Monte Calo 的收敛阶数讨论

白博臣、何骐多、夏营

(四川大学　物理学拔尖计划)

Figure 1: 白博臣

Figure 2: 何骐多

Figure 3: 夏营

本文讨论了 Monte Calo 积分中的收敛阶数。

摘　要

关键词： RdRand，Monte Calo Method

1 引言

基于先前对于 RdRand 的研究，我们讨论了一个问题，即在 Monte Calo 积分中，不同的随机数生成器的选择，会对收敛阶数造成什么样的影响。

本文先用概率学的知识，从理论上证明了阶数为 $O(N^{-1/2})$ 的充分性，在通过代码计算，分析机器的伪随机和 RdRand 的真随机。

2 理论推导

Monte Calo 方法即一个常规的二项分布，每次进行的 Bernoulli 试验为

$$x = \begin{cases} 0, & The\, point\, is\, out\, of\, the\, area \\ 1, & The\, point\, is\, in\, the\, area \end{cases}$$

按照棣莫佛－拉普拉斯定理，二项分布在 n 足够大时，近似为一个正态分布，有

$$P(|\bar{x}_\alpha - I| < \frac{\lambda_\alpha \sigma}{\sqrt{N}}) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\lambda_\alpha} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1 - \alpha$$

其中，λ_α 是正态分布的 α 分位点，σ 是标准差，N 是试验次数。这表明，不等式

$$|\bar{x}_\alpha - I| < \frac{\lambda_\alpha \sigma}{\sqrt{N}}$$

有置信概率 $1 - \alpha$ 成立，即 $\bar{x}_\alpha$ 收敛到 I 的阶数为 $O(N^{-1/2})$，因此，在后续的实验中应当观察到 $\ln err - \ln N$ 图中，拟合曲线的斜率为 $-1/2$。

3 代码验证

为了证明以上结果我们分别用 Random 和 RdRand 计算积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x} dx$ 的值，观察相对误差随点数 N 的变化。利用 Java 代码实现，见附件。

运行结果如下，

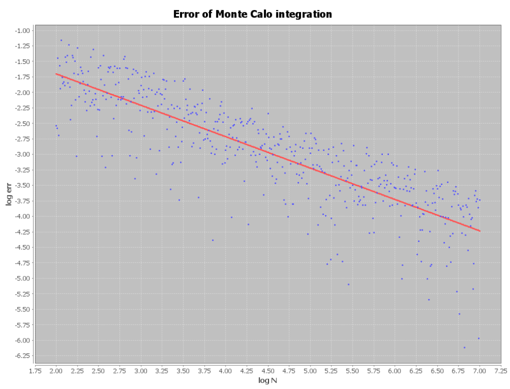

Figure 4: Random 的运行结果

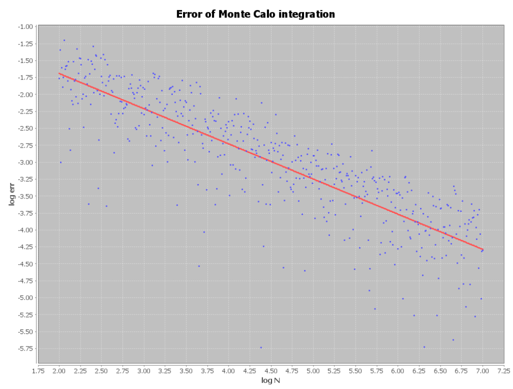

Figure 5: RdRand 的运行结果

```
k = -0.5066379966706227
```

Figure 6: Random 的斜率

```
k = -0.5188613364561541
```

Figure 7: RdRand 的斜率

由图可见，实验的结果符合理论推导，即在 Monte Calo 积分中，收敛的阶数为 $O(N^{-1/2})$。

4 结论

本文通过理论和代码的方式，验证了在 Monte Calo 积分中，收敛的阶数为 $O(N^{-1/2})$，此结论亦可推广到任何 Monte Calo 方法中。不过本文并没有考虑到使用特殊的序列（即准随机），例如 Halton 序列、Sobol 序列和 Niederreiter 序列，这些序列由于其的固定顺序，导致了其并非独立多次的 Bernoulli 试验，无法使用以上理论公式。其在收敛的速度上会更快，斜率的绝对值会更大一些，针对该角度，有待后人更深入的研究。