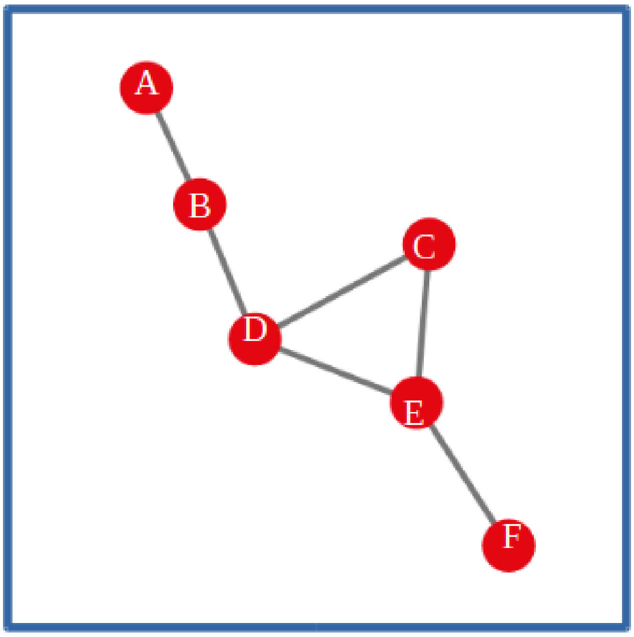
Problemas Resueltos de la Práctica Dirigida

Patrichs Inocente Valle

17 de mayo de 2018

1. Pregunta 3

Solución Item (a). Sea el grafo G(V,E):



Siendo:

V = {A,B,C,D,E,F}

E = {{A,B},{B,D},{C,D},{C,E},{D,E},{E,F}}

Con Secuencia de grados: (1,2,2,3,3,1) correspondiente a A,B,C,D,E,F respectivamente.

Recordar que un automorfismo es cualquier biyección $f : V \to V$, tal que $\{u, v\} \in E$ si y solamente si $\{f(u), f(v)\} \in E$.

Es fácil ver que la **identidad es un automorfismo** en G(V,E),pues claramente $\{u, v\} \in E$ si y solamente si $\{u, v\} \in E$.
Ahora debemos probar que **no existe otro automorfismo** en G(V,E) para concluir que el grafo es asimétrico.
suponemos que existe un automorfismo distinto a la identidad,en este automorfismo existe al menos un vertice u tal que: $u \neq$ f(u) y ya que **un isomorfismo manda vertices adyacentes de u a vertices adyacentes de f(u)**; claramente u y f(u) tienen el mismo grado.Además,los vertices adyacentes de u y de f(u) tambien deben corresponderse en grado.

Se puede encontrar tal vertice u?

u≠A,F a pesar de que tengamos las posibilidades f(A)=F y f(F)=A como candidatos (por ser diferentes y tener el mismo grado),no puede darse,ya que el grado del vertice adyacente a ambos difiere(deg(B)≠deg(E)).
u≠B,C a pesar de que tengamos las posibilidades f(B)=C y f(C)=B como candidatos (por ser diferentes y tener el mismo grado),no puede darse,ya que el grado de los vertices difiere(para B los grados de sus vertices adyacentes son 1 y 3,para C son 3 y 3).
u≠D,E a pesar de que tengamos las posibilidades f(D)=E y f(E)=D como candidatos (por ser diferentes y tener el mismo grado),no puede darse,ya que el grado de los vertices difiere(para D los grados de sus vertices adyacentes son 2,2 y 3,para E son 2,3 y 1).

Entonces no existe u, tal que $u \neq$ f(u), por lo tanto no puede existir un automorfismo diferente a la identidad para el grafo G(V,E).**Por lo tanto es Asimétrico y es el grafo buscado.**

Solución Item (b). Demostraremos que no existe grafo asimétrico G tal que $1 <\mid V(G) \mid < 5$,
Para ello recorreremos todos los posibles grafos de 2,3 y 4 vertices,en busqueda de un automorfismo diferente a la identidad.Nótese que solo es necesario tomar todos los grafos posibles no isomorfos dos a dos,los grafos isomorfos a estos no los hemos incluido,ya que es implícito que se dara el mismo automorfismo en ellos tambien.

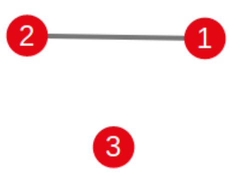
.

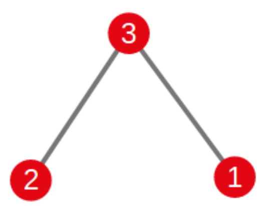
Si V(G)=2

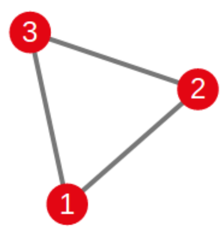
El automorfismo diferente a la identidad es f(1)=2,f(2)=1 para ambos casos.

.

Si V(G)=3

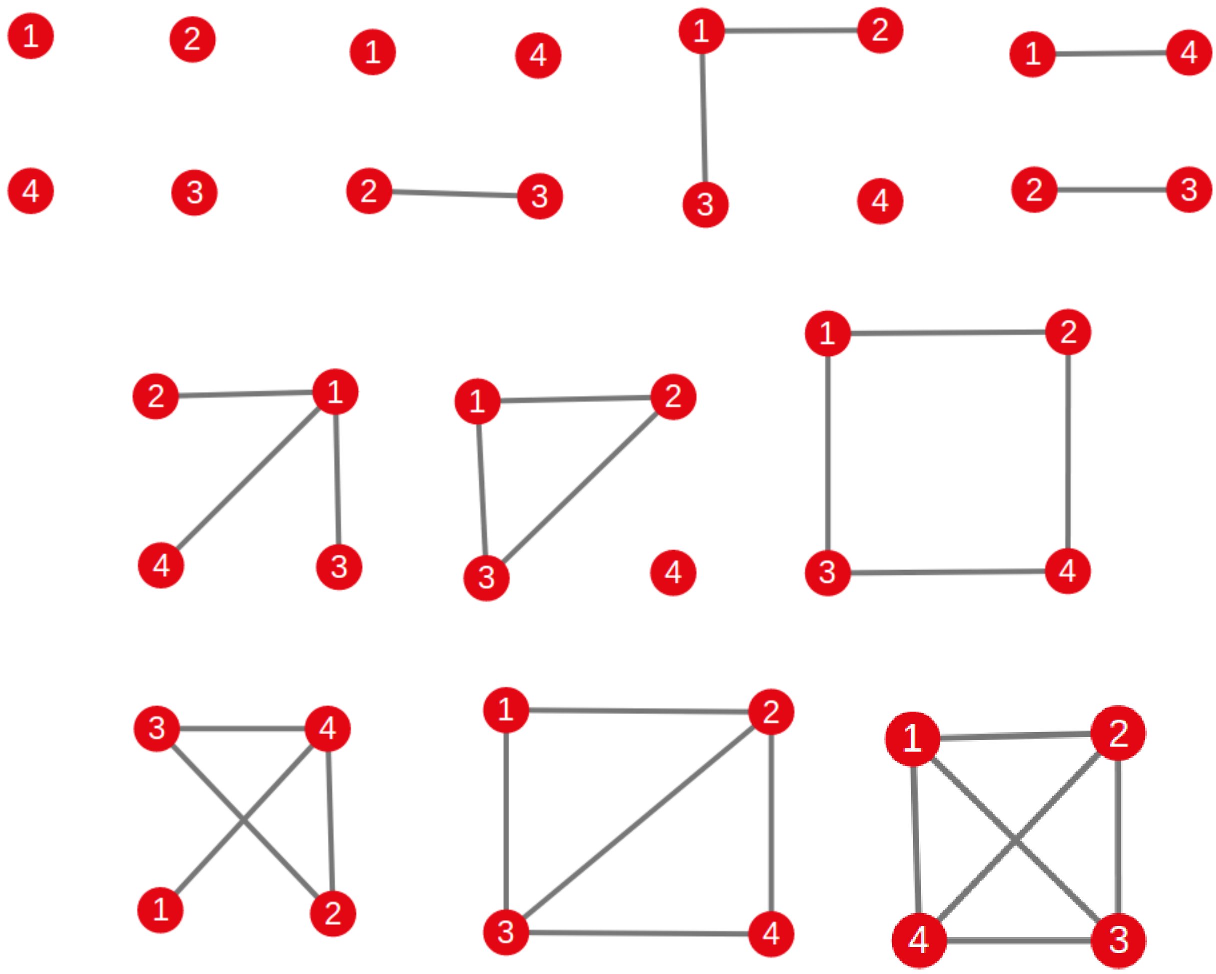




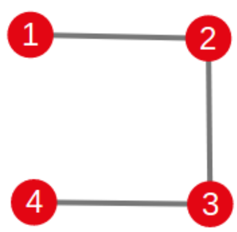


El automorfismo diferente a la identidad f(1)=2,f(2)=1,f(3)=3 para los cuatro casos.

Si V(G)=4



El automorfismo diferente a la identidad es f(1)=1,f(2)=3,f(3)=2,f(4)=4 para todos los casos de arriba.



El automorfismo diferente a la identidad es f(1)=4,f(2)=3,f(3)=2,f(4)=1 para este caso.

Por lo tanto todos los grafos de 2,3 y 4 vertices son no asimétricos,concluyendo que,**no existe grafo asimétrico G tal que 1$<|V(G)|<$5.**

2. Problema 8

Demostraremos que un grafo es bipartito $\Leftrightarrow$ no contiene un ciclo de longitud impar.
Solución.

($\Rightarrow$) Si G(V,E) es bipartito,existen dos conjuntos disjuntos V1 y V2 tales que V1 $\cup$ V2 = V. Luego,sea un vertice v perteneciente a algun ciclo del grafo G, este ciclo será de la forma:

$$(v,\{v,x\},x,\{x,y\},y,....,z,\{z,v\},v)$$

Supongamos que v pertenece a V1,y ya que en una rama no pueden existir dos elementos de V1,el siguiente vertice del ciclo pertenece a V2,el siguiente a V1,el siguiente a v2,etc.
De ésta manera los vertices son de V1 y de V2 de forma intercalada,entonces para que el ciclo vuelva al vertice v,debe pasar necesariamente por una cantidad par de vertices,siendo la cantidad de ramas tambien par, es decir la longitud del ciclo será par.

Suponer que v pertenece a v2 tambien nos llevará al mismo razonamiento.Por lo tanto,**no existe un ciclo de longitud impar en un grafo bipartito.**

($\Leftarrow$) Sea un grafo G, que no contiene un ciclo de longitud impar.
sea v un vertice fijo de una componente conexa de G. Elijamos un Conjunto V1 donde se alvergara a v y a los vertices que estan a una distancia par,elijamos tambien un conjunto V2 donde se alvergara a los vertices que estan a distancia impar del vertice v.

Debemos demostrar que V1 y V2 son disjuntos,o en otras palabras, Es posible que un vertice x este a una distancia par e impar de v a la vez?,es decir, Es posible que hayan dos caminos de distancia par e impar entre v y x?.
Si fuera esto posible,estos caminos formarian un ciclo de longitud impar, lo que por hipotesis es imposible.**V1 y V2 son disjuntos!**

Tambien hay que demostrar que no existan dos vertices a una distancia impar que sean adyacentes, e igualmente para el caso de distancia par.
Sean dos vertices a distancia impar de v,si estos son adyacentes,se forma un ciclo de longitud impar+impar+1=impar.**!Imposible!**
Sean dos vertices a distancia par de v,si estos son adyacentes,se forma un ciclo de longitud par+par+1=impar.**!Imposible!**

con lo cual no existen ramas,cuyos vertices pertenezcan a un mismo conjunto. Ahora,para otras componentes conexas de G,hacemos lo mismo,obteniendo elementos de V1 y V2,siguen siendo disjuntos y no hay ramas que esten en un mismo conjunto.
Concluimos que **G es bipartito con V1 y V2,conjuntos de bipartición.**