# Análisis Numérico I

# Trabajo Práctico Nº 1

**Patricio Iribarne Catella**

**Ana Czarnitzky Estrin**

**María Eugenia Mariotti**

**Fecha de Entrega: 27/04/2015**

# <u>Errores de truncamiento</u>

## Introducción

La función error definida $erf\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^x e^{-t^2}$ como nos da la probabilidad de que una serie de pruebas posean un valor a *x* unidades de la media, asumiendo que las pruebas poseen una distribución normal con media 0 y una desviación standard de $2/\sqrt{2}$ . Esta integral no puede evaluarse con funciones elementales por lo que deben utilizarse técnicas aproximadas.

a) y b)

A continuación realizamos la integración de la serie de “Mac Laurin” para $e^{-x^2}$ demostrando que $erf\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\cdot x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot k!}$ **( * )**. Luego verificamos que **( * )** y la ***función error*** que podemos expresar como:

$$erf\,(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k\cdot x^{2k+1}}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k+1)} \quad \textbf{( * * )}$$

se cumplen para ***k = 1, 2, 3, 4.***

## Definiciones

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}$$
$$e^{x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k!}=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+\ldots+\frac{x^{2k}}{k!}$$
$$e^{-x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$$
$$\int e^{-x^2}dx=\int\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int x^{2k}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

Como la función $e^{-x^2}$ es analítica en para todo los reales, es decir es derivable en cualquier x real y en un entorno del mismo, la sumatoria definida converge uniformemente para todo x real, y entonces se puede decir que la integral de la suma es la suma de las integrales de cada término de la suma.

<u>Error absoluto:</u> $\varepsilon=|R_n|=|f(x)-P(x)_n|$

## Función Error

Se puede definir a la función error mediante su definición formal como función de distribución de probabilidad.

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)k!}dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 0^{2k+1}}{(2k+1)k!}\right)$$

$$erf_1(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

También se puede definir a esta misma función mediante la siguiente expresión,

$$erf_2(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

(Siendo $(2k+1)!!$ el doble factorial de los números impares lo cual es equivalente a la productoria de los números impares. $(2k+1)!!=1*3*5*7*9*11*\ldots*(2k+1)$ )

## Comparación

Erf1 y Erf2 resultan ser dos expresiones, para la misma función, matemáticamente iguales. Esto quiere decir que si uno desarrollase las dos series se encontraría con que en ambas están los mismos términos. Se va a mostrar que, en particular, se cumple para los primeros cinco términos de cada expresión.

$$erf_1(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{216}\right)$$

$$erf_2(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!}=\text{¿¿}$$

$$\text{¿}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}-\frac{x^6}{6}+\frac{x^8}{24}\right)\left(x+\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+\frac{8}{105}x^7+\frac{16}{945}x^9\right)=\text{¿}$$

$$\text{¿}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x+\frac{2}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5+\frac{8}{105}x^7+\frac{16}{945}x^9-x^3-\frac{2}{3}x^5-\frac{4}{15}x^7-\frac{8}{105}x^9-\frac{16}{945}x^{11}+\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{3}x^7+\frac{2}{15}x^9+\frac{4}{105}x^{11}+\frac{8}{945}\right.$$

$$\text{¿}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^7}{42}+\frac{x^9}{216}+\frac{17}{3780}x^{11}+\frac{13}{1890}x^{13}+\frac{1}{2835}x^{15}+\frac{2}{2835}x^{17}\right)$$

Como se puede observar hay coincidencia de los primeros cinco términos.

## Aproximación

- Erf (1) aproximada con $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$ reemplazando x con el valor 1 y tal que le error absoluto cometido sea menor que $10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$ .

El error absoluto en este caso se puede escribir, teniendo en cuenta la definición anterior, como $\varepsilon=|R_n|=|f(x)-P(x)_n|$ donde f(x) representa la función como una serie de infinitos términos, y $P(x)_n$ es el polinomio aproximante a la serie, el cual resulta de tomar los primeros *n* términos de la serie original. Reemplazando por los datos,

$$\varepsilon(x)=|R_n|=\left|\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}\right|=\left|\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}\right| .$$

Reemplazando x por 1 resulta, $\varepsilon=|R_n|=\left|\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}\right|$

Buscando una cota para el error se encuentra que $\varepsilon=|R_n|=a_{n+1}$ siendo *n* la cantidad de términos utilizados en el polinomio aproximante y $a_{n+1}$ el siguiente término de la sucesión.
Esta relación se encuentra teniendo en cuenta que la serie es alternada y convergente para todo x real, en particular para 1, y entonces debe cumplir las condiciones de criterio de Leibniz, el cual dice que la $a_{n+1}\leq a_n$ y que $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ . Luego los términos de la sucesión son, en módulo, más pequeños que los anteriores, por ser una secesión decreciente. Entonces por ser alternada los signos + y – se alternan, y por consiguiente algunos términos se suman y otros se restan.
El primer término que resulta luego de realizar la diferencia para calcular el resto es el término $a_{n+1}$ . Supongamos que este término vale un cierto número "x" y que es positivo, entonces el siguiente término digamos "y" será negativo y en módulo más pequeño que "x". Resulta que tenemos x - y. El siguiente término va a ser positivo y menor en módulo que "y". Tenemos entonces x – y + z. Y esto es menor que x, ya que x – y + z < x => -y + z < 0 => z < y que es cierto por los supuestos planteados anteriormente. Se deduce que el valor de x nunca se va a alcanzar nuevamente al realizar la suma infinita de términos que contiene el error. Significa que el primer término que sobrevive luego de haber realizado la diferencia para hallar el error es la cota superior del mismo.

$$a_{n+1}=\frac{1}{(2n+3)(n+1)n!}$$

Para que el error sea menor que $10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$ resulta,

$10^{-4}$

$$\frac{1}{(2n+3)(n+1)n!}\leq\frac{1}{1000}\rightarrow 1000\leq(2n+3)(n+3)n!$$

Y esta desigualdad se cumple para n = 6.

$$P_6(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{6}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

$10^{-6}$

$$\frac{1}{(2n+3)(n+1)n!} \leq \frac{1}{1000000} \rightarrow 1000000 \leq (2n+3)(n+3)n!$$

Y esta desigualdad se cumple para n = 8.

$$P_8(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{8} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

$10^{-8}$

$$\frac{1}{(2n+3)(n+1)n!} \leq \frac{1}{100000000} \rightarrow 100000000 \leq (2n+3)(n+3)n!$$

Y esta desigualdad se cumple para n = 10.

$$P_{10}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{10} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

- Erf (1) aproximada con $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$ reemplazando x con el valor 1 y tal que le error absoluto cometido sea menor que $10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$ .

  El error absoluto en este caso se puede escribir, teniendo en cuenta la definición anterior, como $\varepsilon = |R_n| = |f(x) - P(x)_n|$ donde f (x) representa la función como una serie de infinitos términos, y $P(x)_n$ es el polinomio aproximante a la serie, el cual resulta de tomar los primeros *n* términos de la serie original. Reemplazando por los datos,

$$\varepsilon(x) = |R_n| = \left| \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!} \right| = \left| \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!} \right) \right|$$

$$\varepsilon(x) = |R_n| = \left| \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right| \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!} \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!} \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!} \right|$$

  Y como los términos son todos positivos se puede quitar el módulo y resulta,

$$\varepsilon(x) = |R_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

  Reemplazando x por 1 resulta, $\varepsilon = |R_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!!}$

  Como la serie es una sumatoria de términos positivos y además la serie converge para todo x real se puede utilizar el criterio de la integral. Es decir, existe una función f (x), continua, positiva y decreciente para todo x $\geq$ 1 tal que,

$$\int_1^{\infty} f(x)\, dx \text{ es convergente , con } f(x) \text{ definida de la siguiente , manera}:$$
$$\sum a_n, con\ a_n = f(n) \forall n \geq 1$$

  Luego de acuerdo con este criterio se cumple la siguiente estimación del resto al aproximar la serie con una determinada cantidad de términos *n* de la serie original.

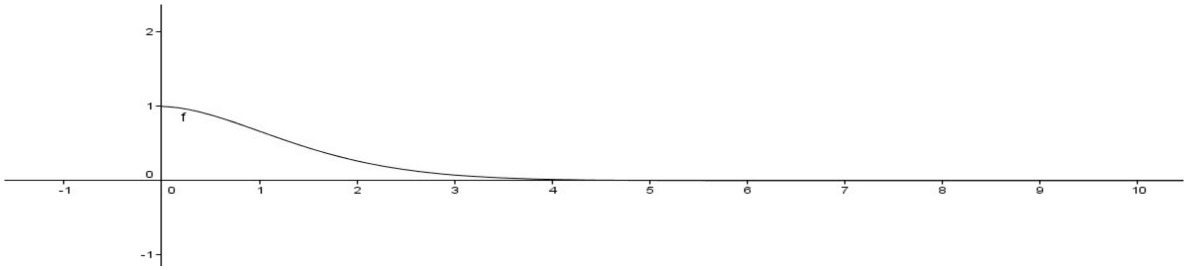
  Resto: $\int_{n+1}^{\infty} f(x)\, dx \leq R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\, dx$

  Significa, entonces que existe una cota para el resto, es decir, para el error, y esta es $\int_n^{\infty} f(x)\, dx$ .

  En este caso $f(x) = \frac{2^x}{(2x+1)!!} \rightarrow \left( teniendo\ en\ cuenta\ que\ (2k+1)!! = \frac{(2k+1)!}{2^k k!} \right) \rightarrow$

$$f(x) = \frac{2^{2x} x!}{(2x+1)!}$$

$$R_n \leq \int_n^{\infty} \frac{2^{2x} x!}{(2x+1)!} dx \text{ y esto debe ser menor que } 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$$




Entonces se obtienen los siguientes resultados,

$10^{-4}$

$$\int_7^{\infty} \frac{2^{2x} x!}{(2x+1)!} dx \cong 0{,}0000295858 \leq 10^{-4}$$

$$P_7(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=0}^{7} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

$10^{-6}$

$$\int_9^{\infty} \frac{2^{2x} x!}{(2x+1)!} dx \cong 0{,}0000003337106 \leq 10^{-6}$$

$$P_9(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=0}^{9} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

$10^{-8}$

$$\int_9^{\infty} \frac{2^{2x} x!}{(2x+1)!} dx \cong 0{,}000000002573091 \leq 10^{-8}$$

$$P_{11}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \sum_{k=0}^{11} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!!}$$

c) Estimamos el valor de ***erf(1)*** con la serie **( * ) .**

El algoritmo utilizado para calcular ***erf(1)*** ***serie1*** se incluye en el anexo de este trabajo.

d) Estimamos el valor de ***erf(1)*** con la serie **( * * ) .**

El algoritmo utilizado para calcular ***erf(1)*** ***serie2*** se incluye en el anexo de este trabajo.

e) Calculamos $erf(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^1 e^{-t^2} \cdot dt$ mediante el método de cuadratura de Gauss-Legendre con n valores.

Para ello partimos de la siguiente aproximación:

$$erf\,(1) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot e^{-\alpha^2_k} \quad \text{con } \boldsymbol{n = 2, 3, 4 \text{ y } 5.}$$

Para ello utilizaremos la tabla de valores de *"c"* y *"alfa"* proporcionados por el libro de Burden[1]:

| $\boldsymbol{n}$ | $\boldsymbol{\alpha_{n,\,i}}$ | $\boldsymbol{c_{n,\,i}}$ |
|---|---|---|
| 2 | 0.5773502692 | 1.0000000000 |
| | −0.5773502692 | 1.0000000000 |
| 3 | 0.7745966692 | 0.5555555556 |
| | 0.0000000000 | 0.8888888889 |
| | −0.7745966692 | 0.5555555556 |
| 4 | 0.8611363116 | 0.3478548451 |
| | 0.3399810436 | 0.6521451549 |
| | −0.3399810436 | 0.6521451549 |
| | −0.8611363116 | 0.3478548451 |
| 5 | 0.9061798459 | 0.2369268850 |
| | 0.5384693101 | 0.4786286705 |
| | 0.0000000000 | 0.5688888889 |
| | −0.5384693101 | 0.4786286705 |
| | −0.9061798459 | 0.2369268850 |

**Tabla de Resultados serie Gauss-Legendre inciso e.**

| **n** | ***erf(1)*** $_{\textit{Gauss-Legendre}}$ |
|---|---|
| **2** | 0.808519 |
| **3** | 0.845539 |
| **4** | 0.842524 |
| **5** | 0.836621 |

1 *"Numerical analysis"*, Burden R.L., Faires J.D. – 9na ed., Brooks Cole, 2010 (ISBN 10-0-538-73351-9) – tabla 4.12 pág. 232. Fuente: http://www.sfu.ca/~haoweiz/books/316/Numerical%20Analysis%209th%20Burden%20Faires.pdf

El algoritmo utilizado para calcular ***erf(1)*** $_{\textit{Gauss-Legendre}}$ se incluye en el anexo de este trabajo.

f)

**Tabla Comparativa Funcion erf() y algoritmos del inciso c y d.**

| n | erfa() | erfb() | erf() |
|---|---|---|---|
| **4** | 0.842699 | 0.842697 | 0.842701 |
| **6** | 0.842701 | 0.842701 | 0.842701 |
| **8** | 0.842701 | 0.842701 | 0.842701 |

g) Si quisiéramos evaluar la función erf(x) en x = 4 utilizando las tres series ocurriría lo siguiente:

Para las dos primeras series, es decir, para la definición a partir del desarrollo en serie de Taylor en $x_0 = 0$ de la función $e^{-x^2}$ y su posterior integración, y para la segunda serie, la cual es matemáticamente equivalente a la anterior, pasaría que, como se precisa calcular la función en un x muy aleado de donde se desarrolló la función originalmente, la cantidad de términos a tomar de la serie para garantizar los distintos errores pedidos serían mucho mayores que los que se precisaron para x = 1.

Para la tercer serie utilizada, es decir, el método numérico de integración Gauss-Legendre, pasa algo completamente diferente a lo anterior. Esto se debe a que al ser un método numérico, garantiza por así decirlo, que no importa cuál sea el intervalo de integración, los pasos para conseguir el resultado esperado van a ser los mismos siempre. En este caso en particular, la serie utilizada para calcular la función en x = 1, necesita ser modificada para poder obtener el resultado en x = 4, pero independientemente de este cambio, la cantidad de términos a sumar es la misma.

Se explica a continuación como se modificaría la serie a utilizar para calcular erf(4) mediante este método.

Teniendo en cuenta el siguiente cambio de variable para pasar de un intervalo [a,b] al intervalo [-1,1] $\int_{a}^{b} f(x)\cdot dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{((b-a)t+(b+a))}{2}\right)\frac{(b-a)}{2}\cdot dt$

$$erf(4)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{0}^{4} e^{-t^2}\cdot dt = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_{-1}^{1} e^{-4(t+1)^2}\cdot dt \quad » \quad erf(4)\approx\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{k=1}^{n} c_k\cdot e^{-4(\alpha_k+1)^2}$$

# Conclusiones

A partir de este trabajo práctico pudimos comprobar el alcance de los errores obtenidos en base a cálculos aproximados comparando a los mismos con un valor "real" proporcionado por la herramienta *Octave*.

Podemos notar cómo el error impuesto como cota influye en el resultado final. Por ejemplo, si observamos los resultados obtenidos en los incisos c y d vemos que cuando calculamos la serie con una cota de error de $\mathbf{10^{-4}}$ el valor difiere del proporcionado por *Octave*. En el caso de la serie usada en el inciso c (*) la diferencia con el valor obtenido por *Octave* es un poco menor que con la serie (**), a pesar de que ambas convergen, la serie (*) parecería hacerlo más rápidamente.

# Anexo

**I . ALGORITMOS**

A continuación exponemos los algoritmos utilizados para el cálculo de *erf(1)* en los puntos c, d y e.

Comentarios previos:

Los “*coeficientes c*” y los “*alphas”* son números que se utilizan en el método de la cuadratura de *Gauss-Legendre* y que mejoran el resultado al aproximar una integral por una suma de términos finitos. Este es el método que se utiliza en la tercer serie que se nos piden utilizar.

ALGORITMO INCISO **C**

```
function w = erfa(x, n)
   actual = 0;
   numerador = ((-1)^actual)*(x^(2*actual+1));
   denominador = (2*actual+1)*factorial(actual);
   an = numerador/denominador;
   sn = an;
   actual++;
   error = 10^(-n);

   while (abs(an) > error)
      numerador = ((-1)^actual)*(x^(2*actual+1));
      denominador = (2*actual+1)*factorial(actual);
      an = numerador/denominador;
      sn += an;
      actual++;
   endwhile;

   w = (2/(sqrt(pi)))*sn;
endfunction;
```

## ALGORITMO INCISO D

```
function w = erfb(x, n)
  actual = 0;
  numerador = (2^(2*actual))*(x^(2*actual+1))*factorial(actual);
  denominador = (factorial(2*actual+1));
  an = numerador/denominador
  sn = an;
  actual++;
  error = 10^(-n);

  while (abs(an) > error)
    numerador = (2^(2*actual))*(x^(2*actual+1))*factorial(actual);
    denominador = (factorial(2*actual+1));
    an = numerador/denominador;
    sn += an;
    actual++;
  endwhile;

  w = (2/(sqrt(pi)))*e^(-x^2)*sn;
endfunction;
```

AUXILIARES + INICIALIZACION

```
function [matriz_de_coeficientes_c] = inicializar_matriz_coeficientes_c()

    matriz_de_coeficientes_c =[
        1.0000000000, 1.0000000000, 0, 0, 0;
        0.5555555556, 0.8888888889, 0.5555555556, 0, 0;
        0.3478548451, 0.6521451549, 0.6521451549, 0.3478548451, 0;
        0.2360268850, 0.4786286705, 0.5688888889, 0.4786286705, 0.2360268850;
    ]

end

function [matriz_de_coeficientes_alpha] = inicializar_matriz_coeficientes_alpha()

    matriz_de_coeficientes_alpha =[
        0.5773502692, -0.5773502692, 0, 0, 0;
        0.7745966692, 0, -0.7745966692, 0, 0;
        0.8611363116, 0.3399810436, -0.3399810436, -0.8611363116, 0;
        0.9061798459, 0.5384693101, 0, -0.5384693101, -0.9061798459;
    ]

end

function [arreglo_de_resultados] = inicializar_arreglo()
    arreglo_de_resultados = [0 0 0 0];
end
```

## FUNCION ERROR CALCULADA PARA SERIE 3 ( INCISO E )

```
function [ resultados ] = erf_aproximada_cuadratura_de_Gauss_en_uno()

   [matriz_de_coeficientes_c]  = inicializar_matriz_coeficientes_c();
   [matriz_de_coeficientes_alpha] = inicializar_matriz_coeficientes_alpha();
   [resultados] = inicializar_arreglo();

   for n =2:5
      for k = 1:n
         alpha_cuadrado = (matriz_de_coeficientes_alpha(n-1,k)).^2;
         resultados(n-1) = resultados(n-1) + (matriz_de_coeficientes_c(n-1,k)) * (
e.^( (-1) * alpha_cuadrado ) ) /sqrt(pi) ;
      endfor
   endfor
end
```