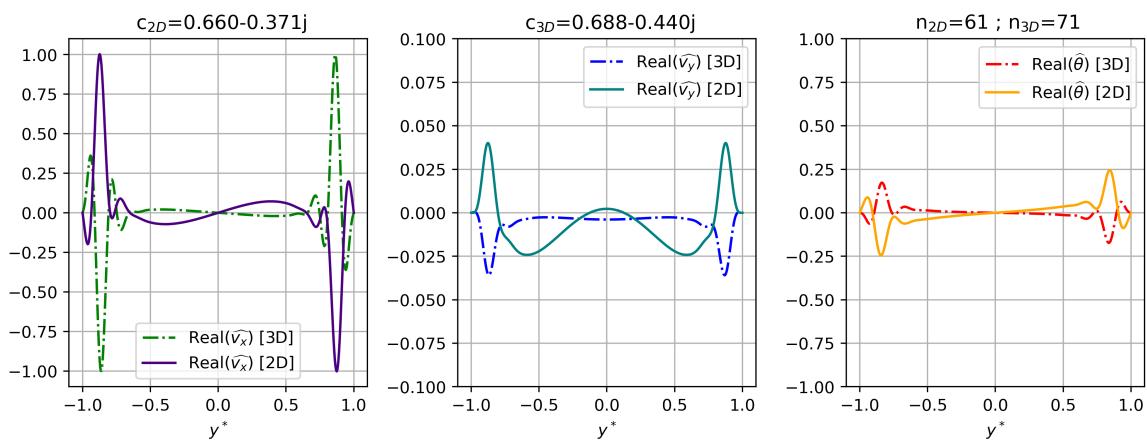


Figura 6.8

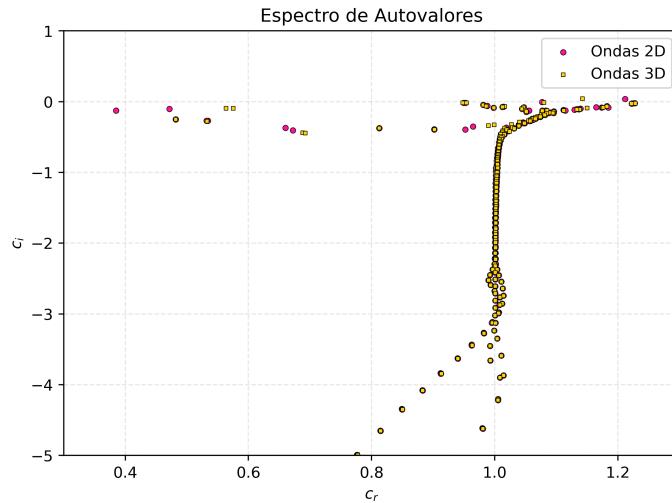


Figura 6.9

6.2.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

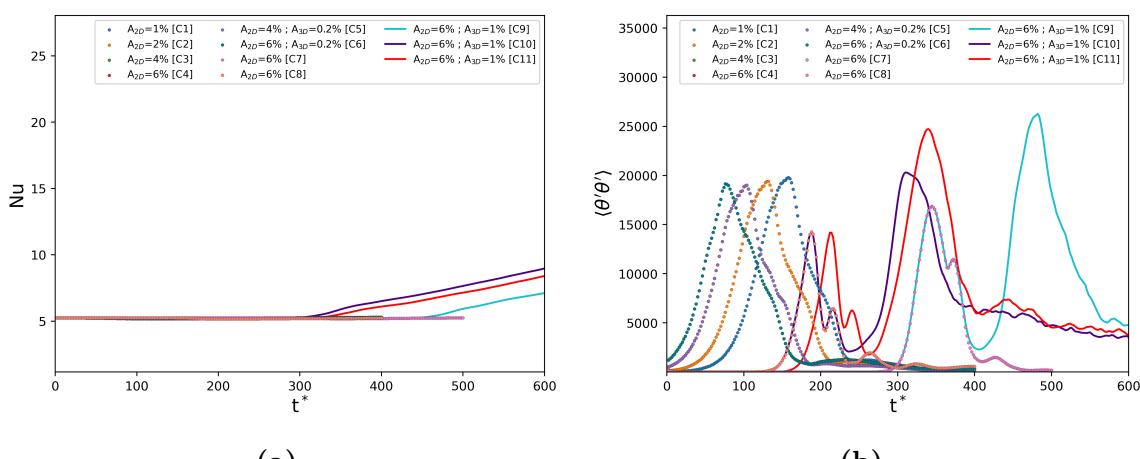


Figura 6.10

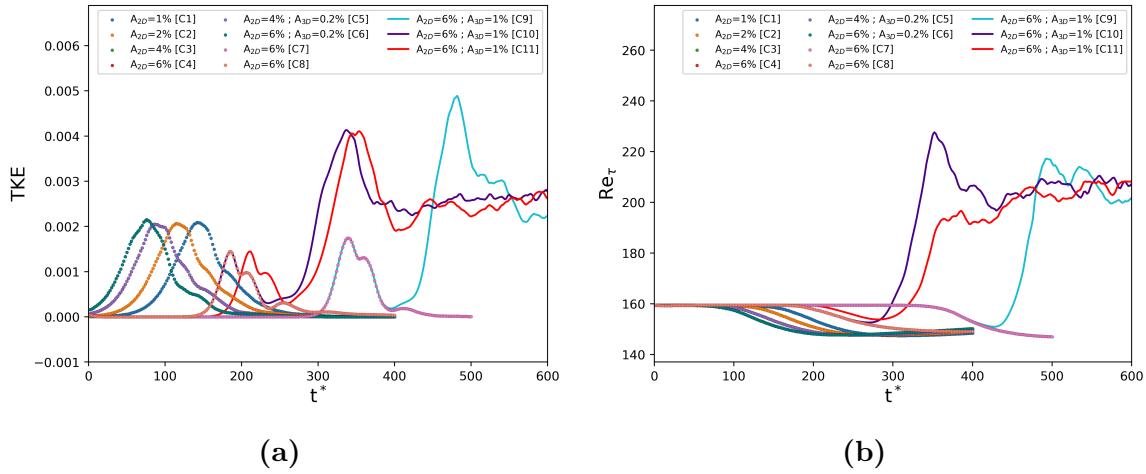


Figura 6.11

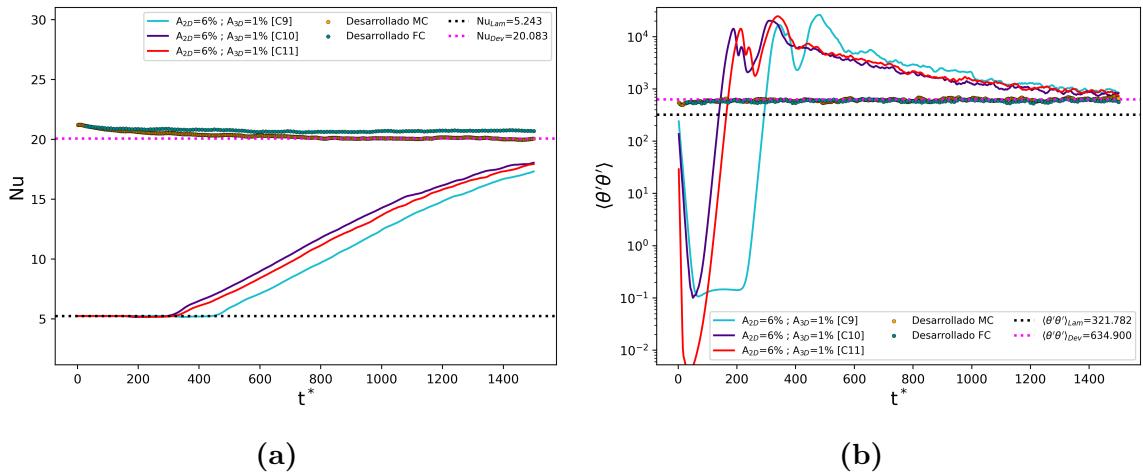


Figura 6.12: Casos C9,C10,C11

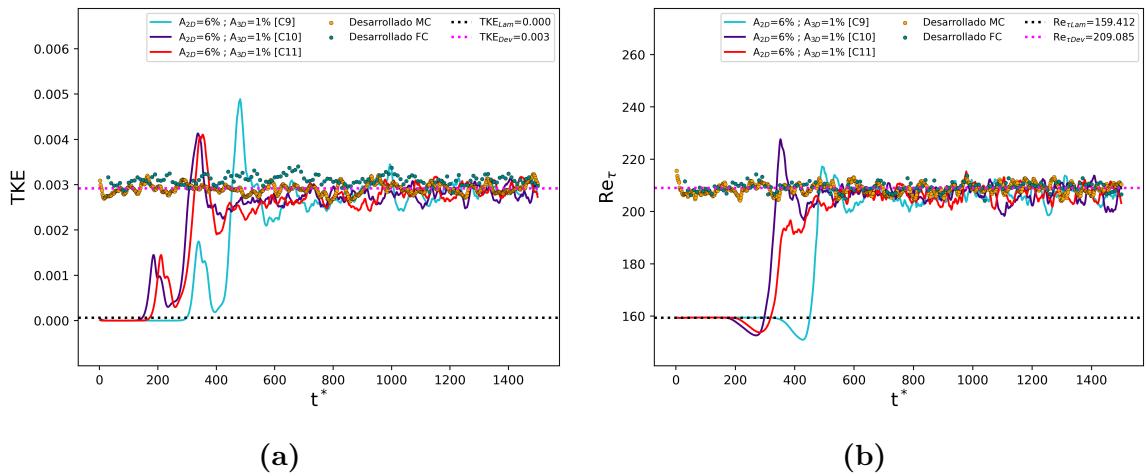


Figura 6.13: Casos C9,C10,C11

6.3. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-4}$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C1	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$2,315 + 0,424 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C2	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$0,800 - 0,495 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em5-C3	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$2,853 - 0,107 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em5-C4	5000	0.71	1E-4	1.12	2.1	2 %	0.4 %	$2,315 + 0,424 j$	$1,721 + 0,235 j$
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C5	5000	0.71	1E-4	1.12	2.1	2 %	0.4 %	$2,853 - 0,107 j$	$1.550 + 0.023 j$

Tabla 6.3

6.3.1. Autofunciones y Espectros de autovalores

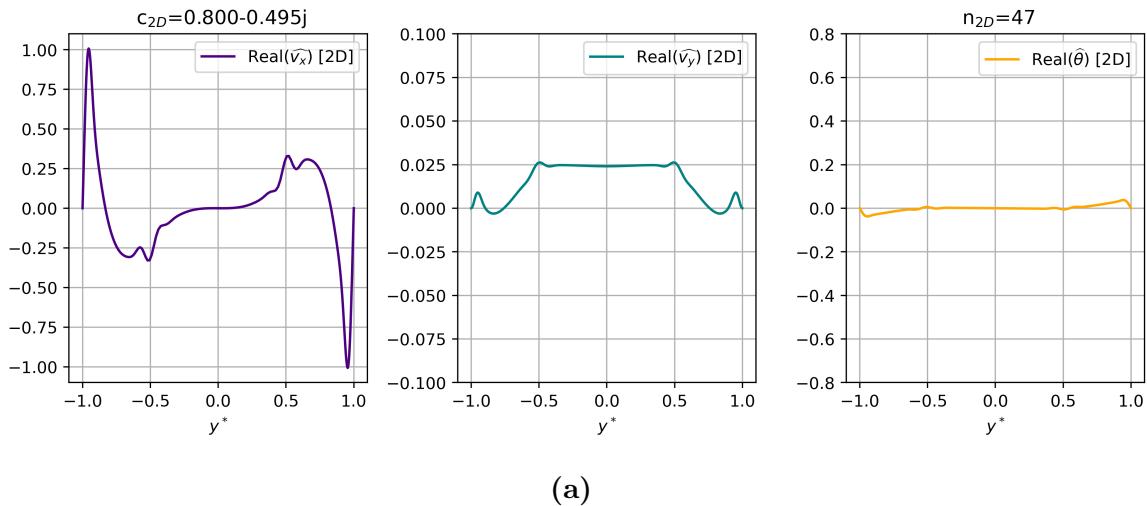


Figura 6.14

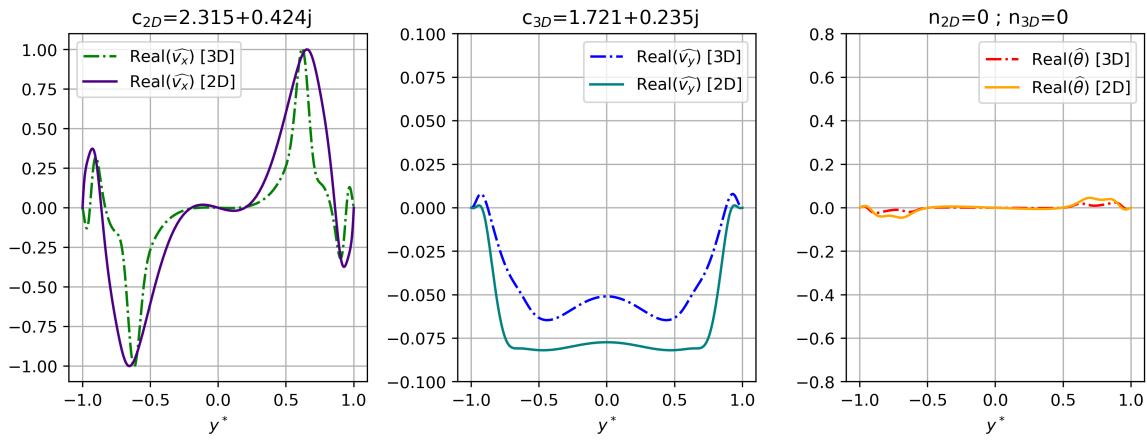
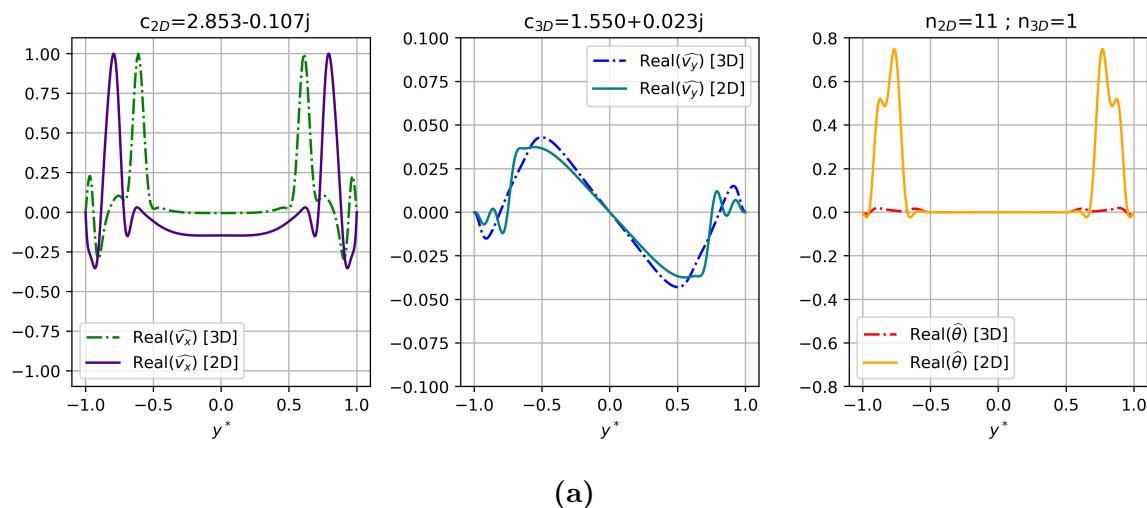


Figura 6.15



(a)

Figura 6.16

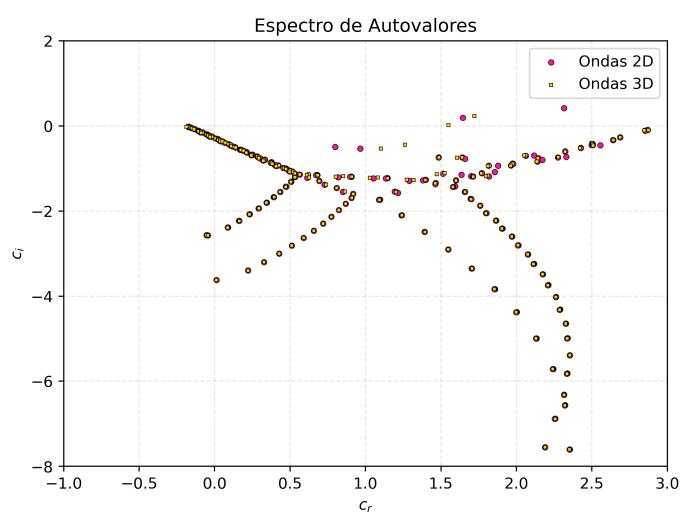


Figura 6.17

6.3.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

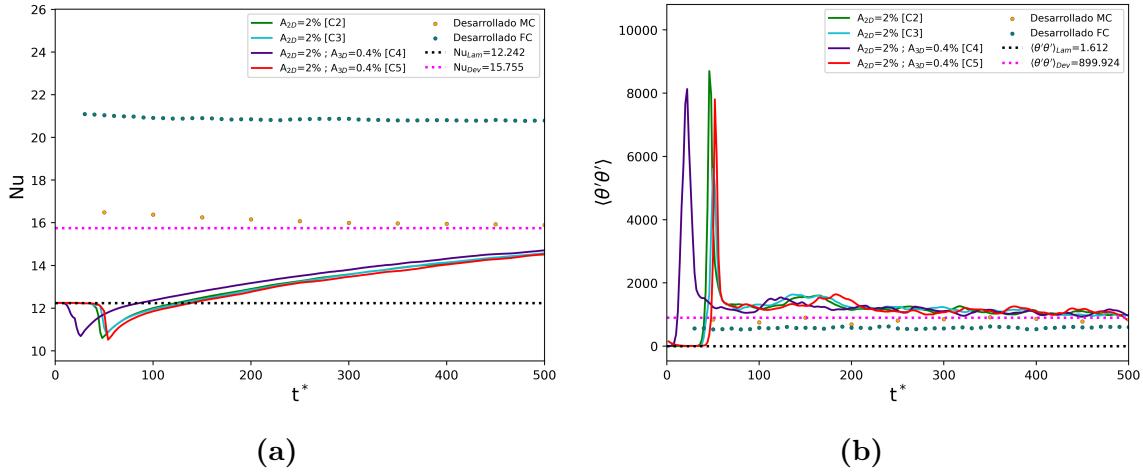


Figura 6.18

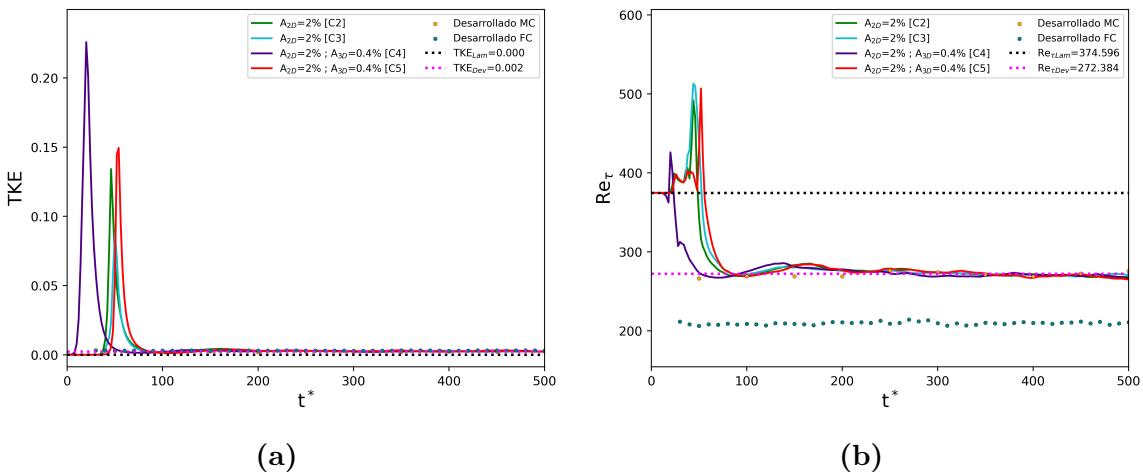


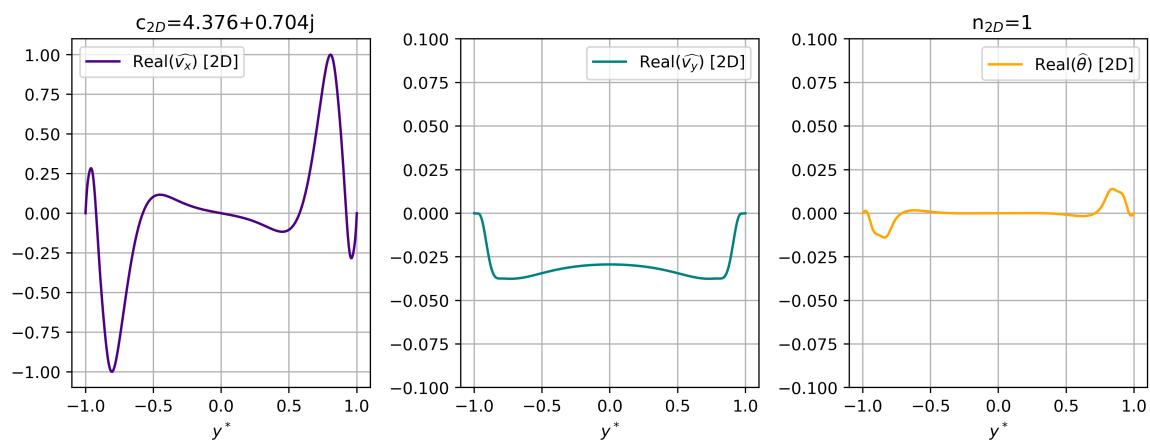
Figura 6.19

6.4. Casos $\text{Re} = 5000$; $\text{Pr} = 0,71$; $\text{Ri} = 10^{-3}$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	α	β	A_{2D}	A_{3D}	λ_{2D}	λ_{3D}
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C1	5000	0.71	1E-3	1.12	0	2 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C2	5000	0.71	1E-3	1.12	0	1 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C3	5000	0.71	1E-3	1.12	0	0.5 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C4	5000	0.71	1E-3	1.12	0	0.25 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-

Tabla 6.4

6.4.1. Autofunciones y Espectros de autovalores



(a)

Figura 6.20

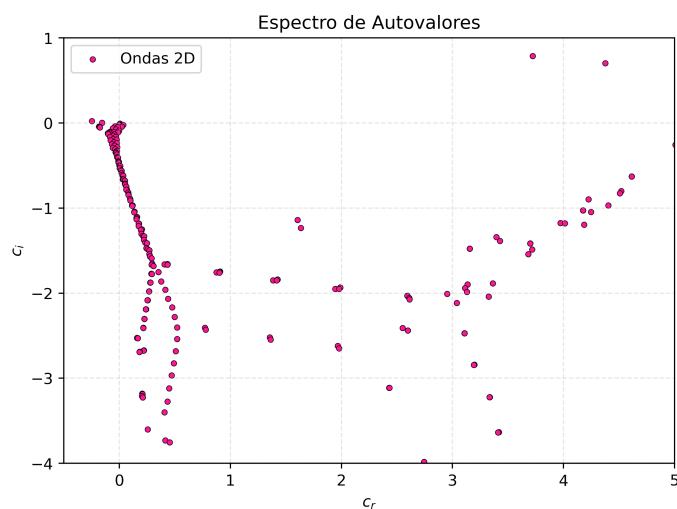


Figura 6.21

6.4.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$, Re_τ , Nusselt

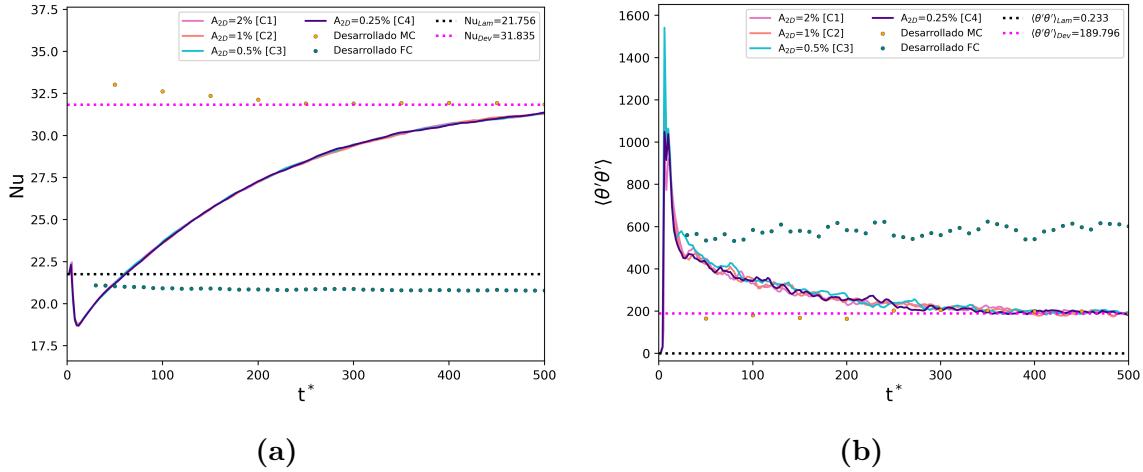


Figura 6.22

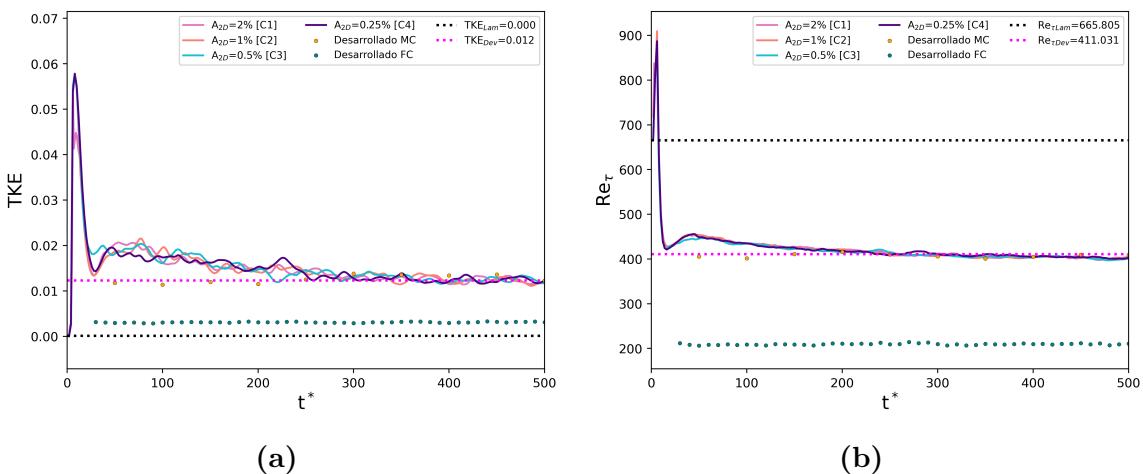


Figura 6.23

Capítulo 7

Conclusiones

Acá se concluyen cosas

Apéndice A

Budgets Dynamics Equations

A partir de la descomposición de Reynolds de los campos de interés (componentes de la velocidad, presión, temperatura) aplicadas a las ecuaciones de gabinete 2.1 se puede obtener, mediante mucho álgebra, ecuaciones que describen la dinámica de los budget de las cantidades de segundo orden como $\langle v'_x v'_y \rangle$, la energía cinética turbulenta κ , los flujos de calor turbulento $\langle v'_i \theta' \rangle$ y la varianza de la temperatura $\langle \theta' \theta' \rangle$. Se han omitido los superíndices “*”.

$$\partial_t \langle v'_i \theta' \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle v'_i \theta' \rangle = \mathcal{P}_{i\theta} + \mathcal{T}_{i\theta} + \Pi_{i\theta} + \mathcal{D}_{i\theta} + \mathcal{B}_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad (\text{A.1})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_{i\theta} = -\partial_k \langle v'_i v'_k \theta' \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_{i\theta} = -[\langle \theta' v'_k \rangle \partial_k \langle v_i \rangle + \langle v'_i v'_k \rangle \partial_k \langle \theta \rangle] + \langle v'_i v'_x \rangle$

Disipación: $\mathcal{D}_{i\theta} = -\frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) \langle \partial_k \theta' \partial_k v'_i \rangle$ (A.2)

Correlación Temp - Grad Presión: $\Pi_{i\theta} = -\langle \theta' \partial_i p' \rangle$

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_{i\theta} = \text{Ri } g_i \langle \theta' \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_{i\theta} = \frac{1}{\text{Re}} \partial_k \left[\langle \theta' \partial_k v'_i \rangle + \frac{1}{\text{Pr}} \langle v'_i \partial_k \theta' \rangle \right]$

$$\partial_t \langle v'_x v'_y \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle v'_x v'_y \rangle = \mathcal{P}_{xy} + \mathcal{T}_{xy} + \Pi_{xy} + \mathcal{D}_{xy} + \mathcal{B}_{xy} - \varepsilon_{xy} \quad (\text{A.3})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_{xy} = -\partial_k \langle v'_x v'_k v'_y \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_{xy} = -[\langle v_y v'_k \rangle \partial_k \langle v_x \rangle + \langle v'_x v'_k \rangle \partial_k \langle v_y \rangle]$

Disipación: $\mathcal{D}_{xy} = -\frac{2}{\text{Re}} \langle \partial_k v'_x \partial_k v'_y \rangle$

Correlacion Vel - Grad Presión: $\Pi_{xy} = -[\langle v'_y \partial_x p' \rangle + \langle v'_x \partial_y p' \rangle]$ (A.4)

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_{xy} = -\text{Ri} \langle v'_y \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{\text{Re}} \partial_k^2 \langle v'_x v'_y \rangle$

Siendo $\kappa = \langle v_i v'_i \rangle / 2$, la Energía Cinética Turbulenta, entonces:

$$\partial_t \kappa + \langle v_n \rangle \partial_n \kappa = \mathcal{P}_i + \mathcal{T}_i + \Pi_i + \mathcal{D}_i + \mathcal{B}_i - \varepsilon_i \quad (\text{A.5})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_i = -\frac{1}{2} \partial_n \langle v'_i v'_n v'_i \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_i = -\langle v_i v'_n \rangle \partial_n \langle v_i \rangle$

Disipación: $\mathcal{D}_i = -\frac{1}{\text{Re}} \langle \partial_n v'_i \partial_n v'_i \rangle$ (A.6)

Correlacion Vel - Grad Presión: $\Pi_i = -\langle \partial_i (v'_i p') \rangle$

Prod-Boyante: $\mathcal{B}_i = -\text{Ri} g_i \langle v'_i \theta' \rangle$

Difusión Viscosa: $\varepsilon_i = \frac{1}{\text{Re}} \partial_n^2 \kappa$

$$\partial_t \langle \theta' \theta' \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle \theta' \theta' \rangle = \mathcal{P}_\theta + \mathcal{T}_\theta + \mathcal{D}_\theta - \varepsilon_\theta \quad (\text{A.7})$$

Difusión Turbulenta: $\mathcal{T}_\theta = -\partial_k \langle \theta' \theta' v'_k \rangle$

Producción: $\mathcal{P}_\theta = 2 [\langle \theta' v'_k \rangle \partial_k \langle \theta' \rangle + \langle v'_x \theta' \rangle]$

Disipación: $\mathcal{D}_\theta = -\frac{2}{\text{RePr}} (\langle \partial_k \theta' \rangle)^2$ (A.8)

Difusión Viscosa: $\varepsilon_\theta = \frac{1}{\text{RePr}} \partial_k^2 \langle \theta' \theta' \rangle$

Bibliografía

- [Bénard, 1901] Bénard, H. (1901). Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*.
- [Cengel and Ghajar, 2015] Cengel, Y. A. and Ghajar, A. J. (2015). *Heat and Mass Transfer: Fundamentals & Applications*. McGraw-Hill Education.
- [Chen and Chung, 1996] Chen, Y.-C. and Chung, J. (1996). The linear stability of mixed convection in a vertical channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*.
- [Chen and Chung, 2003] Chen, Y.-C. and Chung, J. (2003). A direct numerical simulation of transition phenomena in a mixed convection channel flow. *Computers & fluids*.
- [Dittus and Boelter, 1930] Dittus, F. W. and Boelter, L. M. K. (1930). Heat transfer in automobile radiators of the tubular type. *University of California Publications in Engineering*.
- [Ghajar, 2019] Ghajar, A. J. (2019). Heat transfer and pressure drop in the transition region of smooth horizontal circular tubes with different inlet configurations. In *Advances in heat transfer*. Elsevier.
- [Herbert, 1983] Herbert, T. (1983). Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances. *Physics of Fluids*.
- [Incropera et al., 2006] Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., Lavine, A. S., et al. (2006). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley and Sons.
- [Jackson et al., 1989] Jackson, J., Cotton, M., and Axcell, B. (1989). Studies of mixed convection in vertical tubes. *International journal of heat and fluid flow*.
- [Kasagi and Nishimura, 1997] Kasagi, N. and Nishimura, M. (1997). Direct numerical simulation of combined forced and natural turbulent convection in a vertical plane channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow*.
- [Kasagi et al., 1992] Kasagi, N., Tomita, Y., and Kuroda, A. (1992). Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow.
- [Kundu et al., 2016] Kundu, P. K., Cohen, I. M., Dowling, D. R., and Capecelatro, J. (2016). *Fluid Mechanics*. Elsevier.

- [Metais and Eckert, 1964] Metais, B. and Eckert, E. R. G. (1964). Forced, mixed and free convection regimes. *Journal of Heat Transfer*.
- [Orr, 1907] Orr, W. M. (1907). The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. part i: A perfect liquid. part ii: A viscous liquid.
- [Pirozzoli et al., 2017] Pirozzoli, S., Bernardini, M., Verzicco, R., and Orlandi, P. (2017). Mixed convection in turbulent channels with unstable stratification. *Journal of fluid mechanics*.
- [Rayleigh, 1916] Rayleigh, L. (1916). On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Philosophical Magazine*.
- [Reynolds, 1883] Reynolds, O. (1883). Iii. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the royal society of London*.
- [Schlichting, 1933] Schlichting, H. (1933). Berechnung der anfachung kleiner störungen bei der plattenströmung. *ZAMM*.
- [Schubauer and Skramstad, 1947] Schubauer, G. B. and Skramstad, H. K. (1947). Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*.
- [Sommerfield, 1908] Sommerfield, A. (1908). Ein beitrag zur hydrodynamischen erklärung der turbulenten flüssigkeitsbewegungen. *Atti Congr. Int. Math. 4th*.
- [Straub et al., 2019] Straub, S., Forooghi, P., Marocco, L., Wetzel, T., Vinuesa, R., Schlatter, P., and Frohnapfel, B. (2019). The influence of thermal boundary conditions on turbulent forced convection pipe flow at two prandtl numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [Tao, 1960] Tao, S. C. (1960). Combined forced and free convection in a vertical channel. *Journal of Heat Transfer*.
- [Tollmien, 1930] Tollmien, W. (1930). Über die entstehung der turbulenz. *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete: Aachen 1929*.
- [White, 2011] White, F. M. (2011). *Fluid mechanics*. McGraw-Hill New York.

Agradecimientos

A todos los que se lo merecen ...

