# Теоретический минимум для ML

## Линейное пространство. Базис.

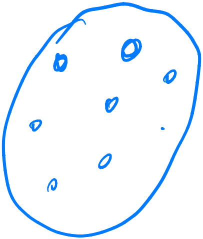
Глеб Карпов

OTUS ML Basic

# Векторное пространство (Vector space)

## Основной предмет изучения линейной алгебры

- Рассмотрим некоторое множество элементов $V$. Помимо того, что в нем просто живут абстрактные элементы, зададим там бинарные операции.



$F(x, y) \to g$

# Векторное пространство (Vector space)

## Основной предмет изучения линейной алгебры

- Рассмотрим некоторое множество элементов $V$. Помимо того, что в нем просто живут абстрактные элементы, зададим там бинарные операции.
- Сложение. Любым двум элементам из множества $V$ ставится в соответствие третий:

$V$

$$\forall x,\, y \in \mathbb{V}: \quad x \oplus y = w,\, w \in \mathbb{V}.$$

$x = 1$
$y = 2$

$x + y = 3$
$x - y = -1$

# Векторное пространство (Vector space)

## Основной предмет изучения линейной алгебры

- Рассмотрим некоторое множество элементов $V$. Помимо того, что в нем просто живут абстрактные элементы, зададим там бинарные операции.
- Сложение. Любым двум элементам из множества $V$ ставится в соответствие третий:

$$\forall x,\, y \in \mathbb{V}: \quad x \oplus y = w,\, w \in \mathbb{V}.$$

- Умножение на скаляр. Любой паре элементов из $\mathbb{V}$ и $\mathbb{R}$ ставится в соответствие элемент из $V$:

$\alpha \otimes x = w, w \in \mathbb{V}$

$$\forall x \in \mathbb{V},\, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad x \otimes y = w,\, w \in \mathbb{V}.$$

$\boxed{\mathbb{V}, \mathbb{R}, \oplus, \otimes}$

$\mathbb{V}$ - vector space.

## Примеры векторных пространств

Coordinate space. Множество последовательностей длины $n$, частным случаем которых являются геометрические векторы.

$\mathbb{R}^2$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R}^n$$

$n=2$

$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$a+b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$a \cdot 10 = 10 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \end{pmatrix}$

## Векторное пространство

### Примеры векторных пространств

- Множество матриц $n \times m$.

$\mathbb{R}^{n \times m}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$-2 \cdot A = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 4 & -14 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

# Векторное пространство

## Примеры векторных пространств

- Множество матриц $n \times m$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

- Множество полиномов (Что? Да!) фиксированной максимальной степени.

$a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, \; \alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \; g(x) = a_2 x^2 + b_2 x + c_2$$
$$f(x) + g(x) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$$
$$\alpha \in \mathbb{R} : \; \alpha f(x) = (\alpha a_1)x^2 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1)$$

$\mathbb{R}[x, n] : \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 x^0\}$

## Линейная комбинация

- С помощью определенных выше операций мы можем комбинировать элементы векторного пространства.

## Линейная комбинация

- С помощью определенных выше операций мы можем комбинировать элементы векторного пространства.
- Предположим, мы вытащили набор векторов $v_1, \dots, v_m$ из $\mathbb{V}$, и набор скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ из $\mathbb{R}$.

$$\underbrace{\alpha_1 v_1}_{c_1 \in \mathbb{V}} + \underbrace{\alpha_2 v_2}_{c_2 \in \mathbb{V}} = g \in \mathbb{V}$$

$\alpha_1 v_1 \in \mathbb{V}$

$\alpha_2 v_2 \in \mathbb{V}$

# Линейная комбинация

- С помощью определенных выше операций мы можем комбинировать элементы векторного пространства.
- Предположим, мы вытащили набор векторов $v_1, \dots, v_m$ из $\mathbb{V}$, и набор скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ из $\mathbb{R}$.
- *Линейная комбинация* группы векторов - новый вектор, построенный в виде:

$\mathbb{R}^3$

$$x = \underbrace{\alpha_1 v_1}_{c_1} + \dots + \underbrace{\alpha_m v_m}_{c_m}, \; x \in \mathbb{V}.$$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 10 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 26 \\ -8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

# Линейная оболочка

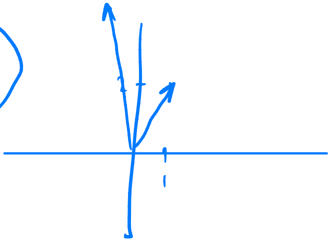
Множество всех-всех возможных линейных комбинаций, полученных из зафиксированного набора векторов $v_1, \ldots, v_m$, назовем *линейной оболочкой* этого набора и обозначим:

$$\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m : a_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$



# Линейная оболочка

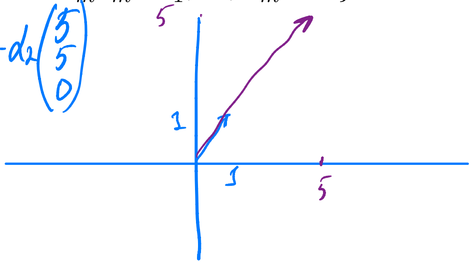
Множество всех-всех возможных линейных комбинаций, полученных из зафиксированного набора векторов $v_1, \ldots, v_m$, назовем *линейной оболочкой* этого набора и обозначим:

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m : a_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$



$\mathbb{R}^{3\times 2}$

## Линейная оболочка

$B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$$\boxed{\alpha_1 \cdot \underset{B_1}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} + \alpha_2 \cdot \underset{B_2}{\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$$

Множество всех-всех возможных линейных комбинаций, полученных из зафиксированного набора векторов $v_1, \ldots, v_m$, назовем *линейной оболочкой* этого набора и обозначим:

$$\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_m) = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m : a_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}\}.$$

# Линейная зависимость

## Мотивация

- Рассмотрим набор векторов $\{v_1, \ldots, v_m\}$, заранее извлеченных из $\mathbb{V}$, и произвольный набор скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ из $\mathbb{R}$. В результате построения линейной комбинации получим некий элемент $x \in \mathbb{V}$:

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$$

# Линейная зависимость

$\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}$ $\qquad 2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$

## Мотивация

- Рассмотрим набор векторов $\{v_1, \dots, v_m\}$, заранее извлеченных из $\mathbb{V}$, и произвольный набор скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ из $\mathbb{R}$. В результате построения линейной комбинации получим некий элемент $x \in \mathbb{V}$:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$$

- Уникален ли такой набор $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ или, может, существует другой набор $\{\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n\}$ такой, что:

$$x = \tilde{\alpha}_1 v_1 + \dots + \tilde{\alpha}_m v_m.$$

$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\qquad \alpha_1=2, \ \alpha_2=3 \qquad 2\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\0\end{pmatrix}$

$5\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}+(-3)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\0\end{pmatrix}$

## Линейная зависимость

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$\gamma_m$

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + ... + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m$$

$\gamma_1$ $\gamma_2$

$$= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + ... + \gamma_m v_m$$

## Линейная зависимость

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \ldots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m$$
$$= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления $x$ теперь изменилась к задаче ``как получить элемент 0" в результате линейной комбинации.

# Линейная зависимость

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \ldots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m$$
$$= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления $x$ теперь изменилась к задаче ``как получить элемент 0" в результате линейной комбинации.
- Если единственный возможный вариант получить **0** это положить все $\gamma_i = 0$:

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall i : (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) = 0 \to \alpha_i = \tilde{\alpha}_i.$$

Что будет означать, что представление $x$ уникально.

$$\gamma_1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2 = -2\gamma_1$$

## Линейная зависимость

- Давайте предположим, что набор не уникален, и вычтем два равенства друг из друга:

$$(x - x) = \mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)v_1 + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)v_2 + \ldots + (\alpha_m - \tilde{\alpha}_m)v_m$$
$$= \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 + \ldots + \gamma_m v_m$$

- Задача уникальности представления $x$ теперь изменилась к задаче ``как получить элемент 0'' в результате линейной комбинации.

- Если единственный возможный вариант получить **0** это положить все $\gamma_i = 0$:

$$\forall i: \; (\alpha_i - \tilde{\alpha}_i) = 0 \to \alpha_i = \tilde{\alpha}_i.$$

  Что будет означать, что представление $x$ уникально.

- Если есть какой-то другой способ получить **0**, т.е. хотя бы один $\gamma_k \neq 0$, значит $(\alpha_k - \tilde{\alpha}_k) \neq 0 \to \alpha_k \neq \tilde{\alpha}_k$. Что означает, что представление $x$ не уникально - существует другой набор коэффициентов.

## Линейная независимость

$\{v_1 \dots v_m\}$

### Определение

Мы назовем набор векторов *линейно независимым*, если единственная возможность получить элемент **0** как результат линейной комбинации:

$$\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_m v_m = \mathbf{0},$$

это положить все скаляры равными 0, $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 0$. (Также называется *тривиальной комбинацией*).

$\mathbb{R}^3$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$$

# Линейная зависимость

$$\mathbb{R}^4 \qquad \left\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -1 \\ 10^6 \\ 10^9 \\ -5 \end{pmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 100 \end{pmatrix}}, \underset{v_4}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 v_3 + 100 v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Определение

С другой стороны, мы назовем набор векторов *линейно зависимым*, если **существует** нетривиальная комбинация коэффициентов $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, (не равные 0 одновременно), такая что:

$$\gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_m v_m = \mathbf{0}.$$

$$\mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# Базис

# Базис

## Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства $V$ тогда и только тогда, когда *любой* вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$\boxed{x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.}$$

# Базис

$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

## Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства $V$ тогда и только тогда, когда *любой* вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты $\boxed{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$ мы называем *координатами* вектора $x$ в базисе $(v_1, \dots, v_n)$.

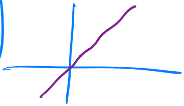
## Базис

### Определение

- Набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства $V$ тогда и только тогда, когда *любой* вектор $x \in \mathbb{V}$ может быть уникально представлен в форме линейной комбинации:

$$x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

- Соответствующие уникальные коэффициенты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ мы называем *координатами* вектора $x$ в базисе $(v_1, \dots, v_n)$.
- Немного иначе: набор векторов $v_1, \dots, v_n$ из $\mathbb{V}$ называется *базисом* пространства $V$ тогда и только тогда, когда этот набор векторов линейно независим и $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n) = \mathbb{V}$, то есть мы можем `дотянуться' до любого элемента из $\mathbb{V}$.

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}$  $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^3$

# Базис. Примеры.

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^n$ коорд. пр-ва

$\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \boxed{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \boxed{1}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$x$

$$[x] = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$B = \left\{\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}8\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{10}\begin{pmatrix}0\\10\end{pmatrix}$$

$$[x]_B = \begin{pmatrix}1/4\\1/10\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$C = \left\{\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[x]_C = \begin{pmatrix}1/2\\-1\end{pmatrix}$$

# Базис. Примеры.

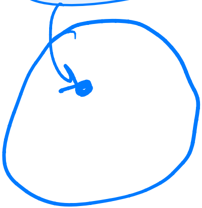
$\mathbb{R}[x,2]$

$I = \{x^2, x, 1\}$

$g = 2x^2 + 4x - 2$

$2x^2 + 4x - 2 = 2 \cdot x^2 + 4\,x + (-2)\,1$

$[g]_I = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$



$B = \{2x^2, 20x, 10\}$

$2x^2 + 4x - 2 = 1 \cdot 2x^2 + \frac{1}{5}\, 20x + \left(-\frac{1}{5}\right) 10$

$\boxed{[g]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}}$

# Базис. Примеры.

$$\mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A]_I = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 16 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[A]_B = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \\ 2 \\ 1/10 \end{bmatrix}_B$$