

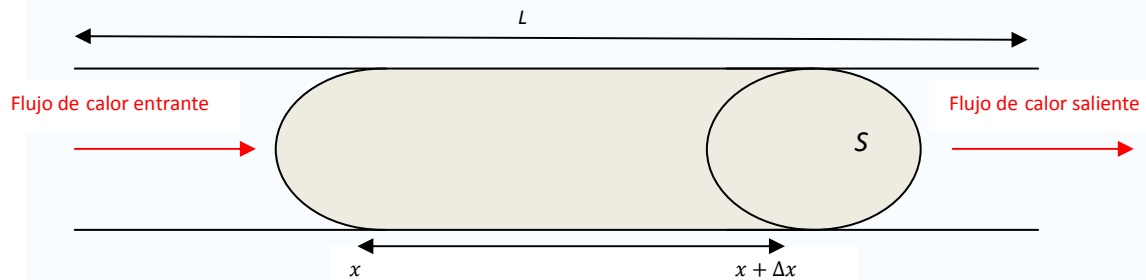
Deducción de la Ecuación del Calor en una dimensión

La ecuación del calor describe cómo se distribuye la temperatura en un cuerpo sólido en función del tiempo y el espacio. El interés en su estudio radica en las múltiples aplicaciones que tiene en diversas ramas de la ciencia. En las matemáticas generales, representa la típica ecuación en derivadas parciales parabólica y concretamente en la estadística está relacionada con los procesos aleatorios. Por otro lado, en el campo de la química nos predice, entre otros procesos de transferencia de calor, que si juntamos un material a 0° y otro a 100° , rápidamente la temperatura del punto de conexión entre ambos será de 50° .

A continuación de deduciremos cómo llegar a la expresión final de la citada ecuación en una dimensión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Imaginemos una vara de longitud L , sección transversal S , fina, homogénea (toda ella está compuesta por el mismo material) y completamente aislada del exterior. Estas consideraciones permitirán que las leyes físicas que emplearemos dependan únicamente de la posición x y del tiempo t .



En el proceso de derivación de la ecuación se emplearán las siguientes magnitudes:

$u(x, t) \equiv$ Temperatura de la vara para la posición x y el instante de tiempo t

$Q(x, t) \equiv$ Flujo (o cantidad) de calor en la dirección positiva de x para la posición x y el instante de tiempo t por unidad de superficie

Si aplicamos el Principio de Conservación de la Energía sobre la vara de cobre en el segmento $x + \Delta x$, obtendremos que:

Variación de la energía interna (calor) = Flujo de calor entrante – Flujo de calor saliente

La expresión matemática correspondiente será la siguiente:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q_{in}(x, t)S - Q_{ex}(x + \Delta x, t)S$$

Por otro lado, existe una ley física que relaciona que el calor $Q(x, t)$ con la masa m y la temperatura $u(x, t)$, llamada Ecuación Fundamental de la Termología, de la siguiente forma:

$$Q(x, t) = \lambda mu(x, t)$$

Esta ecuación describe el proceso de calentamiento de una fase de un cuerpo (por ejemplo, cómo el agua pasa de -50° a 0°), en la que λ es una constante característica del material (la vara en nuestro caso), determinada experimentalmente, que representa su calor específico.

Consideremos nuevamente, a continuación, el segmento infinitesimal $(x, x + \Delta x)$. Como la sección transversal de la vara tiene una superficie S , el volumen resultante será $S\Delta x$. Si ahora introducimos un nuevo parámetro, ρ , que represente la densidad del material, podremos establecer la siguiente relación:

$$\Delta m = \rho S \Delta x$$

Sustituyendo en la ecuación del calor específico llegaremos al resultado siguiente:

$$Q(x, t) = \lambda mu(x, t) = \lambda \rho S \Delta x u(x, t)$$

Derivando respecto al tiempo:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \lambda \rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}$$

De esta manera, hemos obtenido otra expresión para $Q(x, t)$. El siguiente paso consiste en combinarla con el principio de conservación del calor que enunciamos anteriormente. Por consiguiente:

$$\lambda \rho S \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} = S(Q_{in}(x, t) - Q_{ex}(x + \Delta x, t))$$

Dividiendo ambos miembros entre $S\Delta x$:

$$\lambda\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{Q_{in}(x, t) - Q_{ex}(x + \Delta x, t)}{\Delta x}$$

Ahora extraemos un signo menos como factor común del miembro de la derecha y nos queda lo siguiente:

$$\lambda\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t)}{\Delta x}$$

Hemos suprimido los subíndices porque se trata, al fin y al cabo, de la misma función evaluada en puntos diferentes.

Si, a continuación, hacemos tender Δx a 0:

$$\lambda\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Q(x + \Delta x, t) - Q(x, t)}{\Delta x}$$

El resultado es la derivada parcial de $Q(x, t)$ respecto a x . Reescribiendo la expresión:

$$\lambda\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Finalmente, aplicaremos la Ley de Fourier de Conducción del Calor, que nos indica que el flujo de calor se traslada en dirección opuesta al gradiente de la temperatura y es proporcional a él:

$$Q(x, t) = -k \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

La constante k hace referencia a la conductividad térmica del material. Si aplicamos esta ley a una única dimensión (la de x), obtendremos que:

$$Q(x, t) = -k \frac{\partial u}{\partial x}$$

Por lo tanto, lo único que nos resta para llegar a la ecuación final es sustituir esta última expresión, con lo que nos quedará que:

$$\lambda\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial \left(-k \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Agrupando todas las constantes en un miembro:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$\alpha^2 = \frac{k}{\lambda\rho}$ representa la «difusividad» de la vara.

A partir de este último paso se puede generalizar fácilmente esta expresión para las tres dimensiones. El resultado será:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

Santiago de Luxán Hernández

Bibliografía:

La realización del presente trabajo se ha basado en las fuentes citadas a continuación, especialmente en la segunda de ellas:

http://www.math.vt.edu/people/rogers/class_home/heat.pdf

<http://www.math.umass.edu/~sopas/Teaching/Spring2006/Math456/SP2006NOTES/heatder.pdf>

<http://www.math.ubc.ca/~feldman/m267/heat1d.pdf>

http://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation

