

Análisis Numérico I

Trabajo Práctico N° 2

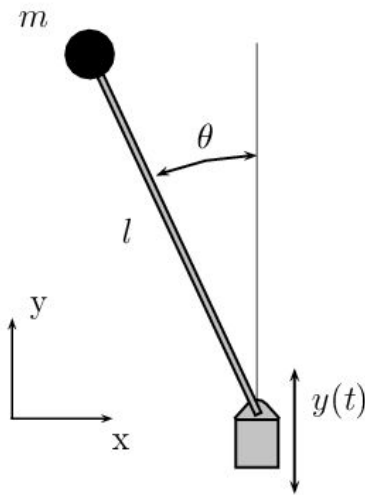
Patricio Iribarne Catella

Ana Czarnitzki Estrin

María Eugenia Mariotti

Fecha de Entrega: 16/05/2015

Introducción



La ecuación de un péndulo físico invertido con una base oscilante puede expresarse mediante la siguiente expresión, derivada de adimensionalizar las ecuaciones dinámicas que rigen el movimiento:

$$\ddot{\theta} + \beta \cdot \dot{\theta} - [\omega^2 - \varepsilon \cdot \varphi(t)] \sin(\theta) = 0$$

En donde θ es el ángulo de apartamiento de la vertical medido en radianes, m es la masa del péndulo, l es la longitud de la barra rígida e $y(t)$ es la función que simula el movimiento oscilatorio de la base del péndulo. A continuación se detallan las variables físicas que intervienen.

$$I = m \cdot l^2 \quad \text{Momento de inercia del péndulo.}$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{m \cdot l \cdot g}{I}} \quad \text{Velocidad angular con la base en reposo.}$$

$y(t) = a \phi(\Omega t)$ Ecuación de movimiento de la base del péndulo (con amplitud del movimiento "a"). Esta función posee valor medio 0.

$$\varphi(t) = -\phi''(\Omega t) \quad \text{Derivada de la ecuación de movimiento de la base del péndulo.}$$

$$\beta = \frac{c}{m \cdot l \cdot \Omega} = \frac{c}{I \cdot \Omega} \quad \text{Coeficiente de viscosidad dinámica adimensionalizada.}$$

$$\varepsilon = \frac{a \cdot \Omega_0^2}{g} = \frac{a}{l} \quad \text{Relación entre la amplitud de la oscilación de la base y la longitud del péndulo.}$$

$$\omega = \frac{\Omega_0}{\Omega} \quad \text{Relación entre las velocidades angulares en reposo de la base y con la base en movimiento.}$$

Deducción de la ecuación diferencial que rige el movimiento del péndulo invertido

$s = l \cdot \theta(\Omega t)$, $ds = \Omega l \cdot d\theta(\Omega t)$, $d^2s = \Omega^2 \cdot l \cdot d^2\theta(\Omega t)$
 $y(t) = a \phi(\Omega t)$, $y''(t) = a \Omega^2 \phi''(\Omega t)$ (teniendo en cuenta que $\varphi(t) = -\phi''(\Omega t)$)
 resulta que $y''(t) = -a \Omega^2 \varphi(t)$

De acuerdo a la segunda ley de Newton se tiene que $\sum F = m \cdot a$. La componente tangencial de esta ecuación vectorial es la siguiente: $\sum F_t = m \cdot a_t$. La aceleración tangencial se puede escribir como $\frac{d^2s}{dt^2}$ con lo cual resulta lo siguiente:

$$m \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = m \cdot g \cdot \sin(\theta) + m \cdot y''(t) \cdot \sin(\theta) - \frac{c}{l^2} \cdot v_t$$

- $m \cdot g \cdot \sin(\theta)$ Es el término relativo al peso de la masa en el eje tangencial.
- $m \cdot y''(t) \cdot \sin(\theta)$ Es el término relativo a la fuerza que siente la masa del péndulo debido a la base oscilante en el eje tangencial.
- $\frac{c}{l^2} \cdot v_t$ Es el término relativo a la fuerza que siente la masa del péndulo debido a la viscosidad del medio.

(Dividiendo m.a.m por la masa "m" y reemplazando a $v_t = \frac{ds}{dt}$)

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \cdot \sin(\theta) + y''(t) \cdot \sin(\theta) - \frac{c}{m \cdot l^2} \cdot \frac{ds}{dt}$$

(Realizando el cambio de variable de $s = l \cdot \theta(\Omega t)$ y sus respectivos diferenciales escritos anteriormente)

$$l \cdot \Omega^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = g \cdot \sin(\theta) + y''(t) \cdot \sin(\theta) - \frac{c \cdot \Omega}{m \cdot l} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

(Dividiendo m.a.m por $l \cdot \Omega^2$)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g \cdot \sin(\theta)}{l \cdot \Omega^2} + \frac{y''(t) \cdot \sin(\theta)}{l \cdot \Omega^2} - \frac{c}{m \cdot l^2 \cdot \Omega} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{Sustituyendo } y''(t) = -a \Omega^2 \varphi(t))$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g \cdot \sin(\theta)}{l \cdot \Omega^2} + \frac{-a \cdot \varphi(t) \cdot \sin(\theta)}{l} - \frac{c}{m \cdot l^2 \cdot \Omega} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

(Realizando las sustituciones $\frac{g}{l \cdot \Omega^2} = \omega^2$, $\frac{-a}{l} = \epsilon$, $\frac{c}{m \cdot l^2 \cdot \Omega} = \beta$)

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \omega^2 \cdot \sin(\theta) - \varepsilon \cdot \varphi(t) \cdot \sin(\theta) - \beta \cdot \frac{d \theta}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 \theta}{dt^2} = [\omega^2 - \varepsilon \cdot \varphi(t)] \cdot \sin(\theta) - \beta \cdot \frac{d \theta}{dt}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \beta \frac{d \theta}{dt} - [\omega^2 - \varepsilon \cdot \varphi(t)] \cdot \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta'' + \beta \cdot \theta' - [\omega^2 - \varepsilon \cdot \varphi(t)] \cdot \sin(\theta) = 0$$

Parte a:

$$\theta'' + \beta \cdot \theta' - [\omega^2 - \varepsilon \cdot \varphi(t)] \cdot \text{sen}(t) = 0$$

$$\theta' = z$$

$$z' = [\omega^2 - \varepsilon \cdot \varphi(t)] \cdot \text{sen}(t) - \beta \cdot z$$

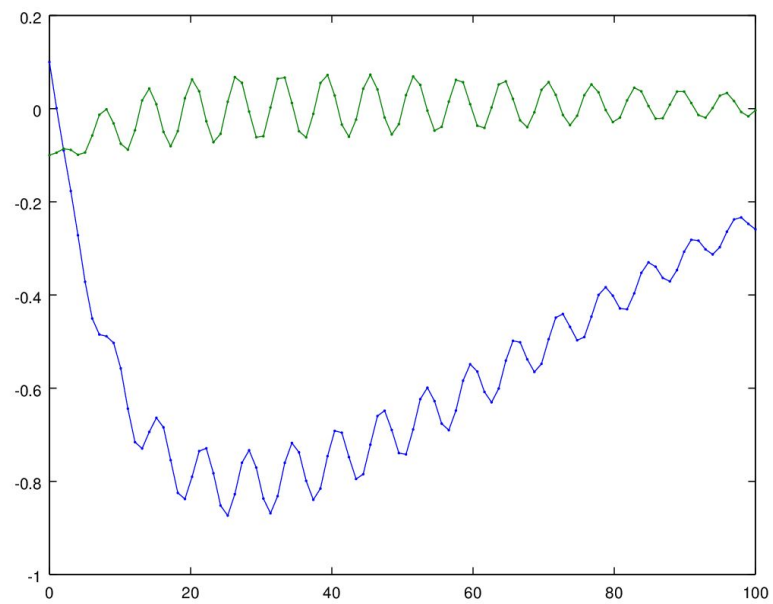
$$\theta(t_0) = \theta_0$$

$$z(t_0) = z_0 = \theta'_0$$

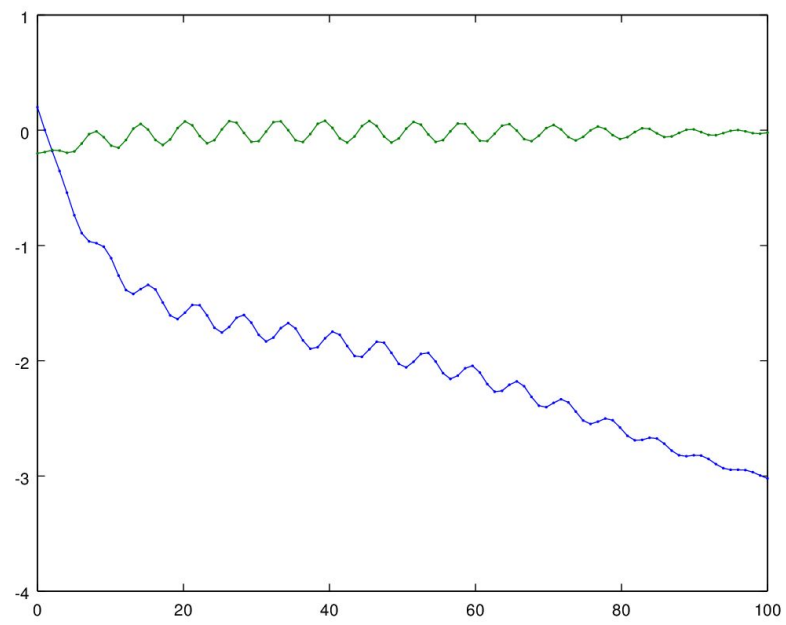
Parte b:

1. Ode23:

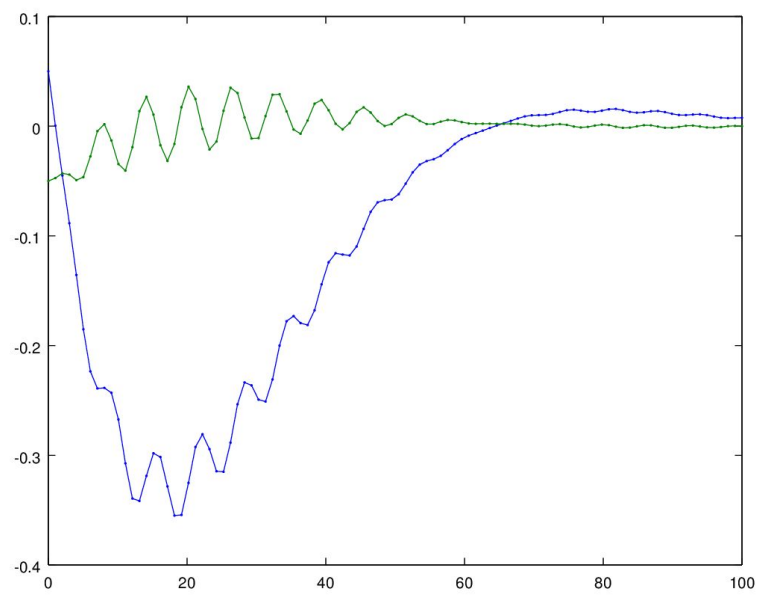
Caso 1:



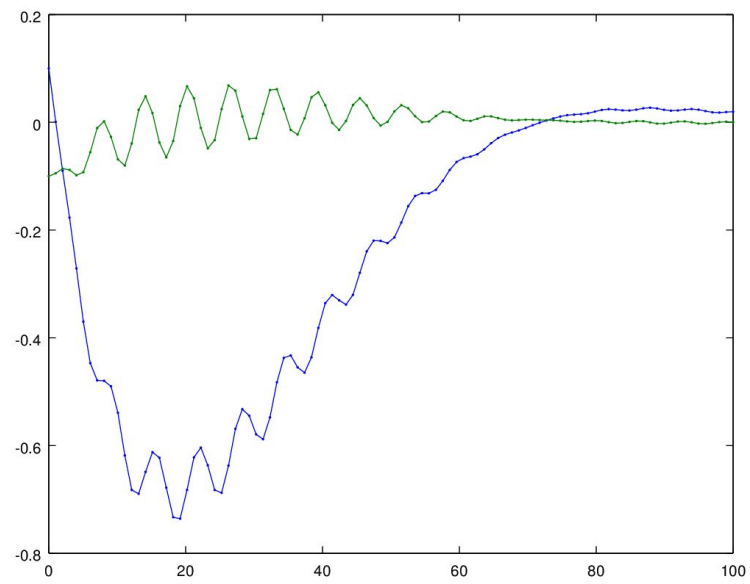
Caso 2:



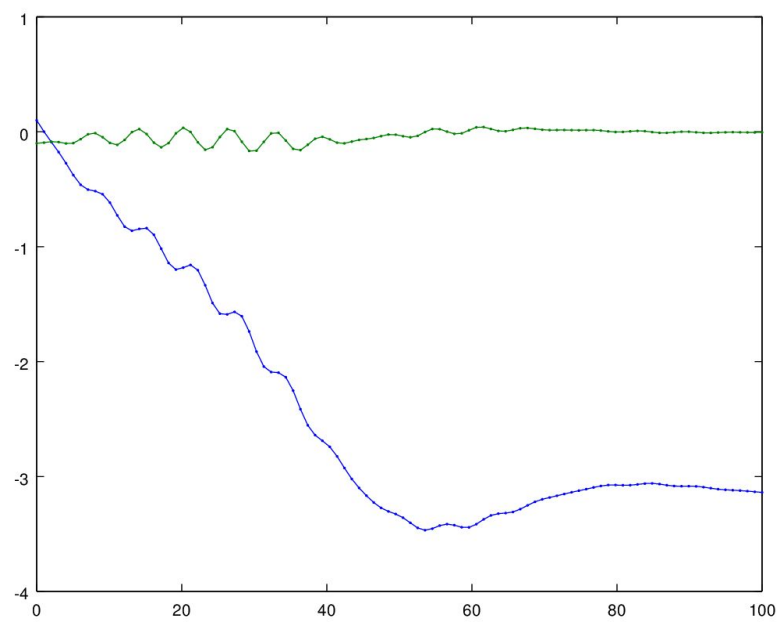
Caso 3:



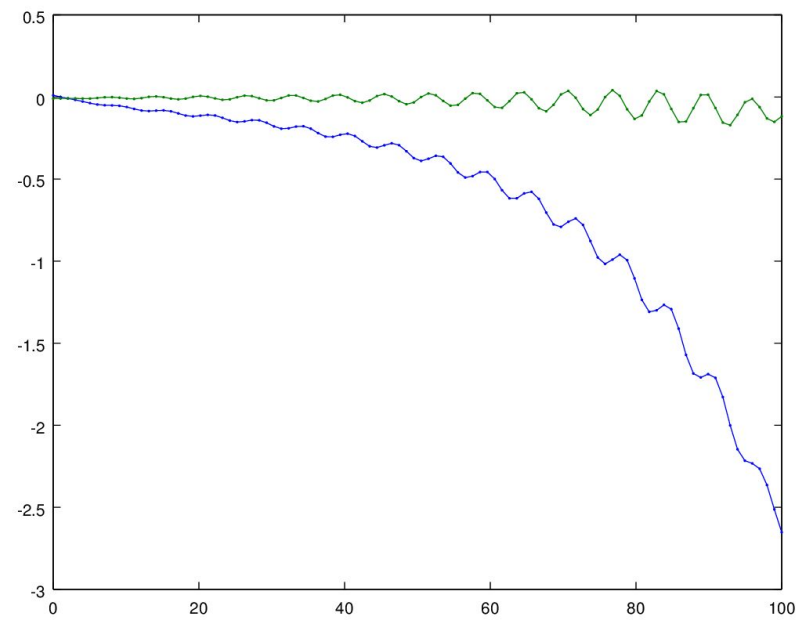
Caso 4:



Caso 5:

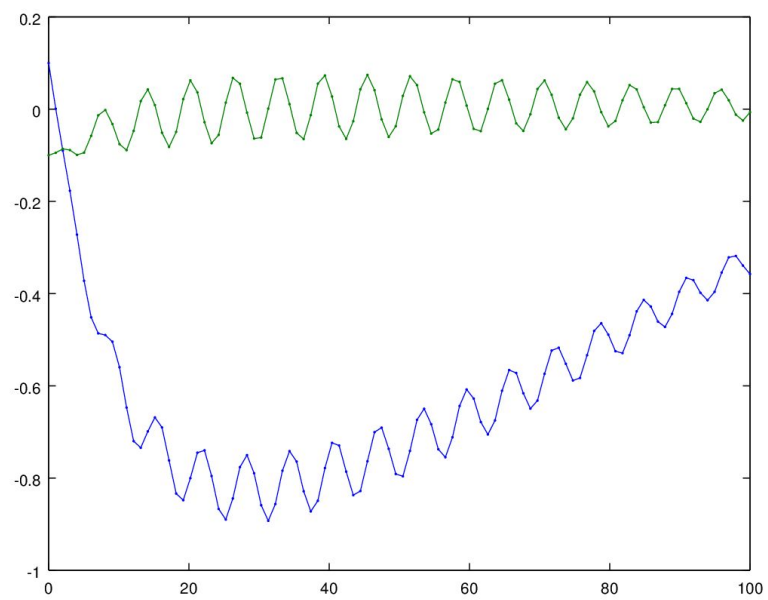


Caso 6:

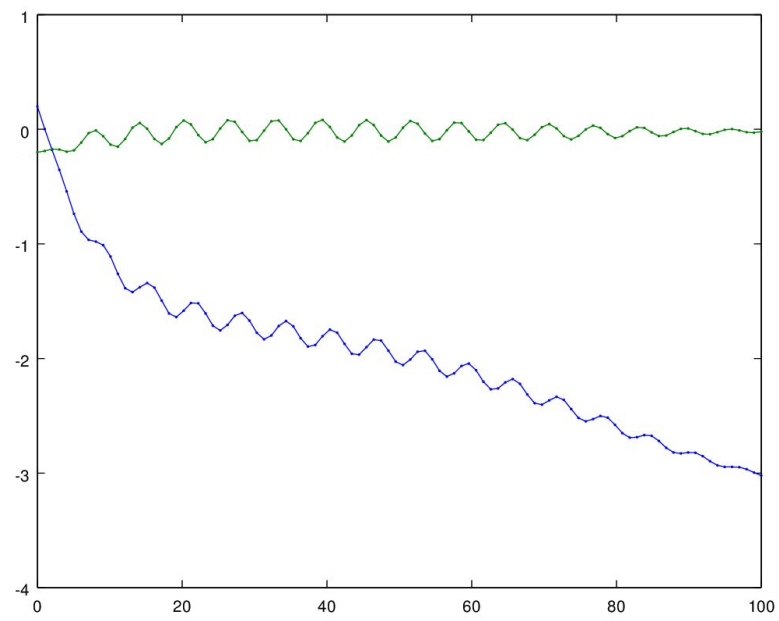


Ode45:

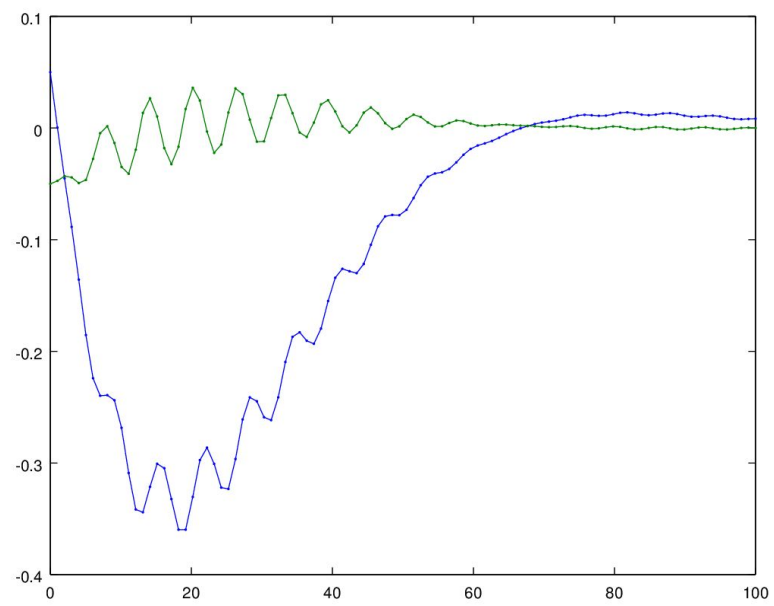
Caso 1:



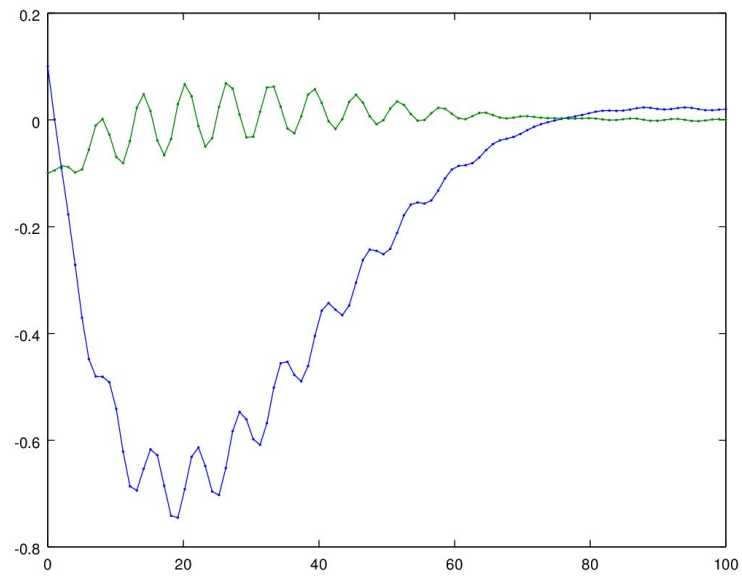
Caso 2:



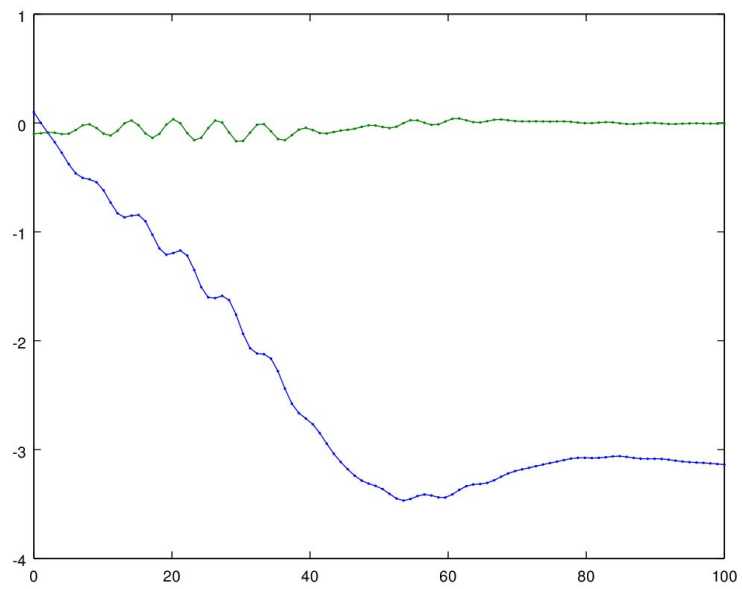
Caso 3:



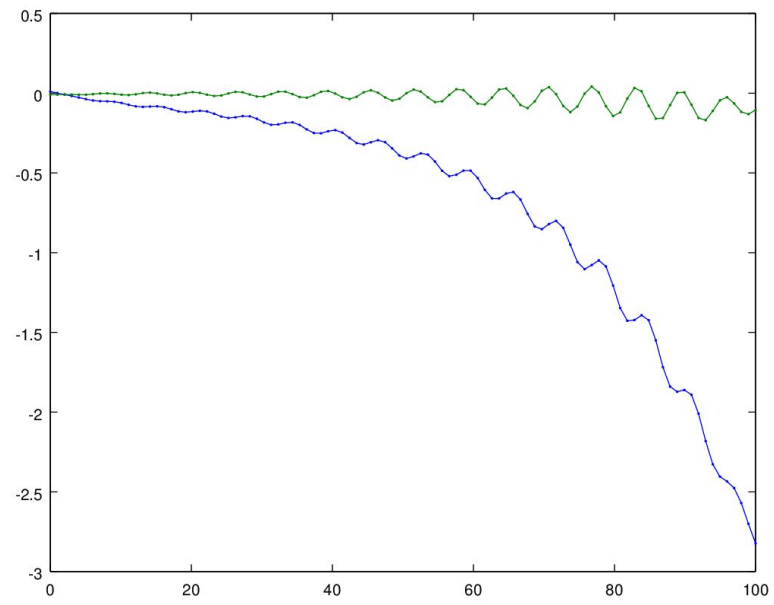
Caso 4:



Caso 5:

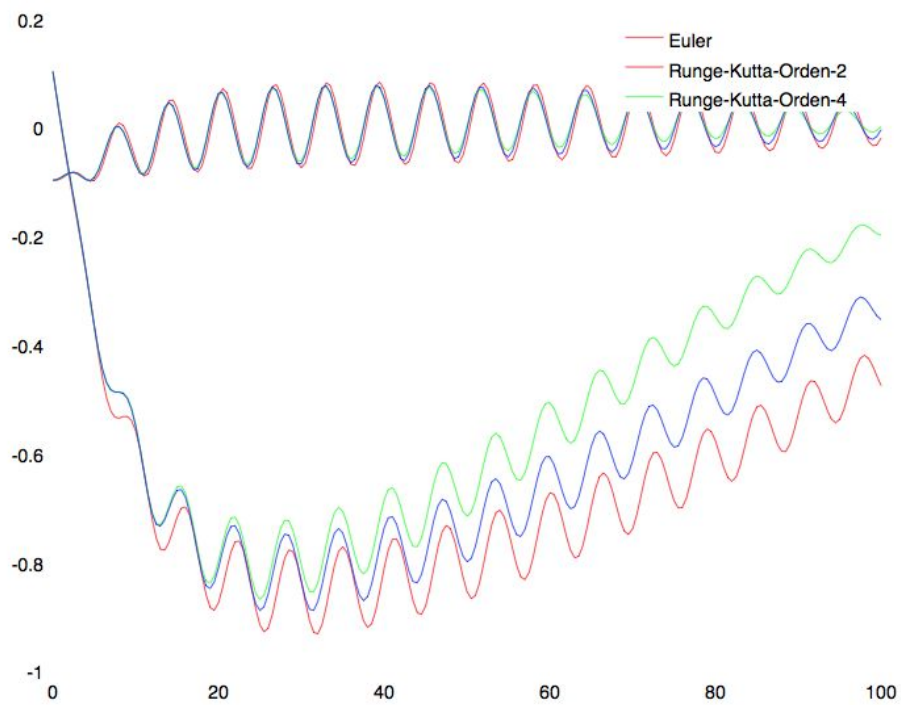


Caso 6:

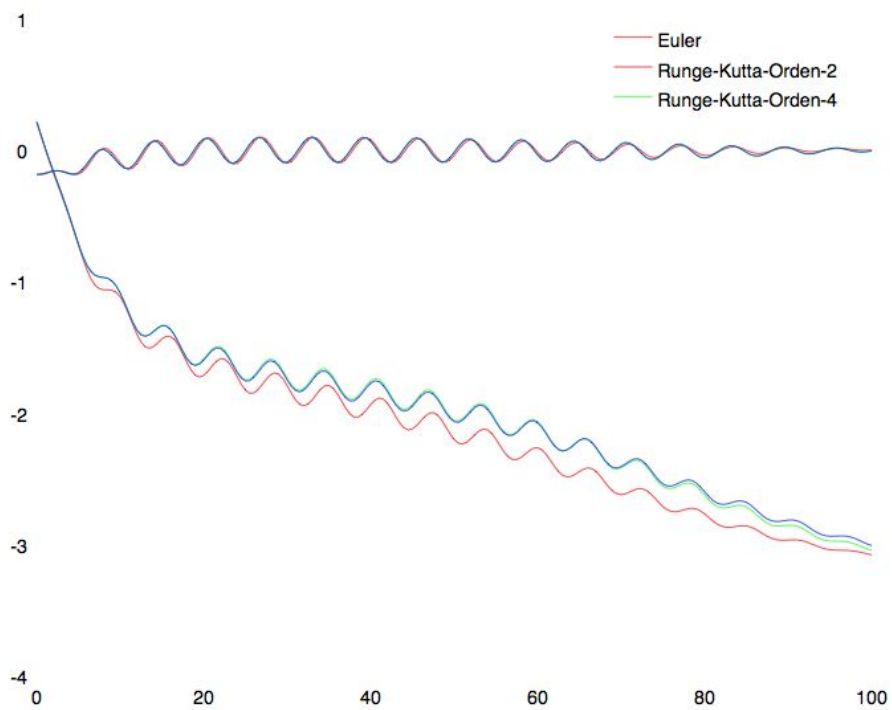


Parte c:

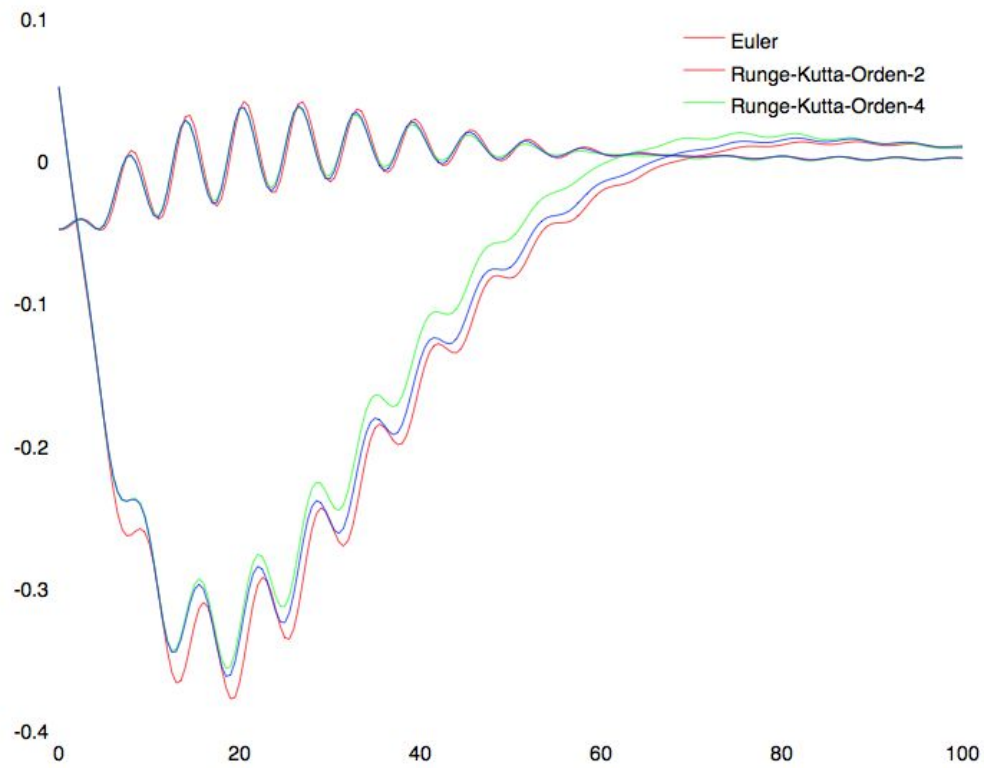
Caso 1:



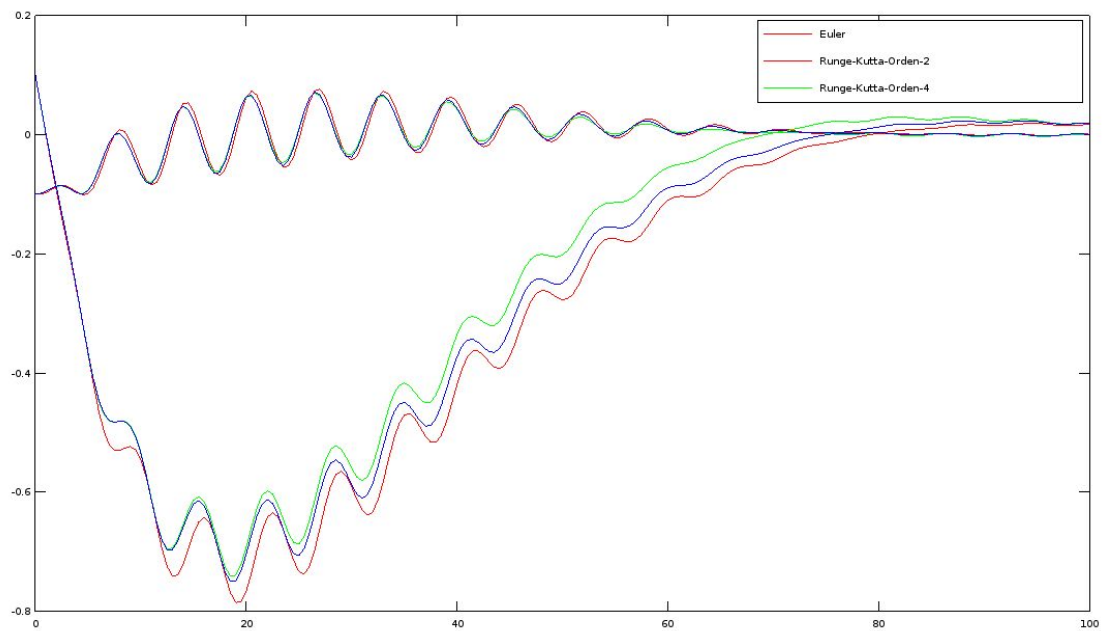
Caso 2:



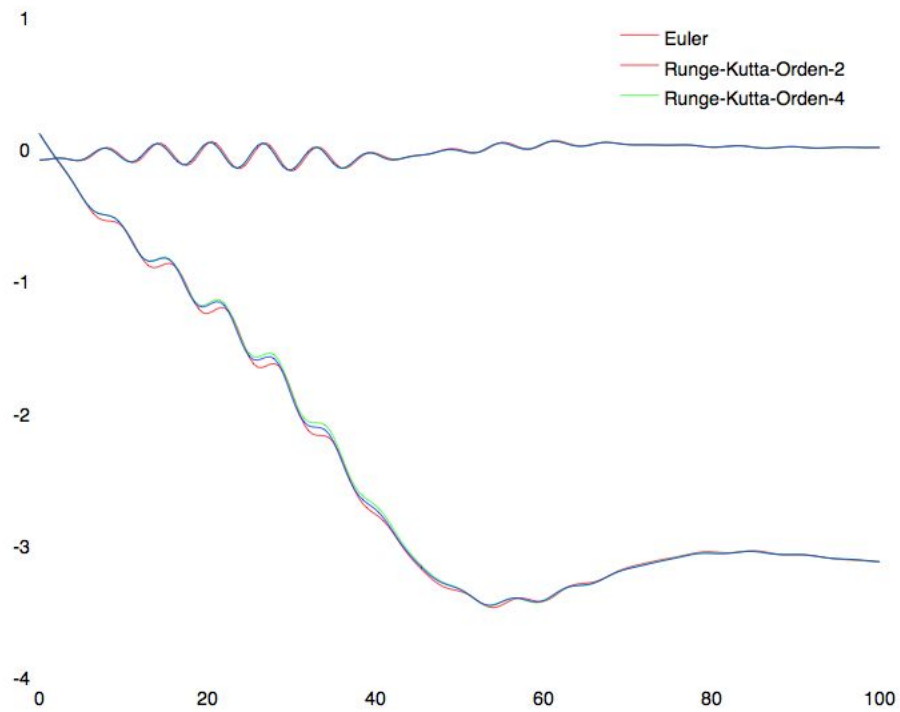
Caso 3:



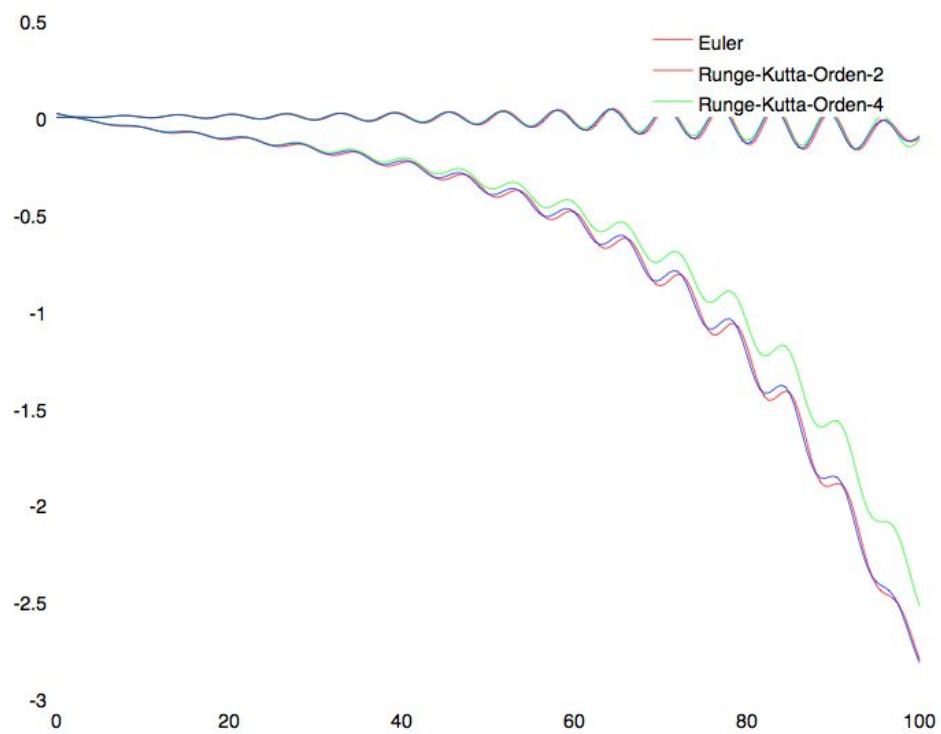
Caso 4:



Caso 5:



Caso 6:



Código fuente

I-Algoritmos usados para el trabajo práctico:

Euler:

```
function [T U] = Euler_SEDO(f,a,b,u0,h)

% ENTRADA
% f nombre de la funcion
% a y b extremos izquierdo y derecho del intervalo
% h tamaño de paso
% u0 condicion inicial

% SALIDA
% T vector de las abscisas
% U vector de las ordenadas de la función y su derivada

M = (b-a)/h;
N = length(u0);

T = zeros(M+1,1);
U = zeros(M+1,N);

T = a:h:b;
T = T';

for i = 1:N
    U(1,i) = u0(i);
end

for j = 1:M
    U(j+1,:) = U(j,:) + h*feval(f,T(j),U(j,:));
end
```

Runge-Kutta orden 2:

```
function [T U] = Runge_Kutta_orden2_SEDO(f,a,b,u0,h)
```

```
%ENTRADA
```

```
% f nombre de la funcion
```

```
% a y b extremos izquierdo y derecho del intervalo
```

```
% h tamaño de paso
```

```
% u0 condicion inicial
```

```
% SALIDA
```

```
% T vector de las abscisas
```

```
% U vector de las ordenadas de la función y su derivada
```

```
M = (b-a)/h;
```

```
N = length(u0);
```

```
T = zeros(M+1,1);
```

```
U = zeros(M+1,N);
```

```
K = zeros(1,N);
```

```
Q = zeros(1,N);
```

```
T = a:h:b;
```

```
T = T';
```

```
for i = 1:N
```

```
    U(1,i) = u0(i);
```

```
end
```

```
for j = 1:M
```

```
    K(1,:) = h*feval(f,T(j),U(j,:));
```

```
    Q(1,:) = h*feval(f,T(j) + h,U(j,:) + K(1,:));
```

```
    U(j+1,:) = U(j,:) + 0.5*(K(1,:) + Q(1,:));
```

```
end
```


Runge-Kutta orden 4:

```
function [T U] = Runge_Kutta_orden4_SEDO(f,a,b,u0,h)
```

```
%ENTRADA
```

```
% f nombre de la funcion
```

```
% a y b extremos izquierdo y derecho del intervalo
```

```
% h tamaño de paso
```

```
% u0 condicion inicial
```

```
% SALIDA
```

```
% T vector de las abscisas
```

```
% U vector de las ordenadas de la función y su derivada
```

```
M = (b-a)/h;
```

```
N = length(u0);
```

```
T = zeros(M+1,1);
```

```
U = zeros(M+1,N);
```

```
K = zeros(1,N);
```

```
Q = zeros(1,N);
```

```
W = zeros(1,N);
```

```
R = zeros(1,N);
```

```
T = a:h:b;
```

```
T = T';
```

```
for i = 1:N
```

```
    U(1,i) = u0(i);
```

```
end
```

```
for j = 1:M
```

```
    K(1,:) = h*feval(f,T(j),U(j,:));
```

```
    Q(1,:) = h*feval(f,T(j) + 0.5*h,U(j,:) + 0.5*K(1,:));
```

```
    W(1,:) = h*feval(f,T(j) + 0.5*h,U(j,:) + 0.5*Q(1,:));
```

```
    R(1,:) = h*feval(f,T(j) + h,U(j,:) + W(1,:));
```

```
    U(j+1,:) = U(j,:) + (1/6)*(K(1,:) + 2*Q(1,:) + 2*W(1,:) + R(1,:));
```

```
end
```

II-Función del péndulo invertido:

Nota: en la versión de la función utilizada, la variable i era definida adentro de la función y su valor era modificado manualmente para calcular los distintos casos.

```
function [f] = yprima_pendolo_invertido (t,x,i)
```

```
C = [0.1 0.1 0.05; 0.1 0.1 0.01; 0.1 0.1 0.01; 0.1 0.1 0.01; 0.1 0.1 0.1; 0.1 0.1 0.1];
```

```
f(1) = x(2);
```

```
f(2) = (C(i,3)^2-C(i,2)*cos(t))*sin(x(1))-C(i,1)*x(2);
```

III-Código utilizado para generar los gráficos para el punto b:

```
# En yprima_pendolo_invertido usamos i = 1
```

```
ode23(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.1 -0.1]);
```

```
# En yprima_pendolo_invertido usamos i = 2
```

```
ode23(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.2 -0.2]);
```

```
ode23(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.05 -0.05]);
```

```
ode23(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.1 -0.1]);
```

```
# En yprima_pendolo_invertido usamos i = 5
```

```
ode23(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.1 -0.1]);
```

```
ode23(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.01 -0.01]);
```

```
# En yprima_pendolo_invertido usamos i = 1
```

```
ode45(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.1 -0.1]);
```

```
# En yprima_pendolo_invertido usamos i = 2
```

```
ode45(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.2 -0.2]);
```

```
ode45(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.05 -0.05]);
```

```
ode45(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.1 -0.1]);
```

```
# En yprima_pendolo_invertido usamos i = 5
```

```
ode45(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.1 -0.1]);  
ode45(@yprima_pendolo_invertido, linspace(0,100,100), [0.01 -0.01]);
```

IV-Código utilizado para generar los gráficos para el punto c:

Nota: este fue el código usado en el caso b.1, para obtener el resto de los casos, se variaron los valores de θ' y θ (cuarta variable de las funciones).

```
[T U1] = Euler_SEDO('yprima_pendolo_invertido', 0, 100, [0.1 -0.1], 0.5);
```

```
[T U2] = Runge_Kutta_orden2_SEDO('yprima_pendolo_invertido', 0, 100, [0.1 -0.1],  
0.5);
```

```
[T U3] = Runge_Kutta_orden4_SEDO('yprima_pendolo_invertido', 0, 100, [0.1 -0.1],  
0.5);
```

```
plot(T,U1,'r',T,U2,'g',T,U3,'b');
```

```
legend('Euler','Runge-Kutta-Orden-2','Runge-Kutta-Orden-4');
```

Conclusiones

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos pudimos llegar a la conclusión de que los métodos predictores-correctores en los cuales están basados las rutinas “ode23” y “ode45” (implementadas utilizando Runge-kutta de orden 2 como predictor y Runge-Kutta de orden 3 como corrector en “ode23”, y análogamente para 2ode45” con Runge-Kutta de orden 4 y 5) son mucho más precisos que los métodos que tuvimos que implementar nosotros (Euler, Runge-Kutta de orden 2 y 4). Dentro de los últimos tres, el más preciso es Runge-Kutta de orden 4. Ésto se condice con la teoría numérica, ya que su orden de consistencia es justamente cuatro y es mucho más preciso que el orden de consistencia de Runge-Kutta de orden 2, el cual es dos, y que Euler cuyo orden de consistencia es uno. Por eso al superponer los tres resultados en cada uno de los seis gráficos del punto “c”, se puede apreciar como Runge-Kutta de orden dos y cuatro se mantienen relativamente juntos, y Euler empieza a diverger a medida que el tiempo avanza. El paso utilizado en los gráficos del punto “c” es 0.5. Se tomó esta decisión para poder apreciar las diferencias entre cada método. Realizamos los mismos gráficos con pasos más chicos pero las diferencias entre los Runge-Kutta eran despreciables y no se iban a poder apreciar en las imágenes. Con esto verificamos por otro lado, que al achicar el paso utilizado el error cometido disminuye también y lo hace en forma lineal. Euler en estos casos

mejoraba ligeramente pero al igual que en los gráficos propuestos, cuando el tiempo empieza a crecer el método empieza a alejarse mucho de la solución real.