Патрашкин Н.А.

Практикум на ЭВМ. Задача №2

1 Постановка задачи

Решить следующую задачу оптимального управления:

$$\int_0^1 \frac{\ddot{x}}{1+\alpha x^2 \dot{x}^2} dt \to \inf, \ddot{x} \le 1$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0, x(1) = -\frac{11}{24}, \alpha = \{0.0, 0.1, 1.0, 11.0\}$$

2 Сведение к краевой задаче

Обозначим $x_1 := x, x_2 := \dot{x}$
Тогда условия на производные будут иметь следующий вид:

$$\ddot{x} = u, \dot{x}_1 = x_2$$

Функция Лагранжа имеет следующий вид: $\mathcal{L} = \int_0^1 L dt + l$,
где $L = \frac{\lambda_0 u}{1+\alpha x_1^2 x_2^2} + p_1(\dot{x}_1 - x_2) + p_2(\dot{x}_2 - u)$ и $l = \lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) + \lambda_3(x_1(1) + \frac{11}{24})$
Запишем условия принципа минимума:
1. Уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -\dfrac{2\lambda_0 \alpha u x_1}{1+\alpha x_1^2 x_2^2} \\ \dot{p}_2 = -p_1 - \dfrac{2\lambda_0 \alpha u x_2}{1+\alpha x_1^2 x_2^2} \end{cases}$$

2. Трансверсальность:

$$L_{\dot{x}}(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x(t_k)} \Rightarrow \begin{cases} p_1(0) = \lambda_1 \\ p_1(1) = -\lambda 3 \\ p_2(0) = \lambda_2 \\ p_2(1) = 0 \end{cases}$$

3. Оптимальность по u:

$$\min_u L = L(\hat{u})$$

Получаем $\hat{u} = \min_u(\frac{\lambda_0 u}{1+\alpha x_1^2 x_2^2} - p_2 u)$, поэтому $u = sign(-\frac{\lambda_0}{1+\alpha x_1^2 x_2^2} + p_2)$
4.Условия на множители Лагранжа: $\lambda_0 \ge 0$, все λ_j не равны одновременно нулю и могут быть выбраны с точностью до положительного множителя. Положим $\lambda_0 = 1$ - нормировка.

Тем самым, свели к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u = sign(-\dfrac{\lambda_0}{1+\alpha x_1^2 x_2^2} + p_2) \\ \dot{p}_1 = -\dfrac{2\alpha u x_1}{1+\alpha x_1^2 x_2^2} \\ \dot{p}_2 = -p_1 - \dfrac{2\alpha u x_2}{1+\alpha x_1^2 x_2^2} \\ p_1(0) = \lambda_1 \\ p_1(1) = -\lambda 3 \\ p_2(0) = \lambda_2 \\ p_2(1) = 0 \\ x_1(0) = 0 \\ x_1(1) = -\dfrac{11}{24} \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

Решать будем методом Рунге-Кутты 8-го порядка.

3 Решение краевой задачи при $\alpha = 0$

Уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = sign(p_2 - 1) \\ \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = -p_1 \\ p_1(0) = \lambda_1 \\ p_1(1) = -\lambda 3 \\ p_2(0) = \lambda_2 \\ p_2(1) = 0 \\ x_1(0) = 0 \\ x_1(1) = -\dfrac{11}{24} \\ x_2(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = sign(p_2 - 1) \\ p_1 = C \\ p_2 = C(1-t) \\ C = \lambda_1 \\ C = -\lambda_3 \\ C = \lambda_2 \end{cases}$$

Далее получим недостающие граничные условия:

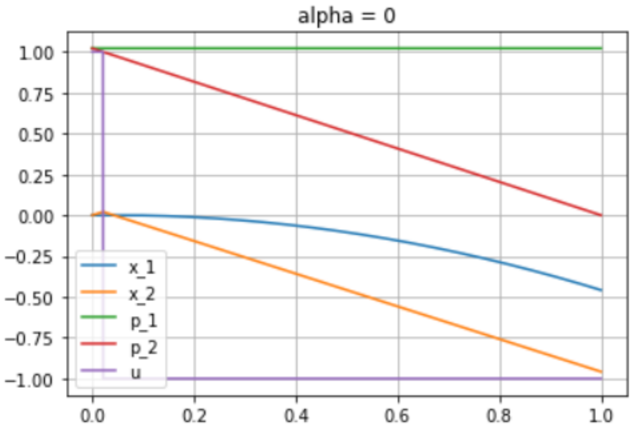
$$p_1(0) = p_2(0) = \sqrt{\frac{24}{23}}$$

И построим графики решений полученной краевой задачи:

4 Решение краевой задачи при $\alpha \neq 0$

Теперь, используя метод Ньютона, найдём начальные данные для других $\alpha \neq 0$, решим построенную задачу Коши методом Рунге-Кутты, подсчитаем требуемый интеграл и построим графики для наглядности:

```
Интеграл = -0.9578957895789579
dx1(1) = -3.683331417647651e-12, dp2(1) = -3.3306690738754696e-16
p1(0) = 1.0215078369104984, p2(0) = 1.0215078369104984
Разница двух методов: [0. 0.]
```




```
Интеграл = -0.955287212423869
dx1(1) = -1.043621855600918e-10, dp2(1) = -1.705292851372775e-11
p1(0) = 0.9358000536308154, p2(0) = 1.0197475899917219
Разница двух методов: [-3.48711893e-09 -1.56780477e-09]
```

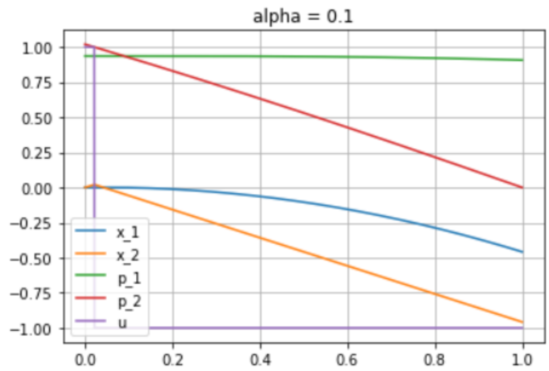


Рис. 1: $\alpha = 0.1$

```
Интеграл = -0.9339606189324472
dx1(1) = -3.8267056190477433e-10, dp2(1) = -3.706120098312393e-10
p1(0) = 0.2302138677635167, p2(0) = 1.0052904467334125
Разница двух методов: [2.27015007e-09 1.30317979e-11]
```

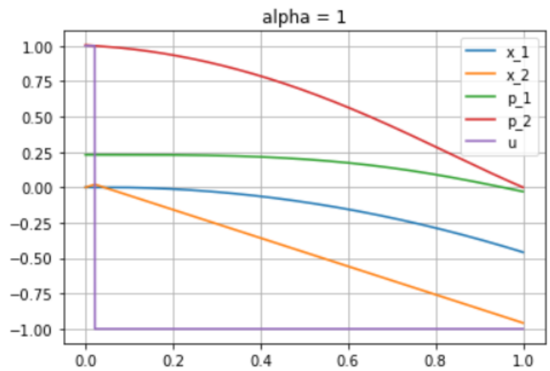


Рис. 2: $\alpha = 1$