Polinomios de Taylor

EJERCICIO 5.-

Calcula aproximadamente $\sin(0.15)$ con error absoluto menor que 10^{-6}, utilizando un polinomio de Taylor de la función $f(x) = \sin(x)$ centrado en $x_0 = 0$. Representa gráficamente la función $f(x)$ y dicho polinomio.

SOLUCIÓN:

Definimos la función $f(x) = \sin(x)$

In [1]:
```
f(x)=sin(x)
```

In [2]:
```
f
```

Out[2]:
```
x |--> sin(x)
```

OBSERVACIÓN GENERAL:

Sabemos que la expresión del error para el polinomio de Taylor $P_n(x) = P_n(f, a)(x)$ de la función f centrado en el punto a, de grado $\leq n$, viene dada por

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{[a,x]}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

Por tanto, debemos estimar

$$M_n = \|f^{(n+1)}\|_{[a,x]}$$

EN EL CASO EN EL QUE NOS COMPETE

En concreto, para $x = 0.15$ y $a = 0$

$$|f(0.15) - P_n(0.15)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{[0,0.15]}}{(n+1)!}|0.15-0|^{n+1}$$

y estimamos

$$M_n = \|f^{(n+1)}\|_{[0,0.15]}$$

Como las sucesivas derivadas de $\sin(t)$ son $\cos(t), -\sin(t), -\cos(t)$, y $\sin(t)$, podemos concluir que $M_n = 1$ para todo n.

Por tanto, la cota es:

In [3]:
```
cota(n)=(0.15)^(n+1)/factorial(n+1)
```

Ahora buscamos un n para el que dicha cota sea menor que 10^{-6}:

In [4]:
```
n=1;
while cota(n)>=10^(-6):
    n=n+1
n
```

Out[4]:
```
4
```

Por tanto, $n = 4$ es suficiente y podemos trabajar con el polinomio de Taylor de orden 4. Calculamos dicho polinomio con el comando "taylor":

In [5]:
```
P(x)=taylor(f,x,0,4);
show(P(x))
```

$$-\frac{1}{6}x^3 + x$$

La aproximación pedida es

In [6]:
```
aprox=P(0.15).n();
aprox
```

Out[6]:
```
0.149437500000000
```

Comprobamos que el error real de esta aproximación es menor que 10^{-6}:

In [7]:
```
f(0.15)
```

Out[7]:
```
0.149438132473599
```

In [8]:
```
abs(f(0.15)-P(0.15))
```

Out[8]:
```
6.32473599215810e-7
```

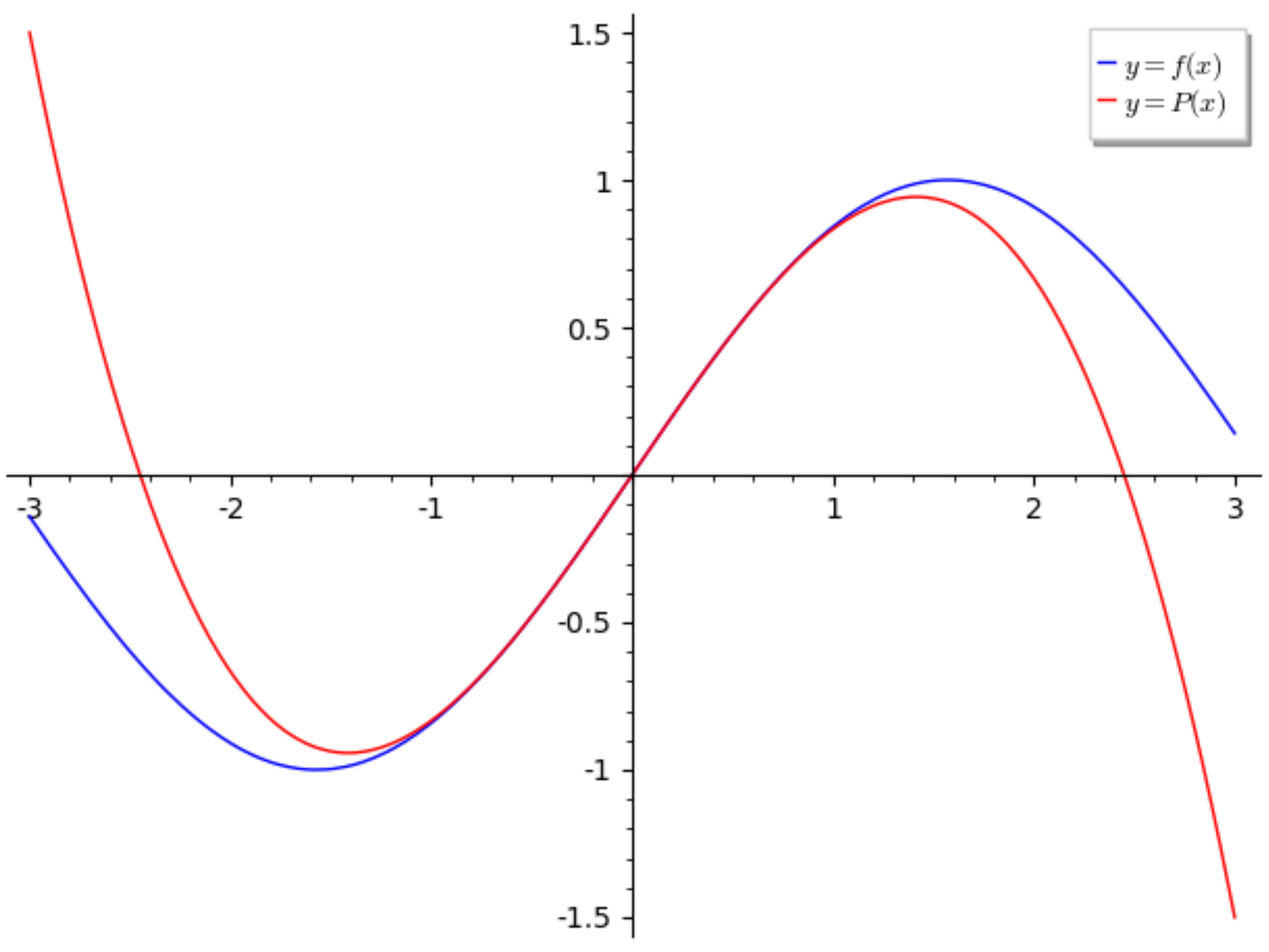
In [9]:
```
abs(f(0.15)-P(0.15)).n() <10^(-6).n()
```

Out[9]:
```
True
```

Hacemos una representación gráfica de la función $f(x)$ y el polinomio $P(x)$ en el intervalo $[-3, 3]$:

In [10]:
```
plot(f,(x,-3,3),legend_label='$y=f(x)$')+plot(P,(x,-3,3),legend_label='$y=P(x)$',color='red')
```

Out[10]:



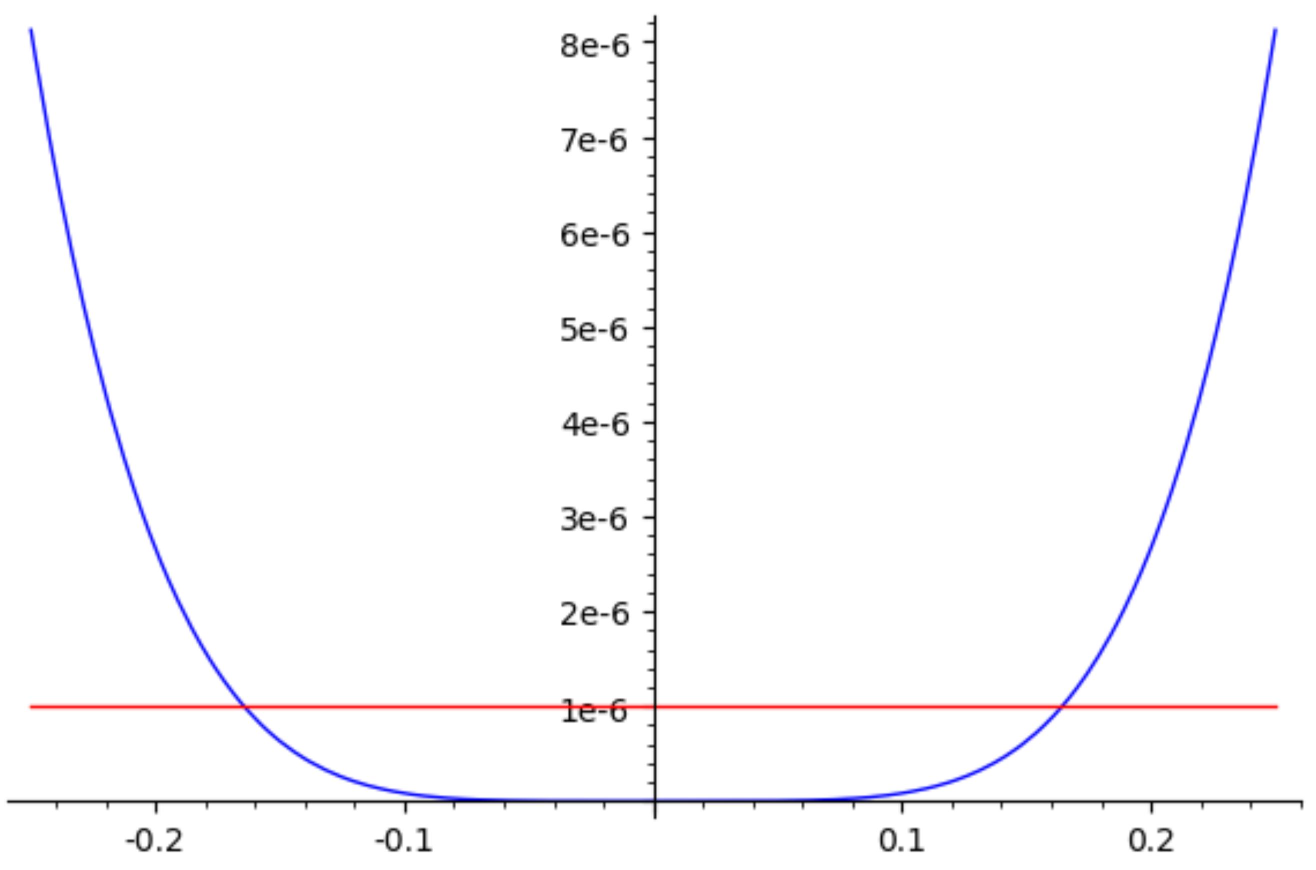
Se observa que $P(x)$ es una buena aproximación de $f(x)$ para valores de x próximos a 0.

OBSERVACIONES ADICIONALES:

Podemos verlo mejor dibujando la función de "error" $|f(x) - P(x)|$ en el intervalo $[-0.25, 0.25]$. Apreciamos con el plot que para x en el intervalo (-0.15,0.15), la aproximación $|f(x) - P(x)|$ es menor o igual que 10^{-6}.

In [11]:
```
plot(abs(f(x)-P(x)),(x,-0.25,0.25))+plot(10^(-6),(x,-0.25,0.25),color='red')
```

Out[11]:



Si queremos más precisión, tan sólo hay que encontrar los puntos de intersección de las dos curvas:

In [12]:
```
a=find_root (abs(f(x)-P(x)) - 10^(-6), -0.2,0)
a
```

Out[12]:
```
-0.16439633760318853
```

In [13]:
```
b=find_root (abs(f(x)-P(x)) - 10^(-6), 0,0.2)
b
```

Out[13]:
```
0.16439633760318853
```

Con lo cual el intervalo es donde se mantiene la cota de error 10^{-6} es:

In [14]:
```
[a,b]
```

Out[14]:
```
[-0.16439633760318853, 0.16439633760318853]
```