Falls nicht anders angegeben: $A \in \mathbf{R}^{nxm}$ und $x, y \in \mathbf{R}$, ex. = existiert

1 Matrix Eigenschaften

invertierbar $\Leftrightarrow$ regulär: $AB = BA = I_N$
symmetrisch.: $(AB)^T = B^T * A^T = BA$
EW λ: $Av = \lambda v$
$\sigma(A)$: **Spektrum**, alle EW
orthogonal: $A^T = A^{-1} \Rightarrow A^T * A = I_N$, längenerhaltend $\|Qx\|_2^2 = \|x\|_2^2$
ähnlich: $A = SBS^{-1}$
Skalarprodukt
$\|\cdot\|$ heißt Norm falls:
1) $\|x\| \geq 0$ (pos. definit)
2) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungl.)
3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Homogenität)

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ heißt Skalarprodukt, falls:
$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$
$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
$\langle x, x \rangle \geq 0$ und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Es gilt: 1) $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$
2) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$
3) $\langle x, y \rangle_A = x^T A y$, A: spd-Matrix

2 Einführung

Kriterien: Genauigkeit, Stabilität, Effizienz, Voraussetzungen
Pi Approximation: stabil

Setze $g_6 = 1$, $g_{2n} = g_n / \sqrt{2 + \sqrt{4 - g_n^2}}$

Approximiere $\pi \approx \frac{ng_n}{2}$

2.1 Gleitpunktzahlen

Darstellung: $x = m * B^e$, wobei
$B = Basis, e = e_{min} + \sum_{l=0}^{L_e - 1} c_l B^l$
$c_l, a_l \in \{0, \ldots, B-1\}$, $a_1 \neq 0$
$m = 0$ oder $m = \pm \sum_{l=1}^{L_m} a_l B^{-l}$
L_m: Mantissenlänge
Es gilt: $|m| \geq B^{-1}$ und $|m| < 1$
Beispiel: $B = 2$, $10.25 = 2^3 + 2^1 + 2^{-2}$ $= 2^4 * (1 * 2^{-1} + 0 * 2^{-2} + \ldots + 1 * 2^{-6})$
Somit ist $e = 4, a_1 = 1, L_m \geq 6$
Es gilt: $e_{max} = e_{min} + B^{L_e} - 1$
$maxFL = -minFL = B^{e_{max}}(1 - B^{-L_m})$
$minFL_+ = B^{e_{min} - 1}$

2.2 Rundung

$x \neq 0$ mit $minFL_+ \leq |x| \leq maxFL$, $fl(x) =$
$$\pm B^e \begin{cases} \sum_{l=1}^{L_m} a_l B^{-l}, & a_{L_m+1} < \frac{B}{2} \\ \sum_{l=1}^{L_m} a_l B^{-l} + B^{-L_m}, & a_{L_m+1} \geq \frac{B}{2} \end{cases}$$
Es gilt: $|x - fl(x)| \leq \frac{1}{2} B^{e - L_m}$, $|x| \geq B^{e-1}$
eps: relative Maschinengenauigkeit
eps $:= \frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{B^{e-L_m}}{B^{e-1}} = \frac{1}{2} B^{1-L_m}$
Sei x keine Gleitkommazahl, dann ist der relative Fehler zu fl(x) (gerundet) kleiner als eps: $fl(x) = x(1+\epsilon)$ mit $|\epsilon| \leq eps$
IEEE: $L_m = 52, eps = 2^{-52}, e_{min} = -1022$

2.3 Arithmetik

$x \circ y \notin FL$ (im Allgemeinen) $\rightarrow$ erst Operation, dann runden (nicht assoziativ)

2.4 Kondition

Wie wirken sich Störungen der Eingabe auf die exakte (!) Lösung aus? **Schlecht konditioniert**: kleine Störungen haben große Auswirkungen auf die Lösung. Add/Sub gut konditioniert, falls x und y selbes Vorzeichen, schlecht falls $x \approx -y$.

Relativer Fehler: $\leq \epsilon \frac{|x| + |y|}{|x+y|}$ wobei ϵ klein.

Singuläre Matrizen (nicht invertierbar) sind schlecht konditioniert.

2.5 Stabilität

Fehler im Verfahren haben keinen deutl. größeren Einfluss als in der Eingabe. Grundoperationen $(+, -, *, /)$ sind in FL stabil. Für $x \approx y$ ist $-$ stabil, aber schlecht konditioniert. Algos mit schlecht kond. Teilproblemen sind instabil.

$g_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - g_n^2}}$, instabil da $g_n^2 \rightarrow 0$

Algo. in Kapitel 2 stabil, da $g_{2n} \rightarrow g_n / 2$

3 Lösungsverfahren

Finde x, sodass $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{R}^{NxN}$
$x = A^{-1} b \rightarrow$ teuer
Falls Matrix nicht regulär $\rightarrow$ keine oder inf. Lösungen. A regulär $\leftrightarrow$ det(A) $\neq 0$
Es gilt: det(A) = det(L) * det(R)

3.1 LR-Zerlegung

1) **Zerlegung**: $A = LR$ $(\approx \frac{N^3}{3})$

2) **Vorwärtssubstitution**: $Ly = b$ $(\approx \frac{N^2}{2})$

3) **Rückwärtssubstitution**: $Rx = y$ $(\approx \frac{N^2}{2})$

Begründung: $Ax = LRx = Ly = b$
Eine LR-Zerlegung existiert $\leftrightarrow$ Jede Teilmatrix $(A_{[1:n,1:n]})$ ist regulär (eindeutig)
Vorgehensweise: Matrix gaußen, Gaußschritte mit **umgekehrtem** Vorzeichen an der jeweiligen Stelle speichern.
L: Diagonale = 1, untere DEM = Gauß
R: untere DEM = 0, Rest = Gauß-Matrix
Permutation: A regulär $\leftrightarrow PA = LR$
$PA = LR \Rightarrow A^T P^T = R^T L^T$, $b = R^T L^T (Px)$
$A = LR$ existiert nicht immer, $PA = LR$ schon falls **A invertierbar** ist.
$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LRx = Ly = Pb$
Spaltenpivotwahl immer machen, Betragsmäßig größtes Element kommt nach oben, bei Gleichheit egal

3.2 Cholesky-Zerlegung

A ist spd-Matrix $\Leftrightarrow$ Cholesky Z. existiert
Aufwand: $\sum_{n=1}^{N-1} \frac{n^2}{2} \approx \frac{N^3}{6}$ Operationen
1) **Zerlegung**: $A = LL^T$
2) **VWS**: $Ly = b$, 3) **RWS**: $L^T x = y$
$A^T = (LL^T)^T = (L^T)^T L^T = LL^T = A$
$x^T A x = x^T L L^T x = (L^T x)^T L^T x = y^T y > 0$
Für eine 4x4-Matrix gilt:

$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$; $l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}$, $l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$;

$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}}$, $l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}}$,

$l_{33} = \sqrt{a_{33} - (l_{31}^2 + l_{32}^2)}$;

$l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}}$, $l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41} l_{21}}{l_{22}}$,

$l_{43} = \frac{a_{43} - l_{41} l_{31} + l_{42} l_{32}}{l_{33}}$,

$l_{44} = \sqrt{a_{44} - (l_{41}^2 + l_{42}^2 + l_{43}^2)}$

Tipp: Bandstruktur bleibt erhalten

3.3 QR-Zerlegung

Sei A eine MxN Matrix $\Leftrightarrow A = QR$, wobei $Q \in \mathbb{R}^{MxM}$ orthogonal $(QQ^T = I_M)$ und $R \in \mathbb{R}^{NxN}$ eine obere Dreiecksmatrix.
1) **Householder-Trans**: $A = QR$
2) **Löse**: $Qc = b$ durch $c = Q^T b$
3) **Rückwärtssubstitution**: $Rx = c$
Begründung: $Ax = QRx = Qc = b$
Eigenschaften: stabil, $\frac{2}{3} N^3$ wenn $M \approx N$
$Q = I_M - 2ww^T$ wobei $w \in \mathbb{R}^M$, $w^T w = 1$
Q ist sym. da $Q^T = I_M^T - (2ww^T)^T = Q$, orthogonal da $QQ^T = Q^2 = I_M - 4ww^T + 4w * 1 * w^T = I_M (w^T w = 1)$, Spiegelung da $Q\lambda w = -\lambda w$ für $w^T y = 0 \rightarrow Qy = y$
Ziel: $H^{(k)} * \ldots * H^{(1)} * A = R$, wobei $H^{(n)}$ orthogonal
Schritte: $v^{(1)} = q_1 + sgn(a_{11}) * \|a_1\| * e_1$

$H^{(1)} = H^{(0)} = I - \frac{2 v^{(1)} v^{(1)^T}}{v^{(1)^T} v^{(1)}}$

$A^{(1)} = H^{(1)} * A$
Erste Zeile und Spalte streichen
$H^{(2)}$ in der ersten Zeile und Spalte um e_1 erweitern
$H^{(2)} = H^{(2)} A^{(1)}$ ... Für R: (m-1) mal
$Q^T = H^{(2)} H^{(1)} \rightarrow Q = (Q^T)^T$

3.4 Kondition

Empfindlichkeit von Matrix-Störungen
Sei $A \in \mathbb{R}^{NxN}$ nachfolgend regulär:
zugehörige Norm: $\|A\| := sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$, $x \neq 0$
Es gilt: $\|I_N\| = 1$ und $\|AB\| \leq \|A\| * \|B\|$
SSN: $\|A\|_1 = \max_{m=1,\ldots,N} \sum_{n=1}^{N} |a_{nm}|$

Spektral: $\|A\|_2 = \sqrt{\text{größter EW von } A^T A}$
ZSN: $\|A\|_\infty = \max_{n=1,\ldots,N} \sum_{m=1}^{N} |a_{nm}|$

$\|x - \widetilde{x}\| = \|A^{-1}(b - \widetilde{b})\| \leq \|A^{-1}\| * \|b - \widetilde{b}\|$: (absoluter Fehler), (relativer Fehler):
$\frac{\|x - \widetilde{x}\|}{\|x\|} \leq \|A\| * \|A^{-1}\| * \frac{\|b - \widetilde{b}\|}{\|b\|}$
Konditionszahl: $cond(A) := \|A\| * \|A^{-1}\|$
Eigenschaften: $1 \leq cond(A)$, $cond(A) = cond(\alpha A)$, mit $\alpha \neq 0$, $cond(A) = cond(A^{-1})$

$cond(A) = \frac{max_{\|y\|=1} \|Ay\|}{min_{\|z\|=1} \|Az\|}$ (allg. Definition)

Matrizen $B^T B$ wobei B beliebig:
- sind spezielle sym. Matrizen
- haben nur nichtnegative (inkl. 0) EW
- nur positive EW falls B maximaler Rang
- besitzen EW λ^2 falls B sym. mit EW λ

$\Rightarrow cond_2(A) = \frac{max\{|\lambda|: \lambda \text{ EW von A}\}}{min\{|\lambda|: \lambda \text{ EW von A}\}}$

Sei $\frac{\|A - \widetilde{A}\|}{\|A\|} \leq \epsilon_A$ und $\frac{\|b - \widetilde{b}\|}{\|b\|} \leq \epsilon_b$, dann gilt:
$\frac{\|x - \widetilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{cond(A) * (\epsilon_A + \epsilon_b)}{1 - \epsilon_A * cond(A)}$, $\epsilon_A * cond(A) < 1$
gute Kondition: I_n $(cond(A)_2 = 1)$, $\|\text{orthogonale Matrizen}\|_2 = 1$, Spline-Interpol., $cond(A)$ klein $\Rightarrow$ LGS gut kond.
schlechte Kondition: Hilbertmatrix, Diagonalmatrix* $(cond_2(A) = \frac{max.\ EW}{min.\ EW})$

Neumann-Reihe: $(I_n + B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-B)^k$

3.5 Ausgleichsrechnung

x gesucht, sodass $\|Ax - b\|_2 = min!$ mit $A \in \mathbb{R}^{MxN}$ Falls $M = N$ gilt: $\|Ax - b\|_2 = 0 = min!$ $(Ax = b)$
Satz von Gauß: Der Vektor x löst genau dann das lineare AGP, falls er $A^T Ax = A^T b$ löst (Normalengleichung
NG immer lösbar falls $Rang(A) = max$, da $A^T b \in Bild(A^T) = Kern(A)^\perp = Kern(A^T A)^\perp = Bild(A^T A)$, in $N^2 + \frac{1}{2} N^2$
Sei $A \in \mathbb{R}^{MxN}$ mit $M \geq N$ und Q, R die QR-Zerlegung, also $Q^T A = R = \begin{pmatrix} \overline{R} \\ 0 \end{pmatrix}$,

dann ist $x = \overline{R}^{-1} c$ die Lsg. des AGPs, wobei $Q^T b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, **Householder**: $A = QR$,

Löse: $Q^T b = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$, **RWS**: $\overline{R}x = c$

3.6 Singulärwertzerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{MxN}$ mit Rang r, **Zerlegung**: $A = U * \Sigma * V^T$, wobei $U \in \mathbb{R}^{MxM}$ und $V \in \mathbb{R}^{NxN}$ orthogonal, $\Sigma \in \mathbb{R}^{MxN}$ mit Singulärwerten $(s_n \geq \ldots \geq s_r > 0)$
$AA^T = U\Sigma V^T V \Sigma^T U^T = U \Sigma \Sigma^T U^T$ und
$A^T A = V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^T \Sigma V^T$
Beispiel $U' = A * A^T$, $V' = A^T * A$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, U' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3 (s_1 = \sqrt{3})$, $\lambda_2 = 1 (s_2 = \sqrt{1})$, $\lambda_3 = 0$
Eigenräume ausrechnen, analog mit V'. V und U sind normierte Eigenräume.
$\|A\|_{Frob} = \sqrt{Spur(A^T A)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2}$

4 Newton-Verfahren

Lösungsverfahren für nichtlineare GS
Gesucht x^*: $f(x^*) = 0_N$, f nichtlinear, $f_1(x_1^*, \ldots, x_N^* = 0)$, ..., $f_N(x_1^*, \ldots, x_N^* = 0)$
Taylor: $0 = f(x^*) = f(x^0) + f'(x^0)(x^* - x^0)$
Algorithmus:
1) Wähle Startwert x^0 und Toleranz ϵ
2) Löse $f'(x^k) d^k = -f(x^k)$ (LGS, LR-Zerlegung), berechne $x^{k+1} = x^k + d^k$
3) Falls $(\|d^k\| < \epsilon)$: STOP, ansonsten 2)
Bemerkung: Konv. **lokal** quadratisch
Oft divergent, falls $\|x^0 - x^*\|$ groß
Konvergenz: $\|x^* - x^k\| \leq C \|x^* - x^{k-1}\|^2$, d.h. die Anzahl an Nachkommastellen verdoppelt sich ca. pro Schritt
Funktionen: $x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n)$

4.1 Vereinfachung

Konstante Matrix A, sodass $A \approx f'(x^0)$, dann gilt $F(x) = x - A^{-1} f(x)$.
1 x LR-Zerlegung, **linear konvergent**
Fixpunkt: $x^{k+1} = x^k - A^{-1} f(x^k) = F(x^k)$

5 Interpolation

Stützpunkte f_n gegeben, Funktion p gesucht für die $p(x_n) = f_n$ und $\int_a^b (f(x) - p(x))^2 dx = min!$ gilt

5.1 Polynom

$N+1$ Stützwerte, Poly. mit Grad $\leq N$ gesucht, mit Grad $\leq N$ **eindeutig**
Lagrange: $L_n(x) = \prod_{j=0, j \neq n}^{N} \frac{x - x_j}{x_n - x_j}$, instabil

$p(x) = \sum_{n=0}^{N} f_n L_n(x) \rightarrow$ sehr aufwändig
Kondition: Lebesgue-Konstante Λ
$\Lambda_N := \max_{x \in [a,b]} \sum_{n=0}^{N} |L_n(x)|$, großes Λ_N bei hohem Grad und schlechten Stützstellen
Newton-Darstellung: $f_{n,n} = f_n$
$f_{n,k} = \frac{f_{n,k-1} - f_{n+1,k}}{x_n - x_k}$, $0 \leq n < k \leq N$

Beispiel:

f_n	1	6	-3	3
x_n	-1	0	1	3

$$\begin{array}{l|lcrc}
x_0 = -1 & f_0 = \mathbf{1} & & & \\
 & & \searrow & & \\
x_1 = 0 & f_1 = 6 & \rightarrow & \frac{1-6}{-1-0} = \mathbf{5} & \\
 & & \searrow & & \searrow \\
x_2 = 1 & f_2 = -3 & \rightarrow & \frac{6+3}{0-1} = -9 & \rightarrow \\
 & & \searrow & & \searrow \\
x_3 = 3 & f_3 = 3 & \rightarrow & \frac{-3-3}{1-3} = 3 & \rightarrow
\end{array}$$

$p = 1 + 5(x+1) - 7(x+1)x + \frac{11}{4}(x+1)x(x-1)$
Aufwand: $\frac{N(N+1)}{2}$ Div, $N(N+1)$ Add
Fehler: $f(x) - p(x) = w_{N+1}(x) * \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!}$
$\rightarrow$ falls x Stützpunkt, dann 0

Falls nicht anders angegeben: $A \in \mathbf{R}^{nxm}$ und $x,y \in \mathbf{R}$, ex. = existiert

Tschebyscheff: Approximation von f mit möglichst günstigen Stützstellen $T_n(x) = cos(n * arccos(x))$ | $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_{n+1}(x) = 2x * T_n(x) - T_{n-1}(x)$ $max_{x\in[-1,1]}|w_{N+1}(x)$ min. mit 2^{-N}

Interpolationsformel: $N+1$ Stützstellen, eindeutiges Polynom gegeben durch: $p(x) = \frac{1}{2}c_0 + c_1T_1(x) + ... + c_NT_N(x)$ mit $c_m = \frac{2}{N+1}\sum_{n=0}^N f_n cos(m*\pi*\frac{2n+1}{2N+2})$ für $m = 0,...,N$ ($(N+1)^2$ Multiplikationen)

Clenshaw-Algo: Sei $d_{N+2} = d_{N+1} = 0$, $d_n = c_n + 2x * d_{n+1} - d_{n+2}$ für $n = N,...,0$ $\to p(x) = \frac{(d_0 - d_2)}{2}$ ($N+2$ Mul + $2N$ Add)

5.2 Kubische Splines

Geg: Fallunterscheidung, Ges: $\mathbf{C}^2$-Funkt. mit Teilpolynomen $\in \mathbf{P}_3$ und $s(x_n) = y_n$ (Stützst.). (s_n Teilpol., $x*$ Grenze) Ziel:

1) Glattheit. $s_n^{(k)}(x*) = s_{n+1}^{(k)}(x*)$, $k = 1,2$
2) Interpolationsbed. $s_n(x*) = s_{n+1}(x*)$

Min-Eigenschaften: Eine Eigens. davon:
1) $s'(a) = \tilde{s}'(a)$ und $s'(b) = \tilde{s}'(b)$
2) $s''(a) = 0$ und $s''(b) = 0$
3) $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b)$ für $k = 0,1,2$ und $\tilde{s}'(a) = \tilde{s}'(b)$

Sei s ein Spline, s heißt: **eingespannt**, **hermitesch**: $s'(a) = v_0$ und $s'(b) = v_N$ **natürlich**: $s''(a) = s''(b) = 0$ **periodisch**: $s'(a) = s'(b)$ und $s''(a) = s''(b)$

Minimalität: $\int_a^b |s''(x)|^2 dx$ minimal

Kondition: $l_n(x)$ Lagrange-Spline: $s(x) - \tilde{s}(x) = \sum_{n=0}^N (y_n - \tilde{y}_n) l_n(x)$ → gute Kondition, max. $\Lambda_N \le 2$ äquidistanten Unterteilungen: hier gute Kondition, Polynom-Interpol. schlechte Kondition (Oszillationen etc.)

6 Integration

Rechteckregel: $I(f) \approx (b-a)f(a)$

Mittelpunkt: $I(f) \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$

Trapezregel: $I(f) \approx (b-a)(\frac{f(a)+f(b)}{2})$

Simpson: $I(f) \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- linear: $I(\lambda f + \mu g) = \lambda I(f) + \mu I(g)$
- monoton: $f \ge g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

$\to |\int_a^b f(x)dx| \le \int_a^b |f(x)|dx$ (Bsp. Sinus)

Kondition: L1-Norm: $\|f\|_1 = I(|f|)$ Es gilt: $\frac{|I(f) - I(\tilde{f})|}{|I(f)|} \le \frac{\|f - \tilde{f}\|_1}{\|f\|_1}$ mit $cond_1 := \frac{I(|f|)}{|I(f)|}$ (monoton und linear), schlecht konditioniert falls oszillierend

6.1 Quadraturformeln

$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=1}^s b_k f(a + c_k(b-a))$, b_k Gewichte und c_k Knoten $\in [0,1]$ linear und monoton $\leftrightarrow b_k \ge 0$, eindeutig

Ordnung: Quad.-Formel hat Ordnung p $\leftrightarrow$ QF liefert exakte Lösung für alle Poly. mit Grad $\le p-1$, wobei p maximal oder (1) $\frac{1}{q} = \sum_{k=1}^s b_k c_k^{q-1}$ für alle $q = 1,...,p$ aber nicht für $q = p+1$ | $\updownarrow$ p mind. s

Es gilt: (2) $\sum_{k=1}^s b_k = 1$ | $b_k = \int_0^1 L_k(x)dx$

Klausuren: (1) und (2) überprüfen

Kondition: schlecht, da $\sum|b_k|$, k > 8

6.2 sym. Quadraturformeln

QF sym. $\leftrightarrow c_k = 1 - c_{s+1-k}$ & $b_k = b_{s+1-k}$ Ordnung einer sym. QF ist **gerade**

Lagrange: $L_{s+1-k}(x) = \prod_{j=1, j\ne k}^s \frac{x - c_{s+1-j}}{c_{s+1-k} - c_{s+1-j}}$

6.3 QF mit erhöhter Ordnung

Ges: QF mit Ordnung $p = s+m$, $m \ge 1$

Ordnung: $s+m$ genau dann, wenn $\int_0^1 M(x)g(x)dx = 0$ für g mit Grad $\le m-1$, aber nicht mit Grad m

Skalarprodukt: $\langle f,g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ $\to M(x)$ steht orthogonal zum Raum der Poly. mit Grad $\le m-1$ bzgl. des SKP

max. Ordnung einer QF: $2s$, da $\langle M,M \rangle = \int_0^1 M(x)^2 dx > 0$

Gauß: Es ex. eindeutige QF der Ord. $2s$ durch $c_k = \frac{1}{2}(1 + \gamma_k)$, wobei $k = 1,...,s$ und $\gamma_1,...,\gamma_s$ NS des Legendre-Poly.

Beispiel: Sei $s = 2$, es gilt Legendre-Poly. $P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ und somit $\gamma_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, also $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$, $c_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$

$\to \int_0^1 f(x)dx \approx \frac{1}{2}f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}) + f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6})$ als QF mit Ordnung 4 ($2s$). Ordnung 6:

$I(f)_0^1 \approx \frac{5*f(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10})}{18} + \frac{4}{9}f(\frac{1}{2}) + \frac{5*f(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10})}{18}$

Quadraturfehler: $g(\tau) := f(a + \tau(b-a))$ $R(g) = \int_0^1 g(\tau)d\tau - \sum_{k=1}^s b_k g(c_k)$, linear

Abschätzung: $R(g) = (\frac{b-a}{N})^2(b-a)\frac{f^{(2)}(\xi)}{12}$

7 Eigenwertproblem

Ges: $v \ne 0$ und λ, wobei $A^{NxN}v = \lambda v$ lösbar $\leftrightarrow Kern((A - \lambda I_n))$ nicht trivial

Sei $Av = \lambda v$, $u^TA = \lambda u^T$, $\|u\| = \|v\| = 1$: Konditionszahl: $\frac{1}{|u^Tv|} \ge \frac{1}{\|u\|_2\|v\|_2} = 1$

7.1 Vektoriteration

Annahme: |einfacher EW| > andere EW, einf. EW: alg. VF des char. Poly. ist 1

Iteration ab k = 0: $y^k = \frac{x^k}{\|x^k\|_2}$ mit $x^{k+1} = Ay^k$ ... konvergiert gegen norm. EV v^1 zum EW λ_1 wenn x^0 nicht senkrecht auf $span(v^1)$ steht $\to \lambda_1 = \frac{(v^1)^TAv^1}{(v^1)^Tv^1}$

Konv.-Geschwindigkeit: $0 \le |\frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}| < 1$

Inverse Vektoriteration Es gilt: $Av = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda A^{-1}v \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}v = A^{-1}v$

NUN: $A \in \mathbf{R}^{NxN}$ und KLEINSTER |EW| nahe, aber ungleich 0 $\leftrightarrow A^{-1}$ sym. mit selben EV $\leftrightarrow EW = \frac{1}{\lambda_n}$, λ_n ist EW von A

Iteration (!) k = 0: $y^k = \frac{x^k}{\|x^k\|_2}$, $Ax^{k+1} = y^k$

Jacobi: $B = D$, $x^{k+1} = D^{-1}*(L+U)*x^k + D^{-1}b$, **Gauß-Seidel**: $B = L+D$, $x^{k+1} = (I - (D-L)^{-1})*x^k + (D-L)^{-1}b$, wobei $A = L+D+R$.

7.2 QR-Algorithmus

Berechnung sämtlicher EW von $A^{\mathbf{R}x\mathbf{R}}$

Algorithmus: 1) Setze $A_0 = A$ und $k = 0$
2) Zerlege $A_k = Q_kR_k$ (QR-Zerlegung)
3) Berechne $A_{k+1} = R_kQ_k$, erhöhe k und gehe zu Schnitt 2)

$A_{k+1} = R_kQ_k = Q_k^TQ_kR_kQ_k = Q_k^TA_kQ_k$ $\Rightarrow$ (A_{k+1} ähnlich zu A_k) $\Rightarrow$ (ähnlich zu A für alle k) $\Rightarrow$ ($A_k \to R$ für $k \to \infty$)

Aufwand: $\mathcal{O}(n^3)$, Hessenbergform: $\mathcal{O}(n^2)$

Konvergenz: $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$, ..., $\frac{|\lambda_N|}{|\lambda_{N-1}|}$ → langsam

Idee: Nutze Shift μ_k → 1) $H_0 = H$, $k = 0$
2) Zerlege $H_k - \mu_kI_N = Q_kR_k$
3) $H_{k+1} = R_kQ_k + \mu_kI_N$, k++, wdh. 2)

Hessenbergform $\frac{5}{3}N^3$: Eine Matrix kann in $N-2$ Householder-Trans. in HBF gebracht werden: $Q^TAQ = H$ wobei $Q = Q_1 * ... * Q_{N-2}$. Ist $A \in \mathbf{R}^{2x2}$ orthogonal und $det(A) = -1$, dann ist A eine Householder-Transformation

8 Iterative Verfahren für LGS

Effiziente Lsg. eines LGS ($Ax = b$), wobei A sehr groß und dünn besetzt

Vorkonditionierer: $B \in \mathbf{R}^{NxN}$, regulär, $cond(B^{-1}A) < cond(A)$

Es gilt: $0 = -B^{-1}Ax + B^{-1}b$

Algorithmus zur Lösung:
1) Wähle Start $x^0 \in \mathbf{R}^N$, Toleranz $\epsilon > 0$
2) Setze $r^0 = b - Ax^0$, $k = 0$
3) Falls ($\|r^{k+1} \le \epsilon\|b\|$) STOP, ansonsten:
$Bc^k = r^k$
$x^{k+1} = x^k + c^k$
$r^{k+1} = r^k - Ac^k$
4) Erhöhe k um 1 und gehe zu 3)

8.1 cg-Verfahren

Vorteile: fehlerh. Anteile filtern, Normalengleichung einfach, Speicherplatz

Energienorm: $\|x\|_A = \sqrt{x^TAx}$, x Vektor, dazugehöriges SKP: $\langle x,y \rangle = x^TAy$

VORKONDITIONIERTER Algorithmus:
1) Wähle $x^0 \in \mathbf{R}^N$, $\epsilon > 0$, $r^0 = b - Ax^0$
2) (ZUSÄTZLICH) Löse $Ms^0 = r^0$, $d^0 = s^0$
3) Falls ($\|r^k\| \le \epsilon\|b\|$) STOP, sonst:
$a_k = \langle r^k, s^k \rangle / \langle d^k, d^k \rangle_A$
$x^{k+1} = x^k + \alpha_kd^k$
$r^{k+1} = r^k - \alpha_kAd^k$
(ZUSÄTZLICH) Löse $Ms^{k+1} = r^{k+1}$
$\beta_k = \langle r^{k+1}, s^{k+1} \rangle / \langle r^k, s^k \rangle$
$d^{k+1} = s^{k+1} + \beta_kd^k$
4) Erhöhe k um 1 und gehe zu 3)

Konvergenz: Nach max. N Schritten exakt

Fehler: $\|x_* - x^k\|_A \le 2*(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1})^k * \|x_* - x^0\|_A$, $c = cond_2(A)$, x_* exakte Lsg, $k = 1,2,...$

Normalengleichungen: Berechnung von Ad^k und $A^T(Ad^k)$ → (MMM → 2 x MVP)

Übungsaufgaben

Zerlegung: $Ax = (LQRDL^T)x = b$

Lsg: $Lu = b$, $Qv = u$ mit $v = Q^Tu$, $Rw = v$, $Dy = w$, $L^Tx = y$

Lsg.-Strategien: $A \in \mathbf{R}^{21x20}$ → QR, da LR und Cholesky nur für quad. sinnvoll
$A \in \mathbf{R}^{10x10}$ sym. → Cholesky, falls spd
$A \in \mathbf{R}^{10x10}$ mit mind. einem Diagonaleintrag ≤ 0 → LR, da A nicht pos. def.
$A \in \mathbf{R}^{20x21}$ (unterbestimmt) → QR von A^T, $R^Ty = b$ lösen (VwS), Lsg: $x = Qy$

Min-Norm: $Rang(A) = R$, Singulärwertz. gegeben. Ƶ: $x^+ = A^+b$ ist Lsg des AGPs

Lsg: $A^TAx^+ = V\Sigma^TU^TU\Sigma V^TV\Sigma^+U^Tb = V\Sigma^T\Sigma\Sigma^+U^Tb = V\Sigma^TU^Tb = A^Tb$

Ƶ: $x^+ = \sum_{r=1}^R \frac{1}{\sigma_r}(u^r)^Tbv^r$, Lsg: $A^+b = V\Sigma^+U^T\sum_{m=1}^M (u^m)^Tbu^m = V\sum_{m=1}^R \frac{1}{\sigma_m}(u^m)^Tbe_m$ = Ergebnis

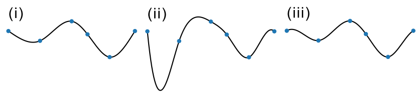
---

Newton: $\frac{1}{x} - a$ **ohne Div**: $x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1}f(x_n) = x_n - (-\frac{1}{x_n^2})^{-1}(\frac{1}{x_n} - a) = x_n(2 - ax_n)$ **Fehler**: $e_{k+1} = \frac{1}{a} - x_{k+1} = ae_k^2$

Quad. Splines GLS ($s_N'(x_N) = v$) **Lsg**: Es gilt $s_n'(x) = y_{n-1,n} + \alpha_n(2x - x_{n-1} - x_n)$ und $s_n'(x_n) = s_{n+1}'(x_n)$ (Glattheitsbedingung) $\Rightarrow \alpha_nh_n + \alpha_{n+1}h_{n+1} = y_{n,n+1} - y_{n-1,n}$

$$\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \\ & h_{N-1} & h_N \\ & & h_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdot \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,2} - y_{0,1} \\ \cdot \\ v - y_{N-1,N} \end{pmatrix}$$

Splines zuordnen



(i) natürlich, da Steigung an linken und rechtem RP ≈ konstant (ii) eingespannt, da nicht periodisch und nicht natürlich (iii) periodisch, da Steigung an Randpunkten ≈ identisch, RP: Randpunkt

---

Knoten sym. $\leftrightarrow$ Ordnung p gerade. Es gilt $p \in (s, 2s]$. Da $2s$ eindeutig und Quadratur nicht identisch, gilt $p \in (s, 2s)$

Shiftmatrix: $S = (e^N|e^1|e^2|...|e^{N-1})$, Iteration mit SV $y^0 = e^1$, konvergent?

Lsg: Iteration $y^{k+1} = Sy^k$ → durchläuft $e^1 \to e^N \to ... \to e^1$ → nicht konvergent

---

$Q_wAQ_w = (I_k - 2ww^T)A(I_k - 2ww^T)$
$= (A - 2ww^TA)(I_k - 2ww^T)$
$= A - 2Aww^T - 2ww^TA + 4ww^TAww^T$
(V: $v = -2Aw$) $A + vw^T + wv^T - 2ww^Tvw^T$
(V: $\alpha = -w^Tv$) $A + vw^T + wv^T + 2\alpha ww^T$
(V: $u = v + \alpha w$) $A + uw^T + wu^T$

---

cg: Eigenwerte Geg: A quad. sdp mit größtem EW $\lambda_1 > 1$ (alg. VF 1) und $|\lambda - 1| \le \epsilon$. Ƶ: $\|x^2 - x^*\|_A \le \epsilon\|x^0 - x^*\|_A$.

Lsg: Sei $q_2(x) = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1 - x)(1 - x)$. Satz 39: $\|x^2 - x^*\| \le max|q_2(\lambda_j)| * \|x^0 - x*\|_A$ $\le max|\frac{\lambda_1(1-\lambda_j)}{\lambda_1}| * \|x^0 - x^*\|_A \le \epsilon\|x^0 - x^*\|_A$

Ƶ: k vers. EW $\Leftrightarrow$ exakte LSG nach k Schritten. **Lsg**: Sei $q_k(\lambda) = \prod_{j=1}^k = \frac{\lambda_j - \lambda}{\lambda_j}$. Es gilt $q_k(0) = 1$ und $q_k(\lambda_j) = 0$. Satz 39: $\|x^k - x^*\|_A \le max|q_k(\lambda_j)| * \|x^0 - x^*\|_A$ $= 0 \to x^k = x^*$ ist Lsg. des LGS

Sei $Q_w = I_4 - 2ww^T$ die HHT mit $Q_wA = \{r_{11}, r_{12}^T\}, \{0_3, A^{(1)}\}$ und A. Bestimme r_{11}. **Lsg**: Norm erster Spalte $= \|Q_wa^1\|_2 = \|r_{11}e^1\|_2 = |r_{11}|$. Wähle VZ sodass im Zähler $a^1 - r_{11}e^1$ keine Auslöschung auftritt → Falls a_{11} neg. wähle r_{11} pos.

Schritt im Newton-Verfahren

$x \to \begin{pmatrix} x_1^2x_2 - 1 \\ sin(x_2\pi) \end{pmatrix}$ mit SW $x^0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lsg: $f'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0.25 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$. Es gilt $f'(x_1, x_2)\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = x^0$, $x = x^0 + d \to \begin{pmatrix} 0.75 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zusammenhang Normen

$\|x\|_\infty = max_{1\le i\le n}|x_i| = \sqrt{max_{1\le i\le n}|x_i|^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \|x\|_2 \le \sqrt{\sum_{i=1}^n max_{1\le j\le n}|x_j|^2}$ $= \sqrt{n} * max_{1\le j\le n}|x_j|^2 = \sqrt{n}\|x\|_\infty$

Ableitungen und Sonstiges

$(a^x)' = (a^x)ln(a)$, $\sqrt{x}' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, GLHF :)