OTUS: Basic ML
Модуль 4. Теоретический минимум для ML: линейная алгебра, начала мат.анализа и оптимизации.

1 Линейная алгебра

1. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Посчитайте матрицу $D = A^\top C - 2A^\top B^\top$. Приведите полную последовательность вычислений.

2. Дано выражение:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & y & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -6 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Найдите значения x, y, z и v, при которых выражение верно.

3. Относительно канонического (стандартного) базиса в $\mathbb{R}^2$ даны три вектора $a_1 = (2, -5)^\top$, $a_2 = (-1, 3)^\top$, и $x = (1, -4)^\top$. Примите векторы a_1, a_2 за новый базис B, предварительно проверив, что они линейно независимы.

   (a) Найдите координаты $[x]_B$ вектора x в новом базисе.

   (b) Предположим, что координаты вектора y в базисе B заданы $[y]_B = (1, 1)^T$. Найдите координаты вектора y в стандартном базисе.

4. Исследовательское задание: малоранговая аппроксимация матрицы. Сгенерируйте случайную квадратную матрицу $A \in \mathbb{R}^{n \times n},\ n \geq 100$. Выполните сингулярное разложение этой матрицы, и получите три матрицы: U, S, $V^\top$. Выполняйте аппроксимацию матрицы A с рангом r, меняя его значение, например, от 2 до n:

$$\tilde{A} = U[:,\ :r]S[:r,\ :r]V^\top[:r,\ :],$$

   и каждый раз считайте ошибку апроксимации (как восстановленная матрица отличается от исходной):

$$E(r) = ||A - \tilde{A}||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij} - \tilde{a}_{ij})^2}.$$

   Используя библиотеку *matplotlib*, постройте график зависимости ошибки аппроксимации матрицы от ранга r.

2 Начала мат.анализа и оптимизации

1. Посчитайте градиент следующей функции:

$$f(x) = x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

   Найдите критические точки x_c, такие что $\nabla f(x_c) = 0$.

2. Проверьте, что функция $f = \ln(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})$ удовлетворяет уравнению:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{1}{2}.$$

3. Предположим, задана функция $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$f(x, y, z) = x + y + z + (xyz)^2.$$

   Найдите вектор градиента функции f, и его численное значение в точке $v = (1, 2, 3)^\top$.

4. (Куб Евклидовой нормы). Найти первый дифференциал $df(x)$, а также градиент $\nabla f(x)$ функции:

$$f(x) = \frac{1}{3}||x||_2^3, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

5. (Квадрат Евклидовой нормы). Найдите первый дифференциал $df(x)$, и градиент $\nabla f(x)$ функции:

$$f(x) = ||Ax||_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$