Патрашкин Н.А.

Практикум на ЭВМ, 8 семестр. Задача №2.28

1 Условие задачи

Система уравнений в области Ω:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\mathbf{u})=f_0,\\ \rho\Big(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u},\nabla)\mathbf{u}\Big)+\nabla p=L\mathbf{u}+\rho\mathbf{f},\\ p=p(\rho);\end{gathered}\tag{1}$$

где L берём как $L\mathbf{u}\equiv div(\mu\nabla\mathbf{u})+\frac{1}{3}\nabla(\mu\, div\mathbf{u})$.
Граничные условия:

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x})=0,\quad (t,\mathbf{x})\in[0,T]\times\Gamma,\quad \Gamma=\partial\Omega.\tag{2}$$

2 Разностная схема

$\mathbf{u}=\mathbf{u}(t,\mathbf{x})=(u_1,u_2)(t,\mathbf{x}),\quad \mathbf{f}=\mathbf{f}(\mathbf{x})=(f_1,f_2)(\mathbf{x})$.
$H(t)$ - матрица значений приближения на сетке функции ρ в момент времени t.
$V_k(t)$ - матрица значений приближения на сетке функции u_k в момент времени t.

$$\begin{gathered}H_t+0.5\sum_{k=1}^{2}(V_k\hat{H}_{\overset{0}{x}_k}+(V_k\hat{H})_{\overset{0}{x}_k}+H(V_k)_{\overset{0}{x}_k})=f_0,\quad \mathbf{x}\in\Omega_{\mathbf{h}},\\ H_t+0.5((V_k\hat{H})_{x_k}+H(V_k)_{x_k})-\\ -0.5h_k((HV_k)^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k}-0.5(HV_k)^{+2_k}_{x_k\bar{x}_k}+H((V_k)^{+1_k}_{x_k\bar{x}_k}-0.5(V_k)^{+2_k}_{x_k\bar{x}_k}))=f_0,\quad \mathbf{x}\in\gamma_k^-,\\ H_t+0.5((V_k\hat{H})_{\bar{x}_k}+H(V_k)_{\bar{x}_k})+\\ +0.5h_k((HV_k)^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k}-0.5(HV_k)^{-2_k}_{x_k\bar{x}_k}+H((V_k)^{-1_k}_{x_k\bar{x}_k}-0.5(V_k)^{-2_k}_{x_k\bar{x}_k}))=f_0,\quad \mathbf{x}\in\gamma_k^+,\\ \hat{H}(V_k)_t+\frac{1}{3}\Big(\hat{H}V_k(\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_k}+(\hat{H}V_k\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_k}\Big)-\frac{1}{3}V_k^2\hat{H}_{\overset{0}{x}_k}+\\ +\frac{1}{2}\sum_{m=1,m\neq k}^{2}\Big(\hat{H}V_m(\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_m}+(\hat{H}V_m\hat{V}_k)_{\overset{0}{x}_m}-V_k(\hat{H}V_m)_{\overset{0}{x}_m}\Big)+p(\hat{H})_{\overset{0}{x}_k}=\\ =\mu\Big(\frac{4}{3}(\hat{V}_k)_{x_k\bar{x}_k}+\sum_{m=1,m\neq k}^{2}(\hat{V}_k)_{x_m\bar{x}_m}+\frac{1}{3}\sum_{m=1,m\neq k}^{2}(V_m)_{\overset{0}{x}_k\overset{0}{x}_m}\Big)+\hat{H}f_k,\quad \mathbf{x}\in\Omega_{\mathbf{h}},\\ \hat{V}_k=0,\quad \mathbf{x}\in\gamma_{\bar{h}},\quad k=1,2.\end{gathered}\tag{3}$$

3 Программная реализация

Так как системы уравнений для $\hat{V}_k$ зависят от $\hat{H}$, а система для $\hat{H}$ не зависит от значений на следующем слое, то сперва нужно решить СЛУ для $\hat{H}$, а после, в любом порядке, для $\hat{V}_k$.

Возьмём $u_1=\sin(\pi x)\sin(\pi y)\,t,\quad u_2=\sin(\pi x^2)\sin(\pi y^2)\,t,\quad \rho=e^t,\quad p=\rho^{1.4},\quad \mu=1.$
Значения функций f_0,f_1,f_2 получим, подставляя известное решение $(\mathbf{u},\rho)$ в разностую схему при каждом t. В программе используем метод решения *spsolve* СЛУ с разреженной матрицей из библиотеки Armadillo.

Зависимость ошибки от τ и h:

τ	0.2	0.1	0.025
h	0.2	0.1	0.05
Error H	$7.2 * 10^{-2}$	$2.6 * 10^{-2}$	$9.6 * 10^{-3}$
Error V_1	$2.1 * 10^{-3}$	$1.2 * 10^{-3}$	$3.3 * 10^{-4}$
Error V_2	$5.9 * 10^{-3}$	$2.0 * 10^{-3}$	$5.4 * 10^{-4}$