定义插值函数：$S_i(x) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2$

①函数值连续：

$S_i(x_{i+1}) = y_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 = y_{i+1} = S_{i+1}(x_{i+1})$

定义：$\delta_i = x_{i+1} - x_i$ ，$\Delta_i = y_{i+1} - y_i$ ，代入得到：

$$b_i\delta_i + c_i\delta_i^2 = \Delta_i$$

②一阶导的函数值连续：

$$S_i'(x_{i+1}) = b_i + 2c_i\delta_i = b_{i+1} = S_{i+1}'(x_{i+1})$$

③自然边值条件：

$$S_0'(x_0) = b_0 = 0$$

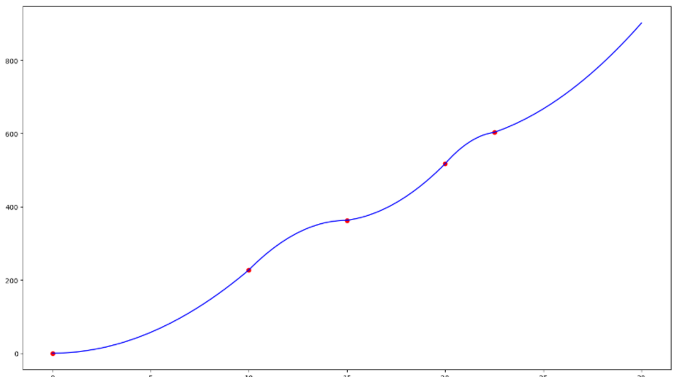
$$S_{n-1}'(x_n) = 0$$

将c_i用b_i表示，可得下列矩阵方程：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\frac{\Delta_0}{\delta_0} \\ 2\frac{\Delta_1}{\delta_1} \\ \vdots \\ 2\frac{\Delta_{n-3}}{\delta_{n-3}} \\ 2\frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} \end{bmatrix}$$

图表 1 自然二次样条插值矩阵方程

n个未知量n个方程，求解出b_i后反解出c_i，代入插值方程并绘图。



图表 2 自然二次样条插值函数图像

代入$t = 16$，得到的函数值为374.9884。与课件值396相差不大。

为了提高准确率，可以使用钳制二次样条插值：

令

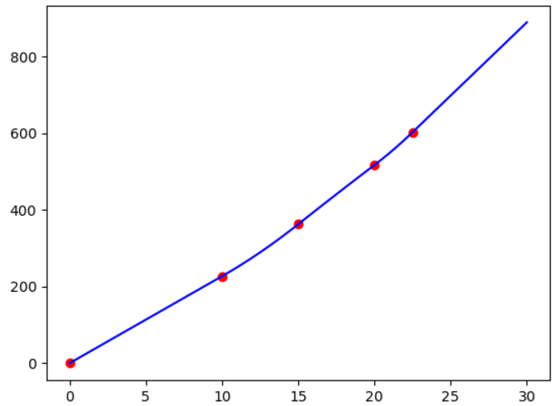
$$S_0'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta_0}{\delta_0}$$

修改矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta_0}{\delta_0} \\ 2\frac{\Delta_0}{\delta_0} \\ 2\frac{\Delta_1}{\delta_1} \\ \vdots \\ 2\frac{\Delta_{n-3}}{\delta_{n-3}} \\ 2\frac{\Delta_{n-1}}{\delta_{n-1}} \end{bmatrix}$$

图表 3 钳制二次样条插值矩阵方程

此时求解出的插值函数：



图表 4 钳制二次样条插值函数图像

此时代入$t = 16$，得到的插值函数值为 394.23639999999995，与课件上的参考值基本相等。