Патрашкин Н.А.

Практикум на ЭВМ. Задача №1

1 Условие задачи

Построить разностную схему со вторым порядком аппроксимации и найти ее решение при различных значениях h и ε:

$$-\varepsilon u'' + e^x u' = \sin x^2, \quad u(0) = 0,\ u(1) = 1$$
$$\varepsilon = 1,\ 10^{-2},\ 10^{-3}.$$

2 Построение разностной схемы

Решение будем искать методом Галёркина в виде $u_h = \sum\limits_{i=0}^{N} c_i \varphi_i^h$, где φ_i^h - базисные кусочно-линейные функции вида

$$\varphi_i^h = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & \text{при } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i; \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & \text{при } x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}; \\ 0 & \text{при остальных } x, \end{cases}$$

(в крайних точках будут только "половинки"этих функций), а коэффициенты c_i найдем из матричного уравнения $Ac = b$, в котором

$$a_{ij} = (L\varphi_j^h, \varphi_i^h), \quad b_i = (f, \varphi_i^h), \quad i, j = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Для оставшихся элементов из начальных условий получим

$$a_{0j} = \begin{cases} 1, & \text{при } j = 0; \\ 0 & \text{при остальных } j, \end{cases}, \quad b_0 = 0, \quad a_{Nj} = \begin{cases} 1, & \text{при } j = N; \\ 0 & \text{при остальных } j, \end{cases}, \quad b_N = 1$$

Вычислим элементы матрицы A:

$$a_{ij} = (L\varphi_j^h, \varphi_i^h) = \int_0^1 \Big[\varepsilon(\varphi_j^h)'(\varphi_i^h)' + e^x(\varphi_j^h)'\varphi_i^h\Big]dx$$

Первая часть этого интеграла имеет вид

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varepsilon(\varphi_j^h)'(\varphi_i^h)'dx = \begin{cases} \frac{2\varepsilon}{h}, & \text{при } j = i; \\ -\frac{\varepsilon}{h}, & \text{при } |i-j| = 1; \\ 0, & \text{при } |i-j| > 1. \end{cases}$$

Для второй части получаем

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} e^x(\varphi_j^h)'\varphi_i^h dx = \begin{cases} \frac{1}{h^2}(2he^{x_i} - e^{x_{i+1}} + e^{x_{i-1}}), & \text{при } j = i; \\ -\frac{1}{h^2}(he^{x_i} - e^{x_i} + e^{x_{i-1}}), & \text{при } j = i-1; \\ -\frac{1}{h^2}(he^{x_i} - e^{x_{i+1}} + e^{x_i}), & \text{при } j = i+1; \\ 0, & \text{при } |i-j| > 1. \end{cases}$$

Теперь вычислим вектор b:

$$b_i = (f, \varphi_i^h) = \int_0^1 f\varphi_i^h dx \approx f(x_i)\int_0^1 \varphi_i^h dx = h\sin(x_i^2)$$

3 Решение разностной схемы

Так как матрица A имеет трёхдиагональный вид, то систему уравнений $Ac = b$ будем решать методом прогонки. Предположим, что искомые c_i имеют рекурентное соотношение:

$$A_i c_{i-1} + B_i c_i + C_i c_{i+1} = F_i \tag{1}$$

$$c_i = \alpha_{i+1} c_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-2, \quad c_0 = 0, \quad c_N = 1, \tag{2}$$

где коэффициенты A_i, B_i, C_i, F_i нам известны. Используя это соотношение, выразим c_i и c_{i-1} через c_{i+1} и подставим в уравнение:

$$(A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_{i+1} + C_i) c_{i+1} + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + B_i \beta_{i+1} - F_i = 0 \tag{3}$$

Это равенство будет выполнено независимо от решения, если потребовать

$$\begin{cases} A_i \alpha_i \alpha_{i+1} + B_i \alpha_{i+1} + C_i = 0 \\ A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i + B_i \beta_{i+1} - F_i = 0 \end{cases} \tag{4}$$

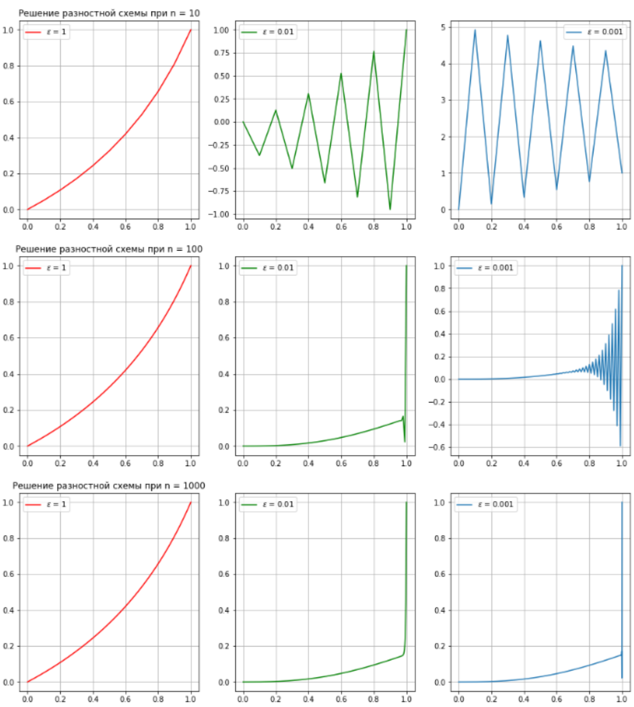
Отсюда выразим α и β:

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \frac{-C_i}{A_i \alpha_i + B_i} \\ \beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i \beta_i}{A_i \alpha_i + B_i} \end{cases} \tag{5}$$

Из крайних уравнений получим

$$\begin{cases} \alpha_2 = \frac{-C_1}{B_1} \\ \beta_2 = \frac{F_1}{B_1} \end{cases}, \quad c_{N-1} = \frac{F_{N-1} - A_{N-1} \beta_{N-1}}{A_{N-1} \alpha_{N-1} + B_{N-1}} \tag{6}$$

Подставляя (6) в (5), найдём все значения α_i и β_i. А уже подставляя их в уравнения (2) вычислим неизвестные c_i. Теперь посмотрим, как выглядят наши решения $u_h = \sum\limits_{i=0}^{N} c_i \varphi_i^h$ при различных значениях ε и n:

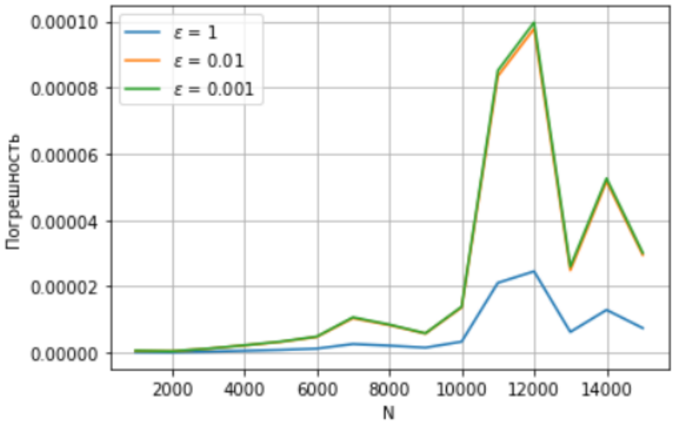


4 Исследоваение схемы на сходимость

Для численной оценки сходимости изменим функцию в правой части так, чтобы уравнение имело точное решение, вычисляемое аналитически. Для этого возьмём функцию $\hat{u} = \sin\frac{\pi x}{2}$ как решение задачи, удовлетворяющее краевым условиям. Тогда функция правой части имеет вид:

$$\hat{f} = \frac{\pi}{2}(\varepsilon\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2} + e^x\cos\frac{\pi x}{2})$$

Пользуясь уже построенной разностной схемой, в которой мы изменили только вектор b, найдём коэффициенты c_i. Теперь построим графики зависимости погрешности от N при разных ε, где погрешность считаем как $max|\hat{u} - u_h|_h$:



Заметим, что после 2000 погрешность начинает расти, т.е. не стремится к нулю. Тогда можно сделать вывод, что полученная разностная схема не сходится к решению дифференциальной задачи.