Теоретический минимум для ML

Линейное пространство. Базис.

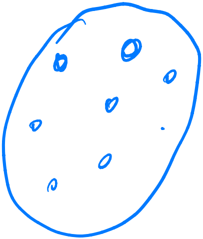
Глеб Карпов

OTUS ML Basic

Векторное пространство (Vector space)

Основной предмет изучения линейной алгебры

- Рассмотрим некоторое множество элементов V. Помимо того, что в нем просто живут абстрактные элементы, зададим там бинарные операции.



$F(x,y) \to g$

Векторное пространство (Vector space)

Основной предмет изучения линейной алгебры

- Рассмотрим некоторое множество элементов V. Помимо того, что в нем просто живут абстрактные элементы, зададим там бинарные операции.
- Сложение. Любым двум элементам из множества V ставится в соответствие третий:

$$\forall x,\, y \in \mathbb{V}: \quad x \oplus y = w,\, w \in \mathbb{V}.$$

$x = 1$ $\qquad$ $x + y = 3$

$y = 2$ $\qquad$ $x - y = -1$

Векторное пространство (Vector space)

Основной предмет изучения линейной алгебры

- Рассмотрим некоторое множество элементов V. Помимо того, что в нем просто живут абстрактные элементы, зададим там бинарные операции.
- Сложение. Любым двум элементам из множества V ставится в соответствие третий:

$$\forall x,\, y \in \mathbb{V}: \quad x \oplus y = w,\, w \in \mathbb{V}.$$

- Умножение на скаляр. Любой паре элементов из $\mathbb{V}$ и $\mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент из V:

$\alpha \otimes x = w,\ w \in \mathbb{V}$

$$\forall x \in \mathbb{V},\, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad x \otimes y = w,\, w \in \mathbb{V}.$$

$\boxed{\mathbb{V}, \mathbb{R}, \oplus, \otimes}$

$\mathbb{V}$ - vector space.

Векторное пространство

Примеры векторных пространств

Coordinate space. Множество последовательностей длины n, частным случаем которых являются геометрические векторы.

$\mathbb{R}^2$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \; a \in \mathbb{R}^n$$

$n=2$

$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$a+b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$a \cdot 10 = 10 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

Векторное пространство

Примеры векторных пространств

- Множество матриц $n \times m$.

$\mathbb{R}^{n \times m}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$-2 \cdot A = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 4 & -14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

Векторное пространство

Примеры векторных пространств

- Множество матриц $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Множество полиномов (Что? Да!) фиксированной максимальной степени.

$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1, \ g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$$
$$f(x) + g(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$$
$$\alpha \in \mathbb{R} : \ \alpha f(x) = (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1)$$

$\mathbb{R}[x, n] : \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 x^0\}$

Линейная комбинация

- С помощью определенных выше операций мы можем комбинировать элементы векторного пространства.

Линейная комбинация

- С помощью определенных выше операций мы можем комбинировать элементы векторного пространства.
- Предположим, мы вытащили набор векторов $v_1, \dots, v_m$ из $\mathbb{V}$, и набор скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ из $\mathbb{R}$.

$\alpha_1 v_1 \in \mathbb{V}$

$\alpha_2 v_2 \in \mathbb{V}$

$\underbrace{\alpha_1 v_1}_{c_1 \in \mathbb{V}} + \underbrace{\alpha_2 v_2}_{c_2 \in \mathbb{V}} = g \in \mathbb{V}$

Линейная комбинация

- С помощью определенных выше операций мы можем комбинировать элементы векторного пространства.
- Предположим, мы вытащили набор векторов $v_1, \ldots, v_m$ из $\mathbb{V}$, и набор скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из $\mathbb{R}$.
- *Линейная комбинация* группы векторов - новый вектор, построенный в виде:

$$x = \underbrace{\alpha_1 v_1}_{c_1} + \ldots + \underbrace{\alpha_m v_m}_{c_m}, \; x \in \mathbb{V}.$$

$\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 26 \\ -8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Линейная оболочка

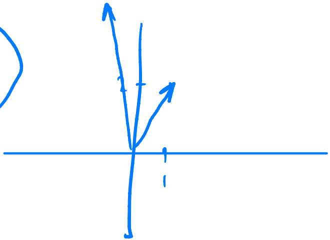
Множество всех-всех возможных линейных комбинаций, полученных из зафиксированного набора векторов $v_1, \ldots, v_m$, назовем *линейной оболочкой* этого набора и обозначим:

$$\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m : a_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Линейная оболочка

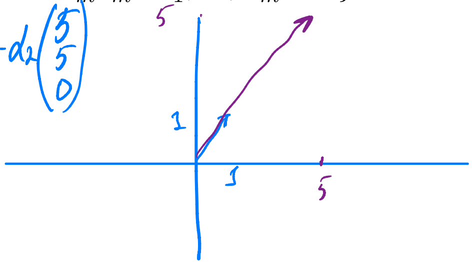
Множество всех-всех возможных линейных комбинаций, полученных из зафиксированного набора векторов $v_1, \dots, v_m$, назовем *линейной оболочкой* этого набора и обозначим:

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m : a_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\mathbb{R}^{3\times2}$

Линейная оболочка

$B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{3\times2}$

$$\boxed{\alpha_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_1} + \alpha_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B_2}}$$

Множество всех-всех возможных линейных комбинаций, полученных из зафиксированного набора векторов $v_1, \dots, v_m$, назовем *линейной оболочкой* этого набора и обозначим:

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m : a_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

Линейная зависимость

Мотивация

- Рассмотрим набор векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$, заранее извлеченных из $\mathbb{V}$, и произвольный набор скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из $\mathbb{R}$. В результате построения линейной комбинации получим некий элемент $x \in \mathbb{V}$:

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$$

Линейная зависимость

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

Мотивация

- Рассмотрим набор векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$, заранее извлеченных из $\mathbb{V}$, и произвольный набор скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из $\mathbb{R}$. В результате построения линейной комбинации получим некий элемент $x \in \mathbb{V}$:

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$$

- Уникален ли такой набор $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ или, может, существует другой набор $\{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n\}$ такой, что:

$$x = \tilde{\alpha}_1 v_1 + \ldots + \tilde{\alpha}_m v_m.$$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \alpha_1 = 2, \ \alpha_2 = 3 \quad 2\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$

$5\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \end{pmatrix}$

Линейная зависимость

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = \underset{\gamma_1}{(\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)}v_1 + \underset{\gamma_2}{(\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)}v_2 + ... + \overset{\gamma_m}{(\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)}v_m$$

$$= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + ... + \gamma_m v_m$$

Линейная зависимость

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + ... + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m$$
$$= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + ... + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления x теперь изменилась к задаче ``как получить элемент 0" в результате линейной комбинации.

Линейная зависимость

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \ldots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m$$
$$= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления x теперь изменилась к задаче ``как получить элемент 0" в результате линейной комбинации.

- Если единственный возможный вариант получить $\mathbf{0}$ это положить все $\gamma_i = 0$:

$$\forall i : (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) = 0 \rightarrow \alpha_i = \tilde{\alpha}_i.$$

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Что будет означать, что представление x уникально.

$$\gamma_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = -2\gamma_1$$

Линейная зависимость

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \ldots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m$$
$$= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления x теперь изменилась к задаче ``как получить элемент 0'' в результате линейной комбинации.

- Если единственный возможный вариант получить **0** это положить все $\gamma_i = 0$:

$$\forall i: \ (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) = 0 \rightarrow \alpha_i = \tilde{\alpha}_i.$$

  Что будет означать, что представление x уникально.

- Если есть какой-то другой способ получить **0**, т.е. хотя бы один $\gamma_k \neq 0$, значит $(\alpha_k - \tilde{\alpha}_k) \neq 0 \rightarrow \alpha_k \neq \tilde{\alpha}_k$. Что означает, что представление x не уникально - существует другой набор коэффициентов.

Линейная независимость

$\{v_1 \ldots v_m\}$

Определение

Мы назовем набор векторов *линейно независимым*, если единственная возможность получить элемент $\mathbf{0}$ как результат линейной комбинации:

$$\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_m v_m = \mathbf{0},$$

это положить все скаляры равными 0, $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 0$. (Также называется *тривиальной комбинацией*).

$\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\gamma_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$

Линейная зависимость

$\mathbb{R}^4$

$$\left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 10^6 \\ 10^9 \\ -5 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 v_3 + 100 v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Определение

С другой стороны, мы назовем набор векторов *линейно зависимым*, если **существует** нетривиальная комбинация коэффициентов $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, (не равные 0 одновременно), такая что:

$$\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_m v_m = \mathbf{0}.$$

$\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Базис

Базис

Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства V тогда и только тогда, когда $\boxed{\textit{любой}}$ вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$\boxed{x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.}$$

Базис

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Определение

- Набор векторов $v_1, \ldots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства V тогда и только тогда, когда *любой* вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты $\boxed{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$ мы называем *координатами* вектора x в базисе $(v_1, \ldots, v_n)$.

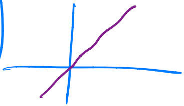
Базис

Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства V тогда и только тогда, когда *любой* вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мы называем *координатами* вектора x в базисе $(v_1, \dots, v_n)$.
- Немного иначе: набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства V тогда и только тогда, когда этот набор векторов линейно независим и $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{V}$, то есть мы можем `дотянуться' до любого элемента из $\mathbb{V}$.

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\3\end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3$

Базис. Примеры.

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$ коорд. пр-ва

$\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \boxed{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \boxed{1}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

x

$$[x] = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}$$

$$[x]_B = \begin{pmatrix}1/4\\1/10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$C = \left\{\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[x]_C = \begin{pmatrix}1/2\\-1\end{pmatrix}$$

Базис. Примеры.

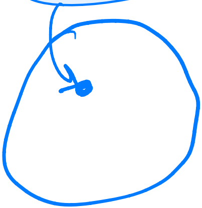
$\mathbb{R}[x,2]$

$I = \{x^2, x, 1\}$

$g = 2x^2+4x-2$

$2x^2+4x-2 = 2\cdot x^2 + 4x + (-2)1$

$[g]_I = \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}$



$B = \{2x^2, 20x, 10\}$

$2x^2+4x-2 = 1\cdot 2x^2 + \frac{1}{5}\, 20x + \left(-\frac{1}{5}\right)10$

$$\boxed{[g]_B = \begin{pmatrix}1\\1/5\\-1/5\end{pmatrix}}$$

Базис. Примеры.

$$\mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

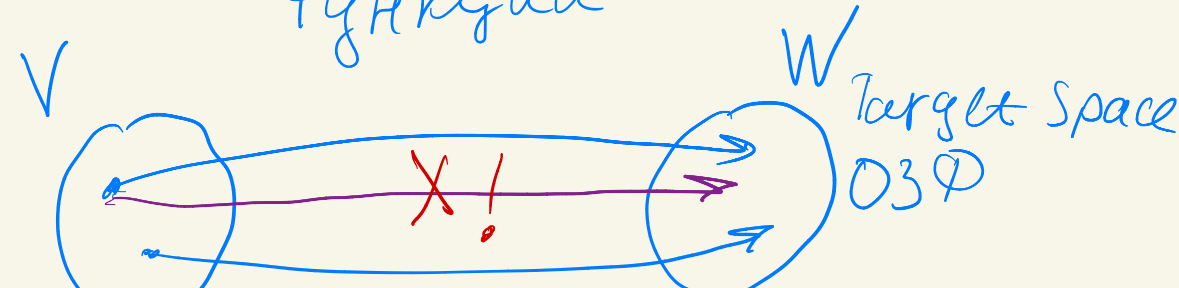
$$[A]_I = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

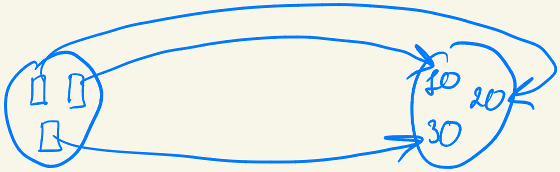
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \right\}$$

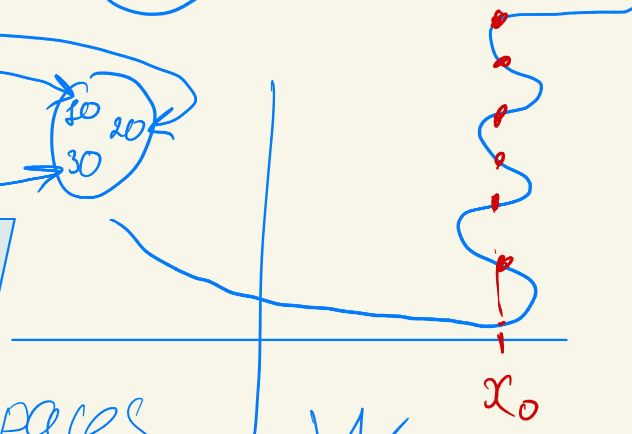
$$[A]_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \\ 2 \\ 1/10 \end{bmatrix}_B$$

Функции



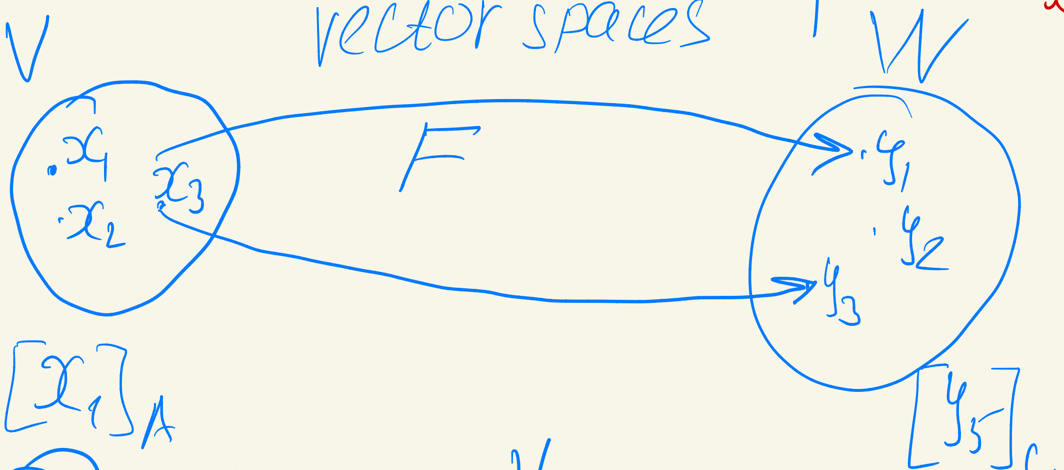
Domain
ООФ





$$\boxed{\exists x \in V \ \exists! \, y \in W}$$

vector spaces



(1) $\forall x_1, x_2 \in V$

$$F(x_1 + x_2) = F(x_1) + F(x_2)$$

(2) $$F(\alpha x) = \alpha \cdot F(x)$$

Если 1,2 выполнено:

$$\boxed{F \text{ - линейное преобр.}}$$

Ex

$$V=\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi(x)} W=\mathbb{R}^2$$

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}2x_1\\x_2\end{pmatrix}, \quad \varphi\in W$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$\varphi(x)$ - линейно?

$X\in V$

1) $a\in V$, $b\in V$ $\qquad \varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$

$$\varphi(a)=\begin{pmatrix}2a_1\\a_2\end{pmatrix}, \quad \varphi(b)=\begin{pmatrix}2b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

$$\varphi(a+b)=\begin{pmatrix}2(a_1+b_1)\\a_2+b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_1+2b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2b_1\\b_2\end{pmatrix} \checkmark$$

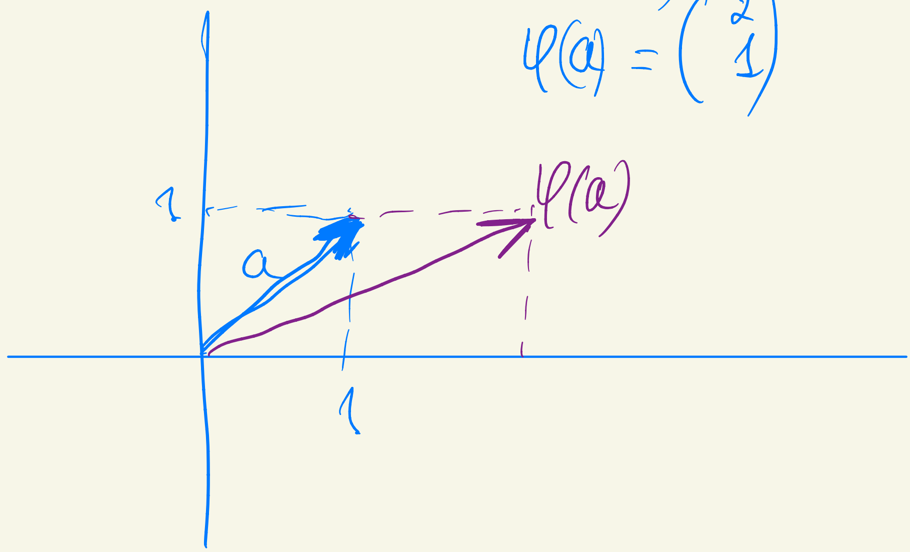
2. $\varphi(\lambda \cdot a) = \begin{pmatrix} 2\lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$ ✓

$\lambda \cdot a = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$

$\parallel$

$\lambda \cdot \varphi(a) = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$

$\varphi(a) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$V \xrightarrow{\text{Identity}} W(=V)$$

B базис $\qquad$ C базис

$$\varphi(X) = X \qquad X_1 + X_2 = X_3$$

$$\varphi(X_1 + X_2) = \varphi(X_1) + \varphi(X_2)$$

$$X_1 + X_2 = X_1 + X_2$$

$$\varphi(\alpha X) = \alpha \varphi(X)$$

$$\alpha \cdot X = \alpha \cdot X$$

$\forall x \in V$ $\qquad$ $B = \{v_1, v_2\}$

$C = \{c_1, c_2\}$

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$$

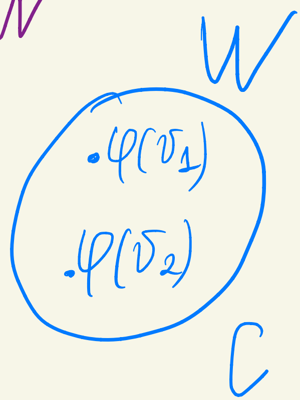
$$\varphi(x) = \varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$$

$$= \varphi(\alpha_1 v_1) + \varphi(\alpha_2 v_2) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \underbrace{\boxed{\varphi(v_1)}}_{t_1 \;\in W} + \alpha_2 \cdot \underbrace{\boxed{\varphi(v_2)}}_{t_2 \;\in W}$$

$$t_1 = \gamma_{1_1} c_1 + \gamma_{1_2} c_2$$

$$t_2 = \gamma_{2_1} c_1 + \gamma_{2_2} c_2$$



$$=$$

$$= \alpha_1 (\gamma_{11} c_1 + \gamma_{12} c_2) + $$

$$+ \alpha_2 \cdot (\gamma_{21} c_1 + \gamma_{22} c_2) =$$

$$= \underline{(\alpha_1 \gamma_{11} + \alpha_2 \gamma_{21})} \cdot \boxed{c_1} +$$

$$+ \underline{(\alpha_1 \gamma_{12} + \alpha_2 \gamma_{22})} \cdot \boxed{c_2} =$$

$$= \varphi(x)$$

$$[\varphi(x)]_C = \begin{bmatrix} \alpha_1 \gamma_{11} + \alpha_2 \gamma_{21} \\ \alpha_1 \gamma_{12} + \alpha_2 \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{21} \\ \gamma_{12} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = [\varphi(x)]_C$$

$$[\varphi(v_1)]_C \quad [\varphi(v_2)]_C \quad [X]_B$$

$$V \xrightarrow{Id(x) = \varphi(x)} W\,(=V)$$

$\mathbb{R}^2$ $\qquad\qquad$ $\mathbb{R}^2$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$B = \{ v_1, v_2 \}$

$$L = \left([v_1]_S \;\middle|\; [v_2]_S \right)$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\varphi(v_1) = v_1$

$\varphi(v_2) = v_2$

$[v_1]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$[v_2]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi(x)]_S = \boxed{[x]_S = B \cdot [x]_B}$$

$$[x]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 2 + 5 \cdot 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 12 \\ 22 \end{pmatrix}}_{[x]_S}$$

$$V \xrightarrow{\varphi(x)\ -\ \text{линейное}} W$$

B-базис $\qquad$ C-базис

$$y = \varphi(x)$$

$$[y] = A_\varphi [x]$$

$$[y]_C = T_\varphi \cdot [x]_B$$

?

$$[y] = C\,[y]_C$$

$$[x] = B \cdot [x]_B$$

$$\boxed{C \cdot [y]_c = A_\varphi \cdot B [x]_B}$$

$$[y]_c = T_\varphi \cdot [x]_B$$

$$\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A^{-1}$$

$$A A^{-1} = A^{-1} A =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & & 0 & \\ & 1 & & & & & 0 \\ 0 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ 0 & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & 1 & \\ & & 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$5x = 1$$

$$x = 1/5$$

$$1 \xrightarrow{(5)^{-1}} 5x = (5)^{-1} 1$$

$$x = 1 \cdot (5)^{-1} = 1/5$$

$$\cancel{C^{-1}C} \cdot [y]_C = C^{-1} A_\varphi \cdot B \cdot [x]_B$$

$$[y]_C = T_\varphi [x]_B$$

$$[y]_C = C^{-1} A_\varphi \cdot B \, [x]_B$$

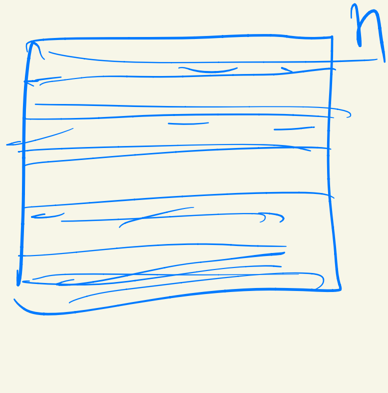
$$T_\varphi$$

$$\boxed{T_\varphi = C^{-1} A_\varphi B}$$

матр

разложение

A



n^2

n

A_φ

B - ?

C - ?

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & & \\ 0 & \ddots & 0 & \\ & 0 & \ddots & 0 \\ & & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$