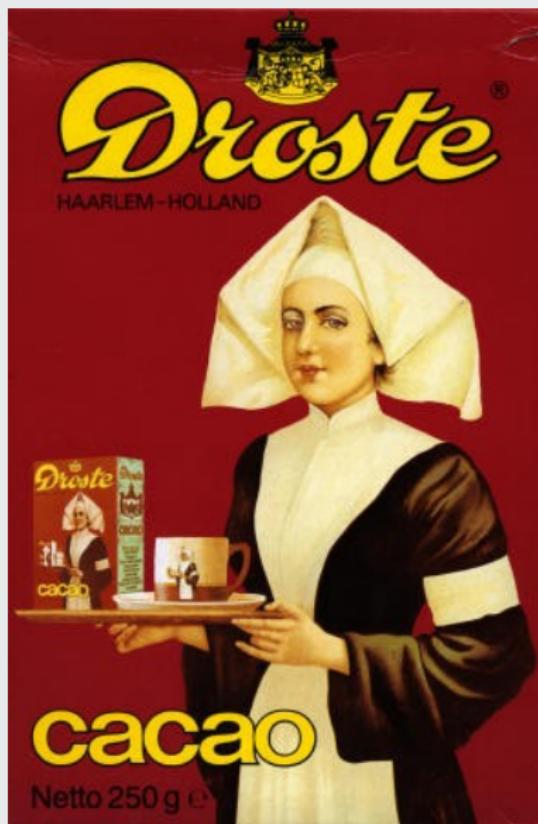


Relações de Recorrência

2 de junho 2020

Relacoes de Recorrenca

Recursividade <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/62/Droste.jpg>



Relações de Recorrência

Definição

- Recursividade é um termo utilizado para descrever, de modo geral, o processo de repetição de um objeto de forma similar a que já fora mostrada;
- Dentro da computação, em especial, na programação, a recursão bem exemplificada quando uma função definida em termos de si mesma;
- Vejamos o exemplo clássico de função recursiva:

```
função factorial(n) {  
    se (n <= 1)  
        retorno 1;  
    seno  
        retorno n * factorial(n-1);  
    }  
}
```

- Relações de recorrência são equações que definem uma ou mais sequências recursivamente. Alguns tipos específicos de relações de recorrência podem ser “resolvidos” para que se obtenha uma definição não-recursiva.

Definição

- Recorrência e Recursividade são conceitos distintos, porém relacionados entre si.
- Relações de Recorrência são expressas através de procedimentos recursivos.

Relações de Recorrência

Exemplo

- Um processo cria memória dinamicamente;
- Inicialmente, aloca 64Mb (M_0), e a cada iteração exige mais 15% de memória;
- Quanta memória será alocada após k iterações?
- Considerando: $M_k = M_{k-1} + 0.15M_{k-1} = 1,15M_{k-1}$
- $M_1 = M_0 + 0.15M_0 = 1.15M_0$
- $M_2 = M_1 + 0.15M_1 = 1.15M_0 + 0.15 \cdot 1.15M_0 = 1.15M_0(1 + 0.15) = (1.15)^2M_0$
- Logo, podemos escrever M_k como $(1.15)^k M_0$
- Esta expressão final dita “fechada”, pois possível expressar M_k em função apenas de M_0 e k , sem considerar os termos de M_1 a M_{k-1} .

Relações de Recorrência

Exercício

- Seja $T(n) = T(n - 1) + k$, sendo k constante e $n \geq 1$
- Consideremos tambm o “ponto de partida” $T(1) = 0$
- Expanda e encontre a relação de recorrência para esta expressão.
- Obs: A técnica que consiste em expandir uma dada expressão e encontrar a devida forma fechada denominada "Expansão Telescópica".

Exercícios

- ➊ Seja $T(n) = cT(n - 1)$ e $T(0) = k$, sendo c e k constante e $n > 0$
 - ➋ Seja $T(n) = T(n - 1) + 2^n$ e $T(0) = 1$, sendo $n \geq 1$.
 - ➌ Seja $T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} 2T(i) + 1$, sendo $T(1) = 1$.
- Dica: $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

Relações de Recorrência

Exercícios

Relação de recorrência nas “chamadas” recursivas de uma função.

Considere o seguinte pseudocódigo:

```
Função Rec(n){  
if n ≤ 1 stop  
else Ative Processo X  
    Rec(n/2)  
}
```

Quantas vezes o “Processo X” ser ativado?

Somatários Importantes!

- $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$
- $\sum_{i=1}^{\log n} n = n \log n$
- $\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}$, para $0 < a < 1$
- $\sum_{i=0}^n a^i = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$, para $a > 1$
- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n}$
- $\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1$

Observao: As condições impostas pelas somas devem ser atendidas para que as equivalências sejam válidas! (Variação do índice nas somas)

Relações de Recorrência

Mais exercícios!

- $T(n) = \frac{2}{3}T(n - 1)$, dado $T(0) = 4$.
- $T(n) = 10T(n - 1)$, dado $T(0) = 3$.
- $T(n) = 2T(n - 1) + 2$, dado $T(0) = 0$.
- $T(n) = 2T(n - 1) - T(n - 2)$, dado $T(0) = 5$ e $T(1) = 1$.