

# TESIS CARRERA DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA

## ANÁLISIS DEL FLUJO EN CONVECCIÓN MIXTA EN CANALES RECTANGULARES

**Patricio G. Canciani**  
**Maestrando**

**Dr. William I. Machaca Abregu**  
Director

**Dr. Federico Teruel**  
Co-director

### Miembros del Jurado

Dr. Christian P. Marcel (Instituto Balseiro – CNEA)  
Dr. Pablo Garcia Martinez (Instituto Balseiro – CNEA)  
Dr. César Venier (FCEIA – SIMEC)

14 de Julio de 2025

Departamento de Mecánica Computacional  
(Centro Atómico Bariloche)

Instituto Balseiro  
Universidad Nacional de Cuyo  
Comisión Nacional de Energía Atómica  
Argentina



A todos mis seres queridos



# Índice de símbolos



# Índice de contenidos

Índice de símbolos	v
Índice de contenidos	vii
Índice de figuras	xi
Índice de tablas	xiii
Resumen	xv
Abstract	xvii
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	2
1.2. Motivación . . . . .	4
1.3. Objetivos . . . . .	5
1.4. Organización del trabajo . . . . .	5
<b>2. Modelo Matemático</b>	<b>7</b>
2.1. Conceptos Elementales de Turbulencia . . . . .	8
2.2. Descripción del sistema bajo estudio. Ecuaciones de Gobierno y Condiciones de Borde . . . . .	8
2.3. Sumario de Ecuaciones . . . . .	11
2.4. Teoría de Estabilidad Lineal. Perturbaciones . . . . .	12
2.5. Flujo Base . . . . .	12
2.6. Análisis de Estabilidad Lineal . . . . .	13
2.7. Ondas TS e Inestabilidad Secundaria . . . . .	15
<b>3. Fundamentos de Herramientas Numéricas</b>	<b>17</b>
3.1. Simulaciones Numéricas Directas . . . . .	18
3.2. Xcompac3D . . . . .	18
3.2.1. Métodos Numéricos . . . . .	18
3.2.2. Validación . . . . .	18

3.3. Orr-Somerfeld - <i>Mixed Convection</i> (OSMC) . . . . .	18
3.3.1. Métodos Numéricos . . . . .	18
<b>4. Validación de Herramientas Numéricas</b>	<b>19</b>
4.1. Primera Parte: Xcompac3D . . . . .	20
4.2. Segunda Parte: Orr-Somerfeld - <i>Mixed Convection</i> . . . . .	20
<b>5. Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollado</b>	<b>21</b>
5.1. Casos simulados . . . . .	22
5.2. Magnitudes de Primer y Segundo Orden . . . . .	23
5.2.1. Perfiles de velocidad y de temperatura . . . . .	23
5.2.2. Valores RMS de temperatura, velocidad y flujo turbulento de calor	24
5.3. Comparación entre casos de distinto Prandtl . . . . .	26
5.4. Número de Nusselt . . . . .	27
5.5. Factor de Fricción de Darcy . . . . .	29
<b>6. Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta</b>	<b>31</b>
6.1. Casos $Re = 750$ ; $Pr = 0,71$ ; $Ra = 65$ . . . . .	32
6.1.1. Autofunciones y Espectros de autovalores . . . . .	32
6.1.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$ , $Re_\tau$ , Nusselt . . . . .	33
6.2. Casos $Re = 5000$ ; $Pr = 0,71$ ; $Ra = 65$ . . . . .	34
6.2.1. Autofunciones y Espectros de autovalores . . . . .	34
6.2.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$ , $Re_\tau$ , Nusselt . . . . .	36
6.3. Casos $Re = 5000$ ; $Pr = 0,71$ ; $Ri = 10^{-4}$ . . . . .	38
6.3.1. Autofunciones y Espectros de autovalores . . . . .	38
6.3.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$ , $Re_\tau$ , Nusselt . . . . .	40
6.4. Casos $Re = 5000$ ; $Pr = 0,71$ ; $Ri = 10^{-3}$ . . . . .	41
6.4.1. Autofunciones y Espectros de autovalores . . . . .	41
6.4.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$ , $Re_\tau$ , Nusselt . . . . .	42
<b>7. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>A. Budgets Dynamics Equations</b>	<b>45</b>
<b>B. Perfiles de Desarrollados</b>	<b>47</b>
B.1. $Re = 2100$ y $Pr = 0,71$ . . . . .	47
B.2. $Re = 2100$ y $Pr = 0,071$ . . . . .	48
B.3. $Re = 3150$ y $Pr = 0,71$ . . . . .	49
B.4. $Re = 3150$ y $Pr = 0,071$ . . . . .	50
B.5. $Re = 4278$ y $Pr = 0,71$ . . . . .	51
B.6. $Re = 4278$ y $Pr = 0,071$ . . . . .	52

Bibliografía	55
--------------	----

Agradecimientos	57
-----------------	----



# Índice de figuras

1.1. Comparación esquemática de la transferencia de calor alrededor de una tubería caliente: (izquierda) convección forzada; (derecha) convección natural.	2
2.1. . . . .	8
5.1. Mapa de regímenes de los casos simulados.	22
5.2. . . . .	23
5.3. . . . .	24
5.4. . . . .	25
5.5. . . . .	25
5.6. . . . .	26
5.7. Número de boyancia: $Bo = Gr/(Re^{3,425} Pr^{0,8})$ .	28
5.8. Factor de Darcy $f$ . Aquí $Bo = Gr/(Re^{3,425} Pr^{0,8})$	29
6.1. . . . .	32
6.2. . . . .	32
6.3. . . . .	33
6.4. . . . .	33
6.5. . . . .	34
6.6. . . . .	35
6.7. . . . .	35
6.8. . . . .	35
6.9. . . . .	36
6.10. . . . .	36
6.11. . . . .	37
6.12. Casos C9,C10,C11	37
6.13. Casos C9,C10,C11	37
6.14. . . . .	38
6.15. . . . .	38
6.16. . . . .	39

---

6.17.	39
6.18.	40
6.19.	40
6.20.	41
6.21.	41
6.22.	42
6.23.	42
B.1.	47
B.2.	47
B.3.	48
B.4.	48
B.5.	49
B.6.	49
B.7.	50
B.8.	50
B.9.	51
B.10.	51
B.11.	52
B.12.	52

# Índice de tablas

6.1.	32
6.2.	34
6.3.	38
6.4.	41



# Resumen

Este es el resumen en castellano.

La tesis debe reflejar el trabajo desarrollado, mostrando la metodología utilizada, los resultados obtenidos y las conclusiones que pueden inferirse de dichos resultados.

**Palabras clave:** FLUJO TURBULENTO, CONVECCIÓN MIXTA



# **Abstract**

This is the title in English:

The thesis must reflect the work of the student, including the chosen methodology, the results and the conclusions that those results allow us to draw.

**Keywords:** TURBULENT FLOW, MIXED CONVECTION



# Capítulo 1

## Introducción

Capítulo introductorio de la tesis

Algunas preguntas clave que deberían responderse en este capítulo:

¿Cuál es el campo general de estudio de tu tesis?

¿Qué fenómeno, problema o sistema estás investigando?

¿Por qué este tema es relevante científica o tecnológicamente?

¿Qué problema específico intenta resolver tu tesis?

¿Cuáles son los objetivos (generales y/o específicos)?

¿Qué enfoque metodológico utilizás? ¿Experimental, teórico, computacional?

¿Cómo está organizada la tesis?

## 1.1. Introducción

### Convección Mixta

Un fluido, en virtud de su masa y velocidad, puede transportar momento. Además, en virtud de su temperatura, puede transportar calor. Estrictamente hablando, la convección es el transporte de energía debido al movimiento global de un medio. Sin embargo, en ingeniería es común utilizar el término convección de forma más amplia para describir la transferencia de calor desde una superficie hacia un fluido en movimiento cuando ambos están a diferentes temperaturas [Cengel and Ghajar, 2015, Incropera et al., 2006].

La transferencia de calor por convección puede clasificarse según la naturaleza del flujo. Hablamos de convección forzada cuando el flujo es provocado por actores externos como puede ser la acción de bombeo o un gradiente de presión; en cambio, en la convección natural, el flujo es inducido por fuerzas boyantes o de flotación, las cuales se deben a diferencias de densidad producidas por variaciones de temperatura en el propio fluido (Figura 1.1).



**Figura 1.1:** Comparación esquemática de la transferencia de calor alrededor de una tubería caliente: (izquierda) convección forzada; (derecha) convección natural.

Los primeros estudios sobre la transferencia de calor por convección trataron las ramas de la convección forzada y la convección natural de forma separada, sin considerar la posible interacción entre ambas. Por un lado, los experimentos de Henri Bénard (1901) marcaron un hito en la comprensión de la convección natural [Bénard, 1901]. Más tarde, Lord Rayleigh (1916) desarrolló la base teórica de la inestabilidad térmica en capas fluidas [Rayleigh, 1916]. En paralelo, en el ámbito de la convección forzada, trabajos como el de Dittus y Boelter (1930) establecieron correlaciones empíricas para la transferencia de calor en tubos [Dittus and Boelter, 1930]. No fue sino hasta mediados del siglo XX que comenzó a reconocerse que ambos mecanismos pueden coexistir

en muchas configuraciones de interés práctico. Así surgió el concepto de convección mixta, donde la convección forzada y la natural actúan simultáneamente como casos extremos de un fenómeno más general [Tao, 1960, Metais and Eckert, 1964].

## Régimen de Transición y Transición Laminar-Turbulenta

Cuando un fluido se desplaza a través de un conducto o sobre una superficie, su movimiento puede clasificarse en dos tipos de régimen: laminar o turbulento. En el régimen laminar, el flujo es ordenado y las partículas del fluido se mueven en capas paralelas sin mezclarse entre sí. En cambio, en el régimen turbulento, el flujo es caótico, con remolinos, tiende a mezclarse, y presenta fluctuaciones en los campos de velocidad y presión. En ese sentido, un flujo que se encuentra en un estado desarrollado<sup>1</sup> intermedio, de transición , se dice que el flujo está en régimen de transición. Este estado de flujo no debe confundirse con la transición laminar-turbulenta del sistema, donde el flujo evoluciona de un régimen laminar a un régimen turbulento completamente desarrollado. Esta transición puede ocurrir en el tiempo (transición laminar-turbulenta temporal) o en el espacio (transición laminar-turbulenta espacial).

Por otro lado, la transición laminar-turbulenta es un fenómeno de gran importancia para la ingeniería y la física aplicada ya que está presente en diferentes dispositivos termohidráulicos. El cambio de un régimen a otro puede tener un impacto significativo en la transferencia de calor, especialmente en aplicaciones de convección mixta. El coeficiente de fricción (factor de Darcy) o el coeficiente de convección (número de Nusselt) se incrementan notablemente cuando se produce la transición [Incropera et al., 2006, White, 2011]. En ese sentido, este estado no es deseado desde el punto de vista ingenieril ya que es intermitente (es decir, el flujo puede fluctuar entre los regímenes laminar y turbulento), sin embargo, el estudio de la transición es relevante para poder controlar el fenómeno o anticipar, y por tanto aprovechar, su comportamiento. Por ejemplo, un problema importante se da en el diseño de intercambiadores de calor cuando el punto de trabajo del flujo dentro de los tubos o conductos se encuentra en régimen de transición donde las magnitudes relevantes (como coeficientes de fricción y de transferencia de calor) tienen una gran variación [Ghajar, 2019].

La evolución de un flujo, tanto en el tiempo como en el espacio, depende de las perturbaciones externas que reciba (por ejemplo, cambios de presión o de temperatura), de las condiciones de borde a las que esté sometido (como puede ser la rugosidad, flujo de calor en las paredes o gradientes de presión, entre otros) y de la respuesta del propio sistema, determinada por sus propiedades físicas y el régimen de flujo. Para modelar matemáticamente las condiciones que pueden modificar ese régimen —es decir, los estados iniciales capaces de desencadenar una transición— y analizar cómo dicha

---

<sup>1</sup>Esto es, sus magnitudes no varían con el tiempo o con el espacio en un sentido estadístico.

transición impacta en la transferencia de calor, se recurre a la teoría de estabilidad hidrodinámica. Esta teoría ofrece un marco para predecir cuándo un flujo laminar se volverá inestable mediante el estudio de la evolución de pequeñas perturbaciones: si estas crecen en el espacio o en el tiempo, el flujo pierde su estabilidad y eventualmente transiciona hacia un régimen turbulento.

La investigación teórica sobre la transición ha tenido un desarrollo histórico notable que se remonta al siglo XIX, con el célebre experimento de Osborne Reynolds [Reynolds, 1883], que marcó el inicio del estudio sistemático del fenómeno. A comienzos del siglo XX, Orr [Orr, 1907] y Sommerfeld [Sommerfield, 1908] formalizaron las bases de la estabilidad hidrodinámica al desarrollar las ecuaciones linealizadas que llevan sus nombres, conocidas como ecuaciones de Orr-Sommerfeld. Estas describen la evolución de perturbaciones en un flujo y son fundamentales para comprender los mecanismos de transición. Un avance crucial se produjo con los trabajos de Tollmien [Tollmien, 1930] y Schlichting [Schlichting, 1933], quienes describieron de forma teórica el estado lineal de la transición; esta teoría fue confirmada experimentalmente en el estudio de la capa límite sobre una placa plana realizado por Schubauer y Skramstad [Schubauer and Skramstad, 1947]. Finalmente, la incorporación de la teoría de inestabilidad secundaria por Herbert [Herbert, 1983] permitió extender el análisis al caso tridimensional, ofreciendo así una comprensión más completa del fenómeno.

## 1.2. Motivación

En la actualidad, muchos problemas de ingeniería presentan flujos en régimen de transición. La mayoría de los flujos en estas condiciones son no isotérmicos [Chen and Chung, 2003]. El estudio de la transferencia de calor en la transición laminar-turbulenta es importante en diversas aplicaciones ingenieriles, como en los elementos combustibles de reactores nucleares, en intercambiadores de calor, en los álabes de una turbina, equipos electrónicos, entre otros.

Por otro lado, el fenómeno de convección mixta puede manifestarse conjuntamente en flujos atmosféricos [Pirozzoli et al., 2017] como también en aplicaciones de ingeniería presentes en el proceso de fabricación de silicio, la refrigeración de equipos electrónicos, paneles solares térmicos, álabes de turbinas, intercambiadores de calor de diverso tipo, reactores nucleares, entre otros [Kasagi and Nishimura, 1997].

Entre las aplicaciones técnicas de mayor relevancia de la convección mixta se destaca el transporte de energía térmica. En las últimas décadas se han realizado muchos esfuerzos para desarrollar técnicas tendientes a mejorar la transferencia de calor y el desempeño global de los intercambiadores de calor. El interés en estas técnicas radica en el ahorro de la energía. En este sentido, las necesidades energéticas actuales propician el diseño y la mejora constante de los reactores nucleares utilizados para la provisión de

energía eléctrica. Dentro de la nueva generación de reactores nucleares GEN-IV<sup>2</sup>, de los seis conceptos especificados, uno corresponde a reactores tipo GFR (*Gas-cooled Fast Reactor*) que utiliza como refrigerante gas helio cuyo número de Prandtl es  $\text{Pr} \approx 0,7$  similar al aire.

### 1.3. Objetivos

El objetivo del presente trabajo es el estudio de la transferencia de calor en régimen de transición laminar-turbulenta en convección mixta. Para ello se emplea la herramienta numérica Incompact3D. Se obtienen resultados numéricos para números de Reynolds entre 2000 y 5000, números de Prandtl igual a 0,071 y 0,71 y números de Richardson entre 0,04 y 106.

Parte de las tareas secundarias para la realización de trabajo incluyeron:

- Entrenamiento y manejo en el uso de la herramienta numérica Incompact3D.
- Validación de la herramienta numérica y simulación de flujos turbulentos.
- Validación de 1 de métodos para inestabilizar soluciones laminares en la herramienta numérica.

No se como escribir esta parte. Como escribir el uso y validación de la herramienta de Szuban y todo lo demas que queda referido a los objetivos.

### 1.4. Organización del trabajo

---

<sup>2</sup><https://www.gen-4.org/>



# **Capítulo 2**

## **Modelo Matemático**

Resumen del capítulo 2. Marco teórico (acotado) del contenido mínimo necesario para el entendimiento de los capítulos posteriores.

## 2.1. Conceptos Elementales de Turbulencia

Definiciones y conceptos básicos de turbulencia.

## 2.2. Descripción del sistema bajo estudio. Ecuaciones de Gobierno y Condiciones de Borde

Se considera el sistema representado en la Figura 2.1 donde la dinámica de un fluido viscoso e incompresible sucede entre dos paredes paralelas e infinitas ubicadas en  $y = -d$  e  $y = +d$ . Esto constituye un canal de placas paralelas donde ambas paredes están sometidas a un flujo de calor constante  $q''_w$ .

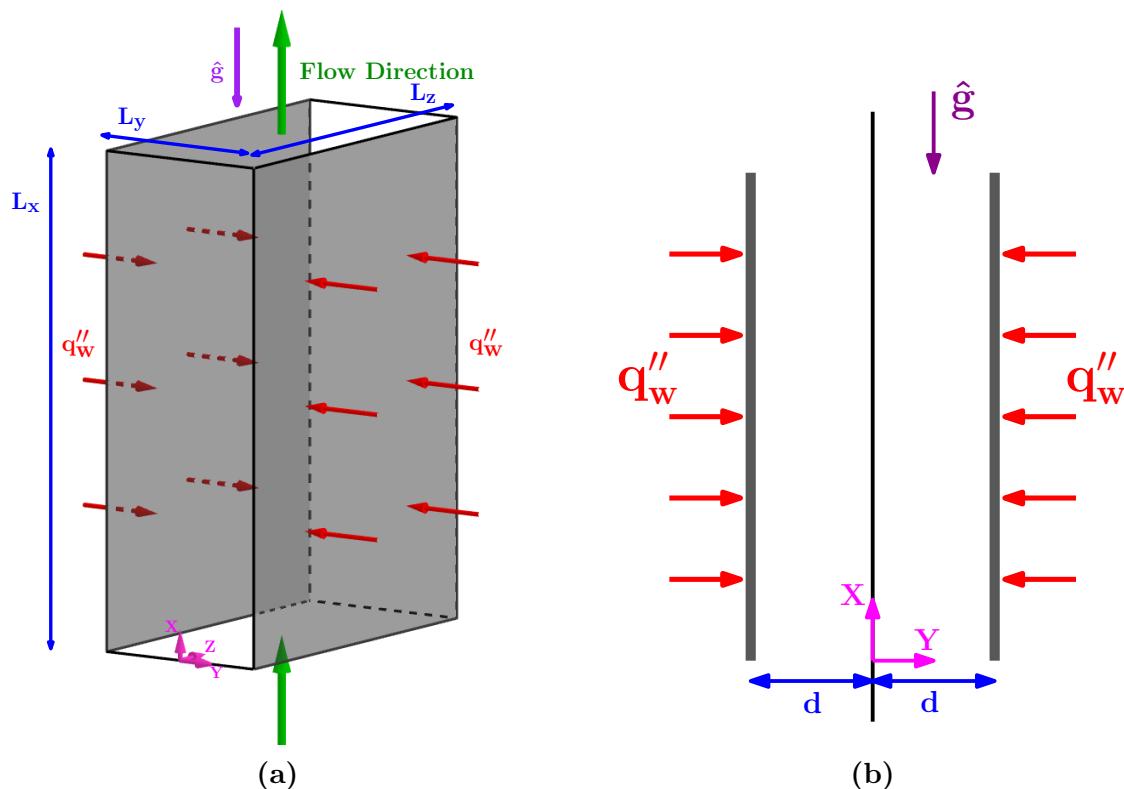


Figura 2.1

El flujo ocurre en la dirección de la corriente (*streamwise*) paralelo al eje X y su sentido es opuesto a la aceleración de la gravedad. Esta configuración se conoce como flujo ascendente o *aiding flow*. Las ecuaciones de gobierno corresponden a los principios de conservación de masa, momento y energía que se expresan en el cuadro 2.1.

$\nabla \cdot (\rho_o \mathbf{u}) = 0$ $\frac{\partial(\rho_o \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_o \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho(T) \mathbf{g}$ $\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \alpha \nabla^2 T$	(2.1)
--	-------

Un sistema físico cuyas dimensiones “son muy grandes” (o infinitas) constituye un sistema ideal. En él, es posible ubicar el origen de nuestro sistema de referencia lejos de los extremos a fin de evitar efectos de bordes. Allí, el flujo se encuentra completamente desarrollado y ha alcanzado un estado estadísticamente estacionario, es decir, sus valores estadísticos, como el promedio, no varían en el tiempo. En este contexto, la condición de flujo de calor constante en las paredes se imponen como condiciones de Neumann:

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=\mp d} = \pm q_w'' \quad (2.2)$$

Sin embargo, debido a la limitación computacional evidente, nuestro modelo computacional no puede abarcar dicha extensión. En ese sentido, el “dominio infinito” se reemplaza con un dominio acotado de dimensiones  $L_x \times L_y \times L_z$  (Figura 2.1a) adoptando condiciones de borde periódicas (PBC) en la direcciones  $X$  y  $Z$ :

$$\xi(x = 0, y, z, t) = \xi(x = L_x, y, z, t) \quad (2.3)$$

$$\xi(x, y, z = 0, t) = \xi(x, y, z = L_z, t) \quad (2.4)$$

siendo  $\xi$  un campo escalar de interés. Esto se puede interpretar como si las PBC crearan “la ilusión” de un dominio infinito, mediante la repetición de este dominio finito en el espacio.

Por otra parte, en un flujo turbulento, dado que este no es estacionario, aparecen fluctuaciones del flujo de calor y de la temperatura sobre la superficie de la pared. En este contexto, algunos autores [Kasagi et al., 1992, Tao, 1960] asumen que las fluctuaciones de temperatura son pequeñas a fin de considerar que la temperatura en la pared es localmente isotérmica y que además, el flujo de calor no varía en la dirección de la corriente. Eso equivale a suponer que la temperatura en la pared, promediada en el tiempo y en la dirección  $Z$ , crece linealmente con  $x$ , y por lo tanto:

$$\langle T_w \rangle = \mathcal{A}x.$$

Debido al crecimiento lineal de  $\langle T_w \rangle$ , es requerido realizar el cambio de variable  $T(x, y, z, t) = \langle T_w \rangle - \theta(x, y, z, t)$  para que siga siendo válido las condiciones de borde periódicas, esto es,  $\theta(x = 0, y, z, t) = \theta(x = L_x, y, z, t)$ . Ésta aproximación se encuentra en la literatura científica como *Mixed Boundary Conditions* [Straub et al., 2019]. Dicha modificación introduce un término fuente en la ecuación de conservación de energía:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \alpha \nabla^2 \theta + \mathcal{A} u_x \quad (2.5)$$

Por su parte, el término  $\rho(T)\mathbf{g}$  en la ecuación de momento se reescribe empleando la aproximación de Boussinesq [Incropora et al., 2006],  $\rho(T) = \rho_o [1 - \beta(T - T_R)]$ :

$$\frac{\rho_o \partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla (\rho_o \mathbf{u}) = -\nabla (p + \rho_o g x) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + g \rho_o \beta \theta \hat{\mathbf{g}} \quad (2.6)$$

donde se ha considerado  $T_R = \langle T_w \rangle$ , siendo  $\hat{\mathbf{g}} = (-1, 0, 0)$ .

Mediante el balance de energía en el volumen de control  $L_x \times L_y \times L_z$ , es posible deducir que  $\mathcal{A} = \frac{q''_w}{\rho_o d \langle u_x \rangle c_p}$  siendo  $d$  el semiancho del canal. Así, empleando la velocidad en el centro del canal  $U_o$ , el semiancho  $d$  y la temperatura  $T_o = \mathcal{A}d$ , el sistema de ecuaciones 2.1 en su forma adimensional queda escrito como se muestra en el cuadro 2.7.

Otro detalle importante es el hecho de que el fluido de trabajo es impulsado por un caudal máscico constante. Esta cuestión se encuentra representada por el término fuente  $f\hat{\mathbf{x}}$ , en la ecuación de momento, donde  $f$  es una constante en el espacio y varía con el tiempo de manera que mantiene constante el caudal total.

$$\begin{aligned} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{\text{Re}_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \text{Ri}_o \theta^* \hat{\mathbf{g}} + f\hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\text{Re}_o} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^* \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\text{Re}_o = \frac{\mu}{\rho_o U_o d} \quad ; \quad \text{Pr} = \frac{\nu_o}{\alpha} \quad ; \quad \text{Ri}_o = \frac{g \beta \Delta T d}{U_o^2} = \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_o^2 \text{Pr}}$$

Asimismo, las condiciones de flujo de calor constante están expresadas en la ecuación 2.8. Sin embargo, estas condiciones pueden ser aproximadas como condiciones de Dirichlet ya que al suponer que la temperatura de las paredes es constante (fluctuaciones de temperatura iguales a cero) se obtiene:  $T(x, y = 0, z, t) = T(x, y = 2d, z, t) = \langle T_w \rangle$ . Su forma adimensional se expresa en la ecuación 2.9. Por otra parte, para el resto de variables (campo de presión y componentes de velocidad) se adoptan condiciones de no deslizamiento en las paredes.

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=-1} &= +\frac{2}{3} \text{Re}_o \text{Pr} \\ \left. \frac{\partial \theta^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=+1} &= -\frac{2}{3} \text{Re}_o \text{Pr} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = 0, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = 2, z^*, t^*) = 0 \quad (2.9)$$

## 2.3. Sumario de Ecuaciones

**Ecuaciones de Gobierno:**

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \mathbf{u}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + Ri_o \theta^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \theta^* &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_o} \nabla^{*2} \theta^* + u_x^*\end{aligned}\quad (2.10)$$

**Condiciones de borde:** considerando  $\xi = u_x^*, u_y^*, u_z^*, p^*, \theta^*$ , entonces

$$\xi(x = 0, y, z, t) = \xi(x = L_x, y, z, t) \quad (2.11)$$

$$\xi(x, y, z = 0, t) = \xi(x, y, z = L_z, t) \quad (2.12)$$

$$\theta^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \theta^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u}^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \mathbf{u}^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.14)$$

$$\partial_y p^*(x^*, y^* = -1, z^*, t^*) = \partial_y p^*(x^*, y^* = +1, z^*, t^*) = 0 \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

A lo largo de este trabajo también se utiliza, particularmente para el análisis de estabilidad lineal, la forma adimensional de las ecuaciones del trabajo de Chen [Chen and Chung, 1996] que se obtienen empleando el semiancho del canal  $d$ , la velocidad media laminar  $\langle u_x \rangle$  y la temperatura  $T_c = Re Pr \mathcal{A} d$ . Dichas ecuaciones se expresan en 2.17. Las condiciones de borde son exactamente análogas que su forma adimensional de más arriba.

$$\begin{aligned}\nabla^* \cdot \mathbf{v}^* &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \mathbf{v}^* &= -\nabla p^* + \frac{1}{Re_b} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* + \frac{Ra}{Re_b} \varphi^* \hat{\mathbf{g}} + f \hat{\mathbf{x}} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla^* \varphi^* &= \frac{1}{Pr} \frac{1}{Re_b} [\nabla^{*2} \varphi^* - v_x^*] \\ \varphi^* &= -\frac{\theta^*}{Re_o Pr} \quad ; \quad \mathbf{v}^* = \frac{2}{3} \mathbf{u}^* \quad ; \quad Re_b = \frac{2}{3} Re_o\end{aligned}\quad (2.17)$$

## 2.4. Teoría de Estabilidad Lineal. Perturbaciones

Para analizar la estabilidad lineal y prever de forma matemática cómo cambiará un flujo una vez perturbado, resulta indispensable aceptar que las perturbaciones actúan sobre un flujo base. Aquí se adopta como referencia el flujo laminar completamente desarrollado. En consecuencia, la evolución de las perturbaciones también queda condicionada por dicho estado inicial.

## 2.5. Flujo Base

Si el flujo está completamente desarrollado, tanto térmica como hidrodinámicamente, entonces el mismo sólo dependerá de la variable  $y^*$ . El sistema de ecuaciones 2.17 se reduce a la ecuación de momento en la dirección  $X$  y a la ecuación de transporte del escalar pasivo, las cuales quedan expresadas como

$$\frac{dp^*}{dx^*} = \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \Phi^* + \frac{1}{\text{Re}} \frac{d^2 V_x^*}{dy^{*2}} \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2 \Phi^*}{dy^{*2}} = V_x^* \quad (2.19)$$

El perfil de velocidad y de temperatura admiten las condiciones de borde  $V_x^*(y^* = \pm 1) = \Phi^*(y^* = \pm 1) = 0$ . Las soluciones para un flujo asistido por fuerzas boyantes están dadas por las expresiones 2.20 y 2.21, mientras que para un flujo donde las fuerzas boyantes son opuestas, las soluciones quedan definidas por las ecuaciones 2.22 y 2.23 [Chen and Chung, 1996].

$$V_x^* = \frac{-E}{\sqrt{\text{Ra}}} \frac{\sinh(\kappa(1+y^*)) \sin(\kappa(1-y^*)) + \sinh(\kappa(1-y^*)) \sin(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \quad (2.20)$$

$$\Phi^* = \frac{E}{\text{Ra}} \left[ 1 - \frac{\cosh(\kappa(1+y^*)) \cos(\kappa(1-y^*)) + \cosh(\kappa(1-y^*)) \cos(\kappa(1+y^*))}{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)} \right] \quad (2.21)$$

$$V_x = \frac{F}{2m^2} \left( \frac{\cosh(my^*)}{\cosh(m)} - \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} \right) \quad (2.22)$$

$$\Phi^* = \frac{F}{2m^4} \left( \frac{\cosh(my^*)}{\cos(m)} + \frac{\cos(my^*)}{\cos(m)} - 2 \right) \quad (2.23)$$

$$\kappa = \frac{\text{Ra}^{-1/4}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad m = (-\text{Ra})^{1/4} \quad ; \quad F = \frac{2m^3}{\tanh(m) - \tan(m)} \quad ;$$

$$E = -2\kappa \text{Ra}^{1/2} \frac{\cosh(2\kappa) + \cos(2\kappa)}{\sinh(2\kappa) - \sin(2\kappa)}$$

Obsérvese que el único parámetro aquí es el número de Rayleigh. En el Capítulo 3, se utilizarán estas ecuaciones para la validación de la herramienta numérica en estas condiciones.

## 2.6. Análisis de Estabilidad Lineal

La transición laminar-turbulenta, es decir, la evolución de un flujo laminar a uno turbulento, es crucial en ingeniería, ya que las características del flujo varían notablemente entre estos regímenes. Por ejemplo, los coeficientes de fricción y de convección aumentan considerablemente al pasar de un régimen laminar a uno turbulento. La ecuación de Navier-Stokes admite ambas soluciones bajo ciertos parámetros, lo que implica que el tipo de flujo y su evolución dependen de las perturbaciones y las condiciones impuestas en el sistema. Muchos fenómenos que cumplen exactamente las leyes de conservación resultan inobservables porque se inestabilizan ante las pequeñas perturbaciones inevitables en cualquier sistema real [Kundu et al., 2016].

El análisis de estabilidad lineal permite evaluar cómo se comporta un flujo ante perturbaciones, identificando los mecanismos que pueden inducir transiciones o estados de intermitencia. En el caso de flujos de fluidos, condiciones como un número de Reynolds inferior a un valor crítico garantizan la estabilidad de un flujo laminar suave. Sin embargo, en ocasiones las perturbaciones crecen hasta alcanzar amplitudes finitas y establecer nuevos equilibrios estacionarios, que pueden volverse inestables a su vez y evolucionar hacia estados de fluctuaciones caóticas, comúnmente descritos como turbulencia. Dos motivaciones principales para estudiar la estabilidad de los fluidos son comprender el proceso de transición de un flujo laminar a uno turbulento y predecir el inicio de dicha transición.

El enfoque parte de las ecuaciones de gabinete 2.17 donde se han omitido los superíndices “\*”. La idea consiste en suponer que los campos solución  $(\mathbf{v}, p, \varphi)$  pueden descomponerse como un flujo base más una perturbación:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{v}} \quad (2.24)$$

$$p = P + \tilde{p} \quad (2.25)$$

$$\varphi = \Phi + \tilde{\varphi} \quad (2.26)$$

donde las letras mayúsculas hacen referencia al flujo base laminar y aquellas letras con  $(\tilde{})$  a las perturbaciones.

Despreciando términos de segundo orden, esto es, productos de perturbaciones, y asumiendo que los flujos bases son los flujos laminares desarrollados  $\mathbf{V} = (V_x(y), 0, 0)$  y  $\Phi \equiv \Phi(y)$  es posible expresar las ecuaciones que describen la dinámica de  $\tilde{\mathbf{v}}$ ,  $\tilde{p}$  y  $\tilde{\varphi}$  de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.27)$$

$$\partial_t \tilde{\mathbf{v}} + V_x \partial_x \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{v}_y \partial_y V_x \hat{\mathbf{e}}_x = -\nabla \tilde{p} + \frac{1}{\text{Re}_b} \nabla^2 \tilde{\mathbf{v}} + \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \tilde{\varphi} \hat{\mathbf{e}}_x \quad (2.28)$$

$$\partial_t \tilde{\varphi} + V_x \partial_x \tilde{\varphi} + \tilde{v}_y \partial_y \Phi = \frac{1}{\text{Re}_b \text{Pr}} [\nabla^2 \tilde{\varphi} - \tilde{v}_x] \quad (2.29)$$

Luego, aplicando el operador divergencia a la ecuación 2.28 es posible encontrar una expresión para el laplaciano de la presión:

$$-\nabla \tilde{p} = 2 \partial_x \tilde{v}_y \partial_y V_x - \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \partial_x \tilde{\varphi} \quad (2.30)$$

Aplicando el operador laplaciano a la componente Y de la ecuación 2.28 es posible eliminar el término que involucra la presión, resultando en la siguiente expresión:

$$\left\{ [\partial_t + V_x \partial_x] \nabla^2 - D^2(V_x) \partial_x - \frac{1}{\text{Re}_b} \nabla^4 \right\} \tilde{v}_y = -\frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \partial_{xy} \tilde{\varphi} \quad (2.31)$$

donde  $D^j \equiv \partial_y^j$ .

Para la descripción completa de las perturbaciones se utiliza la componente y de la voracidad  $\tilde{\eta} \equiv \partial_z \tilde{v}_x - \partial_x \tilde{v}_z$  cuya dinámica se detalla está dada por la ecuación 2.32.

$$\left[ \partial_t + V_x \partial_x - \frac{1}{\text{Re}_b} \nabla^2 \right] \tilde{\eta} + D(V_x) \partial_z \tilde{v}_y = \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} \partial_z \tilde{\varphi} \quad (2.32)$$

Así, las ecuaciones 2.29, 2.31 y 2.32 constituyen un sistema de EDP de 3 ecuaciones con 3 campos incógnitas. A partir de los campos escalares  $\tilde{\eta}$  y  $\tilde{v}_y$ , utilizando las ecuación 2.27 y la definición de  $\tilde{\eta}$  es posible hallar los campos  $\tilde{v}_x$  y  $\tilde{v}_z$ . Asimismo, empleando la ecuación 2.30 y los campos  $\tilde{v}_y$  y  $\tilde{\varphi}$  es posible hallar el campo de presión  $\tilde{p}$ .

Las soluciones a dicho sistema se proponen como ondas planas tridimensionales. Si  $\tilde{\xi}$  es una perturbación cualquiera, entonces, se escribe de la siguiente forma arbitraria:

$$\tilde{\xi} = \hat{\xi}(y) e^{i[\alpha x + \beta z - \omega t]} \quad (2.33)$$

donde  $c \equiv c_r + i c_i$  es la velocidad de fase y  $\omega \equiv \alpha c$  es la frecuencia angular. Además:

$$\alpha, \beta, c_r, c_i, \epsilon \in \mathbb{R}$$

En este sentido, se distinguen dos casos:

- ◆ Si  $\alpha c_i > 0$  entonces las perturbaciones crecen en el tiempo. El flujo se vuelve inestable.
- ◆ Si  $\alpha c_i < 0$  entonces las perturbaciones decaen exponencialmente en el tiempo y la perturbación se atenúa. El flujo se vuelve estable.

Al reemplazar las soluciones tipo 2.33 en el sistema de ecuaciones se obtiene un problema de autovalores generalizado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{v}_y \\ \hat{\varphi} \\ \hat{\eta} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2]^2 - i\alpha (V_x [D^2 - k^2] + D^2(V_x)) ; \quad a_{12} = - \left[ i\alpha \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} D \right] \\ a_{21} &= \frac{i\alpha}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} D + D(\Phi) ; \quad a_{22} = \frac{-1}{\text{Re}_b \text{Pr}} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x ; \quad a_{23} = \frac{\beta}{\text{Re}_b \text{Pr} k^2} \\ a_{31} &= \beta D(V_x) ; \quad a_{32} = -\beta \frac{\text{Ra}}{\text{Re}_b} ; \quad a_{33} = -\frac{1}{\text{Re}_b} [D^2 - k^2] + i\alpha V_x \\ b_1 &= -[D^2 - k^2] ; \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

A partir de las condiciones de borde 2.11 - 2.15, las autofunciones  $\hat{v}_y(y)$ ,  $\hat{\varphi}(y)$ ,  $\hat{\eta}(y)$  deben satisfacer las condiciones:

$$\hat{v}_y(y) = D(\hat{v}_y) = \hat{\varphi}(y) = \hat{\eta}(y) = 0 \quad \text{en} \quad y = \pm 1 \quad (2.35)$$

La resolución de este problema de autovalores generalizado se realiza empleando una estrategia numérica la cuál se detalla en el capítulo 3.

## 2.7. Ondas TS e Inestabilidad Secundaria

Falta completar



## **Capítulo 3**

# **Fundamentos de Herramientas Numéricas**

Nociones Elementales de que consiste hacer simulaciones numéricas directas (DNS).  
Descripción de las herramientas numéricas empleadas.

### 3.1. Simulaciones Numéricas Directas

Falta escribir

#### 3.2. Xcompac3D

##### 3.2.1. Métodos Numéricos

Falta escribir

##### 3.2.2. Validación

Falta escribir

...

“A efectos prácticos las aproximación de flujo de calor cte (condición de Neuman) como una condición de Dirichlet igual a 0 resulta mejor desde el punto de vista numérico ya que la fluctuación de los campos es mayor y se requiere más tiempo de corrida para conseguir una buena estadística ...”

### 3.3. Orr-Sommerfeld - *Mixed Convection* (OSMC)

Falta escribir

#### 3.3.1. Métodos Numéricos

Falta escribir

Falta escribir

## **Capítulo 4**

# **Validación de Herramientas Numéricas**

Validación de las herramientas numéricas empleadas.

## 4.1. Primera Parte: Xcompac3D

...

“A efectos prácticos las aproximación de flujo de calor cte (condición de Neuman) como una condición de Dirichlet igual a 0 resulta mejor desde el punto de vista numérico ya que la fluctuación de los campos es mayor y se requiere más tiempo de corrida para conseguir una buena estadística ...”

## 4.2. Segunda Parte: Orr-Sommerfeld - *Mixed Convection*

Falta escribir

# **Capítulo 5**

## **Convección Mixta en Flujos Completamente Desarrollado**

La finalidad de este capítulo es que el lector/jurado comprenda la forma de abordar el problema estudiado. Así como las magnitudes y parámetros relevantes del problema.

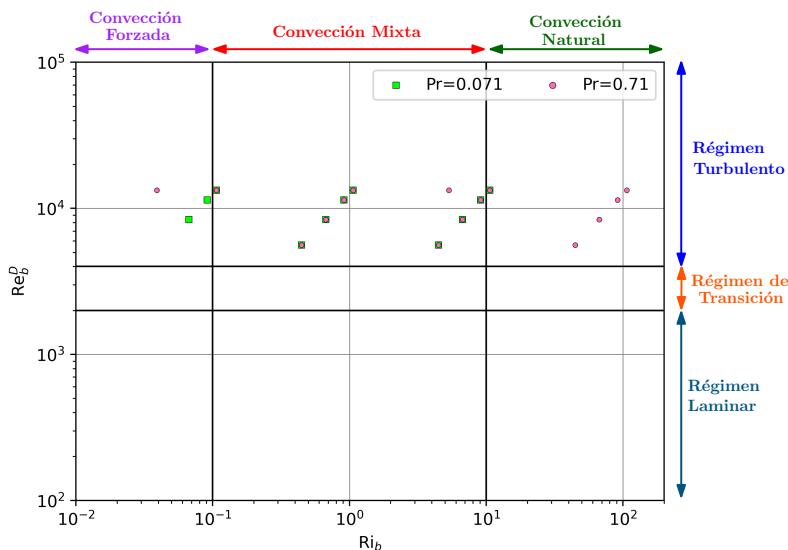
## 5.1. Casos simulados

Los resultados de las simulaciones realizadas en este capítulo corresponden a un flujo completamente desarrollado tanto térmica como hidrodinámicamente. Se utilizaron valores de números adimensionales tales que  $Re_o=2100, 3150, 4278, 5000$ ,  $Pr=0.071, 0.71$  y valores de Richardson en el rango  $0.04 \lesssim Ri_b \lesssim 106$ . En la Figura 5.1 se expone un “mapa” del régimen de flujo donde se gráfica el número de Reynolds<sup>1</sup> versus el número de Richardson. De acuerdo al diagrama de Moody [White, 2011]:

- para valores de  $Re_b^D < 2000$  el régimen es laminar,
- si  $2000 \lesssim Re_b^D \lesssim 4000$  el régimen es de transición,
- y si  $Re_b^D > 4000$  el régimen es turbulento.

Por otra parte, el fenómeno de convección es [Incropora et al., 2006, Cengel and Ghajar, 2015]:

- forzado si  $Ri_b < 0.1$ ,
- mixto si  $0.1 < Ri_b < 10$ ,
- y natural si  $Ri_b > 10$ .



**Figura 5.1:** Mapa de regímenes de los casos simulados.

La totalidad de casos se encuentra en un régimen de flujo turbulento. En su mayoría, los casos se encuentran en flujo de convección mixta, sin embargo, contamos con casos donde predomina la convección forzada, y por otro lado, donde domina la convección natural. Esto brinda un espectro más amplio para el análisis del problema.

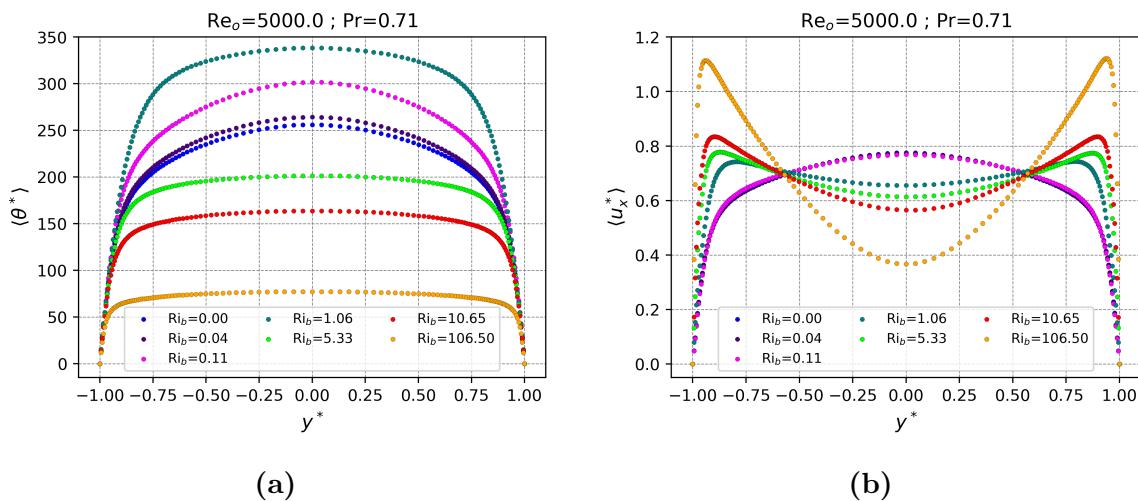
<sup>1</sup>Número de Reynolds basado en el diámetro hidráulico:  $Re_b^D = 8/3 Re_o$

## 5.2. Magnitudes de Primer y Segundo Orden

En esta sección, se pretende analizar la influencia de la fuerza boyante en las magnitudes estadísticas de primer y segundo orden. Para tal fin, se consideran, únicamente, los casos  $Re_o=5000$  y  $Pr=0.71$ . El aumento de la fuerza boyante, o el número de  $Rib$ , equivale a aumentar el flujo de calor ya que  $Rib \propto q''_w$ . En otras palabras, el aumento de la boyancia en este sistema físico corresponde a aumentar la energía térmica que se le entrega a través de las paredes cuando el fluido es ascendente<sup>2</sup>.

### 5.2.1. Perfiles de velocidad y de temperatura

En la Figura 5.2b se presenta los perfiles de velocidad (*streamwise*) para los diferentes números de Richardson. En él, es posible distinguir claramente los tres régimenos de convección. Cerca de las paredes, la temperatura del fluido es mayor y por tanto, es más liviano que el fluido que se encuentra en el centro del canal. En este sentido, existe un gradiente de densidad, que bajo la acción de la gravedad, se traduce en un aumento de la velocidad (debido a la fuerza boyante) que eleva el fluido más caliente cerca de la pared. A su vez, esto produce un arrastre de fluido desde el seno del canal hacia las paredes promoviendo la mezcla del mismo.



**Figura 5.2**

Esta mezcla, ayuda a redistribuir la energía térmica sumistrada, y por lo tanto, es la responsable de que la temperatura a lo largo del canal sea más uniforme, dando lugar a esa forma “achatada” en el centro, en comparación al caso forzado, tal como se observa en los perfiles de temperatura expuestos en la Figura 5.2a. Aquí, los casos se pueden dividir, a priori, en dos grupos: el primer grupo que corresponde a valores de  $Rib_b$  entre 0.04 y 1.06, y el segundo grupo está compuesto por valores de 5.33 a 106.5. En el primer grupo, se produce

<sup>2</sup>También es equivalente a quitarle energía térmica (enfriar las paredes) cuando la dirección del flujo es descendente.

un aumento de temperatura en el seno del fluido que reduce la transferencia de calor (como se verá en la sección 5.4). En el segundo grupo, se produce un descenso de la temperatura en el seno del fluido mejorando la transferencia de calor. En ese sentido, el sistema es más eficiente para “evacuar” el calor suministrado a medida que  $Ri_b$  (o  $q''_w$ ) es más alto. Esto genera una disminución en la temperatura de las paredes y desde el punto de vista ingenieril, puede ser útil para sistemas de refrigeración.

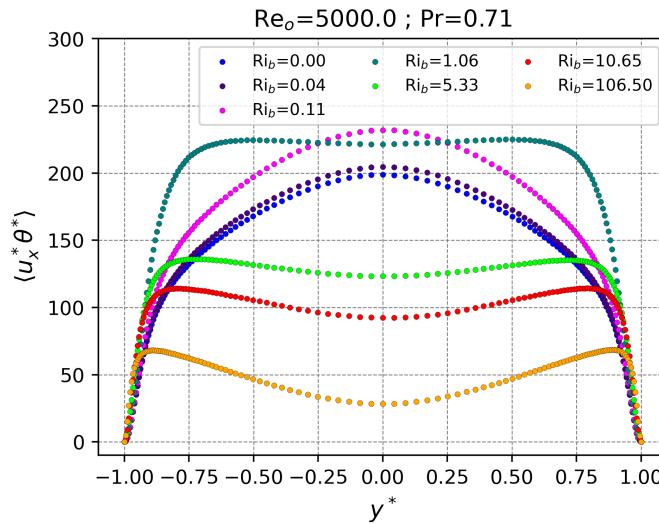


Figura 5.3

Estas afirmaciones, que no son evidentes a primera vista, se comprenden a partir de la Figura 5.3, donde se muestra el perfil de  $\langle u_x^* \theta^* \rangle$ . El número de Nusselt es inversamente proporcional a

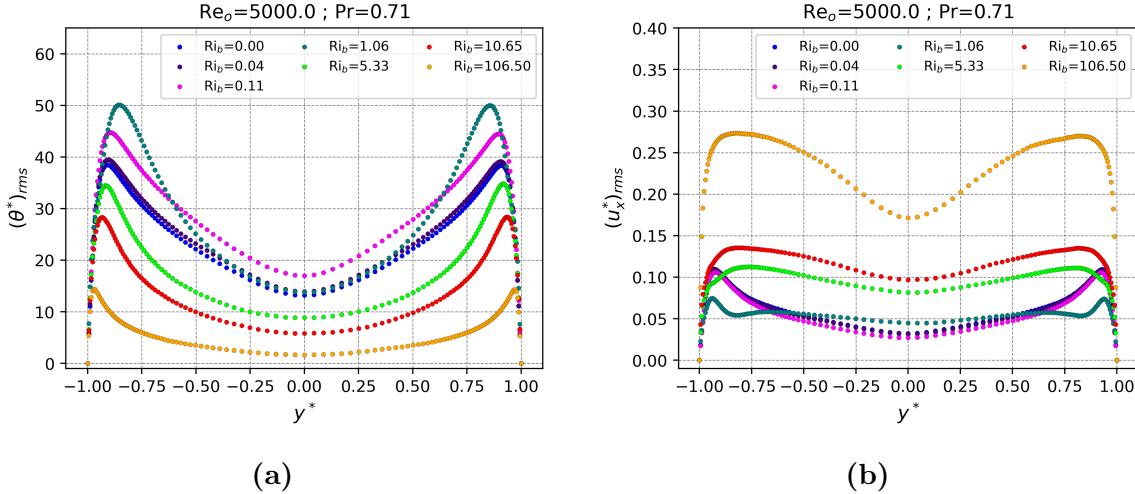
$$\langle \theta_b^* \rangle = \frac{\frac{1}{A} \int_A \langle u_x^* \theta^* \rangle dA}{U_b}$$

y la velocidad *bulk*  $U_b$  es constante porque el caudal se mantiene fijo. Así, un incremento de la temperatura en el seno del canal aumenta  $\langle u_x^* \theta^* \rangle$ , y, en consecuencia, eleva  $\langle \theta_b^* \rangle$ , lo que provoca una disminución de Nu.

### 5.2.2. Valores RMS de temperatura, velocidad y flujo turbulento de calor

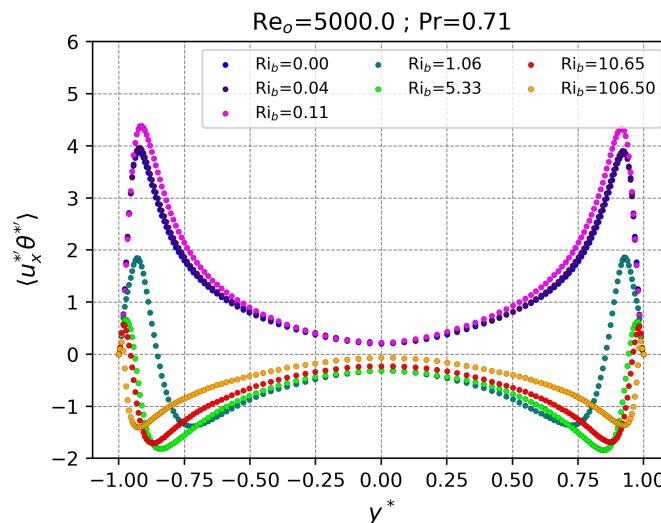
Las Figuras 5.4a y 5.4b muestran, respectivamente, los perfiles de las fluctuaciones de temperatura y de velocidad en la dirección *streamwise*. A primera vista, al aumentar el número de Richardson, las fluctuaciones de temperatura disminuyen mientras que las de velocidad aumentan, lo cual se aprecia sobre todo en los casos de  $Ri_b$  más elevados. No obstante, para  $Ri_b = 0.04, 0.11$  y  $1.06$  la evolución difiere: primero se observa una reducción (incremento) de las fluctuaciones de velocidad (temperatura) seguida de una ligera recuperación (caída) antes de alinearse con la tendencia general del resto de los casos. Este comportamiento particular también fue reportado en otro trabajo [You et al., 2003].

El incremento de  $(u_x^*)_{rms}$  con la fuerza boyante sugiere que el flujo adquiere un carácter más caótico, y por ende, más turbulento, lo que potencia la mezcla y genera un “recambio” continuo de fluido que atenúa las fluctuaciones de temperatura.



**Figura 5.4**

La Figura ?? muestra el perfil de la correlación  $\langle u_x^{*'} \theta^{*'} \rangle$ . Dado que el flujo de calor convectivo obedece, en primer orden, a  $q'' \simeq \rho c_P U \Delta T$ , esta correlación puede interpretarse como proporcional al flujo de calor turbulento en la dirección  $x$ , es decir, al calor transportado por las estructuras turbulentas del flujo [Kundu et al., 2016, Pope, 2001]. Para valores de  $Ri_b$  próximos a cero (es decir, la convección forzada predomina), dichas estructuras trasportan el calor sobre todo en las proximidades de las paredes. Sin embargo, al aumentar la fuerza boyante, el signo de  $\langle u_x^{*'} \theta^{*'} \rangle$  se invierte en la región central del canal: el flujo de calor turbulento se orienta contracorriente, de modo que regiones más frías de fluido son arrastradas aguas abajo. Este mecanismo disminuye la eficiencia global de la transferencia de calor.



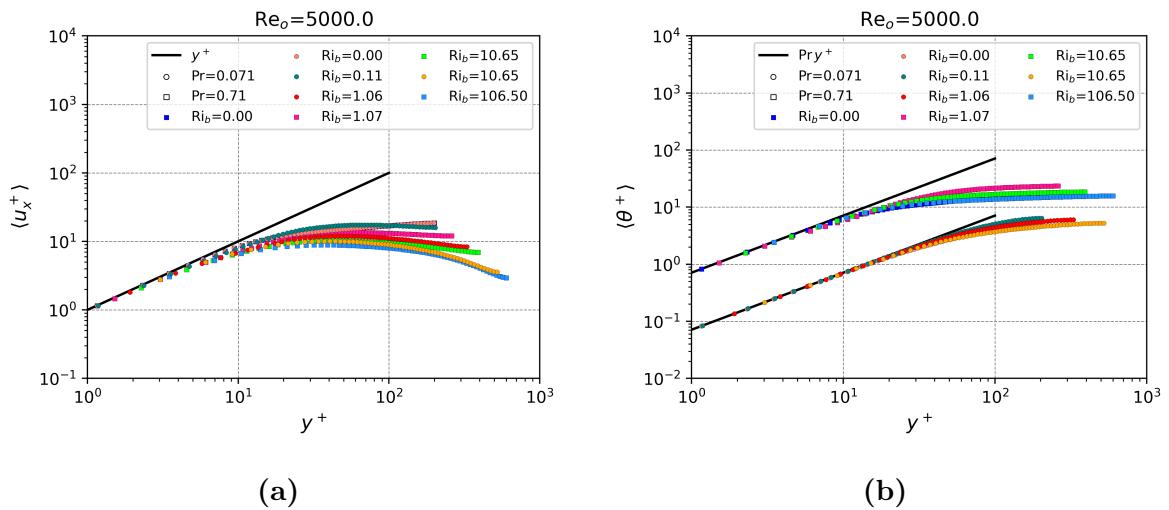
**Figura 5.5**

### 5.3. Comparación entre casos de distinto Prandtl

En esta sección se comparan los casos con  $Re_o = 5000$  y  $Pr = 0.071$  y  $0.71$ . La Figura 5.6a muestra los perfiles de velocidad media expresados en unidades de pared (*wall units*). En la subcapa viscosa ( $y^+ < 5$ ) la velocidad puede aproximarse por

$$\langle u_x^+ \rangle \simeq y^+ + \mathcal{O}[(y^+)^2],$$

según Pope [Pope, 2001]. Esta ley se indica en la figura con la línea negra de referencia. En dicha región las tensiones de Reynolds son despreciables frente a las tensiones viscosas, de modo que el perfil depende casi exclusivamente de la distancia normalizada a la pared. Como puede verse, todos los casos, independientemente del número de Prandtl y de la fuerza de flotación, siguen de cerca esta aproximación lineal, lo que confirma la validez de la ley en la subcapa viscosa.



**Figura 5.6**

Por otra parte, la Figura ?? muestra los perfiles de temperatura media en unidades de pared. Cerca de la pared, la variación de la temperatura puede aproximarse por la relación lineal [Kawamura et al., 1998]

$$\langle \theta^* \rangle \simeq Pr y^+,$$

representada en la figura con líneas negras. Los resultados confirman esta ley para ambos números de Prandtl, aunque con distintos alcances: para el caso de  $Pr=0.071$  la validez se extiende hasta  $y^+ \approx 13$ , mientras que para  $Pr=0.71$  se reduce a  $y^+ \approx 7$ . La diferencia se debe a que, en fluidos con menor difusividad térmica (Prandtl más bajo), el transporte de calor por conducción domina durante una mayor distancia normalizada desde la pared, retrasando la aparición del régimen convectivo predominante [Abregu et al., 2023].

## 5.4. Número de Nusselt

Desde una perspectiva ingenieril, el número de Nusselt ( $\text{Nu}$ ) es un indicador clave de la eficiencia de la transferencia de calor. Su definición se presenta en la ecuación 5.1, donde  $\langle \theta_b \rangle$  es la temperatura *bulk* (ecuación 5.2).

$$\text{Nu} = \frac{hL}{k} = \frac{2d q_w''}{k \langle \theta_b^* \rangle} = \frac{4}{3} \frac{\text{Re}_o \text{Pr}}{\langle \theta_b^* \rangle} \quad (5.1)$$

$$\langle \theta_b \rangle = \frac{\frac{1}{A} \int \langle u_x \theta \rangle}{U_b} = \frac{\int_0^d \langle u_x \theta \rangle dy}{\int_0^d \langle u_x \rangle dy} \quad (5.2)$$

La Figura 5.7a muestra los valores de Nu obtenidos en función del número de boyancia Bo (ecuación 5.3), que cuantifica la relación entre las fuerzas boyantes y la fuerza impulsora de la convección forzada. Estos resultados se comparan con la correlación de Jackson et al. [Jackson et al., 1989] (ecuación 5.4). Todos los Nu se normalizan con el valor correspondiente a convección forzada pura,  $\text{Nu}_{fc}$ , evaluado mediante la correlación de Dittus-Boelter [Incropera et al., 2006]. También se añaden datos provenientes de simulaciones DNS [You et al., 2003], que se alinean con la misma tendencia.

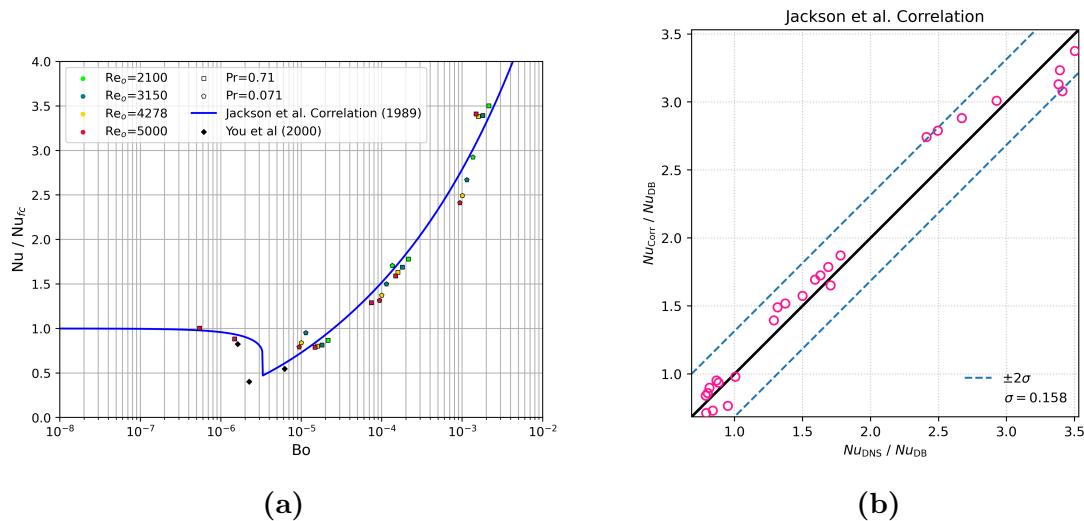
En la Figura 5.7b se presenta un gráfico de paridad entre  $\text{Nu}_{\text{DNS}}/\text{Nu}_{DB}$  (eje  $x$ ) y  $\text{Nu}_{\text{corr}}/\text{Nu}_{DB}$  (eje  $y$ ). La línea negra indica el acuerdo perfecto ( $y = x$ ) y las líneas azules punteadas delimitan la banda de  $\pm 2\sigma$  (con  $\sigma=0.158$ ). La concentración de puntos dentro de esta banda confirma que la correlación de Jackson reproduce con buena precisión los valores simulados.

A partir de la Figura 5.7a se distinguen tres regiones:

- $\text{Bo} \lesssim 10^{-6}$ : Nu se mantiene prácticamente igual a  $\text{Nu}_{fc}$ ; domina la convección forzada.
- $10^{-6} \lesssim \text{Bo} \lesssim 3 \times 10^{-5}$ : Nu desciende y luego se recupera, indicando una zona donde la transferencia de calor empeora temporalmente respecto al caso puramente forzado.
- $\text{Bo} \gtrsim 3 \times 10^{-5}$ : Nu crece de forma marcada, impulsado por la mayor relevancia de la convección natural.

$$\text{Bo} = \frac{Gr^*}{\text{Re}_D^{3,425} \text{Pr}^{0,8}} \quad (5.3)$$

$$\frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_{fc}} = \left| 1 - 8 \times 10^4 \text{Bo} \left( \frac{\text{Nu}}{\text{Nu}_{fc}} \right)^{-2} \right|^{0,46} \quad (5.4)$$

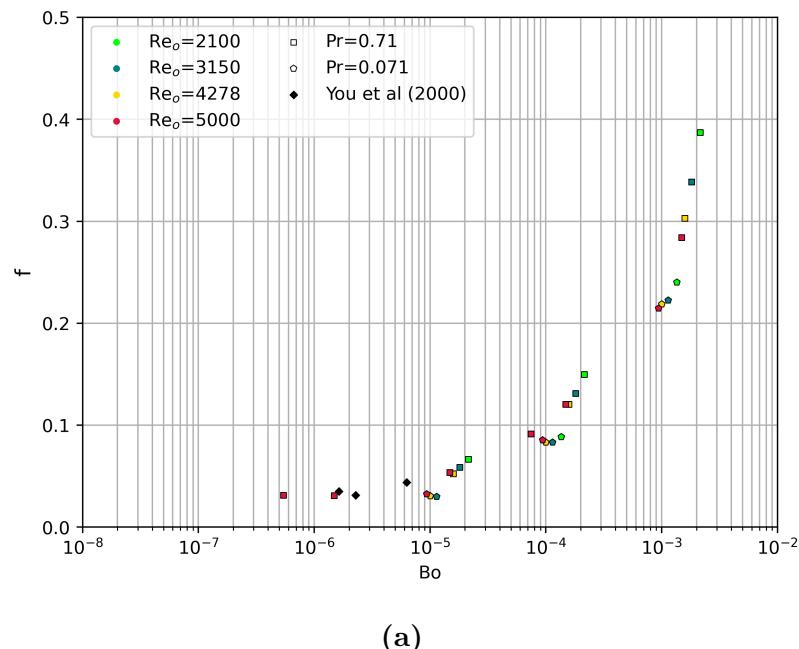


**Figura 5.7:** Número de boyancia:  $Bo = Gr/(Re^{3,425} Pr^{0,8})$ .

La disminución de  $Nu$  al aumentar la fuerza boyante puede entenderse a partir del perfil de velocidad en la dirección del flujo. Como se explicó en la sección 5.2.1, cuando la convección natural y la forzada actúan en la misma dirección, el fluido se acelera junto a las paredes y, por conservación de masa, se desacelera en la región central. En virtud de esta premisa es posible acercarse a un entendimiento cualitativo. De acuerdo al modelo de Prandtl [Prandtl, 1942] divide la transferencia de calor en dos mecanismos principales: (i) conducción en la subcapa viscosa y (ii) flujo de calor turbulento normal a la pared,  $q_y'' \approx \rho c_P \langle u_y^* \theta^* \rangle$ . Aicher y Martin [Aicher and Martin, 1997] mostraron que, justo en el borde de la subcapa viscosa,  $q_y''$  es proporcional a la producción de turbulencia, definida como la suma de *Shear-Production* y *Buoyancy-Production* (véase Apéndice A). Esta producción depende de la diferencia de velocidades entre el centro del canal y la zona próxima a la pared (que puede ser entendido como un gradiente de velocidad ).

Así, es posible apreciar una rango de  $Rib$ , correspondiente al intervalo  $10^{-6} \lesssim Bo \lesssim 3 \times 10^{-5}$  en la Figura 5.7a, para los cuales la aceleración inducida por la boyancia produce que esta diferencia, o bien sea cero, o bien sea muy pequeña. Como consecuencia, disminuyen la producción turbulenta, el flujo de calor turbulento y, por lo tanto,  $Nu$ . Cuando la fuerza boyante continúa creciendo más allá de este intervalo, el gradiente de velocidad vuelve a incrementarse, la producción de turbulencia se intensifica y tanto  $q_y''$  como  $Nu$  aumentan nuevamente.

## 5.5. Factor de Fricción de Darcy



(a)

**Figura 5.8:** Factor de Darcy  $f$ . Aquí  $Bo = Gr/(Re^{3,425} Pr^{0,8})$



# **Capítulo 6**

## **Convección Mixta En Transición Laminar-Turbulenta**

Resultados principales y “novedosos”

## 6.1. Casos $\text{Re} = 750$ ; $\text{Pr} = 0,71$ ; $\text{Ra} = 65$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	$\alpha$	$\beta$	$A_{2D}$	$A_{3D}$	$\lambda_{2D}$	$\lambda_{3D}$
Re750-Pr071-Ri1Em4-C1	750	0.71	1.63E-4	1.12	0	1 %	0 %	$1.249 + 0.044 j$	-

Tabla 6.1

### 6.1.1. Autofunciones y Espectros de autovalores

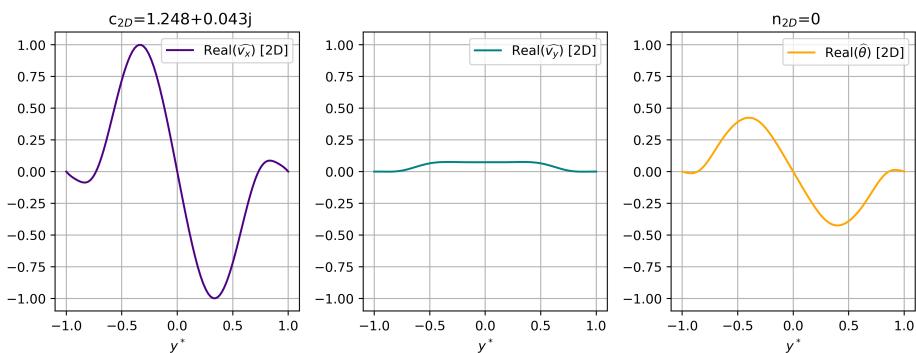


Figura 6.1

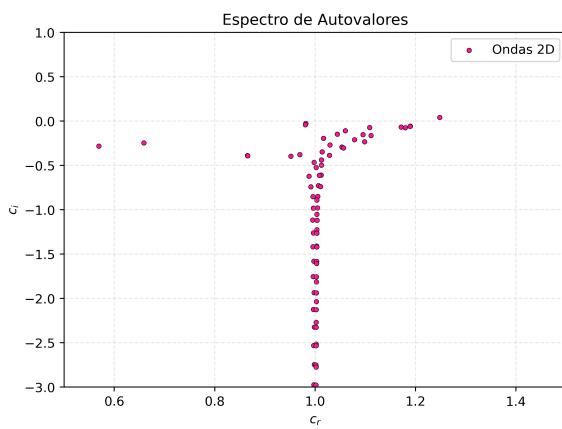


Figura 6.2

### 6.1.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$ , $Re_\tau$ , Nusselt

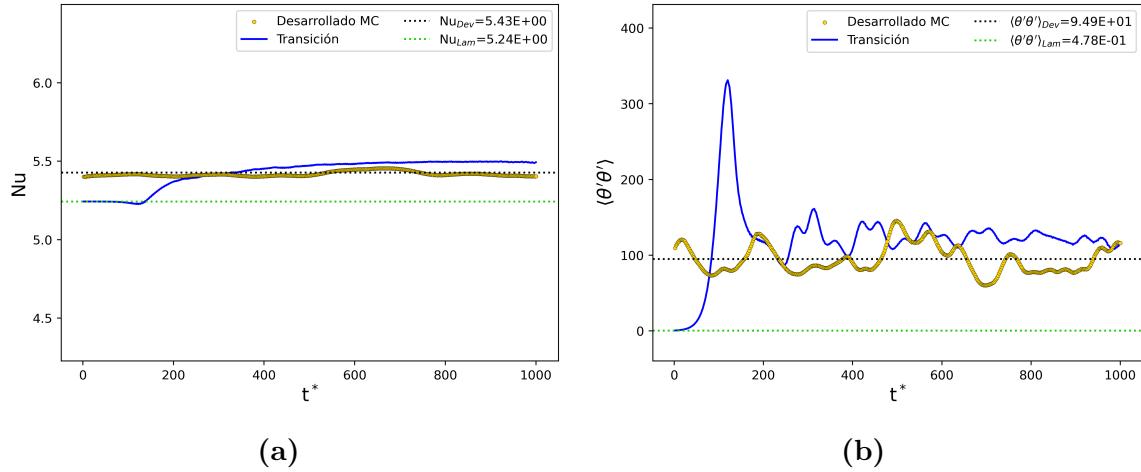


Figura 6.3

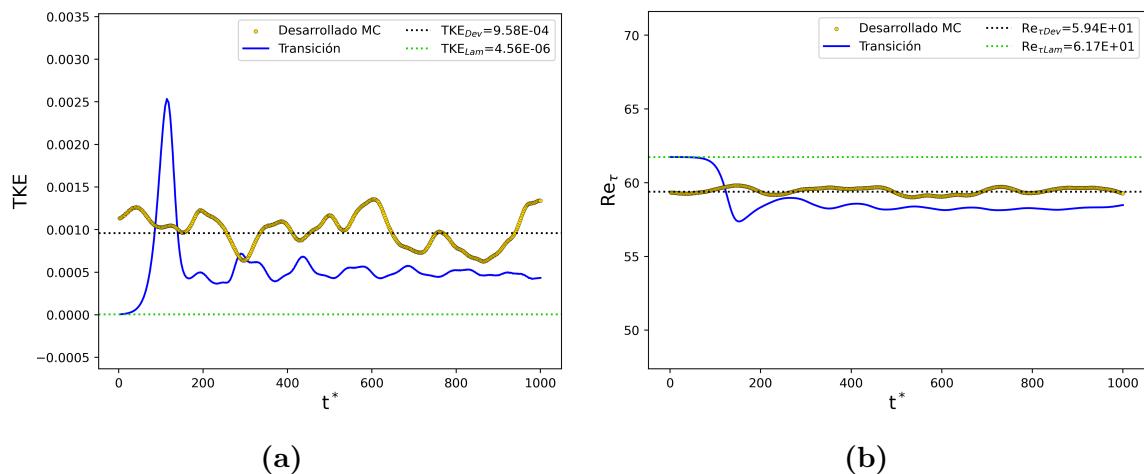


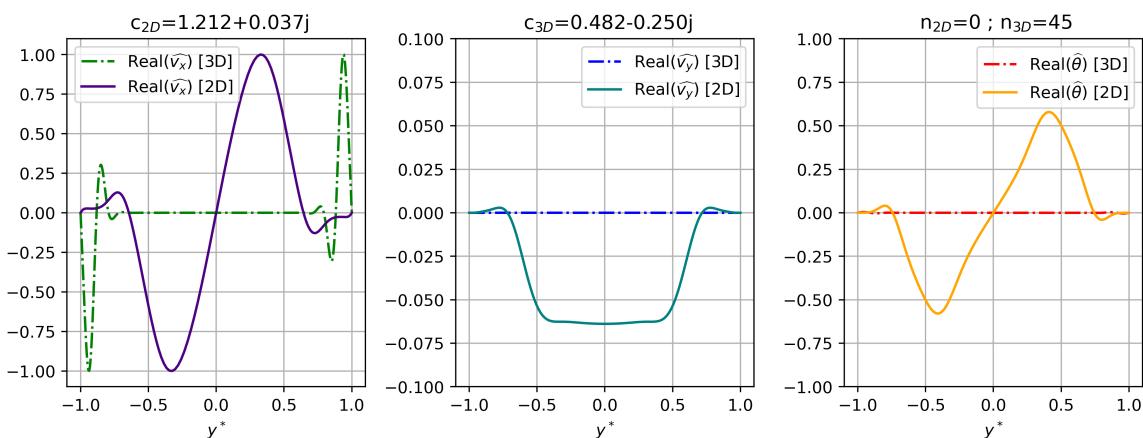
Figura 6.4

## 6.2. Casos $\text{Re} = 5000$ ; $\text{Pr} = 0,71$ ; $\text{Ra} = 65$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	$\alpha$	$\beta$	$A_{2D}$	$A_{3D}$	$\lambda_{2D}$	$\lambda_{3D}$
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C1	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	1 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C2	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	2 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C3	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	4 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C4	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	1.212 + 0.037 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C5	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	4 %	0.2 %	1.212 + 0.037 j	0.482 - 0.250 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C6	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	0.2 %	1.212 + 0.037 j	0.482 - 0.250 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C7	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	0.472 - 0.104 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C8	5000	0.71	3.66E-6	1.12	0	6 %	0 %	0.385 - 0.124 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C9	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.472 - 0.104 j	0.575 - 0.095 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C10	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.385 - 0.124 j	0.563 - 0.095 j
Re5000-Pr071-Ri1Em6-C11	5000	0.71	3.66E-6	1.12	2.1	6 %	1 %	0.660 - 0.371 j	0.688 - 0.440 j

Tabla 6.2

### 6.2.1. Autofunciones y Espectros de autovalores



(a)

Figura 6.5

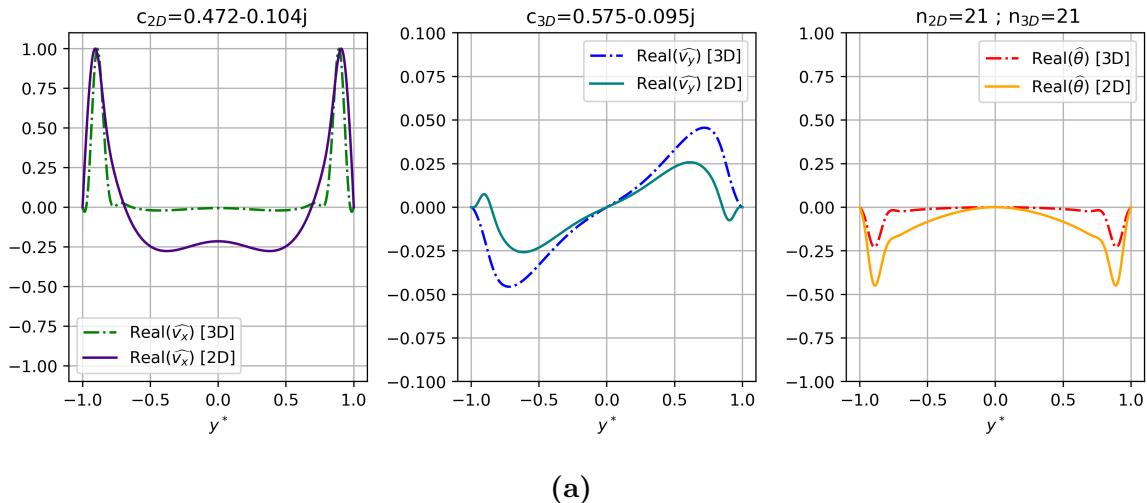


Figura 6.6

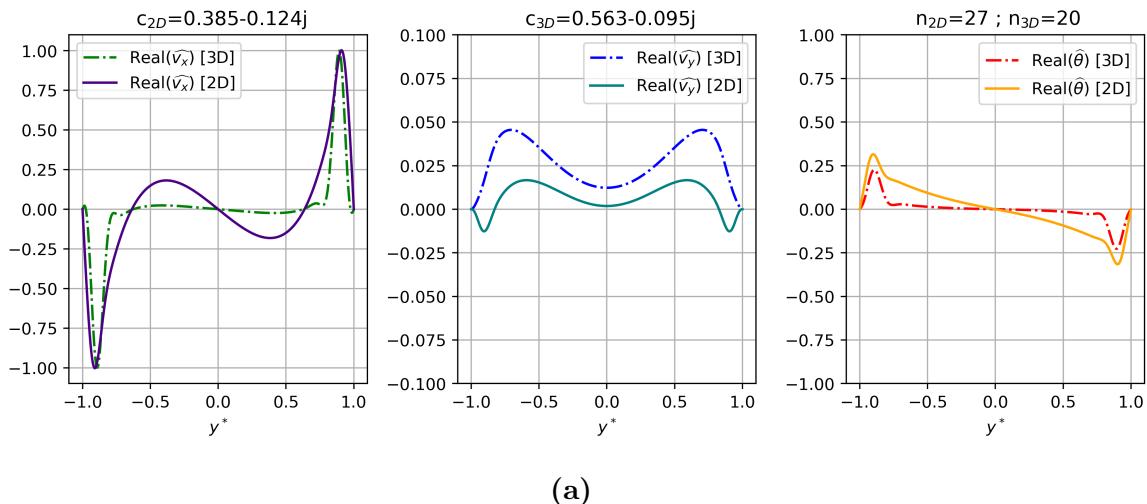


Figura 6.7

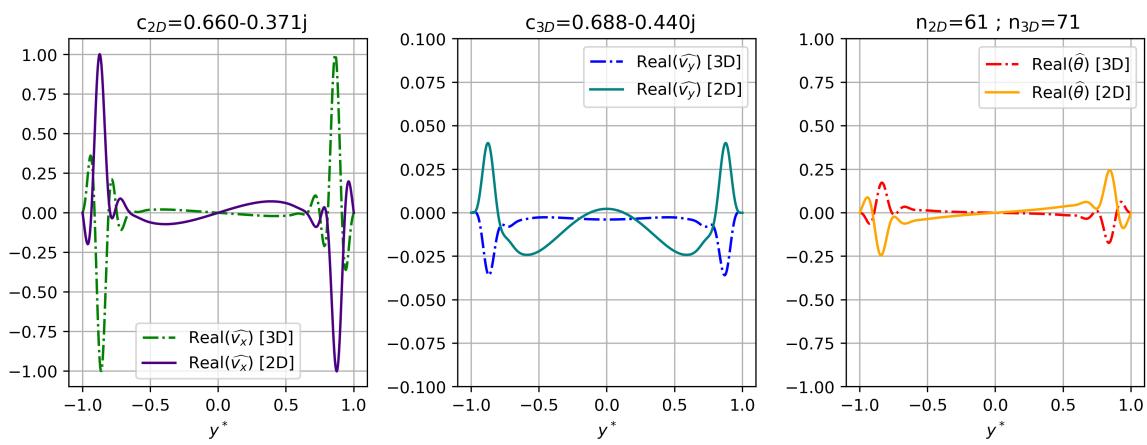


Figura 6.8

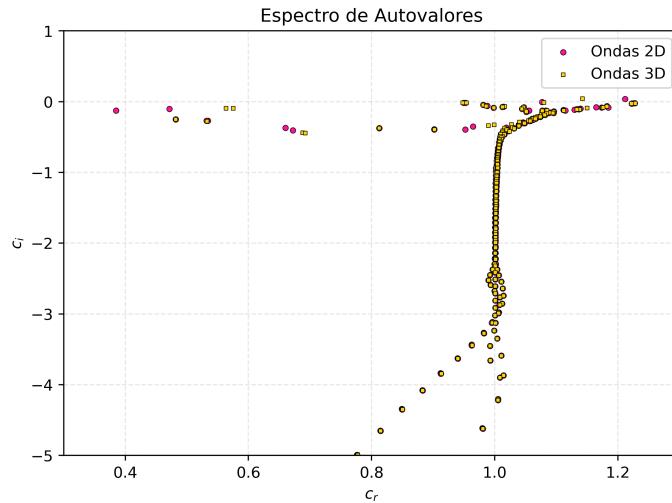


Figura 6.9

### 6.2.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$ , $\text{Re}_\tau$ , Nusselt

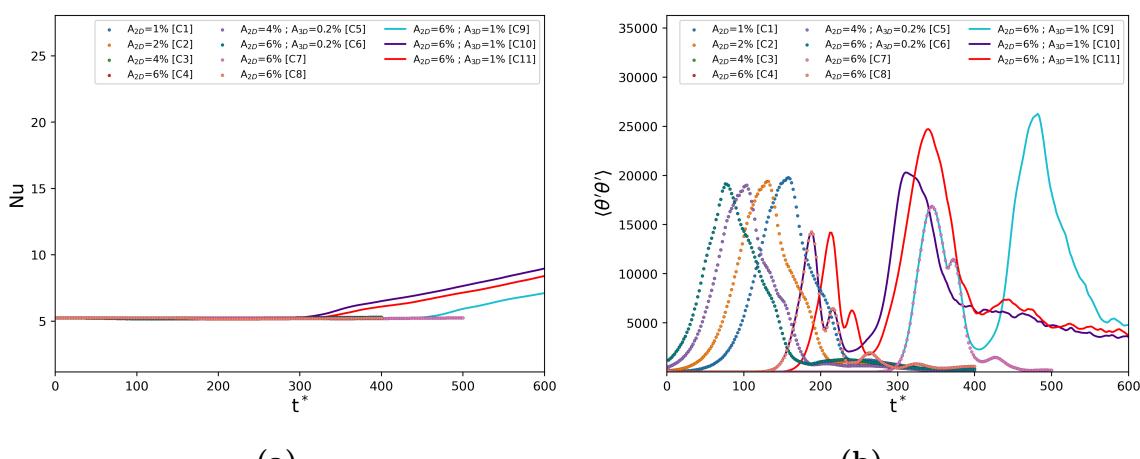


Figura 6.10

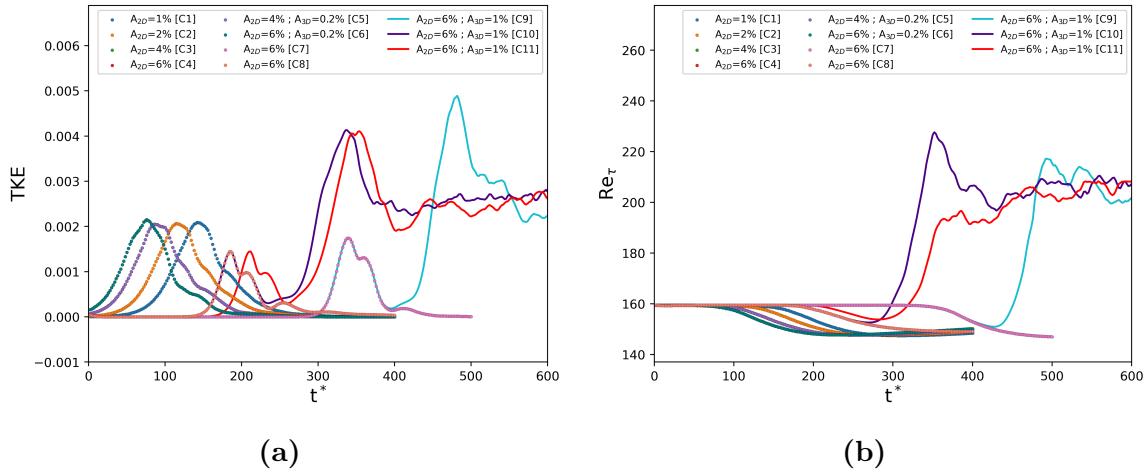


Figura 6.11

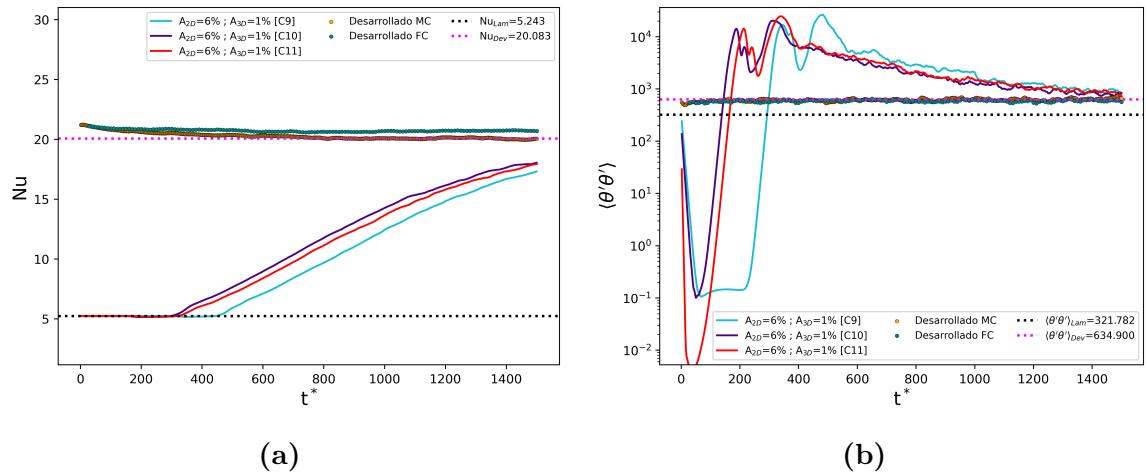


Figura 6.12: Casos C9,C10,C11

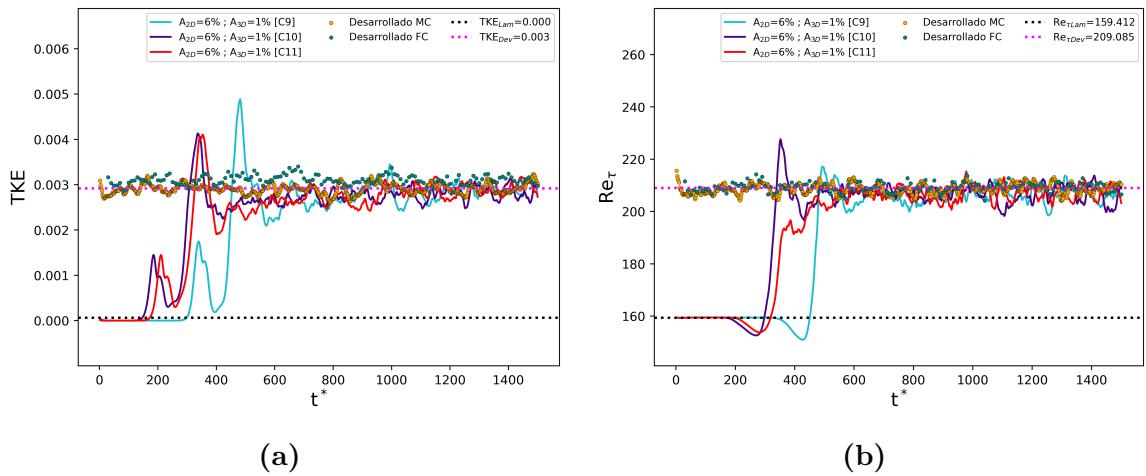


Figura 6.13: Casos C9,C10,C11

### 6.3. Casos $\text{Re} = 5000$ ; $\text{Pr} = 0,71$ ; $\text{Ri} = 10^{-4}$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	$\alpha$	$\beta$	$A_{2D}$	$A_{3D}$	$\lambda_{2D}$	$\lambda_{3D}$
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C1	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$2,315 + 0,424 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C2	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$0,800 - 0,495 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em5-C3	5000	0.71	1E-4	1.12	0	2 %	0 %	$2,853 - 0,107 j$	-
Re5000-Pr071-Ri1Em5-C4	5000	0.71	1E-4	1.12	2.1	2 %	0.4 %	$2,315 + 0,424 j$	$1,721 + 0,235 j$
Re5000-Pr071-Ri1Em4-C5	5000	0.71	1E-4	1.12	2.1	2 %	0.4 %	$2,853 - 0,107 j$	$1.550 + 0.023 j$

Tabla 6.3

#### 6.3.1. Autofunciones y Espectros de autovalores

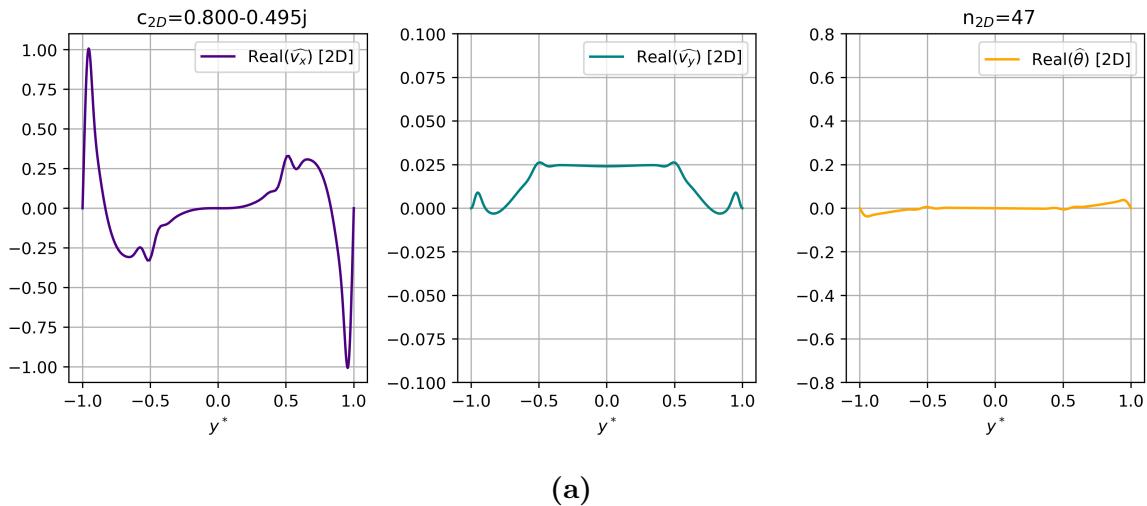


Figura 6.14

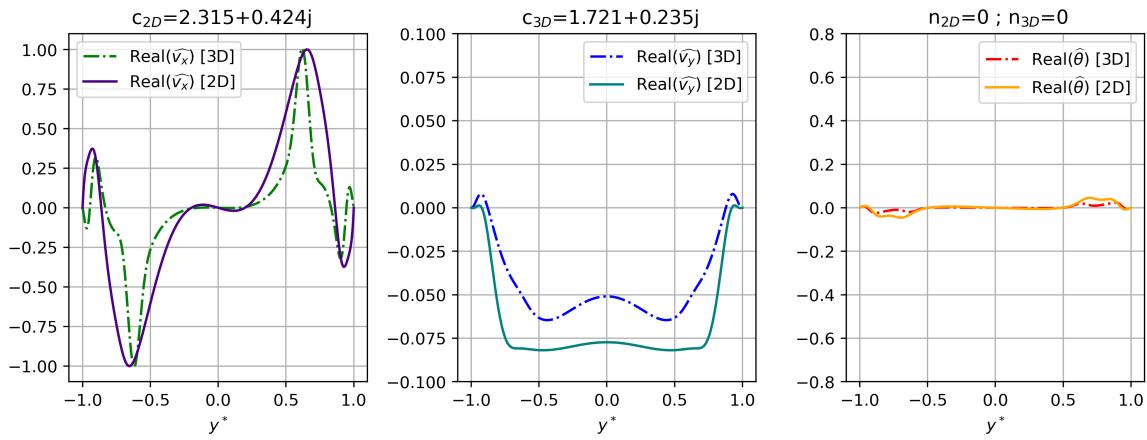
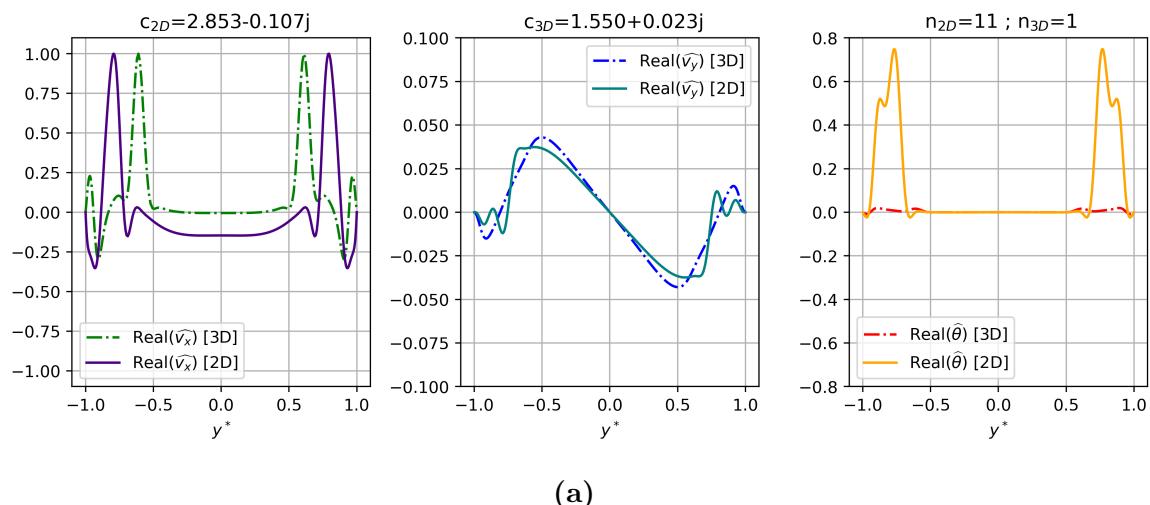


Figura 6.15



(a)

Figura 6.16

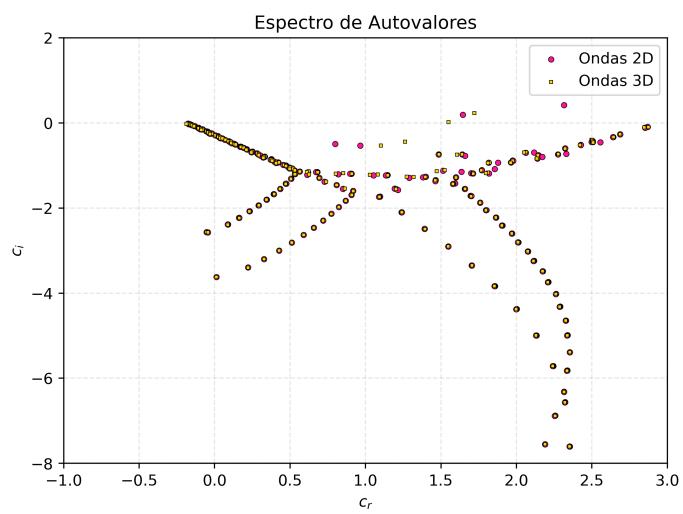


Figura 6.17

### 6.3.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$ , $Re_\tau$ , Nusselt

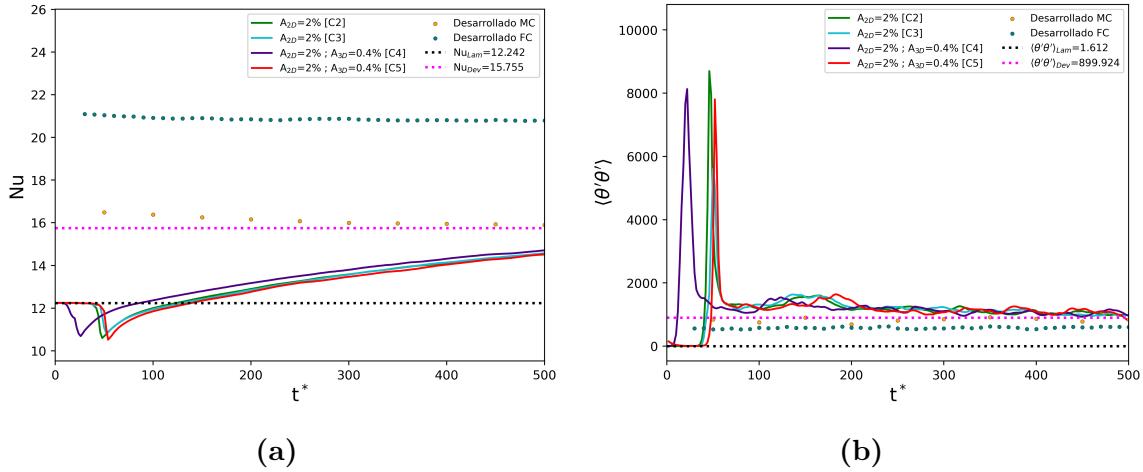


Figura 6.18

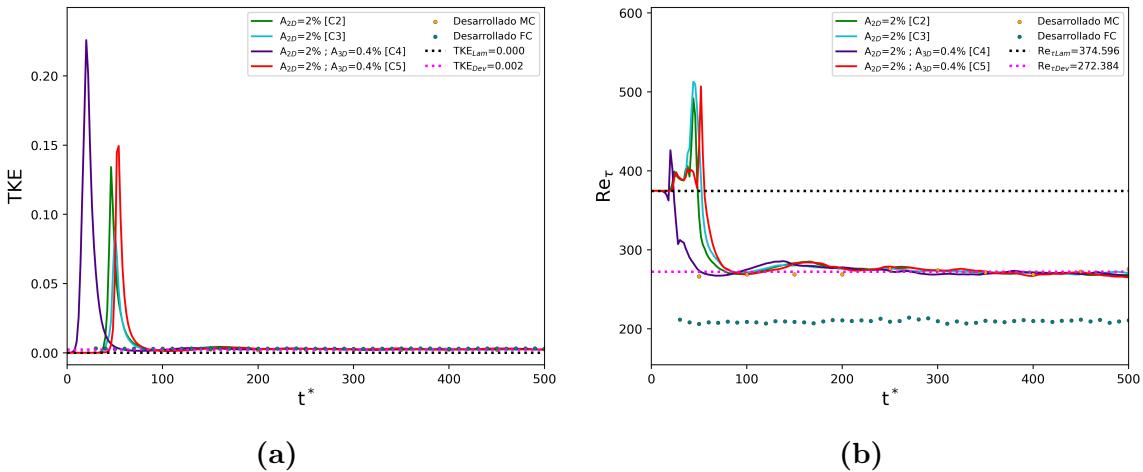


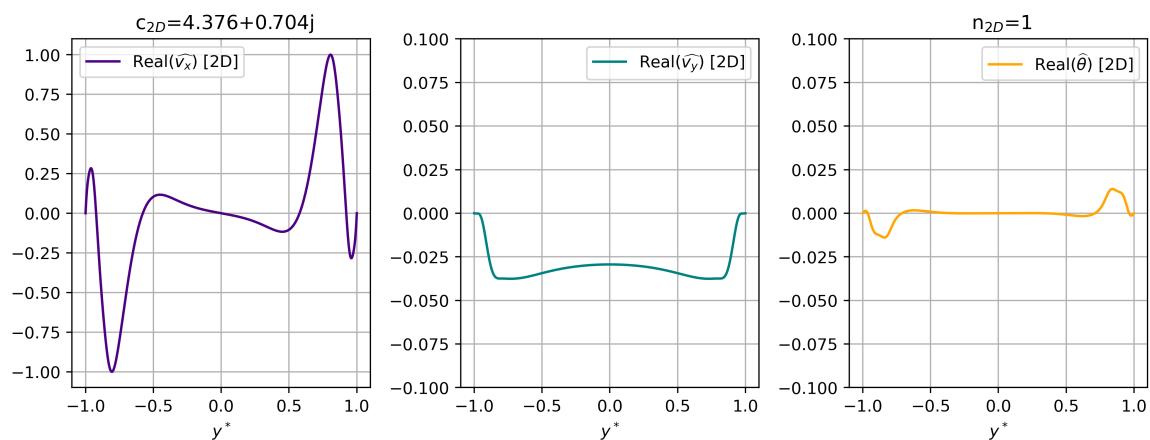
Figura 6.19

## 6.4. Casos $\text{Re} = 5000$ ; $\text{Pr} = 0,71$ ; $\text{Ri} = 10^{-3}$

Nomenclatura	Re	Pr	Ri	$\alpha$	$\beta$	$A_{2D}$	$A_{3D}$	$\lambda_{2D}$	$\lambda_{3D}$
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C1	5000	0.71	1E-3	1.12	0	2 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C2	5000	0.71	1E-3	1.12	0	1 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C3	5000	0.71	1E-3	1.12	0	0.5 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-
Re5000-Pr071-Ri1Em3-C4	5000	0.71	1E-3	1.12	0	0.25 %	0 %	4.376 + 0.704 j	-

Tabla 6.4

### 6.4.1. Autofunciones y Espectros de autovalores



(a)

Figura 6.20

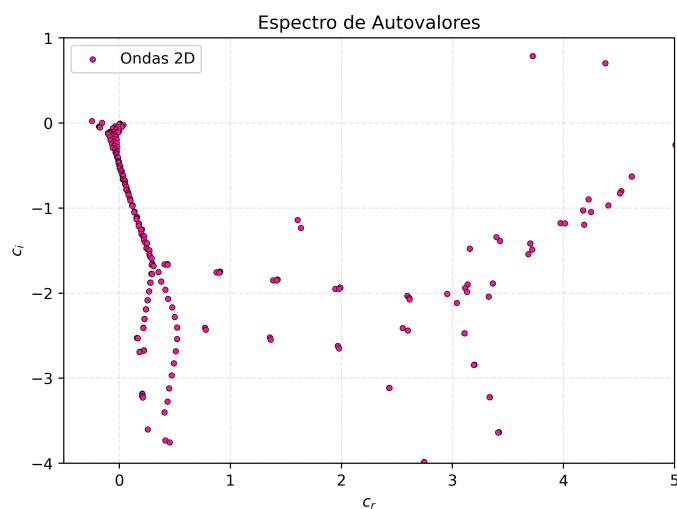


Figura 6.21

### 6.4.2. TKE, $\langle \theta' \theta' \rangle$ , $Re_\tau$ , Nusselt

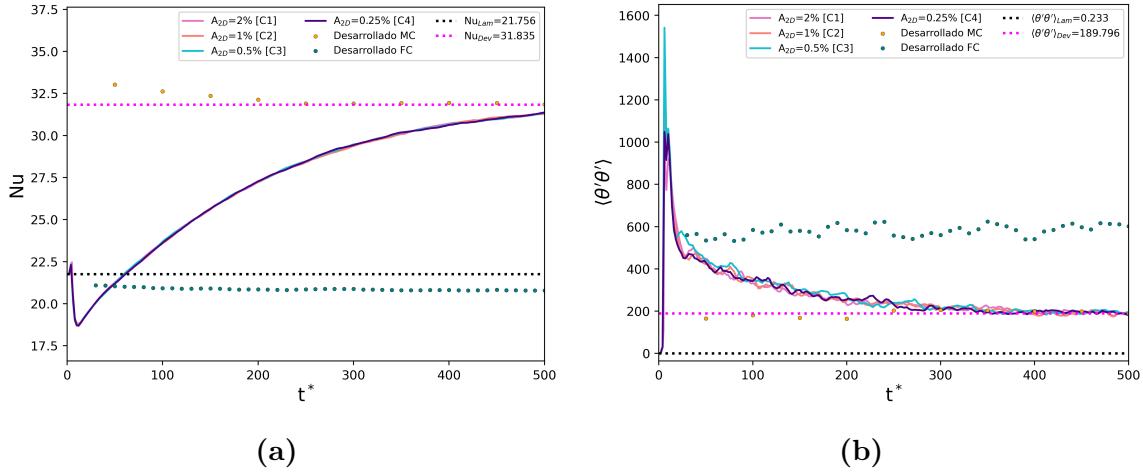


Figura 6.22

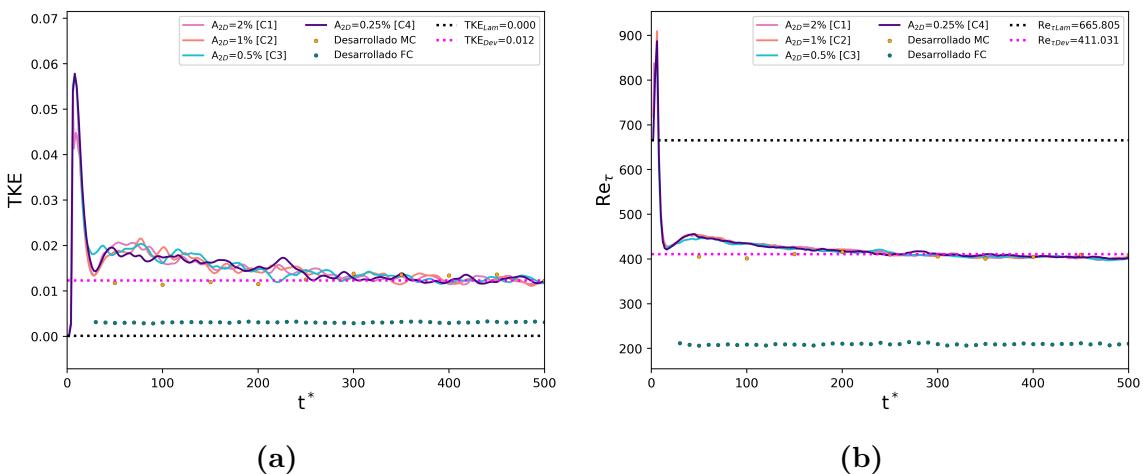


Figura 6.23

# Capítulo 7

## Conclusiones

Acá se concluyen cosas



# Apéndice A

## Budgets Dynamics Equations

A partir de la descomposición de Reynolds de los campos de interés (componentes de la velocidad, presión, temperatura) aplicadas a las ecuaciones de gabinete 2.1 se puede obtener, mediante mucho álgebra, ecuaciones que describen la dinámica de los budget de las cantidades de segundo orden como  $\langle v'_x v'_y \rangle$ , la energía cinética turbulenta  $\kappa$ , los flujos de calor turbulento  $\langle v'_i \theta' \rangle$  y la varianza de la temperatura  $\langle \theta' \theta' \rangle$ . Se han omitido los superíndices “\*”.

$$\partial_t \langle v'_i \theta' \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle v'_i \theta' \rangle = \mathcal{P}_{i\theta} + \mathcal{T}_{i\theta} + \Pi_{i\theta} + \mathcal{D}_{i\theta} + \mathcal{B}_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad (\text{A.1})$$

Difusión Turbulenta:  $\mathcal{T}_{i\theta} = -\partial_k \langle v'_i v'_k \theta' \rangle$

Producción:  $\mathcal{P}_{i\theta} = -[\langle \theta' v'_k \rangle \partial_k \langle v_i \rangle + \langle v'_i v'_k \rangle \partial_k \langle \theta \rangle] + \langle v'_i v'_x \rangle$

Disipación:  $\mathcal{D}_{i\theta} = -\frac{1}{\text{Re}} \left(1 + \frac{1}{\text{Pr}}\right) \langle \partial_k \theta' \partial_k v'_i \rangle \quad (\text{A.2})$

Correlación Temp - Grad Presión:  $\Pi_{i\theta} = -\langle \theta' \partial_i p' \rangle$

Prod-Boyante:  $\mathcal{B}_{i\theta} = \text{Ri } g_i \langle \theta' \theta' \rangle$

Difusión Viscosa:  $\varepsilon_{i\theta} = \frac{1}{\text{Re}} \partial_k \left[ \langle \theta' \partial_k v'_i \rangle + \frac{1}{\text{Pr}} \langle v'_i \partial_k \theta' \rangle \right]$

$$\partial_t \langle v'_x v'_y \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle v'_x v'_y \rangle = \mathcal{P}_{xy} + \mathcal{T}_{xy} + \Pi_{xy} + \mathcal{D}_{xy} + \mathcal{B}_{xy} - \varepsilon_{xy} \quad (\text{A.3})$$

Difusión Turbulenta:  $\mathcal{T}_{xy} = -\partial_k \langle v'_x v'_k v'_y \rangle$

Producción:  $\mathcal{P}_{xy} = -[\langle v_y v'_k \rangle \partial_k \langle v_x \rangle + \langle v'_x v'_k \rangle \partial_k \langle v_y \rangle]$

Disipación:  $\mathcal{D}_{xy} = -\frac{2}{\text{Re}} \langle \partial_k v'_x \partial_k v'_y \rangle$

Correlacion Vel - Grad Presión:  $\Pi_{xy} = -[\langle v'_y \partial_x p' \rangle + \langle v'_x \partial_y p' \rangle]$  (A.4)

Prod-Boyante:  $\mathcal{B}_{xy} = -\text{Ri} \langle v'_y \theta' \rangle$

Difusión Viscosa:  $\varepsilon_{xy} = \frac{1}{\text{Re}} \partial_k^2 \langle v'_x v'_y \rangle$

Siendo  $\kappa = \langle v_i v'_i \rangle / 2$ , la Energía Cinética Turbulenta, entonces:

$$\partial_t \kappa + \langle v_n \rangle \partial_n \kappa = \mathcal{P}_i + \mathcal{T}_i + \Pi_i + \mathcal{D}_i + \mathcal{B}_i - \varepsilon_i \quad (\text{A.5})$$

Difusión Turbulenta:  $\mathcal{T}_i = -\frac{1}{2} \partial_n \langle v'_i v'_n v'_i \rangle$

Producción:  $\mathcal{P}_i = -\langle v_i v'_n \rangle \partial_n \langle v_i \rangle$

Disipación:  $\mathcal{D}_i = -\frac{1}{\text{Re}} \langle \partial_n v'_i \partial_n v'_i \rangle$  (A.6)

Correlacion Vel - Grad Presión:  $\Pi_i = -\langle \partial_i (v'_i p') \rangle$

Prod-Boyante:  $\mathcal{B}_i = -\text{Ri} g_i \langle v'_i \theta' \rangle$

Difusión Viscosa:  $\varepsilon_i = \frac{1}{\text{Re}} \partial_n^2 \kappa$

$$\partial_t \langle \theta' \theta' \rangle + \langle v_k \rangle \partial_k \langle \theta' \theta' \rangle = \mathcal{P}_\theta + \mathcal{T}_\theta + \mathcal{D}_\theta - \varepsilon_\theta \quad (\text{A.7})$$

Difusión Turbulenta:  $\mathcal{T}_\theta = -\partial_k \langle \theta' \theta' v'_k \rangle$

Producción:  $\mathcal{P}_\theta = 2 [\langle \theta' v'_k \rangle \partial_k \langle \theta' \rangle + \langle v'_x \theta' \rangle]$

Disipación:  $\mathcal{D}_\theta = -\frac{2}{\text{RePr}} (\langle \partial_k \theta' \rangle)^2$  (A.8)

Difusión Viscosa:  $\varepsilon_\theta = \frac{1}{\text{RePr}} \partial_k^2 \langle \theta' \theta' \rangle$

# Apéndice B

## Perfiles de Desarrollados

B.1.  $\text{Re} = 2100$  y  $\text{Pr} = 0,71$

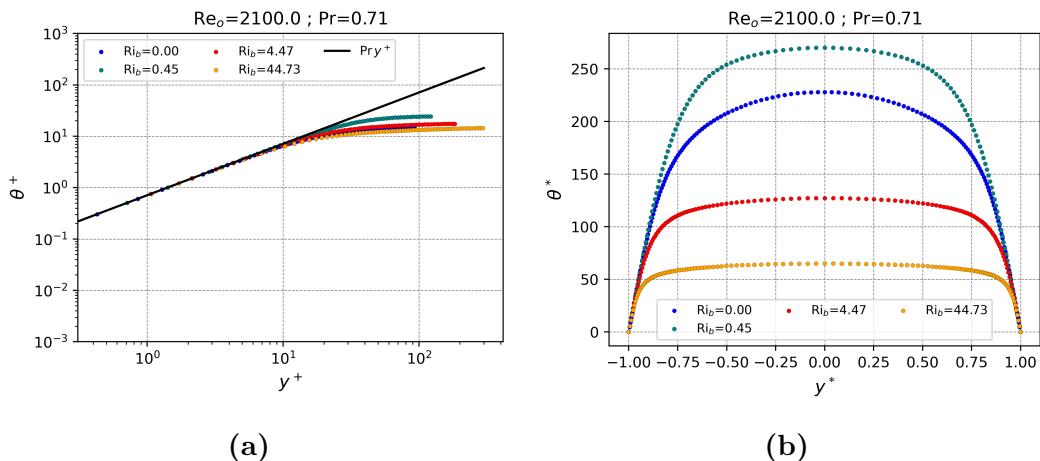


Figura B.1

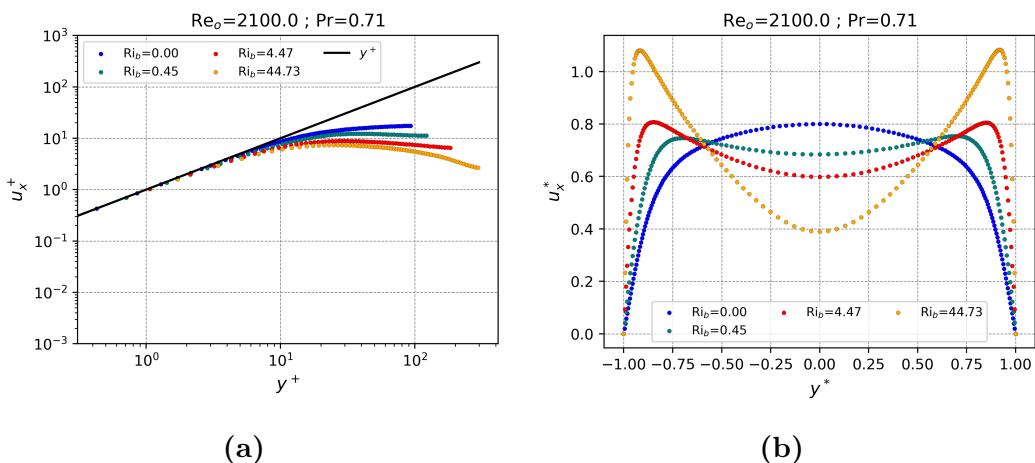
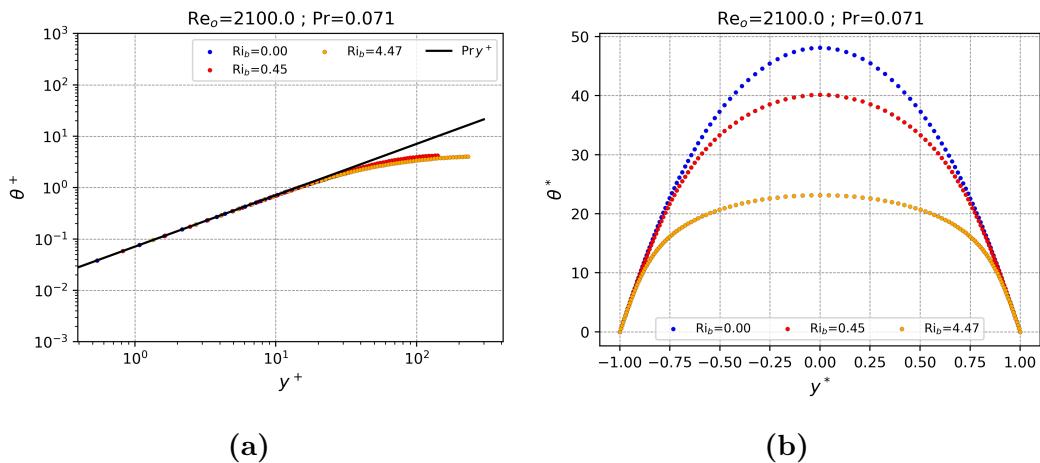
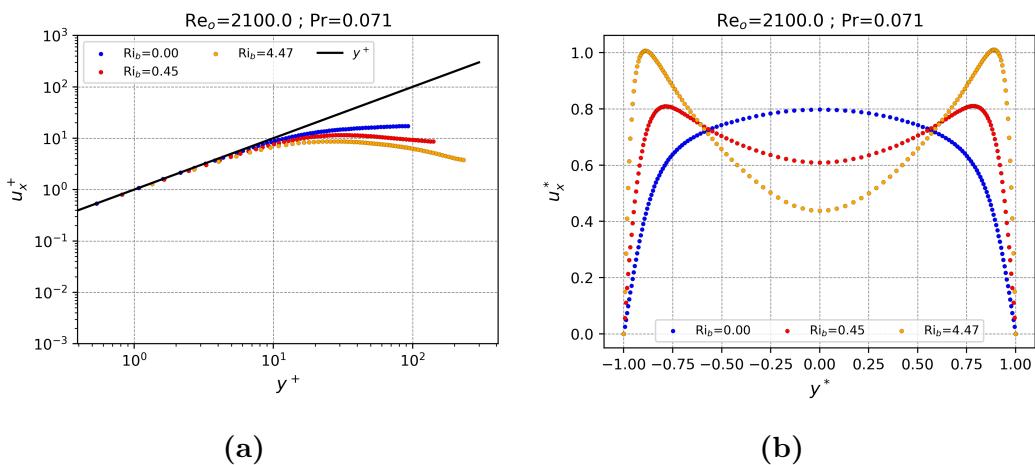


Figura B.2

## B.2. $\text{Re} = 2100$ y $\text{Pr} = 0,071$



**Figura B.3**



**Figura B.4**

### B.3. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,71$

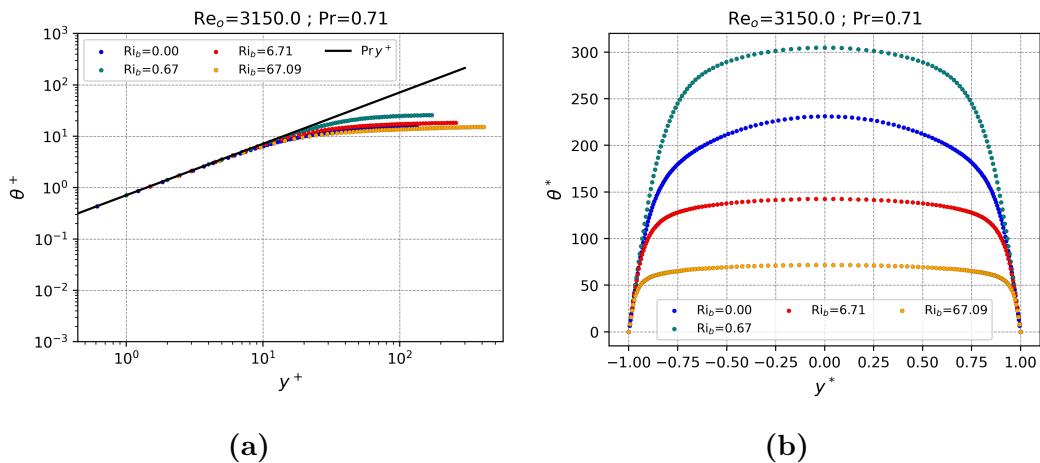


Figura B.5

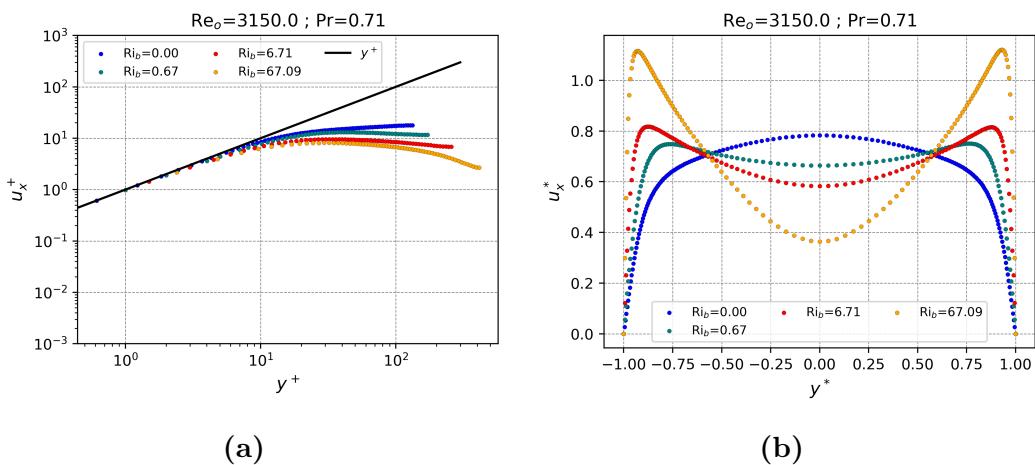


Figura B.6

#### B.4. $\text{Re} = 3150$ y $\text{Pr} = 0,071$

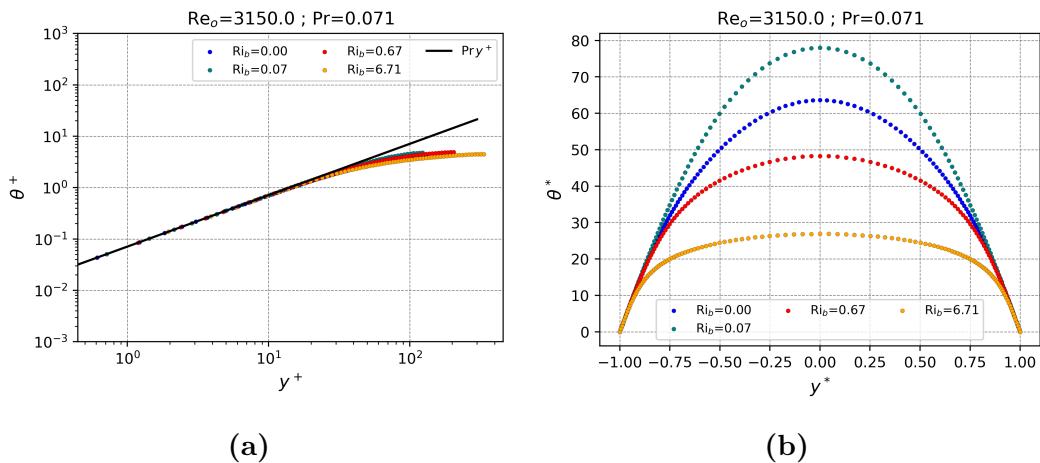


Figura B.7

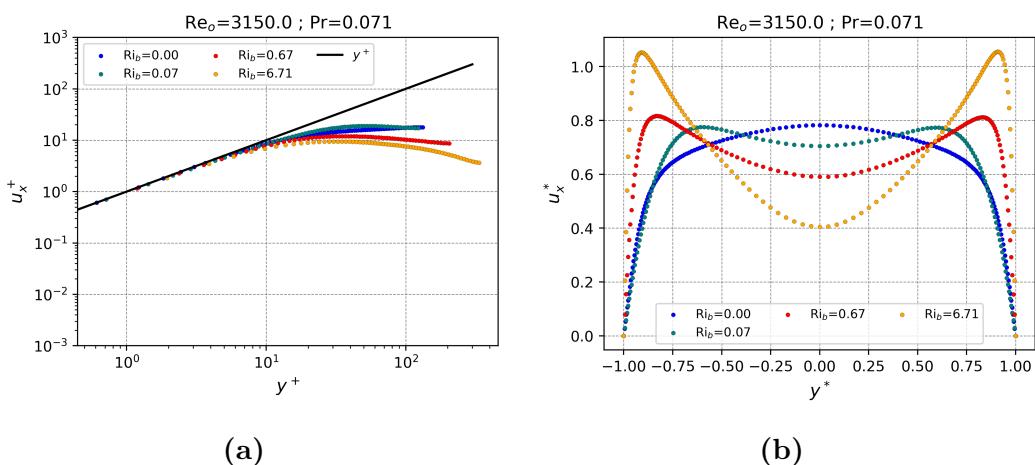


Figura B.8

### B.5. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,71$

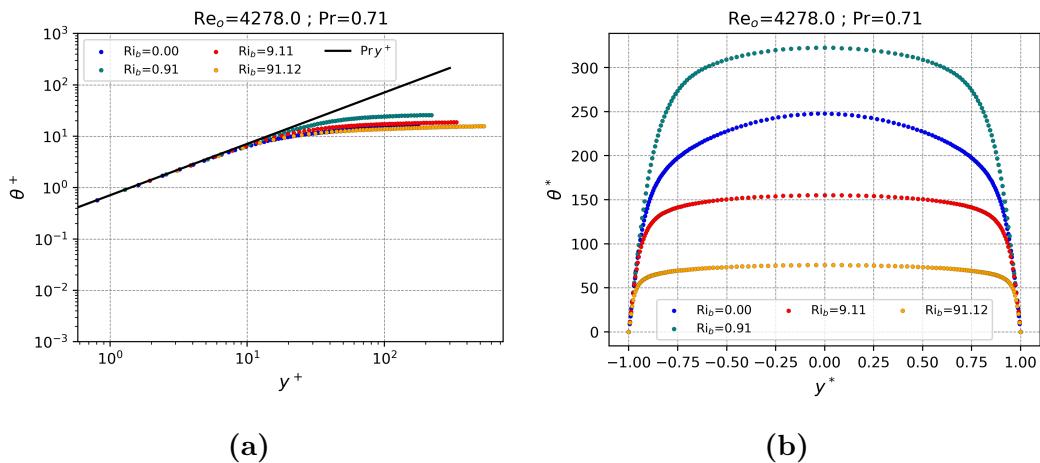


Figura B.9

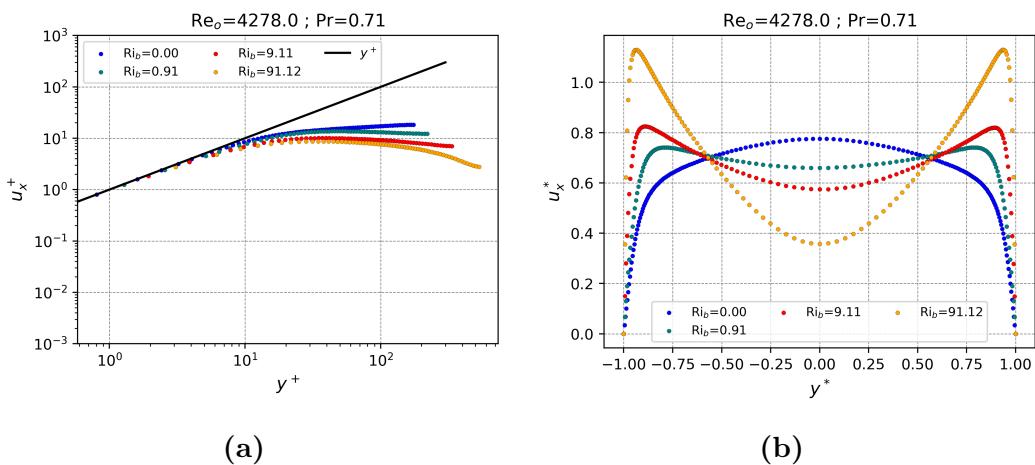


Figura B.10

## B.6. $\text{Re} = 4278$ y $\text{Pr} = 0,071$

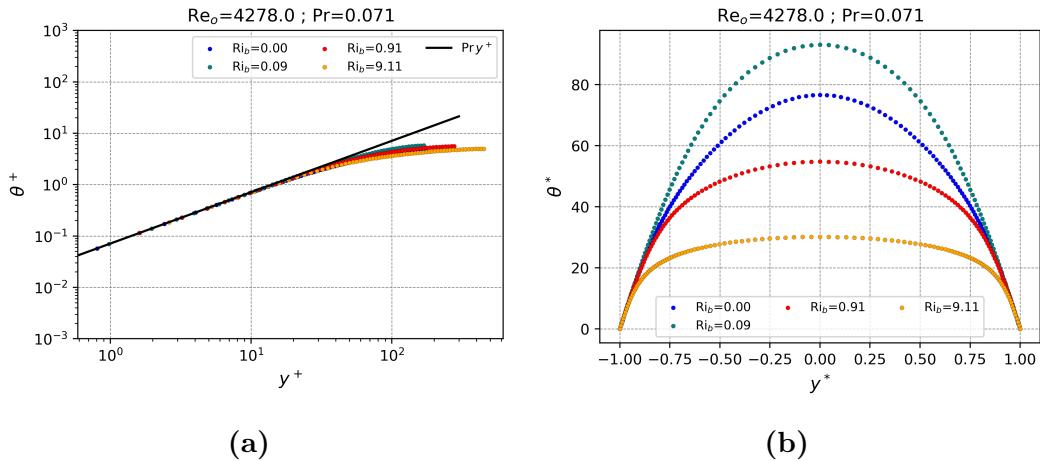


Figura B.11

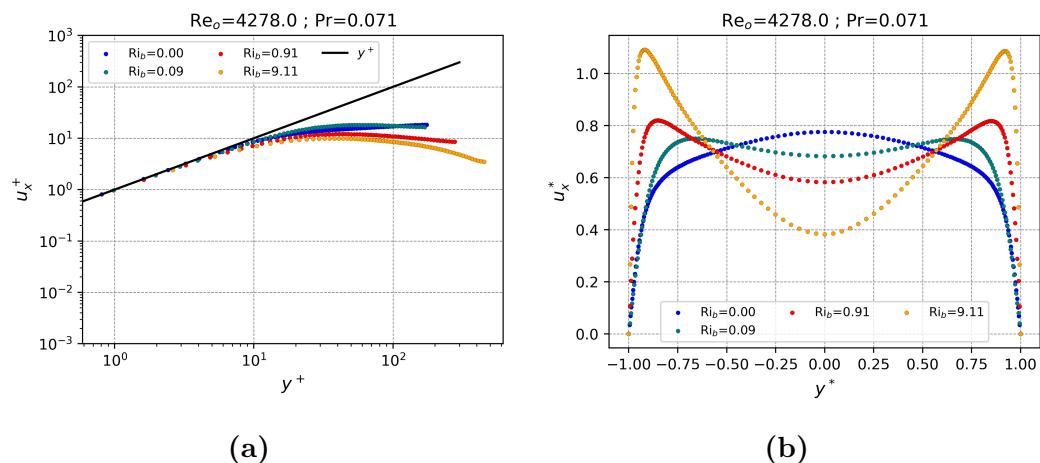


Figura B.12

# Bibliografía

- [Abregu et al., 2023] Abregu, W. I. M., Dari, E. A., and Teruel, F. E. (2023). Dns of heat transfer in a plane channel flow with spatial transition. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 209:124110.
- [Aicher and Martin, 1997] Aicher, T. and Martin, H. (1997). New correlations for mixed turbulent natural and forced convection heat transfer in vertical tubes. *International journal of heat and mass transfer*.
- [Bénard, 1901] Bénard, H. (1901). Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*.
- [Cengel and Ghajar, 2015] Cengel, Y. A. and Ghajar, A. J. (2015). *Heat and Mass Transfer:Fundamentals & Applications*. McGraw-Hill Education.
- [Chen and Chung, 1996] Chen, Y.-C. and Chung, J. (1996). The linear stability of mixed convection in a vertical channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*.
- [Chen and Chung, 2003] Chen, Y.-C. and Chung, J. (2003). A direct numerical simulation of transition phenomena in a mixed convection channel flow. *Computers & fluids*.
- [Dittus and Boelter, 1930] Dittus, F. W. and Boelter, L. M. K. (1930). Heat transfer in automobile radiators of the tubular type. *University of California Publications in Engineering*.
- [Ghajar, 2019] Ghajar, A. J. (2019). Heat transfer and pressure drop in the transition region of smooth horizontal circular tubes with different inlet configurations. In *Advances in heat transfer*. Elsevier.
- [Herbert, 1983] Herbert, T. (1983). Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances. *Physics of Fluids*.
- [Incropera et al., 2006] Incropera, F. P., DeWitt, D. P., Bergman, T. L., Lavine, A. S., et al. (2006). *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. John Wiley and Sons.
- [Jackson et al., 1989] Jackson, J., Cotton, M., and Axcell, B. (1989). Studies of mixed convection in vertical tubes. *International journal of heat and fluid flow*.
- [Kasagi and Nishimura, 1997] Kasagi, N. and Nishimura, M. (1997). Direct numerical simulation of combined forced and natural turbulent convection in a vertical plane channel. *International Journal of Heat and Fluid Flow*.

- [Kasagi et al., 1992] Kasagi, N., Tomita, Y., and Kuroda, A. (1992). Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow.
- [Kawamura et al., 1998] Kawamura, H., Ohsaka, K., Abe, H., and Yamamoto, K. (1998). Dns of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high prandtl number fluid. *International Journal of Heat and Fluid Flow*.
- [Kundu et al., 2016] Kundu, P. K., Cohen, I. M., Dowling, D. R., and Capecelatro, J. (2016). *Fluid Mechanics*. Elsevier.
- [Metais and Eckert, 1964] Metais, B. and Eckert, E. R. G. (1964). Forced, mixed and free convection regimes. *Journal of Heat Transfer*.
- [Orr, 1907] Orr, W. M. (1907). The stability or instability of the steady motions of a perfect liquid and of a viscous liquid. part i: A perfect liquid. part ii: A viscous liquid.
- [Pirozzoli et al., 2017] Pirozzoli, S., Bernardini, M., Verzicco, R., and Orlandi, P. (2017). Mixed convection in turbulent channels with unstable stratification. *Journal of fluid mechanics*.
- [Pope, 2001] Pope, S. B. (2001). *Turbulent flows*. Cambridge University Press.
- [Prandtl, 1942] Prandtl, L. (1942). *Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg, 3 edition.
- [Rayleigh, 1916] Rayleigh, L. (1916). On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the under side. *Philosophical Magazine*.
- [Reynolds, 1883] Reynolds, O. (1883). Iii. an experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the royal society of London*.
- [Schlichting, 1933] Schlichting, H. (1933). Berechnung der anfachung kleiner störungen bei der plattenströmung. *ZAMM*.
- [Schubauer and Skramstad, 1947] Schubauer, G. B. and Skramstad, H. K. (1947). Laminar boundary-layer oscillations and stability of laminar flow. *Journal of the Aeronautical Sciences*.
- [Sommerfield, 1908] Sommerfield, A. (1908). Ein beitrag zur hydrodynamischen erklärung der turbulenten flüssigkeitsbewegungen. *Atti Congr. Int. Math. 4th*.
- [Straub et al., 2019] Straub, S., Forooghi, P., Marocco, L., Wetzel, T., Vinuesa, R., Schlatter, P., and Frohnäpfel, B. (2019). The influence of thermal boundary conditions on turbulent forced convection pipe flow at two prandtl numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.
- [Tao, 1960] Tao, S. C. (1960). Combined forced and free convection in a vertical channel. *Journal of Heat Transfer*.

[Tollmien, 1930] Tollmien, W. (1930). Über die entstehung der turbulenz. *Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete: Aachen 1929.*

[White, 2011] White, F. M. (2011). *Fluid mechanics*. McGraw-Hill New York.

[You et al., 2003] You, J., Yoo, J. Y., and Choi, H. (2003). Direct numerical simulation of heated vertical air flows in fully developed turbulent mixed convection. *International Journal of Heat and Mass Transfer*.



# **Agradecimientos**

A todos los que se lo merecen ...

