Polinomios de Taylor

EJERCICIO 4.-

Sea $f(x) = \log(x)$.

a) Calcula su polinomio de Taylor de orden 4 centrado en $x_0 = 2$.

b) Representa gráficamente $f(x)$ y el polinomio de Taylor anterior, en un intervalo donde se aprecie la diferencia entre ambas funciones.

c) Calcula una aproximación de $\log(2.5)$ utilizando el polinomio de Taylor.

d) Da una cota superior del error absoluto cometido por la aproximación (c).

e) Haz una gráfica donde se aprecie el error cometido, es decir, $|f - P|$, el punto $(2.5, 0)$ y la cota hallada en el apartado (d). Según la gráfica, intuitivamente, ¿para qué valores de x se podría aproximar $f(x)$ con un error menor que la cota hallada?

SOLUCIÓN:

Definimos la función $f(x) = \log(x)$

In [1]:
```
f(x)=log(x)
```

In [2]:
```
f
```

Out[2]:
```
x |--> log(x)
```

Apartado a) Calcula su polinomio de Taylor de orden 4 centrado en $x_0 = 2$.

El polinomio de Taylor de orden 4 centrado en el 2 es:

In [3]:
```
P(x)=taylor(f,x,2,4)
P(x)
```

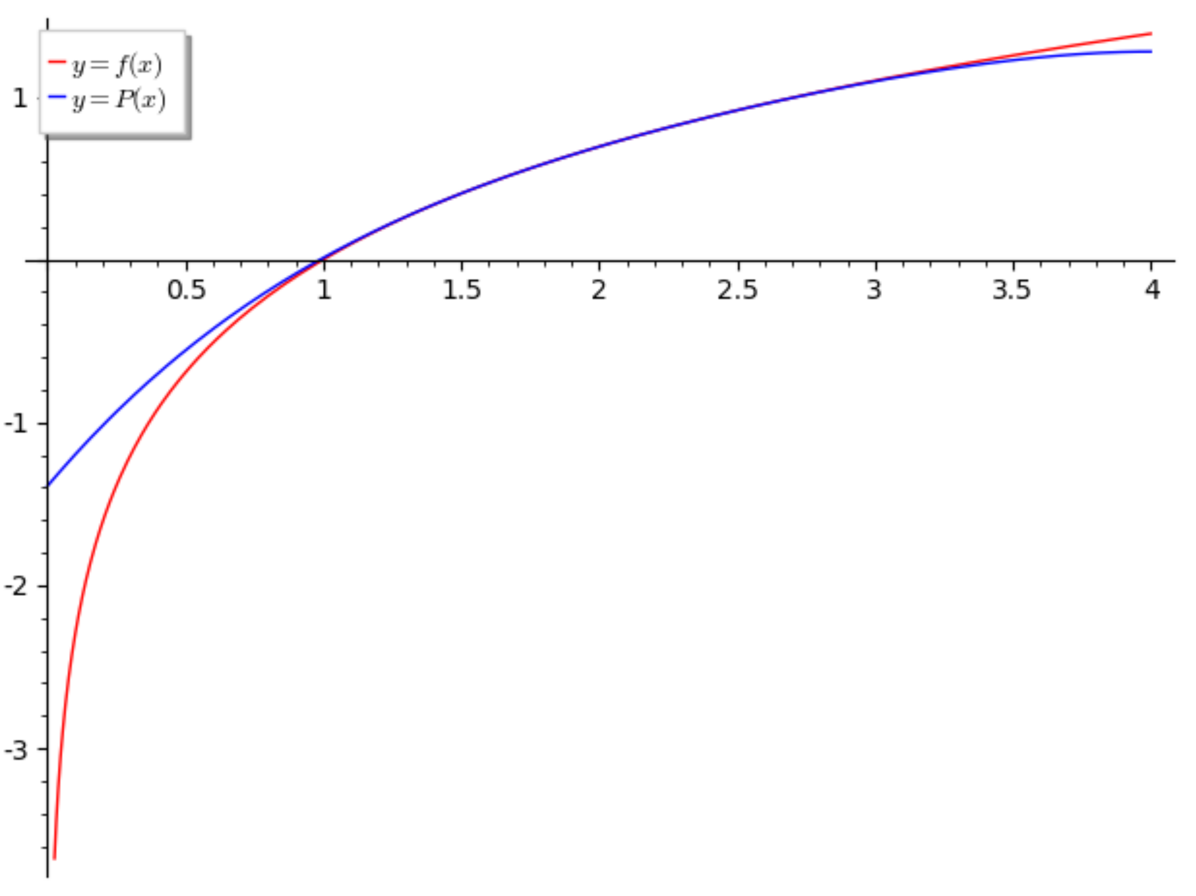
Out[3]:
```
-1/64*(x - 2)^4 + 1/24*(x - 2)^3 - 1/8*(x - 2)^2 + 1/2*x + log(2) - 1
```

Apartado b) Representa gráficamente $f(x)$ y el polinomio de Taylor anterior, en un intervalo donde se aprecie la diferencia entre ambas funciones.

La representación gráfica de $f(x)$ y su polinomio de Taylor es:

In [4]:
```
plot(f,(x,0,4),legend_label='$y=f(x)$',color='red')+plot(P,(x,0,4),legend_label='$y=P(x)$')
```

Out[4]:



Apartado c) Calcula una aproximación de $\log(2.5)$ utilizando el polinomio de Taylor.

La aproximación pedida es

In [5]:
```
aprox=P(2.5).n();
aprox
```

Out[5]:
```
0.916128951393279
```

¡CUIDADO! Si ponemos en el anterior comando

In [6]:
```
aprox=P(2.5);

aprox
```

Out[6]:
```
log(2) + 0.222981770833333
```

Apartado d) Da una cota superior del error absoluto cometido por la aproximación (c).

OBSERVACIÓN GENERAL:

Sabemos que la expresión del error para el polinomio de Taylor $P_n(x) = P_n(f, a)(x)$ de la función f centrado en el punto a, de grado $\leq n$, viene dada por

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{[a,x]}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

Por tanto, debemos estimar

$$M_n = \|f^{(n+1)}\|_{[a,x]}$$

EN EL CASO EN EL QUE NOS COMPETE

En concreto, para $x = 2.5$ y $a = 2$

$$|f(2.5) - P_n(2.5)| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{[2,2.5]}}{(n+1)!}|2.5-2|^{n+1}$$

y estimamos

$$M_n = \|f^{(n+1)}\|_{[2,2.5]}$$

Como las sucesivas derivadas de $\log(t)$ son $1/t$, $-1/t^2$, $2/t^3$, $-6/t^4$, podemos concluir que $f^{(n+1)} = (-1)^{n+1} n!/t^{n+1}$ para todo n.

En nuestro caso, $n = 4$, luego,

$$M_4 = 4!/2^5$$

Por tanto, la cota es:

In [7]:
```
M=factorial(4)*2^(-5)
M
```

Out[7]:
```
3/4
```

In [8]:
```
cota=M*0.5^(5)/factorial(5)
cota
```

Out[8]:
```
0.000195312500000000
```

Comprobamos que la cota es correcta.

In [9]:
```
error=abs(f(2.5)-P(2.5)).n()
error
```

Out[9]:
```
0.000161780480876561
```

In [10]:
```
error.n() < cota.n()
```

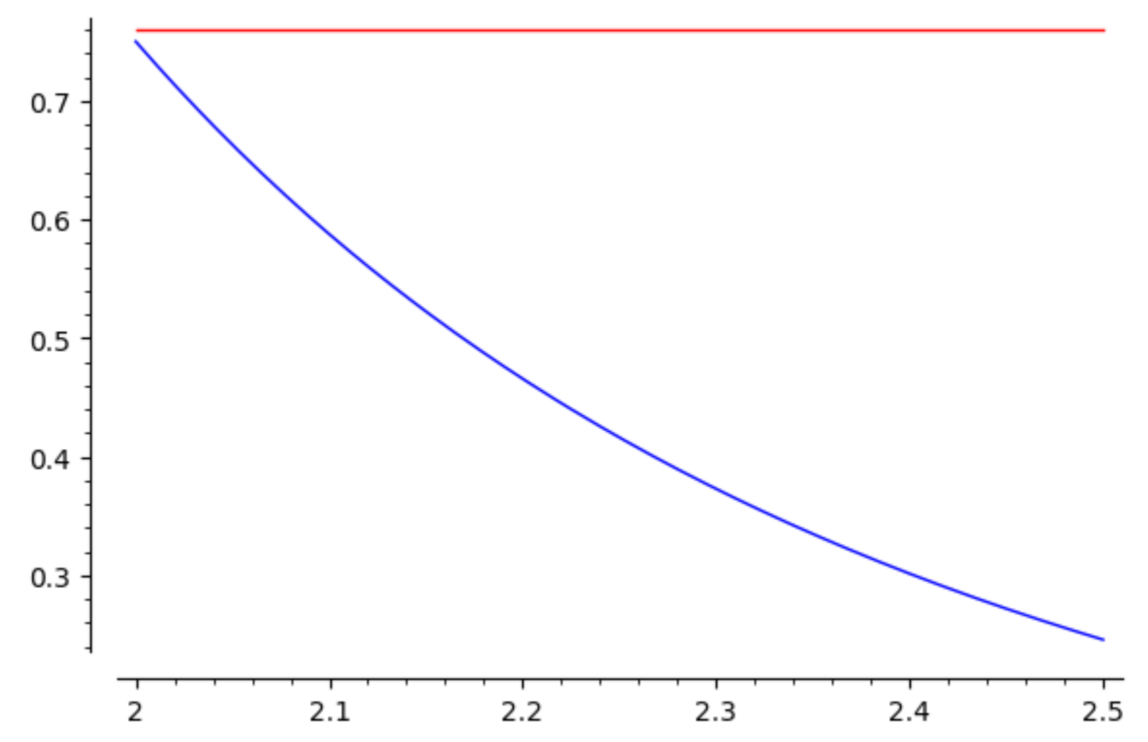
Out[10]:
```
True
```

OTRA FORMA DE ACOTAR:

Mostramos gráficamente la función y observamos a ojo cual es la cota del error.

In [11]:
```
plot(abs(diff(f(x),x,5)),(x,2,2.5))+plot(0.76,(x,2,2.5),color='red')
```

Out[11]:



Podemos tomar $M_4 = 0.76$ para la cota

In [12]:
```
cota2=0.76*0.5^(5)/factorial(5)
cota2
```

Out[12]:
```
0.000197916666666667
```

In [13]:
```
error.n() < cota2.n()
```

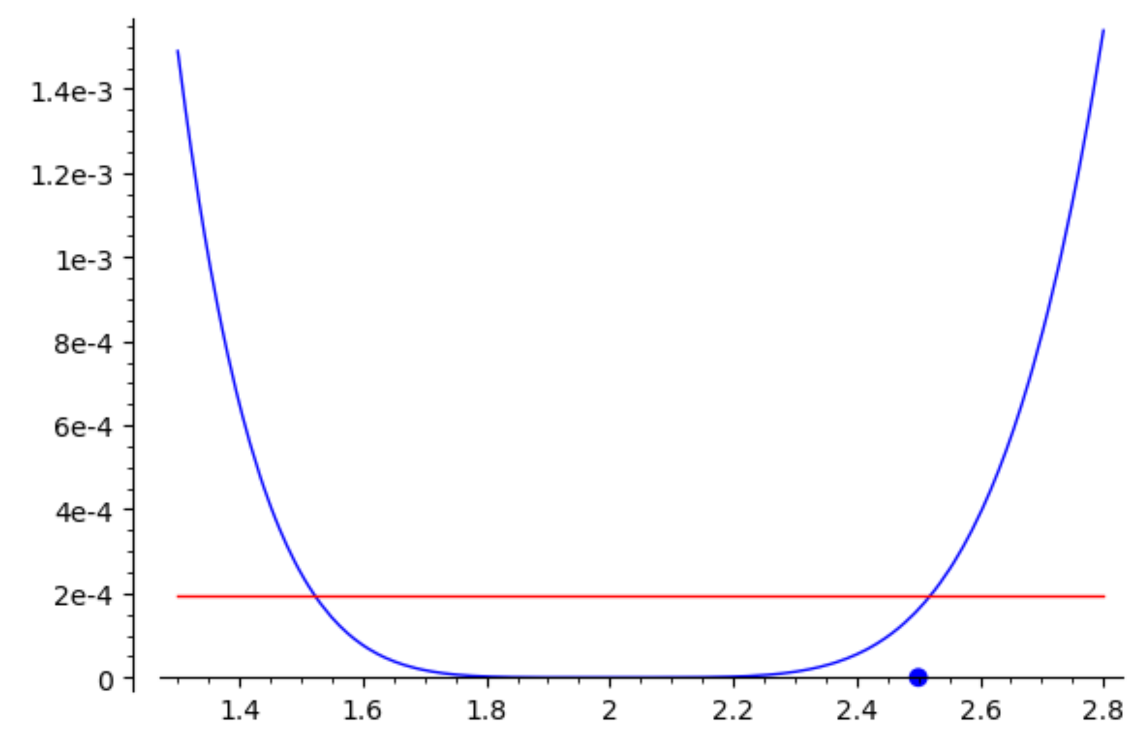
Out[13]:
```
True
```

Apartado e) Haz una gráfica donde se aprecie el error cometido, es decir, $|f - P|$, el punto $(2.5, 0)$ y la cota hallada en el apartado (d). Según la gráfica, intuitivamente, ¿para qué valores de x se podría aproximar $f(x)$ con un error menor que la cota hallada?

En la siguiente gráfica se aprecia que alrededor del intervalo $[1.3, 2.8]$ (más o menos) el polinomio aproxima la función con un error menor o igual que la cota hallada. Es más, el intervalo $[1.6, 2.5]$ se mantiene por debajo de la cota hallada. También dibujamos el punto $(2.5, 0)$ tal y como nos piden en el enunciado del problema.

In [14]:
```
plot(abs(f(x)-P(x)),(x,1.3,2.8))+plot(cota,(x,1.3,2.8),color='red')+point2d([[2.5,0]],size=50)
```

Out[14]:



Si queremos más precisión, tan sólo hay que encontrar los puntos de intersección de las dos curvas:

In [15]:
```
a=find_root (abs(f(x)-P(x)) - cota, 1,2 )
a
```

Out[15]:
```
1.5218912697109852
```

In [16]:
```
b=find_root (abs(f(x)-P(x)) - cota, 2,3 )
b
```

Out[16]:
```
2.5198997112842196
```

Con lo cual el intervalo es:

In [18]:
```
[a,b]
```

Out[18]:
```
[1.5218912697109852, 2.5198997112842196]
```