

ANALISIS NUMERICO I
(75.12, 95.04, 95.13) – Curso nro. 6
Primer Cuatrimestre del 2015

TRABAJO PRÁCTICO nro. 2

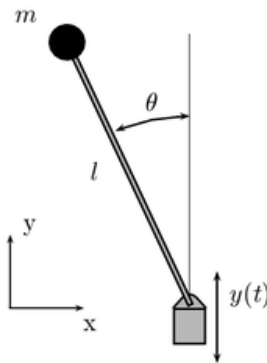
Fecha de Entrega: 15/06/2015.

Introducción al problema:

La ecuación de un péndulo físico invertido con una base oscilante puede expresarse mediante la siguiente expresión derivada de adimensionalizar las ecuaciones dinámicas que rigen el movimiento:

$$\theta'' + \beta \cdot \theta' - [\omega^2 - \varepsilon \cdot \phi(\tau)] \cdot \text{sen}(\theta) = 0 \quad (1)$$

En donde θ es el ángulo de apartamiento de la vertical medido en radianes, m es la masa del péndulo, l es la longitud de la barra rígida e $y(t)$ es la coordenada vertical de la base del péndulo. Se adjunta la figura con el detalle de las variables físicas del sistema.



$I = m \cdot l^2$ Momento de inercia del péndulo.

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{m \cdot l \cdot g}{I}} \text{ Velocidad angular con la base en reposo.}$$

$I = m \cdot l^2$ Momento de inercia del péndulo.

$y(t) = a \cdot \phi(\Omega \cdot t)$ Ecuación de movimiento de la base del péndulo (con amplitud del movimiento "a"). Esta función posee valor medio 0.

$\phi(t) = -\phi''(t)$ Derivada de la ecuación de movimiento de la base del péndulo.

$\tau = \Omega \cdot t$ Período del péndulo.

$$\beta = \frac{c}{m \cdot l^2 \cdot \Omega} = \frac{c}{I \cdot \Omega} \text{ Coeficiente de viscosidad dinámica adimensionalizada.}$$

$\varepsilon = \frac{a \cdot \Omega_0^2}{g} = \frac{a}{l}$ Relación entre la amplitud de la oscilación de la base y la longitud del péndulo. Sirve como variable adimensionalizada.

$\omega = \frac{\Omega_0}{\Omega}$ Relación entre las velocidades angulares en reposo de la base y con la base en movimiento.

NOTA IMPORTANTE: A partir de ahora solo se usarán las variables físicas adimensionalizadas.

Se pide**Parte a:**

Escriba la ecuación (1) adimensionalizada del sistema en la forma. Usar t en lugar de τ para el tiempo adimensionalizado, etc.

$$(E_2) \quad \begin{cases} z' = f(t, z) \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

Siendo $z = (\theta; \theta')$.

Parte b:

Resuelva el problema numéricamente en el intervalo $[t_0; t_1] = [0; 100]$ usando las rutinas “ode23” y “ode45” de Octave: $[T2, Y2] = \text{ode23}('yprima', T0, Y0, \text{options})$, y $[T4, Y4] = \text{ode45}('yprima', T0, Y0, \text{options})$ donde yprima es el nombre del m-file que calcula la función. Use el vector de condiciones iniciales $Y0$. Tomar como $\varphi(t) = \cos(t)$ y los siguientes parámetros para el caso adimensionalizado:

- b.1) $\beta = 0.1 \quad \varepsilon = 0.1 \quad \omega = 0.05 \quad \theta_0 = 0.1 \quad \theta'_0 = -0.1$
- b.2) $\beta = 0.1 \quad \varepsilon = 0.1 \quad \omega = 0.01 \quad \theta_0 = 0.2 \quad \theta'_0 = -0.2$
- b.3) $\beta = 0.1 \quad \varepsilon = 0.1 \quad \omega = 0.01 \quad \theta_0 = 0.05 \quad \theta'_0 = -0.05$
- b.4) $\beta = 0.1 \quad \varepsilon = 0.1 \quad \omega = 0.01 \quad \theta_0 = 0.1 \quad \theta'_0 = -0.1$
- b.5) $\beta = 0.1 \quad \varepsilon = 0.1 \quad \omega = 0.1 \quad \theta_0 = 0.1 \quad \theta'_0 = -0.1$
- b.6) $\beta = 0.1 \quad \varepsilon = 0.1 \quad \omega = 0.1 \quad \theta_0 = 0.01 \quad \theta'_0 = -0.01$

Haga una gráfica de la trayectoria del péndulo $\theta(t)$ para los 6 casos (use ambas funciones y compare los resultados). Pregunte como se utilizan dichas funciones en un ejemplo del taller de Octave.

Parte c:

Use el método de Euler, el de Runge-Kutta de orden 2 y el de Runge-Kutta de orden 4 para los 6 casos. Compare con los datos obtenidos en (b).

Pruebe con distintos valores del paso y estudie si los resultados son coherentes con la teoría numérica.

Para todas las comparaciones de convergencia use el valor de $t = 100$ adimensionalizado.

Es importante también en los 6 casos presentados indicar cuál es la posición de equilibrio del péndulo invertido.

Bibliografía:

[1] Landau y Lipschitz, "Mechanics", Pergamon (1976), 3rd ed. pp 93-95.

[2] A.A. Seyranian, A.P. Seyranian. "The stability of an inverted pendulum with a vibrating suspension point". Journal of Applied Mathematics and Mechanics 70 (2006) 754–761.

[3] Seyranian AP, Solem F, Pedersen P. "Stability analysis for multiparameter linear periodic systems". Arch Appl Mech 1999;69(3):160–80.

[4] Miles. "Directly Forced Oscillations of an inverted pendulum". Pys. Lett. A133, 295-297 (1988).