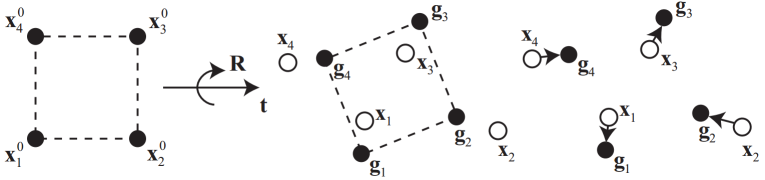
Die Simulationsmethode

Shape Matching:

- Simulation von Elastizität
- Arbeitet mit Partikeln ohne Verbindungen



Die Simulationsmethode

- Berechne $\mathbf{R}, \bar{\mathbf{t}}$ und $\mathbf{t}$ durch Minimieren von

$$\sum_i \mathbf{m}_i(\mathbf{R}(\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{t}}) + \mathbf{t} - \mathbf{x}_i)^2$$

- Es stellt sich heraus, dass

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{x}}_{cm} = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i \bar{\mathbf{x}}_i}{\sum_i \mathbf{m}_i} \text{ and } \mathbf{t} = \mathbf{x}_{cm} = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i \mathbf{x}_i}{\sum_i \mathbf{m}_i}$$

- Seien $\mathbf{q}_i = \bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_{cm}$ und $\mathbf{p}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{cm}$, dann minimiere

$$\sum_i \mathbf{m}_i(\mathbf{A}\mathbf{q}_i - \mathbf{p}_i)^2$$

  wobei $\mathbf{A}$ die optimale lineare Transformation ist.

Die Simulationsmethode

- Es stellt sich heraus, dass

$$\mathbf{A} = (\sum_i \mathbf{m}_i \mathbf{p}_i \mathbf{q}_i^T)(\sum_i \mathbf{m}_i \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T)^{-1} = \mathbf{A}_{pq}\mathbf{A}_{qq}$$

- $\mathbf{A}_{qq}$ ist symmetrisch, enthält also keine Rotation
- Eine Polarzerlegung von $\mathbf{A}_{pq}$ liefert

$$\mathbf{A}_{pq} = \mathbf{RS} \text{ wobei } \mathbf{S} = \sqrt{\mathbf{A}_{pq}^T \mathbf{A}_{pq}} \text{ und } \mathbf{R} = \mathbf{A}_{pq}\mathbf{S}^{-1}$$

- Berechne die Zielposition jedes Partikels

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{R}(\bar{\mathbf{x}}_i - \bar{\mathbf{x}}_{cm}) + \mathbf{x}_{cm}$$

Die Simulationsmethode

- Co-Planarität oder Co-Linearität der Punkte $\Rightarrow$ Unstabilität
- $\mathbf{A}_{pq}$ für zwei Partikelmengen mit Moment Matrizen $\mathbf{A}_1$ und $\mathbf{A}_2$

$$\mathbf{A}_{pq} = \sum_i \mathbf{m}_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{x}}_i^T - M \mathbf{x}_{cm} \bar{\mathbf{x}}_{cm}^T$$

- $\mathbf{A}_{pq}$ mit Moment Matrizen $\mathbf{A}_i$ für jedes einzelne Partikel

$$\mathbf{A}_{pq} = \sum_i (\mathbf{A}_i + \mathbf{m}_i \mathbf{x}_i \bar{\mathbf{x}}_i^T) - M \mathbf{x}_{cm} \bar{\mathbf{x}}_{cm}^T$$

wobei M die Summe der Massen $\mathbf{m}_i$ ist

Die Simulationsmethode

- Berechne die Moment Matrizen der einzelnen Partikel mit orthonormaler Orientierungsmatrix **R** für Kugeln mit Radius r Volumen V_r und Ellipsoide mit Radien a, b und c

$$\mathbf{A}_{sphere} = \int_{V_r} \rho(\mathbf{Rx})\mathbf{x}^T dV = \frac{1}{5} m r^2 \mathbf{R}$$

$$\mathbf{A}_{ellipsoid} = \frac{1}{5} m \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} \mathbf{R}$$