Теоретический минимум для ML

Матрицы. Основные понятия и операции.

Глеб Карпов

OTUS ML Basic

Основные разделы математики для ML и DA

- Линейная алгебра: язык оперирования с данными, предоставляет нам инструменты для преобразования данных с целью упрощения их последующего анализа, инструменты для сжатия данных и более компактного хранения.

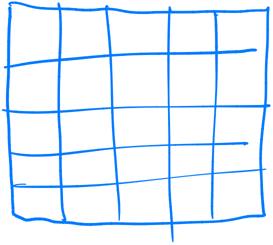
Основные разделы математики для ML и DA

- Линейная алгебра: язык оперирования с данными, предоставляет нам инструменты для преобразования данных с целью упрощения их последующего анализа, инструменты для сжатия данных и более компактного хранения.
- Теория вероятностей и статистика: выявление закономерностей в данных, выявление общих характеристик из ограниченного набора данных, важные инструменты для аналитики данных.

Основные разделы математики для ML и DA

- Линейная алгебра: язык оперирования с данными, предоставляет нам инструменты для преобразования данных с целью упрощения их последующего анализа, инструменты для сжатия данных и более компактного хранения.
- Теория вероятностей и статистика: выявление закономерностей в данных, выявление общих характеристик из ограниченного набора данных, важные инструменты для аналитики данных.
- Математический анализ (оптимизация): главные концепции для обучения моделей, знание которых позволяет более гибко настраивать процессы обучения. Обычно спрятан ``под капотом" у известных ML-пакетов, и на первых этапах может не очень активно требоваться.

Матрица



$n \times m$ чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$A_{n\times m}$

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$

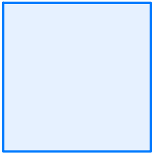
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2+1i \\ 2-1i & 0+4i \end{pmatrix};$$

$D \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A \in \mathbb{N}^{2\times 2}$$

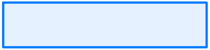
$$\begin{pmatrix} \pi & \sin(60) \\ 0 & -\ln_{10} 30 \end{pmatrix} \quad B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Матрица



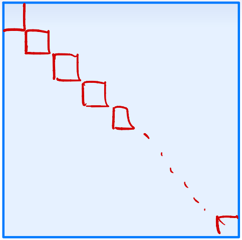
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; квадратная

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $n > m$; прямоуг.



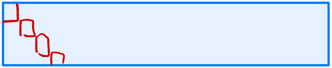
$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $m > n$, прямоуг

Матрица



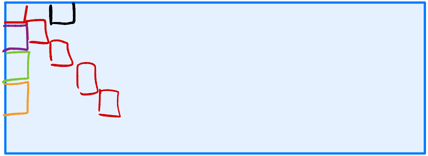
$\{a_{ij} : \ i=j\}$

Гл. диагональ



Матрица

$B = A^T$



$B = A^T$

A

$a_{12} \to b_{21}$

$a_{13} \to b_{31}$

$a_{14} \to b_{41}$

$a_{31} \to b_{13}$

$a_{ii} \to b_{ii}$

$$\boxed{b_{ij} = a_{ji}}$$

$(A^T)^T = A$

Матрица

Операции:

1\. $+$ $\quad A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad \exists C = A + B$

$B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad \forall i,j \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

2\. умножение на скаляр

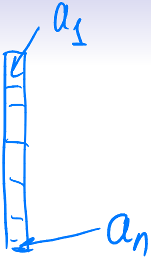
$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ $\quad \exists D = d \cdot A$

$d \in \mathbb{R}$ $\quad \forall i,j \quad d_{ij} = d \cdot a_{ij}$

Ex. $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ -12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Вектор

$a \in \mathbb{R}^{n \times 1}$; $a \in \mathbb{R}^{n}$



1. $+$ $\quad a \in \mathbb{R}^{n}$, $b \in \mathbb{R}^{n}$ $\quad \exists\; c = a + b$; $c \in \mathbb{R}^{n}$

2. $\times \alpha$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^{n}$ $\quad \exists\; d = \alpha \cdot a$; $d \in \mathbb{R}^{n}$

$a^{T} =$

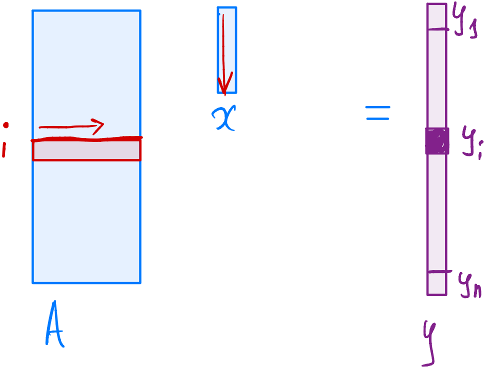
Умножение матрицы на вектор

$A \in \mathbb{R}^{n\times m}$

"матвек"

$x \in \mathbb{R}^{m}$

$\exists\, y \in \mathbb{R}^{n} : y = A\cdot x$



$$y_i = a_{i1}\cdot x_1 + a_{i2}\cdot x_2 + \dots = \boxed{\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, x_j}$$

$$N_{op} = \left(m_{mult} + (m-1)_{add}\right)\cdot n = (mn)_{mult} + n\cdot(m-1)_{add}$$

Умножение матрицы на вектор

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

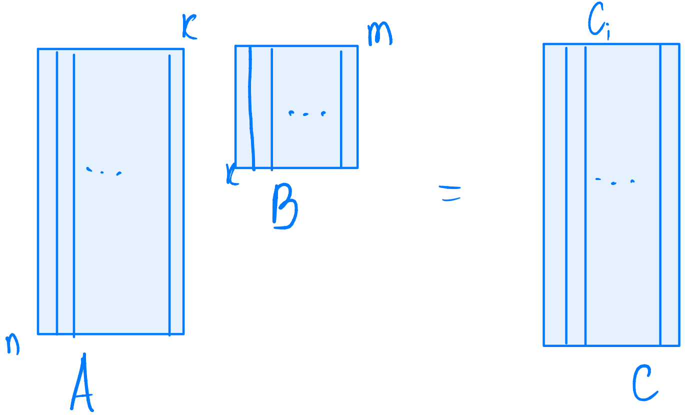
$$y_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3$$

$$y = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на матрицу

$$A \in \mathbb{R}^{n\times k},\quad B \in \mathbb{R}^{k\times m} \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}^{n\times m}:\ C = AB$$

$$\boxed{C_i = A \cdot B_i}$$



$$N_{op} = m(nk + n(k-1))$$

Умножение матрицы на матрицу

$$AB \neq BA$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $\quad A \cdot B$ ✓ $\quad (n \times m)\ (m \times n) = C_{n \times n}$

$B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\quad B \cdot A$ ✓ $\quad (m \times n)\ (n \times m) = D_{m \times m}$

Произведения векторов

1 Скалярное (inner product)

$a \in \mathbb{R}^n$

$b \in \mathbb{R}^n$

$$\langle a, b \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n b_n =$$

$$= \sum a_i \cdot b_i$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + \ldots + a_n b_n = \sum a_i \cdot b_i$$

$$= a^T b$$

$$\boxed{\begin{gathered} \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle \\ a^T b = b^T a \end{gathered}}$$

$$\boxed{\langle a, b \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cdot \cos(a, b)}$$

Произведения векторов

2. outer product

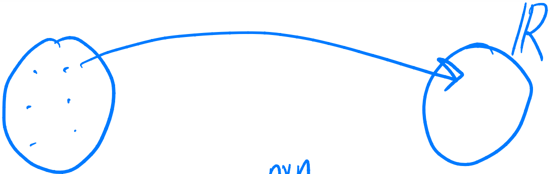
$a \in \mathbb{R}^n$

$b \in \mathbb{R}^k$

$$ab^T = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{n \times 1} \underbrace{\begin{bmatrix} & & & \end{bmatrix}}_{(1 \times k)} = \begin{array}{c|c} & k \\ \hline n & \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \\ & & \dots \\ a_n b_1 & & \end{bmatrix} \end{array}$$

$$ba^T = \underbrace{\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}}_{k \times 1} \underbrace{\begin{bmatrix} & & & \end{bmatrix}}_{1 \times n} = \underbrace{\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \end{bmatrix}}_{k \times n}$$

Определитель



$\mathbb{R}^{n\times n}$

$F: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$

1. $A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ $\qquad \det(A) = a_{11}$

2. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad \det(A) = a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12}$

$A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$[(a)\ (b)]$

$|\det(A)| = S_{ab}$

Определитель

3. $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$