Патрашкин Н.А.

Практикум на ЭВМ, 8 семестр. Задача №1.2

1 Условие задачи

Для краевой задачи в единичном квадрате

$$-\Delta u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = \alpha$$

построить разностную схему со вторым порядком аппроксимации и решить полученную систему ЛАУ при помощи метода переменных направлений.

2 Решение методом переменных направлений

Будем решать задачу для $\alpha = 0$, т.к. ответ при других значениях получается сдвигом полученного решения на α. На прямоугольной сетке $\bar{\Omega} = \{x_{ij} = (ih, jh) \in \bar{G}, \quad 0 \le i \le N, \quad 0 \le j \le N, h = \frac{1}{N}\}$, введённой в квадрате $\bar{G} = \{0 \le x_\alpha \le 1, \ \alpha = 1, 2\}$, требуется найти решение задачи

$$\Lambda y = -f(x), \ x \in \Omega, \quad y(x) = 0, \ x \in \gamma := \partial\Omega, \quad \Lambda_\alpha y = y_{x_\alpha x_\alpha}, \ \alpha = 1, 2. \tag{1}$$

Обозначим через H пространство сеточных функций , заданных на Ω, со скалярным произведением $(u, v) = \sum\limits_{x \in \Omega} u(x)v(x)h^2$. Операторы A, A_1, A_2 определим на H следующим образом: $Ay = -\Lambda\dot{y}, \ A_\alpha y = -\Lambda_\alpha \dot{y}, \ \alpha = 1, 2$, где $y \in H, \dot{y} \in \dot{H}, y(x) = \dot{y}(x)$ для $x \in \Omega$, а $\dot{H}$ - множество сеточных функций, заданных на $\bar{\Omega}$ и обращающихся в нуль на γ. Разностная задача (1) может быть тогда записана в виде операторного уравнения $Ay = f$, где $A = A_1 + A_2$.

Используя определение операторов A_1 и A_2, алгоритм метода переменных направлений для рассматриваемого примера можно записать в следующем виде:

$$\omega_{k+1}^{(1)} y_{k+1/2} - \Lambda_1 y_{k+1/2} = \omega_{k+1}^{(1)} y_k + \Lambda_2 y_k + \phi, \quad h \le x_1 \le 1 - h, \tag{2}$$

$$y_{k+1/2}(x) = 0 \text{ при } x_1 = 0, 1, \quad h \le x_2 \le 1 - h$$

$$\omega_{k+1}^{(2)} y_{k+1} - \Lambda_2 y_{k+1} = \omega_{k+1}^{(2)} y_{k+1/2} + \Lambda_1 y_{k+1/2} + \phi, \quad h \le x_2 \le 1 - h, \tag{3}$$

$$y_{k+1}(x) = 0 \text{ при } x_2 = 0, 1, \quad h \le x_1 \le 1 - h$$

причём $y_k(x) = 0$ при $x \in \gamma$ для любого $k \ge 0$.

Таким образом, алгоритм метода состоит в последовательном решении для каждого фиксированного x_2 трёхточечных краевых задач (2) по направлению x_1 для определения $y_{k+1/2}$ на Ω и решении для каждого x_1 краевых задач (3) по направлению x_2 для определения нового итерационного приближения y_{k+1} на Ω.

Для нахождения решения задач (2), (3) воспользуемся методом прогонки. Запишем уравнения в виде трёхточечной системы:

$$-y_{k+1/2}(i+1, j) + (2 + h^2\omega_{k+1}^{(1)}) y_{k+1/2}(i, j) - y_{k+1/2}(i-1, j) = \phi_1(i, j), \tag{4}$$

$$1 \le i \le N - 1, \quad y_{k+1/2}(0, j) = y_{k+1/2}(N, j) = 0, \quad 1 \le j \le N - 1,$$

где

$$\phi_1(i, j) = y_k(i, j+1) - (2 - h^2\omega_{k+1}^{(1)}) y_k(i, j) + y_k(i, j-1) + h^2\phi(i, j);$$

и

$$-y_{k+1}(i, j+1) + (2 + h^2\omega_{k+1}^{(2)}) y_{k+1}(i, j) - y_k(i, j-1) = \phi_2(i, j), \tag{5}$$

$$1 \le j \le N-1, \quad y_{k+1}(i,0) = y_{k+1}(i,N) = 0, \quad 1 \le i \le N-1,$$

где

$$\phi_2(i,j) = y_{k+1/2}(i+1,j) - (2 - h^2\omega_{k+1}^{(2)})y_{k+1/2}(i,j) + y_{k+1/2}(i-1,j) + h^2\phi(i,j).$$

Формулы метода прогонки для задачи (4) имеют вид (j фиксировано):

$$y_{k+1/2}(i,j) = \alpha_{i+1}y_{k+1/2}(i+1,j) + \beta_{i+1}, \quad 1 \le i \le N-1, \quad y_{k+1/2}(N,j) = 0,$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{1}{C - \alpha_i}, \quad i = 1,2,...,N-1, \quad \alpha_1 = 0,$$

$$\beta_{i+1} = \alpha_{i+1}(\phi_1(i,j) + \beta_i), \ i = 1,2,...,N-1, \ \beta_1 = 0,$$

$$C = 2 + h^2\omega_{k+1}^{(1)}.$$

Для задачи (5) формулы метода прогонки имеют аналогичный вид.

3 Программная реализация

Возьмём $u = \sin \pi x \cdot \sin \pi y$. Тогда из уравнения $f = -2\pi^2 \sin \pi x \cdot \sin \pi y$. Итерацию в методе прекращаем, когда норма разности решений на соседних слоях составляет не более 10^{-7}.

Зависимость ошибки от n:

N	4	8	16	32	64	128	256	512
Error	$5 * 10^{-2}$	10^{-2}	$3 * 10^{-3}$	$8 * 10^{-4}$	$2 * 10^{-4}$	$5 * 10^{-5}$	$9 * 10^{-6}$	$5 * 10^{-6}$

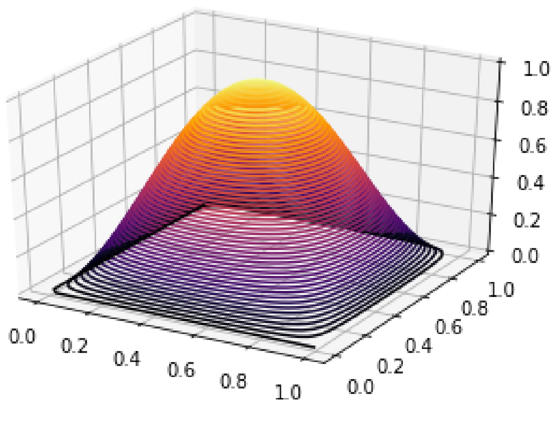

Рис. 1: График функции u

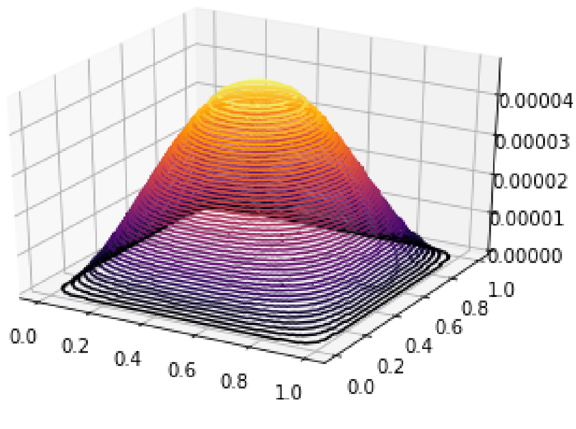

Рис. 2: График погрешности (при n = 256)