TRABAJO PRÁCTICO N° 7

FUNCIONES COMPUESTAS Y HOMOGENEAS

EJERCICIOS A RESOLVER POR EL DOCENTE EN LA CLASE PRÁCTICA:

1)f); **2)** c); **5) c)**; **6)**; **12)** b; **13**) c)

Repaso teórico.

1. *Revise la regla de la cadena para la derivación de funciones compuestas de una variable. Considere el caso de $y = f(u)$, siendo $u = g(x)$. Realice el esquema de variables para el caso planteado.*
2. *Enuncie, establezca hipótesis y tesis y demuestre la regla de la cadena para funciones de más de una variable. Considere el caso particular de la función $z= f(u, v, w)$, con $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ y $w =w(x,y)$, para determinar z_y. Realice el diagrama árbol de variables para el caso propuesto.*
3. *Extraiga del teorema de la Regla de la Cadena una regla práctica para determinar la derivada de una función compuesta respecto de cualquier variable intermedia o final.*
4. *Extienda la regla de la cadena para funciones de más de una variable. Considere el caso particular de la función $z= f(u, v, w)$, con $u = u(x, y)$, $v =(x, y)$ y $w =w(x,y)$, $x = x(t)$, $y = y (t)$, para determinar z_t. Realice el esquema de variables para el caso propuesto.*
5. *Generalice la regla de la cadena para una función de "n" variables independientes. Considere que $z= z (u_1, u_2, . . . ,u_n)$, con $u_i=u_i(x_1, x_2,...,x_m)$, para cada $i = 1,2,…n$, para determinar z_{xj}, para cada $j=1,2,…m$. Realice el diagrama árbol para esta generalización propuesta.*
6. *Defina función homogénea de grado k. Considere una función de n variables independientes $z= f(x_1, x_2,…, x_n)$.*
7. *Enuncie, establezca hipótesis y tesis y demuestre el teorema de Euler para funciones homogéneas.*

Consigna:

Emplee el software matemático que Ud. posea en su celular o en su computadora, para verificar los resultados obtenidos manualmente, en los siguientes ejercicios.

1) Para cada una de las siguientes funciones compuestas, halle, aplicando regla de la cadena, las derivadas que se indican.

a) $z = \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ $\quad x = re^t \quad y = re^{-t} \quad \frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial t}$

b) $z = x^2 + 2xy + y^2$ $\quad x = r\cos(t) \quad y = r\,sen(t) \quad \frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial t}$

c) $z = f(x, y)$ $\quad x = uv \quad y = \frac{u}{v} \quad \frac{\partial z}{\partial u} \quad \frac{\partial z}{\partial v}$

d) $z = arctg\left(\frac{1}{u}\right)$ $\quad u = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$

e) $u = x^2 y z$ $\quad x = \frac{r}{s} \quad y = r.e^s \quad z = r.e^{-s} \quad \frac{\partial u}{\partial r} \quad \frac{\partial u}{\partial s}$

f) $u = sen^{-1}(3x + y)$ $\quad x = r^2 e^s \quad y = sen(rs) \quad \frac{\partial u}{\partial r} \quad \frac{\partial u}{\partial s}$

g) $z = sen(5u + 2v)$ $\quad u = e^x + e^y \quad v = 2xy + y^2 \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}$

2) Encuentre la derivada total de las siguientes funciones:

a) $u = xe^x + ye^y$ $\quad x = \cos(t) \quad y = sen(t)$

b) $u = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad x = \ln(t) \quad y = e^t$

c) $u = \frac{t + e^x}{y - e^x}$ $\quad x = 3sen(t) \quad y = \ln(t)$

d) $w = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad x = e^t \cos(t) \quad y = e^t sen(t) \quad z = e^t$

e) $w = e^{2x+3y} \cos 4z$ $\quad x = \ln(t) \quad y = \ln(t^2 + 1) \quad z = t^2$

3) Si f es una función diferenciable en u, con u = b x - a y. Demuestre que z = f(u) verifica la ecuación:

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$ donde a, b son constantes.

4) Si f es una función diferenciable de las variables u y v, demuestre que: z = f(u,v)=f(x-y,y-x) verifica la ecuación:

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

5) Sea

a) $z = f(t)\, con\, t = \frac{x + y}{xy}$ pruebe que $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$

b) $w=f\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ pruebe que $x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}=0$

c) $w=f(x,y) \quad con\, x=r\cos(\Theta) \quad y=rsen(\Theta)$ pruebe que

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\Theta+\frac{\partial f}{\partial y}sen\Theta \quad y \quad \frac{\partial w}{\partial \Theta}=-r\left(\frac{\partial f}{\partial x}sen\Theta-\frac{\partial f}{\partial y}\cos\Theta\right)$$

d) $w=f(x,y) \quad con\, x=u-v \quad y=u+v$ pruebe que

$$\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}=0$$

6) A un tanque de forma de cilindro circular recto fluye agua a razón de 0.8π m^3/min. El tanque se ensancha de manera que su radio crece a razón de 0.2 cm/min ¿Con que rapidez sube la superficie del agua cuando el radio tiene 2m y el volumen de agua dentro del tanque es de 20π m^3?

7) Una pared forma un ángulo de 2 $\pi/3$ radianes con el suelo. Una escalera de 20m de longitud esta recargada contra dicha pared y su parte superior resbala a razón de 3m/seg. ¿Cuán rápido varía el área del triángulo formado por la escalera, la pared y el suelo cuando el ángulo con el suelo es de $\pi/6$ respecto de la escalera?

8) La altura de un cono circular recto se incrementa con una tasa de 40cm/min y el radio se incrementa con una tasa de 4cm/min. Obtenga la tasa de variación del volumen en el instante en que la altura es de 200cm y el radio es de 60cm.

9) Una cantidad de gas obedece la ley del gas ideal (PV=KT) con K=1.2 atm.litros/Kelvin, el gas está encerrado en un recipiente que se calienta a razón de 3 Kelvin/min. Si en el instante en que la temperatura es de 300 Kelvin, la presión es de 6 atm y decrece a razón de 0.1atm/min, calcule la variación del volumen en ese instante.

10) En un instante dado, la longitud de un cateto de un triangulo rectángulo es de 10 cm y crece a razón de 1cm/min y la longitud del otro cateto es de 12cm y decrece a razón de 2cm/min. Calcule la razón de cambio de la medida del ángulo agudo opuesto al cateto de 12cm en el instante dado.

11) Si f es una función diferenciable donde a y b son constantes, demuestre que $z=f\left(\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{3}ay^3\right)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$ay^2\frac{\partial z}{\partial x}+bx\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

12) En los siguientes ejercicios obtenga la derivada parcial que se indica:

a)- $u = sen(xy)$ $\quad x = 2z.e^{t}$ $\quad y = t^{2}.e^{-z}$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}$ $\dfrac{\partial u}{\partial z}$

b)- $u = x.e^{-y}$ $\quad x = arctg(r.s.t)$ $\quad y = \ln(3r.s + 5.s.t)$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}$ $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ $\dfrac{\partial u}{\partial r}$

c)- $u = 3x - 4y^{2}$ $\quad x = 5pq$ $\quad y = 3p^{2} - 2q$ $\quad \dfrac{\partial u}{\partial p}$ $\dfrac{\partial u}{\partial q}$

13) Determine si son homogéneas las siguientes funciones; y en tal caso verifique la identidad de Euler.

a) $f(x,y) = x^{3}y^{-5} - 9xy^{-3}$

b) $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{x+y+z}}{3y^{2}}$

c) $f(x,y) = ln\left(\frac{10^{x+y}}{3^{x-y}}\right)$

d) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^{2}} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

f) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt[3]{x^{2}+2y}}$